



|              |                                                                             |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| Title        | Möbiusの函数について                                                               |
| Author(s)    | 林, 勲男                                                                       |
| Citation     | 全国紙上数学談話会. 1949, 2(14), p. 502-505                                          |
| Version Type | VoR                                                                         |
| URL          | <a href="https://doi.org/10.18910/75286">https://doi.org/10.18910/75286</a> |
| rights       |                                                                             |
| Note         |                                                                             |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

## 152. Möbius の函数について

林 勲 男 (1949.4.12)

Möbiusの函数は 整放論では 正整数  $n$  に対し

$$\begin{aligned}\mu(n) &= 1 & n &= 1 \\ &= 0 & n &\text{が素数の平方で割切れる時} \\ &= (-1)^k & n &\text{が } k \text{ 個の相異なる素数の積の時}\end{aligned}$$

で定義され、又一般に最小元 0 を有し、有限個の元からなる準順序集合  $L$  上では

$$\begin{aligned}\mu(0) &= 1 \\ \mu(x) &= -\sum_{y \leq x} \mu(y)\end{aligned}$$

で定義されてゐる (G. Birkhoff: *Lattice Theory* p. 32) が、以下では前記の性質を収めてこの函数を定義し、その二、三の性質を示すことを目的とする。

§ 1.  $L$  を  $S$  組の元からなる準順序集合とする時、二変数の函数  $\varepsilon_y^x; x, y \in L$  を

$$\begin{aligned}\varepsilon_y^x &= 1 && (x \geq y \text{ の時}) \\ \varepsilon_y^x &= 0 && (x \not\geq y \text{ の時})\end{aligned} \quad \text{で定義する.}$$

$(\varepsilon_y^x)$  は  $S$  次の行列と考へられ、その行列式は

$$|(\varepsilon_y^x)| = \frac{1}{S!} \sum \pm \varepsilon_{y_1}^{x_1} \varepsilon_{y_2}^{x_2} \cdots \varepsilon_{y_S}^{x_S}$$

右辺の  $\sum$  は  $L$  の元全部から作られる順列  $(x_1, x_2, \dots, x_S), (y_1, y_2, \dots, y_S)$  のすべてについての和であり、次の  $\pm$  は、この二つの順列が互に偶置換で移り得るか否かに従つて  $+$  又は  $-$  をとるのであるが、この中で 0 と異なるものは  $x_1 \geq y_1, x_2 \geq y_2, \dots, x_S \geq y_S$  であるもののみであり、向もこれは  $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_S = y_S$  の時に限つて起ることがわかるから

$$|(\varepsilon_y^x)| = 1$$

故に整数を元素とする  $(\varepsilon_y^x)$  の逆行列が存在する。これを  $(\mu_y^x)$  で表せば

$$\sum_{z \in L} \varepsilon_z^x \mu_y^z = \sum_{z \in L} \mu_z^x \varepsilon_y^z = \delta_y^x$$

(但し  $\delta_y^x$  は  $x = y$  の時 1,  $x \neq y$  の時 0)

尚詳しく聞れば  $x \geq y$  ならば  $\mu_y^x = 0$  が知られるから 結局

$$\sum_{x \geq z \geq y} \mu_y^x = \sum_{x \geq z \geq y} \mu_z^x = \delta_y^x \quad (*)$$

を得る。

§2. 最大元, 最小元を有し, 有限個の元よりなる すべての準順序集合の集合を  $\mathcal{L}$  とする.

$L \in \mathcal{L}$  に対し, §1 で考へた行列を

$E(L) = (\varepsilon_{xy}^L(L)), \quad M(L) = (\mu_{xy}^L(L))$  と表はすことにし, 之を使つて  $\mathcal{L}$  上の Möbius の函数  $\mu(L)$ ,  $L \in \mathcal{L}$  を

$$\mu(L) = \mu_0^L(L) \quad \text{で定義する}$$

但し  $1, 0$  は  $L$  の最大元, 最小元である.

$L$  の同型なる元に対し,  $\mu$  が等しい値をとることは明らかであるが

(i)  $L$  の双対  $L'$  に対して  $\mu(L) = \mu(L')$

(ii)  $L_1, L_2$  の直積を  $L_1 \cdot L_2$  で表はせば

$$\mu(L_1 \cdot L_2) = \mu(L_1) \cdot \mu(L_2)$$

(iii)  $L \ni a, b \quad a \geq b$  に対し

$$\sum_{a \geq z \geq b} \mu(z/b) = \sum_{a \geq z \geq b} \mu(a/z) = \delta_a^b$$

$$\text{但し,} \quad a/b \equiv \{z; a \geq z \geq b\}$$

証明. (i)  $\varepsilon_{xy}^{L'}(L') = \varepsilon_{yx}^L(L)$  であるから,  $E(L')$  は  $E(L)$  を転置したもの, 従つて,  $M(L')$  は  $M(L)$  を転置したものであり,

$$\text{従つて} \quad \mu_1^{L'}(L') = \mu_0^L(L)$$

$0, 1$  は元々  $L'$  の最大元, 最小元となるから, 左辺は  $\mu(L')$

又右辺は  $\mu(L)$ .

(ii)  $L_1 \ni x_1, y_1, \quad L_2 \ni x_2, y_2, \quad L_1 \cdot L_2 \ni x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2$  とす.  
 $\varepsilon_{y_1}^{x_1}(L_1) \cdot \varepsilon_{y_2}^{x_2}(L_2)$  を考へれば, 之は  $x_1 \geq y_1$  且つ  $x_2 \geq y_2$  の時のみ 1 で, 他の場合は 0 であるから,

$$\varepsilon_{y_1 \cdot y_2}^{x_1 \cdot x_2}(L_1 \cdot L_2) = \varepsilon_{y_1}^{x_1}(L_1) \cdot \varepsilon_{y_2}^{x_2}(L_2)$$

故に  $E(L_1 \cdot L_2) = E(L_1) \times E(L_2)$  (Kronecker 積)

逆行列に移れば

$$M(L_1 \cdot L_2) = M(L_1) \times M(L_2)$$

故に  $\mu_{\varphi_1 \varphi_2}^{x_1 x_2}(L_1, L_2) = \mu_{\varphi_1}^{x_1}(L_1) \cdot \mu_{\varphi_2}^{x_2}(L_2)$

こゝで  $x_1(x_2)$ ,  $\varphi_1(\varphi_2)$  を夫々  $L_1(L_2)$  の最大元, 最小元にとれば 証明すべき式を得る.

(iii) は 詳細は略すが (ii) からわかる.

例 正整数  $n$  に対し  $n$  のすべての約数  $m$  (正) の作る 準順序集合を  $[n] \equiv \{m; n \geq m\}$  で表わす.

$n = n_1 \cdot n_2$  で  $n_1, n_2$  が互に素ならば

$[n] = [n_1] \cdot [n_2]$  (直積) であり 又 素数  $p$  に対しては

$$\begin{aligned} \mu([p^r]) &= -1 & r=1 \\ &= 0 & r=\geq 2. \end{aligned} \quad \text{が すぐに判る.}$$

(ii) によって, 最初の  $\mu(n)$  の定義と同じものが出る事がわかる.

(April '49)