



Title	共軛計量Riemann空間に就いて [VII]
Author(s)	田畑, 不二夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1949, 2(15), p. 510-514
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75290
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

155. 共軌計量 Riemann 空間に就て (VII)

京都師範 田畑 不二夫

□8.2. 更めて $F(u^\lambda, \dot{u}^\lambda) \equiv F(\frac{du^\lambda}{dt} \equiv \dot{u}^\lambda, t : \text{parameter},$
 $F : \dot{u}^\lambda$ に関する m 次同次式) と $\frac{\partial F}{\partial \dot{u}^\lambda}(u^\lambda, \dot{u}^\lambda) = C p_\lambda, G(u^\lambda, p_\lambda) = 0$
 より $\frac{\partial G}{\partial p_\lambda} = \frac{\partial F}{\partial \dot{u}^\lambda} \frac{\partial \dot{u}^\lambda}{\partial p_\lambda}$ ($m \neq 1$ とすれば) $= \frac{1}{m-1} \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}^\lambda \partial \dot{u}^\mu} \dot{u}^\mu \frac{\partial \dot{u}^\lambda}{\partial p_\lambda}$ (更に
 $\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}^\lambda \partial \dot{u}^\mu} \frac{\partial \dot{u}^\mu}{\partial p_\lambda} = S_{\lambda\mu} C$ を用いて) $= \frac{C}{m-1} \dot{u}^\lambda \cdots \times \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}^\lambda \partial \dot{u}^\mu} \frac{\partial \dot{u}^\mu}{\partial p_\lambda} = \frac{\partial C}{\partial \dot{u}^\mu} p_\mu$
 を用いて) $= \frac{\partial F}{\partial u^\lambda} + \frac{1}{m-1} (\frac{\partial C}{\partial u^\lambda} p_\lambda - \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}^\lambda \partial u^\lambda}) \dot{u}^\lambda = \frac{1}{m-1} \frac{\partial F}{\partial u^\lambda} + \frac{1}{m-1}$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u^\lambda} p_\lambda - \frac{\partial F}{\partial u^\lambda} \frac{\partial F}{\partial u^\lambda}\right) \dot{u}^\lambda = \frac{-1}{m-1} \frac{\partial F}{\partial u^\lambda} + \frac{1}{m-1} \frac{\partial F}{\partial u^\lambda} p_\lambda \dot{u}^\lambda = \frac{-1}{m-1} \frac{\partial F}{\partial u^\lambda} \\ + \frac{m}{m-1} \frac{\partial C}{\partial u^\lambda} \frac{F}{C} = (F=0 \text{ を用いて}) \frac{\partial F}{\partial u^\lambda} \frac{-1}{m-1} \quad \text{以上を } d u^\lambda / \frac{\partial C}{\partial p_\lambda} \\ = -d p_\lambda / \frac{\partial C}{\partial u^\lambda} \quad (\square 8.) \text{ に用いれば } \frac{d u^\lambda}{C \dot{u}^\lambda} = \frac{d p_\lambda}{\partial F / \partial u^\lambda} \therefore \frac{d p_\lambda}{d t} = \frac{\partial F}{\partial u^\lambda} \\ \frac{\partial F}{\partial u^\lambda} \text{ 之に } p_\lambda = \frac{\partial F}{\partial u^\lambda} \frac{1}{C} \text{ を用いて結局 } F=0 \text{ 条件下の測地曲線の方程式}$$

$$\text{として (1) } \dots = \left(\frac{d}{d t} \frac{\partial F}{\partial u^\lambda} - \frac{\partial F}{\partial u^\lambda} \right) / \frac{\partial F}{\partial u^\lambda} = \dots, F=0 \text{ を得る. (之は}$$

$m-1$ なるときも成立す $\therefore F^2 \equiv \bar{F}$ と置けば $\bar{m}=2$ なる故 $\bar{F}$ に
対する (1) を得之より F に対する (1) を導く事が出来るからである)

$$\square 8.3. \sqrt[n]{F(u^\lambda, d u^\lambda)} = d\sigma \text{ を用いれば (1) は (2) } \frac{d}{d\sigma} \frac{\partial F}{\partial u^\lambda} \\ - \frac{\partial F}{\partial u^\lambda} = 0, F=0 \left(\bar{F} \equiv F(u^\lambda, u^\lambda), u^\lambda \equiv \frac{d u^\lambda}{d\sigma} \right) \text{ なる零測地} \\ \text{線型を採る. 茲 (1) の左辺を } f(t) \text{ と置いて } \frac{(m-1)\bar{f}}{\bar{f}} = f(t) \text{ なる } \sigma \text{ を}$$

parameter とに採れば $m \neq 1$ なるときは (1) は (2) の形を採り (2) の
両辺に u^λ を微分すれば $F = \text{定数}$ となる. 然るに $F \equiv F(u^\lambda, u^\lambda) \Rightarrow$
 $\frac{F(u^\lambda, d u^\lambda)}{(d\sigma)^m}$ なる事を採用すれば $d\sigma = \sqrt[n]{F(u^\lambda, d u^\lambda)}$ とすれば好い事

が判る. ($m=1$ のときは $\bar{F} \equiv F$ と置いて之に代する (2) の式から F に
対する (2) を導く事が出来る)

$$\square 24.3. n=1 \text{ を用いれば } \frac{d}{d t} \frac{\partial n}{\partial \dot{u}^\lambda} - \frac{\partial n}{\partial u^\lambda} = \frac{\partial n}{\partial t} \frac{\partial n}{\partial \dot{u}^\lambda} \text{ となるが.}$$

之は $\square 8, 2.$ に於ける $F = n(u^\lambda, \dot{u}^\lambda) - \dot{u}^0, \dot{u}^0 = 1$ とした場合に当
つてゐる.

$$\square 39. S_{\ell m}^n \equiv \frac{\partial S_{\ell m}^n}{\partial t} = (\text{Tensor})_{\ell m}^n \text{ であつて Levi-Civita の}$$

平行性が 時間 t の経過に対して保存される爲の完全条件は $\underline{S_{\ell m}^n} = 0$ なる事で
ある ($\square 39.2.$).

$$\text{従つて Tensor } \underline{S_{\ell m p}^n} \equiv \frac{\partial}{\partial t} S_{\ell m p}^n = 0 \text{ は その必要條件である.}$$

$$\square 35.2. A_{m p}^{\ell} = S_{m p}^{\ell} + \frac{1}{2} S^{\ell a} \left(\frac{\partial U_m}{\partial u^a} - \frac{\partial U_a}{\partial u^m} \right) \dot{t}_0 \text{ として}$$

$$-\frac{\delta - U_a}{\delta t} = \frac{\partial - U_a}{\partial t} - A_{\ell 0}^a (-U_a) \text{ に } \frac{\partial S_{\ell m}^n}{\partial t} + U_{\ell ; m} + U_m ; \ell = 0$$

を用いれば $= -\frac{\partial U_{\ell}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial S^{\ell a} U_a U_{\ell}}{\partial u^{\ell}}$ となり 是は U^{λ} に附随する

座標基底空間 $\mathcal{H}$ より見た固有座標 (流体力) の加速度を表してある。

$$\square 6.3.1.2. \quad \mathcal{D}_U \equiv \mathcal{D} = \frac{d}{dt} = \frac{dx^\lambda}{dt} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} = U^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \quad \text{とすれば}$$

$$\mathcal{D}(S_{\ell m} V^\ell V'^m) = \left(\frac{\partial S_{\ell m}}{\partial x^\lambda} U^\lambda + S_{\ell \alpha} \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\lambda} + S_{m\alpha} \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\lambda} \right) V^\ell V'^m$$

$$\equiv A_{\ell m} V^\ell V'^m \quad (\times A_{\ell m} = \frac{\partial S_{\ell m}}{\partial t} + U_{\ell ; m} + U_{m ; \ell} ; \text{ここで } U^\lambda = \dot{x}^\lambda)$$

の時 $A_{\ell m} = S_{\ell m} \equiv \frac{\partial S_{\ell m}}{\partial t}$) であって 長さの変化 関数 $(\sqrt{S_{\ell m} V^\ell V'^m})$

$$= \frac{1}{2} A_{\ell m} V^\ell V'^m / \sqrt{S_{\ell m} V^\ell V'^m} \quad \text{一般に } S_{\ell m} V^\ell V'^m \text{ の函数の形の}$$

Scalar の変化 数は $S_{\ell m} V^\ell V'^m, A_{\ell m} V^\ell V'^m$ の函数の形となり

演算 $\mathcal{D}$ は恰かも V^ℓ, V'^ℓ を定数と見た時の微分 Operator の如き作用を持つ。例えば $V_{(0)}^\ell, \dots, V_{(r)}^\ell$ を核とする r 次元平行 2 階行列の本積 V_r の変化 数 $\mathcal{D} V_r = \mathcal{D} \sqrt{\frac{1}{(r!)^2} |S_{\ell_1 \ell_2} \dots S_{\ell_{r-1} \ell_r}| V_{(0)}^{\ell_1} \dots V_{(r)}^{\ell_r} |}$

$$\dots V_{(r)}^{\ell_r} | = \frac{1}{r!} \frac{1}{(r!)^2} \sum_{\ell_1 \ell_2} A_{\ell_1 \ell_2} S_{\ell_1 \ell_2} | V_{(0)}^{\ell_1} \dots V_{(r)}^{\ell_r} | V_{(0)}^{\ell_1} \dots V_{(r)}^{\ell_r} |$$

($S^{\ell_1 \ell_2}$ は $|S_{\ell_1 \ell_2} \dots S_{\ell_{r-1} \ell_r}|$ に関する $S_{\ell_1 \ell_2}$ の余函数) となる。

考ふる U^λ に於て 質量 (空間) Vector n 個が直交単位 Vector 系を作る様に 座標系を採れば上の n 個の内の 任意の相異なる r 個から出来る V_r について $\mathcal{D} V_r = 0$ と置けば 今の座標系に於ては $\sum A_{\ell \ell} = 0$ 之等は任意の $\binom{n}{r}$ 個の場合に成立つから 若し $1 \leq r \leq n-1$ なる時は $A_{11}, \dots, A_{nn} = 0$ $\therefore$ 座標系が更に $A_{\ell m}$ が標準型を採るように採られてゐるならば $A_{\ell m} = 0$ 即 運動とは同等なる事が判る ($\square 6.3.$). $r = n$ なる時は $\mathcal{D} V_n / V_n = \frac{1}{2} A_{\ell m} S^{\ell m} = \frac{\partial U^a}{\partial x^a} + S_{a\lambda}^a U^\lambda = U_{; \ell}^\ell + S_{20}^\ell$ となる ($\square 6.3.$)

$\square 15.2.$ $\mathcal{X}^\ell$ Euclid 空間中で速度場が $\dot{x}^\ell (x^\lambda)$ なる流体を 共転計量の Riemann 空間と見た時の共転計量は $dt = dx^0, ds^2 = (\dot{x}^\ell dx^\ell - t^\ell dx^0)^2$; $x^0 \equiv t, t^0 = 1$, である。即 $S_{00} = \dot{x}^\ell \dot{x}^\ell$, $S_{\ell 0} = -\dot{x}^\ell, S_{\ell m} = \dot{x}^\ell \dot{x}^m, t_\ell = 0, t_0 = 1 = \dot{x}^0; S^{00} = S^{\ell 0} = 0, S^{\ell m} = g^{\ell m}$

$$\square 39.2. \quad \frac{\frac{d^2 u^\ell}{d p^2} + S_{0\ell}^i \frac{d u^i}{d p} \frac{d u^\ell}{d p}}{\frac{d u^\ell}{d p}} = \frac{\frac{d^2 u^m}{d p^2} + S_{2\ell}^m \frac{d u^\ell}{d p} \frac{d u^m}{d p}}{\frac{d u^m}{d p}}$$

なる測地線は 時間 dt 後には S_{ab}^t が $S_{ab}^t + \underline{S_{ab}^t} dt$ となる事から、測地線が保存される為の完全条件として

$$\underline{S_{ab}^t} \frac{du^a}{dp} \frac{du^b}{dp} = \underline{S_{ab}^m} \frac{du^a}{dp} \frac{du^b}{dp} \quad (l \neq m)$$

是より係数を比較して $S_{23}, S_{33} = 0, 2S_{12}^t = S_{12}^m$ 等を得る 勿論此の性質は座標変換に対して保存される ($S_{11}^t \equiv A, = 2B, = 2S_{12}^2$ 等とすれば A, B は夫々 共変 Vector の変換を受ける事が判る)

□40. 変形する事として 収縮 (収縮) する (例えば 各点では 等方的な曲面が 同時に 収縮する) 等の完全条件は $\underline{S_{lm}} / S_{lm} = \text{Scalar}$
 $\equiv 2\alpha = 2\alpha$ (線縮係数) なる事である。

(□20.) 此時 $S_{lm} = C(u^i) B_{lm}(u^i)$ なる Scalar と Tensor の積に分解出来、 $\underline{S_{lm}} = \underline{C} \frac{\partial C}{\partial u^m} + S_{mn} S^{in} \frac{\partial C}{\partial u^n}$

$S_{lm}^m = n \frac{\partial C}{\partial u^l}$ (n : 次元数) から線縮係数が一定なる超曲面が与えられる。

上の関係式 □39.2. から 等方的なる時は 測地線 (凡(1)) 保存と変形が互換に相成、即 $\frac{\partial \alpha}{\partial u^l} = 0$ なる事とは全等なる事が判る。

□41. 等方的なる時 $\alpha = \text{常数}$ なる測地面積は (1)

$$\ddot{u}^l + S_{mn}^l \dot{u}^m \dot{u}^n + 2\dot{\alpha} \dot{u}^l = 0 \quad \text{となる (□24.2.)}$$

時刻 $t_{(0)}$ に於ける可変計量 Riemann 空間 $R(t_{(0)})$ に於ける (1) の路を

$$u^a = u^a(p), \quad p: \text{parameter} \text{ とし更に } s = \int \sqrt{S_{lm}(t, p)} \frac{du^l}{dp} \frac{du^m}{dp} dp$$

(S の方は $= \int \sqrt{S_{lm}(t)} \dot{u}^l \dot{u}^m dt$ である事に注意) s parameter

$$\text{に換れば (1) は } \ddot{u}^l + S_{mn}^l \dot{u}^m \dot{u}^n + \dot{u}^l \frac{\dot{s} + \alpha \dot{s}}{s^2} = 0. \quad \text{之に}$$

$S_{lm} \dot{u}^l$ を縮約して $\alpha \dot{s} + \ddot{s} = 0$ ($\therefore s = 2^{-1} \int \dot{s}(t) dt$) 従つて結局 (1) は $\ddot{u}^l + S_{mn}^l \dot{u}^m \dot{u}^n = 0$ となる。

以上から 等方的に運動する空間中に於ける定速測地線上の変位は 恰かも各瞬間 (t) 中の測地線上を 変位する如く通過する事が判る。

□42. 定速測地線を (C) とし その隣接超曲面 (□.8) に當るものを (B) とすれば u^a で (C), (B) の 切超平面を表す共変 Vector は

$\frac{1}{r} S_{la} \frac{du^a}{ds} = t_0$ である。之の上にある u^a を端とする Vector を A^a とする。 $A^1 = \Delta x^1, A^2, \dots, A^n = 0$ とした時の A^a 方向への偏

微分 $\frac{\Delta}{\Delta u^a}$ (□25.) は $\frac{\partial}{\partial u^a} + (\frac{1}{r} S_{la} \frac{du^l}{ds} - t_0) \frac{\partial}{\partial t}$ であることが

判る。従つて (B) 上で S_{mn}^l に当るものは $\Delta S_{mn}^l = \frac{1}{2} S_{la} \left(\frac{\Delta S_{am}}{\Delta u^n} + \frac{\Delta S_{an}}{\Delta u^m} - \frac{\Delta S_{mn}}{\Delta u^a} \right)$ であつて、定速測地線は $S = 0$ に注意して

$$\frac{d^2 u^l}{ds^2} + S_{mn}^l \frac{du^m}{ds} \frac{du^n}{ds} = 0 \quad \text{の形に書ける事から (□26.)}$$

結局 定速測地線は 即 (B) 上の 測地線であると極言する事が出来るであ
らう。 (昭24.3.25.)

注意 前報告〔VI〕以後は田畑下二夫：可変計量 Riemann
空間論の方法，日本数学会「数学」(予定)を参照せられたい。