



Title	Riemann空間のBetti number に就て
Author(s)	朝長, 康郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1949, 2(15), p. 514-519
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75291
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

156. Riemann空間のBetti number について

朝長 康郎 (1949.3.28.)

§1. 故 岩本秀行君が『ホロノミー群研究 第七号, 昭和23年3月』に書かれた論説『Riemann 空間のトポロギーと *holonomy* 群に対して不変な *exact differential-form*』を読んでみて思いついた事を二、三述べたい。同論文に次の定理が述べられてゐる。

【定理】 n 次元の連続可微分な有向な閉じた Riemann 空間の P 次元 Betti number を B_p , 一次独立な P 階の *holonomy* 群を不変な微分式の最大数を $B_{p'}$ とすれば,

$$B_p \geq B_{p'}$$

特に 封鎖 Riemann 空間の時は等号が成立つ。

【證明】 岩本君は *de Rham* の定理を用いられたので長くなつたが (*Hodge* の定理) (I) を用ひれば 極めて簡単である。

【Hodgeの定理】 可符号の閉じた正定値な Riemann 空間の P 次元 Betti number B_p は p 次の *harmonic* な *Tensor* の一次

独立なものの数に等しい。 但し

P次の tensor が harmonic とは 次の事を意味する。

- (1) $\xi a_1, \dots, a_{p-1}, a_{\alpha} a_{p+1}, \dots, a_{\alpha-1}, a_{\beta} a_{\alpha+1}, \dots, a_p$
 $= - \xi a_1, \dots, a_p.$
即ち 全ての添字に関して交替。
- (2) exact. 即ち

$$\xi a_1, \dots, a_p ; r = \sum_{g=1}^p \xi a_1, \dots, a_{g-1}, r a_{g+1}, \dots, a_p ; a_g$$
- (3) $g^{kc} \xi a_1, \dots, a_{p-1}, b ; c$
但し ; は共変微分を意味する。

そこで

今 p次の微分式 $\xi a_1, \dots, a_p$ が holonomy 群で不変とすれば

$$\xi a_1, \dots, a_p ; r = 0$$

で、又 $\xi a_1, \dots, a_p$ が 2つの添字に関して交替なことは 微分式の定義から明らか 故に $\xi a_1, \dots, a_p$ は harmonic な tensor の条件を満足する。このようなものが2つあれば其の一次結合も亦 holonomy 群で不変 従って harmonic となる故に それ等の一次独立なものの最大数は B_p とすれば Hodgeの定理で

$$B_p \cong B_{p'}$$

次に 等号の意味であるが、岩本君は対称 Riemann 空間の時、等号が成立つと書かれただけで証明されてゐない。私は S. Bochner [2] の論法で之を或る制限の下に証明した。 即ち

[定理] 可符号の閉じた正定値は Riemann 空間で 若し

- (1) $R_{ijkl}; k = 0$ (対称 Riemann 空間)
 (2) 次の二次形式が負定値 即ち、

$$\{ p(p-1) R_{ijke} g_{st} + g_{ke} (2p R_{ijts} - p R_{ij} g_{st} - R_{st} g_{ij}) \} \\ \times v^{2is} v^{kit} < 0 \quad (v^{lis} = -v^{ils})$$

が 任意の零でない V に対して全ての点で成立つならば P次の harmonic な tensor の共変微分は零である。 即ち

$$B_p = B_{p'}$$

特に、 $P=7$ の時は (2) の条件は 任意の零でない ξ に対して

$$(2 R_{ijts} - R_{ij} g_{st} - R_{st} g_{ij}) \xi^{ts} \xi^{ij} < 0$$

が凡この点で成つこと となる

〔証明〕 $\xi a, \quad a_p \in$ harmonic な Vector とする。之から

$$(1.1) \quad \varphi = \xi a, \dots a_p; r \xi^2, \dots a_p; r$$

なる スカラー φ を作る。但し (2 次力場) に對し

$$(1.2) \quad \xi^2 \dots a_p; r = g^{a_1 b_1} g^{a_2 b_2} \dots g^{a_p b_p} g^{rs} \xi_{b_1 b_2} \dots \xi_{b_p b_r}$$

φ から 次のスカラーを作る

$$(1.3) \quad \Delta = g^{bc} \varphi_{,b;c}$$

T.Y. Thomas の定理 (3) に依ると Δ は 空間全体に於てした

ものが零 即ち

$$(1.4) \quad 0 = \int \Delta dv \quad (dv \text{ は 体積素})$$

でなければならぬ。 Δ を定規に計算すると

$$\Delta = 2g^{bc} \xi a, \dots a_p; r; b;c \xi^2 \dots a_p; r \\ + 2 \xi a, \dots a_p; r; b;c \xi^2 \dots a_p; r; b$$

第2項 ≥ 0 は明らか。 故に第1項が正定値だとすると、

(1.4) から ξ が零でない限り

$$\int \Delta dv > 0$$

となるから (1.4) に矛盾し、

$$(1.5) \quad \xi a, \dots a_p; r = 0.$$

より他にない事になる。

$$\text{第1項} = \Xi = g^{bc} \xi a, \dots a_p; v; b;c \xi^2 \dots a_p; r$$

$$= \left(\xi a, \dots a_p; b; v - \sum_{s=1}^P R^m_{a_s r b} \xi a, \dots \underset{(s)}{m} \dots a_p \right) : c \xi^2 \dots a_p; r$$

$$= \left(\xi a, \dots a_p; b; r; c - \sum_{s=1}^P R^m_{a_s r b; c} \xi a, \dots \underset{(s)}{m} \dots a_p - \sum_{s=1}^P R^m_{a_s r b} \xi a, \dots \underset{(s)}{m} \dots a_p; c \right) \times g^{bc} \xi a, \dots a_p; r$$

$$(1.6) \quad R^m_{a_s r b; c} = 0$$

だから

$$(1.7) \quad \Phi = (\xi_{a_1, \dots, a_p; b; r} - \sum_{s=1}^p R^{\pi} a_s b \xi_{a_1, \dots, \pi \dots a_p; c}) g^{bc} \xi_{a_1, \dots, a_p; r}$$

$$(1.8) \quad \Phi = (\xi_{a_1, \dots, a_p; b; c; r} - \sum_{s=1}^p R^{\pi} a_s b c \xi_{a_1, \dots, \pi \dots a_p; b} - R^{\pi} b r c \xi_{a_1, \dots, a_p; \pi} - \sum_{s=1}^p R^{\pi} a_s r b \xi_{a_1, \dots, \pi \dots a_p; c}) g^{bc} \xi_{a_1, \dots, a_p; r}$$

harmonic の条件 (2) から

$$(1.9) \quad \Phi = (\sum_{s=1}^p \xi_{a_1, \dots, b \dots a_p; a_s; c; r} - \sum_{s=1}^p R^{\pi} a_s b c \xi_{a_1, \dots, \pi \dots a_p; b} - R^{\pi} b r c \xi_{a_1, \dots, a_p; \pi} - \sum_{s=1}^p R^{\pi} a_s r b \xi_{a_1, \dots, \pi \dots a_p; c}) g^{bc} \xi_{a_1, \dots, a_p; r}$$

$$(1.10) \quad \Phi = \left\{ \sum_{s=1}^p \xi_{a_1, \dots, b \dots a_p; c; a_s; r} - \sum_{s=1}^p \sum_{t \neq s} (R^{\pi} a_t a_s c \xi_{a_1, \dots, \pi \dots b \dots a_p} + R^{\pi} b a_s c \xi_{a_1, \dots, \pi \dots a_p}) : r - \sum_{s=1}^p R^{\pi} a_s r c \xi_{a_1, \dots, \pi \dots a_p; b} - R^{\pi} b r c \xi_{a_1, \dots, a_p; \pi} - \sum_{s=1}^p R^{\pi} a_s r b \xi_{a_1, \dots, \pi \dots a_p; c} \right\} g^{bc} \xi_{a_1, \dots, a_p; r}$$

harmonic の条件 (3) から第一項は零 又本字を入れ替えて整理すれば
結局

$$(1.11) \quad \Phi = - \{ p(p-1) R^{\pi} a_p a_{p-1} c \xi_{a_1, \dots, a_{p-2} b \pi; r} + p R^{\pi} b a_p c \xi_{a_1, \dots, a_{p-1} \pi; r} + 2p R^{\pi} a_p r b \xi_{a_1, \dots, a_{p-1} \pi; c} + R^{\pi} b r c \xi_{a_1, \dots, a_p; \pi} \} g^{bc} \xi_{a_1, \dots, a_p; r}$$

これが 正定値ならよいことになる。 整理すと

$$(1.12) \quad \Phi = - \{ p(p-1) R_{ijkl} g_{st} + g_{ki} (2p R_{ijts} - p R_{ij} g_{st} - R_{st} g_{ij}) \} \\ \times \xi_{a_1, \dots, a_{p-2} \dots}^{i; s} \xi_{a_1, \dots, a_{p-2} k j; t} > 0$$

或る点で座標を適当に選べば 其の点で g_{ij} が δ_{ij} となるから

$$\xi_{a_1, \dots, a_{p-2} \dots}^{i; s} \xi_{a_1, \dots, a_{p-2} k j; i} = \sum \bar{\xi}_{a_1, \dots, a_{p-2}}^{i; s} \bar{\xi}_{a_1, \dots, a_{p-2}}^{k j; i}$$

となる。 従って

$$\bar{\xi}_{a_1, \dots, a_{p-2} \dots}^{i; s} = \gamma^{is}$$

と記せば 又は 次の様な2次形式から成立つ.

$$(1.13) \quad -v^{lis} v^{kjt} \{ P(P-1) R_{ijke} g_{st} + g_{ke} (2PR_{ijts} - PR_{ijst} - R_{st} g_{ij}) \}$$

但し g の交換性から

$$v^{lis} = -v^{iles}$$

結局 (1.13) のような2次形式が凡での点で正定値ならよいことになる.

$P=1$ の時は 少し簡単になり

$$(1.14) \quad -g^{is} g^{jt} (2R_{ijts} - R_{ij} g_{st} - R_{st} g_{ij})$$

が 正定値 ならよい.

§2. 平行ベクトル場と Betti number の関係

(Hodge の定理) から直ちに 次の定理を得る.

〔定理〕 可符号の開じた正定値の Riemann 空間に平行ベクトル場が存在すれば 其の一次元 Betti number は零でない.
 m 個の 独立な平行ベクトルが存在したとすれば, ($m \geq 2$)

$$B_{m'} \geq 1, \quad (m' \leq m) \quad B_1 \geq m$$

$$B_{2k} \geq 1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (\text{但 } m \text{ が偶数の場合})$$

〔証明〕 v^i を平行ベクトルとすると 平行の定義から

$$v^i_{;j} = 0$$

即ち.

$$v^i_{;j} = 0 \quad (v^i_{;l} = g_{li} v^k_{;l})$$

故に v^i は harmonic である故に Hodge の定理で

B_1 は零でない.

0 次に $v^1_i, v^2_i, \dots, v^m_i$ が何れも 平行ベクトルだとし 互に一次独立とすると, 前述のように 一次独立な harmonic なベクトルが m 個 あることになるから Hodge の定理で 一次元 Betti number は 少なくとも m である.

00 次に之等 m 個の中から m' 個と選んで

$$|v^1_{i_1} \dots v^{m'}_{i_{m'}}|$$

なる m' -vector を作れば 其の共変成分は 明に零で 而も 交替

だから m' 次の harmonic な tensor となつて Hodge の定理で m' 次元の Betti number は零でない。

品 次に ψ^i_1 と ψ^i_2 とから

$$H^{ij} = \psi^i_1 \psi^j_2 - \psi^j_1 \psi^i_2$$

なる bi-vector を造れば、之も 2 次の harmonic である

Bochner [2] の如く H^{ij} から

$$H^{ij} \times H^{kl} \times \dots$$

なる交替 tensor を造つてゆけば 皆 harmonic になるから

偶数次元 Betti number は零でないことによる (3)

(Mar. 19, 1949)

文 献

- [1] Hodge. The theory and applications of harmonic integrals. 1941. Camb Univ. Press.
- [2] S. Bochner. Curvature and Betti numbers. 1948. Apr. Ann. of Math. p-379.
- [3] T.Y. Thomas. Some simple applications of Green's theorem for compact Riemann space. 1940. Tokoku, Math. J. Vol. 46, pp 261-266.

附記. 訂 正

§ 1 の [定理] の $p=1$ の場合を次の様に訂正します。

[定理] R_n が正定値可符号の開じた Riemann 空間とする。若し

(1) $R_{ijkl}; n = 0$

で任意の零でない対称な量 g_{ij} に対して、常に

(但し $g_{ij} \neq g_{ji}$)

(2) $(2R_{ijts} - R_{ij}g_{st} - R_{st}g_{ij})g^{is}g^{jt} < 0$

ならば

$$B_1 = B_1'$$

§ 2. の [定理] 可符号の開じた -----

$$B_1 \geq m.$$

$$B_2 \geq 1 \quad B_{2k} \geq 1, \quad k = 1, 2, \dots \text{ (但 } n \text{ が偶数の場合)}$$

$$B_{n'} \geq 1. \quad m' \leq m$$

之を追加する。