



Title	東ノ直和ト正規いでやる
Author(s)	前田, 文友
Citation	全国紙上数学談話会. 1949, 2(15), p. 522-534
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75293
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

158. 束ノ直和ト正規いでやる

(広島文理大) 前田 文友

0. I. フモツ 束 L = 於テ, L ノ 任意ノ元 a ガ

$$a = a_1 \vee \cdots \vee a_n, \quad a_i \in L(0, Z_i) \quad (i=1, \dots, n)$$

ノ如ク 一意的ニアラワサレルトキ, L ハ $L(0, Z_i) \quad (i=1, \dots, n)$ ノ直和デアルトイフ. コノトキ $Z_i \quad (i=1, \dots, n)$ ハ L ノ中心ニアアル. コノ直和ノ概念ハ / ノ存在ヲ仮定シテイル. 本稿デハ / ノ存在ヲ仮定シナイ場合ノ直和ヲ定義シ、コレニ關聯シテ / ノ存在ヲ仮定シナイ連続幾何学 即チ一般連続幾何学ニ於テハ、正規いでやるガ中心元ノ代リヲナシテイルコトヲ示シ、一般連続幾何学ニ於テモ、次元函数及ビ 準積表現ガ連続幾何学ノ場合ト殆ド同様ニ成立スルコトヲ示ス.

§ 1. 束ノ直和分解

本節ニ於テハ L ハ 0 フモツ束トスル.

定義 11. L = 於テ, $a \wedge b = 0$ = シテ, スベテノ $x \in L$ = 對シテ (a, x, b) D ナルトキ 即チ $(a \vee x) \wedge b = (a \wedge b) \vee (x \wedge b) = x \wedge b$ ナルトキ, $a \nabla b$ デアラウス.

$S \subseteq L$ ナルトキ, スベテノ $b \in S$ = 對シテ $a \nabla b$ ナルガ如キ a ノ全体ヲ S^∇ デアラウス. 同時ニ $a \nabla b$ = シテ $b \nabla a$ ナルトキ, a ト b トハ 分離シテイルトイフ.

[注意 1.1] L ガ 束ナルトキハ, (a, x, b) D ナラバ (b, x, a) D

デアルカラ、 $a \vee b$ ナラバ $b \vee a$ デアル。

補題 1.1 $S \equiv L$ ナルトキ、 $S^\vee$ ハ L ノいでやる デアル。

[証] (i) $a_1, a_2 \in S^\vee$ トスレバ、スベテノ $x \in S$ 、 $x \in L$ に対シテ

$$a_1 \wedge b = 0, \quad a_2 \wedge b = 0, \quad (a_1 \vee x) \wedge b = x \wedge b,$$

$$(a_2 \vee x) \wedge b = x \wedge b \quad \text{デアル。 併ツテ}$$

$$(a_1 \vee a_2) \wedge b = a_2 \wedge b = 0$$

$$(a_1 \vee a_2 \vee x) \wedge b = (a_2 \vee x) \wedge b = x \wedge b$$

デアルカラ、 $a_1 \vee a_2 \in S^\vee$ デアル。

(ii) 次ニ $a \in S^\vee$ 、 a, x トスレバ、

$$a \wedge b \equiv a \wedge b = 0, \quad (a \vee x) \wedge b = (a \vee x) \wedge (a \vee x) \wedge b \\ = (a \vee x) \wedge x \wedge b = x \wedge b$$

デアルカラ $a \in S^\vee$ 。 故ニ $S^\vee$ ハ L ノいでやる デアル。

定義 1.2 L ノ 0 ヲ含ム部分集合 $S_1, \dots, S_n$ ガアツテ

(1°) L ノ任意ノ元 a ハ、

$$a = a_1 \vee \dots \vee a_n, \quad a_i \in S_i \quad (i=1, \dots, n)$$

ノ如ク アラワサレ、

(2°) $i \neq j$ ナラバ $S_i \leq S_j^\vee$ 、

ナルトキ、 $L = S_1 \oplus \dots \oplus S_n$ トカキ、コレヲ L ノ直和分解

トイフ、 S_i ($i=1, \dots, n$) ヲ L ノ直和因子 トイフ。

[注意 1.2] 定義 1.2 ノ (2°) ハ、 $i \neq j$ ナラバ S_i ノ元ト S_j ノ元ト
ガ分離シテイルコトヲ示ス。

補題 1.2 L ノ直和分解 $L = S_1 \oplus \dots \oplus S_n$ ニ於テ、 L ノ元 $a =$
対シテ

$$a = a_1 \vee \dots \vee a_n, \quad a_i \in S_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (1)$$

ナル アラワシ方ハ一意的デアル。

[証] (1) ノ他ニ

$$a = b_1 \vee \dots \vee b_n, \quad b_i \in S_i \quad (i=1, \dots, n)$$

ナル アラワシ方ガアルトスル。補題 1.1 ヨリ $b_2 \vee \dots \vee b_n \in S_1^\vee$
デアルカラ

$$a_1 = a \wedge a_1 = \{b_1 \vee (b_2 \vee \dots \vee b_n)\} \wedge a_1 = b_1 \wedge a_1.$$

即ち $a_i \subseteq b_i$, 同様=シテ $b_i \subseteq a_i$ デアルカラ $a_i = b_i$,
一般= $a_i = b_i$ ($i=1, \dots, n$) デアル.

補題 1.3 L の直和因子ハ L の いでやるデアル.

(証) $L = S_1 \oplus \dots \oplus S_n$ ヲ L の直和分解トスル. $x, y \in S_1$ トスレバ

$$x \cup y = a_1 \cup \dots \cup a_n, \quad a_i \in S_i \quad (i=1, \dots, n)$$

デアル $i=2, \dots, n$ ナルトキ. $x, y \in S_1^v$ デアルカラ.

$$a_i = (x \cup y) \cap a_i = y \cap a_i = 0$$

故= $x \cup y = a_1 \in S_1$.

$x \in S_1, y \in S_2$ トスレバ

$$y = b_1 \cup \dots \cup b_n, \quad b_i \in S_i \quad (i=1, \dots, n)$$

デアル.

$i=2, \dots, n$ ナルトキ $b_i \subseteq y \subseteq x$ =シテ.

$b_i \cap x = 0$ デアルカラ $b_i = 0$.

故= $y = b_1 \in S_1$ デアル. 従ッテ S_1 ハ L の いでやるデアル.

定理 1.1 $L = L_1 \times \dots \times L_n$ デアルナラバ. $[0_1, \dots, 0_{i-1}, a_i^*, 0_{i+1}, \dots, 0_n]$ トアラワヒバ L の任意ノ元 $a = [a_1^*, \dots, a_n^*]$ ハ

$$a = a_1 \cup \dots \cup a_n, \quad a_i \in S_i \quad (i=1, \dots, n)$$

ノ如クアラワケル. $i \neq j$ ナラバ $a_i \cap a_j = 0$ =シテ.

$x = [x_1^*, \dots, x_n^*]$ トスルトキ

$$\begin{aligned} (a_i \cup x) \cap a_j &= [0_1, \dots, 0_{j-1}, x_j^* \cap a_j^*, 0_{j+1}, \dots, 0_n] \\ &= x \cap a_j \end{aligned}$$

デアルカラ $a_j \cap a_j = x$ 従ッテ $S_i \subseteq S_i^v$ デアル.

故= $L = S_1 \oplus \dots \oplus S_n$ ハ直和分解デアル.

(ii) $L = S_1 \oplus \dots \oplus S_n$ ヲ L の直和分解トスレバ. 補題 1.3 ヨリ

$S_1, \dots, S_n$ ハ L の 部分束デアッテ 補題 1.2 ヨリ L の 任意ノ元ハ一意的= $a = a_1 \cup \dots \cup a_n$ ($a_i \in S_i$) ノ如クアラワサレル. 故= $a \mapsto [a_1, \dots, a_n]$ = ヨッテ L ト 積 $S_1 \times \dots \times S_n$ トノ間=ハ 一対一ノ対応が存在スル. 次= $a \subseteq b$ ナラバ $a = a_1 \cup \dots \cup a_n, b = b_1 \cup \dots \cup b_n$ ($a_i, b_i \in S_i$) トスルトキ $a_i \subseteq b_i$ $a_1 \cup \dots \cup a_n \in S_1^v$ デアルカラ

$$Q_i = \delta_i \cap Q = \{\delta_i \cup (\delta_2 \cup \dots \cup \delta_n)\} \cap Q = \delta_i \cap Q,$$

従つて $Q \subseteq \delta_i$ 一方 $Q_i \subseteq \delta_i$ ($i=1, \dots, n$).

故に $Q_i \subseteq \delta_i$ ($i=1, \dots, n$) ナらバ $Q \subseteq \delta$ デアルカラ.

上ノ対応ハ ソノ順序ヲ保ツ. 故に L ト $S_1 \cdots S_n$ トハ同型デアル.

補題 1.4. $L = S_1 \oplus S_2$ ナ直和分解トスレバ, $S_1 = S_2^\vee$, $S_2 = S_1^\vee$ デアル.

[証] 定義ニヨリ $S_1 \subseteq S_2^\vee$ デアル. $a \in S_2^\vee$ トスレバ

$$a = a_1 \cup a_2, \quad a_1 \in S_1, \quad a_2 \in S_2$$

ニ於テ $a \vee a_2$ デアルカラ, $a_2 = a \wedge a_2 = 0$. 故に $a = a_1 \in S_1$.

従つて $S_1 = S_2^\vee$ デアル. 同様ニ $S_2 = S_1^\vee$

補題 1.5. S ヲ L ノ直和因子トスレバ, $L = S \oplus S^\vee$ ハ L ノ直和分解デアル.

[証] $L = S \oplus S_1 \oplus \dots \oplus S_n$ ナらバ, 定理 1.1 ノ註 (ii) ヲリ

$a_1 \cup \dots \cup a_n$ ($a_i \in S_i$) ノ如クアラウサレル. L ノ元ノ全体

ヲ T トスレバ, L ハ概 ST ト同型デアル. 故に 定理 1.1 ノ前半ヨリ

$L = S \oplus T$ ハ直和分解デアル. 従つて 補題 1.4 ヲリ $T = S^\vee$ デアル.

補題 1.6. $L = L(0, Z) \oplus L(0, Z)^\vee$ ガ L ノ直和分解デアルナラバ, Z ハ L ノ中立元デアル.

[証] 定理 1.1 ヲリ L ハ概 $L(0, Z) L(0, Z)^\vee$ ト同型デアツテ, Z ハ

$[1, 0_+]$ ニ対応スルカラ Z ハ L ノ中立元デアル. (中山正広.

束論 I. 14)

補題 1.7. 相対補束 L = 於テ, Z ヲ L ノ中立元トスレバ, $L = L(0, Z) \oplus L(0, Z)^\vee$ ハ L ノ直和分解デアル.

[証] $S = (\delta; \delta \wedge Z = 0)$ トオクトキ, $a \in L(0, Z)$, $\delta \in S$,

$$x \in L \text{ トスレバ } a \wedge \delta \subseteq Z \wedge \delta = 0$$

$(a \cup x) \wedge \delta = (a \cup x) \wedge (Z \cup x) \wedge \delta = (a \cup x) \wedge x \wedge \delta = x \wedge \delta$ デアルカラ $a \vee \delta$. 故に $L(0, Z) \subseteq S^\vee$. 又

$$(a \cup x) \wedge a = (a \cup x) \wedge Z \wedge a = x \wedge Z \wedge a = x \wedge a$$

デアルカラ $\delta \vee a$ 故に $S \subseteq L(0, Z)^\vee$. 又 $x \in L$ = 於シテ,

$x = (x \wedge z) \oplus y$ ナルヲトレバ $x, y, z \in L(0, z)$.

又 $y \wedge z = y \wedge x \wedge z = 0$ デアルカラ $y \in S$. 故ニ

$L = L(0, z) \oplus S$ ハ直和分解デアル. 補題 1.4 ヨリ $S = L(0, z)^{\vee}$ デアル.

[注意 1.2] $0, 1$ ヲモツ 束 L ニ於テ, $L = S_1 \oplus \dots \oplus S_n$ ガ直和

分解デアルナラバ $S_i = L(0, z_i)$ ($i = 1, \dots, n$) ナルガ如キ

$z_i \in L$ ガ存在スル ナントナレバ 定義ニヨリ $1 = z_1 \vee \dots \vee z_n$

($z_i \in S_i$) ノ如クアラワサレル. $a \in S_1$ トスレバ, $z_2 \vee \dots \vee z_n \in S_1^{\vee}$

デアルカラ,

$$a = \{ z_1 \vee (z_2 \vee \dots \vee z_n) \} \wedge a = z_1 \wedge a \leq z_1$$

シカルニ, 補題 1.3 ヨリ S_1 ハ L ノ z_1 による デアルカラ $S_1 = L(0, z_1)$.

同様ニシテ $S_i = L(0, z_i)$ ($i = 2, \dots, n$) デアル. 即チ, 本節ニ

定義シタ 0 ヲモツ束 L ノ直和分解ハ 更ニ L ガ 1 ヲモツトキハ, L ノ中心元

ヲ用イテノ直和分解ニナツテイル.

§2. 條件的完備束ノ準直和分解

定義 2.1. 束 L_2 ($\alpha \in I$) ノ族 $\pi(L_2; \alpha \in I)$ ノ元ヲ $a = [a_\alpha; \alpha \in I]$

($a_\alpha \in L_\alpha$) トスルトキ $\varphi_2(a) = \bar{a}_\alpha$ トセウ. 今

$\pi(L_2; \alpha \in I)$ ノ部分束 L_0 ガアルトキ, スベテノ $\alpha \in I$ ニ對シテ φ_2 ガ

L_0 ヨリ L_2 ノ上ヘノ準同型寫像デアルトキ, L_0 ヲ L_2 ($\alpha \in I$) ノ準積

トイフ. $L_0 = \pi^*(L_2; \alpha \in I)$ デアラワス. 一ツノ束 L ガ準積

$\pi^*(L_\alpha; \alpha \in I)$ ト同型デアルトキ, L ハ L_2 ($\alpha \in I$) ノ準積デ表サレ

ルトイフ

定義 2.2. 條件的完備束 L ニ於テ, 有向集合 D ノ元 δ ヲ添字トスル L ノ

部分集合 ($a_\delta; \delta \in D$) ガアツテ

$$a_\delta \uparrow a \quad \text{ナルトキ} \quad a_\delta \wedge b \uparrow a \wedge b$$

ナラバ, L ヲ 條件的上連続束 トイフ. 双対的ニ

$$a_\delta \downarrow a \quad \text{ナルトキ} \quad a_\delta \vee b \downarrow a \vee b$$

ナラバ, L ヲ 條件的下連続束 トイフ. L ガ條件的上連続シテ, 同時ニ條件

の下連続束ナルトキ L ヲ 條件的連続束 トイフ.

(i) $(a_\alpha; \alpha \in I)$ L ナルトキ $\forall (a_\alpha; \alpha \in I) \rightarrow \forall (a_\alpha; \alpha \in I)$ トカフ

0ヲモノ條件的上連続相対補模束ヲ一般上連続補模束トイイ。0ヲモツ條件の上連続相対補模束ヲ一般連続補模束 (或ハ一般連続幾何学)トイフ。
一般 (L) 連続補模束ガ單位元ヲ有シテバ (L) 連続補模束デアル。

以下 本節ニ於テモ 束シハ 0ヲモツモノトスル。

定義 2.3 條件的上連続束 L ノ包含部分集合ノ族 $(S_\alpha; \alpha \in I)$ ガアツテ

(1°) L ノ任意ノ元 a ハ

$$a = \bigvee (\alpha_\alpha; \alpha \in I), \quad \alpha_\alpha \in S_\alpha \quad (\alpha \in I)$$

ノ如ク アラワサレ。

(2°) $\alpha \neq \beta$ ナラバ $S_\beta \subseteq S_\alpha^\vee$ ナルトキ,

$L = \sum^* (\oplus S_\alpha; \alpha \in I)$ トナキ, コレヲ L ノ 半直和分解

トイイ, $S_\alpha (\alpha \in I)$ ノアルノ 半直和因子 トイフ。モシモモ

$\alpha_\alpha \in S_\alpha (\alpha \in I)$ ニ対シテ $\bigvee (\alpha_\alpha; \alpha \in I)$ ガ存在シ, L ニ属スル

トモハ, $L = \sum (\oplus S_\alpha; \alpha \in I)$ トナキ, コレヲ L ノ 直和分解 トイフ。

補題 2.1 L ヲ條件の上連続束トスル,

(i) $a \notin S^\vee$ ($S \in D$), $a \not\leq x$ ナラバ $a \vee x \notin S^\vee$ デアル。

(ii) $S \subseteq L$ ナルトキ, $S^\vee$ ノ部分集合ノ族 ガ存在スルナラバ, ソレハ $S_1^\vee$ ニ属スル

(iii) L ノ半直和因子ハ L ノ 條件的上連続部分束デアル。

[証]

(i) $a \notin S^\vee$ デアルカラ, $x \in L$ ニ対シテ $a \wedge x = 0$,

$(a \wedge x) \wedge y = x \wedge y$ 故ニ 上連続性カラ $a \wedge y = 0$,

$(a \vee x) \wedge y = x \wedge y$ 即チ $a \vee x \notin S^\vee$ デアル。

(ii) $T \subseteq S^\vee$ ニシテ $a = \bigvee (\alpha; \alpha \in T)$ ガ存在スルトキ, $\forall \alpha \in T$ 任意ノ有限部分集合トシ, $a_\alpha = \bigvee (\alpha; \alpha \in \alpha)$ トオケバ, $a_\alpha \uparrow a$ デアル。補題 1.1, ヨリ $a_\alpha \in S^\vee$ デアルカラ, スベテノ $\alpha \in S$ ニ対シテ $a_\alpha \in S$ 。従ツテ (i) ヨリ $a_\alpha \notin S^\vee$, 即チ $\alpha \in S^\vee$ デアル。

(iii) $L = \sum^* (\oplus S_\alpha; \alpha \in I)$ ヲ L ノ半直和分解トスル。 S_α ガ L ノいでやる デアルコトハ, 補題 1.3 同様ニ証明サレル。 $T \subseteq S_\alpha$ ニシテ $a = \bigvee (\alpha; \alpha \in T)$ ガ存在スルトキ, (ii) ノ如ク $a_\alpha = \bigvee (\alpha; \alpha \in \alpha)$ トオケバ $a_\alpha \uparrow a$ デアル。

$\delta = V(\alpha_\lambda; \lambda \in I) (\alpha_\lambda \in S_\lambda)$ トスレバ, $\delta \in S_\lambda$ デアルカラ
 β キ λ ナラバ $\delta \vee \alpha_\beta$. 故ニ (i) ヨリ $\delta \vee \alpha_\beta$. シカレニ
 $\alpha_\beta \leq \delta$ デアルカラ $\alpha_\beta = 0$ 即チ $\delta = \alpha_\lambda \in S_\lambda$ デアル.
 又ニツイテハ S_λ ガ いでやる デアルコトカラ当然成立スル.

補題 2.2 條件的 上述統束 L ノ 準直和分解 $L = \sum^* (\oplus S_\lambda; \lambda \in I)$
 ニ於テ, L ノ 元 α ニ對シテ

$$\alpha = V(\alpha_\lambda; \lambda \in I), \quad \alpha_\lambda \in S_\lambda (\lambda \in I),$$

ナル アラワシ方ハ 一意的デアル.

(証) 補題 2.1 (ii) ナリイテ, 補題 1.2 ト同様ニ証明サレル.

定理 2.1 條件的充備束 $L_\lambda (\lambda \in I)$. 零元ヲ 0_λ トスルトキ,

$L = \pi(L_\lambda; \lambda \in I)$ ノ 元 $\{\alpha_\lambda^*; \lambda \in I\}$ ノ 中 $\lambda \neq \beta$ ナラバ
 $\alpha_\lambda^* = 0_\lambda$ ナルガ如キ 元ノ全体ヲ S_β トスレバ, L ノ 直和分解
 $L = \sum (\oplus S_\lambda; \lambda \in I)$ ガ存在スル. 此ニ條件的 上述統束 L ハ 準直
 和分解 $L = \sum^* (\oplus S_\lambda; \lambda \in I)$ ガ アルトキハ L ハ 準直 $\pi^*(S_\lambda; \lambda \in I)$
 ト條件的充備束トシテ 同型デアル.

(証) (i) 定理ノ前半ノ証明ハ, 定理 1.1 ノ証明 (i) ト同様デアル.

(ii) 定理ノ後半ハ補題 2.2 ヨリ $\alpha \in L$ ハ一意的ニ

$$\alpha = V(\alpha_\lambda; \lambda \in I), \quad \alpha_\lambda \in S_\lambda (\lambda \in I) \quad (1)$$

ノ如クアラワサレルカラ. $\pi(S_\lambda; \lambda \in I)$ ノ 元ノ中, (1) ナル關係ニ
 ヨリ α ニ對應スル元 $\{\alpha_\lambda; \lambda \in I\}$ ノ全体ヲ L_α トスレバ, 補題 2.1
 ナリイテ 定理 1.1 ノ証明 (ii) ト同様ニシテ $L = L_\alpha$ トガ條件的充
 備束トシテ同型デアルコトガ証明サレル.

定義 2.4 條件的 上述統束 L ノ 準直和分解 $L = \sum^* (\oplus S_\lambda; \lambda \in I)$ ガアル

トキ, $\bar{L} = \pi(S_\lambda; \lambda \in I)$ ニ於テ 相對應スル元ヲ同一視シテ

$\bar{L} = \sum (\oplus S_\lambda; \lambda \in I)$ トカキ, $\bar{L}$ ヲ L ノ 拡大束 トイフ.

§ 3. 一般 上述統束ノ 正規いでのやる

補題 3.1 0ヲモツ 相對補束ニ於テハ 次ノ 3 命題 (α)(β) ハ同値
 デアル.

(α) $a \vee b$.

(β) $a, b \in L, a \sim b$ ナラバ $a = b = 0$

(証) v Neumann 連続幾何学講義 I, 42 Theorem 5.7.

補題 3.2 一般上連続補模束 L へ於て, $a \wedge b = 0$, $a \sim b$ ナラバ $a \sim b$ デアル.

(証) v. Neumann and Halperin, *Annals of math.* 41 (1940) 93. と同様

補題 3.3 一般上連続補模束 L へ於て, $S \subseteq L$ トスレバ, $S^\perp \wedge L$ 中位いでやる デアッテ, $S^\perp$ ノ部分集合ノ結ガ存在スルトキハ, ノレハ $S^\perp =$ 属スル. 次ニ $a \in S^\perp$, $a \sim c$ トスル, $b \in S$ へ対シテ $C_1 \subseteq C$, $b_1 \subseteq b$, $C_1 \sim b_1$ ナル b_1, C_1 ガアルトキハ, $a \sim c$ デアルカラ $C_1 \sim a, \subseteq a$ ナル a , ガ存在スル. $a \wedge b, \subseteq a \wedge b = 0$ デアルカラ 補題 3.2 ヨリ $a \sim b_1$. シカルニ $a \vee b$ デアルカラ 補題 3.1 ヨリ $b_1 = 0$. 従ッテ $C \vee b$ デアルカラ $C \in S^\perp$. 故ニ $S^\perp$ ハ中位いでやる デアル.

(ii) L ガ上連続補模束ナルトキ, $Z = V(a; a \in S^\perp)$ トスレバ

(i) ヨリ $Z \in S^\perp$ デアル. $Z \sim c$ トスレバ (i) ヨリ $C \in S^\perp$ デアルカラ $C \subseteq Z$. 従ッテ $C = Z$ デアルカラ $Z \wedge L$ ノ中心元デアル.

定義 3.1 0ヲモツ 模束 L ノ部分集合 S へ於て, $S = S^{\perp\perp}$ ナルトキ, S ヲ L ノ 正規いでやる トイフ.

補題 3.4 , S ヲ 一般上連続補模束 L ノ 正規いでやる トスレバ, $L = S \oplus S^\perp$ ハ L ノ直和分解デアル.

(証) 任意ノ $x \in L$ へ対シテ $x_S = V(x \wedge a; a \in S)$.

$x = x_S \oplus x_{S'}^*$ ナル $x_S, x_{S'}^*$ ヲトレバ, 補題 3.3 ヨリ $x_S \in S$ デアル. 又 任意ノ $a \in S$ へ対シテ $x_1 \equiv x_S$, $a_1 \equiv a$, $x_1 \sim a_1$ トスレバ, S ハ中位いでやるデアルカラ $x_1 \in S$. 従ッテ $x_1 \equiv x \wedge a$, デアルカラ $x_1 \subseteq x_S$ 故ニ $x_1 \subseteq x_S \wedge x_{S'}^* = 0$ デアルカラ 補題 3.1 ヨリ $x_{S'}^* \vee a$. 即チ $x_{S'}^* \in S^\perp$. 従ッテ $L = S \oplus S^\perp$ ハ直和分解デアル.

定理 3.1 , 一般上連続補模束 L ガ既約デアルタメノ必要ニシテ充分ナル条件ハ, (v) ト L 以外ニ L ノ正規いでやる ガ存在シナイコトデアル.

(証) (i) 必要 (v) 及ビ L ト異ナル L ノ正規いでやる S ガ存在スレバ,

補題 3.4 より $L = S \oplus S^\vee$ は L の直和分解である. 定理 1.1 より

L は 積 $SS^\vee$ と同型であるから L は可約である

- (ii) 完全. L が可約ならば, L は ニツ以上ノ元ヲモツ素 L_1, L_2 ノ積トシテアラクサレル. L_1, L_2 = 対応スル L ノ 部分束 S_1, S_2 トスレバ, 定理 1.1 より直和分解 $L = S_1 \oplus S_2$ が存在シ. 補題 1.4 より S_1, S_2 は L ノ 正規いである. デアツテ, コレハ (0) 及び L トハ異ナル.

定理 3.2 一般上連続補束 L ノ 正規いであるノ全体 Z ハ 集合トシテノ包含関係ヲ 順序トシテ完備である.

- (証) $S \rightarrow S^\vee$ は 同型であるから Z は 完備束である. $Z =$ 於テ $S \wedge S^\vee = (0) =$ シテ, 補題 3.4 より $S \vee S^\vee = L$ であるから $S^\vee$ は S ノ 補元である. 故ニ S, T ヲ ニツノ正規いであるトシ, $S \wedge T = (0)$ トスル. $T \equiv S^\vee$ トスレバ, $a \in T, a \in S^\vee$ ナル $a \in L$ ガアル. コノ a = 於シテ $a \vee b$ デナイ $b \in S$ が存在スル. 補題 3.1 より $0 < a_1 \leq a, 0 < b_1 \leq b, a_1 \sim b_1$ ナル a_1, b_1 が存在スル. シカルトキハ 補題 3.3 より $a_1 \in S$. 他方 $a_1 \in T$ であるから $S \wedge T = (0)$ = 矛盾スル. 故ニ $S \wedge T = (0)$ ナラバ $T \leq S^\vee$ であるから Z は 完備束である. (小笠原藤次郎氏著 束論 II, 5 定理 1 より)

補題 3.5 一般上連続補束 $L =$ 於テ, $L(0, Z)$ が L ノ 正規いであるデアルタメノ必要ニシテ充分ナル條件ハ Z が L ノ 中立元であるコトである.

- (証) (i) Z が L ノ 中立元トスレバ, 補題 1.7 より $L = L(0, Z) \oplus L(0|Z)^\vee$ は L ノ 直和分解である. 従ツテ 補題 1.4 より $L(0, Z)$ は L ノ 正規いである.
- (ii) $L(0, Z)$ が L ノ 正規いであるトスレバ 補題 3.4 より $L = L(0, Z) \oplus L(0, Z)^\vee$ は L ノ 直和分解である. 従ツテ 補題 1.6 より Z は L ノ 中立元である.

定理 3.3 一般上連続補束 $L =$ 於ケル正規いであるノ全体 $Z =$ 於テ, $L(0, Z)$ ノ 如クアラクサレル正規いであるノ全体ハ Z ノ いであるデアツテ, L ノ 中立元ノ全体カラナル L ノ 部分束 Z_0 と同型である.

- (証) (i) 補題 3.5 より, L ノ 中立元ノ全体 Z_0 ト $L(0, Z)$ ノ 如クアラクサレル正規いであるノ全体 Z トハ $Z \leftrightarrow L(0, Z)$ ナル関係ニヨッテ一対一

ノ対応ヲスル。次ニ Z_1, Z_2 ノ中立元トスレバ、 $Z_1 \cup Z_2, Z_1 \cap Z_2$ 中立元デアル。 $L(0, Z_1), L(0, Z_2)$ ノ含ム正規いでやるハ $Z_1 \cup Z_2$ ノ含ムカラ

$$L(0, Z_1) \cup L(0, Z_2) \subseteq L(0, Z_1 \cup Z_2)$$

$L(0, Z_1) \cap L(0, Z_2) \subseteq L(0, Z_1 \cap Z_2)$ ハ明ラカデアルカラ

$$L(0, Z_1) \cap L(0, Z_2) = L(0, Z_1 \cap Z_2)$$

又 $L(0, Z_1) \cap L(0, Z_2) \subseteq L(0, Z_1) \cap L(0, Z_2)$ トノ共通部分デアルカラ

$$L(0, Z_1) \cap L(0, Z_2) = L(0, Z_1 \cap Z_2)$$

故ニ Z_0 ト Z_0 トハ同型デアル。

(ii) Z = 於テ $S \equiv L(0, Z)$ トスレバ、 $Z_1 = V(\alpha; \alpha \in S)$ が存在シ、

補題 3.3 ヨリ $S = \text{属スル}$ 。

故ニ $S = L(0, Z_1)$ デアルカラ、 Z_0 ハ Z ノいでやるデアル。

定理 3.4 一般上連続補模束 L ノ中立元ノ全体ヲ Z_0 トスルトキ $Z_0^{\vee} = L$;

$Z_0^{\vee} = L$ トオケバ、 $L = L_1 \oplus L_{\infty}$ ハ L ノ直和分解デアツテ、 L_{∞} ハ

0 以外ニハ中立元ヲモタズ、又 L_1 ハ L ノ中立元ヲ中立元トスルガ如キ 上連続

補模束 L_1 = 埋蔵セラレル。

(証) $Z_0^{\vee}$ ハ L ノ正規いでやるデアルカラ、補題 3.4 ヨリ $L = L_1 \oplus L_{\infty}$ ハ L ノ直和分解デアル。

$L_{\infty} = Z_0^{\vee}$ ガ 0 以外ニハ L ノ中立元ヲ含マナイコトハ明ラカデアル。シカルニ直和分解ノ性質カラ L_{∞} ノ中立元ハ L ノ中立元デアルカラ、 L_{∞} ハ 0 以外ニ中立元ヲモタナイ。

$L_1 = Z_0^{\vee}$ ハ L ノスベテノ中立元ヲ含ム最小ノ正規いでやるデアルカラ、補題 3.5 ヨリ、 Z = 於テ $L_1 = V(L(0, Z); Z \in Z_0)$ デアル 定理 3.3 カラ $L(0, Z) (Z \in Z_0) =$ 含マレル正規いでやるハ

$L(0, Z_1) (Z_1 \in Z_0)$ ノ如クアラワサレルカラ、v. Neumann 連続幾何学第 II, 32 Lemma 33 ノ Z = 適用スレバ、 $L_1 = V(\oplus L(0, Z_2); \alpha \in I)$

($Z_2 \in Z_0$) ノ如クアラワサレル。 $L_1 = \sum^* (\oplus L(0, Z_2); \alpha \in I)$ ハ L_1 ノ直和分解デアルカラ、 L_1 ノ拡大束 $\overline{L}_1 = \sum (\oplus L(0, Z_2); \alpha \in I)$ ハ $V(\oplus Z_2; \alpha \in I)$ ノ中立元トシテモ 上連続補模束デアツテ、

L_1 ノ中立元 $Z =$ ハ $\overline{L}_1$ ノ中立元 $Z = V(\oplus (\alpha \cap Z_2); \alpha \in I)$ ガ対応スル。

§4. 一般連続幾何学ノ次元函数ト準極表現

一般連続幾何学即チ一般連続補極束 L ノ正規いでの α ノ全体 Z ハ定理3-2
カラ定標おくる束デアルガ、 L ガ単位元ヲモツ場合 即チ L ガ連続補極束ノ
トキハ、補題3-3 ヨリ Z ハ L ノ中心 $Z = \text{中心}$ ナリ。シカシテ補題3-4 ヨリ
正規いでの $S = \text{対シテ}$ 、任意ノ元 $x \in L$ ハ $x = x_0 \oplus x_S$ 、 $x_S \in S$
 $x'_S \in S^\perp$ ナル形 = 一意的 = アラワサレル。 x_S ハ x ノ S ニ於ケル成分デアッテ、
コレヲ Sx デアラワセバ

$$S(x \vee y) = Sx \vee Sy, S(x \wedge y) = Sx \wedge Sy, (S_1 \vee S_2)x = S_1x \vee S_2x,$$

$$(S_1 \wedge S_2)x = S_1x \wedge S_2x \quad \text{デアル。即チ } S\alpha \text{ ナル演算ハ連続補極束}$$

ノ場合ノ中心元ヲ用イル Z ハ α ナル演算ニ対応シテイル。尚中心包 $e(\alpha) =$
対シテハ、 α ヲ含ム最小ノ正規いでの $\alpha^\perp$ ヲ考エレバヨイ。

カクノ如クシテ 連続補極束ノ場合ノ中心元ノ代リ = 一般連続補極束ノ場合ハ
正規いでのヲ用クレバ、連続補極束ノ場合ノ次元函数及ビ埋藏定理 理論ハ殆ド
ソノママ 一般連続補極束ニ対シテモ成立スル。以下特ニ注意ヲ要スル点ノミヲ
述べル。

一般連続補極束 L ニ於テ、 $\alpha \neq 0$ ニシテ $x \ll \alpha$ ナラバ $x = 0$ ナルトキ、

α ヲ L ノ 最低元ト定義スル。スベテノ最低元 α ヲトツトキノ 正規いでの $\alpha^\perp$
ノ全体ノ結ヲ L_I トシ、 $Z = \text{於ケル}$ L_I ノ補元ヲ L_{II} トスレバ、

$L = L_I \oplus L_{II}$ デアル。 L_I ノ拡大束 $\overline{L}_I = \text{対シテ}$ $L^\perp = \overline{L}_I$ ナルガ如キ
 $\overline{L}_I$ ノ最低元ガアル。コレヲ $\overline{L}_I$ ノ 基最低元トイフ。

定理3-4 カラ $L = L_I \oplus L_\infty$ デアルカラ、 $L_{II} = L_I \wedge L_{II}$ 、

$L_{I\infty} = L_\infty \wedge L_I$ 、 $L_{II\infty} = L_\infty \wedge L_{II}$ トオケバ、

$L = (L_I \wedge L_I) \oplus L_{II} \oplus L_{I\infty} \oplus L_{II\infty}$ ハ L ノ直和分解デアル。

0 ヲモツ 極束 L ニ於テ $e^\perp = L$ ナルガ如キ $e \in L$ ガ存在スルトキハ、

e ヲ L ノ 準単位元トイフ。準単位元ハ一ツトハ限ラナイ。 L ガ単位元ヲモテバ、

単位元ハ 準単位元デアル 一般連続補極束 $L = \text{対シテ}$ ハ、 $Z = \text{於テ}$

$L = V(\alpha^\perp; \alpha \in L)$ デアルカラ、V. Neumann 連続幾何学講義

Ⅲ, 32 Lemma 3.3 ヨリ $Z = \text{適用スレバ}$ $L = V(\oplus \alpha_i^\perp; \alpha_i \in I)$ ノ如ク
アラワサレル。

$e = V(\oplus \alpha_i; \alpha_i \in I)$ ハ L ノ拡大束 $\overline{L} = V(\oplus \alpha_i^\perp; \alpha_i \in I)$ ノ準單
位元デアル。

S は L の正規いである トスレバ、 $\overline{S} = \sum (\theta(S \cap \mathcal{A}_\alpha); \alpha \in I)$ は $\overline{L}$ の正規いである デアル。逆 $\overline{S}$ は $\overline{L}$ の正規いにある トスレバ、 $\overline{S} =$ 含まれる L の元ノ 全体 S へ L の正規いである デアル。コノ対応 = ヨツテ L の正規いであるノ全体 $\mathcal{Z}$ ト $\overline{L}$ の正規いであるノ全体 $\overline{\mathcal{Z}}$ トハ完備ぶ一なる束トシテ同型デアル。

今更ハ 一般連続補収束 $L = L_1 \oplus L_{p\infty} \oplus L_{I\infty}$ ノ最大束 $\overline{L}$ ノ準単位元 e トシテハ、 $\overline{L}_1$ ノ単位元 e_1 、 $\overline{L}_{I\infty}$ ノ基底元 $e_{I\infty}$ 、 $\overline{L}_{E\infty}$ ノアル準単位元 $e_{E\infty}$ 有キ 事ナ

$$e = e_1 \oplus e_{I\infty} \oplus e_{E\infty} \quad (1)$$

ヲトルモノトスル。

$\overline{S}$ は $\overline{L}$ ノ任意ノ正規いである トスル トキ、 $\overline{S}e$ ノ如クアラフサレル $\overline{L}$ ノ元ヲ $\overline{L}$ ノ準中心元トイイ。準中心元ノ全体 $\overline{\mathcal{Z}}$ は $\overline{L}$ ノ準中心トイウ。 $\overline{\mathcal{Z}}$ は $\overline{L}$ ノ完備ぶ一なる部分束デアツテ、 $\overline{S} \rightarrow \overline{S}e$ ナル対応 = ヨツテ、 $\overline{\mathcal{Z}}$ 、從ツテ $\mathcal{Z}$ ト同型デアル。

$\overline{L}$ ノ準単位元 e トシテ (1) ノ如クトツタカラ、定理 3.4 有テ L ノ中立元ハ $\overline{L}$ ノ準中心元デアリ、 $L_{I\infty} =$ 於ナル最低元ハ $\overline{L}$ ノ準中心元ト記号的デアル。

V. H. Neumann 連続統何学講義 頁 34 Theorem 3.2 ノ如クシテ

$L_1 \wedge L_I = \sum_{1 \leq k < \infty} L_{I_k}$ デアル。從ツテ

$$L = \sum_{1 \leq k < \infty}^* L_{I_k} \oplus L_{E_1} \oplus L_{I\infty} \oplus L_{E\infty}$$

トナル。

$\mathcal{Z}$ 、 $\overline{\mathcal{Z}}$ 、 $\overline{\mathcal{Z}}$ ハ同型ナ完備ぶ一なる束デアルカラ、コレ等ノ極大いであるヲ同一文字 $\mathcal{P}$ デアラフシ。ソノ全体ヲ Ω トスレバ、 $S \in \mathcal{Z} =$ 対シテ S は含まナイ 極大いである $\mathcal{P}$ ノ全体 $E(S)$ ヲ対応サセバ、 $\mathcal{Z}$ ハ表現ぶ一なる空間 Ω 上ノ集合束 $\mathcal{P}$ ぶ一なる束トシテ同型 = 表現サレル。

シカルトキハ $\alpha \in \overline{L} =$ 対シテ Ω ノ上デ定義セラレタ連続函数 $\delta_\alpha(\mathcal{P})$ が定マリ、ソノ値域ハ

$$\begin{array}{lll} \mathcal{P} \in E(I_{E_1}) & = \text{於テハ} & (\frac{\mathcal{P}}{I_{E_1}}; \mathcal{M} = 0, 1, \dots, n) \\ \mathcal{P} \in E(L_I) & , & (\lambda; 0 \leq \lambda \leq 1, \lambda \text{ 実数}) \\ \mathcal{P} \in E(L_{I\infty}) & , & (\mathcal{M}; \mathcal{M} = 0, 1, \dots) \\ \mathcal{P} \in E(L_{E\infty}) & , & (\lambda; 0 \leq \lambda < \infty, \lambda \text{ 実数}) \end{array}$$

デアル。尚 $\bar{L}$ ノ準中心元 $Z = \text{対シテ}$

$$Z \notin \mathcal{P} \text{ ナラバ } \delta_Z(\mathcal{P}) = 1, \quad Z \in \mathcal{P} \text{ ナラバ } \delta_Z(\mathcal{P}) = 0$$

トナリ 他ノ $\delta_a(\mathcal{P})$ ノ性質ハ 連続補収束ノトキト同様デアル。

既約ナ (I_∞)型 一般連続幾何学ノ具体的例トシテハ、*Veblen-Young*
ノ射影幾何学ノ公理 A, E0ヲ満足スル ℓ -空間 ($\ell = -1, 0, 1, 2, \dots$)
ノ全体オアル。

一般連続幾何学ノ準預表明ニツイテハ、河田 松島、樋口三氏ノ方法
(本誌264 (昭19))リ、ザンドソノママ適用サレル。