OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	四元数群ヲ galois 群ニ持ツ p 進数体上ノ体ノ構成ニツイテ
Author(s)	國吉, 秀夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1949, 2(15), p. 536-538
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75295
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

160. 四元数群ヲgalois群ニ持ツp進数体上ノ体ノ構成ニツイテ

（東北大） 国吉 秀夫

p進数体上ニテ 任意ノ可解群ヲ galois 群 ニ持ツ体ノ構式ハ 可能ガ ドウカ 分リマセンガ、四元数体ノトキハ可能デアル。前ニコノ事ヲ仮定シテ p進体ニ於ケル

一.二ノ反例ニツイテ述ベタコトガアルノデ、次ニ証明ヲ掲ゲル。

1. ソノヤウナ体ノ構成ニツイテ、次中先生ノ論文(東北数学雑誌. Vol. 43(1937))ヨリ必要ナ所ダケ取ル。

$\mathfrak{G}$ p群　$\mathfrak{G}/\mathfrak{G}' = P$ abel群、$\mathfrak{G}'$ p次デ、シカモ核心トスル、ソノトキ、$\mathfrak{G}$ヲ $\mathfrak{G}'$ノ P ニヨル拡大ト考エル。

$$\begin{cases} u_\sigma i_\tau = g_{\sigma,\tau} u_{\sigma\tau} & \sigma,\tau \in P \\ i_\sigma g = g u_\sigma & g, g_{\sigma,\tau} \in \mathfrak{G}' \\ g_{\sigma,\tau} g_{\rho,\sigma\tau} = g_{\rho,\sigma} \cdot g_{\rho\sigma,\tau} \end{cases}$$

今 k ガ1の p 中根ヲ含ミ、Pヲ Galois 群ニ持ツ体 K ガ存在シタト仮定ス。　$\mathfrak{G}'$ノ ergengende Charakter ヲ χトスルトキ

(*)　$(\chi(g_{\sigma,\tau}), K/k, T) \sim k$

ガ成立スルナラバ、求ムル体ガ構成出来ル。

(証明)　(*) ヨリ

$$\chi(g_{\sigma,\tau}) = \frac{\delta_\sigma^\tau \delta_\tau}{\delta_{\sigma\tau}} \qquad (\delta_\sigma \in K)$$

$$1 = \chi(g_{\sigma,\tau})^p = \frac{(\delta_\sigma^p)^\tau \delta_\tau^p}{\delta_{\sigma\tau}^p}$$

$$\delta_\sigma^p = \gamma^{\sigma-1}$$

ソノトキ $K(\theta)$, $\theta = \sqrt[p]{\gamma}$ ハ求ムル体デアル。　q.e.d.

2. 四元数群ハ

$$\alpha^4 = \beta^4 = \gamma^2 = 1, \qquad \alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \varepsilon$$

$$\beta\gamma = \alpha, \quad \gamma\alpha = \beta, \quad \alpha\beta = \gamma$$

$$\gamma\beta = \alpha^{-1}, \quad \alpha\gamma = \beta^{-1}, \quad \beta\alpha = \gamma^{-1}$$

ソコニテ、$\{\varepsilon\}$ ガ交換子群、核心、2次、　故ニ1ニヨリ、Pニ対スル Kノ存在ト、(*)トヲ証明スレバヨイ。

$u_\alpha = \alpha$, $u_\beta = \beta$, $u_\gamma = \gamma$　トオケバ

$$g_{\alpha,\alpha} = g_{\beta,\beta} = g_{\gamma,\gamma} = \varepsilon.$$

$$g_{\alpha,\beta} = g_{\beta,\gamma} = g_{\gamma,\alpha} = 1.$$

$$g_{\beta,\alpha} = g_{\gamma,\beta} = g_{\alpha,\gamma} = \varepsilon.$$

Lemma. p進数体ニテ $K/k(2,2)$型ノ abel 体トスレバ

$$\alpha = (\chi(g_{\alpha,\tau}), K/k, P)$$

ハ多元体デハナイ。

(証明) $F(\alpha, \chi(g_{\alpha,\tau})) = \chi(g_{1,\alpha} g_{\alpha,\alpha} g_{\beta,\alpha} g_{\gamma,\alpha})$

$= \chi(1 \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon \cdot 1) = \chi(1)$

$= 1$. ($N^* K/k$)

γ, β ニ関シテモ 同様デアルカラ中山－秋月ノ定理ニヨリ α ハ多元体デハナイ。

今 p 進数体 k 上ニ2次体ガ少クトモ1個存在スルヤウナ k ヲ考ヘル。即チ p ガ(2)ノ約数デアルトスル。之ハ実体論デヨク知ラレタ公式 $(k : k^{*2}) = 2^2 N(\mathfrak{g}^e)$ ニヨル。但シ $\mathfrak{g}$ ガ丁度 p^e デ割レルモノトスル。)

$k_1, k_2, k_3, k \cdots$ ヲ k 上ノ2次体トスレバ、

k_1, k_2 ノ合成体 $\overline{K}$ ハ2次ノ中間体ヲ3個有スルカラ k_3, k_4 ノ内1個ハ含マナイ。ソレヲ k トスル。今1個ノ体ノ合成体ヲ K トスレバ K/k (或ヒハ $\overline{K}/k$) ヲ拡大シテ求メル体ヲ得ル。

(証明) $\overline{K}/k$ ニ上ノ Lemma ヲ用ヒレバ α ノ Exp. ハ1カ2デアル。

$\therefore (\chi(g_{\alpha,\tau}), K/k, P) \sim (\chi(g_{\alpha,\tau}), \overline{K}/k, P)_k = \alpha_k \sim 1$

以上マトメテ。 q.e.d.

定理 $(k : R(2))$ ガ2ノ倍数ナラバ k 上ニ四元数体ヲ galois 群ニ持ッヤウナ体ガ少クトモ1ツ存在スル。(但シ $R(2)$ ハ有理数体 R ノ(2)－進数体)

上ト同様ノ証明デ任意ノ p 群ノ場合ニ適当ナ基礎体ノ上ニ之ヲ Galois 群ニ持ツ体ガ存在スル。只基礎体ニ関スル条件ガ若ッポクナル。