



Title	Riemann空間の無限小collineationに就て
Author(s)	朝長, 康郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1949, 2(15), p. 542-543
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75297
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

162. Riemann空間の無限小 collineation に就て

胡 長 旗 郎 (1949.5.II)

§1. Riemann 空間 R_n 内に一つの無限小点変換

$$(1.1) \quad \bar{x}^\lambda = x^\lambda + \varepsilon \xi^\lambda(x)$$

を行つたとき 測地線

$$(1.2) \quad \frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} + \{\lambda_{\mu\nu}\} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0.$$

が x 地の測地線に移行するとき (1.1) を無限小相称 (Collineation) と呼び、其の必要充分なる条件は $\xi^\lambda(x)$ が次の関係を満足することである。[1]

$$(1.3) \quad * \quad \xi_{\lambda;\mu;\nu} + R_{\lambda\mu\nu\omega} \xi^\omega = 0$$

これは特別な場合として無限小運動

$$(1.4) \quad \xi_{\lambda;\mu} + \xi_{\mu;\lambda} = 0$$

を含むものである、無限小運動に就て S. Bochner [2] は Compact で Ricci curvature が到る所員の Riemann 空間には一様収束運動群が存在しない ことを証明した。

然るに実は 同じ条件の下に 無限小相称 でさえ存在しない事が分るのである。

[定理] 閉じた可符号な正定値の Riemann 空間で ξ^λ が零でない限り常に

$$R_{\lambda\mu} \xi^\lambda \xi^\mu < 0$$

ならば 無限小擬似相称は存在しない。

[証明] 若し 無限小擬似相称 $\bar{x}^\lambda = x^\lambda + \varepsilon \xi^\lambda(x)$ が存在したとすると

$$(1.5) \quad \xi_{\lambda;\mu;\nu} + R_{\lambda\mu\nu\omega} \xi^\omega = 0 \quad (\xi_\lambda = g_{\lambda\mu} \xi^\mu)$$

が成立つ。

$$(1.6) \quad \mathcal{F} = \xi_{\lambda;\mu} \xi^\lambda$$

と置き ラプラスアン Δ を造る。

$$(1.7) \quad \Delta = \mathcal{F}_{;\lambda;\mu} \xi^\lambda$$

計算すれば次の様になる。

$$(1.8) \quad \Delta = 2 \xi_{\lambda;\mu;\nu} \xi^\lambda g^{\mu\nu} + 2 \xi_{\lambda;\mu} \xi^{\lambda;\mu}.$$

(1.5) から

* 詳しく云へば 擬似相称 即ちパラメーターの変換が擬似対称なものである。

$$(1.9) \quad \Delta = -2R_{\lambda\mu\nu\omega} \xi^\lambda \xi^\mu g^{\nu\omega} + 2\xi^\lambda \xi^\mu \xi^\nu \xi^\omega$$

$$(1.10) \quad \Delta = -2R_{\lambda\omega} \xi^\lambda \xi^\omega + 2\xi^\lambda \xi^\mu \xi^\nu \xi^\omega$$

従って依り第一項は ξ^λ が 0 でない限り正。第2項も負でないから、
 Δ を空間全体に積分したものは正となる。

$$(1.11) \quad \int \Delta dV > 0 \quad (\text{d}V \text{ は体積素})$$

然るに T.Y. Thomas の定理 (3) に依れば 閉じた可符号の Riemann
 空間では 一般に

$$(1.12) \quad \int \Delta dV = 0$$

とななければならないから、(1.11) と矛盾する。従って

$$(1.13) \quad \xi^\lambda = 0$$

とななければならない。即ち 閉じた擬似球面は 存在しないことになる。

(3) (4.20.1949)

[文 献]

(1) 志村健太郎 擬球又は許量空間に於ける写像小変形。

[理存] 1947. Vol. 1. No. 2~4. PP 49-56

(2) S. Bochner. *Curvature and Betti numbers.*

Ann. of Math. 1948. P. 379.

(3) T.Y. Thomas. *Some simple applications of Green's theorem for compact Riemann space.*
 1940. *Tokoku Math. J.* Vol. 46. PP. 261-266.