



Title	Fourier級数ノ総和可能性ニツイテ
Author(s)	松村, 禎己
Citation	全国紙上数学談話会. 1949, 2(15), p. 543-544
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75298
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

163. Fourier 級数ノ總和可能性ニツイテ

松村 碩己 (1949.5.21)

$$\frac{Q_0}{2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu} \cos \nu x + b_{\nu} \sin \nu x) \quad \cdots \cdots (1)$$

ヲ積分可能ナル函数 $f(x)$ ノ Fourier 級数トシ

$$S_0(x), S_1(x), S_2(x), \cdots, S_n(x), \quad \cdots \cdots (2)$$

ヲソノ部分和トスル. *Lebesgue* ハ系列 (2) ガテト到ル處 $f(x) = (C1)$

總和可能ナルコトヲ証明シタガ. 之ニ対シテ *G. Fejér* 等ハ

$$S_{12}(x), S_{22}(x), \dots, S_{n2}(x),$$

が殆ど到ル處 (C, 1) 級和可能ナルコトヲ証明シタ¹⁾。

之ヲ更ニ一般化シテ 次ノ定理ヲ得ル。

定理. 積分可能ナル実函数 $f(x)$ ノ *Fourier* 級数 (1)ニ於テ殆ど到ル處

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \{ S_{1n}(x) + S_{2n}(x) + \dots + S_{nn}(x) \} = f(x) \\ (k \text{ 正整数})$$

証明 $\frac{1}{n} \{ S_{1n}(x) + S_{2n}(x) + \dots + S_{nn}(x) \} = f(x)$

$$= \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} g(t) \frac{H_n(t)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = I_n \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{ココニ } g(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x), \quad H_n(t) = \sum_{\nu=1}^n \sin(\nu^k + \frac{1}{2})t$$

デアル。シカラバ

$$|H_n(t)| \leq \left| \sum_{\nu=1}^n e^{i(\nu^k + \frac{1}{2})t} \right| = \left| \sum_{\nu=1}^n e^{i\nu^k t} \right|$$

コノ最後ノ式ヲ評価スルタメ von der Corput ノ定理

$g(u)$ ($0 \leq u \leq b$) ヲ k 回微分可能ナル実函数トスル 若シモ恒ニ

$g^{(k)}(u) \geq r$ 或ハ $\leq -r$ ($r, b =$ 任意係ナル正数) ナラバ

$$R = \frac{1}{b-a} |g^{(k-1)}(b) - g^{(k-1)}(a)|, \quad k = 2^k \quad (k \geq 2) \text{ トオケバ}$$

$$\left| \sum_{a \leq x \leq b} e^{2\pi i g(x)} \right| \leq 2(b-a) \left[\left(\frac{r}{R^2} \right)^{-\frac{1}{k-2}} + \left\{ r(b-a)^k \right\}^{-\frac{2}{k}} + \left\{ \frac{r(b-a)}{R} \right\}^{-\frac{2}{k}} \right],$$

$$\text{今 } g(u) = \frac{u^k t}{2\pi} \quad \text{トオケバ} \quad g^{(k-1)}(u) = \frac{k!}{2\pi} u t,$$

$$g^{(k)}(u) = \frac{k!}{2\pi} t \quad (t > 0), \quad u = \text{無関係ナル故ニヲリトオク}$$

$$a = 0, \quad b = n \text{ トスレバ} \quad R = \frac{k!}{2\pi} t (= r)$$

$$\text{故ニチ } 2^k = x, \quad A = \left(\frac{k!}{2\pi} \right)^{\frac{1}{k-2}}, \quad B = \left(\frac{k!}{2\pi} \right)^{-\frac{2}{k}}, \quad \text{トオクトキ}$$

$$\left| \sum_{\nu=1}^n e^{i\nu^k t} \right| \leq 2(n) \left\{ A t^{\frac{1}{k-2}} + B (n^k t)^{-\frac{2}{k}} + n^{-\frac{2}{k}} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

(3) ヲ次ノ如ク分テ夫々 評価スル。

$$I_n = \frac{1}{n\pi} \left[\int_0^{\frac{1}{n^k}} + \int_{\frac{1}{n^k}}^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n^2}} + \int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{n^3}} \right] = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

¹⁾ Z. Zalcwasser, sur la sommabilité des séries de Fourier. *Studia Mathematica* 6 (1936). pp. 32-38.