164. Wallmanの compactification に就て

森田紀一 (1949. 5. 21)

完全正則空間Rをコンパクトな Hausdorff 空間Sへうつす連続写像は Čech のコンパクト化 $\beta(R)$ からSへの連続写像に拡張されることはよく知られているが、ここでは、

定理. 『T_1 空間RをコンパクトなHausdorff 空間Sへうつす連続写像は Wallman のコンパクト化 $w(R)$ から Sへの連続写像に拡張出来る』

ことを証明しよう。此の定理から「完全正則空間Rに対しては $w(R)$ から $\beta(R)$ の上へ Rの各点を不変に保つような連続写像が存在する」ことが直ちに知られるが、之は既に小松氏等により証明された結果である。[1] 又「T_1 空間Rで定義された有界連続実函数は $w(R)$ にまで拡張される」という長田潤一氏の定理[2]も上の定理の特別な場合として得られる。(Tychonoff の定理を使へば、此の長田氏の定理から逆に上の定理が導かれる)

T_1 空間Rに於て、閉集合に依る極大フィルターの集合を R^* とし、Rの開集合Gに対し、$X \subset G$ なる閉集合Xを含む極大フィルターの全体を G^* とし、かゝる G^* の全体を R^* の open basis とした位相空間 R^* が即ち $w(R)$ である。以下上の定理の証明を述べよう。

扨てRをコンパクトな Hausdorff 空間Sへうつす連続写像 f が与えられたとする。R^* の一点 $X = \{X_\alpha\}$ に対し ($\{X_\alpha\}$ はRの極大フィルター)。Sに於ける集合系 $\{\overline{f(X_\alpha)}\}$ は有限交叉性をもつから、$\bigcap_\alpha \overline{f(X_\alpha)} \neq 0$。
相異る二点 a, b がこの共通集合に含まれるとすれば $\overline{V(a)} \cap \overline{V(b)} = 0$ なる a, b の近傍 $V(a)$, $V(b)$ がある。$\overline{V(a)} \cap f(X_\alpha) \neq 0$, $\overline{V(b)} \cap f(X_\alpha) \neq 0$ より、$A = f^{-1}(\overline{V(a)})$, $B = f^{-1}(\overline{V(b)})$ は閉集合なる故、極大フィルター X に属しなければならないが、$A \cap B = 0$ であるから之は矛盾である。
従って $\bigcap_\alpha \overline{f(X_\alpha)}$ は唯一点のみよりなる。この点を $f^*(X)$ とおく。XがRの点 x を含む極大フィルターなるときは、$f^*(X) = f(x)$ なることは明らかであるから、f^* が R^* で連続なることを証明すればよい。

$f^*(X)$ の任意の近傍 W に対し、$\overline{V} \subset W$ なる近傍Vをとり、$f^{-1}(V) = U$ とおけば、UはRの開集合であるが、U^* はXを含む。何となれば

$X=\{X_\alpha\}$ とすれば　$f^*(X)=\bigcap_\alpha \overline{f(X_\alpha)}$，よって S がコンパクトなることより，$f^*(X)\subset V$ から

$$\bigcap_i \overline{f(X_{\alpha_i})} \subset V$$

なる有限個の X_{α_i} $(i=1,2,\cdots\cdots,\nu)$ がある．之等の X_{α_i} の共通集合は X に含まれるから，例へば X_β とすれば，

$$f(X_\beta) \subset V$$

よって　$X_\beta \subset f^{-1}(V)=U$．　従って　$X\in U^*$

即ち　U^* は X の近傍である．次に $X'\in U^*$ とすれば X' は $X'_\alpha \subset U$ なる開集合 X'_α を含む．従って $f(X'_\alpha)\subset V$ より $f^*(X')\in \overline{f(X'_\alpha)}\subset\bar{V}\subset W$．
故に f^* は R^* で連続である．　之で上の定理が証明された．

尚 T空間に対しても，この開集合による極大フィルター $\{X_\alpha\}$ のうち $\bigcap_\alpha X_\alpha=0$ なる如きものをつけ加えることによって　コンパクトな T空間が得られ 之れ Wallman のコンパクト化といってよいであらうが 之に対して上述の定理がやはり成立することは 上の証明から明らかであらう．

註 1）小松氏，紙上談話会第2輯第8号；武隈氏，同上，第2輯第11号には Alexandroff の証明が紹介されてゐる

2）1)の小松氏の論文参照．