



Title	凸集合の或種の拡張について I (星型集合)
Author(s)	田村, 孝行
Citation	全国紙上数学談話会. 1949, 2(15), p. 548-562
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75300
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

165. 凸集合の或種の拡張について I

(星型集合)

田村 孝行 (1949. 4. 14)

§1. 記号の規約

Ω を Euclid・2次元空間とし Ω における点を $x, y, a, \dots$ 等で、
点集合を $X, Y, A, \dots$ 等で表し. M' は M の餘集合, $\bar{M}$ は M の closure,
 M° は M の内成分 (すべての内点の集合) M^o は外成分 (すべての外点の集合),
 M^* は M の境界, ϕ は 空集合を表す. 特に注意すべき記号として

(1) 線分, 半直線 等の点集合に関する記号

$[x, y]$ は x, y を含む閉線分, 特に $[x, x]$ は x -点を表す. 以下 $x+y$ とする.

(x, y) は $[x, y]$ から x 及び y を除く部分

$[x, y)$ は $[x, y]$ から y だけを除く. $(x, y]$ も同様

$\overline{[x, y]}$ は x, y を含む直線

$\overrightarrow{[x, y]}$ は x を起点とし y 方向への半直線, $\overleftarrow{[x, y]}$ も同様.

$(x, \overrightarrow{y})$ は $\overrightarrow{[x, y]} - (x, y)$ $(\overleftarrow{x}, y)$ も同様.

$(x, \overleftarrow{y})$ は $\overleftarrow{[x, y]} - (x, y)$ $(\overleftarrow{x}, y)$ も同様.

$\overleftarrow{[x, y]}$ は $\overleftarrow{[x, y]} - (x, y)$ $\overleftarrow{(\overleftarrow{x}, y)} = \overleftarrow{[x, y]} - (x, y)$

半直線の別の表し方として

x を通る一つの半直線を原線とし、これとなす偏角 θ (正負あり) を以て x を通る任意の半直線を表し $H(\theta; x)$ とかく. 勿論 $H(0; x)$ は原線をさす. 但し $H(\theta; x)$ は x を含むものとし、 x を含まないときは $H(\theta; \check{x})$ とする. 又特に偏角を示す必要がないときは $H(x), H(\check{x})$ とする.

(iv) $\mathcal{F}(M)$ について

M を定集合, X を任意の集合とすると $X \cap M$ (但し $\neq \emptyset$ とす) が 連結 (connected) である事を X が M に関して連結であるといい、 $X \in \mathcal{F}(M)$ とかく. 例として $X = [a, b]$, $H(\theta; x)$ の場合を挙げておく.

example 1.

$a \neq b$ であるとき

$a, b \in M$ のとき $\begin{cases} [a, b] \in \mathcal{F}(M) \iff [a, b] \subset M \\ [a, b] \notin \mathcal{F}(M) \iff [a, b] \not\subset M \end{cases}$

$a \in M, b \in M'$ $\begin{cases} [a, b] \in \mathcal{F}(M) \iff \forall y \in [a, b] \cap M, [a, y] \in \mathcal{F}(M) \\ [a, b] \notin \mathcal{F}(M) \iff \exists y \in [a, b] \cap M, [a, y] \notin \mathcal{F}(M) \end{cases}$

$a = b$ のときも $a \in M$ であれば $[a, a] \in \mathcal{F}(M)$ と規約する. 而一点から成る集合も連結であるとする. 従つて $a \neq b$ 且つ $[a, b] \cap M$ が唯一点のときも $[a, b] \in \mathcal{F}(M)$

example 2.

$H(\theta; x) \in \mathcal{F}(M) \iff \forall y \in H(\theta; x), [x, y] \in \mathcal{F}(M)$

$H(\theta; x) \notin \mathcal{F}(M) \iff \exists y \in H(\theta; x), [x, y] \notin \mathcal{F}(M)$

($\forall, \exists$ 等の論理記号については 証明の必要はないと思う.)

(i) $\mathcal{J}_{x,y}(M)$ について

$\exists x, y \in X \cap M$ なる x と y が $X \cap M$ に含まれる連続曲線 (屈折線でもよい) で結ばれるとき $X \in \mathcal{J}_{x,y}(M)$ と記する。

(ii) 論理記号についての一注意

次の二通りの記号は非常に意味が違います。

$$\exists y : \forall x \sim$$

すべての x について $\sim$ であるような y が存在する。

従って y は x に *independent*

$$\forall x ; \exists y : \sim$$

x を任意にとると、それに応じて $\sim$ であるような y が存在する。

従って y は x に *depend* する。

其他の記号の規約については必要にたじ その都度証明する。

§2 本文の目的

convex の定義は “ $\forall x, y \in M, [x, y] \subset M$ ” であるが、前半の $\forall$ の一つを $\exists$ で代えること、 x は後半の $[x, y]$ を “ $[x, y]$ ” の “ $\bar{x}, \bar{y}$ ” で代えることによって二三の拡張が出る。即ち

$$(1) \exists x \in M : \forall y \in M, [x, y] \subset M$$

$$(2) \forall x \in M, \forall y \in M, [x, y] \subset M \text{ or } [\bar{x}, \bar{y}] \subset M$$

$$(3) \exists x \in M : \forall y \in M, [x, y] \subset M \text{ or } [\bar{x}, \bar{y}] \subset M$$

(1) の場合 M を星型集合 (*star set*)、(2) を準凸集合 (*semi-convex set*)

(3) を準星 (*semi-star set*) ということにする。

然しもっと広く拡張して次の如く定義する。

$$(4) \exists x \in \mathcal{J} : \forall y \in M, [x, y] \in \mathcal{J}(M) \text{ であるとき } M \text{ を扇型集合}$$

(*scalopped set*) と定義すると、*convex* は勿論、(1)(2)をも

含む。更に(3)についてはその餘集合がこれになる事が言える。これらの集合の

性質について調べた結果を報告したいと思う。尚この研究は出来るだけ初等的な方法を用いた事を注意しておく。

§3 一般的な星型集合

定義 点集合 M があって、 $\exists a \in M : \forall x \in M, [a, x] \subset M$ であるとき、

M を星型集合 (*star set*) といい、 a を星型集合の中心という。

このようなすべての $\alpha \in M$ の集合を M の中心集合 (centric set) といふ。 $C(M)$ で表す。

上の星型集合の定義は次の定義と同等である。

$$\exists \alpha \in M : \forall H(\alpha) \in \mathcal{H}(M)$$

尚 明かな事であるが、 M が Convex $\Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ が星型であって} \\ C(M) = M \end{cases}$

定理 1. 星型集合は連結である。

証. $\forall x, y \in M$ と $\alpha \in C(M)$ を通る $[x, \alpha] \cup [\alpha, y] (\subset M)$ で結ばれる。

定理 2. M を星型集合とするとき、 $\forall x \in M' ; \exists H(x) \subset M'$

証. もし $\exists x \in M' : \forall H(x) \not\subset M'$ とする。今 $\alpha \in C(M)$ なる α を一つとり、 $[\vec{\alpha}, x] - (\alpha, x) = H_0(x)$ とすると、 $H_0(x) \not\subset M'$ だから $\exists y \in H_0(x) \cap M$ 従って $[\alpha, y]$ が $x \in M'$ を含むことになり $\alpha \in C(M)$ であることに矛盾する。

系 C を Jordan 閉曲線、 C の内部有界な領域を $\text{int}(C)$ とする。

M を星型とするとき、 $C \subset M$ であれば $\text{int}(C) \subset M$

証 定理 2 より明らか。

次に $C(M)$ の重要な性質として。

定理 3. M を星型集合とするとき、中心集合 $C(M)$ は convex である。

証 一点のみから成る集合も Convex set と見なす事にすると、 $C(M)$ が一点だけの時は本文理はすでに成立つから、 $C(M)$ は一点以上あるものとする。
 $\forall \alpha, \beta (\neq) \in C(M), \forall c \in (\alpha, \beta) \rightarrow c \in C(M)$ である事を証明すればよい。その爲に $\forall \alpha, \beta (\neq) \in C(M), \exists c \in (\alpha, \beta) : c \in C(M)$ と仮定すると、 $C(M)$ の定義から明に $\exists x \in M : (c, x) \not\subset M$ 従って $\exists y \in M' \cap (c, x)$ 。然るに $[a, x], [\beta, x] [a, \beta]$ 何れも $\subset M$ であるから、 a, β, x を結ぶ閉折線の内部に $y \in M'$ を含む事になり定理 2, 系に矛盾。

尚簡単な事であるが 次の定理も蓄添えておく。

$$\exists \theta : 0 \leq \theta \leq 2\pi, H(\theta, x) \in \mathcal{F}(M)$$

$$\text{且 } \exists \varphi (\neq \theta) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, H(\varphi, x) \in \mathcal{F}(M)$$

証: 前半は明かであるが、問題はむしろ後半である、仮りに $\exists \vec{x} \in M - C(M)$:

$$\forall \theta : 0 \leq \theta \leq 2\pi, H(\theta, \vec{x}) \in \mathcal{F}(M) \text{ としよう。今 } \forall a \in C(M)$$

をとると、 $[\vec{a}, \vec{x}] = [a, x] \cup H(\theta_0; x)$ (但し $[\vec{a}, \vec{x}] - [a, x]$

を $H(\theta_0; x)$ とおく) $H(\theta_0; x) \in \mathcal{F}(M)$ なる故 $[\vec{a}, \vec{x}] \in \mathcal{F}(M)$

となり $a \in C(M)$ に戻る。これで条件が必要な事が 証せられたが、十分な事は明かである。

さて 星型 M に有界という条件を加えてみよう。

定理 5. M が有界な 星型集合であるとき

$a \in M$ が $a \in C(M)$ である為の必要十分な条件は

$$\forall x \in M', [a, x] \in \mathcal{F}(M) \text{ である。}$$

証 必要なることの証明

若し $a \in C(M)$ に対し、 $\exists x \in M'; [a, x] \in \mathcal{F}(M)$ とする。

$$\S 1. (a). ex. 1 \text{ により } \exists y \in [a, x] \cap M : [a, y] \in \mathcal{F}(M)$$

これは $a \in C(M)$ に矛盾する。

十分なることの証明:

$\forall x \in M', [a, x] \in \mathcal{F}(M)$ なる a が若し $a \in C(M)$ とする。

$\exists y \in M : [a, y] \in \mathcal{F}(M)$ (此の場合 $[a, y] \in \mathcal{F}(M)$ は)
だから、 $\exists z \in M' \cap [a, y]$ ($[a, y] \cap M$ と同じである)

一方 M の有界性により $\exists u \in M' \cap (a, \vec{y})$ 従って $[a, u] \in \mathcal{F}(M)$
となり a の条件に矛盾する。

注意: 定理 5 では有界という仮定が重要である、有界でない星集合では必ずしも成立しない。

定理 6. 有界集合 M が星型である為の必要十分な条件は

$$\exists a \in M : \forall x \in M', [a, x] \in \mathcal{F}(M)$$

注意: これも有界でないとは必ずしも成立しない、例えば、 N を有界凸集合とすると、 $\Omega - N$ は 明かに星型でないが、すべての点が上の条件を満足してゐる。

星型集合に領域 (domain) という条件を与える。尚この追加条件は *open set* という条件を与えるのと同じである。これは 定理1 からすでに *connected* である事が保証されているから、星型開集合と星型領域又は単に星領域 (*star domain*) ということにする。

定理7. 星型領域は *simply connected* である。

証 定理2. 系より明かである。

定理8. M を星型領域とすれば $M - C(M)$ は *open set*

証 $\forall x \in M - C(M); \exists y \in M : [x, y] \not\subset M$. 従って
 $\exists p \in [x, y] \cap M'$, x, M は *domain* により
 $\exists \varepsilon > 0 : U(y; \varepsilon) \subset M$, ($U(y; \varepsilon)$ は y の ε -近傍を表す)
 x と p との距離を $dis(x, p)$ とすることにして
 $0 < \forall \delta < \varepsilon \frac{dis(x, p)}{dis(p, y)}$, $\forall z \in U(x; \delta), (z, \bar{p}) \cap U(y; \varepsilon) \neq \emptyset$
 $\times \forall u \in (z, \bar{p}) \cap U(y; \varepsilon), (z, u] \not\subset M$ ($p \in$ 含むから)
 $z \in M - C(M) \quad \therefore \bar{U}(x; \delta) \subset M - C(M)$

次に最も興味ある場合の一つとして 有界星領域 について調べる。

定理9. M は有界星領域とすると、

$a \in C(M)$ が $a \in C(M)$ であるための必要十分な条件は

$\forall r \in M^*, [a, r] \in J(M^*)$ なることである。

証 必要なることの証

$a \in C(M)$ に対し $\exists r \in M^* : [a, r] \in J(M^*)$ と仮定しよう。

然るとき $\exists t \in M^* \wedge (a, t) \cap J(M^*) \neq \emptyset$, $\exists x \in M^* : x \in (t, r)$.

従って $x \in M$ 或 $x \in M^0$

(i) $x \in M$ の場合

$\exists \varepsilon > 0 : U(x; \varepsilon) \subset M$. 一方 $t \in M^*$ により $0 < \forall \delta < \varepsilon \frac{dis(a, t)}{dis(a, x)}$.
 $\exists y \in M^* \cap U(x; \delta)$, 故に $\forall z \in U(x; \varepsilon) \cap (a, \bar{y}) \neq \emptyset$
 なる z をとると, $y \in [a, z]$ $[a, z] \not\subset M$
 故に $a \in C(M)$ と矛盾する。

(ii) $x \in M^0$ の場合

$\exists \varepsilon > 0 : U(x; \varepsilon) \subset M'$, 一方 $0 < \forall \delta < \varepsilon \frac{dis(a, r)}{dis(a, x)}$.

$$\forall u \in \overline{U(x; \delta)} \cap M, (a, u) \notin M \quad (\because \overline{U(x; \varepsilon)} \text{ を通る})$$

$\therefore a \in C(M)$ と矛盾

十分なることの証

$a \in M - C(M)$ なる a をとると, $\exists x \in M: (a, x) \notin M$ 従って

$$\exists y \in M' \cap (a, x) \quad \therefore \exists t \in M^* \cap (y, x)$$

一方 M の有界性により $\exists z \in M' \cap (a, x) \quad \therefore \exists \delta \in M^* \cap (x, z)$

$$(a, \delta) \exists x \in M^* \quad \therefore (a, \delta) \in \tilde{\bigcup}(M^*)$$

注意: 有界でない星領域では必ずしも成立しない.

$$\text{例: } M = \Omega - H(x)$$

有界であっても *open* でない星集合では必ずしも成立しない.

$$\text{例: } M = \overline{U(x; 1)} \cap \bigcup_k H\left(\frac{2k\pi}{\pi}; x\right)$$

但し $\overline{U(x; 1)}$ は x を中心とする単位円の内部, λ は一つの

実数値, $\bigcup_k$ はすべての自然数 k についての *summe* をとる.

$C(M)$ の具体的な構成について話ると, 次の結果を得る. 勿論 有界星領域としてであるが.

定理 10. M を有界星領域とすると

$$\Omega - C(M) = \bigcup_{\substack{r, \delta \in M^* \\ (r, \delta) \in M}} [\vec{r}, \vec{\delta}], \quad \text{ここに } \bigcup \text{ は } r, \delta \in M^* \text{ \& } (r, \delta) \in M \text{ であるすべての } (r, \delta) \text{ についての } \textit{summe}.$$

証: 定理 8 から 容易に

$r, \delta \in M^*, [\vec{r}, \vec{\delta}] \cap M$ の点は $C(M)$ の点でないから,

$$[\vec{r}, \vec{\delta}] \cap M \subset M - C(M) \subset \Omega - C(M)$$

又 明かに $[\vec{r}, \vec{s}] \cap M' \subset \Omega - C(M)$ 従って $[\vec{r}, \vec{\delta}] \subset \Omega - C(M)$

$$\therefore \bigcup [\vec{r}, \vec{\delta}] \subset \Omega - C(M)$$

逆に, $\forall x \in M - C(M); \exists y \in M, \& \exists p \in M': p \in (x, y)$

従って (x, y) に含まれ, 且 y に最も近い M^* の点 p がある (M が *open*

従って y は内点だからこのような $p(x, y)$ は必ず存在する.) 又 M が

有界により, $(x, \vec{y})$ に含まれ 且 y に最も近い M^* の点 $\delta(x, y)$ がある.

$$(r, \delta) \in M \text{ なる故 } x \in [\vec{r}, \vec{\delta}], r, \delta \in M^* \quad M - C(M) \subset \bigcup [\vec{r}, \vec{\delta}]$$

次に $z \in M'$ なる z についても 任意の $u \in M$ をとって上と同様に

$$\exists r \in [z, u] \cap M^*, \& \exists \delta \in (z, \vec{u}) \cap M^* : (r, \delta) \in M \text{ \& } z \in [\vec{r}, \vec{\delta}]$$

$$M \subset \bigcup \{\bar{r}, \bar{s}\}$$

$$\text{従って } \Omega - C(M) = (M - C(M)) \cup M' \subset \bigcup \{\bar{r}, \bar{s}\}$$

依って 本定理は証明せられた。

系 有界領域 M が星型である為の必要十分なる条件は

$$\bigcup_{\substack{r, s \in M \\ (r, s) \subset M}} \{\bar{r}, \bar{s}\} \neq \emptyset \quad \text{であること.}$$

§5. 二三の準備

星型領域を更に簡単にした場合の $C(M)$ の構造を考える為には その準備として 二三の事項を用ゐる。

(I) 単純領域 (simple domain)

定義 領域 D が次の条件を満足するとき、単純領域という。

$$(i) D^* = D^{0*} \quad (ii) \forall r \in D^* \exists \varepsilon > 0 : \bar{U}(r; \varepsilon) \in \mathcal{F}(D) \& \mathcal{F}(D^*)$$

D が単純領域であるは D^* も単純領域であり、 $\bar{D}$ (D の closure) の任意の点 x の近傍 $\bar{U}(x; \varepsilon) \in \mathcal{F}(D)$ である。ここでは単純領域の一般論は省略する。

(II) 角領域 (angular domain)

定義 $\bigcup_{\alpha < \theta < \beta} H(\theta; x)$ を点 x における、 α から β 迄の角領域といい $A_x(\alpha, \beta)$ で表す。但し $\bigcup_{\alpha < \theta < \beta} H(\theta; x)$ は $\alpha < \theta < \beta$ なるすべての θ についての summe

$\bigcup_{\alpha \leq \theta \leq \beta} H(\theta; x)$ を点 x における、 α から β 迄の閉角領域といい $A_x[\alpha, \beta]$ とする。

これらについて 次の如く規約する

$$(i) A_x(\alpha, \beta) = A_x(\beta, \alpha), \quad A_x[\alpha, \beta] = A_x[\beta, \alpha]$$

$$(ii) A_x(\alpha + 2n\pi, \beta + 2n\pi) = A_x(\alpha, \beta) \quad n=0, \pm 1, \pm 2,$$

() に代えても成立つ。

$$(iii) A_x(\alpha, \alpha) = H(\alpha; x) \quad A_x(0, 2\pi) = \Omega$$

定義 $\alpha \leq \beta$ とし $A_x(\alpha + 2\pi, \beta) \in A_x(\alpha, \beta)$ の共扼角領域といい $A_x(\widetilde{\alpha}, \beta)$ で表す。同様に $A_x(\alpha, \widetilde{\beta}) = A_x(\alpha, \beta + 2\pi) \in A_x(\alpha, \beta)$ の共扼閉角領域という。

Lemma 1. $x, y, z \in X$. ($y \neq z$). $y, z \in A_x(\alpha, \beta) \subset A_x(\alpha, \gamma)$
 且 $A_x(\alpha, \beta) \in \mathcal{F}_{y, z}(X) \rightarrow A_x(\alpha, \gamma) \in \mathcal{F}_{y, z}(X)$

Lemma 2. $y \in H(\alpha; x) \cap X$. $z \in H(\beta; x) \cap X$.
 $A_x(\alpha, \beta) \in \mathcal{F}_{y, z}(X)$ なるような y, z があるとき
 $\forall \gamma \in (\alpha, \beta)$, $\exists u \in H(\gamma; x) \cap X: A_x(\alpha, \gamma) \in \mathcal{F}_{y, u}(X)$

注意 $\alpha > \beta$ であれば $\alpha > \gamma > \beta$, $\alpha < \beta$ であれば $\alpha < \gamma < \beta$ なる如き γ と
 いう意味を $\gamma \in (\alpha, \beta)$ と略記した. 尚 $\gamma \in (\beta, \alpha)$ と書いてもよい.
 $\gamma \in (\alpha, \beta)$ は $\alpha \leq \gamma \leq \beta$, 又は $\alpha \geq \gamma \geq \beta$ の意味である.

注意 Lemma 1. は () をすべて () で代えても成立つ.

(II) 境界の接触線 切断線

D を有界領域として D^* の接触線, 切断線を定義する.

定義 $\Gamma \in D^*$ Γ を通る直線を L とする.

- (1) $\exists \varepsilon > 0: U(\Gamma; \varepsilon) \cap D \cap L = \emptyset$ であるとき L を Γ における D^* の外接触線
- (2) $\exists \varepsilon > 0: U(\Gamma; \varepsilon) \cap D^0 \cap L = \emptyset$ のとき L を Γ における D^* の内接触線
- (3) 特に L が Γ において外接触線と同時に内接触線であるとき,

L を Γ における D^* の全接触線

- (4) 上述の (1)(2) 何れかであるとき, L を Γ における D^* の接触線という.

定義 L が Γ において接触線でない時, 即ち

$\forall \varepsilon > 0, U(\Gamma; \varepsilon) \cap D \cap L \neq \emptyset$ & $U(\Gamma; \varepsilon) \cap D^0 \cap L \neq \emptyset$ であるとき, L を Γ における D^* の切断線という.

又 Γ における接触線が存在するとき, D^* は Γ において接触可能であるといふ. Γ を接触点という. 外触, 内触, 全触についても同様なことがいえる.

次に example として

Lemma 3. X を有界領域, $\exists x \in X': H(x) \subset X' \rightarrow x$ を含む
 $-X^*$ の外接触線が存在する.

$H(x) \subset X'$ なる $H(x)$ を一つとって $H(x) = H(0; x)$ とおき,

$H(\alpha; x) \cap X \neq \emptyset$ なる α を一つ定めることが出来る. 然るとき

$A_x[0, \alpha]$ 内で x から X^* の外接触線を引くことが出来ることを示すので

あるが, ここではすづみうだけにして, 具体的な証明は定理 11 にゆだねよう.

$A_x[0, \theta] \cap X = \emptyset$ (但し $\theta \in (0, \alpha)$) であるような ($\alpha > 0$ ならば)

θ の least upper bound (若し $\theta < 0$ ならば greatest lower bound) と $\bar{\theta}$ (これの許容性定理 1.1 の証に準ず) とすると、
 $H(\bar{\theta}; x)$ には X' の点があり (定理 1.1 の証参照)、しかも $H(\bar{\theta}; x)$ は X の点がない

$\therefore$ 若し $H(\bar{\theta}; x)$ に X の点 y があると、 $\exists \varepsilon > 0: U(y; \varepsilon) \subset X$
 今 $0 < \delta < \sin^{-1} \frac{\varepsilon}{\text{dis}(x, y)}$ なる δ をとると $A_x[0, \bar{\theta} - \delta] \cap X \neq \emptyset$
 これは $\bar{\theta}$ の l. u. b. (又ハ g. l. b.) に矛盾する。故に $H(\bar{\theta}; x)$ が
 外接触線である。

§6. 単純星領域における $C(M)$ と接触線の間接

以下 星領域に単純領域の条件を追加して、 $C(M)$ の構造と M^* の接触線との関連を調べるのが目的であるが、その前に、

Lemma 4. M を単純星領域とすると

$x \in M - C(M)$ なる x の必要十分な条件は

$\exists y \in M: (x, y] \cap M^* \neq \emptyset$ なることである。

証 $C(M)$ の定義により $\exists z \in M: (x, z] \not\subset M \iff \exists y \in M: (x, y] \cap M^* \neq \emptyset$ を証明すればよい。

$\exists z \in M: (x, z] \not\subset M$ を仮定すると、 $\exists p \in (x, z) \cap M^*$

然るに $M = M^* \cup M^o$ をから $p \in M^*$ としても差支えない。

($p \in M^o$ であればすでに問題は無い)

さて $z \in M \rightarrow \exists \varepsilon > 0: U(z; \varepsilon) \subset M$ 。一方 $0 < \forall \delta < \frac{\text{dis}(x, p)}{\text{dis}(x, z)} \varepsilon$

なる δ をとると M が simple domain なる事より $\exists q \in U(p; \delta) \cap M^o$

x と q とを結ぶと $(x, \vec{q}) \cap U(z; \varepsilon) \neq \emptyset$ 、そこで $\vec{q} \in (x, \vec{q}) \cap U(z; \varepsilon)$

なる y をとると、 $(x, y]$ は M^o の点 q を含む。逆の証明は容易である。

Lemma 5. M を星領域、 $\forall x, y (\neq) \in M$ に対し、 $\exists \alpha: -2\pi < \alpha < 2\pi$

$A_x[0, \alpha] \in \mathcal{J}_{x, y}(M)$ 但し $(x, \vec{y}) = H(0; x)$ とする。

証 $(x, y] \subset M$ ならば $\alpha = 0$ としに成立するから $x \in M - C(M)$

$\& (x, y] \not\subset M$ と仮定する。即ち $H(0; x) \in \mathcal{J}(M)$

然し 定理 4 により $\exists \alpha: 0 < \alpha < 2\pi, H(\alpha; x) \in \mathcal{J}(M)$

M の connectivity より $A_x[0, 2\pi] \in \mathcal{J}_{x, y}(M)$ となり、Lemma 2

より $\exists z \in H(\alpha; x) \cap M: A_x[0, \alpha] \in \mathcal{J}_{y, z}(M)$ となり $(x, z] \subset M$ なる

事と合せて $A_x[0, \alpha] \in \mathcal{J}_{x, y}(M)$

Lemma 6. M 星領域, $x, y (\neq) \in M, (x, y] \not\subset M$ & $A_x(0, x) \in \mathcal{F}_{xy}(M)$
 ならば $A_x(0, \tilde{x}) \in \mathcal{F}_{xy}(M)$

証 若し $A_x(0, x) \in \mathcal{F}_{xy}(M)$ なると同時に $A_x(0, \tilde{x}) \in \mathcal{F}_{xy}(M)$ と仮定しよう. 然るとき 連続曲線 $C_1 \subset A_x(0, x)$ $C_2 \subset A_x(0, \tilde{x})$ が存在するから, $C_1 \cup C_2$ は *closed curve* となり しかも内部に M' の点がある. これは定理 2 系に矛盾.

愈々問題の本定理に入り.

定理 11. M を有界単純星領域とするととき, $x \in M - C(M)$ とあれば, x を含む M' の外曲線が存在して 且その時の外曲点を α とすれば (x, α) が M' の点を含まないようにすることが出来る.

証 $x \in M - C(M) \rightarrow \exists y (\neq x) \in M: (x, y] \not\subset M$
 $(\overrightarrow{x, y}) = H(0; x)$ とすると Lemma 5 により, $\exists \omega: 0 < |\omega| < 2\pi$
 $H(\omega; x) \in \mathcal{F}(\tilde{y})$ & $A_x(0, \omega) \in \mathcal{F}_{x, y}(\tilde{y})$ & Lemma 6 により
 $A_x(0, \tilde{\omega}) = A_x(0, \omega \pm 2\pi) \in \mathcal{F}_{x, y}(M)$

注意 $\omega \pm 2\pi$ の符号の意味は次の通りである.

$\omega > 0$ のときは -, $\omega < 0$ のときは + をとる. 以下煩雑を避ける為

$\omega < 0$ 従って $0 < \omega + 2\pi$ の場合のみを論ずる.

$\omega > 0$ のときも証明のすぢみちは変らない.

(i) $0 \leq \theta \leq \omega + 2\pi$ において $\exists z \in H(\theta; x) \cap M: A_x(0, \theta) \in \mathcal{F}_{yz}(M)$ であるような θ の l. u. b が存在する. それを γ とする.

(Lemma 3 の証明の中にも同じことが出て来た. その時は許すをないが) ことで少し説明を加えておく. 前の Lemma 3 の中も同様の証明で出来る

$0 \leq \theta \leq \omega + 2\pi$ の θ を次の $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ とに分類する.

$\mathcal{A}: \exists z \in H(\theta; x) \cap M: A_x(0, \theta) \in \mathcal{F}_{yz}(M)$ なる θ の類

$\mathcal{B}: \forall z \in H(\theta; x) \cap M: A_x(0, \theta) \notin \mathcal{F}_{yz}(M)$ なる θ の類

(i) $0 \in \mathcal{A}$, $\omega + 2\pi \in \mathcal{B}$ だから $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ 共に空でない.

(ii) Lemma 1, 2 により $\forall \alpha \in \mathcal{A}$, $\forall \beta \in \mathcal{B} \rightarrow \alpha < \beta$

Schnitt により $(\mathcal{A} | \mathcal{B}) = \gamma$ を定める

(ii) $H(\gamma; x)$ には少くとも一つ M の *Haufungspunkt* がある.

(Lemma 3 の証明もこれと同様である)

$0 \leq \varepsilon \leq Y$ なる ε を任意にとると、 $H(Y - \frac{\varepsilon}{2^n}; \tilde{X})$ ($n=1, 2, \dots$)
 には 各 n に対して一つずつ 次のような α_n ($n=1, 2, \dots$)
 を とることが出来る。

$$\alpha_n \in H(Y - \frac{\varepsilon}{2^n}; \tilde{X}) \cap M, \text{ \& } A_x(0, Y - \frac{\varepsilon}{2^n}) \in \mathcal{F}_{y, \alpha_n}(M)$$

注意: $\frac{\varepsilon}{2^n}$ の形は *essential* なものでない。 $n \rightarrow \infty$ と共に $\rightarrow 0$
 になりさえすればよい。

α_n のすべての集合 $\{\alpha_n\}$ は有限である ($\because M$ が有限) から 少くとも
 一つ *limit point* がある。 この一つを α とすれば、
 $\alpha \in H(Y; \tilde{X})$ なることは明かである

(iii) $\exists \delta > 0 : H(Y; x) \cap U(\alpha; \delta)$ には M の (内) 点がない。

α が外点でないことは明かであるから、境界点であることを証明する為には、
 α が M の点でないことを 証明せねばならぬ。 更に進めて、

$U(\alpha; \delta) \cap H(Y; x)$ には M の点 がないような 近傍 $U(\alpha; \delta)$
 の存在を証明すれば十分である。

さて M は *simple domain* であるから、

$$\forall m \in \bar{M}, \exists \delta > 0 : U(m; \delta) \in \mathcal{F}(M), \quad (\bar{M} \text{ は closed})$$

今 $\alpha \in \bar{M} \rightarrow \exists \delta > 0 : U(\alpha; \delta) \in \mathcal{F}(M)$ なる δ を定めるとき

$U(\alpha; \delta) \cap H(Y; x)$ には M の点がない事が言える。

$\therefore$ 若し $\exists \beta \in U(\alpha; \delta) \cap H(Y; x) \cap M$ とすると、

$$0 < \exists \eta < \delta - \text{dis}(\alpha, \beta) : U(\beta; \eta) \subset M \text{ だから}$$

$$\alpha \in A_x(\delta, \omega + 2\pi) \cap U(\beta; \eta) \cap M \text{ なる } \alpha \text{ を一つとっておく。}$$

又一方 $U(\alpha; \delta)$ 内にある前述の $\{\alpha_n\}$ の中の一つを α_k とすると、

$$U(\alpha; \delta) \in \mathcal{F}_{\alpha_k, \alpha}(M) \text{ 又明に } A_x(0, Y) \in \mathcal{F}_{y, \alpha_k}(M) \text{ である故、}$$

今 $\alpha \in H(Y + \zeta; x)$, $0 < \zeta < \omega + 2\pi - Y$ とすると、

$A_x(0, Y + \zeta) \in \mathcal{F}_{y, \alpha}(M)$ となる。これは Y が *l.u.b.* なる事に
 矛盾する。

以上で $H(Y; x)$ が α における M^* の外縁線であることの証明が完了したが
 (x, α) に M^0 の点がある事を 証せねばならぬ。

(iv) (x, α) に M^0 の点があること。

$H(Y; x)$ に対して x に最も近い M^* の点を β とする。勿論 $\alpha \neq \beta$ で

あることが言われる. ($\because (x, \delta) \cap (\delta \text{ の Umgebung })$ に M の点がある).

(δ, α) に M° の点があることを示そう

若し $(\delta, \alpha) \subset \overline{M}$ と仮定する. $-\{ \delta, \alpha \}$ のすべての点 v に $U(v; \varepsilon_v)$, $0 < \varepsilon_v < \text{dis}(x, v)$, $\sin \gamma$ に対応させると, (δ, α) が有界 closed により $\{U(v; \varepsilon_v)\}$ の中の有限個で $(\delta, \alpha) \subset \bigcup_{i=1}^j U(v_i; \varepsilon_{v_i})$, 但し $\delta \in U(v_1; \varepsilon_{v_1})$, $\alpha \in U(v_j; \varepsilon_{v_j})$.

又 $p_i \in U(v_i; \varepsilon_{v_i}) \cap U(v_{i+1}; \varepsilon_{v_{i+1}}) \cap M$, $i=1, 2, \dots, j-1$

$p_j \in U(v_j; \varepsilon_{v_j}) \cap \{ \alpha \}$, $p_0 \in U(v_1; \varepsilon_{v_1}) \cap (x, \delta)$

なる $p_0, p_1, \dots, p_j$ をとると, M が simple domain

なる故, $U(v_i; \varepsilon_{v_i}) \in \{p_{i-1}, p_i\}(M)$, ($i=1, 2, \dots, j$).

又 $A_x[0, \gamma] \in \{y, p_0\}(M)$ 及び $(x, p_0) \subset M$,

従って $A_x[0, \omega] \in \{x, y\}(M)$.

$(\bigcup_{i=1}^j U(v_i; \varepsilon_{v_i})) \subset A_x(0, \omega+2\pi)$ 故から p_0 と x が $A_x(0, \omega+2\pi)$ 内に含まれる). 此は Lemma 6 に矛盾する.

(x, α) には必ず M° の点がある. これで本定理の証明は完了するが.

逆として

定理 12. M を有界星型, 単純領域とすると, $x (\in M)$ を含んで $(x, \alpha) \cap M^\circ \neq \emptyset$

あるような M^* の外触線, $(x, \overrightarrow{\alpha})$ が存在するならば, $x \in C(M)$

但し α は外触点

証 $p \in (x, \alpha) \cap M^\circ \rightarrow \exists \eta > 0 : U(p; \eta) \subset M^\circ$

$0 < \varepsilon < \frac{\text{dis}(x, \alpha)}{\text{dis}(x, p)} \eta$ なるように ε をとると $\exists y \in U(\alpha; \varepsilon) \cap M$

そして $(x, y) \cap U(p; \eta) \neq \emptyset \quad \therefore (x, y) \not\subset M \quad \therefore x \in C(M)$

定理 13. M を有界単純星領域とし, $x \in M - C(M)$ ならば x を含む M^* の

内触線が存在し, 且 内触点を α とすると, $(x, \overrightarrow{\alpha})$ が M の点

を含むようにする事が出来る.

証 Lemma 4 により $\exists y \in M : (x, y) \cap M^\circ \neq \emptyset$, $(x, \overrightarrow{y}) = H(0; x)$

とする. 又 定理 4 により $\exists \omega : H(\omega; x) \in \{ \} (M)$ (便宜上

$\omega > 0$ とする) Lemma 5 より $A_x[0, \omega] \in \{x, y\}(M)$.

この x, y を結ぶ屈折線を $C(\subset M)$ とし, $C \cup (x, y)$ (閉屈折線) の

内部にある M° の部分集合を N とすれば、 N は有界であり、 $H(\omega; x) \subset N'$ 故に Lemma 3 により、 x を含む N の外触線が存在し、これがそのまゝ、 M の内触線になることが言われる。

$(x, \vec{\alpha})$ が M の点を含むことも、定理 13 の証明の (iv) と同様の方法で証明されるが、ここでは省略する。

定理 14. M 有界 単純星領域 $x \in C(M)$ を含む、 $(x, \vec{\alpha}) \cap M \neq \emptyset$ なるような M^* の内触線が存在するならば $x \in C(M)$ 。

但し α は内点。

(註) 定理 12 と同じ方法で証明される。

定理 15. $x \in C(M)^\circ$ ($C(M)$ の内点の集合) ならば x を含む M^* の接触線は存在しない。但し M は有界 単純星領域。

証 (i) $\forall x \in C(M)^\circ, \forall r \in M^* \rightarrow [x, r] \subset M$ を証明する。

若し $[x, r]$ に M' の点 p があるとせよ。

$x \in C(M)^\circ \rightarrow \exists \delta > 0 : \bar{U}(x; \delta) \subset C(M)$

一方 $0 < \varepsilon < \frac{\text{dis}(p, r)}{\text{dis}(x, r)} \delta$ なる ε を一つとると、

$\bar{U}(p; \varepsilon) \cap M^\circ \neq \emptyset$ ($\because M$ の単純性より $M' = M^* \cup M^\circ = M^{\circ*} \cup M^\circ$ 故に $p \in M^{\circ*} \cup M^\circ$ だから)

$q \in \bar{U}(p; \varepsilon) \cap M^\circ$ とすれば $(r, \vec{q}) \cap \bar{U}(x; \delta) \neq \emptyset$ この含む点を s とすれば $s \in C(M)$ 即ち $\vec{q} \in (s, r)$

然るに $\vec{q} \in M^\circ$ だから $(s, \vec{q})$ に M^* の点がある。これは定理 9 に反する。

(ii) $(x, \vec{r}) \subset M^\circ$ を証明する

若し $(x, \vec{r})$ に $\bar{M}$ の点 f があるとすると、 $0 < \varepsilon < \frac{\text{dis}(f, r)}{\text{dis}(x, r)} \delta$ $\bar{U}(f; \varepsilon)$ に M の点 f をとれば、 M の有界性より $(r, \vec{f})$ に M^* の点があり、又 $(f, \vec{r}) \cap \bar{U}(x; \delta) \neq \emptyset$ となり、(i) の結論と同様になる。

定理 16. M 有界星領域とすると、 M' の任意の点を含む、 M^* の外触線が存在する。

証 Lemma 3. (定理 11 の証明方法に倣って証明される) と定理 2. により明らかである。

定理11より定理16迄を綜合すると 次の事がいえる。

定理17. $r \in M^*$. r を外触点とする 外触線を $L(r)$ $T = \bigcup L(r)$
($\bigcup$ は外触可能な $r \in M^*$ すべてに亘る)

とすれば, $\Omega - T \subset C(M)$; $C(M)^i \subset \Omega - T$

定理17. は “外触” を “接触” で置換えても成立する. 勿論 定理17. の M は 有界単純星領域である.

当然 結論されることであるが $C(M) - C(M)^i$ の点を通じて M^* の接触線が引けるかどうかは一概に言えない. しかし 若し $C(M) - C(M)^i$ の点 x から 接触線が引ける場合は, 全触線が引かれて (x, r) に外点がない, 且 $(x, \vec{r})$ に内点がないように出来る. (r は 全触点である)

例えば M を, 到處 *glatt* な *closed curve* に包圍された星領域とすれば, T はすべての切線におはわれる部分である. 但し, 交曲点における切線を除く.

附記, 以上つまらぬ事が冗長に過ぎた事を御詫びします.

参考文献 *Hausdorff* *Mengenlehre.*
辻 正 次 集 合 論