



Title	The Dirichlet problem at infinity on Hadamard manifolds
Author(s)	久村, 裕憲
Citation	大阪大学, 1995, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.11501/3100497
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

氏名	久村裕憲
博士の専攻分野の名称	博士(理学)
学位記番号	第 11715 号
学位授与年月日	平成7年3月23日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当 理学研究科数学専攻
学位論文名	The Dirichlet problem at infinity on Hadamard manifolds (アダマール多様体上の漸近的ディリクレ問題)
論文審査委員	(主査) 教授 尾関 英樹 (副査) 教授 井川 満 教授 坂根 由昌 助教授 竹腰 見昭

論文内容の要旨

M を n 次元 Hadamard 多様体, 即ち, 非正の断面曲率を持つ単連結, 完備な Riemann 多様体とする。Eberlein と O'Neill は測地線を使って M のコンパクト化 $\overline{M} = M \cup S(\infty)$ を定義した。それは $(M, S(\infty))$ と (B^n, S^{n-1}) が位相同型となるようなものであった。ここで B^n は R^n の半径 1 の開球で S^{n-1} はその境界, すなわち, 単位球面である。さて本論文においては次の Dirichlet 問題を考察した。

漸近的 Dirichlet 問題 無限球 $S(\infty)$ 上の任意の連続関数 f に対して,
 $u \in C^\infty(M) \cap C^0(\overline{M})$ かつ $u|_{S(\infty)} = f$ なる調和関数 u は存在するか?

次はこの問題に対する本論文の主結果である。

主結果 M を 3 次元以上の Hadamard 多様体とし, ある正定数 $a, C, b \in (0, a)$ が存在して

$$(1) -C \exp\{b \rho(x)\} \leq K_M(x) \leq -a^2,$$

が M からコンパクト集合を除いたすべての点 x で成り立つとする。このとき漸近的 Dirichlet 問題は解ける。ここで, $K_M(x)$ は点 x における全ての断面曲率を動き, $\rho(x)$ は M の任意の固定点から x までの距離を表す。

これは Anderson, Sullivan, Hsu-March の結果の一般化である。特に, Hsu と March は確率論の方法を用いて, 曲率条件

$$-L^2 \rho^2(x) \leq K_M(x) \leq -U^2$$

(x は M からコンパクト集合を除いたすべての点を動く) の下で漸近的 Dirichlet 問題が解けることを示した。ここで U と L は $U^2/L > (n-1)/2$ なる正定数である。しかし彼らの方法は保存則 $\int_M P(x, y, t) dV(y) \equiv 1$ を必要とし(ここで $P(x, y, t)$ は M の最小熱核), そのため条件, $K_M(x) \geq -L^2 \rho^2(x)$ を仮定している。本論文では, Schoen のテクニックと比較定理, 最大値原理を使って, 保存則が成立しないようなときでも漸近的 Dirichlet 問題が解けることを示した。

なお, 曲率条件

$$(2) -C \rho(x)^{L-2} \{\log \rho(x)\}^{-1-\theta} \leq K_M(x) \leq -L(L-1) \rho(x)^{-2}$$

(ここで, $L > 2, C, \theta$ は正定数, または x は M からコンパクト集合を除いたすべての点を動く) の下でも漸近的 Dirichlet 問題が解けることが分かる。また, これらの結果と芥川氏の議論を合わせることにより, Hadamard 多様体 M が曲率条件(1)または(2)を満たすとき, M から他の Hadamard 多様体への有界な調和写像に対する漸近的 Dirichlet

問題が解けることも分かる。これらのことにも注意されたい。

論文審査の結果の要旨

M をアダマール多様体 ($\dim M \geq 3$), その断面曲率, リッチ曲率を K, Ric とする。

久村君は本論文の主結果として, M 上の漸近的 Dirichlet 問題が以下の条件のもと肯定的に解けることを示した。

条件: 定数 $C > 0, a > b > 0$ が存在して

$$K \leq -a^2, Ric(x) \geq -C \exp(\rho(x))$$

が M のコンパクト集合を除いたすべての点で成立する。ここに, $\rho(x)$ は M の定点からの距離を表す。

これは, Yau の提起した問題に対する, 現在のところ, 最善の結果である。今後この方面への研究に寄与するところ大であり, 博士 (理学) の学位論文として十分価値あるものと認める。