Title	日本文化としての数学 : 和算と算額
Author(s)	森田, 健
Citation	日本語・日本文化. 2020, 47, p. 81-107
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75881
rights	
Note	

〈研究ノート〉

日本文化としての数学
—和算と算額—

森田　健

概　要

本稿では、主に江戸時代に大きな発展を遂げた「和算」と「算額」について述べる。これらの数学は、日本で独自に発達した「文化的価値を有するもの」であるが、西洋数学の輸入に伴い、大部分が徐々に歴史の中に埋もれてしまった。特に算額はその発展過程の特異性から、資料が全国各地に散逸しており、全体像を把握することは非常に難しい [13]。

そこで本研究においては、特に大阪府と奈良県を中心とした近畿圏の算額に焦点を当てつつ、これらを網羅的に把握することを試みる。更に、西洋数学との価値観の違いに注目することで選出した算額の例も挙げる。これにより、和算と算額の持つ文化的側面が、より国際的な理解を得られるための“踏み込んだ一歩”となることが期待されるためである。

1.　古代から近世までの日本の数学

本稿では主に、日本独自の数学「和算」および「算額」について述べる。近年、海外の研究者からも注目されつつある和算ではあるが [12,14,15,16]、個別の問題に対する研究が多く、その全体像は捉えにくい。そこで、最初期の数学から振り返ることにする。まずこの「和算」という言葉の導入を紹介する。1877 年（明治 10 年）に東京数学社 *1 において、今後は洋算すなわち西洋の数学を用いることが決定され、それに対して江戸時代までの日本において発展した数学を指す言葉として定義されたのが「和算」である。ただし、日本の数学が和算という

*1　現在の日本数学会のことである。

一言で理解されるほど順調な発展を遂げたわけではないので [9]、本節では城地茂 [6] の分類を援用しつつ、和算という文化に至るまでの歴史を述べることにする。表 1 は、城地による時代の分類に基づき、本稿で用いる情報を抽出したものである。この分類では 554 年から 1280 年を「古代」、1281 年から 1871 年を「近世」、さらに「和算」という言葉が定義された 1877 年以降を「近代」と呼ぶ。また、古代は「律令期」と「格式期」と分けられる。さらに近世は「前和算期」と「和算期」に分けられ、特に数学文化が大きく花開いた「和算期」は「勘定方和算期」と「地方和算期」に分けられている。

表 1 における「古代」の数学は、下に述べるように「中国から輸入した数学を模倣する」という性格が強く、数学的なオリジナリティという観点からはあまり評価できない。しかし、当時の数学の用いられ方を知る上では貴重な資料であると言える。従って次節では、中国から輸入された数学を当時の人々がどのように扱っていたかを述べることにする。

表 1　日本における数学の発展（城地茂による）

大区分	中区分	小区分と年代	
和算	古代（554年～1280年）	律令期（554 年～ 730 年）	
		格式期（731 年～ 1280 年）	
	近世（1281年～1876年）	前和算期（1281 年～ 1673 年）	
		和算期	勘定方和算期（1674 年～ 1780 年）
			地方（じかた）和算期（1787 年～ 1876 年）
洋算	近代（1877年～）		

1.1　中国から伝わった数学と古代の数学

日本における書物で数学に関する記述が見られるようになるのは 8 世紀以降のことであり、それより前の段階で見つけることは困難である。8 世紀以降になると、律令制度の維持を主な目的として、北中国から輸入された数学を模倣する形で計算技術などが広まった。

奈良文化財研究所が 2010 年 12 月 3 日に行った発表によると、平城宮跡で出土した「九九」を記した 8 世紀の木簡に、中国の数学書である『孫子算経』で用いられていたものと同一の意味の「如」の文字が記述されていたことが判明した（図 1)。右下に「一九如九」と書かれており、「いんくはくのごとし」と読む。同研究所は、九九が中国から伝来したものを端的に示すものという解釈を与えている。

九九そのものは、中国では春秋時代（紀元前 770 年～前 403 年）に用いられ始めた。従って、約 1000 年後に奈良時代の日本で影響を与えたということになる。8 世紀初頭における奈良の支配者は学寮を作り、そこで中国から輸入した以下の 9 冊の数学書の学習を命じた。

1. 孫子算経
2. 九章算術
3. 周碑算経
4. 海島算経
5. 五曹算経
6. 綴術
7. 三開重差
8. 九司算経
9. 六章算経

特に『九章算術』は重用された。この書物はタイトル通り、九つの章で構成されている。また『孫子算経』は上中下の 3 巻に分かれており、上巻には算木の操作方法の他に度量衡や大数、少数の単位などが書かれていた。ただしこの時点では大数の単位として、億、兆、京、…、溝、澗、正、戴と記されており、戴が最大値である。極やインド由来の大きな数字（恒河沙、阿僧祇、那由多、不可思議、無量大数）は未だ出てきていない。

図 1　九九の書かれた木簡
（奈良文化財研究所所蔵）

これらの数学書は、四則演算と基本的な代数演算を扱っており、律令政治の維持の一環として、次のような技術を習得するために用いられた。

1. 算木(さんぎ)[*2]を用いて田畑の測量を行う。
2. 納税額の計算を行う。
3. 土木工事の分担を計算する。
   更に、より規模の大きなものとして
4. 天体の運行の計算
5. 農業用の暦の作成を行い、作業効率を上げる

などが試みられていた。ただし、この当時は未だ中国の模倣という側面が大きく、緯度や経度、地形などによって計算技法や変数を変える必要が出てくる農業暦の精度は甘かったようである。

また当時の人々は、単に実用的な道具としてのみ九九を扱ったわけではなく、文化面にも積極的に取り入れていた。例えば新元号「令和」の引用元となって再び脚光を浴びた『万葉集』には、九九を用いなければ解釈できない句が散見される。

例　以下は、『万葉集』[4] 巻第十一・正述心緒 2542 番の句である。

若草乃　新手枕乎　巻始而　夜哉将間　二八十一不在国

これは「若草の新手枕(にひたまくら)を巻き初(そ)めて夜をや隔てむ憎(にく)くあらなくに」となるのだが、「八十一」の部分を「くく」と読ませており、いわゆる

$$81=9\times 9$$

を意味している。このような使用例は他にも猪(しし)を

$$16=4\times 4$$

の計算に基づいて「十六」と表記していたり、平仮名の「し」を

$$4=2\times 2=2^2$$

に基づき「二二」や「重二」と表記しているものや、「とを」を

*2 マッチ棒の頭薬を取り去ったような木片または竹の棒のこと。現代の計算機に相当する。

$$10 = 2 \times 5$$

の計算から「二五」と表現するといったようなものがある。これは当時の段階では未だ平仮名が開発されていなかったため、表現をより豊かにするために用いられた手法の一つであると解釈されている。古代の段階では、数学者は「特殊技能を身につけた貴族」であり、科学技術的側面だけでなく文化的側面にも少なからず影響を及ぼしていたことが窺える。

1.2　中世の数学

しかしながら、以後 17 世紀までの約 900 年の間に日本で出版された様々な文献には、数学の発展に関する記述は全く存在しない。西洋と同じく、当時の支配者や聖職者が科学的な事柄に興味を持たなかったためであろう。一方、計算技術に関する記述は数少ないものの残されている。例えば、1241 年ごろに鴨長明によって著された『発心集』に書かれている約百話の説話の中の二つに、算木に関するものがある。また、13 世紀前半頃に成立した『宇治拾遺物語』に含まれる百九十七の説話の一つに、算木を上手に使いたいと願う男が描かれている。これらの記述から、計算を行う際には依然として算木のみを用いており、高度な数学への発展は特に起きていなかったことが窺われる。この状況は鎌倉時代を経て室町時代を通して変わらなかった。従って、近世の数学者は「特殊技能を身につけた武士」が大半であったということになる。

状況が一変したのは、豊臣秀吉による朝鮮出兵であった。歴史的には失敗と捉えられることの多いこの出兵であるが、中国から算盤（そろばん）を輸入するきっかけとなったのである。実際、1592 年頃に豊臣秀吉の基地の一つであった佐賀の名護屋城にいた兵が、輸入された算盤を所持していたという記録が残っている。更に近隣のアジア諸国との貿易が活発になると、中国から様々な算盤が輸入されるようになった。これらの新しい計算のためのツールが、日本の数学に大きな影響を与えることになる。この新しい道具を使いこなすために、中国の程太位による算盤解説書『算法統宗』に影響を受けた毛利重能が 1622 年に『割算書』を著した。毛利重能は 1600 年代に数値計算の分野で活躍した算術家である。『割算書』は現代で言うところの計算練習帳のような役割を果たした本である。算盤とほぼ同時に

日本に輸入された『算法統宗』は、毛利重能の著作だけでなく、和算の発展にも大きな影響を与えた。以下ではこのことについて述べる。

1.3　和算の萌芽

京都の和算家、吉田光由（1958 年～ 1672 年）は『算法統宗』を詳細に学び、本文中の問題に図版を追加することで、1627 年に日本初となる本格的な数学書『塵劫記』[11] を著した。タイトルは当時の今様歌謡集『梁塵秘抄』にある、仏教用語からの引用とされている。“塵”はごく小さな数を、“劫”は巨大な数を意味する。この本は 400 年以上にわたって出版され続けた大ベストセラーであり、吉田自身によって出版された塵劫記は、少なくとも 7 版あるとされている。また、改変された異版や海賊版は 300 以上も存在している。これらは出版時にタイトルも改変され、『近道塵劫記』、『富貴塵劫記』、『童寶塵劫記』などバリエーション豊かである。ただし吉田自身、この海賊版には苦しんだようで、対策として“未解決の問題を巻末に載せる”ということを行なった。詳しくは後述するが、この海賊版対策が大いに当時の和算家を刺激し、和算の発展に結びついたのである。

『塵劫記』は算盤の練習帳としての役割を持っていた一方で、当時としては時代遅れとも言える、算木を用いた計算も扱っていた。日常生活において、算盤は四則演算が速く大変優秀な計算機であった反面、和算家が興味を持っていた“高次方程式の解法の研究”には適していなかったためである。単純に実用性を追い求めて算盤のみを扱うのではなく、研究にはあらゆる道具を用いる必要があるという姿勢が垣間見られる。その見立ては正しく、結局 19 世紀まで算盤と併用する形で算木が用いられた。一般的に、日本独自の数学としての“和算”は、この『塵劫記』の出版が原点になるとされる。

2　和算の発展

吉田光由が『塵劫記』を出版して間もなく、日本は鎖国を実施した。平和であった江戸時代においては、戦闘を行う必要が無かったため、従って武士の給料は安かった。特に生活が苦しい下級武士は、副業として個人塾で教師として教え

ることが多かったのである。この当時既に、計算技術は貴族や武士のみではなく、田畑の面積計算を行うために農民にも必要なものとなっていた。階級に関係なく身に付けておくべき能力としての“読み・書き・算盤”を教える塾は大流行し、19 世紀には 8 万軒以上の個人塾が存在したとされる。このような背景のもと、数学は学習する人口が爆発的に増加し、多くの人々により切磋琢磨されることで発展したのである。

では次に、数学に興味を持った当時の人々を奮い立たせる切っ掛けとなった 2 つの習慣を紹介する。それらは一般に

1. 遺題（いだい）継承
2. 算額奉納

と呼ばれている。以下では、それぞれについて述べることにする。

2.1　遺題継承

1.3 でも述べたように、『塵劫記』を著した吉田光由は、出版当時からいわゆる海賊版に悩まされていた。そこで、解決策として 1641 年（寛永 18）版の塵劫記の巻末に「好み」として、12 題の未解決問題を出題した。それを受ける形で 1653 年に榎並和澄が『参両録』、1657 年に初坂重春が『円法四巻記』という数学書を著し、その中で塵劫記の未解決問題に対する解を発表した。更に彼らはそれぞれの著書に、吉田と同様に「好み（未解決問題）」を巻末に付したのである。このような“未解決問題に対する解答を著書に載せ、さらに新たな未解決問題を出題する”という現象がしばらく続いた。これを遺題継承という。上述のように未解決問題は「好み」と言われていたが、和算研究家の遠藤利貞（1843 年〜 1915 年）が「遺題」と呼び、以降はこの呼び方が定着した。この遺題継承というシステムによって、開方術や天元術といった技法が理解され、広まることとなった。

しかし問題が高度になった場合、例えば“未知数の係数が有理数となっている”ような場合、天元術では解決が難しく、技術的に限界があった。やや頭打ちになってしまったのである。この課題は結局、偉大な数学者、関孝和（1642 年

〜 1708 年）によって考案された「点竄術（てんざんじゅつ）」によって解決された。関は、『古今算法記』の遺題に対して与えた解答『発微算法 1674 年（延宝 2)』によって、それまでのように“問題毎に新しい技法を構築する”のではなく、“題意に適した方程式を立て、それを解く”という問題意識に至ったため、それ以降の問題に対するアプローチそのものを変えてしまったのである。これにより、「遺題継承」という習慣に終止符が打たれることとなった。関もまた『塵劫記』で数学を学んだのち、ニュートンに先駆けて微分法に相当する概念を独立で発見するなど、大きな仕事を数多くこなしている [2,7,1]。しかし生地や生年など不明な点が数多く存在するため、ここでは深入りしない。

2.2 算額奉納

上記の遺題継承の影響もあり、大都市圏の武士を中心に研究が進められた。従って、高度な数学は三都（江戸・京都・大阪）に集中していたのである。例えば大阪では、江戸時代初期に活躍した和算家、橋本正数（せいすう）（生年不明〜 1683 年以前）がよく知られている。橋本は前述の関孝和に先駆けて天元術を理解し、後世に大きな影響を与えた人物である。彼を始祖とする和算家のグループ（橋本流と呼ばれる）は上方周辺で活躍し、上述の『古今算法記』の著者である沢口一之（生没年不詳）も橋本に学んだとされている。

だが、城下町との連絡、年貢率の計算や田畑の面積計算などに用いる技術は地方の農村でも必要とされていた。そのような事情から、勘定方といった役職に就いていた武士が三都に行き、帰郷後に和算塾を開くようになった。この塾には農民だけでなく、その地域の豪商なども学んでいた。和算の免許状を持った和算家が地方を訪れて、より高度な数学を広めることもあったとされる。また塾で学んで新たな結果を得たものの、著書を著すことができない人々は「難問の解決を神に感謝し、さらなる数学力の向上を願う」という意味を込めて、数学の研究成果を示した絵馬を神社や寺院に奉納した。この絵馬を「算額」という。一般に算額に描かれている図形は色付けされているものが多く、図形の配置と相まって芸術的な様相を示すことが多い。現存する最古の算額は、栃木県佐野市にある星宮神社に奉納されている、村山吉重によるものである。1683 年（天和 3）に奉納され

ており、内容は遺題継承に含まれるものである。算額の奉納という習慣は、表 1 における地方和算期に急増している [10]。これは世の中が平和であったことと、地方に広がった数学が時間の経過とともに高度になったことを意味する。また同時に、難易度の高い問題を扱った算額は、その和算塾の存在を示す“広告塔”の役割も果たしていたとされる。ただし、これらの算額が納められている神社仏閣の信仰的特徴に関しては、共通点を見出すことが難しい。これは関西圏だけでなく、サンプル数の多い東北地方などでも同様である。

上記 2 つの日本独自の公開手法によって議論が進み、和算の水準が高度化した。またそれだけでなく、当時普及していた木版印刷で出版された多数の数学書によって、算額を含む最先端の高度な数学が多くの人々に共有されていた。少なくとも 17 世紀終盤には日本独自の研究スタイルと言える和算が成立し、以後 200 年以上を通じてオリジナリティに富む研究結果を出し続けた。ただしすべての情報が公開・共有されていたわけではなく、属するそれぞれの流派に秘伝を設け、門外不出の扱いとすることもあった。これは流派ごとの独創性を守るための、著作権保護の役割を果たすものであった。

3　算額の具体例

本項目では、奉納された算額の問題を例を挙げて考察する。特に文化面を重視し、比較的容易に証明が可能なものを選出した。

一般に、算額における文面は以下の四つの段落になっている。比喩や婉曲表現などが含まれることはなく、フォーマットがある程度決まっている点は、現代の数学と変わらないと言える。

1. 今有如圖(ず)…いわゆる問題文である。圖とは現代の図のことである。
2. 答曰…答えを表示する文である。無理数など、表示ができないものは 4. の術文で解説され、本項目は省略されることもある。
3. 解曰…題意に従って立式するプロセスである。
4. 術曰…問題文の一般解を与える文である。この状態では数値は代入され

ておらず、問題文の数値を代入することによって2. の答えが得られるという構造になっている。

ただし、ほとんどの算額には3. の立式するプロセスは書かれていない。これは当時の数学者が精密な議論を好まなかったというわけではなく、所属する団体の技法が漏れてしまうことを食い止めるため、ある程度思考過程を見せないようにしていたためである。

表2　奈良県の算額（額ごとについての情報）

市町村	神社仏閣	奉納年月日	奉納者	備考
奈良市	円満寺	天保15（1844）年	源　治郎	奈良市指定有形民族文化財 平成6年復元（木村房之）
奈良市	弘仁寺	安政5（1858）年	石田算楽軒	奈良市指定有形民族文化財
奈良市	弘仁寺	文政10（1827）年	奥田 政八	奈良市指定有形民族文化財
大和郡山市	庚申堂	明治13（1880）年2月	安村清一郎 森内彌三郎	
橿原市	耳成山口神社	嘉永7（1854）年　仲秋	梨原嘉右衛門 松井平四郎 梨原嘉蔵 木村惣兵衛	大工次郎吉が額として細工

3.1　奈良県と大阪府の算額

ここでは、大阪府と奈良県に存在する算額について述べる。算額自体は東北地方や関東地方において数多く見つかっている反面、近畿圏では比較的少ない。これには、明治政府に反感を持つ者が多かった東北地方において、西洋の数学が輸入された後も和算教育が続けられていたためという背景がある。また関東地方に関しては、先述の関孝和の学派による影響が大きい。幕府の保護を受けた関の一派による仕事によって、和算が広く浸透していたため、関東地方は他の地方よりも数学を重視する傾向にあった。その結果として、和算に関する資料も破棄されずに残ったのである。また、関西地方において現存する資料が少ないもう一つの理由として、大都市や近郊においては数学以外の娯楽も発展していたことが挙げられる。無論、関東地方においても数学以外の娯楽は同様に発展していたのであ

るが、大阪や京都の和算文化は幕府に保護されていなかったため、文化的価値の有無を判断する以前の段階で徐々に資料が失われてしまったのである。近畿地方の算額の問題文は、記録に残っているものだけでなく、復元されたものを含めて [3] にも詳しく書かれている。

奈良県の算額が見つかっている神社仏閣は以下の通りである。

1. 耳成山口神社
2. 圓満寺
3. 庚申堂
4. 弘仁寺

奈良県（表 2）では大半が現在の奈良市付近に分布しており、1 点だけが若干離れた橿原市にある耳成山口神社山頂付近の神社に奉納されている。ただし耳成山そのものが、藤原京の都市計画を考える上で重要な位置に存在し、中大兄皇子によって万葉集に詠まれているなどの歴史的背景を考慮すると、算額が存在しても不思議ではない。

また、大阪府の算額が奉納されている神社仏閣を以下のリストと表 3 に挙げる。

1. 井於神社
2. 意賀美神社
3. 大阪天満宮
4. 畑天満宮
5. 亀之森住吉神社
6. 宝池寺
7. 八所神社
8. 生國魂神社
9. 有栖山清光院清水寺
10. 杭全神社
11. 原田神社

12. 上宮天満宮
13. 國中神社

表 3 から、大阪では北摂地域と大阪市付近に、数学者の集団が存在していたことが窺われる。橋本正数が上方の数学者であり、また橋本流に属する田中由真（1651 年～ 1719 年）、橋本吉隆（橋本正数の子、1675 年頃に活躍）、喜多治伯（1696 年頃に活躍）、井関知辰（1661 年頃～没年不明）といった著名な和算家が京都や上方で活動していたことから、橋本流の流れを汲む塾などが奉納したと考えるのが妥当であろう。大規模な塾が納めた算額では、問題が掲載されず門人の名前のみが書かれている点が特徴的である。大阪市平野区の杭全神社に納められていた算額は更に特異性が強く、額面に算盤が貼り付けられていたとのことである。ただし、部分的に損壊した当該の算額の写真が残っているのみで、本体は行方不明になってしまっている。

大阪府には以下に挙げた例以外にも、内容や保存状態を考慮した上で一般公開されていない算額があることが知られている。例えば豊中市の服部天神宮に奉納されている二面のうち一面は、明治 9 年（1876）に井村剛治によって奉納された比較的新しい算額であるが、一般公開はされていない（現時点において、豊中市の公式ホームページでの確認は可能である）。これは代数や微分積分学といったような西洋の数学を紹介したものであり、“和算の研究者が西洋の数学を解釈した”という意味において大変貴重な資料であると言える。また一般公開による劣化の防止というだけでなく、大阪の算額は戦争や大火などで破損・紛失されてしまったものも多く、正確な個数は不明であるというのが現状である。

表 3 では、後に復元されたものに関しては備考の欄に明記している。

これらの神社仏閣は、図 2 のように分布している。地図上の番号は本文中のリスト番号と対応している。本稿では特に次節において、井於神社の問題を扱うことにした。

表 3　大阪府の算額（額ごとについての情報）

市区	神社仏閣	奉納年月日	奉納者	備考
茨木市	井於神社	弘化3（1846）年	山野光之助	昭和25年の台風で崩壊 『社寺奉納算額集』から復元
枚方市	意賀美神社	文久元年（1861）	岩田清庸	
大阪市	大阪天満宮	平成10（1998）年	市立東商業高等学校 近畿数学史学会	『浪華天満宮所捧算題』 （日本学士院蔵）から復元
大阪市	大阪天満宮	天保6（1835）年8月	福田理軒	『浪華天満宮算題奉額評林』 （日本学士院蔵）から復元
池田市	畑天満宮	嘉永5（1852）年晩夏	岩田清庸	池田市指定文化財
池田市	亀之森住吉神社	文化3（1806）年6月	江原政教門人	池田市重要文化財
池田市	亀之森住吉神社	嘉永元（1848）年9月	山口伝三郎久真	池田市重要文化財
茨木市	宝池寺	文久2（1862）年初夏	矢野治右衛門門人	そろばんの絵と門人名のみ
茨木市	八所神社	安政4（1857）年6月	矢野	奉納者は苗字のみ
大阪市	生國魂神社	元文4（1739）年中夏	山口幸治郎	近畿数学史学会　復元 悠久会　奉納
大阪市	清水寺	弘化4（1847）年	福田理軒	昭和20年戦災で焼失 小寺裕　復元奉納
大阪市 平野区	杭全神社	天保5（1834）年季夏	榎阪市右衛門 福矩門人	額面にそろばんが貼付される 榎阪市右衛門福矩門人 問題は 記されていない 現在は行方不明
豊中市	原田神社	明治24（1891）年	中西久平門人	門人100名が併記される
高槻市	上宮天満宮	明治30（1900）年11月	平野門人	奉納者32名の氏名のみ
四条畷市	国中神社	明治25（1892）年9月	森本市太郎門人	門人名のみ

3.2　算額の問題と解答例

ここでは白文で書かれた実際の算額の問題を、洋算を援用しながら解釈する。なおこの項目では、大阪府と奈良県の算額のみでは数学的な思考の流れを明示的に記述しにくいという理由から、それ以外の地域の算額も同時に解説することとした。問題の選出基準としては、

1. 問題に必要な技術が、比較的一般によく知られている定理であるもの
2. 問題の構造自体がシンプルであるもの

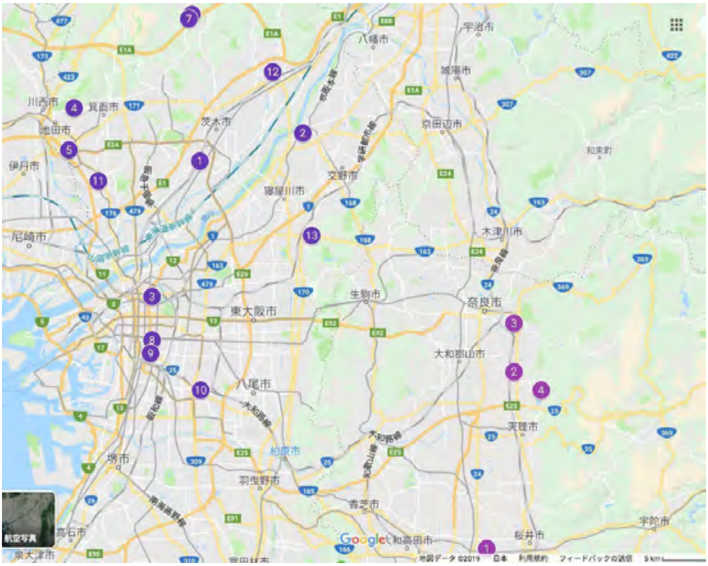

図 2　奈良県と大阪府の算額の位置（googlemap による表示）

である。まず 1. についてであるが、算額の問題の中には幾何学に関する大学レベル以上の専門的な知識を求められるものも存在し、これらの背景にある西洋数学の理論を解説することは、本稿の趣旨と大きくかけ離れてしまう。そのため、必要以上に複雑な背景を持つ問題を選ぶことは避けた。また 2. に関しては、“和算における問題の難しさ”と、“西洋数学における問題の難しさ”の違いが現れてしまうために設けた基準である。算額においては、「既に得られた技術の“テクニカルな組み合わせ”によって、より難解な問題を解決する」という立場をとることが殆どである。謂わば技法の積み重ねに相当することが頻繁に行われ、その組み合わせが複雑であればあるほど、より難しい問題であると認識されることが多い。一方、西洋数学における難しさとは、上記の問題意識とは異なるものを含み、「既に得られた技術そのものを“より広い空間などにおいて成り立つように拡張する”ことで新たな問題を発見し、解決する」という側面も持っている。すなわち、西洋数学は一般化・抽象化を重視するのであり、それによって事象が簡潔に記述できるという利点を持っていることになる。この相違点から、和算に

おける難問を扱うことは“解答部分の技術の組み合わせが複雑であるために計算が煩雑になってしまい、結果として本質を見失う”という事態を引き起こしかねない。そのため、用いる技術が明確な問題を選ぶこととした。

この点に関連することであるが、当時極めて高度な技術を持っていたごく一部の和算家を除き、“概念の拡張（一般化・抽象化）”については、比較的無頓着であったことが窺われる点に注目したい。例えば和算の計算においては、『角度』の概念が登場しないことなどが挙げられるであろう。和算家は直角三角形に対して三平方の定理を頻繁に用いたが、三平方の定理の角度に関する拡張とみなすことができる『余弦定理』の明確な導出には至っていない。直角三角形でない三角形を扱う際には、二つ以上の直角三角形に分割して考察するという立場を取り、その下で発展を遂げたのである。このような姿勢は和算においてしばしば散見され、初等幾何的・代数学的解法および計算技術の向上には貢献したものの、抽象空間を扱うという議論にまでは発達せず、ある意味で当時の数学の限界になっているという点に注意したい。

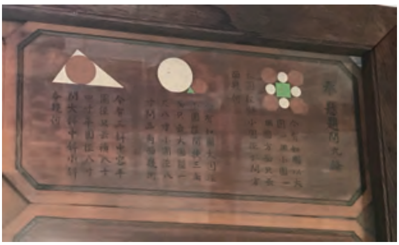

図 3　実際の問題（中央の図形）

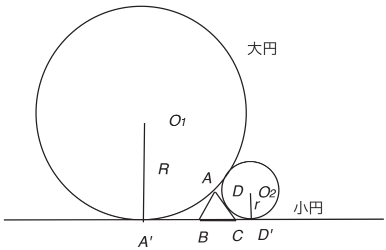

図 4　長岡天満宮の算額を現代的に解釈した図

例1. 京都府長岡京市天神2丁目にある長岡天満宮に、1970年（寛政2）に今堀彌吉によって奉納された算額である。当時12歳であったという記録が残っている。

原文 今有如圖大円径小円径間挟三角面只云大円径一尺八寸小円径八寸間三角面幾何.

訳文 大円と小円があり、図のように正三角形が挟まっているとする。大円の直径が1尺8寸、小円の直径が8寸であるとき、三角形の一辺の長さを求めよ。

解1. まず和算の習慣に従い、一般解を考察しておく。円に接するという条件から、$\triangle O_1AB \equiv \triangle O_1AB$、また同様に$\triangle O_2DC \equiv \triangle O_2D'C$である。さらに、$\angle O_1AB = \angle O_1A'B = \angle O_2DC = \angle O_2D'C = \pi/2$である。求める正三角形の辺の長さを$t$とする。いま、$O_1A = O_1A' = R$、$O_2D = O_2D' = r$という関係があることに注意する。

二つの円に注目すると、三平方の定理から $A'D'$ の長さを求めることができる：

$$(O_1O_2)^2 = (R+r)^2 = (A'D')^2 + (R-r)^2$$

すなわち、

$$(A'D')^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4Rr$$

から、

$$A'D' = 2\sqrt{Rr}. \tag{1}$$

これと正三角形の辺の長さtの関係を考える。小円に注目すると、$\angle DCB = \pi/3$なので、$\angle DCD' = 2\pi/3$となっている。特に図の対称性から、

$$\angle O_2CD = \angle O_2CD' = \frac{\pi}{3}$$

である。すなわち辺の比は

$$CD' : O_2C : O_2D' = 1 : 2 : \sqrt{3}$$

となっている。従って、$CD' = r/\sqrt{3}$ と表すことができる。いま、$A'B = R/\sqrt{3},\ BC = t,\ CD' = r/\sqrt{3}$ であり、これらの和が $A'D' = 2\sqrt{Rr}$ となっていたので、

$$t = 2\sqrt{Rr} - \frac{R}{\sqrt{3}} - \frac{r}{\sqrt{3}}$$

図5　実際の問題（右から二番目）

図6　田代神社の算額を現代的に解釈した図

と表される。これが求めるべき一般解である。問題に対する特殊解は、R を 9 寸、r を 4 寸としたもので、

$$t = 12 - \frac{13}{\sqrt{3}}$$

である。

注意 1.　関係式（1）は、和算の計算でしばしば用いられる。兵庫県の昆陽寺で同様の問題を扱った算額が奉納されているだけでなく、『算法助術』という当時の公式集にも書かれている。

例 2.　岐阜県養老町の田代神社に 1841 年（天保 2）、井口百一郎によって奉納された算額である。額面には、出題者が当時 13 歳であったことが記されている。

原文　今有如圖平方内容四等円而設黒積若干問得等径術如何.

訳文　図のように、半径の等しい円を四つ、四角形に内接させる。このとき、円の外側の面積を「黒積」とする。円の半径を黒積で表せ。

解 2.　円の半径を r、黒積の表す面積を S とする。四角形の一辺の長さは $4r$ なので、面積は $16r^2$ である。また、円の面積は πr^2 なので、黒積 S との関係は $S + 4\pi r^2 = 16r^2$ となる。従って、この式を r について解けばよい。$S = 4r^2(4 - \pi)$ なので、$r^2 = S/4(4 - \pi)$、すなわち

$$r=\sqrt{\frac{S}{4(4-x)}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{4-\pi}}$$

である。

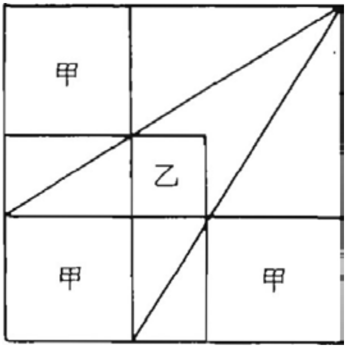

図 7　田代神社の算額を現代的に書き直した図

例 3.　こちらも田代神社に 1841 年に奉納された問題である。出題者は日比野平之亟という、11 歳の少年である。図 5 の右から三番目の問題である。

原文　今有如圖平方内隔二斜容甲方及乙方一個只云甲方面若干問乙方面術如何.

訳文　図のように、一つの頂点から2本の線分を引く。このとき、辺の長さが等しい 3 個の正方形と、それとは辺の長さが異なる正方形が 1 個できたとする。各辺の関係を求めよ。

解 3.　図において、甲の辺の長さを a、乙の辺の長さを b とする。乙の下にある直角三角形と、与えられた正方形の右下部分にある直角三角形が相似であるから、

$$\frac{a}{b}=\frac{a+b+a}{b+a}$$

が得られる。これを整理すると、

$$b(2a+b)=a(a+b)$$

である。すなわち、*b* についての二次方程式

$$b^2+ab-a^2=0$$

が出てきたので、解の公式から

$$b=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$$

を得る。

注意 2.　二次方程式を解の公式を用いて解く段階では、±（プラスマイナス）を吟味する必要がある。また、三平方の定理を用いて立式してしまうと、理論上は解くことができるが、かなり長い式を整理しなくてはならない。解き方によって、感じる難易度が全く異なるという構造の問題であり、注意深く考察する必要がある。

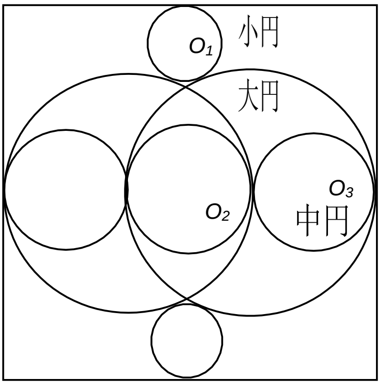

図 8　長谷寺の算額を現代的に書き直した図

例 4.　群馬県の長谷寺に、1861 年（文久元年）に石川勘治郎によって奉納された算額の問題である。三種類の円が美しく配置されている。

原文　今有如圖方内容大中小円只云面経若干問小円経幾何.

訳文　図のように、正方形の中に大・中・小の円を入れたとする。正方形の一辺の長さが分かっているとき、小円の直径を求めよ。

解 4.　小円の中心を O_1, 中円の中心を O_2, 大円の中心を O_3 とする。また、それぞ

れの半径を r_1, r_2, r_3 とする。さらに正方形の一辺の長さを x とおく。このとき、x と r_1 の関係を調べればよい。

図 8 から、

$$x=3r_2, \tag{2}$$

$$r_3=2r_2 \tag{3}$$

である。三角形 $O_1O_2O_3$ は直角三角形なので、三平方の定理から

$$(O_1O_2)^2+(O_2O_3)^2=(O_1O_3)^2$$

が成り立つ。ここでそれぞれの辺について、

$$O_1O_2=\frac{1}{2}(x-r_1),$$

$$O_2O_3=\frac{r_2}{2}$$

$$O_3O_1=\frac{1}{2}(r_3+r_1)$$

であることに注意すると、

$$\left\{\frac{1}{2}(x-r_1)\right\}^2+\left(\frac{r_2}{2}\right)^2=\left\{\frac{1}{2}(r_3+r_1)\right\}^2$$

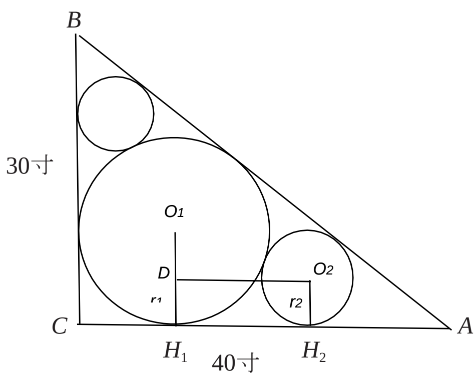

図 9　英賀神社の算額を現代的に書き直した図

すなわち

$$(x-r_1)^2+r_2^2=(r_3+r_1)^2 \tag{4}$$

である。関係式 (4) に (3) を用いて r_3 を消去すると、

$$x^2-2xr_1=3r_2^2+4r_2r_1 \tag{5}$$

が得られる。さらに (5) に (2) を用いて r_2 を消去すると、

$$\frac{2}{3}x^2=\frac{10}{3}xr_1$$

である。いま $x\neq 0$ であるから、上式を x で割ると

$$x=5r_1.$$

すなわち、小円の直径が正方形の一辺の長さの五分の一であるという結果が得られた。

例 5. 兵庫県姫路市の英賀神社に奉納された算額からの出題である。こちらは珍しく証明が付されているが、答の壹拾寸（10寸）は誤差を含んでいる。

問題文　今有如圖鉤三拾寸股四拾寸内容大圓中圓小圓問中円経幾何 .

訳文　図のように、辺の長さが三十寸と四十寸の直角三角形がある。また、小円、中円、大円を図のように配置する。このとき、中円の直径を求めよ。

解答文　答曰中円径壹拾寸

証明　術曰鈎折半股折半乗置實倍鈎帰實得中円径

解 5. 簡単のため、辺の長さを 3,4 として計算を行う。まず三平方の定理から、斜辺の長さは 5[寸] である。大円は三角形 ABC の内接円であるから、面積を考えると

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 3\times 4=6.$$

また、内接円の半径 r_1 を用いると

$$S_{\triangle ABC}=\frac{r_1}{2}(3+4+5)=6r_1.$$

ここから、$r_1=1$ が得られる。次に三角形 O_1DO_2 と三角形 O_1H_1A が相似であることから、中円の半径を r_2 とすると、

$$r_1-r_2:DO_2=O_1H_1:H_1A=1:3$$

である。いま、$r_1=1$ であることを用いて

$$DO_2=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}=2\sqrt{r_2}$$

なので、$r_1-r_2:2\sqrt{r_2}=1:3$ である。よって $r_1=1$ と合わせることで得られる関係式 $3(1-r_2)=2\sqrt{r_2}$ を 2 乗して整理すると、二次方程式

$$9r_2^2-22r_2+9=0$$

を得る。これを解くと、

$$r_2=\frac{11\pm2\sqrt{10}}{9}$$

であるが、$r_2<1$ に注意すると

$$r_2=\frac{11-2\sqrt{10}}{9}$$

が得られた。

注意 3. ここで、直径は

$$2r_2=1.038988\cdots$$

となるので、厳密には答文の「10 寸」は誤差を含んでいることがわかる。また図に現れる小円は、計算に用いる必要のない、いわゆるダミーである。

例 6. 大阪府井於神社に奉納されている算額を考える。これは三角形が前問の英賀神社のものと同じであり、円の配置が異なっている。難易度としてはこちらの方が高くなっている。

原文 如圖鈎三寸股四寸弦五寸累円径幾何.

訳文　図のように、正方形の中に大・中・小の円を入れたとする。正方形の一辺の長さが分かっているとき、小円の直径を求めよ。

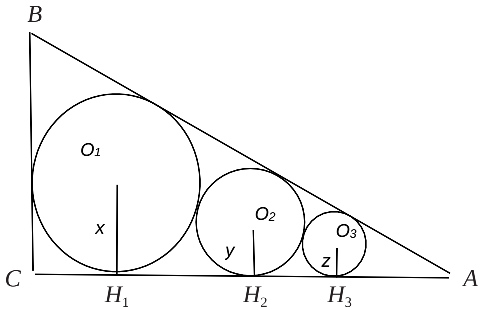

図 10 井於神社の算額を現代的に書き直した図

解 6.　図の直角三角形 ABC に内接する円の半径を x, y, z とする。また、それぞれの中心から辺 AC に下ろした垂線の足を H_1, H_2, H_3 とする。辺 AH_3 の長さを t とおくと、辺の長さについての関係式

$$x+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+t=4 \tag{6}$$

$$(3-x)+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+t=5 \tag{7}$$

が成り立つ。この二つの式から、まず $x=1$ が分かる。これを (6) または (7) に用いて、関係式

$$2\sqrt{y}+2\sqrt{yz}+t=3 \tag{8}$$

を得る。また三角形 AO_1H_1、三角形 AO_2H_2 および三角形 AO_3H_3 は相似であるから、

$$1:3=y:(t+2\sqrt{yz})=z:t$$

である。ここから以下の関係式

$$t+2\sqrt{yz}=3y \tag{9}$$

$$t=3z \tag{10}$$

が得られる。関係式 (9) を (8) に用いると、

$$2\sqrt{y}=3-3y$$

となり、図の配置から $y<1$ に留意して解くと、

$$y=\frac{11-2\sqrt{10}}{9}$$

であることが分かる。次に z を考える。関係式 (10) から、AO_3 の長さを z を用いて表すと、

$$AO_3=\sqrt{10}$$

であることに注意する。ここから AO_1 の長さについて、

$$AO_1=\sqrt{10}=(\sqrt{10}+1)z+2y+x$$

となるので、これを z について整理し、先ほど求めた x と y の値を代入することで、

$$z=\frac{13\sqrt{10}-31}{9(\sqrt{10}+1)}$$

を得る。

注意 4. この問題の解法では途中の計算において、例 1 で得られた関係式も用いた。この解き方の方が、より当時の考え方に近いと思われるためである。

注意 5. 本節の冒頭にも述べた通り、基本的に当時の解法は一般解を求めたのち、問題に適合するように数値を代入することで特殊解を求めるというものである。場合によっては、大学レベル以上の技法を用いて拡張が行われている問題もある。“用いる言語が漢文である”という見た目に関する違いを除けば、現代とほぼ同様の考え方と技術を持って数学的対象に対峙していたと考えられる。

4　まとめと課題

本稿では前半部において、日本で独自に発展した数学文化である「和算」について起源を辿った。文中にも述べたが、通常「和算」と言えば“遺題継承”と“算額奉納”を中心とする江戸時代に花開いた数学を意味する。この意味での「和算」は他国と比較しても極めて稀な文化であり、また同時に登場した和算家たちの業績も世界的に注目すべきものが多い。そのため江戸時代のみに焦点が当たりがちであるが、それ以前の日本の数学の発展過程にも注意することで初めて日本の数学文化の全貌が見えてくると考え、記録の残っている 8 世紀から考察を開始することとした。また後半部においては、和算の問題における難しさと西洋数学の難しさの相違点に鑑み、和算特有の考え方に触れることができるであろう6個の問題を取り上げた。実はこの手の問題には、所謂「別解」に相当するものが複数個製作可能であり、今日我々が知る洋算を用いる方が遥かに簡潔に解ける問題も数多く存在する。本稿で著者が作成した解答および証明は、一見すると回りくどいように見える物もあるのだが、当時の和算家の技法に学び、彼らの思考過程をシミュレートしたものである。

「算額」は、日本独自の文化であるという点と問題に現れる図の美しさという点から、教材として用いられることもある。その一方で、3.1 で述べたような、網羅的に考察するといった立場に立った研究はまだ少ない。これは「個々の問題の解読が優先されてきたため」という当然の理由ではあるが、日本の文化として世界に発信するには必要な視点であると考えられる。実際 Hosking[8] によれば、2017 年 4 月 28 日から 29 日にかけて、日本以外での算額に関する初めての国際研究集会がアメリカで行われたとのことであり、世界的にも徐々に関心を集めてきていることが分かる。しかし同時に、海外の研究者も個々の問題に注目しがちで、俯瞰的な視点の研究を行うことが難しいことも述べられている。海外では、教科書は Rothman-Fukagawa[13] がよく知られているものの、他にはスタンダードと呼べるものが無い。また実際の資料を見る機会がなかなか無いというのも大きな原因であろう。従って、単に数学的な内容を現代数学を用いて解釈するだけでなく、和算が発展した背景も含めて議論を進め、発信していくことが今後の課題であると考えられる。

参考文献

[1] 上野健爾・小川束・小林龍彦・佐藤賢一 (2008)「関孝和論序説」岩波書店
[2] 小川 束, 佐藤 健一, 竹之内 脩, 森本 光生 (2008)「建部賢弘の数学」共立出版
[3] 近畿数学史学会 (1992)「近畿の算額—数学の絵馬を求めて—」
[4] 佐竹 昭広, 山田 英雄, 工藤 力男 (2014)「万葉集（三）」岩波文庫
[5] 佐藤 健一, 小寺 裕, 大竹 茂雄, 牧野 正博 (2006)「和算史年表」東洋出版
[6] 城地茂 (2014)「和算の再発見：東洋で生まれたもう一つの数学」Dojin 選書
[7] 竹之内 脩 (2008)「関孝和の数学」共立出版
[8] Rosalie J. Hosking（小川束訳）(2018)「算額研究の国際化—成果とむずかしさ」数学文化第 30 号, 日本評論社
[9] 平山 諦 (1993)「和算の誕生」恒星社厚生閣
[10] 深川英俊 (1998)「例題で知る日本の数学と算額」森北出版
[11] 吉田光由 (1627)「塵劫記」
[12] Batchelor, Murray T. “The art os Sangaku”, Nature Physics 4, 669(2008)
[13] H. Fukagawa, T. Rothman, Sacred mathematics:Japanese temple geometry, Scientific American, Vol. 278, No. 5 May, 1998, pp. 84-91
[14] Heeffer, Albchet, “Historical Notes: Sangaku—The Mathematics of Traditional Japanese Votive Tablets”, Mathematics Today, December 2012, pp. 277-278,
[15] Normile, Dennis, ““Amateur” Proofs Blend Religion and Scholarship in Ancient Japan”, Science, 307(5716):1715-6, March, 2005
[16] Vincent, J. and Vincent, C. “Japanese temple geometry” Australian Senior Mathematics Journal, 18(1), 2004

〈キーワード〉　和算、算額、数学

On Japanese Mathematics: Wasan and Sangaku

MORITA Takeshi

Abstract

In this paper, we show a unified approach to “Sangaku（算額）” around Osaka prefecture and Nara prefecture. In the first section, we review “Wasan（和算）” and “Sangaku” which are Japanese-specific mathematics. In spite of these mathematics were highly developed during the Edo period, we do not have many opportunities to see these mathematics[1, 2]. We also consider the difference between wasan and western mathematics. In the last section, we show some examples of Sangaku without technical or theoretical difficulties. These examples arouse expectations for an in-depth understanding of wasan and sangaku.

References

[1] H. Fukagawa, T. Rothman, Sacred mathematics:Japanese temple geom-etry, Scientific American, Vol. 278, No. 5 (May, 1998, pp. 84-91)

[2] Rosalie J. Hosking（小川束 訳）(2018)「算額研究の国際化―成果とむずかしさ」数学文化 第 30 号，日本評論社