Title	Sur certains espaces fibrés principaux holomorphes admettant des connexions holomorphes
Author(s)	Murakami, Shingo
Citation	Osaka Mathematical Journal. 1959, 11(1), p. 43-62
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/7657
rights	
Note	

Murakami, Shingo
Osaka Math. J.
11 (1959), 43-62.

Sur Certains Espaces Fibrés Principaux Holomorphes admettant des Connexions Holomorphes

Par Shingo MURAKAMI

Ce mémoire est consacré à l'étude des espaces fibrés principaux holomorphes dont le groupe est abelien connexe et dont la base est un tore complexe. Dans la première partie, on montre que pour ces espaces fibrés l'existence d'une connexion holomorphe est équivalente à l'existence d'un groupe transitif connexe d'automorphismes. On montre de plus que la forme de courbure d'une connexion holomorphe est alors déterminée par l'espace fibré. Dans la seconde partie, on étudie le groupe $\mathcal{P}$ des classes d'éspaces fibrés dont le groupe est un groupe de Lie abelien connexe $\boldsymbol{A}$ dont la base est un tore complexe $\boldsymbol{T}$ et qui possèdent une connexion holomorphe. On démontre que ce groupe $\mathcal{P}$ est canoniquement isomorphe à la somme directe du sous-groupe $\mathcal{P}^0$ des classes d'espaces fibrés possédant une connexion holomorphe intégrable et d'un groupe abelien $\mathcal{P}^*$ qui s'interprète comme groupe des formes de courbure. On indique enfin la structure de ces deux groupe facteurs ; alors que $\mathcal{P}^0$ est le quotient d'un groupe de Lie abelien complexe connexe par un sous-groupe de Lie complexe connexe, $\mathcal{P}^*$ est un groupe abelien libre de rang fini.

On sait que pour les espaces fibrés principaux holomorphes dont la base est une variété compacte kaehlérienne et dont le groupe est semi-simple ou est un $\mathbf{GL}(n, \boldsymbol{C})$ l'existence d'une connexion holomorphe implique que toutes les classes caractéristiques (à coefficients complexes) de l'espace fibré sont nulles [1]. La catégorie des espaces fibrés étudiés ici donne des exemples d'espaces fibrés admettant des connexions holomorphes, mais dont les classes caractéristiques ne sont pas nulles et qui n'admettent donc pas de connexion intégrable.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à M. J.-L. Koszul pour ses précieux conseils ; je lui suis redevable de plusieures suggestions ainsi que d'importantes améliorations de rédaction.

I. Connexions holomorphes et automorphismes.

§ 1. Algèbres de Lie associées à un espace fibré.

On désigne par $\boldsymbol{A}$ un groupe de Lie complexe abelien connexe de dimension r et par $\mathfrak{a}$ l'algèbre de Lie complexe des champs de vecteurs réels invariants sur $\boldsymbol{A}$; la structure complexe de $\mathfrak{a}$ est définie par le tenseur I de la structure complexe de $\boldsymbol{A}$. Désignons par $\boldsymbol{T}$ un tore complexe de dimension n. Soit $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie complexe des champs de vecteurs conformes sur $\boldsymbol{T}$[1),2)]. On sait que $\mathfrak{h}$ est l'algèbre de Lie du groupe des homéomorphismes holomorphes de $\boldsymbol{T}$ [2]. Par conséquent, $\mathfrak{h}$ est abelienne et elle engendre le module des champs de vecteurs sur l'anneau des fonctions réelles sur $\boldsymbol{T}$.

Dans tout ce qui suit, $\boldsymbol{P}$ désignera un espace fibré principal holomorphe de groupe $\boldsymbol{A}$ et de base $\boldsymbol{T}$. C'est une variété complexe de dimension $n+r$. La projection de $\boldsymbol{P}$ sur $\boldsymbol{T}$ sera notée $\boldsymbol{p}$ et les opérations de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{P}$ seront écrites à droite; $\mathfrak{X}(\boldsymbol{P})$ désignera le module sur l'anneau des fonctions réelles sur $\boldsymbol{P}$ constitué par les champs de vecteurs réels sur $\boldsymbol{P}$.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs conformes sur $\boldsymbol{P}$ qui sont invariants par $\boldsymbol{A}$. Puisque les opérations de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{P}$ conservent la structure complexe de $\boldsymbol{P}$, pour $X \in \mathfrak{g}$ on a $IX \in \mathfrak{g}$[3)], donc $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie complexe de l'algèbre de Lie complexe des champs de vecteurs conformes sur $\boldsymbol{P}$. Pour $a \in \mathfrak{a}$, soit Z_a le champs de vecteurs sur $\boldsymbol{P}$ dont la valeur au point $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{P}$ est $\boldsymbol{y}a$. L'application λ de $\mathfrak{a}$ dans l'espace vectoriel réel des champs de vecteurs sur $\boldsymbol{P}$ qui transforme a en Z_a est un homomorphisme injectif de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur $\boldsymbol{P}$. Puisque $\boldsymbol{A}$ opère holomorphiquement dans $\boldsymbol{P}$, $\lambda(a)$ est conforme et $\lambda(Ia)=I\lambda(a)$ pour tout $a \in \mathfrak{a}$. Puisque $\mathfrak{a}$ est abelienne, $\lambda(a)$ est invariant par $\boldsymbol{A}$ pour tout $a \in \mathfrak{a}$. Par conséquent, λ est un homomophisme injectif de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$. Enfin, les champs de vecteurs sur $\boldsymbol{P}$ invariants par $\boldsymbol{A}$ étant les champs de vecteurs X tels que $[Z_a, X]=0$ pour tout $a \in \mathfrak{a}$, l'image $\lambda(\mathfrak{a})$ est contenue dans le centre de $\mathfrak{g}$.

La projection $\boldsymbol{p}$ de $\boldsymbol{P}$ sur $\boldsymbol{T}$ définit d'autre part un homomorphisme de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur $\boldsymbol{P}$ qui sont invariants par $\boldsymbol{A}$ dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur $\boldsymbol{T}$. Cet homomorphisme a pour restriction à $\mathfrak{g}$ un homomorphisme π de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{h}$.

Lemme 1. *La suite* $(0) \to \mathfrak{a} \xrightarrow{\lambda} \mathfrak{g} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{h}$ *est exacte.*

---

1) Dans ce mémoire tous les champs de vecteurs, les fonctions et les formes différentielles sont supposés différentiables.

2) Un champs de vecteurs X sur une variété complexe V est dit *conforme* si $I[X, Y] = [X, IY]$ pour tout champ de vecteurs Y sur V, où I est le tenseur de la structure complexe de V. L'ensemble des champs de vecteurs conformes sur V est une algèbre de Lie complexe ayant I comme structure complexe.

3) On désigne par I le tenseur de la structure complexe de la variété complexe en question.

Démonstration. On a déjà observé que λ était injectif. On munit le module $\mathfrak{X}(\boldsymbol{P})$ d'une structure de module sur l'anneau des fonctions complexes sur $\boldsymbol{P}$ en posant $(f'+\sqrt{-1}f'')X=f'X+f''IX$ lorsque f' et f'' sont des fonctions réelles. La sous-algèbre complexe $\lambda(\mathfrak{a})$ de $\mathfrak{g}$ engendre dans $\mathfrak{X}(\boldsymbol{P})$ le sous-module des champs de vecteurs tangents aux fibres de $\boldsymbol{P}$, et une base complexe $\{Z_1, \cdots, Z_r\}$ de $\lambda(\mathfrak{a})$ est une base de ce sous-module. Soit $X\in\mathfrak{g}$; supposons $\pi(X)=0$, alors X est tangent aux fibres et

$$X = F_1Z_1+\cdots+F_rZ_r$$

où $F_1, \cdots, F_r$ sont des fonctions complexes sur $\boldsymbol{P}$. Puisque $X, Z_1, \cdots, Z_r$ sont invariants par $\boldsymbol{A}$, il en est de même de $F_1, \cdots, F_r$. Il existe donc des fonctions $F'_1, \cdots, F'_r$ sur $\boldsymbol{T}$ telles que $F_i(\boldsymbol{y})=F'_i(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}))$ pour tout $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{P}$ $(1\leqq i\leqq r)$. Soit Y un champ de vecteurs sur $\boldsymbol{P}$ invariant par $\boldsymbol{A}$. Puisque $[Z_a, Y]=0$ pour tout $a\in\mathfrak{a}$, on a :

$$[X, Y] = -\{(YF_1)Z_1+\cdots+(YF_r)Z_r\} .$$

Puisque X est conforme, il en résulte que

$$(IY)F_i = \sqrt{-1}(YF_i)$$

pour $1\leqq i\leqq r$. Soit $\boldsymbol{p}Y$ le champ de vecteurs sur $\boldsymbol{T}$ qui est la projection de Y. On a donc :

$$dF'_i(I(\boldsymbol{p}Y)) = \sqrt{-1}dF'_i(\boldsymbol{p}Y)$$

pour $1\leqq i\leqq r$. Puisque tout champ de vecteurs sur $\boldsymbol{T}$ est localement de la forme $\boldsymbol{p}Y$, cela prouve que $F'_1, \cdots, F'_r$ sont des fonctions holomorphes sur $\boldsymbol{T}$; $\boldsymbol{T}$ étant compact, elles sont constantes. Par conséquent, $F_1, \cdots, F_r$ sont aussi constantes et X appartient donc à $\lambda(\mathfrak{a})$. Le lemme 1 est ainsi démontré.

Lemme 2. $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *est dans le centre de* $\mathfrak{g}$. *En particulier,* $\mathfrak{g}$ *est une algèbre de Lie nilpotente.*

On a observé plus haut que $\lambda(\mathfrak{a})$ est contenu dans le centre de $\mathfrak{g}$. D'autre part, puisque $\mathfrak{h}$ est abelienne, le lemme 1 implique que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\subset\lambda(\mathfrak{a})$.

Lemme 3. *Si* $X\in\mathfrak{g}$ *et si* X *est nul en un point* $\boldsymbol{y}$ *de* $\boldsymbol{P}$, *alors* $X=0$.

En effet, si X est nul au point $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{P}$, $\pi(X)$ est nul au point $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{y})\in\boldsymbol{T}$. Or, $\boldsymbol{T}$ étant un tore complexe, on sait que tout champ de vecteurs conforme qui est nul en $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{y})$ est le champ nul. Donc $\pi(X)=0$ et $X=\lambda(a)=Z_a$ avec $a\in\mathfrak{a}$ d'après le lemme 1. Puisque $\boldsymbol{P}$ est un espace fibré principal de groupe $\boldsymbol{A}$ et que Z_a est nul au point $\boldsymbol{y}$, on a $a=0$ et par suite $X=0$.

§ 2. Connexions holomorphes.

Comme le groupe structural $\boldsymbol{A}$ de $\boldsymbol{P}$ est abelien, une forme de connexion ω sur $\boldsymbol{P}$ est une $\mathfrak{a}$-forme[4] de degré 1 sur $\boldsymbol{P}$ invariante par $\boldsymbol{A}$ telle que $\omega(\lambda(a))=a$ pour tout $a \in \mathfrak{a}$ et la forme $d\omega$ est l'image réciproque $\Omega \boldsymbol{p}$ par $\boldsymbol{p}$ d'une $\mathfrak{a}$-forme Ω de degré 2 sur $\boldsymbol{T}$; Ω est *la forme de courbure* de la connexion définie par ω[5]. Par définition, une connexion est *holomorphe* si la forme de cette connexion est holomorphe et une connexion est *intégrable* si sa forme de courbure est nulle.

Théorème 1. *Pour que $\boldsymbol{P}$ admette une connexion holomorphe, il faut et il suffit que l'homomorphisme π de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{h}$ soit surjectif. Dans ce cas, les connexions holomorphes de $\boldsymbol{P}$ correspondent bijectivement aux* relèvements *de π, c'est-à-dire aux applications linéaires μ de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ telle que $\pi(\mu(h))=h$ pour tout $h \in \mathfrak{h}$*[6].

Démonstration. Supposons que π soit surjectif. D'après le lemme 1, on a d'abord $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{a} + \dim \mathfrak{h} = \dim \boldsymbol{P}$. Le lemme 3 implique alors qu'une base réelle de $\mathfrak{g}$ est une base du module $\mathfrak{X}(\boldsymbol{P})$ sur l'anneau des fonctions réelles sur $\boldsymbol{P}$. Il en résulte qu'une fonction sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathfrak{a}$ qui est linéaire sur les nombres réels est la restriction d'une $\mathfrak{a}$-forme de degré 1 sur $\boldsymbol{P}$. De plus, puisque $\mathfrak{g}$ est constituée par des champs de vecteurs invariants par $\boldsymbol{A}$, cette $\mathfrak{a}$-forme est invariante par $\boldsymbol{A}$. Cela dit, comme π est supposé surjectif, on a un relèvement μ de π. D'après le lemme 1, il existe alors une fonction ω sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathfrak{a}$ telle que

$$(1) \qquad X = \lambda(\omega(X)) + \mu(\pi(X)) \qquad \text{quel que soit } X \in \mathfrak{g}\,.$$

Puisque λ, μ, π sont les applications linéaires complexes, ω est une application linéaire complexe de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{a}$. En particulier,

$$(2) \qquad \omega(IX) = I\omega(X) \qquad \text{pour tout } X \in \mathfrak{g}\,.$$

D'après ce qu'on a vu plus haut, ω est induite par une $\mathfrak{a}$-forme sur $\boldsymbol{P}$, désignée encore par ω, qui est invariante par $\boldsymbol{A}$. On voit immédiatement que celle-ci est une forme de connexion. D'après la formule $(d\omega)(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, X])$, on a :

---

4) Une forme différentielle à valeurs dans $\mathfrak{a}$ est dite une *$\mathfrak{a}$-forme*. Une $\mathfrak{a}$-forme ω de degré p est *holomorphe* si ω est de type $(p, 0)$ et si $d\omega$ est de type $(p+1, 0)$.

5) Pour les notions concernant les connexions, on suivra [5] sauf pour la définition de la forme de courbure d'une connexion.

6) *Linéaire* et *bilinéaire* sont entendus sur les nombres complexes.

(3) $$d\omega(X, Y) = -\omega([X, Y]) \quad \text{quels que soient } X, Y \in \mathfrak{g},$$

car $\omega(X)$ et $\omega(Y)$ sont constantes sur $\boldsymbol{P}$. Il résulte de (2) et de (3) que

(4) $$d\omega(IX, Y) = Id\omega(X, Y) \quad \text{quels que soient } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

(2) et (4) montrent que la forme de connexion ω est holomorphe. On a donc démontré que si π est surjectif un relèvement de π définit une connexion holomorphe. On observe que deux relèvements différents définissent deux connexions holomorphes différentes.

Réciproquement, soit ω la forme d'une connexion holomorphe sur $\boldsymbol{P}$. Comme on sait, pour tout champ de vecteurs X' sur $\boldsymbol{T}$ il existe un et un seul champ de vecteurs X sur $\boldsymbol{P}$ qui se projete sur X' et qui soit *horizontal*, c'est-à-dire tel que $\omega(X)=0$. Ce champ X est invariant par $\boldsymbol{A}$. On va voir que si $X' \in \mathfrak{h}$ alors $X \in \mathfrak{g}$, c'est-à-dire que

(5) $$I[X, Y] = [X, IY]$$

pour tout $Y \in \mathfrak{X}(\boldsymbol{P})$. Si $Y=\lambda(a)=Z_a$ avec $a \in \mathfrak{a}$, les deux membres de (5) sont nuls, puisque X est invariant par $\boldsymbol{A}$. Supposons que Y soit invariant par $\boldsymbol{A}$ et horizontal. On a $d\omega(X, Y)=-\omega([X, Y])$, car $\omega(X)=\omega(Y)=0$. Puisque la connexion est holomorphe, il en résulte que

$$\omega(I[X, Y]) = I\omega([X, Y]) = -Id\omega(X, Y) = -d\omega(X, IY) = \omega([X, IY]).$$

D'autre part, $I[X, Y]$ et $[X, IY]$ sont invariants par $\boldsymbol{A}$ et, comme $X' \in \mathfrak{h}$, $X'=\boldsymbol{p}X$ est conforme ; par conséquent,

$$\boldsymbol{p}I[X, Y]=I\boldsymbol{p}[X, Y]=I[\boldsymbol{p}X, \boldsymbol{p}Y]=[\boldsymbol{p}X, I\boldsymbol{p}Y]=[\boldsymbol{p}X, \boldsymbol{p}IY]=\boldsymbol{p}[X, IY].$$

La relation (5) pour le champ Y en question en résulte. Puisque les champs de vecteurs Y des deux types considérés engendrent le module $\mathfrak{X}(\boldsymbol{P})$ sur l'anneau des fonctions réelles sur $\boldsymbol{P}$, il en résulte que (5) est vraie pour tout $Y \in \mathfrak{X}(\boldsymbol{P})$; on a ainsi montré que $X \in \mathfrak{g}$. Comme $\pi(X)=\boldsymbol{p}X=X'$, cela signifie que π est surjectif. Enfin, si $\boldsymbol{p}X=X'$ et $\omega(X)=0$, alors $\boldsymbol{p}IX=IX'$ et $\omega(IX)=I\omega(X)=0$, donc l'application qui transforme X' en X a pour restriction à $\mathfrak{h}$ un relèvement μ de π. De plus, les formes ω et μ vérifient la relation (1), car, pour $X \in \mathfrak{g}$, $X-\lambda(\omega(X))$ est le champ de vecteurs horizontal qui se projete sur $\pi(X)$. Cela démontre que la connexion dont la forme est ω coïncide avec celle qui est définie à partir du relèvement μ par le procédé précédent. Le théorème 1 est ainsi démontré.

Cette démonstration montre que la formule (3) est valable pour toute connexion holomorphe de $\boldsymbol{P}$.

On va maintenant considérer la forme de courbure d'une connexion holomorphe de $\boldsymbol{P}$.

Théorème 2. *Supposons que $\boldsymbol{P}$ admette une connexion holomorphe. La forme de courbure Ω d'une connexion holomorphe de $\boldsymbol{P}$ dépend uniquement de $\boldsymbol{P}$. Cette forme est déterminée par sa restriction à $\mathfrak{h}$ qui est une forme bilinéaire antisymétrique à valeurs dans $\mathfrak{a}$. On a de plus*

$$\lambda\Omega(\pi(X),\ \pi(Y)) = -[X,\ Y]$$

quels que soient X, $Y \in \mathfrak{g}$.

Démonstration. Soit ω une forme de connexion holomophe sur $\boldsymbol{P}$ et soit Ω sa forme de courbure. Remarquons d'abord que Ω est déterminée par sa restriction à $\mathfrak{h}$, car $\mathfrak{h}$ engendre le module des champs de vecteurs sur $\boldsymbol{T}$ sur l'anneau des fonctions réelles sur $\boldsymbol{T}$. Compte tenu de (3), on a $\lambda\Omega(\pi(X), \pi(Y)) = \lambda\Omega(\boldsymbol{p}X, \boldsymbol{p}Y) = \lambda d\omega(X, Y) = -\lambda\omega([X, Y])$ quels que soient X, $Y \in \mathfrak{g}$. Puisque $\mathfrak{h}$ est abelienne, le lemme 1 implique que $[X, Y] \in \lambda(\mathfrak{a})$, donc $\lambda\omega([X, Y]) = [X, Y]$. Par conséquent,

$$\lambda\Omega(\pi(X),\ \pi(Y)) = -[X,\ Y]$$

quels que soient X, $Y \in \mathfrak{g}$. Or, π est surjectif d'après le théorème 1 et λ est injectif. Cette formule montre alors que la restriction de Ω à $\mathfrak{h}$ est une forme bilinéaire antisymétrique à valeurs dans $\mathfrak{a}$. Celle-ci ne dépend pas du choix de la connexion holomorphe, puisque $\mathfrak{g}$ est bien déterminée par $\boldsymbol{P}$. Par conséquent, d'après la remarque faite plus haut, Ω elle-même est bien déterminée par $\boldsymbol{P}$. Le théorème 2 est ainsi démontré.

Les deux corollaires suivants résultent immédiatement de ce théorème et du théorème 1.

Corollaire 1. *Si $\boldsymbol{P}$ admet une connexion holomorphe intégrable, toute connexion holomorphe de $\boldsymbol{P}$ est intégrable.*

Corollaire 2. *Supposons que $\boldsymbol{P}$ ait une connexion holomorphe. Pour que $\boldsymbol{P}$ admette une connexion holomorphe intégrable, il faut et il suffit que $\mathfrak{g}$ soit abelienne.*

§ 3. Le plus grand groupe connexe d'automorphismes.

Désignant toujours par $\boldsymbol{P}$ un espace fibré principal holomorphe de groupe $\boldsymbol{A}$ et de base $\boldsymbol{T}$, soit $\boldsymbol{G}$ le plus grand groupe connexe d'automorphismes de $\boldsymbol{P}$ muni de la topologie compacts-ouverts. On sait que $\boldsymbol{G}$ est un groupe de Lie complexe qui opère holomorphiquement dans $\boldsymbol{P}$.

De plus, un sous-groupe à un paramètre de $\boldsymbol{G}$ est le groupe de transformations engendré par un champ de vecteurs appartenant à $\mathfrak{g}$ et l'algébre de Lie de $\boldsymbol{G}$ peut ainsi être identifiée avec $\mathfrak{g}$ [4].

Puisque $\boldsymbol{A}$ est abelien connexe, les opérations de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{P}$ sont des automorphismes de $\boldsymbol{P}$ qui appartiennent à $\boldsymbol{G}$. L'application $\boldsymbol{\lambda}$ qui transforme un élément de $\boldsymbol{A}$ en l'opération de cet élément dans $\boldsymbol{P}$ est un homomorphisme injectif de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{G}$ qui induit l'homomorphisme λ de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$.

Soit d'autre part $\boldsymbol{H}$ le plus grand groupe connexe d'homéomorphismes holomorphes de $\boldsymbol{T}$ muni de la topologie compacts-ouverts ; c'est un groupe de Lie complexe abelien qui opère holomorphiquement dans $\boldsymbol{T}$ de manière simplement transitive. On sait que les sous-groupes à un parmètre de $\boldsymbol{H}$ sont les groupes de transformations de $\boldsymbol{T}$ engendrés par les éléments de $\mathfrak{h}$ et que l'algèbre de Lie de $\boldsymbol{H}$ peut ainsi être identifiée avec $\mathfrak{h}$ [2]. Faisant correspondre à un automorphisme de $\boldsymbol{P}$ l'homéomorphisme de $\boldsymbol{T}$ qu'il induit, on a un homomorphisme $\boldsymbol{\pi}$ de $\boldsymbol{G}$ dans $\boldsymbol{H}$; $\boldsymbol{\pi}$ induit l'homomorphisme π de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{h}$.

Théorème 3. *Si $\boldsymbol{P}$ admet une connexion holomorphe, $\boldsymbol{G}$ opère transitivement sur $\boldsymbol{P}$. Réciproquement, si $\boldsymbol{G}$ opère transitivement sur l'ensemble des fibres de $\boldsymbol{P}$, alors $\boldsymbol{P}$ possède une connexion holomorphe.*

Démonstration. D'après le théorème 1, une condition nécessaire et suffisante pour que $\boldsymbol{P}$ admette une connexion holomorphe est que π soit surjectif. Pour que π soit surjectif, il faut et il suffit que $\boldsymbol{\pi}$ soit surjectif. Puisque $\boldsymbol{H}$ est simplement transitif sur $\boldsymbol{T}$, cette condition est équivalente à la suivante: $\boldsymbol{G}$ opère transitivement sur l'ensemble des fibres de $\boldsymbol{P}$. Pour achever la démonstration, il suffit de remarquer que, si cette condition est satisfaite, $\boldsymbol{G}$ opère transitivement sur $\boldsymbol{P}$ car le sous-groupe $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A})$ des opérations de $\boldsymbol{A}$ est transitif sur chaque fibre de $\boldsymbol{P}$.

REMARQUE. La première partie de ce théorème est un cas particulier d'un théorème de Matsushima et de Morimoto [4]. Ce théorème luimême est géneralisé par Matsushima à tout espace fibré principal holomorphe de base $\boldsymbol{T}$ (à paraître dans Nagoya Math. Journal vol. 14).

Théorème 4. *Supposons que $\boldsymbol{P}$ ait une connexion holomorphe. Alors les conditions suivantes sur $\boldsymbol{P}$ sont équivalentes*:

1) *$\boldsymbol{P}$ a une connexion holomorphe intégrable.*
2) *$\boldsymbol{G}$ est un groupe abelien.*
3) *$\boldsymbol{G}$ opère sur $\boldsymbol{P}$ de manière simplement transitive.*

Démonstration. Puisque $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de $\boldsymbol{G}$, l'équivalence entre 1) et 2) résulte du corollaire 2 du théorème 2.

D'après le théorème 3, G opère transitivement sur P. Par conséquent, les sous-groupes de stabilité de G en différents points de P sont conjugués. Si G est abelien, le sous-groupe de stabilité en un point de P opère donc trivialement sur P. Puisque G est effectif sur P, il est réduit à l'élément neutre. Ainsi 2) implique 3).

Réciproquement, si G est simplement transitif sur P, pour tout point $y \in P$, $s \to sy$ est une application bijective de G sur P. Puisque cette application est holomorphe, c'est un isomorphisme de variétés complexes. Cet isomorphisme induit celui de $G/\lambda(A)$ sur T. En particulier, $G/\lambda(A)$ est compact. Soit $C(G)$ le centre de G. Il est evident que $C(G)$ contient $\lambda(A)$. Donc $G/C(G)$ est compact. Or, la représentation adjointe de G induit une représentation fidèle de $G/C(G)$ et, $G/C(G)$ étant compact, cette représentation est semi-simple. D'autre part, d'après le lemme 2 G est nilpotent, donc l'image de la représentation adjointe de G consiste en des transformations de $\mathfrak{g}$ dont les valeurs propres sont toutes égales à 1. La représentation de $G/C(G)$ est donc triviale. On a alors $G=C(G)$, ce qui prouve que G est abelien. Par conséquent 3) implique 2) et le théorème 4 est démontré.

II. Groupe des classes d'espaces fibrés admettant des connexions holomorphes.

§4. Groupe des classes d'espaces fibrés.

L'ensemble des classes d'espaces fibrés principaux holomorphes de groupe A et de base T peut être identifié avec le groupe de cohomologie $H^1(T, \mathbf{A})$ de T à coefficients dans le faisceau $\mathbf{A}$ des germes de fonctions holomorphes sur T à valeurs dans A [3]. Soit $\mathcal{P}$ ($\mathcal{P}^0$) le sous-ensemble de $H^1(T, \mathbf{A})$ formé par les classes qui contiennent des espaces fibrés admettant des connexions holomorphes (resp. des connexions holomorphes intégrable).

Théorème 5. *$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^0$ sont des sous-groupes du groupe $H^1(T, \mathbf{A})$.*

REMARQUE. Ce théorème est valable pour toute variété complexe T; la démonstration ci-dessous se fera sans supposer que T soit un tore complexe.

Démonstration. Soient P_1 et P_2 deux espaces fibrés de groupe A et de base T et p_1 et p_2 leurs projections. Soit $P_1 \times P_2$ le produit direct de P_1 et de P_2; c'est un espace fibré de groupe $A \times A$ de base $T \times T$ dont la projection est (p_1, p_2). Soit $P_1 \vee P_2$ l'espace fibré de groupe $A \times A$ et de base T qui est l'image réciproque de $P_1 \times P_2$ par l'application diagonale t de T dans $T \times T$; p' désignera la projection de $P_1 \vee P_2$ sur

$\boldsymbol{T}$. Il existe une application injective canonique $\boldsymbol{t}^*$ de $\boldsymbol{P}_1 \vee \boldsymbol{P}_2$ dans $\boldsymbol{P}_1 \times \boldsymbol{P}_2$ qui commute avec les opérations de $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ et qui se projete suivant $\boldsymbol{t}$. Soit maintenant $\boldsymbol{a}$ l'homomorphisme de $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ sur $\boldsymbol{A}$ défini par $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2$ pour $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$. Soit $\boldsymbol{B}$ le noyau de $\boldsymbol{a}$. L'espace quotient de $\boldsymbol{P}_1 \vee \boldsymbol{P}_2$ par les opérations de $\boldsymbol{B}$ est un espace fibré $\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2$ de groupe $\boldsymbol{A}$ et de base $\boldsymbol{T}$; soient $\boldsymbol{p}$ la projection de $\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2$ sur $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{q}$ la projection de $\boldsymbol{P}_1 \vee \boldsymbol{P}_2$ sur $\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2$. On a $\boldsymbol{pq} = \boldsymbol{p}'$ et $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)) = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ pour tout $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{P}_1 \vee \boldsymbol{P}_2$ et $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$. Il est facile de voir que la classe $[\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2]$ de $\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2$ est la somme des classes $[\boldsymbol{P}_1]$, $[\boldsymbol{P}_2]$ pour la loi d'addition dans $H^1(\boldsymbol{T}, \mathrm{A})$.

Supposons maintenant que $\boldsymbol{P}_1$ et $\boldsymbol{P}_2$ aient des connexions holomorphes dont les formes sont ω_1 resp. ω_2. L'algèbre de Lie de $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ étant la somme directe $\mathfrak{a} + \mathfrak{a}$, la $(\mathfrak{a}+\mathfrak{a})$-forme (ω_1, ω_2) sur $\boldsymbol{P}_1 \times \boldsymbol{P}_2$ est une forme de connexion holomorphe du produit $\boldsymbol{P}_1 \times \boldsymbol{P}_2$ et cette forme induit une forme de connexion holomorphe $\omega' = (\omega_1, \omega_2)\boldsymbol{t}^*$ de l'espace fibré $\boldsymbol{P}_1 \vee \boldsymbol{P}_2$. Désignons par α l'homomorphisme de $\mathfrak{a}+\mathfrak{a}$ sur $\mathfrak{a}$ induit par l'homomorphisme $\boldsymbol{a}$ de $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ sur $\boldsymbol{A}$ et considérons la $\mathfrak{a}$-forme $\alpha\omega'$ sur $\boldsymbol{P}_1 \vee \boldsymbol{P}_2$. On constate facilement que $\alpha\omega'$ est l'image réciproque $\omega\boldsymbol{q}$ d'une $\mathfrak{a}$-forme ω sur $\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2$ par la projection $\boldsymbol{q}$. De plus, ω est alors une forme de connexion holomorphe de $\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2$. Puisque $[\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2] = [\boldsymbol{P}_1] + [\boldsymbol{P}_2]$, cela démontre que, si $[\boldsymbol{P}_1], [\boldsymbol{P}_2] \in \mathcal{P}$, $[\boldsymbol{P}_1] + [\boldsymbol{P}_2] \in \mathcal{P}$.

D'autre part, $\boldsymbol{P}$ étant un espace fibré principal holomorphe de groupe $\boldsymbol{A}$ et de base $\boldsymbol{T}$, quand on fait opérer les éléments $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{P}$ par $\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{y}\boldsymbol{a}^{-1}$ pour tout $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{P}$, ces nouvelles opérations de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{P}$ définissent dans la variété $\boldsymbol{P}$ une autre structure d'espace fibré principal holomorphe $-\boldsymbol{P}$ de groupe $\boldsymbol{A}$ et de base $\boldsymbol{T}$ et la classe $[-\boldsymbol{P}]$ de $-\boldsymbol{P}$ est égale à $-[\boldsymbol{P}]$ dans $H^1(\boldsymbol{T}, \mathrm{A})$. Or, si $\boldsymbol{P}$ admet une connexion holomorphe dont la forme est ω, la forme $-\omega$ est une forme de connexion holomorphe de $-\boldsymbol{P}$. Par conséquent, si $[\boldsymbol{P}] \in \mathcal{P}$ alors $-[\boldsymbol{P}] \in \mathcal{P}$. On a ainsi démontré que $\mathcal{P}$ est un sous-groupe de $H^1(\boldsymbol{T}, \mathrm{A})$.

Avant montrer que $\mathcal{P}^0$ est un sous-groupe de $H^1(\boldsymbol{T}, \mathrm{A})$ on établira le

Lemme 4. *Si Ω_i est la forme de courbure de la connexion holomorphe ω_i de $\boldsymbol{P}_i$ $(i=1, 2)$, la forme de courbure Ω de la connexion holomorphe ω de $\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2$ construite ci-dessus est égale à $\Omega_1 + \Omega_2$.*

En effet, puisque $\omega' = (\omega_1, \omega_2)\boldsymbol{t}^*$, $d\omega' = (d\omega_1, d\omega_2)\boldsymbol{t}^* = (\Omega_1 \boldsymbol{p}_1, \Omega_2 \boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{t}^* = (\Omega_1, \Omega_2)((\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{t}^*) = (\Omega_1, \Omega_2)\boldsymbol{t}\boldsymbol{p}'$, où (Ω_1, Ω_2) est une $(\mathfrak{a}+\mathfrak{a})$-forme sur $\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T}$. D'autre part, puisque $\alpha\omega' = \omega\boldsymbol{q}$, $\alpha(d\omega') = (d\omega)\boldsymbol{q}$. Par conséquent, $\alpha(\Omega_1, \Omega_2)\boldsymbol{t}\boldsymbol{p}' = (d\omega)\boldsymbol{q}$. On a $\alpha(\Omega_1, \Omega_2)\boldsymbol{t} = \Omega_1 + \Omega_2$. Comme $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{pq}$ et $d\omega = \Omega\boldsymbol{p}$, il en résulte que $(\Omega_1 + \Omega_2)\boldsymbol{p}' = \Omega\boldsymbol{p}'$. On a ainsi $\Omega_1 + \Omega_2 = \Omega$ et le lemme 4 est démontré.

D'après ce lemme, si $\boldsymbol{P}_1$ et $\boldsymbol{P}_2$ ont des connexions holomorphes intégrables, $\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2$ a aussi une connexion holomorphe intégrable. Il est clair que, si $\boldsymbol{P}$ a une connexion holomorphe intégrable, $-\boldsymbol{P}$ a une connexion holomorphe intégrable. Donc $\mathcal{P}^0$ est un sous-groupe de $H^1(\boldsymbol{T}, \mathbf{A})$. Le théorème 5 est ainsi démontré.

§ 5. Groupe des formes de courbure.

Supposons que $\boldsymbol{P}$ admette une connexion holomorphe. La classe $[\boldsymbol{P}]$ de $\boldsymbol{P}$ appartient à $\mathcal{P}$. D'après le théorème 2, la forme de courbure d'une connexion holomorphe de $\boldsymbol{P}$ est déterminée par $\boldsymbol{P}$ et par consequent par $[\boldsymbol{P}]$. On peut donc parler de la forme de courbure de la classe $[\boldsymbol{P}]$. Or, d'après le théorème 2, cette forme de courbure induit dans $\mathfrak{h}$ une forme bilinéaire antisymétrique à valeurs dans $\mathfrak{a}$. Il résulte du lemme 4 que l'application qui fait correspondre à chaque classe $[\boldsymbol{P}]$ la forme bilinéaire antisymétrique sur $\mathfrak{h}$ induite par la forme de courbure de $[\boldsymbol{P}]$ est un homomorphisme du groupe $\mathcal{P}$ dans le groupe des formes bilinéaires sur $\mathfrak{h}$ à valeurs dans $\mathfrak{a}$. On se propose d'étudier l'image de cet homomorphisme.

Puisque $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{H}$ sont des groupes de Lie abeliens connexes, leurs algèbres de Lie $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{h}$ sont, en tant que des groupes abeliens, les revêtements universels de $\boldsymbol{A}$ resp. de $\boldsymbol{H}$, les projections étant les applications exponentielles. Désignons par Π resp. Δ les noyaux de ces projections. On a donc les suites exactes :

$$(0) \longrightarrow \Pi \longrightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{\exp} \boldsymbol{A} \longrightarrow (0)\,,$$
$$(0) \longrightarrow \Delta \longrightarrow \mathfrak{h} \xrightarrow{\exp} \boldsymbol{H} \longrightarrow (0)\,.$$

Les sous-groupes discrets Π et Δ de $\mathfrak{a}$ resp. de $\mathfrak{h}$ sont des groupes abeliens libres. Le rang de Δ est $2n$, puisque $\boldsymbol{H}$ est compact et que $\dim \boldsymbol{H}=n$. Supposons que $\boldsymbol{P}$ admette une connexion holomorphe. Soit $\boldsymbol{G}$ le plus grand groupe connexe d'automorphismes de $\boldsymbol{P}$ et soit $\tilde{\boldsymbol{G}}$ le revêtement universel de $\boldsymbol{G}$; on désigne par $\boldsymbol{\rho}$ la projection de $\tilde{\boldsymbol{G}}$ sur $\boldsymbol{G}$. On a défini au § 3 les homomorphismes $\boldsymbol{\lambda} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{H}$. Il existe alors des homomorphismes $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} : \mathfrak{a} \to \tilde{\boldsymbol{G}}$ et $\tilde{\boldsymbol{\pi}} : \tilde{\boldsymbol{G}} \to \mathfrak{h}$ tels que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{a} & \xrightarrow{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} & \tilde{\boldsymbol{G}} & \xrightarrow{\tilde{\boldsymbol{\pi}}} & \mathfrak{h} \\ {\scriptstyle\exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\boldsymbol{\rho}} & & \downarrow{\scriptstyle\exp} \\ \boldsymbol{A} & \xrightarrow{\boldsymbol{\lambda}} & \boldsymbol{G} & \xrightarrow{\boldsymbol{\pi}} & \boldsymbol{H}\,. \end{array} \tag{1}$$

Puisque $\boldsymbol{\lambda}$ et $\boldsymbol{\pi}$ induisent les homomorphismes d'algèbres de Lie λ

resp. π, il en est de même de $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ et de $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$. Les groupes $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{h}$ étant identifiés avec leurs algèbres de Lie, cela signifie que le diagramme suivant est commutatif.

(2)
$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{g} \arrow[dr, "\boldsymbol{\pi}"] \arrow[dd, "\exp"] & \\ \mathfrak{a} \arrow[ur, "\boldsymbol{\lambda}"] \arrow[dr, "\tilde{\boldsymbol{\lambda}}"'] & & \mathfrak{h}. \\ & \tilde{\boldsymbol{G}} \arrow[ur, "\tilde{\boldsymbol{\pi}}"'] & \end{tikzcd}$$

D'autre part, la suite

(3)
$$(0) \longrightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} \tilde{\boldsymbol{G}} \xrightarrow{\tilde{\boldsymbol{\pi}}} \mathfrak{h} \longrightarrow (0)$$

est exacte. En effet, d'après le théorème 1 π est surjectif et (2) implique que $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$ est alors surjectif. Puisque $\mathfrak{h}$ est simplement connexe, le noyau de $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$ est connexe. Par conséquent, ce noyau est le sous-groupe de $\tilde{\boldsymbol{G}}$ engendré par le noyau de π qui coïncide avec $\lambda(\mathfrak{a})$ d'après le lemme 1. Il résulte de (2) que le noyau de $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$ est égal à $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\mathfrak{a})$. Enfin, $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\mathfrak{a})$ étant alors un sous-groupe fermé et invariant de $\tilde{\boldsymbol{G}}$, $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\mathfrak{a})$ est simplement connexe. Puisque $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ est localement isomorphe, $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ est donc une bijection de $\mathfrak{a}$ sur $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\mathfrak{a})$. On a ainsi montré que la suite (3) est exacte.

Puisque (2) est commutatif et que (3) est exacte, il en résulte que $\exp : \mathfrak{g} \to \tilde{\boldsymbol{G}}$ est surjectif.

On fait maintenant opérer le groupe $\tilde{\boldsymbol{G}}$ dans $\boldsymbol{P}$ en posant :

$$\tilde{\boldsymbol{s}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\rho}(\tilde{\boldsymbol{s}})\boldsymbol{y} \qquad \text{pour} \quad \tilde{\boldsymbol{s}} \in \tilde{\boldsymbol{G}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{P}.$$

De même, $\mathfrak{h}$ opère dans $\boldsymbol{T}$ par la formule

$$h\boldsymbol{x} = (\exp h)\boldsymbol{x} \qquad \text{pour} \quad h \in \mathfrak{h} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{T}.$$

Choisissons un point $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{P}$. Soit Λ le sous-groupe de stabilité de $\tilde{\boldsymbol{G}}$ en ce point $\boldsymbol{y}$. D'après le diagramme commutatif (1) et la suite exacte (3), les opérations du sous-groupe $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\mathfrak{a})$ de $\tilde{\boldsymbol{G}}$ dans $\boldsymbol{P}$ sont les opérations de $\boldsymbol{A}$ et de plus un élément de $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\mathfrak{a})$ opère trivialement dans $\boldsymbol{P}$ si et seulement si cet élément appartient à $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\Pi)$. Puisque l'opération d'un élément de $\boldsymbol{A}$ qui laisse fixe le point $\boldsymbol{y}$ est l'opération triviale, il en résulte que

(4)
$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\mathfrak{a}) \cap \Lambda = \tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\Pi).$$

D'autre part, on a :

(5)
$$\tilde{\boldsymbol{\pi}}(\Lambda) = \Delta.$$

En effet, on a $\tilde{\boldsymbol{\pi}}(\tilde{\boldsymbol{s}})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{p}(\tilde{\boldsymbol{s}}\boldsymbol{y})$ pour tout $\tilde{\boldsymbol{s}} \in \tilde{\boldsymbol{G}}$. Donc un élément de $\tilde{\boldsymbol{\pi}}(\Lambda)$ laisse fixe le point $\tilde{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{y})$. Puisque $\boldsymbol{H}$ est simplement transitif sur $\boldsymbol{T}$, il en résulte que $\tilde{\boldsymbol{\pi}}(\Lambda)\subset\Delta$. D'autre part, d'après la suite exacte (3), tout élément de $\mathfrak{h}$ est de la forme $\tilde{\boldsymbol{\pi}}(\tilde{\boldsymbol{s}})$ avec $\tilde{\boldsymbol{s}}\in\tilde{\boldsymbol{G}}$. S'il appartient à Δ, $\tilde{\boldsymbol{\pi}}(\tilde{\boldsymbol{s}})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{y})$ donc $\boldsymbol{p}(\tilde{\boldsymbol{s}}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{y})$ et $\tilde{\boldsymbol{s}}\boldsymbol{y}$ appartient à la fibre de $\boldsymbol{y}$. Il existe donc un élément $a\in\mathfrak{a}$ tel que $(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(a)\tilde{\boldsymbol{s}})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}$, c'est-à-dire que $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(a)\tilde{\boldsymbol{s}}\in\Lambda$. On a $\tilde{\boldsymbol{\pi}}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(a)\tilde{\boldsymbol{s}})=\tilde{\boldsymbol{\pi}}(\tilde{\boldsymbol{s}})$ d'après (3), par suite $\Delta\subset\tilde{\boldsymbol{\pi}}(\Lambda)$, ce qui démontre (5).

Lemme 5. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie telle que* $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ *soit dans le centre de* $\mathfrak{g}$. *Alors, dans un groupe de Lie ayant* $\mathfrak{g}$ *pour algèbre de Lie, on a*

$$(\exp Y)(\exp X)(\exp Y)^{-1}(\exp X)^{-1}=\exp(-[X,\ Y])$$

quels que soient $X,\ Y\in\mathfrak{g}$.

En effet, $(\exp Y)(\exp X)(\exp Y)^{-1}=\exp(ad(\exp Y)X)=\exp(\exp(ad\,Y)X)$ $=\exp(X+[Y,\ X])=\exp([Y,\ X])\exp X$, les deux dernières égalités résultant de $[Y,[Y,X]]=[X,[Y,X]]=0$. La formule du lemme en résulte immédiatement.

Le lemme 2 montre que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $\tilde{\boldsymbol{G}}$ vérifie les conditions de ce lemme.

Cela fait, pour tout élément $u\in\Delta$, on choisit un élément $X(u)\in\mathfrak{g}$ tel que $\exp X(u)\in\Lambda$ et que $\pi(X(u))=u$. En effet, d'après (5), on a un élément $\tilde{u}\in\Lambda$ tel que $\tilde{\boldsymbol{\pi}}(\tilde{u})=u$. On a vu que $\exp:\mathfrak{g}\to\boldsymbol{G}$ était surjectif, donc il existe un élément $X(u)\in\mathfrak{g}$ tel que $\exp X(u)=\tilde{u}$. Alors $\tilde{\boldsymbol{\pi}}(\exp X(u))=u$ et donc $\boldsymbol{\pi}(X(u))=u$ d'après le diagrame (2). Or, si $u,u'\in\Delta$, Ω étant la forme de courbure d'une connexion holomorphe de $\boldsymbol{P}$, on a :

$$\begin{aligned}(\exp X(u'))\,(\exp X(u))\,&(\exp X(u'))^{-1}(\exp X(u))^{-1}\\ &=\exp(-[X(u),\ X(u')]) &&\text{(d'après le lemme 5)}\\ &=\exp\lambda\Omega(u,\ u') &&\text{(d'aprés le théorème 2)}\\ &=\tilde{\boldsymbol{\lambda}}\Omega(u,\ u') &&\text{(d'après (2))}.\end{aligned}$$

Par conséquent, $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}\Omega(u,u')\in\Lambda$. Le groupe $\mathfrak{h}$ étant abelien, la suite exacte (3) implique que le sous-groupe des commutateurs de $\tilde{\boldsymbol{G}}$ est dans $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\mathfrak{a})$; par conséquent, $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}\Omega(u,u')\in\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\mathfrak{a})$. D'après (4), on a alors $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}\Omega(u,u')\in\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\Pi)$ et, puisque $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ est injectif d'après (3), on a enfin

$$(6)\qquad \Omega(u,\ u')\in\Pi\qquad\text{quels que soient}\quad u,\ u'\in\Delta\,.$$

Remarquons que (6) est une propriété de Ω qui ne dépend pas du choix du point $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{P}$.

Soit $\mathcal{P}^*$ le groupe des formes bilinéaires antisymétriques sur $\mathfrak{h}$ à valeurs dans $\mathfrak{a}$ qui satisfont à la condition (6) ; $\mathcal{P}^*$ s'appelera *le groupe des formes de courbure*. Compte tenu du début de ce §, on a ainsi le résultat suivant.

Théorème 6. *L'application θ qui fait correspondre à chaque classe $[\boldsymbol{P}] \in \mathcal{P}$ la restriction à $\mathfrak{h}$ de la forme de courbure de $[\boldsymbol{P}]$ est un homomorphisme du groupe $\mathcal{P}$ dans le groupe des formes de courbures $\mathcal{P}^*$.*

On désignera par $\theta(\boldsymbol{P})$ l'image de la classe $[\boldsymbol{P}]$ de $\boldsymbol{P}$.

Théorème 7. *Soit ι l'injection de $\mathcal{P}^0$ dans $\mathcal{P}$. Alors,*

$$(0) \longrightarrow \mathcal{P}^0 \xrightarrow{\ \iota\ } \mathcal{P} \xrightarrow{\ \theta\ } \mathcal{P}^* \longrightarrow (0)$$

est une suite exacte.

Démonstration. Il résulte du théorème 2 que le noyau de θ coïncide avec $\mathcal{P}^0$. Afin de montrer que θ est surjectif, on construit pour chaque $\Omega \in \mathcal{P}^*$ un espace fibré $\boldsymbol{P}$ admettant une connexion holomorphe et tel que $\theta(\boldsymbol{P}) = \Omega$. Soit $\mathfrak{g}$ un espace vectoriel complexe pour lequel il existe une suite exacte :

$$(0) \longrightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{\ \lambda\ } \mathfrak{g} \xrightarrow{\ \pi\ } \mathfrak{h} \longrightarrow (0)\,. \tag{7}$$

Définissons dans $\mathfrak{g}$ une structure d'algèbre de Lie complexe en posant :

$$[X,\ Y] = -\lambda\Omega(\pi(X)\,,\ \pi(Y)) \qquad \text{pour} \quad X,\ Y \in \mathfrak{g}\,.$$

Le centre de $\mathfrak{g}$ contient $\lambda(\mathfrak{a})$ et (3) est une suite exacte d'algèbres de Lie. Il en résulte en particulier que $\mathfrak{g}$ vérifie l'hypothèse du lemme 5. Soit $\tilde{\boldsymbol{G}}$ le groupe de Lie simplement connexe ayant $\mathfrak{g}$ pour algèbre de Lie. Il existe des homomorphismes $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} : \mathfrak{h} \to \tilde{\boldsymbol{G}}$ et $\tilde{\boldsymbol{\pi}} : \tilde{\boldsymbol{G}} \to \mathfrak{h}$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{g} \arrow[dr, "\pi"] \arrow[dd, "\exp"] & \\ \mathfrak{a} \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[dr, "\tilde{\boldsymbol{\lambda}}"'] & & \mathfrak{h} \\ & \tilde{\boldsymbol{G}} \arrow[ur, "\tilde{\boldsymbol{\pi}}"'] & \end{tikzcd} \tag{8}$$

soit commutatif. Par le même raisonnement qu'en haut il en résulte que la suite

$$(0) \longrightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}\ } \tilde{\boldsymbol{G}} \xrightarrow{\ \tilde{\boldsymbol{\pi}}\ } \mathfrak{h} \longrightarrow (0) \tag{9}$$

est exacte. Soit μ un relèvement de π. D'après le lemme 5, si $u,\ u' \in \Delta$, $(\exp\mu(u'))(\exp\mu(u))(\exp\mu(u'))^{-1}(\exp\mu(u))^{-1} = \exp(-[\mu(u),\ \mu(u')] = \exp\lambda\Omega(u,u')$ $= \tilde{\boldsymbol{\lambda}}\Omega(u,\ u')$ et ceci appartient à $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\Pi)$ puisque $\Omega \in \mathcal{P}^*$. Soit $\{u_1,\ \cdots,\ u_{2n}\}$ une base du groupe abelien libre Δ et soit Λ le sous-groupe de $\boldsymbol{G}$ engendré par $\{\exp\mu(u_i) : i = 1,\ \cdots,\ 2n\}$ et $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\Pi)$. Compte tenu de (8), il en résulte que

$$(10) \qquad \tilde{\lambda}(\mathfrak{a}) \cap \Lambda = \tilde{\lambda}(\Pi),$$

$$(11) \qquad \tilde{\pi}(\Lambda) = \Delta .$$

Par conséquent, le sous-groupe Λ est discret et donc fermé dans $\tilde{G}$.

Soit maintenant P l'espace homogéne $\tilde{G}/\Lambda$. Tout élément $a \in \mathfrak{a}$ opère dans P par la translation par $\tilde{\lambda}(a) \in \tilde{G}$. D'après (10), si $a \in \Pi$, alors a opère trivialement dans P et on peut donc considérer que le groupe $A = \mathfrak{a}/\Pi$ opère dans P. D'autre part, d'après (9) et (11), l'application de $\tilde{G}$ dans T qui transforme $\tilde{s} \in \tilde{G}$ en $\tilde{\pi}(\tilde{s})x$ où $x \in T$ induit une application p de P sur T. On constate alors que les opérations de A dans P et l'application p définissent dans P une structure d'espace fibré principal holomorphe de groupe A et de base T. De plus, $\tilde{G}$ opère sur P de manière transitive comme groupe connexe d'automorphismes de P, donc P admet une connexion holomorphe d'après le thèorème 3. Enfin, d'après le théorème 2, on a $\theta(P) = \Omega$. Cela achève la démonstration du théorème 7.

§ 6. Homomorphisme τ.

On désigne par Hom (Δ, A) le groupe abelien des homomophismes de Δ dans A ; la somme des éléments $\gamma, \gamma' \in$ Hom (Δ, A) est définie par $(\gamma+\gamma')(u) = \gamma(u)\gamma'(u)$ pour tout $u \in \Delta$. De même, Hom$(\mathfrak{h}, A)$ désignera le groupe des homomorphismes holomorphes de $\mathfrak{h}$ dans A. Un homomorphisme de $\mathfrak{h}$ dans A induit un homomorphisme de Δ dans A et on a ainsi un homomorphisme η de Hom $(\mathfrak{h}, A)$ dans Hom (Δ, A).

À partir de maintenant on choisit un point $x \in T$ et une base $\{u_1, \cdots, u_{2n}\}$ du groupe abelien libre Δ.

Supposons que P admette une connexion holomorphe. D'après le théorème 1, il existe un relèvement μ de π. Ce relèvement μ définit un élément γ de Hom (Δ, A) par le procédé suivant. On prend un point $y \in P$ tel que $p(y) = x$. Considérons exp $\mu(u_k) \in \tilde{G}$ pour $1 \leqq k \leqq 2n$. D'après le diagramme commutatif (2) du §5, $\tilde{\pi}(\exp\mu(u_k)) = \pi(\mu(u_k)) = u_k$, donc $p((\exp\mu(u_k))y) = u_k p(y) = p(y)$ et il existe des éléments $a_k \in A$ tels que

$$(\exp \mu(u_k))y = y a_k \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq k \leqq 2n .$$

Puisque Δ est un groupe abelien libre engendré par $\{u_1, \cdots, u_{2n}\}$ et que A est un groupe abelien, ces éléments $a_1, \cdots, a_{2n}$ définissent un élément γ de Hom (Δ, A) tel que $\gamma(u_k) = a_k$ pour $1 \leqq k \leqq 2n$. Si l'on prend un autre point $y' \in P$ tel que $p(y') = x$, il existe un élément $a_0 \in A$ tel que $y' = y a_0$. Par conséquent, on a $(\exp \mu(u_k))y' = y a_k a_0 = y a_0 a_k = y' a_k$ pour $1 \leqq k \leqq 2n$, ce qui montre que γ est bien déterminé par μ.

Il résulte du lemme 1 que tout relèvement μ' de π est de la forme $\mu + \lambda\nu$ où ν est une application linéaire quelconque de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{a}$. Puisque

$\lambda(\mathfrak{a})$ est dans le centre de $\mathfrak{g}$, $[\mu(h), \lambda(\nu(h))]=0$ et donc, compte tenu de (2) du § 5, $\exp \mu'(h) = \exp \mu(h)\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\nu(h))$ quel que soit $h \in \mathfrak{h}$. L'application $\boldsymbol{\nu}=(\exp)\nu$ est un homomorphisme holomorphe de $\mathfrak{h}$ dans $\boldsymbol{A}$ et, puisque $\boldsymbol{\rho}\tilde{\boldsymbol{\lambda}}=\boldsymbol{\lambda}(\exp)$ d'aprés (1) du § 5, on a :

$$(\exp \mu'(u_k))\boldsymbol{y} = (\exp \mu(u_k)\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\nu(u_k))\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{\nu}(u_k)\boldsymbol{a}_k) .$$

Par conséquent, si l'on part du relèvement μ' on aura l'homomorphisme $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\nu})+\boldsymbol{\gamma}$ au lieu de $\boldsymbol{\gamma}$. Ainsi, $\boldsymbol{P}$ définit un élément $\tau(\boldsymbol{P})$ du groupe quotient $\mathrm{Hom}(\Delta, \boldsymbol{A})/\boldsymbol{\eta}(\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \boldsymbol{A}))$ représenté par $\boldsymbol{\gamma}$. Si $\tau(\boldsymbol{P})=0$, alors, par un choix convenable du relèvement μ, l'homomorphisms $\boldsymbol{\gamma}$ défini par μ est nul.

Si $\boldsymbol{P}'$ est équivalent à $\boldsymbol{P}$, alors $\tau(\boldsymbol{P})=\tau(\boldsymbol{P}')$. Par conséquent, l'application $\boldsymbol{P}\to\tau(\boldsymbol{P})$ induit une application τ de $\mathcal{P}$ dans $\mathrm{Hom}(\Delta, \boldsymbol{A})/\boldsymbol{\eta}(\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \boldsymbol{A}))$.

Théorème 8. *L'application* τ *est un homomorphisme du groupe* $\mathcal{P}$ *dans le groupe* $\mathrm{Hom}(\Delta, \boldsymbol{A})/\boldsymbol{\eta}(\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \boldsymbol{A}))$.

Démonstration. On employera les notations définies dans la démonstration du théorème 5. En outre, on identifie $\boldsymbol{P}_1 \vee \boldsymbol{P}_2$ avec son image dans $\boldsymbol{P}_1 \times \boldsymbol{P}_2$ par l'injection $\boldsymbol{t}^*$; les opérations de $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{P}_1 \vee \boldsymbol{P}_2$ sont induites par les opérations de $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{P}_1 \times \boldsymbol{P}_2$. Puisque $[\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2]=[\boldsymbol{P}_1]+[\boldsymbol{P}_2]$, il suffit de montrer que $\tau(\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2)=\tau(\boldsymbol{P}_1)+\tau(\boldsymbol{P}_2)$.

Soit $\mathfrak{g}_i\,(\mathfrak{g})$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs conformes invariants par $\boldsymbol{A}$ sur $\boldsymbol{P}_i$ (resp. sur $\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2$) ; d'après le théorème 1, on a les homomorphismes surjectifs $\pi_i : \mathfrak{g}_i \to \mathfrak{h}$ et $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ $(i=1, 2)$. La somme directe $\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_2$ peut être identifiée d'une façon canonique avec une algèbre de Lie de champs de vecteurs conformes sur $\boldsymbol{P}_1 \times \boldsymbol{P}_2$ qui sont invariants par $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}$. Soit $\mathfrak{g}'$ la sous-algèbre de Lie complexe de $\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_2$ des éléments (X_1, X_2) tels que $\pi_1(X_1)=\pi_2(X_2)$. Les éléments de $\mathfrak{g}'$ induisent des champs de vecteurs conformes dans la sous-variété $\boldsymbol{P}_1 \vee \boldsymbol{P}_2$ qui sont invariants par $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}$, donc à fortiori par $\boldsymbol{B}$. Ces champs-ci se projetent à leurs tour sur des champs de vecteurs sur l'espace quotient $\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2$ de $\boldsymbol{P}_1 \times \boldsymbol{P}_2$ qui appartiennent à $\mathfrak{g}$. On obtient ainsi un homomorphisme q de $\mathfrak{g}'$ dans $\mathfrak{g}$. Or, le groupe simplement connexe $\tilde{\boldsymbol{G}}_1\times\tilde{\boldsymbol{G}}_2$ ayant $\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_2$ pour algèbre de Lie opère dans $\boldsymbol{P}_1 \times \boldsymbol{P}_2$ et, $\tilde{\boldsymbol{G}}_1\times\tilde{\boldsymbol{G}}_2$ étant nilpotent et simplement connexe, on sait que la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$ de $\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_2$ correspond à un sous-groupe fermé et simplement connexe $\tilde{\boldsymbol{G}}'$ de $\tilde{\boldsymbol{G}}_1\times\tilde{\boldsymbol{G}}_2$. Le groupe $\tilde{\boldsymbol{G}}'$ transforme la sous-variété $\boldsymbol{P}_1 \vee \boldsymbol{P}_2$ en elle-même et y opère comme groupe d'automorphismes de l'espace fibré $\boldsymbol{P}_1 \vee \boldsymbol{P}_2$. Soit d'autre part $\tilde{\boldsymbol{G}}$ le groupe simplement connexe ayant $\mathfrak{g}$ pour algèbre de Lie. Puisque $\tilde{\boldsymbol{G}}'$ est simplement connexe, il existe un homomorphisme $\tilde{\boldsymbol{q}}$ de $\tilde{\boldsymbol{G}}'$ dans $\tilde{\boldsymbol{G}}$ qui induit l'homomorphisme q de $\mathfrak{g}'$ dans $\mathfrak{g}$. Il résulte de ces définitions que $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{s}'\boldsymbol{y}')=\tilde{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{s}')\boldsymbol{q}(\boldsymbol{y}')$ quels que soient $\boldsymbol{y}'\in \boldsymbol{P}_1\vee \boldsymbol{P}_2$ et $\boldsymbol{s}'\in\tilde{\boldsymbol{G}}'$.

Soient maintenant μ_i un relèvement de π_i et $\boldsymbol{\gamma}_i$ l'élément de Hom$(\Delta, \boldsymbol{A})$ défini par μ_i; $\boldsymbol{\gamma}_i$ représente $\tau(\boldsymbol{P}_i)$ $(i=1, 2)$. Posant $\mu'(h)=(\mu_1(h), \mu_2(h))$ pour $h\in\mathfrak{h}$, on a $\mu'(h)\in\mathfrak{g}'$ quel que soit $h\in\mathfrak{h}$, et l'application $\mu=q\mu'$ de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ est un relèvement de π. Prenons $\boldsymbol{y}_i\in\boldsymbol{P}_i$ tel que $\boldsymbol{p}_i(\boldsymbol{y}_i)=\boldsymbol{x}(i=1, 2)$. Il est evident que $(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2)\in\boldsymbol{P}_1\vee\boldsymbol{P}_2$ et que $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2))=\boldsymbol{x}$. D'après ce qui précède, on a $(\exp\mu(u_k))\boldsymbol{q}(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2)=\boldsymbol{q}((\exp\mu'(u_k))(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2))=\boldsymbol{q}((\exp\mu_1(u_k))\boldsymbol{y}_1, (\exp\mu_2(u_k))\boldsymbol{y}_2)=\boldsymbol{q}(\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{\gamma}_1(u_k), \boldsymbol{y}_2\boldsymbol{\gamma}_2(u_k))=\boldsymbol{q}(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2)(\boldsymbol{\gamma}_1(u_k)\boldsymbol{\gamma}_2(u_k))$ pour $1\leqq k\leqq 2n$. Cela montre que l'homomorphisme $\boldsymbol{\gamma}_1+\boldsymbol{\gamma}_2$ représente $\tau(\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2)$. On a ainsi $\tau(\boldsymbol{P}_1)+\tau(\boldsymbol{P}_2)=\tau(\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2)$ et le théorème 8 est démontrè.

Théorème 9. *La restriction à $\mathcal{P}^0$ de l'homomorphisme τ est bijective. En particulier, on a l'isomorphisme*

$$\mathcal{P}^0\cong \mathrm{Hom}\,(\Delta,\ \boldsymbol{A})/\boldsymbol{\eta}\,(\mathrm{Hom}\,(\mathfrak{h},\ \boldsymbol{A}))\,.$$

Démonstration. Supposons que la classe $[\boldsymbol{P}]$ de $\boldsymbol{P}$ appartienne à $\mathcal{P}^0$ et que $\tau(\boldsymbol{P})=0$. Puisque $\boldsymbol{P}$ admet une connexion holomorphe intégrable, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ associée à $\boldsymbol{P}$ est abelienne d'après le corollaire du théorème 2. Par conséquent, on a dans $\tilde{\boldsymbol{G}}$

$$(1)\qquad (\exp X)\,(\exp Y)=\exp\,(X+Y)\qquad \text{quels que soient } X,\ Y\in\mathfrak{g}\,.$$

D'autre part, comme on l'a remarqué plus haut, $\tau(\boldsymbol{P})=0$ signifie qu'il existe un relèvement μ de π tel que $(\exp\mu(u_k))\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}$ pour $1\leqq k\leqq 2n$, $\boldsymbol{y}$ étant un élément de $\boldsymbol{P}$ tel que $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}$. Puisque $u_1, \cdots, u_{2n}$ engendrent Δ, il résulte de (1) que

$$(2)\qquad (\exp\mu(u))\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}\qquad \text{quel que soit } u\in\Delta\,.$$

Or, puisque $\boldsymbol{H}=\mathfrak{h}/\Delta$ est simplement transitif sur $\boldsymbol{T}$, tout élément de $\boldsymbol{T}$ est de la forme $h\boldsymbol{x}$ avec $h\in\mathfrak{h}$ et $h\boldsymbol{x}=h'\boldsymbol{x}$ pour $h, h'\in\mathfrak{h}$ si et seulement si $h'=h+u$ avec $u\in\Delta$. Alors, d'après (1) et (2), il existe une application $\boldsymbol{f}$ de $\boldsymbol{T}$ dans $\boldsymbol{P}$ et une seule telle que

$$\boldsymbol{f}(h\boldsymbol{x})=(\exp\mu(h))\boldsymbol{y}\,.$$

On constate facilement que $\boldsymbol{f}$ est une section holomorphe de l'espace fibré $\boldsymbol{P}$. Par conséquent, $\boldsymbol{P}$ est trivial et $[\boldsymbol{P}]$ est donc l'élément neutre de $\mathcal{P}^0$.

Soit $\boldsymbol{\gamma}\in\mathrm{Hom}\,(\Delta, \boldsymbol{A})$. On construit un espace fibré $\boldsymbol{P}$ de groupe $\boldsymbol{A}$ et de base $\boldsymbol{T}$ qui admet un connexion holomorphe intégrable et dont l'image par τ est la classe de $\boldsymbol{\gamma}$ modulo $\boldsymbol{\eta}(\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \boldsymbol{A}))$. Puisque Δ est un groupe abelien libre, il existe un homomorphisme γ de Δ dans $\mathfrak{a}$ tel que $\exp\gamma(u)=\boldsymbol{\gamma}(u)$ pour tout $u\in\Delta$. Soit $\tilde{\boldsymbol{G}}$ le groupe somme directe de $\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{h}$ et soit Λ le sous-groupe discret de $\tilde{\boldsymbol{G}}$ constitué par les éléments de la forme $(v+\gamma(u), u)$ avec $v\in\Pi$ et $u\in\Delta$. Puisque $\Lambda\cap\mathfrak{a}=\Pi$, le groupe $\boldsymbol{A}=\mathfrak{a}/\Pi$ opère dans l'espace quotient $\boldsymbol{P}=\tilde{\boldsymbol{G}}/\Lambda$ et l'application de $\tilde{\boldsymbol{G}}$ sur $\boldsymbol{T}$ qui applique (a, h) en $\boldsymbol{hx}$ induit une application $\boldsymbol{p}$ de $\boldsymbol{P}$ sur $\boldsymbol{T}$. Ainsi $\boldsymbol{P}$ se munit d'une structure d'espace fibré principal holomorphe de groupe $\boldsymbol{A}$ de base $\boldsymbol{T}$ et dont la projection est $\boldsymbol{p}$. Le groupe $\boldsymbol{G}=\tilde{\boldsymbol{G}}/\Lambda$ opère dans $\boldsymbol{P}$ par les translations et coïncide avec le plus grand groupe connexe d'automorphismes de $\boldsymbol{P}$, car la dimension de ce dernier est $\leqq\dim\boldsymbol{P}=\dim\boldsymbol{G}$ d'après le lemme 1. D'après les théorèmes 3 et 4, il en résulte que $\boldsymbol{P}$ admet une connexion holomorphe intègrable. Enfin, on constate facilement que la classe $\tau(\boldsymbol{P})$ est représentée par $\boldsymbol{\gamma}$. On obtient ainsi l'espace fibré requis, ce qui montre que τ applique $\mathcal{P}^0$ sur le groupe $\mathrm{Hom}(\Delta, \boldsymbol{A})/\boldsymbol{\eta}(\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \boldsymbol{A}))$. Le théorème 9 est ainsi démontré.

§7. Structure du groupe $\mathcal{P}$.

Le théorème suivant détermine la structure du groupe $\mathcal{P}$.

Théorème 10. *a) Le groupe $\mathcal{P}$ est la somme directe du sous-groupe $\mathcal{P}^0$ et d'un sous-groupe qui est isomorphe à $\mathcal{P}^*$.*

b) Le groupe des formes de courbure $\mathcal{P}^*$ est un groupe abelien libre dont le rang est $\leqq n(n-1)r$.

c) Le groupe $\mathcal{P}^0$ est isomorphe au quotient du produit direct $\boldsymbol{A}^{2n}$ de $2n$ exemplaires de $\boldsymbol{A}$ par un sous-groupe de Lie complexe connexe de dimension n.

Démonstration. a) Soit $\mathcal{N}$ le noyau de l'homomorphisme τ. Le théorème 9 implique que le groupe $\mathcal{P}$ se décompose en somme directe $\mathcal{P}^0+\mathcal{N}$. D'après le théorème 7, l'homomorphisme θ induit un isomorphisme de $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{P}^*$, ce qui démontre a).

Pour montrer b) et c) on suppose que les éléments $u_1, \cdots, u_n$ de la base $\{u_1, \cdots, u_{2n}\}$ de Δ forment une base de l'espace vectoriel complexe $\mathfrak{h}$; c'est possible puisque $u_1, \cdots, u_{2n}$ engendrent $\mathfrak{h}$ sur les nombres réels, donc à fortiori sur les nombres complexes.

b) Une forme bilinéaire antisymétrique Ω sur $\mathfrak{h}$ à valeurs dans $\mathfrak{a}$ est définie par ses valeurs pour (u_k, u_l) avec $1\leqq k<l\leqq 2n$, qui peuvent être $\binom{n}{2}$ points arbitraires de $\mathfrak{a}$. Le groupe de ces formes se munit donc d'une structure d'espace vectoriel complexe isomorphe à la somme directe $\mathfrak{a}^{\binom{n}{2}}$. Or, pour que Ω soit dans $\mathcal{P}^*$, il faut et il suffit que

$$(8) \qquad \Omega(u_k, u_l)\in\Pi \qquad \text{pour} \quad 1\leqq k<l\leqq 2n\,.$$

Dans ce cas, on a en particulier $\Omega(u_i, u_j)\in\Pi$ pour $1\leqq i<j\leqq n$. Par conséquent, $\mathcal{P}^*$ est isomorphe à un sous-groupe discret de $\mathfrak{a}^{\binom{n}{2}}$, donc c'est un groupe abelien libre dont le rang est $\leqq 2\dim\mathfrak{a}^{\binom{n}{2}}=n(n-1)r$.

c) Le groupe $\mathrm{Hom}(\Delta, \boldsymbol{A})$ est isomorphe à $\boldsymbol{A}^{2n}$ par l'application $\boldsymbol{\gamma}\to(\boldsymbol{\gamma}(u_1), \cdots, \boldsymbol{\gamma}(u_{2n}))$. De même, le groupe $\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ étant le groupe des applications linéaires de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{a}$, $\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ est isomorphe à $\mathfrak{a}^n$ par l'applications $\nu\to(\nu(u_1), \cdots, \nu(u_n))$. On identifira $\mathrm{Hom}(\Delta, \boldsymbol{A})$ avec $\boldsymbol{A}^{2n}$ et $\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ avec $\mathfrak{a}^n$ au moyen de ces isomorphismes. D'autre part, l'homomorphisme $\exp: \mathfrak{a}\to\boldsymbol{A}$ induit des homomorphismes de $\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ sur $\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \boldsymbol{A})$ et de $\mathrm{Hom}(\Delta, \mathfrak{a})$ sur $\mathrm{Hom}(\Delta, \boldsymbol{A})$. Désignant encore par exp ces homomorphismes et par ι l'homomorphisme de $\mathrm{Hom}(\Delta, \Pi)$ dans $\mathrm{Hom}(\Delta, \mathfrak{a})$ induit par l'injection de Π dans $\mathfrak{a}$, on a le diagramme suivant.

$$
\begin{tikzcd}
 & (0) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \mathfrak{a}) \arrow[r, "\exp"] \arrow[d, "\eta"] & \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \boldsymbol{A}) \arrow[r] \arrow[d, "\boldsymbol{\eta}"] & (0) \\
(0) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\Lambda, \Pi) \arrow[r, "\iota"] & \mathrm{Hom}(\Delta, \mathfrak{a}) \arrow[r, "\exp"] & \mathrm{Hom}(\Delta, \boldsymbol{A}) \arrow[r] & (0)
\end{tikzcd} \tag{9}
$$

Il est clair que ce diagramme est commutatif et que les deux lignes sont des suites exactes. De plus, η est injectif, car Δ engendre $\mathfrak{h}$ sur les nombres complexes. Il résulte de ce diagramme que l'homomorphisme composé $\boldsymbol{\eta}(\exp)$ est un homomorphisme holomorphe de $\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})=\mathfrak{a}^n$ dans le groupe $\mathrm{Hom}(\Delta, \boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^{2n}$ dont le noyau est le sous-groupe discret constitué par les éléments qui sont appliqués par η dans $\iota(\mathrm{Hom}(\Delta, \Pi))$. Le groupe $\boldsymbol{\eta}(\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \boldsymbol{A}))$ étant l'image $\boldsymbol{\eta}(\exp)\mathfrak{a}^n$, c'est un sous-groupe de Lie complexe connexe de dimension n de $\boldsymbol{A}^{2n}$. Le théorème 10 *c*) en résulte, puisque $\mathcal{P}^0\cong\mathrm{Hom}(\Delta, \boldsymbol{A})/\boldsymbol{\eta}(\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \boldsymbol{A}))$ d'après le théorème 9. Le théorème 10 est ainsi démontré.

On va voir quand le sous-groupe de Lie du théorème 10 *c*) est fermé : Soit E le sous-groupe de $\mathrm{Hom}(\Delta, \mathfrak{a})$ formé par les éléments γ tels que $\gamma(u_i)=0$ pour $1\leqq i\leqq n$. On peut identifier E avec $\mathfrak{a}^n$ en faisant correpondre à $\gamma\in E$ l'élément $(\gamma(u_{n+1}), \cdots, \gamma(u_{2n}))$. D'autre part, le groupe $\mathrm{Hom}(\Delta, \mathfrak{a})$ est la somme directe

$$\mathrm{Hom}(\Delta, \mathfrak{a}) = \eta(\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \mathfrak{a}))+E. \tag{10}$$

Cela fait, on obtient facilement d'après le diagramme (9) le résultat suivant : Pour que $\boldsymbol{\eta}(\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \boldsymbol{A}))$ soit fermé dans $\mathrm{Hom}(\Delta, \boldsymbol{A})$, il faut et il suffit que l'image D de $\iota(\mathrm{Hom}(\Delta, \Pi))$ par la projection de $\mathrm{Hom}(\Delta, \mathfrak{a})$ sur E par rapport à la décomposition (10) soit un sous-groupe fermé. Dans ce cas, D est un sous-groupe discret de E et $\mathcal{P}^0\cong\mathrm{Hom}(\Delta, \boldsymbol{A})/\boldsymbol{\eta}(\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \boldsymbol{A}))$ est isomorphe à E/D. De plus, D contenant le sous-groupe Π^n de $E=\mathfrak{a}^n$,

$\mathcal{P}^0$ est alors isomorphe au quotient de A^n par un sous-groupe discret.

EXEMPLE 1. Le cas $A = C^*$ (le groupe multiplicatif des nombres complexes non-nuls). En général, si $\Omega \in \mathcal{P}^*$, alors l'ensemble $\{\Omega(u, u')\,;\, u, u' \in \Delta\}$ est un sous-groupe de Π qui engendre sur les nombres réels le sous-espace complexe $\{\Omega(h, h')\,;\, h, h' \in \mathfrak{h}\}$. Or, dans le cas où $A = C^*$, aucun sous-groupe de Π n'engendre un sous-espace complexe $\neq (0)$ sur les nombres réels. Par conséquent, $\mathcal{P}^* = (0)$ et $\mathcal{P} = \mathcal{P}^0$ d'après le théorème 7. Par ailleurs, on sait que le groupe $\mathcal{P}^0$ est un tore complexe (la variété de Picard de T). Cela résulte aussi du résultat ci-dessus. Plus précisément, les groupes $\mathrm{Hom}(\Delta, \mathfrak{a})$, $\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ et $\mathrm{Hom}(\Delta, \Pi)$ sont canoniquement isomorphes aux groupes des formes de degré 1, des formes de type (1, 0) resp. des formes de degré 1 et de périodes entières dans l'espace des formes sur T, à valeurs complexes, qui sont harmoniques par rapport à une métrique kaehlérienne de T invariantes par H. Il en résulte que la structure complexe de $\mathcal{P}^0$ d'après le théorème 10 coïncide avec celle de la variété de Picard au signe du tenseur complexe près.

EXEMPLE 2. Soit $\{u_1, \cdots, u_{2n}\} = \{u_1, \cdots, u_n, \sqrt{-1}u_i, \cdots, \sqrt{-1}u_n\}$. La condition (8) pour qu'une forme bilinéaire antisymétrique Ω appartienne à $\mathcal{P}^*$ est alors : $\Omega(u_i, u_j)$ et $\sqrt{-1}\Omega(u_i, u_j) \in \Pi$ pour $1 \leqq i < j \leqq n$. Posons $\Pi' = \{v\,;\, v$ et $\sqrt{-1}v \in \Pi\}$. Alors $\mathcal{P}^*$ est isomorphe à la somme directe de $\binom{n}{2}$ groupes isomorphes à Π'. Supposons de plus que A soit compact et que Π soit engendré par $\{v_1, \cdots, v_r, \beta_1 v_1, \cdots, \beta_r v_r\}$ où $\{v_1, \cdots, v_r\}$ est une base complexe de $\mathfrak{a}$ et où $\beta_1, \cdots, \beta_r$ sont des nombres complexes avec $\mathrm{Im}\,\beta_i \neq 0$ pour $1 \leqq i \leqq r$. Si $\beta_1 = \cdots = \beta_{i_0} = \sqrt{-1}$ et si $\mathrm{Im}\,\beta_i \not\equiv (0)$ mod. 1 pour $i > i_0$, un simple calcul implique que Π' est le sous-groupe de Π engenré par $\{v_i, \cdots, v_{i_0}, \sqrt{-1}v_1, \cdots, \sqrt{-1}v_{i_0}\}$. Par conséquent, le groupe $\mathcal{P}^*$ est alors de rang $n(n-1)i_0$. Les cas $i_0 = 0$ et $i_0 = r$ donnent les rangs extrêmes de $\mathcal{P}^*$.

On considère le groupe $\mathcal{P}^0$ au cas où $r = n = 1$. Alors $E = \mathfrak{a}$ et la projection D de $\iota(\mathrm{Hom}(\Delta, \Pi))$ dans E selon (10) est le groupe engendré par $\{v_1, \beta_1 v_1, \sqrt{-1}v_1, \sqrt{-1}\beta_1 v_1\}$. Si $\mathrm{Im}\,\beta_1$ est un nombre irrationnel, D n'est pas fermé dans E. On voit de plus que $\mathcal{P}^0$ est alors le quotient de A^2 par un sous-groupe de Lie isomorphe au groupe $\mathfrak{a}$.

Université de Strasbourg, France
et
Université d'Osaka, Japon

(Reçu le 11 mars, 1959)

Bibliographie

[1] M. F. Atiyah: *Complex analytic connections in fibre bundles*, Trans. Amer. Math. Soc. **85** (1957), 181–207.

[2] A. Blanchard: *Sur les variétés analytiques complexes*, Annales École Normale Sup. **76** (1956), 157–202.

[3] F. Hirzebruch: Neue topologischen Methoden in der algebraischen Geometrie. Ergibnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (N. F) 9, Berlin 1956.

[4] A. Morimoto: *Sur le groupe d'automorphismes d'un espace fibré principal analytique complexe*, Nagoya Math. J. **13** (1958), 157–168.

[5] K. Nomizu: Lie groups and differential geometry. Publication of the Math. Soc. Japan N°2, Tokyo, 1956.