The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	単位区間上における反復関数系の極限集合の重複度１の集合のHausdorff次元
Author(s)	下村, 健吾
Citation	大阪大学, 2020, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/76659
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

単位区間上における反復関数系の極限集合の重複度１の集合の Hausdorff 次元

提出先　　大阪大学大学院情報科学研究科

提出年月　　2020 年 1 月

下 村　健 吾

単位区間上の同じ相似比をもつ 2 つの縮小相似変換でできる反復関数系について考える．相似比が 1/2 以上のとき，極限集合は単位区間と一致する．この場合コードマップが 1 対 1 ではなくなる．極限集合上でコードマップが 1 対 1 である点の集合に注目する．本論文では相似比がある範囲にあるときに，Hausdorff 次元の式が得られた．

単位区間上 $I = [0,1]$ で同じ縮小率 a をもつ縮小相似変換 $f_0, f_1 : I \to I$ を以下のように定義する．

$$f_0(x) = ax, \qquad f_1(x) = ax + (1-a).$$

f_0 は 0 を不動点に持ち，f_1 は 1 を不動点に持つことに注意する．f_0, f_1 で生成される反復関数系 $S(a) = \{f_0, f_1\}$ について考える．$a < 1/2$ のときは極限集合 $J(S)$ が全不連結となり，$J(S)$ は古典 Cantor 集合となっている．$a \geq 1/2$ のときは $J(S) = I$ となり，$f_0(J(S)) \cap f_1(J(S)) \neq \emptyset$ となる．このような状態にある反復関数系のことをオーバーラップする反復関数系と呼ぶことにする．オーバーラップする反復関数系の極限集合の中でコードマップ $\pi : \{0,1\}^\infty \to I$ が 1 対 1 の対応をしている点の集合 $J_1(S(a))$ を考える．

一般的にオーバーラップする反復関数系の極限集合では，コードマップの対応が複雑であり，解析が非常に困難である．実際に反復関数系の極限集合の Hausdorff 次元を求めるための従来の手法は，開集合条件や強分離条件といった条件を必要とするが，オーバーラップする反復関数系はそれらを満たさない．

今回，a がある範囲にあるときに $J_1(S(a))$ の Hausdorff 次元が得られた．$J_1(S(a))$ の Hausdorff 次元を考えるときに定義された反復関数系 $S(a)$ を利用して $J_1(S(a))$ が極限集合またはそれに準ずるものとなるような graph directed Markov system を定義する．$J_1(S(a))$ の Hausdorff 次元はその graph directed Markov system の接続行列の最大の固有値を使って計算できることが分かった．

以下が本論文の主定理である．

定理 1. $b_k \leq a \leq c_k$ $(k \geq 2)$ とする．このとき，

$$\dim_H J_1(S(a)) = -\frac{\log \lambda_k}{\log a}$$

が成り立つ．ただし，λ_k は接続行列 A_k の固有値で最大のものとする．（接続行列 A_k に対しては 2 節参照）

また，一般の k に対し，λ_k を求めることは困難であるが，次のような評価を得ることができた．

定理 2. $b_k \leq a \leq c_k$ $(k \geq 2)$ とする．このとき次が成り立つ．

$$\dim_H J_1(S(a)) \geq -\frac{\log(2^{k+2} - 6)}{(k+3)\log a}.$$

実際に $k = 1$ から $k = 10$ までの値を計算してみると表 1 のとおりである．

「フラクタル集合」という言葉は Manderbrot が非常に不規則な集合に対して用いられたことを端とし，以降フラクタル集合に対する様々な研究がされているが，反復関数系の理論の基礎となったのは Hutchinson [3] によるものである．フラクタル集合の生成方法の一つとして注目されるようになった反復関数系は Barnsley[1] や Falconer[2] によってさらなる研究をされる．Mordin と Urbanski[4] の研究は反復関数系をより一般化した graph directed Markov system における極限集合の Hausdorff 次元のものであり，そこでは極限集合の Hausdorff 次元が満たす式が紹介され

k	b_k	c_k	λ_k	$\log \lambda_k$	$\log(2^{k+2}-6)/(k+3)$
1	0.5698402822	0.6180339754	1.0	0.0	
2	0.5356873572	0.5436890423	1.6180339887	0.4812118251	0.4605170186
3	0.5172810853	0.5187900364	1.8392867552	0.6093778634	0.5430160897
4	0.5083449185	0.5086604059	1.9275619755	0.6562559792	0.5800632872
5	0.5040674508	0.5041382611	1.9659482366	0.6759746921	0.6005026306
6	0.5020004213	0.5020170510	1.9835828434	0.6849047264	0.6134956575
7	0.5009901822	0.5009941757	1.9919641966	0.6891211854	0.6226536669
8	0.5004921257	0.5004931390	1.9960311797	0.6911607989	0.6295995634
9	0.5002452433	0.5002454817	1.9980294703	0.6921614300	0.6351404166
10	0.500122398	0.5001224577	1.9990186327	0.6926563765	0.6397154038

表 1: b_k，c_k，λ_k，$\log \lambda_k$，$\log(2^{k+2}-6)/(k+3)$

ているが，graph directed Markov system にいくつかの条件を提示している．そのうちの一つが強分離条件や開集合条件といったオーバーラップする反復関数系を例外とするものを対象とするものである．

今回は反復関数系を反復の段階ごとに見ることでオーバーラップするという状況を深く理解することを研究の第一歩とした．従来の反復関数系から視点を変えた結果，コードマップが 1 対 1 の対応をしている点の集合の Hausdorff 次元が縮小率がある一定の範囲内にあるときに解析できること，また，同様の条件の時に 1 対 1 対応をしていない集合が開集合であることも分かった．

なお、本論文は [5] で発表した内容に基づくものである。

謝辞

本研究を進めるにあたり，指導教官の和田昌昭先生からは多大な助言を賜りました．厚く感謝を申し上げます．

目 次

1 準備 **5**

1.1 反復関数系 5

1.2 極限集合の Hausdorff 次元 7

1.3 開集合条件と有界歪曲性を満たす場合の Hausdorff 次元 13

1.4 Graph Directed Markov System 14

2 単位区間上でオーバーラップする反復関数系 **17**

2.1 反復関数系の構成と重複状況 17

2.2 GDMS の構成 23

2.3 $k = 1, 2$ の場合の重複度 1 の集合 27

2.4 一般の場合 31

3 結論 **34**

1　準備

反復関数系の定義とその極限集合の Hausdorff 次元を計算するための基礎事項を述べる．

定義 3. 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が劣加法的であるとは，任意の自然数 k, m に対して，$a_{k+m} \leq a_k + a_m$ が成り立つときに言う．また，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が劣乗法的であるとは，任意の自然数 k, m に対して，$b_{k+m} \leq b_k b_m$ が成り立つときに言う．

次の補題は Hausdorff 次元を求める際に使用する．

補題 4. 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が劣加法的のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ は存在し（$-\infty$ も含める），$\displaystyle\inf_{n\in\mathbf{N}} \frac{a_n}{n}$ と一致する．

証明. $m \geq 1$ とする．任意の自然数 k に対して $k = qm + r$ と表す．ただし，$q \geq 0$，$0 \leq r \leq m-1$ とする．これより，

$$\frac{a_k}{k} = \frac{a_{qm+r}}{qm+r} \leq \frac{qa_m + a_r}{qm} = \frac{a_m}{m} + \frac{a_r}{qm}.$$

$k \to \infty$ のとき $q \to \infty$ となることから，

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{a_k}{k} \leq \frac{a_m}{m},$$

となり，これが任意の $m \in \mathbf{N}$ に対して成立するので，

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{a_k}{k} \leq \inf \frac{a_k}{k}.$$

よってこの極限は存在し，$\displaystyle\inf_{n\in\mathbf{N}} \frac{a_n}{n}$ と一致する．　□

系 5. $b \in \mathbf{R}$ を実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の任意の自然数 k, m に対して $a_{k+m} \leq a_k + a_m + b$ が成り立つものとする．このとき，$a = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ が存在し，任意の自然数 k に対して $a_k \geq ka - b$ が成り立つ．

証明. $(a_{k+m} + b) \leq (a_k + b) + (a_m + b)$ が成り立つので $\{a_n + b\}$ が劣加法的であることが分かる．この極限は，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf \frac{a_n + b}{n},$$

となる．この極限を a とすると，任意の自然数 k に対し，

$$a \leq \frac{a_k + b}{k}$$

が成り立つので $a_k \geq ka - b$ が言える．　□

1.1　反復関数系

反復関数系を定義する．$d > 0$ を整数とする．今回取り扱う問題では反復関数系を生成する縮小変換がすべて $\mathbf{R}^d$ 上の相似変換である．

定義 6. X を空でないユークリッド空間 $\mathbf{R}^d$ のコンパクト凸連結集合とし，Σ を有限集合とする．X 上の単射変換族 $S := \{f_i : X \to X \mid i \in \Sigma\}$ が反復関数系であるとは，任意の $i \in \Sigma$ に対して f_i が X 上で縮小変換になるときに言う．

いま，$\Sigma^n := \{\omega = \omega_1\omega_2 \ldots \omega_n \mid \omega_i \in \Sigma\}$ とし，$\Sigma^* = \bigcup_{n=1} \Sigma^n$ を有限コードの集合とし，無限コードの集合を Σ^∞ とする．任意の $\omega \in \Sigma^\infty$ 対して左側の n 番目までのコードを $\omega|_n := \omega_1\omega_2 \ldots \omega_n$ と書くことにする．有限コード $\tau \in \Sigma^*$ について f_τ を写像の合成により定義する．

$$f_\tau = f_{\tau_1} \circ f_{\tau_2} \cdots \circ f_{\tau_{|\tau|}}.$$

ただし，$|\tau|$ は有限コード τ 文字列の長さとする．

任意の $\omega \in \Sigma^\infty$ に対して集合族 $\{f_{\omega|_n}(X)\}_{n=1}$ を考える．各 f_i が X 上の縮小相似変換であることから f_i の X 上の相似比 s_i を使って $s := \max\{s_i \mid i \in \Sigma\} < 1$ とすると，

$$f_{\omega|_n}(X) \supset f_{\omega|_{n+1}}(X), \qquad (\forall n \in \mathbf{N})$$

$$|f_{\omega|_n}(X)| < s^n |X|,$$

が言える．ただし $|X|$ は集合 X の直径を意味する．X がコンパクトであるので有限交叉性と変換後の直径が必ず縮小していることから，

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} f_{\omega|_n}(X),$$

は 1 点となる．$\omega \in \Sigma^\infty$ にこの点を対応させる写像をコードマップ $\pi : \Sigma^\infty \to X$ とし，π の像を，

$$J(S) := \pi(\Sigma^\infty) = \bigcup_{\omega \in \Sigma^\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} f_{\omega|_n}(X),$$

とする．$J(S)$ を反復関数系 S の極限集合と呼ぶ．極限集合の性質として，

$$\bigcup_{i \in \Sigma} f_i(J(S)) = J(S), \qquad \bigcup_{\omega \in \Sigma^n} f_\omega(J(S)) = J(S), \qquad (\forall n \in \mathbf{N}) \tag{1}$$

が言える．また，コードマップ π と左シフトマップ σ で次の可換図式が成り立つ．

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^\infty & \xrightarrow{\sigma_i} & \Sigma^\infty \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ J(S) & \xrightarrow[f_i]{} & J(S) \end{array}$$

式 1 より極限集合のもつ性質から反復関数系は以下の二つに分類される．

- 極限集合 $J(S)$ に対して，$f_i(J(S)) \cap f_j(J(S)) \neq \emptyset$ が成り立つような $i, j (I \neq j)$ が存在する．このとき，反復関数系はオーバーラップしてると言う．
- 任意の $i, j (I \neq j)$ で $f_i(J(S)) \cap f_j(J(S)) = \emptyset$ が成り立つ．このとき，反復関数系は全不連結であると言う．

極限集合の Hausdorff 次元を考える時，Σ^∞ 上で適当な測度 μ 考え，極限集合 $J(S)$ 上の Hausdorff 次元を測る適当な測度として $m = \mu \circ \pi^{-1}$ で考える．任意の $\omega \in \Sigma^*$ に対し，$[\omega] := \{\tau \in \Sigma^\infty \mid \tau|_{|\omega|} = \omega\}$ とすると，

$$\Sigma^\infty = \bigcup_{|\omega|=n} [\omega],$$

が成り立つので $[\omega]$ について適当な測度 μ を見つける．ちなみに $[\omega]$ は Σ^∞ に離散位相を入れたときの開基である．

Σ^∞ に s を使った距離を入れる．任意の $\omega, \tau \in \Sigma^\infty$ 対し距離を，

$$d_s(\omega, \tau) := s^{|\omega \wedge \tau|},$$

と定義する．ただし $|\omega \wedge \tau| := \max\{n \in \mathbf{N} \mid \omega|_n = \tau|_n\}$．これは距離の定義をみたし，離散位相と一致する．

1.2 極限集合の Hausdorff 次元

$g : \Sigma^\infty \to \mathbf{R}$ をヘルダー連続とする．つまり，ある $\alpha > 0$ と定数 $L > 0$ が存在して，

$$|g(\omega) - g(\tau)| \leq L(d_s(\omega, \tau))^\alpha,$$

を満たすとする．このとき次のことが言える．

補題 7. $g : \Sigma^\infty \to \mathbf{R}$ をヘルダー連続とする．$\sigma : \Sigma^\infty \to \Sigma^\infty$ を左シフトマップとする．つまり，$\sigma(\omega) = \omega_2\omega_3\ldots$ とする．任意の $n \in \mathbf{N}$ に対し，$\omega, \tau \in \Sigma^\infty$ が $\omega|_n = \tau|_n$ を満たすとする．このとき，

$$|\sum_{j=0}^{n-1} g(\sigma^j(\omega)) - \sum_{j=0}^{n-1} g(\sigma^j(\tau))| < M,$$

を満たす定数 $M > 0$ が存在する．

証明. 仮定より，$\omega|_n = \tau|_n$ なので，

$$\begin{aligned}
|\sum_{j=0}^{n-1} g(\sigma^j(\omega)) - \sum_{j=0}^{n-1} g(\sigma^j(\tau))| &\leq \sum_{j=0}^{n-1} |g(\sigma^j(\omega)) - g(\sigma^j(\tau))| \\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1} L(d_s(\sigma^j(\omega), \sigma^j(\tau)))^\alpha \\
&= L\sum_{j=0}^{n-1} s^{\alpha(n-j)} < L\frac{1}{1-s^\alpha}.
\end{aligned}$$

□

この $\sum_{j=0}^{n-1} g(\sigma^j(\omega))$ を $S_n g(\omega)$ と書くことにする．前述の主張を次のように書き直す．

$$e^{-M} < \frac{\exp(S_n g(\omega))}{\exp(S_n g(\tau))} < e^M.$$

注 8. 前述の式は $S_n g(\omega)$ を $\sup_{\tau\in[\omega|_n]}\{S_n g(\tau)\}$ や $\inf_{\tau\in[\omega|_n]}\{S_n g(\tau)\}$ に代えても同様の主張が言える．つまり，$n \geq 1$ をとり，$\omega \in \Sigma^\infty$ に対し，ある定数 $M > 0$ が存在して，

$$1 < \frac{\exp(\sup_{\tau\in[\omega|_n]}\{S_n g(\tau)\})}{\exp(S_n g(\omega))} \leq e^M,$$
$$e^{-M} \leq \frac{\exp(\inf_{\tau\in[\omega|_n]}\{S_n g(\tau)\})}{\exp(S_n g(\omega))} < 1.$$

を満たす．

これらを使って次の定理を証明する．

定理 9. $g : \Sigma^\infty \to \mathbf{R}$ をヘルダー関数とする．このとき，

$$P(g) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{|\omega|=n} \exp(\sup_{\tau\in[\omega]}\{S_n g(\tau)\}),$$

は存在する．さらに Σ^∞ 上の確率測度 μ と定数 $Q > 1$ が存在し，

$$Q^{-1} \leq \frac{\mu([\omega])}{\exp(-|\omega|P(g) + \sup_{\tau\in[\omega]}\{S_n g(\tau)\})} \leq Q,$$

が成り立つ．

証明. 任意の $\omega \in \Sigma^\infty$ に対して，$S_{k+m}g(\omega) = S_k g(\omega) + S_m g(\sigma^k(\omega))$ が成り立つので，

$$\begin{aligned}\exp(S_{k+m}g(\omega)) &= \exp(S_k g(\omega) + S_m g(\sigma^k(\omega))) \\ &= \exp(S_k g(\omega)) \exp(S_m g(\sigma^k(\omega))),\end{aligned}$$

が成り立つ．$\omega = \alpha\beta\gamma(|\alpha| = k, |\beta| = m, \gamma \in \Sigma^\infty)$ とすると，

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha\beta|=k+m} \exp(S_k g(\omega)) \exp(S_m g(\sigma^k(\omega))) &= \sum_{|\alpha|=k} \sum_{|\beta|=m} \exp(S_k g(\alpha\beta\gamma)) \exp(S_m g(\sigma^k(\alpha\beta\gamma))) \\ &= \sum_{|\alpha|=k} \sum_{|\beta|=m} \exp(S_k g(\alpha\beta\gamma)) \exp(S_m g(\beta\gamma)) \\ &\leq e^M \sum_{|\alpha|=k} \exp(S_k g(\alpha\gamma)) \sum_{|\beta|=m} \exp(S_m g(\beta\gamma)) \\ &\leq e^M \sum_{|\omega|=k} \exp(\sup_{\tau\in[\omega]}\{S_k g(\tau)\}) \sum_{|\omega|=m} \exp(\sup_{\tau\in[\omega]}\{S_m g(\tau)\}).\end{aligned}$$

注 8 を使って，

$$\sum_{|\omega|=k+m} e^{-M} \exp(\sup_{\tau\in[\omega]}\{S_n g(\tau)\}) \leq \sum_{|\omega|=k+m} \exp(S_{k+m}g(\omega)),$$

が成り立つので，

$$\sum_{|\omega|=k+m} \exp(\sup_{\tau\in[\omega]}\{S_{k+m}g(\tau)\}) \leq e^{2M} \sum_{|\omega|=k} \exp(\sup_{\tau\in[\omega]}\{S_k g(\tau)\}) \sum_{|\omega|=m} \exp(\sup_{\tau\in[\omega]}\{S_m g(\tau)\}).$$

$$p_n := \sum_{|\omega|=n} \exp(\sup_{\tau\in[\omega]}\{S_n g(\tau)\}),$$

として両辺対数をとると，

$$\log p_{m+k} \le \log p_k + \log p_m + 2M.$$

$\log p_{m+k}$ に関して下からも同様に評価できる．

$$\begin{aligned}
\sum_{|\omega|=k+m} \exp(\sup_{\tau\in[\omega]}\{S_{k+m}g(\tau)\}) &\ge \sum_{|\omega|=k+m} \exp(S_{k+m}g(\omega)) \\
&= \sum_{|\alpha|=k}\sum_{|\beta|=m} \exp(S_k g(\alpha\beta\gamma))\exp(S_m g(\beta\gamma)) \\
&\ge e^{-M}\sum_{|\alpha|=k}\exp(S_k g(\alpha\gamma))\sum_{|\beta|=m}\exp(S_m g(\beta\gamma)) \\
&\ge e^{-3M}\sum_{|\omega|=k}\exp(\sup_{\tau\in[\omega]}\{S_k g(\tau)\})\sum_{|\omega|=m}\exp(\sup_{\tau\in[\omega]}\{S_m g(\tau)\}).
\end{aligned}$$

$$\log p_k + \log p_m - 3M \le \log p_{m+k}.$$

以上から，

$$\log p_k + \log p_m - 3M \le \log p_{m+k} \le \log p_k + \log p_m + 3M.$$

が言える．これより $\{\log p_n\}_{n=1}^{\infty}$ は劣加法的であることが分かるので補題 4 より $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\log p_n}{n} = P(g)$ の存在が言える．

また $\{\log p_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{-\log p_n\}_{n=1}^{\infty}$ に系 5 を使うことで任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して，

$$kP(g) - 3M \le \log p_k \le kP(g) + 3M,$$

が成り立つことが分かる．対数を外すと，

$$e^{-3M}\exp(kP(g)) \le p_k \le e^{3M}\exp(kP(g)),$$

ということが分かる．次に，p_n を使って Σ^{∞} 上の測度をつくる．任意の $m \in \mathbf{N}$ と Σ^{∞} の Borel 集合 A に対して，

$$\mu_m(A) := \frac{1}{p_m}\sum_{[\omega]\subset A, |\omega|=m} \exp(\sup_{\alpha\in[\omega]}\{S_m g(\alpha)\}),$$

とする．これは Σ^{∞} 上の確率測度となる．任意の $m \in \mathbf{N}$ に対して言えるので，$\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty}$ に Helly の選出定理を使うと，μ が存在してそれに弱収束するような部分列 $\{\mu_{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$ をとることができる．この μ が定理の条件を満たすような測度であることを言う．

$k \leq m$ のとき，$|\omega| = k$ とする．

$$\begin{aligned}
\mu_m([\omega]) &= \frac{1}{p_m} \sum_{[\tau]\subset[\omega],|\tau|=m} \exp(\sup_{\alpha\in[\tau]}\{S_m g(\alpha)\}), \\
&\leq \frac{1}{p_m} \sum_{[\tau]\subset[\omega],|\tau|=m} \exp(S_m g(\tau\beta))e^M \qquad (\beta \in \Sigma^\infty) \\
&= \frac{1}{p_m} e^M \sum_{[\tau]\subset[\omega],|\tau|=m} \exp(S_k g(\tau\beta)) \exp(S_{m-k} g(\sigma^k(\tau\beta))) \\
&= \frac{1}{p_m} e^M \sum_{\tau\in\omega\times\Sigma^{m-k}} \exp(S_k g(\tau\beta)) \exp(S_{m-k} g(\sigma^k(\tau\beta))).
\end{aligned}$$

$\tau = \omega\alpha(\alpha \in \Sigma^{m-k})$ とすることができるので，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p_m} e^M \sum_{\tau\in\omega\times\Sigma^{m-k}} \exp(S_k g(\tau\beta)) \exp(S_{m-k} g(\sigma^k(\tau\beta))) \\
&= \frac{1}{p_m} e^M \sum_{\alpha\in\Sigma^{m-k}} \exp(S_k g(\omega\alpha\beta)) \exp(S_{m-k} g(\sigma^k(\alpha\beta))) \\
&\leq \frac{1}{p_m} e^M \exp(\sup_{\tau\in[\omega]}\{S_k g(\tau)\}) \sum_{\alpha\in\Sigma^{m-k}} \exp(\sup_{\tau\in[\alpha]}\{S_{m-k} g(\tau)\}).
\end{aligned}$$

以上より $\mu_m([\omega])$ の上からの評価を得る．

$$e^{-M}\mu_m([\omega]) \leq \frac{p_{m-k}}{p_m} \exp(\sup_{\tau\in[\omega]}\{S_k g(\tau)\}).$$

下からの評価も同様の方法で計算できる．

$$\frac{p_{m-k}}{p_m} \exp(\sup_{\tau\in[\omega]}\{S_k g(\tau)\}) \leq e^{2M}\mu_m([\omega]).$$

これらをあわせると，

$$e^{-M}\mu_m([\omega]) \leq \frac{p_{m-k}}{p_m} \exp(\sup_{\tau\in[\omega]}\{S_k g(\tau)\}) \leq e^{2M}\mu_m([\omega]).$$

p_n が劣乗法的であることを使うと，$p_k p_{m-k} e^{-3M} \leq p_m \leq p_k p_{m-k} e^{3M}$ より，

$$\frac{e^{-5M}}{p_k} \leq \frac{\mu_m([\omega])}{\exp(\sup_{\tau\in\omega}\{S_k g(\tau)\})} \leq \frac{e^{5M}}{p_k},$$

が成り立つ．p_k の評価を使うと，

$$e^{-8M} \leq \frac{\mu_m([\omega])}{\exp(-kP(g) + \sup_{\tau\in[\omega]}\{S_k g(\tau)\})} \leq e^{8M}$$

が言える．これが任意の $k \leq m$ に対して言えるので任意の $\omega \in \Sigma^*$ に対して，

$$e^{-8M} \leq \frac{\mu([\omega])}{\exp(-|\omega|P(g) + \sup_{\tau\in[\omega]}\{S_{|\omega|} g(\tau)\})} \leq e^{8M},$$

となることが分かる． □

Σ^∞ に s を使った距離を入れた理由は $g : \Sigma^\infty \to \mathbf{R}$ として次の写像を考えたときそれがヘルダー連続関数になるようにするためである．

補題 10. $g(\omega) := \log |f'_{\omega_1}(\pi(\sigma(\omega)))|$ はヘルダー連続関数である．

証明.

$$\begin{aligned}|g(\omega) - g(\tau)| &= \left|\log |f'_{\omega_1}(\pi(\sigma(\omega)))| - \log |f'_{\tau_1}(\pi(\sigma(\tau)))|\right| \\ &\leq \frac{\left||f'_{\omega_1}(\pi(\sigma(\omega)))| - |f'_{\tau_1}(\pi(\sigma(\tau)))|\right|}{\min\{|f'_{\omega_1}(\pi(\sigma(\omega)))|, |f'_{\tau_1}(\pi(\sigma(\tau)))|\}}.\end{aligned}$$

$\omega \wedge \tau$ を ω と τ の共通のコードとする．1.$|\omega \wedge \tau| = 0$ のとき．

$$\frac{\left||f'_{\omega_1}(\pi(\sigma(\omega)))| - |f'_{\tau_1}(\pi(\sigma(\tau)))|\right|}{\min\{|f'_{\omega_1}(\pi(\sigma(\omega)))|, |f'_{\tau_1}(\pi(\sigma(\tau)))|\}} < \frac{\max\{||f'_i||\} - \min\{\min\{|f'_i|\}\}}{\min\{\min\{|f'_i|\}\}} d_s(\omega, \tau)^\epsilon.$$

2.$|\omega \wedge \tau| \geq 1$ のとき．
各 f_i が $C^{1+\epsilon}$ 級関数であることから $L' > 0$ が存在して，

$$|f'_i(x) - f'_i(y)| \leq L'|x - y|^\epsilon,$$

を満たす．

$$\begin{aligned}\frac{\left||f'_{\omega_1}(\pi(\sigma(\omega)))| - |f'_{\tau_1}(\pi(\sigma(\tau)))|\right|}{\min\{|f'_{\omega_1}(\pi(\sigma(\omega)))|, |f'_{\tau_1}(\pi(\sigma(\tau)))|\}} &\leq \frac{L'}{\min\{|f'_{\omega_1}(\pi(\sigma(\omega)))|, |f'_{\omega_1}(\pi(\sigma(\tau)))|\}} |\pi(\sigma(\omega)) - \pi(\sigma(\tau))|^\epsilon \\ &\leq \frac{L'|X|s^{-\epsilon}}{\min\{|f'_{\omega_1}(\pi(\sigma(\omega)))|, |f'_{\omega_1}(\pi(\sigma(\tau)))|\}} s^{n\epsilon} \\ &= \frac{L'|X|s^{-\epsilon}}{\min\{|f'_{\omega_1}(\pi(\sigma(\omega)))|, |f'_{\omega_1}(\pi(\sigma(\tau)))|\}} d_s(\omega, \tau)^\epsilon.\end{aligned}$$

以上のことから g はヘルダー連続関数であることが分かる． □

定義 11. $A \subset \mathbf{R}^d$，$s \geq 0$，$\delta > 0$ とする．$\mathcal{H}^s_\delta(A)$ を次で定義する．

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf\{\sum_{i=1} |B_i|^s \mid A \subset \bigcup_{i=1} B_i\}$$

A の s 次元 Hausdorff 測度 $\mathcal{H}^s(A)$ を定義する．

$$\mathcal{H}^s(A) := \sup_\delta \mathcal{H}^s_\delta(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A)$$

A の Hausdorff 次元 $\dim_H A$ を $\mathcal{H}^s(A)$ で定義する．

$$\dim_H A := \sup\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(A) = \infty\} = \inf\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(A) = 0\}$$

極限集合の Hausdorff 次元を評価するときの方法として，フロストマンの補題と呼ばれる次の補題を使う．

補題 12. $E \subset \mathbf{R}^d$ をボレル集合とし，μ を $\mathbf{R}^d$ 上の有限ボレル測度とする．$0 < c < \infty$ とする．

1. 任意の $x \in E$ に対して，$\limsup_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^t} \leq c$ ならば，$t \leq \dim_H E$.

2. 任意の $x \in E$ に対して，$\limsup_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^t} \geq c$ ならば $t \geq \dim_H E$.

証明. 1. 任意の $\delta > 0$ に対して，

$$E_\delta = \{x \in E \mid \text{任意の } 0 < r \leq \delta \text{に対して,} \mu(B(x,r)) < cr^t\}$$

とおく．$\{U_i\}$ を E の δ 被覆とすると，これは E_δ の被覆にもなっている．U_i が E_δ の点 x を含めば，x を中心とする半径 $|U_i|$ の球 B は明らかに U_i を含む．E_δ の定義より，

$$\mu(U_i) \leq \mu(B) < c|U_i|^t,$$

であるから，

$$\mu(E_\delta) \leq \Sigma_i\{\mu(U_i) \mid U_i \cap E_\delta \neq \emptyset\} \leq c\Sigma_i|U_i|^t$$

となる．$\{U_i\}$ は E の任意の δ 被覆であることから，

$$\mu(E_\delta) \leq c\mathcal{H}^t_\delta(E) \leq c\mathcal{H}^t(E)$$

が成り立つ．δ が減少して 0 に近づくとき，E_δ は増大して E に近づくから

$$\mu(E) \leq c\mathcal{H}^t(E)$$

となる．

2.E が有界であると仮定する．$\delta > 0$ を固定し，$\mathcal{C}$ を

$$\{B(x,r) \mid x \in E, 0 < r \leq \delta, \mu(B(x,r)) > cr^t\}$$

で定義される球の族とする．このとき仮定より．

$$E \supset \bigcup_{B\in\mathcal{C}} B$$

となる．球の族 $\mathcal{C}$ に対して被覆補題を用いると，互いに素な球 $B_i \in \mathcal{C}$ の列で B_i と中心が等しく半径が 4 倍の球を $\tilde{B}_i$ とすると，

$$\bigcup_{B\in\mathcal{C}} B \supset \bigcup_i \tilde{B}_i$$

を満たすものが存在する．よって $\{\tilde{B}_i\}$ は E の 8δ 被覆であり，

$$\mathcal{H}^t_{8\delta}(E) \leq \Sigma_i|\tilde{B}_i|^t \leq 4^t\Sigma_i|B_i|^t \leq 8^t c^{-1}\Sigma_i\mu(B_i) \leq 8^t c^{-1}\mu(\mathbf{R^n})$$

が成り立つ．$\delta \to 0$ とすれば，

$$\mathcal{H}^t(E) \leq 8^t c^{-1}\mu(\mathbf{R^n}) < \infty$$

となる．E が有界ではなく，$\mathcal{H}^t(E) > 8^t c^{-1}\mu(\mathbf{R^n})$ となるなら，E の有界な部分集合でこの値より大きい t 次元 Hausdorff 測度をもつものがあるはずなので，上記に示したことと矛盾する． □

適当な測度 m を構成し，極限集合上の点を x と十分小さい数 $r > 0$ でできる開球（または閉球）と極限集合の共通分の測度が r の評価する Hausdorff 次元乗の定数倍より大きいか小さいかで判断する．つまり，

$$m(B(x,r) \cap J(S)) \asymp r^t,$$

となれば $\dim_H J(S) = t$ である．

1.3 開集合条件と有界歪曲性を満たす場合の Hausdorff 次元

まず始めに反復関数系が次の開集合条件と有界歪曲性を満たすときの極限集合の Hausdorff 次元について考える．

定義 13. 反復関数系 $S := \{f_i : X \to X | i \in \Sigma\}$ が開集合条件を満たすとは空でない有界な開集合 $U \subset X$ が存在し，$\{f_i(U)\}$ が互いに排反で $\bigcup_{i \in I} f_i(U) \supset U$ を満たすときに言う．

以下では開集合条件を $U = \mathrm{int}X$ で満たすとする．

定義 14. 反復関数系 $S := \{f_i : X \to X | i \in \Sigma\}$ が有界歪曲性を満たすとはある $K \geq 1$ が存在して任意の自然数 n と任意の長さ n のコード $\omega \in \Sigma^n$ と任意の x, y で $\frac{|f'_\omega(x)|}{|f'_\omega(y)|} \leq K$ が成り立つときに言う．

この二つの条件を反復関数系が満たすときにその極限集合の Hausdorff 次元が求まることが一般的に知られている．

定理 15. 開集合条件を満たす反復関数系 $S := \{f_i : X \to X | i \in \Sigma\}$ に対し $g : \Sigma^\infty \to \mathbf{R}$ を $g(\omega) := \log |f'_{\omega_1}(\pi(\sigma(\omega)))|$ とする．このとき，$P(tg) = 0$ を満たす t に対して $\dim_H J(S) = t$ が成り立つ．

証明. t を $P(tg) = 0$ を満たすものとする．このとき定理 9 より Σ^∞ 上の確率測度 μ が存在して，

$$Q^{-1} \leq \frac{\mu([\omega])}{\exp(\sup_{\tau \in [\omega]}\{S_n tg(\tau)\}} \leq Q,$$

が成り立つ．g に関数を代入すると，

$$Q^{-1} \leq \frac{\mu([\omega])}{||f'_\omega||^t} \leq Q,$$

となる．Hausdorff 次元を評価するために構成する測度として $m = \mu \circ \pi^{-1}$ を考える．

$x \in J(S)$ を任意にとる．$r > 0$ を十分小さくとり，$m(B(x,r) \cap J(S))$ を考える．

1. 上からの評価

ω を $\pi(\omega) = x$ を満たすものとする．n を $B(x,r) \cap J(S) \supset f_{\omega|_n}(J(S))$ を満たしかつ $B(x,r) \cap J(S) \not\supset f_{\omega|_{n-1}}(J(S))$ となるようにとる．すると $B(x,r) \cap J(S) \supset f_\omega(J(S))$ なので，

$$\begin{aligned} m(B(x,r) \cap J(S)) &\geq \mu \circ \pi^{-1}(f_{\omega|n}(J(S))) \\ &= \mu([\omega|_n]) \\ &\geq Q^{-1}||f'_{\omega|_n}||^t, \end{aligned}$$

となる．n の条件から $B(x,r) \cap J(S) \not\supset f_{\omega|_{n-1}}(J(S))$ なので $r \leq |f_{\omega|_{n-1}}(J(S))| \leq ||f'_{\omega|_{n-1}}||\ |J(S)|$ が分かる．よって，

$$\begin{aligned} m(B(x,r) \cap J(S)) &\geq Q^{-1}||f'_{\omega|_n}||^t \\ &\geq Q^{-1}|J(S)|^{-1}\gamma r^t. \end{aligned}$$

ただし，$\gamma := \inf_{i\in\Sigma}\inf_{x\in X}\{|f_i'(x)|\}$.
2. 下からの評価
Σ^* の部分集合 $F(x,r)$ を次のように定義する．

$$F(x,r) := \{\omega \in \Sigma^* | f_\omega(J(S)) \cap B(x,r) \neq \phi, f_\omega(J(S)) \subset B(x,2r), f_{\omega|_{|\omega|-1}}(J(S)) \not\subset B(x,2r)\}.$$

任意の $\omega \in F(x,r)$ について有界歪曲性から $K^{-1}||f_\omega'||\ |J(S)| \leq \inf_{\omega\in\Sigma^n}\{|f_\omega'|\}|J(S)| < |f_\omega(J(S))| < 4r$ と $r < |f_{\omega|_{|\omega|-1}}(J(S))| < ||f_\omega'||\gamma^{-1}|J(S)|$ となることが分かるので，

$$|f_\omega(X)| \leq ||f_\omega'||\ |X| < 4Kr|X|,$$

$$\bigcup_{\omega\in F(x,r)} f_\omega(X) \subset B(x,(1+4K|X|)r),$$

が成り立つ．開集合条件から任意の異なる $\omega,\tau \in F(x,r)$ に対して共通部分の体積は 0 となるので体積評価で $F(x,r)$ の位数を上から評価することができる．

$$\begin{aligned} V(f_\omega(X)) &> V(X)(K^{-1}||f_\omega'||)^d \\ &> K^{-d}V(X)(\gamma|J(S)|^{-1}r)^d, \end{aligned}$$

ただし V は d 次元ルベーグ測度を表す．

$$\sharp F(x,r)K^{-d}V(X)(\gamma|J(S)|^{-1}r)^d < V_d(1+4K|X|)^d r^d,$$

よって，$\sharp F(x,r) < \frac{V_d(1+4K|X|)^d}{K^{-d}V(X)(\gamma|J(S)|^{-1})^d}$ となり，定数となることが分かる．ただし V_d は d 次元単位球のルベーグ測度．

$$\begin{aligned} m(B(x,r)\cap J(S)) &\leq \mu([F(x,r)]) \\ &= \sum_{\omega\in F(x,r)} \mu([\omega]) \\ &\leq \sum_{\omega\in F(x,r)} Q||f_\omega'||^t \\ &\leq Q\sum_{\omega\in F(x,r)} (4Kr)^t \\ &\leq Q(4K)^t r^t \sharp F(x,r). \end{aligned}$$

以上のことと補題 12 から成り立つ． □

1.4 Graph Directed Markov System

反復関数系は一つの $\mathbf{R}^d$ の部分空間を対象にして考えているが，これを複数の空間から空間への写像を対象として考えた Graph Directed Markov System(以下 GDMS とする）を紹介する．GDMS は有向グラフとそれに付随する接続行列 (V,E,A,i,t) をもとに形成される．ここでは頂点集合 V と向き付きの辺の集合 E は有限であると仮定する．$A : E\times E \to \{0,1\}$ は接続行列であり，i と t

はそれぞれ始点と終点を示す写像である．つまり，任意の有向辺 u, v に対して $A_{uv} = 1$ であることと $t(u) = i((v)$ となることは同値である．接続行列 A によって制限される有向辺のコード空間を考える．その無限コード空間を次のように定義する．

$$E_A^\infty = \{\eta \in E^\infty \mid A_{\eta_i \eta_{i+1}} = 1 \text{ for all } i \geq 1\}.$$

また長さ m のコード空間も同様に定義する．

$$E_A^n = \{\eta \in E^n \mid A_{\eta_i \eta_{i+1}} = 1 \text{ for all } i \geq 1\}.$$

そして，長さが有限のコード全体の空間を $E_A^* = \bigcup_{n=1}^\infty E_A^n$ と定義する．接続行列 A の性質として A が irreducible であるかどうかが重要になるのでその定義も述べる．それは，任意の $a, b \in E$ に対して有限コード $\eta \in E_A^*$ が存在し，$a\eta b \in E_A^*$ を満たすというものである．GDMS は以下のもので構成される．

- 有向マルチグラフ (V, E, i, t),
- 接続行列 A,
- 空でないコンパクト集合の族 $\{X_v \subset \mathbf{R}^d \mid v \in V\}$,
- 任意の $e \in E$ に対応する相似比 s $(0 < s < 1)$ の相似変換 $f_e : X_{i(e)} \to X_{t(e)}$.

これらによって作られる縮小変換の族

$$S = \{f_e : X_{t(e)} \to X_{i(e)} \mid e \in E\}$$

を GMDS と定義する．反復関数系は V が 1 つの集合のときのことであることがこの定義から分かる．GDMS についてコードマップや極限集合を考える．

定義 16. コードマップ $\pi : E_A^\infty \to \bigcup_{v \in V} X_v$ は以下で定義する．

$$\pi(\eta) = \bigcap_{l=1}^\infty f_{\eta|_l}(X_{t(\eta_l)}) \quad (\eta \in E_A^\infty).$$

GMDS S の極限集合 $J(S)$ はコードマップの像全体で定義する．

$$J(S) = \bigcup_{\eta \in E_A^\infty} \pi(\eta).$$

直積位相で考えるとコード空間 E_A^∞ はコンパクトであり，π は連続である．なので極限集合 $J(S)$ はコンパクトである．GDMS の極限集合に関しても反復関数系と同様に Hausdorff 次元を考える．反復関数系で定義した各条件を GDMS に対応させた一般化されたものを書く．

定義 17. *GDMS* $S = \{f_e : X_{t(e)} \to X_{i(e)} \mid e \in E\}$ が開集合条件を満たすとはある空でない開集合 $U \subset \bigcup_{v \in V} X_v$ が存在して，任意の $e, e' \in E$ $(e \neq e')$ に対して

$$f_e(U \cap X_{t(e)}) \cap f_{e'}(U \cap X_{t(e')}) = \emptyset \qquad \text{かつ} \qquad \bigcup_{e \in E} f_e(U \cap X_{t(e)}) \subset U,$$

が成り立つときに言う．

実関数 f に対して点 x での微分を f'_x とし，$|f'(x)| = \max\{|f'_x(y)|\}$ と定義する．ただし，ここの max は正接空間における単位ベクトル上で考える．

定義 18. *GDMS* $S = \{f_e : X_{t(e)} \to X_{i(e)} \mid e \in E\}$ が有界歪曲性をもつとはある $K \geq 1$ が存在して任意の $\eta \in E_A^n$ $(n = 1, 2, \dots)$ と $x, y \in X_{t(\eta_n)}$ で $\frac{|f'_\eta(x)|}{|f'_\eta(y)|} \leq K$ を満たすときに言う．

GDMS は上記の開集合条件と有界歪曲性，接続行列 A が irreducible であるときに，その極限集合について Hausdorff 次元が求まることが分かる．

定理 19. *GDMS* $S = \{f_e : X_{t(e)} \to X_{i(e)} \mid e \in E\}$ が開集合条件を満たし，有界歪曲性も満たすと仮定する．さらに接続行列 A が irreducible であると仮定する．このとき，*P(t)* を次のようにとる．

$$P(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\eta \in E_A^n} ||f'_\eta||^t.$$

すると，極限集合の *Hausdorff* 次元 $\dim_H J(S)$ は次を満たす．

$$\dim_H J(S) = \sup\{t > 0 \mid P(t) > 0\} = \inf\{t > 0 \mid P(t) < 0\}.$$

定理 19 において，証明はほとんど定理 9 と同様にして証明できるが接続行列 A が irreducible であることは，確率測度が一意であることを意味している．

2　単位区間上でオーバーラップする反復関数系

2.1　反復関数系の構成と重複状況

単位区間上 $I=[0,1]$ で以下の 2 つ縮小変換で生成される反復関数系 $S=\{f_0,f_1\}$ を考える．

$$f_0(x)=ax, \qquad f_1(x)=ax+(1-a) \tag{2}$$

ただし $0<a<1$ は縮小率である．もし a が $1/2$ より大きい場合は，その反復関数系の極限集合は単位区間 I そのものとなり，その場合は反復関数系はオーバーラップしている．本章ではその極限集合の部分集合である「アドレスを 1 つしかもたない点の集合」について考える．以下には a が $1/2$ と黄金比 $g=(\sqrt{5}-1)/2$ までの重複度 1 の集合 $J_1(a)$ を表示している．

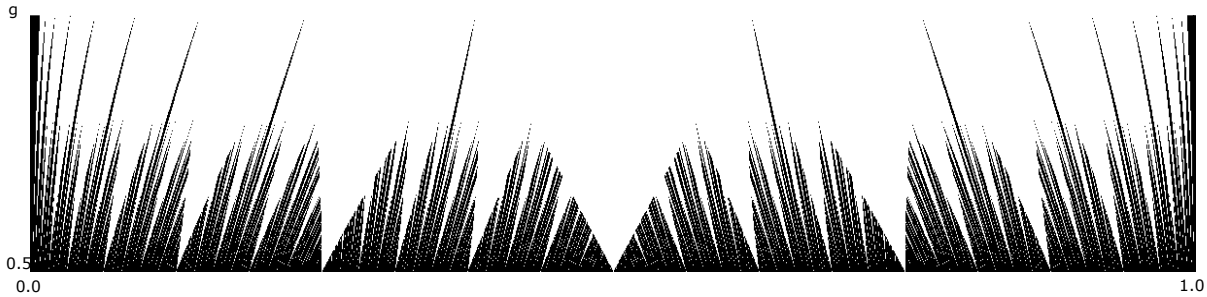

図 1: a が $1/2$ と黄金比 g の場合の $J_1(a)$

重複度 1 の集合 $J_1(a)$ を定義するために重複度関数 $m: I\to \mathbf{N}\cup\{\infty\}$ を定義する．

$$m(x)=\sharp\{\omega\in\Sigma^\infty \mid \pi(\omega)=x\} \quad (x\in I),$$

とし，極限集合で重複度 $k=0,1,\ldots$ の集合を $J_k(S(a))$ と書くことにする．

$$J_k(S)=\{x\in I \mid m(x)=k\}.$$

このとき，次が成り立つ．

$$J(S)=J_1(S)\cup J_2(S)\cup\cdots\cup J_\infty(S).$$

本章では a が特定の値の範囲にあるときに $J_1(a)$ の Hausdorff 次元を計算することができたことを記す．以下では $1/2<a<1$ と仮定する．F と F^* を次のように定義する．

$$F=f_0(I)\cap f_1(I)=[1-a,a],$$

$$F^*=\bigcup_{\mu\in\{0,1\}^*} f_\mu(F).$$

このとき，次のことが言える．

命題 20. 式 (2) で生成される反復関数系 $S(a) = \{f_0, f_1\}$ を考える．$a > 1/2$ のとき，

$$\bigcup_{m \geq 2} J_m(S(a)) = F^*$$

が成り立つ．

証明. 任意の $x \in \bigcup_{m \geq 2} J_m(S(a))$ に対して $m(x) \geq 2$ であることから異なる 2 つのコード $\omega, \omega' \in \{0,1\}^\infty$ が存在して $\pi(\omega) = \pi(\omega') = x$ を満たす．ω と ω' の共通する長さ最大のコードを μ と書くことにする．μ を使い ω と ω' は以下のように書ける．

$$\begin{aligned} \omega &= \mu 0 \tilde{\omega} \qquad (\tilde{\omega} \in \{0,1\}^\infty), \\ \omega' &= \mu 1 \tilde{\omega}' \qquad (\tilde{\omega}' \in \{0,1\}^\infty). \end{aligned}$$

よって，

$$x = f_\mu(\pi(0\tilde{\omega})) = f_\mu(\pi(1\tilde{\omega}')).$$

となるので

$$x \in f_\mu(f_0(I)) \cap f_\mu(f_1(I)) = f_\mu(F),$$

が分かる．

逆に $x \in F^*$ とすると， 有限コード $\mu \in \{0,1\}^*$ が存在して

$$x \in f_\mu(F) = f_{\mu 0}(I) \cap f_{\mu 1}(I),$$

を満たす．よって 2 つの無限コード $\omega = \mu 0 \cdots$ and $\omega' = \mu 1 \cdots$ が存在して $\pi(\omega) = \pi(\omega') = x$ を満たす． □

命題 21. g を黄金比とする．$a \geq g$ のとき，$J_1(S(a)) = \{0, 1\}$.

証明. F の左端点は $1 - a$ であり，$f_0(F)$ の右端点は a^2 であることから， $g < a$ ならば，

$$f_0(F) \cap F \neq \emptyset,$$

となる．よって，

$$f_0^{i+1}(F) \cap f_0^i(F) \neq \emptyset$$

が任意の $i = 0, 1, \ldots$ で成り立つ．$f_0^i(F)$ の左側の端点を f_0 で写した点 $f_0^i(1-a) = a^i(1-a)$ が 0 に収束することから

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} f_0^i(F) = (0, a],$$

が成り立つ．同様に，

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} f_1^i(F) = [1-a, 1),$$

も成り立つ．よって区間 $(0,1)$ の任意の点は重複度 2 以上なる．一方で，1 が一つでも含んでいるコード $\omega = 0^n 1 \tilde{\omega}$ は，$\pi(\omega) \in f_0^n f_1(I)$ より 0 を含まないことが分かるので 0 はアドレスを一つしかもたない．1 に対しても同じことが言えるので 1 もアドレスを一つしかもたない． □

まずはじめに任意の $k=1,2,\dots$ に対し，b_k を以下の式の $1/2<a<1$ にある唯一の解とする．

$$a^{k+2}-a^{k+1}+2a-1=0. \tag{3}$$

この b_k は $f_0f_1^kf_0(1)=1-a$ を満たす $1/2<a<1$ の値である．同様に c_k も次の式の $1/2<a<1$ にある唯一の解とする．

$$-a^{k+2}+2a-1=0. \tag{4}$$

こちらも同様に $f_0f_1^{k+1}(0)=1-a$ を満たす $1/2<a<1$ の値である．この時，次が成り立つ．

補題 22. b_k を $1/2<a<1$ における式 (3) の唯一の解とする．同様に，c_k を $1/2<a<1$ における式 (4) の唯一の解とする．このとき，

$$\frac{1}{2}<\cdots<b_k<c_k<\cdots<b_2<c_2<b_1<c_1.$$

さらに，b_k と c_k は $1/2$ に収束する．

証明. $P_k(a)$ と $Q_k(a)$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned}P_k(a)&=a^{k+2}-a^{k+1}+2a-1,\\ Q_k(a)&=-a^{k+2}+2a-1,\end{aligned}$$

式 (3) は $P_k(a)=0$ と同値であり，式 (4) は $Q_k(a)=0$ と同値である．

はじめに，$b_k<c_k$ を示す．. 任意の $k\geq 2$ に対して，

$$\begin{aligned}P_k'(a)&=(k+2)a^{k+1}-(k+1)a^k+2,\\ P_k''(a)&=(k+2)(k+1)a^k-k(k+1)a^{k-1}.\end{aligned}$$

つまり，

$$P_k''(a)\begin{cases}\leq 0 & \text{if } 1/2<a\leq k/(k+2)\\ >0 & \text{if } k/(k+2)<a<1.\end{cases}$$

よって任意の $1/2<a<1$ に対して，

$$\begin{aligned}P_k'(a)&\geq P_k'\left(\frac{k}{k+2}\right)\\ &=(k+2)\left(\frac{k}{k+2}\right)^{k+1}-(k+1)\left(\frac{k}{k+2}\right)^{k}+2\\ &=2-\left(\frac{k}{k+2}\right)^{k}\\ &>0.\end{aligned}$$

が成り立つので $P_k(a)$ は $1/2<a<1$ で単調増加関数となっている．一方で $-c_k^{k+2}+2c_k-1=0$, が成り立つことから，

$$\begin{aligned}P_k(c_k)&=c_k^{k+2}-c_k^{k+1}+2c_k-1\\ &=2c_k^{k+2}-c_k^{k+1}\\ &=c_k^{k+1}(2c_k-1)\\ &>0,\end{aligned}$$

が任意の $\frac{1}{2} < c_k < 1$ で成り立つ．$P_k(b_k) = 0$ より $b_k < c_k$ となることが分かる．

次に $c_{k+1} < b_k$ を示す．はじめに $b_k < 0.536$ が分かる．任意の $0 < k < l$ に対して，$b_l^{l+2} - b_l^{l+1} + 2b_l - 1 = 0$ であることから

$$\begin{aligned} P_k(b_l) &= b_l^{k+2} - b_l^{k+1} + 2b_l - 1 \\ &= (b_l^{k+2} - b_l^{k+1})(1 - b_l^{l-k}). \end{aligned}$$

が言える．よって $0 < k < l$ ならば，$P_k(b_l) < 0$ が成り立つ．このとき，$b_l < b_k \leq b_2 < 0.536$ が成り立つ．(Table 1 参照)

$$Q_k'(a) = -(k+2)a^{k+1} + 2,$$

と

$$Q_k''(a) = -(k+2)(k+1)a^k < 0,$$

が $\frac{1}{2} < a < 1$ で成り立つ．さらに $Q_k'(\frac{1}{2}) = -(k+2)(\frac{1}{2})^{k+1} + 2 > 0$ であることと，$Q_k'(1) = -k < 0$ であること，さらには $Q_k'(a)$ が連続で単調減少関数であることから，$Q_k'(a) = 0$ を満たす a が唯一つ存在し，この値を $C(k)$ と書くことにする．$Q_k'(\frac{2}{3}) > 0$ が任意の $k \geq 2$ で成り立つことから $C(k)$ は $2/3$ より大きい．$a < C(k)$ のとき，関数 $Q_k(a)$ は増加関数となって $Q_k(C(k)) = \frac{2C(k)(k+1)}{k+2} - 1 > 0$ を満たす．よって $\frac{1}{2} < c_k < C(k)$ が分かる．$b_k^{k+2} - b_k^{k+1} + 2b_k - 1 = 0$ であることと $b_k < 0.536$ から

$$\begin{aligned} Q_{k+1}(b_k) &= -b_k^{k+3} + 2b_k - 1 \\ &= -b_k^{k+3} - b_k^{k+2} + b_k^{k+1} \\ &= -b_k^{k+1}\{(b_k + \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}\} \\ &> 0, \end{aligned}$$

が分かる．$b_k < C(k+1)$ より，$c_{k+1} < b_k$ となる．

最後に b_k と c_k が $1/2$ に収束することを示す．c_k が $1/2 + \epsilon$ $(\epsilon > 0)$ に収束すると仮定すると，

$$\frac{1}{2} + \epsilon < c_k < C(k)$$

が任意の k で言える．$Q_k(a)$ は $a < C(k)$ で増加関数であることと $Q_k(c_k) = 0$ であることから，

$$\begin{aligned} Q_k(1/2 + \epsilon) &= -(1/2 + \epsilon)^{k+2} + 2\epsilon \\ &< 0 \end{aligned}$$

が任意の k で成り立つがこれは矛盾する． □

上記の証明で以下の主張が言える．

注 23. $l < k$ ならば，$b_k < c_k < b_l < c_l$ と $Q_l(a) < 0$ が $b_k \leq a \leq c_k$ を満たす任意の a で成り立つ．

注 24. $b_k \leq a$ ならば，$P_k(a) \geq 0$ が成り立ち，これは $f_0 f_1^k f_0(1) \geq f_1(0)$ と同値である．同様に $a < c_k$ ならば，$Q_k(a) < 0$ が成り立ち，これは $f_0 f_1^{k+1}(0) < f_1(0)$ と同値である．よって $b_k \leq a < c_k$ ならば，$f_0 f_1^k(F)$ の右端は F に含まれるが，全体は含まれないという状況になる．同様に $f_1 f_0^k(F)$ の左端も F に含まれるが全体は含まれないという状況になる．

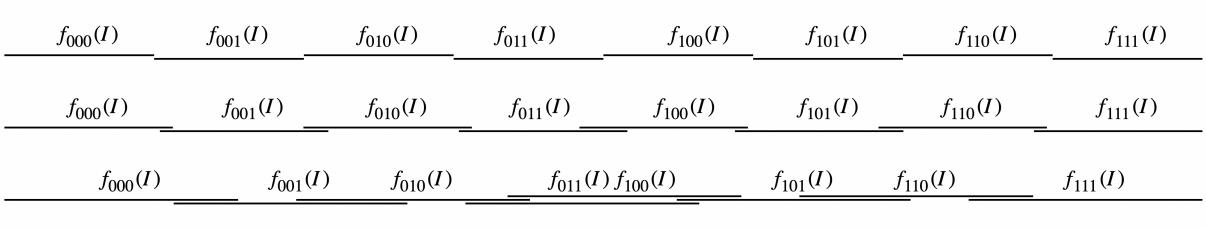

図 2: $a = 0.5$ のときの $\omega \in \{0,1\}^3$ による区間 $f_\omega(I)$（上），$a = 0.52$ （中），$a = 0.58$ （下）．

反復関数系 $S(a) = \{f_0, f_1\}$ は $a = 1/2$ のとき，任意の k に対して極限集合 $J(S(a))$ は，

$$J(S(a)) = I = \bigcup_{\omega \in \{0,1\}^k} f_\omega(I), \tag{5}$$

となる．ただし区間 $f_\omega(I)$ は 0 から 1 に向けて二進数の順番で並んでいる.（図 2（上）参照）a が 1/2 よりわずかに大きい場合，式 (5) は成り立ち，各々の区間が少しだけオーバーラップした様子を見せる.（図 2（中）参照）

以下では区間に順序を設ける．任意の区間 I と I' に対して，$I < I'$ を任意の $x \in I$ と $y \in I'$ で $x < y$ が成り立つときに定義する．

補題 25. $1/2 < a < b_{k-1}$ とする．このとき $f_{\omega-1}(I) < f_{\omega+1}(I)$ が任意の $\omega \in \{0,1\}^{k+1} \setminus \{0\cdots0, 1\cdots1\}$ に対して成り立つ．

証明. 次の式が任意の $\omega \in \{0,1\}^{k+1} \setminus \{0\cdots0, 1\cdots1\}$ で成り立つことを言えば十分である．

$$f_{\omega-1}(1) < f_{\omega+1}(0) \tag{6}$$

μ を $\omega - 1$ と $\omega + 1$ の長さ最大の共通コードとする．$(\omega+1) - (\omega-1) = 2$ であることから次のいずれかが成り立つ．

$$\omega - 1 = \mu 01\cdots11, \qquad \omega + 1 = \mu 10\cdots01,$$
$$\omega - 1 = \mu 01\cdots10, \qquad \omega + 1 = \mu 10\cdots00.$$

関数 f_μ は単調増加である．よって式 (6) は次のいずれかが $1 \le n \le k+1$ で成り立つことと同値である．

$$f_0(1) = f_0 f_1^{n-1}(1) < f_1 f_0^{n-2} f_1(0)$$
$$f_0 f_1^{n-2} f_0(1) < f_1 f_0^{n-1}(0) = f_1(0)$$

いずれの不等式も $a < b_{n-2}$ ならば任意の $1 \le n \le k$ で成り立つことが補題 22 によって分かる． □

$f_{\omega-1}(I)$ と $f_{\omega+1}(I)$ の間にある区間を X_ω と定義する．(図 3 参照．)

定義 26. $1/2 < a < b_{k-1}$ とする．任意の $\omega \in \{0,1\}^{k+1}$ に対して X_ω を次のように定義する．

$$X_\omega = f_\omega(I) - \mathrm{int}(f_{\omega-1}(I)) - \mathrm{int}(f_{\omega+1}(I)) \quad (\omega \neq 0\cdots0, 1\cdots1),$$
$$X_{0\cdots0} = f_{0\cdots0}(I) - \mathrm{int}(f_{0\cdots01}(I)),$$
$$X_{1\cdots1} = f_{1\cdots1}(I) - \mathrm{int}(f_{1\cdots10}(I)).$$

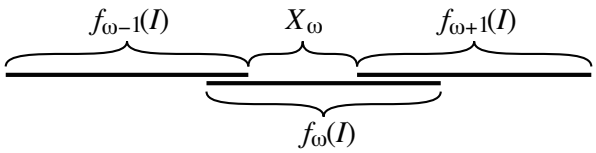

図 3: X_ω

端点に関して計算すると，$\omega \neq 0\cdots0, 1\cdots1$ に対し，

$$\begin{aligned} X_\omega &= [f_{\omega-1}(1), f_{\omega+1}(0)] \\ &= [f_{\alpha_1}\dots f_{\alpha_{k+1}}(1),\ f_{\beta_1}\dots f_{\beta_{k+1}}(0)] \end{aligned}$$

となる．ただし $\omega - 1 = \alpha_1 \dots \alpha_{k+1}$ と $\omega + 1 = \beta_1 \dots \beta_{k+1}$ である．また，

$$\begin{aligned} X_{0\cdots0} &= [0, f_0 \dots f_0 f_1(0)], \\ X_{1\cdots1} &= [f_1 \dots f_1 f_0(1), 1], \end{aligned}$$

となる．補題 25 より $b_k \leq a \leq c_k$ ならば X_ω は空ではなくなる．また，コード空間 $\{0,1\}^n$ には辞書式順序を入れる．即ち任意の異なる $\omega, \tau \in \{0,1\}^n$ に対して整数 i を次のようにとる．

$$i = \min\{1 \leq j \leq n \mid \omega_j \neq \tau_j\}.$$

これにより $\omega_i < \tau_i$ ならば $\omega < \tau$ と定義する．

補題 27. $b_k \leq a \leq c_k$ とし，$l \leq k+2$ とする．任意の $\omega, \tau \in \{0,1\}^l$ に対して，$\omega < \tau$ ならば $f_\omega(x) < f_\tau(x)$ が任意の $x \in I$ で成り立つ．

証明. 帰納法により証明する．任意の $x \in I$ に対して $f_0(x) < f_1(x)$ であることは明らか．l のときに成り立つと仮定する．即ち $\omega < \tau$ を満たす任意の $\omega, \tau \in \{0,1\}^l$ に対して，

$$f_{\omega_1} \cdots f_{\omega_l}(x) < f_{\tau_1} \cdots f_{\tau_l}(x),$$

が成り立つする．このとき，

$$\begin{aligned} f_0 f_{\omega_1} \cdots f_{\omega_l}(x) < f_0 f_{\tau_1} \cdots f_{\tau_l}(x) < f_0 f_1 \cdots f_1(x), \\ f_1 f_0 \cdots f_0(x) < f_1 f_{\omega_1} \cdots f_{\omega_l}(x) < f_1 f_{\tau_1} \cdots f_{\tau_l}(x), \end{aligned}$$

が成り立つ．$b_k \leq a \leq c_k$ であることから，

$$f_{10\dots0}(x) - f_{01\dots1}(x) = a^{l+1} - 2a + 1 = -Q_{l-1}(a) > 0$$

が 注 23 より分かる．よって $l+1$ の時も成り立つことが分かる． □

補題 28. $1/2 < a < b_{k-1}$ とする．このとき任意の $\omega \in \{0,1\}^k$ に対して，

$$f_\omega(I) \cap f_{\omega+1}(I) = f_\mu(F),$$

が成り立つ．ただし μ は ω と $\omega+1$ の長さ最大の共通コードである．

証明.

$$\omega = \mu 01\cdots 1, \qquad \omega + 1 = \mu 10\cdots 0.$$

なるので，$0 \le n \le k-1$ で，

$$f_\omega(I) \cap f_{\omega+1}(I) = f_\mu(f_0 f_1^n(I) \cap f_1 f_0^n(I)),$$

が成り立つ．ただし，

$$\begin{aligned} f_0 f_1^n(I) &= [a - a^{n+1}, a], \\ f_1 f_0^n(I) &= [1-a, a^{n+1} + (1-a)]. \end{aligned}$$

となる．$a^{n+1} + (1-a) - a = -Q_{n-1}(a) > 0$ が 注 23 より分かることから，

$$f_0 f_1^n(I) \cap f_1 f_0^n(I) = F = [1-a, a],$$

となる． □

2.2 GDMS の構成

ここで $b_k \le a \le c_k$ $(k = 1, 2, \dots)$ に対して GDMS $S_k(a)$ を定義する．マルチグラフとそれに付随する接続行列 (V_k, E_k, A_k, i, t) は次のように定義する．頂点集合は

$$V_k = \{0,1\}^{k+1},$$

で定義する．V_k の元は長さ $k+1$ のコードであり，それらを $(k+1)$ 桁の二進数としても扱うとする．そして有向辺の集合は次のように定義する．

$$E_k = \{(\omega, \phi_0(\omega)) \in V_k \times V_k \mid \omega \ne 1\cdots 1\} \cup \{(\omega, \phi_1(\omega)) \in V_k \times V_k \mid \omega \ne 0\cdots 0\},$$

ただし写像 $\phi_0, \phi_1 : V_k \to V_k$ は以下で定義する．

$$\phi_0(\omega) = \left\lfloor \frac{\omega}{2} \right\rfloor, \qquad \phi_1(\omega) = \left\lfloor \frac{\omega}{2} \right\rfloor + 2^k.$$

ここで $\left\lfloor \frac{\omega}{2} \right\rfloor$ は $\omega/2$ をこえない最大の整数である．接続行列 $A_k : E_k \times E_k \to \{0,1\}$ もこれら ϕ_0, ϕ_1 で定義する．

$$A_k((\omega, \phi_l(\omega)), (\omega', \phi_m(\omega'))) = \begin{cases} 1 & (\phi_l(\omega) = \omega') \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

今 GDMS$S_k(a)$ を定義する．

$$S_k(a) = \{f_e : X_{t(e)} \to X_{i(e)} \mid e \in E_k\},$$

ただし，

$$f_e = \begin{cases} f_0|_{X_{t(e)}} & \text{if } e = (\omega, \phi_0(\omega)) \\ f_1|_{X_{t(e)}} & \text{if } e = (\omega, \phi_1(\omega)). \end{cases}$$

この GMDS が開集合条件を満たしていることを述べる．

補題 29. *GDMS* $S_k(a)$ は開集合条件を満たす．実際に開集合 U を次のようにとる．

$$U = \bigcup_{\omega \in V_k} \mathrm{int}(X_\omega).$$

これは任意の $e, e' \in E$ $(e \neq e')$ で以下を満たす．

$$f_e(U \cap X_{t(e)}) \cap f_{e'}(U \cap X_{t(e')}) = \emptyset. \tag{7}$$

さらに，

$$\bigcup_{e \in E_k} f_e(U \cap X_{t(e)}) \subset U. \tag{8}$$

を満たす．

証明. まずはじめに式 (8) が成り立つことを示す．

$$\begin{aligned} X_{0\cdots 0} &= [0, f_0 \dots f_0 f_1(0)] = [0, a^k(1-a)], \\ X_{1\cdots 1} &= [f_1 \dots f_1 f_0(1), 1] = [1 - a^k(1-a), 1]. \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} f_0(\mathrm{int}(X_{0\cdots 0})) &= [0, a^{k+1}(1-a)) \subset [0, a^k(1-a)) = \mathrm{int}(X_{0\cdots 0}), \\ f_1(\mathrm{int}(X_{1\cdots 1})) &= (1 - a^{k+1}(1-a), 1] \subset (1 - a^k(1-a), 1] = \mathrm{int}(X_{1\cdots 1}). \end{aligned}$$

が成り立つ．$\omega \neq 0\cdots 0, 1\cdots 1$ とする．$j = 0, 1$ に対してある $p \in V_k$ が存在して次を満たすことをいう．

$$f_j(\mathrm{int}(X_\omega)) \subset \mathrm{int}(X_p) \tag{9}$$

$\omega - 1 = \alpha_1 \dots \alpha_{k+1}$， $\omega + 1 = \beta_1 \dots \beta_{k+1}$ と書くことにする．これらの差は 2 であることから，2 つの場合分けが存在する．まずは $\alpha_{k+1} = \beta_{k+1} = 0$ のときである．このとき，

$$\begin{aligned} f_j(\mathrm{int}(X_\omega)) &= (f_j f_{\alpha_1} \dots f_{\alpha_{k+1}}(1),\ f_j f_{\beta_1} \dots f_{\beta_{k+1}}(0)) \\ &= (f_j f_{\alpha_1} \dots f_{\alpha_k}(a),\ f_j f_{\beta_1} \dots f_{\beta_k}(0)), \end{aligned}$$

が成り立つので，

$$\begin{aligned} \beta_1 \dots \beta_k - \alpha_1 \dots \alpha_k &= \left\lfloor \frac{\beta_1 \dots \beta_{k+1}}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\alpha_1 \dots \alpha_{k+1}}{2} \right\rfloor \\ &= \frac{\beta_1 \dots \beta_{k+1} - \alpha_1 \dots \alpha_{k+1}}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

$\gamma_1 \dots \gamma_k$ を次を満たすようにとる．

$$\gamma_1 \dots \gamma_k = \alpha_1 \dots \alpha_k - 1.$$

$\gamma_1 \dots \gamma_k 1 < \alpha_1 \dots \alpha_k 0$ なので補題 27 より次のことが分かる．

$$f_{\gamma_1} \dots f_{\gamma_k} f_1(1) < f_{\alpha_1} \dots f_{\alpha_k} f_0(1),$$

$$f_{\gamma_1}\dots f_{\gamma_k}(1) < f_{\alpha_1}\dots f_{\alpha_k}(a).$$

よって，

$$f_j f_{\gamma_1}\dots f_{\gamma_k}(1) < f_j f_{\alpha_1}\dots f_{\alpha_k}(a),$$

となり，

$$f_j(\mathrm{int}(X_\omega)) \subset (f_j f_{\gamma_1}\dots f_{\gamma_k}(1),\ f_j f_{\beta_1}\dots f_{\beta_k}(0)).$$

$j\gamma_1\dots\gamma_k$ と $j\beta_1\dots\beta_k$ の差は 2 であるので p を $j\gamma_1\dots\gamma_k < p < j\beta_1\dots\beta_k$ を満たす数とすると，$f_j(\mathrm{int}(X_\omega)) \subset \mathrm{int}(X_p)$ が成り立つ．

最後に式 (7) を満たすことを示す．$j = 0, 1$ に対して，f_j が単射であることから

$$f_j(\mathrm{int}(X_\omega)) \cap f_j(\mathrm{int}(X_{\omega'})) = \emptyset$$

が任意の $\omega \neq \omega'$ に対して成り立つのは明らかである．同様にして以下のこともわかる．任意の $\omega \neq 1\cdots1$ と $\omega' \neq 0\cdots0$ に対して，

$$f_0(\mathrm{int}(X_\omega)) \cap f_1(\mathrm{int}(X_{\omega'})) = \emptyset$$

これらは

$$f_0(\mathrm{int}(X_\omega)) \subset f_0(I) \setminus F,$$
$$f_1(\mathrm{int}(X_{\omega'})) \subset f_1(I) \setminus F.$$

から分かる． □

補題 30. $b_k \leq a < c_k$ とする．このとき $l = 0, 1, \dots$ に対して，

$$\bigcup_{\eta \in E^l_{A_k}} f_\eta(X_{t(\eta_l)}) \cup \bigcup_{|\mu| \leq l+k} f_\mu(F) = I, \tag{10}$$

が成り立つ．さらに，$f_\eta(X_{t(\eta_l)})$（$\eta \in E^l_{A_k}$）と $f_\mu(F)$（$|\mu| \leq l+k$）は端点でしか交わらない．

証明. l に対する帰納法で証明する．補題 28 より，X_ω と $X_{\omega+1}$ との間の区間はコードの長さ高々 k のコード μ によって次のように書ける．

$$f_\omega(I) \cap f_{\omega+1}(I) = f_\mu(F).$$

よって，

$$\bigcup_{\omega \in \{0,1\}^{k+1}} X_\omega \cup \bigcup_{|\mu| \leq k} f_\mu(F) = I.$$

ここで X_ω と $f_\mu(F)$ は端点でしか交わらない．$l = 0$ のときはこれで成り立つことが分かる．

今，主張が l のときに成り立つと仮定し，式 (10) が成り立つとする．このとき，

$$\bigcup_{\tilde\eta \in E^{l+1}_{A_k}} f_{\tilde\eta}(X_{t(\tilde\eta_{l+1})}) = \bigcup_{\substack{\eta \in E^l_{A_k} \\ i(\eta_1) \neq 1\cdots1}} f_0 f_\eta(X_{t(\eta_l)}) \cup \bigcup_{\substack{\eta \in E^l_{A_k} \\ i(\eta_1) \neq 0\cdots0}} f_1 f_\eta(X_{t(\eta_l)}). \tag{11}$$

式 (10) に f_0 を作用させると，

$$\bigcup_{\substack{\eta\in E^l_{A_k}\\ i(\eta_1)\neq 1\cdots 1}} f_0f_\eta(X_{t(\eta_l)}) \cup \bigcup_{\substack{\eta\in E^l_{A_k}\\ i(\eta_1)=1\cdots 1}} f_0f_\eta(X_{t(\eta_l)}) \cup \bigcup_{|\mu|\le l+k} f_0f_\mu(F) = f_0(I).$$

が得られる．$i(\eta_1)=1\cdots 1$ を満たす $\eta\in E^l_{A_k}$ に対して，

$$f_0f_\eta(X_{t(\eta_n)}) \subset f_0(X_{1\cdots 1}) \subset F,$$

となるので

$$\bigcup_{\substack{\eta\in E^l_{A_k}\\ i(\eta_1)\neq 1\cdots 1}} f_0f_\eta(X_{t(\eta_l)}) \cup \bigcup_{|\mu|\le l+k} f_0f_\mu(F) = f_0(I), \tag{12}$$

を得ることができる．仮定より式 (12) の $f_0f_\eta(X_{t(\eta_l)})$ と $f_0f_\mu(F)$ は端点でしか交わらない．同様にして，

$$\bigcup_{\substack{\eta\in E^l_{A_k}\\ i(\eta_1)\neq 0\cdots 0}} f_1f_\eta(X_{t(\eta_l)}) \cup \bigcup_{|\mu|\le l+k} f_1f_\mu(F) = f_1(I), \tag{13}$$

を得る．ただし，$f_1f_\eta(X_{t(\eta_l)})$ と $f_1f_\mu(F)$ は端点でしか交わらない．注 24 より $f_0f_\eta(X_{t(\eta_l)})$ $(i(\eta_1)\neq 1\cdots 1)$ の形をした区間はそもそも $f_1(I)$ と交わらないので $f_1f_\mu(F)$ とは交わらない．同様にして $f_1f_\eta(X_{t(\eta_l)})$ $(i(\eta_1)\neq 0\cdots 0)$ の形をした区間と $f_0f_\mu(F)$ とは交わらない．

式 (11)，(12)，(13) から，

$$\bigcup_{\tilde\eta\in E^{l+1}_{A_k}} f_{\tilde\eta}(X_{t(\tilde\eta_{l+1})}) \cup \bigcup_{|\mu|\le l+1+k} f_\mu(F) = f_0(I)\cup f_1(I) = I,$$

となるので $l+1$ のときにも言える． □

補題 31. $b_k \le a < c_k$ とする．このとき $J(S_k(a)) = J_1(S(a))$ が成り立つ．

証明. 命題 20 より $J_1(S(a)) = (F^*)^c$ なので以下を示せば十分である．

$$(J(S_k(a)))^c = F^*.$$

始めに $x\notin J(S_k(a))$ と仮定する．するとある整数 l が存在して

$$x \notin \bigcup_{\eta\in E^l_{A_k}} f_\eta(X_{t(\eta_l)}).$$

となる．補題 30 より，

$$x \in \bigcup_{|\mu|\le l+k} f_\mu(F) \subset F^*.$$

が成り立つ．

逆に $x\in F^*$ を仮定する．するとあるコード $\nu\in\{0,1\}^*$ が存在して $x\in f_\nu(F)$ となる．補題 30 の $l=|\nu|+1$ のときを考えると，$f_\eta(X_{t(\eta_l)})$（$\eta\in E^l_{A_k}$）は $f_\nu(F)$，$f_\nu f_0 f_1^k(F)$，$f_\nu f_1 f_0^k(F)$ と端点だけしか交わらない状況になっている．注 24 より

$$f_\nu(F) \subset \mathrm{int}(f_\nu(F)\cup f_\nu f_0 f_1^k(F)\cup f_\nu f_1 f_0^k(F))$$

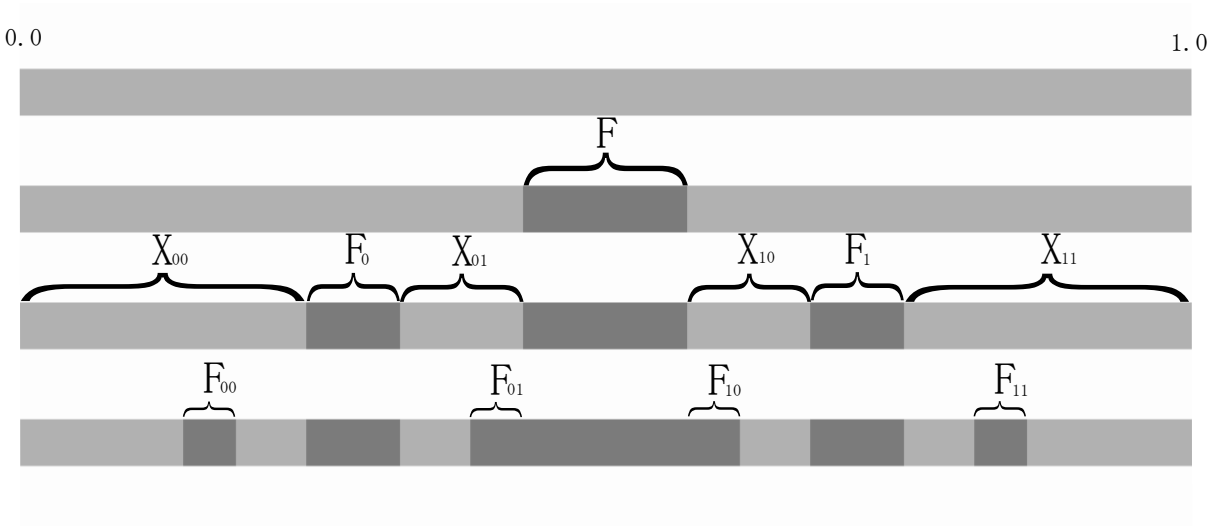

図 4: $S_1(a)$ の段階構成

が $b_k \leq a < c_k$ で成り立ってるので，$f_\eta(X_{t(\eta_l)})$ は $f_\nu(F)$ と交わらない．よって，

$$x \notin \bigcup_{\eta \in E^l_{A_k}} f_\eta(X_{t(\eta_l)}),$$

が成り立つことから $x \notin J(S_k(a))$ が言える． □

2.3 $k = 1, 2$ の場合の重複度 1 の集合

前節で GDMS $S_k(a)$ の構成とそれが開集合条件を満たし，極限集合が元の反復関数系の極限集合の重複度 1 の集合であることがわかった．実際に $k = 1$ と $k = 2$ について考えてみる．

定理 32. 任意の $a \geq b_1$ に対して $\dim_H J_1(S(a)) = 0$ が成り立つ．

証明. $a \geq c_1 = g$ のとき，$J_1(S(a)) = \{0, 1\}$ となるので，$\dim_H J_1(S(a)) = 0$ は成り立つ．

$b_1 \leq a < c_1$ とする．(図 4 参照)．補題 31 より，$J_1(S(a)) = J(S_1(a))$．GDMS $S_1(a)$ の具体的な形は以下のようになる．マルチグラフと接続行列は以下の通り．

$$V_1 = \{00, 01, 10, 11\},$$

$$E_1 = \{(00, 00), (00, 01), (01, 10), (10, 01), (11, 10), (11, 11)\},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

これより $E_{A_1}^{\infty}$ の元は次のコードとなる．

$$(00,00)^{\infty}, (11,11)^{\infty}, \{(01,10)(10,01)\}^{\infty}, \{(10,01)(01,10)\}^{\infty},$$
$$(00,00)^n(00,01)\{(01,10)(10,01)\}^{\infty} \qquad (n=0,1,\dots),$$
$$(11,11)^n(11,10)\{(10,01)(01,10)\}^{\infty} \qquad (n=0,1,\dots).$$

よって $J(S_1(a))$ は可算個であることが分かるので $\dim_H J_1(S(a)) = 0$ となる． □

系 33. 任意の $a \geq b_1$ で，$\dim_H \bigcup_{i=2}^{\infty} J_i(S(a)) = 1$ が成り立つ．

同様にして $k=2$ の時も考える．

定理 34. $b_2 \leq a \leq c_2$ とする．このとき，

$$\dim_H J_1(S(a)) = -\frac{\log \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\log a},$$

が成り立つ．

証明. $b_2 \leq a \leq c_2$ のときを考える (図 5 参照)．補題 31 より， $b_2 \leq a < c_2$ ならば $J_1(S(a)) = J(S_2(a))$ が成り立つ．$a = c_k$ のとき， $J_1(S(a)) \subset J(S_2(a))$ となり $J(S_2(a)) \setminus J_1(S(a))$ は $f_\nu(F)$ $(\nu \in \{0,1\}^*)$ の境界であり，これは可算個である．なので，どちらのケースにおいても

$$\dim_H J_1(S(a)) = \dim_H J(S_2(a)).$$

が言える．

GDMS $J(S_2(a))$ は具体的に次のようにして得られる．マルチグラフとそれに付随する接続行列 (V_2, E_2, A_2, i, t) は以下の通り．

$$V_2 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\},$$

$$E_2 = \{(000,000), (000,001), (001,010), (001,011), (010,100), (010,101), (011,110),$$
$$(100,001), (101,010), (101,011), (110,100), (110,101), (111,110), (111,111)\},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix}
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\
0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1
\end{pmatrix}.$$

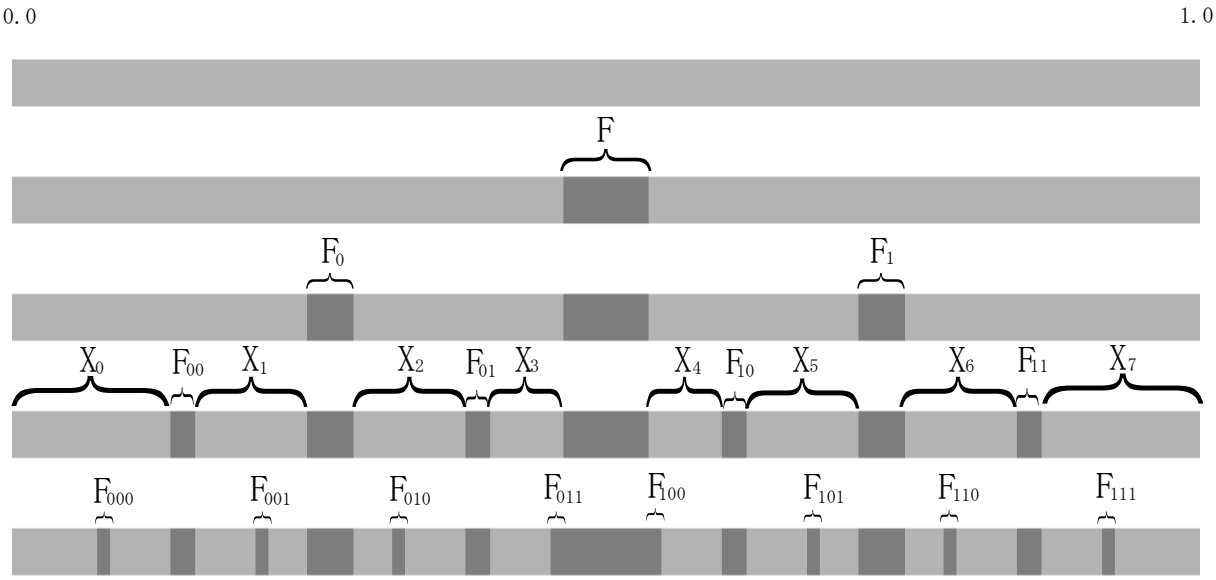

図 5: $S_2(a)$ の段階構成.

よって，

$$\dim_H J(S_2(a)) \leq -\frac{\log \lambda_2}{\log a}, \tag{14}$$

ただし，$\lambda_2 = (1+\sqrt{5})/2$ は A_2 の固有値のうち最大のもの．これは $\{f_\eta(X_{t(\eta_l)}) \mid \eta \in E^l_{A_k}\}$ が $J(S_2(a))$ の a^l 被覆（$s>0$）になっていることから，

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_{a^l}(J(S_2(a))) &\leq \sum_{\eta \in E^l_{A_k}} |f_\eta(X_{t(\eta_l)}|^s \\ &= a^{ls} \sharp E^l_{A_k} \\ &\leq a^{ls} c \lambda_2^l \quad (c \text{ は定数.}).\end{aligned}$$

が言えるためである．よって， $a^s\lambda_2 < 1$ ならば，

$$\mathcal{H}^s_{a^l}(J(S_2(a))) \to 0 \quad \text{as} \quad l \to \infty,$$

であり，

$$\mathcal{H}^s(J(S_2(a))) = 0.$$

となる．$a^s\lambda_2 < 1$ を満たす s に対し $\dim_H J(S_2(a)) \leq s$ が成り立つことから式 (14) が言える．

補題 29 より GDMS は開集合条件を満たしている．GDMS を構成する変換は全て相似変換であることから有界歪曲性を持つこともわかる．なので A_2 が irreducible であれば定理 19 より 式 (14) は等式となる．しかしながら A_2 が irreducible ではないので，GDMS の構成を少し変える必要が

ある．GDMS を修正し以下のように変える．

$$V_2' = \{001, 010, 011, 100, 101, 110\},$$

$$\begin{aligned} E_2' = \{&(001, 010), (001, 011), (010, 100), (010, 101), (011, 110), \\ &(100, 001), (101, 010), (101, 011), (110, 100), (110, 101)\}, \end{aligned}$$

$$A_2' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

この修正された GDMS を $S_2'(a)$ と書くことにする．すると，

$$\dim_H J(S_2'(a)) \leq \dim_H J(S_2(a)), \tag{15}$$

となる．A_2' が irreducible であることは容易にわかり，定理 19 を使うことができる．極限集合 $J(S_2'(a))$ の Hausdorff 次元は topological pressure function$P(t)$ の零点の値と一致する．

$$\begin{aligned} P(t) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\omega \in E^n_{A_2'}} ||f_\omega'||^t \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sharp E^n_{A_2'} + t \log a \\ &= \log \lambda_2' + t \log a, \end{aligned}$$

ただし，λ_2' は A_2' の最大固有値．よって，

$$\dim_H J(S_2'(a)) = -\frac{\log \lambda_2'}{\log a}. \tag{16}$$

$\lambda_2' = \lambda_2$ であることを示す．A_2 の固有多項式を計算すると次を得る．

$$
\begin{aligned}
&\det(A_2 - sE) \\
&= \det \left(\begin{array}{cc|cccccccccc|cc}
1-s & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -s & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & -s & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -s & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -s & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -s & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -s & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -s & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1-s
\end{array}\right) \\
&= s^2(1-s)^2 \det(A_2' - sE').
\end{aligned}
$$

よって A_2 の固有値は $0, 1$ と A_2' の固有値である．式 (14)，(15)，(16) より，

$$
-\frac{\log \lambda_2}{\log a} = -\frac{\log \lambda_2'}{\log a} = \dim_H J(S_2'(a)) \leq \dim_H J(S_2(a)) \leq -\frac{\log \lambda_2}{\log a}.
$$

□

2.4 一般の場合

定理 34 を一般化し，35 を証明する．

定理 35. $b_k \leq a \leq c_k$ $(k \geq 2)$ とする．このとき，

$$
\dim_H J_1(S(a)) = -\frac{\log \lambda_k}{\log a},
$$

が成り立つ．ただし，λ_k は接続行列 A_k の固有値で最大のものとする．

定理 36. $b_k \leq a \leq c_k$ $(k \geq 2)$ とする．このとき $J_1(S(a))$ の Hausdorff 次元は次で評価できる．

$$
\dim_H J_1(S(a)) \geq -\frac{\log(2^{k+2} - 6)}{(k+3)\log a}.
$$

この証明の方法は定理 34 と同様にしてできる．$b_k \leq a \leq c_k$ とする．補題 31 より，$b_k \leq a < c_k$ ならば，$J_1(S(a)) = J(S_k(a))$ が成り立つ．$a = c_k$ のとき，$J_1(S(a)) \subset J(S_k(a))$ となり，$J(S_k(a)) \setminus J_1(S(a))$ は $f_\nu(F)$ $(\nu \in \{0,1\}^*)$ の境界であり，可算である．どちらのケースに対しても

$$
\dim_H J_1(S(a)) = \dim_H J(S_k(a)),
$$

が言える．前節と同様にマルチグラフとそれに付随する接続行列 (V_k, E_k, A_k, i, t) を定義する．同様にして

$$\dim_H J(S_k(a)) \leq -\frac{\log \lambda_k}{\log a} \tag{17}$$

が式 (14) と同様のやり方で分かる．

補題 29 より GDMS は開集合条件を満たしている．また，GDMS を構成するすべての変換が相似変換なので有界歪曲性をもつこともわかる．よって接続行列 A_k が irreducible であれば定理 19 より式 (17) の等号が言える．

しかしながら接続行列 $A_k$irreducible ではないので GDMS を修正する必要がある．修正したマルチグラフとそれに付随する接続行列 (V'_k, E'_k, A'_k, i, t) は次のようにして定義する．頂点集合は $V'_k = V_k \setminus \{0\cdots0, 1\cdots1\}$．有向辺の集合 E'_k は E_k のうち頂点 $0\cdots0, 1\cdots1$ を含まないものの集合とする．接続行列 A'_k は A_k を $E'_k \times E'_k$ に制限したものとする．

$\omega \in \{0,1\}^{k+1}$ に対して，写像 ϕ_0 (resp. ϕ_1) は ω の桁を右にシフトし左に 0（resp. 1）を加えたものである．

$$\phi_0(\omega_1 \ldots \omega_k \omega_{k+1}) = 0\omega_1 \ldots \omega_k$$
$$\phi_1(\omega_1 \ldots \omega_k \omega_{k+1}) = 1\omega_1 \ldots \omega_k$$

接続行列 A'_k が irreducible であるかどうかを確認するためには，$p, q \in V'_k$ に対して p から q への道が $E^*_{A'_k}$ 内にあるかどうかを確認すればよい．$r_0, r_1 \in \{0,1\}$ を次のように定義する．

$$r_0 \neq p_1, \qquad r_1 \neq q_{k+1}.$$

すると，

$$\phi_{q_1} \cdots \phi_{q_{k+1}} \phi_{r_1} \phi_{r_0}(p) = q,$$

が任意の $i = 1, \ldots, k$ で言えるので，

$$\phi_{q_i} \cdots \phi_{q_{k+1}} \phi_{r_1} \phi_{r_0}(p) \in V'_k.$$

が成り立つことから A'_k は irreducible であることが分かる．

式 (15)，(16) と同様にして，

$$\dim_H J(S'_k(a)) \leq \dim_H J(S_k(a)), \tag{18}$$

$$\dim_H J(S'_k(a)) = -\frac{\log \lambda'_k}{\log a}, \tag{19}$$

ただし，λ'_k は A'_k の最大固有値である．

A_k の固有値は $0, 1$ と A'_k の固有値である．このことは以下のようにして分かる．

$$
\begin{aligned}
&\det(A_k - sE) \\
&= \det \left(\begin{array}{cc|cccc|cc}
1-s & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -s & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & & & & & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & A'_k - sE' & & & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & & & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & & & & & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & -s & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1-s
\end{array}\right) \\
&= s^2(1-s)^2 \det(A'_k - sE').
\end{aligned}
$$

式 (17)，(18)，(19) より，

$$
-\frac{\log \lambda_k}{\log a} = -\frac{\log \lambda'_k}{\log a} = \dim_H J(S'_k(a)) \leq \dim_H J(S_k(a)) \leq -\frac{\log \lambda_k}{\log a}.
$$

定理 36 については次のように証明する．$(A'_k)^{k+3}$ の全ての成分が 1 以上になることから，任意の正の整数 m において

$$
\mathrm{tr}(A'_k)^{(k+3)m} \geq (2^{k+2} - 6)^m,
$$

が成り立つ．Perron-Frobenius の定理より，

$$
\begin{aligned}
(k+3)\log \lambda'_k &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log \mathrm{tr}(A'_k)^{(k+3)m} \\
&\geq \log(2^{k+2} - 6),
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

3　結論

今回は単位区間上での 2 元生成の反復関数系を対象として考えたが，縮小率が指定した範囲にあるときはオーバーラップするという状況で極限集合こそは単位区間そのものになるものの，重複の仕方には規則性がある．その規則性を理解することにより，単位区間の点ごとに重複度が定義されて，一つしかアドレスをもたないという点が存在している．この重複度 1 の点はもとの反復関数系を利用した GDMS を構成することによってオーバーラップする変換を取り除くことによりオーバーラップするといった状況をオーバーラップしない状況にし，開集合条件を満たすようにした．そうすることで従来の Hausdorff 次元を求める定理等が利用できるかたちとなった．

今回のやり方で重要な点は次の三点である．

- 構成した GDMS が開集合条件を満たしているか．
- GDMS の極限集合が重複度 1 の集合と一致しているか（またはそれに近いものとできるか）
- GDMS に付随する指示行列が irreducible であるかどうか．または irreducible であるように指示行列を修正できるか．

定理の範囲内ではこの三点が成り立つが，範囲外になると重複度 1 の集合と一致しなくなる．なので範囲外の評価に関しては同じ GDMS の構成でやろうとすると基本的に下からの評価ができない．しかしながらそこも GDMS の構成によりオーバーラップする変換を多く取り除くことにより下からの評価を可能にすることができると思われる．この点に関しては付随する指示行列が irreducible であることと深く関係している．

これからの展望として，この範囲外で重複度 1 の集合の Hausdorff 次元がどうなっているのか，重複度 $2, 3$ の時はどうなっているのか等多くの課題が残されている．今回分かったことで一番重要な点は「オーバーラップする反復関数系に関してはオーバーラップしない GDMS を構成する」ということである．そうすることによって従来の定理を上手く適用できる．そうすることで残された課題も解決の糸口が見えてくると思われる．

参考文献

[1] M.F.Barnsley, Fractals Everywhere, Morgan Kaufmann, 1993.

[2] K.J.Falconer, Fractal Geometry 寞熱athematical Foundations and Applications, 2nd Ed., Wiley, 2003.

[3] J.E.Hutchinson, Fractals and self-similarity, Indiana Univ. Math. J. 30(1981), 713-747.

[4] D.Mauldin and M.Urbański, Graph directed Markov systems: Geometry and Dynamics of limit sets, Cambridge Tracts in Mathematics 148, 2003.

[5] K. Shimomura, The Hausdorff dimension of the region of multiplicity one of overlapping iterated function systems on the interval, Osaka J. Math., to appear.