



Title	Faces of polytopes arising from finite graphs and partially ordered sets
Author(s)	森, 亜貴
Citation	大阪大学, 2020, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/76660
rights	
Note	やむを得ない事由があると学位審査研究科が承認したため、全文に代えてその内容の要約を公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

論文内容の要旨

氏 名 (森 亜貴)	
論文題名	Faces of polytopes arising from finite graphs and partially ordered sets (有限グラフと半順序集合に付随する凸多面体の面)
<p>論文内容の要旨</p> <p>オイラーの多面体定理を起源とする凸多面体の面の数え上げは、組合せ論における伝統的な話題であり、長きにわたり多様な研究が行われてきた。特に近年は、可換環論や代数幾何学など様々な分野との関係が明らかにされている。本論文では、有限単純グラフに付随する「辺凸多面体」、有限半順序集合に付随する「順序凸多面体」と「鎖凸多面体」、これら3つの凸多面体のクラスに着目し、それぞれの面に関して得られた結果と、それらの研究の一部から導かれる有限グラフの極値問題に関する結果を述べる。本論文は4つの章からなり、以下でその詳細を述べる。</p> <p>第1章は序章とし、研究の背景を述べた上、本論文で用いる記号を導入した。また、本論文における主結果を全て掲載した。</p> <p>第2章では、辺凸多面体の1次元面（すなわち辺）についての研究を展開する。頂点数を固定した任意の有限単純グラフを考え、このグラフに付随する辺凸多面体の辺の個数の最大値を求めることが課題であった。先行研究において、辺凸多面体の辺の特徴付けが得られており、それを用いると、辺凸多面体の辺の個数を求めることは、有限グラフの、ある条件を満たす辺の組の数え上げに帰着される。低次元の多面体を想定する限り、常に完全グラフのみが最大値を与えると思われたが、14頂点以上のグラフに付随する辺凸多面体においては、必ずしもこの限りではないことが判明した。また、完全グラフが最大値を与えるときと、そうでないときをグラフの頂点数により完全に分類することに成功した。これを1つ目の主結果として述べている。また、Tran-Zieglerはランダムグラフを構成する手法により、辺凸多面体の辺の個数の最大値の下限を与えているが、本章の2節では、ランダムグラフを用いる方法と用いない方法の2通りにおいて、この下限を改良することに成功している。</p> <p>第3章では、ある有限単純連結グラフが2部グラフのときと、そうでないときのそれぞれにおいて、4-サイクルの個数の上限を、頂点数と辺数を用いて与えることに成功している。2部グラフのときに関しては、先行研究において、可換代数の手法によって上限が得られていたが、本章ではこの上限を組合せ論による証明により与えている。2部グラフでないときに得た上限に関しては、真に新しいものであり、これを2つ目の主定理としている。</p> <p>第4章では有限半順序集合に付随する順序凸多面体と鎖凸多面体の面について研究している。これらの凸多面体の頂点、辺、ファセットの特徴付けは既に知られている為、2次元面に着目した。本章では、順序凸多面体の1-骨格に含まれる三角形は順序凸多面体の2次元単体面と1対1に対応し、鎖凸多面体に関しても同様のことが成り立つことを示している。これは順序凸多面体と鎖凸多面体の2次元面に関する部分的な特徴付けを得たことを意味し、3つ目の主結果として述べている。</p>	

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏 名 (森 亜貴)			
論文審査担当者	(職)		氏 名
	主 査	教授	日比 孝之
	副 査	教授	和田 昌昭
	副 査	准教授	東谷 章弘

論文審査の結果の要旨

森 亜貴の学位論文では、有限グラフに付随する辺凸多面体、及び、有限半順序集合に付随する順序凸多面体と鎖凸多面体の面に着目し、独創的な研究が展開されている。

学位論文の第 1 部では、有限グラフに付随する辺凸多面体の辺の個数の最大値に関する研究が展開されている。辺凸多面体は可換代数の観点から導入された概念であるが、0/1 多面体の特別な類であるから、その組合せ論的諸性質を探究することは自然である。辺凸多面体の辺はグラフの言葉で特徴付けられているから、極値グラフ理論の範疇で、辺凸多面体の辺の個数を最大化するグラフが議論できる。著者は、14 個以下の頂点数を固定するとき、辺凸多面体の辺の個数の最大値と、最大値を与えるグラフを発見している。加えて、辺の個数の最大値の漸近挙動を探究し、Tran と Ziegler のランダムグラフによる下限を、複数の方法で改良することに成功している。

学位論文の第 2 部では、古典的なグラフ理論における伝統的な話題である、有限グラフに含まれる長さ 4 のサイクルの個数の上限に関する研究が展開されている。著者は、有限グラフの頂点数を固定するとき、グラフに含まれる「長さ 4 のサイクルの個数と 4 頂点完全グラフの個数の差」の上限、及び、長さ 4 のサイクルの個数の上限を得ている。本結果の証明では、可換代数の技巧が駆使されており、独創性に富む成果である。

学位論文の第 3 部では、有限半順序集合に付随する順序凸多面体と鎖凸多面体の 2 次元面に関する研究が展開されている。両多面体の類似性については、既に、幾多の事実が知られているが、2 次元面を巡る結果は皆無であった。著者は、Hibi と Li による両多面体の辺の特徴付けを駆使し、両多面体の 2 次元単体面の特徴付けを半順序集合の言葉で与えることに成功している。本結果は、今後、両多面体の 2 次元面の個数、面の個数とユニモジュラ同値性との関連を探るための盤石な礎である。

よって、当該論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。