The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	多変数正実関数の縦続形構成問題に関する研究
Author(s)	藤本, 英昭
Citation	大阪大学, 1981, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/767
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

多変数正実関数の縦続形構成問題に関する研究

藤　本　英　昭

昭和 55 年 12 月

多変数正実関数の縦続形構成問題に関する研究

藤　本　英　昭

昭和 55 年 12 月

内　容　梗　概

本論文は，多変数正実関数の抵抗終端縦続形構成問題に関する研究の成果をまとめたもので，全体は次の五つの章から構成されている。

第1章では，多変数正実関数（行列）の実現問題の工学的意義，及び，本研究に関連する従来の研究の概要が述べられると共に本論文の位置が明らかにされている。

第2章では，構成論に役立つと思われる諸定理を紹介し，多変数リアクタンス正2端子対網の出力端を単位抵抗で終端したときの駆動点イミタンスが具備しなければならない条件，正性の判定条件等を明らかにすると共に伝送零点と駆動点イミタンスとの関係等について考察する。

第3章では，第4章で述べる縦続形構成の基礎となるA（B），Brune，Richards，Hazony－Youla区間等の縦続区間を求める方法，それを可能にするための条件及びこれらの区間を分離した後の次数の低減条件を明らかにする。また，一方の変数について1次である2変数リアクタンス正関数は，常に縦続形で実現できることを示す。そして，これらの結果を集中分布定数素子混在系の問題へ応用し，棒状回路の出力端を容量で終端した1端子対網や，整数倍の電気長をもつ単純枝等が分離できるための条件を明らかにする。

第4章では，第3章において得られた結果を応用して，多変数正実関数が下に示すような抵抗終端縦続形回路の駆動点イミタンスとして構成されるための条件を必要充分の形で求め，その構成法を明らかにしている。また，その結果を集中定数素子と分布定数素子の混在する系，あるいは，相異なる電気長をもつ分布定数素子の混在する系の問題へ応用し，マイクロ波フイルタなどに利用できると思われる回路構造について，その実現条件を導く。

この章において考察されている抵抗終端縦続形回路は次の四種である。

〔I〕 変数 p_1 に関して任意の伝送零点をもつリアクタンス2端子対網と，変数 p_2 に関して無限遠点（原点）に伝送零点をもつリアクタンス2端子対網とから成る抵抗終端縦続形回路

〔II〕 変数 p_1 に関して任意の伝送零点をもつリアクタンス2端子対網と，変数

p_2に関して $p_2=\alpha$（$\alpha>0$）に伝送零点をもつリアクタンス2端子対網とから成る抵抗終端縦続形回路

(III) 変数 pi（i＝1，2，・・・，n）に関して任意の伝送零点をもつリアクタンス2端子対網を，p_1，p_2，・・・，p_n の順序で並べた抵抗終端縦続形回路

(IV) 連立伝送零点をもつRichards区間を縦続接続した抵抗終端回路

第5章は，本論文の結論で，得られた結果を総括すると共に，今後解決されるべき問題点について触れている。

以上の各章を構成する内容は，電子通信学会論文誌に発表されたものであるが，一部未発表のものも含む。

関　連　発　表　論　文

本論文の内容に関連した発表論文は次の通りである。

(1) 藤本英昭，石井順也："多変数正実関数の偶関数部における孤立零点の分離"，電子通信学会論文誌，VOL.56—A，No. 10，p. 568（1973）

(2) 藤本英昭："単位円を境界とする正実関数について"，電子通信学会論文誌，VOL.57—A，No10，p.762（1974）

(3) 藤本英昭："分布定数回路の構成に対する一考察"，電子通信学会論文誌，VOL. 57—A，No12，p.899（1974）

(4) 藤本英昭："2変数正実関数の縦続形構成"，電子通信学会論文誌，VOL. J59—A，No5，p. 409（1976）

(5) 藤本英昭，石井順也："集中定数リアクタンス区間とUE区間から成る抵抗終端縦続形回路の構成"，電子通信学会誌文誌，VOL. J59—A，No11，p. 993（1976）

(6) H.Fujimoto, H.Ozaki:"Separation Of Two-Variable Reactance Sections In The Cascade Synthesis Of Multi-Variable Positive Real Functions", Trans. IECE of Japan, VOL.E61, No. 6, p. 433 (1978)

(7) H.Fujimoto, J.Ishii, H.Ozaki:"Multi-Varible Richards' Transformations", Trans.IECE of Japan, VOL. E62, No. 8, p.529 (1979)

目　　次

第１章　序　論 …… 1

1・1　多変数正実関数（行列）の実現問題の工学的意義 …… 1

1・2　本研究に関連する分野の現状と本研究の地位 …… 2

第２章　多変数正（実）関数及び多変数ＵＢ（Ｒ）関数の性質 …… 9

2・1　まえがき …… 9

2・2　多変数正（実）関数とその基本的性質 …… 9

2・3　多変数ＵＢ（Ｒ）関数とその基本的性質 …… 16

2・4　単位抵抗終端１端子対網の必要充分条件 …… 17

2・5　伝送零点と駆動点イミタンスの関係 …… 24

2・6　あとがき …… 30

第３章　多変数正（実）関数の変換 …… 31

3・1　まえがき …… 31

3・2　Ａ（Ｂ）区間の分離 …… 31

3・3　Brune　区間の分離 …… 41

3・4　Richards区間の分離 …… 50

3・4・1　１端子対網に対するRichards及びBott−Duffinの操作 51

3・4・2　多端子対網に対するRichards及びBott−Duffinの操作 57

3・5　Hazony−Youla　区間の分離 …… 62

3・6　Darlington−Ｃ区間の分離 …… 68

3・7　Darlington−Ｄ区間の分離 …… 77

3・8　２変数リアクタンス正関数の実現と
集中分布定数素子混在系への応用 …… 81

3・8・1　２変数リアクタンス正関数の実現 …… 81

3・8・2　集中分布定数素子混在系への応用 …… 84
3・9　あとがき …… 89

第4章　多変数正実関数の抵抗終端縦続形構成 …… 91
4・1　まえがき …… 91
4・2　縦続形回路〔Ⅰ〕 …… 92
4・2・1　実現条件及び構成法 …… 93
4・2・2　集中分布定数素子混在系への応用 …… 104
4・2・3　構　成　例 …… 108
4・3　縦続形回路〔Ⅱ〕 …… 112
4・3・1　実現条件及び構成法 …… 113
4・3・2　集中分布定数素子混在系への応用 …… 119
4・3・3　構　成　例 …… 123
4・4　縦続形回路〔Ⅲ〕 …… 126
4・4・1　実現条件及び構成法 …… 126
4・4・2　集中分布定数素子混在系への応用 …… 133
4・4・3　構　成　例 …… 137
4・5　縦続形回路〔Ⅳ〕 …… 138
4・5・1　実現条件及び構成法 …… 140
4・5・2　構　成　例 …… 143
4・6　あとがき …… 145

第5章　結　論 …… 147

謝　　辞 …… 149

参　考　文　献 …… 150

第１章　序　　論

1・1節　多変数正実関数（行列）の実現問題の工学的意義

回路網理論には解析と合成の二つの立場がある。また，その手法はグラフ理論的基礎に立つ立場と，関数論的基礎に立つ立場の二つに分けられる。後者の関数論的回路網理論の本命はむしろ構成論にあり，本論文の目的はこの立場から多変数正実関数の縦続形構成問題を議論することにある。

従来の１変数回路網理論においては複素周波数 p に対する有理関数（行列）の正実性が，関数（行列）の線形受動回路網による実現可能性と等価となっている。この正実性の概念は可変パラメータを含む集中定数系の設計問題に関連して，多変数有理関数（行列）の場合へ尾崎，嵩[1]（１９５９年）によって拡張され，回路網理論に新しい領域が切り開かれた。そして，この多変数正実性の概念は，その後，同軸管のようなＴＥＭ伝送線路の接合部に容量を挿入した集中定数素子と分布定数素子の混在系の設計問題にも応用できることがAnsell[2]（１９６２年）によって指摘され，その結果，その概念は前述の可変回路網以外の回路モデルをもつことになる。

ところで，これらの回路モデルに対するイミタンスは，

(i)　適当な正実変数変換 $p_i = f_i(p)$ （$i=1, 2, \cdots, n$）により p_i の有理関数（行列）に変換できること，

(ii)　$f_i(p)$ 又は $1/f_i(p)$ は，１端子対イミタンスとして物理的意味をもつこと，

が必要である。そして，このような立場から次節で述べるように多くの人達によって混在系の問題が研究された。

その後，(i)の制約を取り除き，一種類の素子に一つの複素変数 p_i 又は $1/p_i$ を一対一に対応させる観点に立ち，より広い意味での多変数正実性の概念を，尾崎[3][4]（１９７７年）は打ち立てている。これにより，多変数正実関数（行列）の実現問題は，先の混在系をも含むより広い意味での多種類の素子より成る数理モデルの回路網による表現であることが確立された。しかし，その実現問題は，形式的色彩が濃くなることは否めない。むしろ，そのため応用上，集

中定数素子と輻射抵抗を含む系や，流体回路のような3次以上の微分方程式で表わされる系を取り扱うことが可能になったように，[3] 多変数正実性に対する物理的意味づけにその多様性が現われるのが特色と言える。

そして，尾崎，嵩[1]に始まるこのような多変数化の概念は，画像処理などに用いられる多次元ディジタルフイルタ[5][6]，あるいは，非線形微積分方程式で表現される非線形システム[7]～[9]などの他の領域へも影響を与えるようになり，現在では，複素及び（又は）実多変数有理関数（行列）によって特徴づけられるシステムの主要な研究対象の一つにまで発展しており，その実現問題は理論的にも，工学的にも重要な地位を占めるものである。

1·2節　本研究に関連する分野の現状と本研究の地位

多変数正実関数（行列）の回路網による実現問題は，回路構造を特に指定しない場合と，縦続形のようなより具体的な構造を指定する場合とに大きく分けることができる。前者は尾崎，嵩[1]に始まる可変回路網を対象に発展してきた構成思想であり，後者はAnsell[2]に始まる集中分布両素子が混在したマイクロ波フイルタなどの物理的構造の要求から発展してきた構成思想である。以下においてそれらの現状を概説し，本研究の占める位置を明らかにする。

前者については，2変数リアクタンス関数 $w(\mathbf{p})$ $(\mathbf{p}=(p_1, p_2))$ について，$\deg_{p_1} w \geqq 1$，$\deg_{p_2} w = 1$ を満たす場合の実現問題が尾崎，嵩[1]によって考察され，その後，行列の場合を含め $\deg_{p_1} w \geqq 1$，$\deg_{p_2} w \geqq 1$ の場合の実現問題が，古賀[10]によって一般的に解かれた。古賀はこの問題を代数関数論に基づく方法で解いたが，その後Youla[11]がシステム理論的な観点から同じ問題を解いている。尚，最近，この問題を位相幾何学的な立場から Okabe，Ozaki[12]が考察している。そのうえ，彼等は3変数以上で，しかも2次の同次形の場合の実現問題を考察している。[13][14] しかし，2変数以上の一般の正実関数及び行列の実現問題は，後に触れるような純数学的困難さが加わり現時点では未解決の状態である。

一方，後者についても前者と同様，一般的な場合は未解決の状態で，実用的な立場からは研究は緒についたばかりと言え，多くの場合，回路モデルを設定しその実現条件を必要充分の形で求めている。そして，具体的に指定される回

路構造としてはLounelli形[(2)(15)(16)]及び縦続形[(19)〜(44)]の二種類に分類することができる。特に，多変数の場合における抵抗終端縦続形構成は，1変数の場合と同様，縦続区間の伝送零点の分離が基礎となる。

一般に，n変数リアクタンス正2端子対網の出力端子対を単位抵抗で終端したときの駆動点インピーダンスを

$$w=(\mathbf{p})=\psi(\mathbf{p})/\phi(\mathbf{p}) \qquad (\mathbf{p}=(p_1, p_2, \cdots, p_n))$$

とするとき（ψ, ϕ は互いに素な複素係数多項式）

$$\psi(\mathbf{p})\tilde{\phi}_*(\mathbf{p})+\tilde{\psi}_*(\mathbf{p})\phi(\mathbf{p})=2\tilde{f}_*(\mathbf{p})f(\mathbf{p})$$

と書ける右辺の分解式 $\tilde{f}_*(\mathbf{p})f(\mathbf{p})$ （fは複素係数多項式）が存在しなければならない。但し，"〜"及び"＊"は，それぞれfのすべての係数及びすべての変数を，複素共役及び負付号を付した変数で置き換えることを意味する。

そのとき，動作伝送係数Tb(**p**) は，

$$T_b(\mathbf{p})=[\psi(\mathbf{p})+\phi(\mathbf{p})]/2\tilde{f}_*(\mathbf{p})$$

と書け，Tb(**p**)の極がリアクタンス正2端子対網の伝送零点を与える。

従来の1変数抵抗終端縦続形構成においては，

(i) 上述の右辺の分解式が常に成り立つ。

(ii) 相反回路としてwは実現しうる。

(iii) 縦続区間のインピーダンス行列は，伝送零点とその点におけるwの値（無限大のときは，その点での留数）の二つの情報から求まる。

(iv) 伝送零点の分離順序は任意に指定できる。

という周知の事実がある。しかし，多変数の場合には何れも一般に保証されない。

多変数の場合における(i)は，Hilbertの17番目の問題[(17)]に関連する純数学的な問題で，先に触れたように縦続形に限らず一般の実現問題の可能性を左右するものと思われる。このHilbert の問題自体の解はArtin[(18)] によって与えられている。そこで，正実性の条件の下で，この解を翻訳することがKoga[(19)]によって試みられた。しかし，Koga によって与えられた結果は一般には成り立たないことがBose[(20)]及びKuroda[(21)] によって指摘され，この分解問題は今後の重要な課題の一つとして残されている。このような理由によって，多変

数の場合の抵抗終端縦続形構成問題自体においては，この分解式は必要充分条件の一つとして与えられているのが現状である。次の(ii)に関する問題は，1変数の場合における昇次の問題に関連すると思われるが，現在の処明らかでなく一般にジャイレータを許容して議論がなされている。また，(iii)及び(iv)に関する議論が本論文の主な目的であるが，(iii)は縦続形構成に限らず一般の回路構成の一段階を与える重要な位置を占めるもので，縦続区間のインピーダンス行列を求める方法を明らかにすること，それを可能にするための条件，及び，回路構成が有限回の操作で完了するのに必要な次数の低減条件を明らかにすることが目的となる。そして，(iv)の問題は，1変数の場合とは可なり様相を異にする面で，一般に変数間の等価変換が存在しないことを意味しており，例えば，変数 p_i に関する伝送零点をもつ縦続区間と，変数 p_j に関する伝送零点をもつ縦続区間の何方が先に分離できるかの議論，あるいは，それを保証するための条件を与えることに多大の努力が払われていると言っても過言ではない。結局，多変数の場合，(iii)は回路構成の一段階を与えるための局所的な問題であり，(iv)は縦続形で実現されるための大局的な問題と言うことができる。

本論文では，多変数の場合における抵抗終端縦続形構成に関する(i)(iii)及び(iv)の問題点を次の三つの章に分けて考察する。

多変数正（実）関数及び多変数UB（R）関数の性質　（第2章）

多変数正（実）関数の変換　（第3章）

多変数正実関数の抵抗終端縦続形構成　（第4章）

先ず，第2章において多種類の素子より成る1端子対網の駆動点イミタンスが具備しなければならない条件としての多変数正（実）関数及び回路の表現上，駆動点イミタンスと同等な反射係数について多変数UB（R）関数の定義及び構成論に役立つと思われる基本的な既知の定理を紹介する。そして，先に触れた分解式の存在性を明らかにし，その結果を基に駆動点イミタンスと伝送零点の関係及び偶関数部の性質等について述べる。

第3章では，(iii)に関する問題を考察し，1変数の場合の縦続形構成において基本的な役割を演じた相反なA（B），Brune及び非相反なRichards，Hazony–Youla 区間に相当するリアクタンス正2端子対網を提案し，このような縦続区間が正関数とする駆動点イミタンスから分離できるための条件，及び，

分離後の残りの関数が元の関数より低次となるための条件を明らかにする。そして，Richards，Hazony−Youla区間のような縦続区間は，適当な条件の下でDarlington−C，Darlington−D 区間に相当する相反なリアクタンス正2端子対網に変換できることを示す。また，これらの結果の一部を集中分布定数素子混在系の問題へ応用する。

ところで，このような縦続区間が分離されるためには，先に述べた多項式 $\tilde{f}_*(\mathbf{p})$ が更に，

$$\tilde{f}_*(\mathbf{p})=\Pi\tilde{g}_{i*}(p_i)\cdot\Pi\tilde{g}_{ij*}(p_i,p_j)\cdot\Pi\tilde{g}_{ijk*}(p_i,p_j,p_k)\cdots$$

の形に分解される必要がある（g_{ij}, g_{ijk} 等は一般に既約複素Hurwitz多項式）。従って，伝送零点は各変数の無限遠点と $\tilde{g}_{i*}$ の零点としての孤立伝送零点，及び $\tilde{g}_{ij*}$, $\tilde{g}_{ijk*}$ 等の零点としての連立伝送零点の二種類に分類される。これらの内，孤立伝送零点をもつ縦続区間の分離問題が先ず考察され，この問題がほぼ明らかになった時点で，連立伝送零点をもつ縦続区間の分離問題に移行したことは自然な成り行きであろう。

孤立伝送零点の内，虚軸及び正の実軸上の伝送零点をもつA（B），Brune及び，Richards区間が分離できるための条件が，尾崎，嵩[1]及びSaito[22]によってそれぞれ明らかにされた。また，これら以外の孤立伝送零点をもつ縦続区間の分離が，後に述べる縦続形構成に関連して幾人かの人達によって議論されたが，[23]〜[25] 考察されている回路自体がある制約の下で考えられているため，分離問題自体の観点からは一般的とは言えない。筆者と石井[26]は，偶関数部の性質に基づく条件を与え，孤立伝送零点をもつすべての縦続区間の分離問題を統一して議論している。尚，極く最近，筆者等の求めた条件とは異なった条件が報告されている。[27] また，縦続形構成には利用できないが，筆者等が与えた条件を基に，理想ジャイレータ及び理想変成器が取り除き得るための方法がKim，Phan[28]によって考察されている。

一方，連立伝送零点の内，

$$\tilde{g}_{ij*}(p_i,p_j)=-(p_i-\alpha_{ij}p_j)\qquad(\mathrm{Re}\ \alpha_{ij}>0)$$

の零点を連立伝送零点としてもつ2変数の縦続区間の分離問題が，多変数同次形の構成問題に関連して尾崎[3]及び黒田[29]によって考察され，p_i 及び p_j の順素子，一個づつから成るA（B），Brune区間等の興味ある区間が提案された。

同次形の場合，本質的に順素子のみから成る回路モデルを対象にしているため，2変数の連立伝送零点は，上式のように1次式に限定されるのが特徴である。しかし，3変数以上，あるいは，逆素子をも許容する一般の場合には必らずしも各変数に関して1次式で規定されるものではない。そこで，筆者とOzaki[30]は，一方の変数について高次の場合へ拡張し，

$$\widetilde{g}_{ij*}(p_i, p_j) = -[\widetilde{\alpha}_{1*}(p_i)p_j - \widetilde{\alpha}_{2*}(p_i)] = 0$$

（$\alpha_2(p_i)/\alpha_1(p_i)$は一般に正関数）の零点を連立伝送零点としてもつ縦続区間を提案している。その後，筆者，Ishii，Ozaki[31]は，(30)で得られた2変数のRichards区間を含む一般的な多変数Richards区間が分離できるための条件を与えた。尚，筆者等が与えた条件と同様な条件が Ramachandran，Takhar，Swamy[32]によっても得られている。

以上，第3章で述べる縦続区間の分離問題に関する従来の研究の概要を述べ，第3章で対象とする問題点の所在を明らかにした。

第4章では，多変数正実関数が，〔Ⅰ〕p_1に関して任意の伝送零点をもつリアクタンス2端子対網と，p_2 に関して無限遠点（原点）を伝送零点をもつリアクタンス2端子対網とから成る抵抗終端縦続形回路，〔Ⅱ〕p_1 に関して任意の伝送零点をもつリアクタンス2端子対網と，p_2 に関して $p_2=\alpha(\alpha>0)$に伝送零点をもつリアクタンス2端子対網とから成る抵抗終端縦続形回路,〔Ⅲ〕$p_i(i=1, 2, \cdots, n)$ に関して任意の伝送零点をもつリアクタンス2端子対網を，$p_1, p_2, \cdots, p_n$ の順に縦続接続した2端子対網の出力端を抵抗で終端した縦続形回路，〔Ⅳ〕連立伝送零点をもつRichards区間を縦続接続した2端子網の出力端を抵抗で終端した縦続形回路の駆動点イミタンスとして実現できるための条件を必要充分の形で求め，その構成法を明らかにする。そして，〔Ⅰ〕～〔Ⅲ〕の結果を集中分布定数素子混在系の問題へ応用し，マイクロ波フイルタなどに用いられる実際的な回路についてその実現条件を示す。

以下，第4章で述べる縦続形構成に関する従来の研究の概要を述べ，第4章で対象とする問題点の所在を明らかにする。

その研究の多くは，分解式における$\widetilde{f}_*(\mathbf{p})$が，

$$\widetilde{f}_*(\mathbf{p}) = \prod_{i=1}^{n} g_{i*}(p_i) \quad (g_i\text{は実係数多項式}) \qquad (1\cdot1)$$

の形で表わされる特殊な場合に限定されている。特に，$\deg_{p_i} w = 1$ $(i=2, 3, \cdots, n)$，且つ，式（1・1）がそれぞれ

$$\tilde{f}_*(\mathbf{p})=g_{1*}(p_1)\prod_{i=2}^{n}(\alpha_i-p_i) \quad (\alpha_i>0) \qquad (1\cdot2)$$

$$\tilde{f}_*(\mathbf{p})=g_{1*}(p_1)\prod_{i=2}^{n}p_i \quad 又は \quad g_{1*}(p_i) \qquad (1\cdot3)$$

と書けるw（**p**）の特殊な場合がSaito[22]によって始めて詳細に議論され，その結果を基に式（1・2）の場合がScanlan，Rhodes[23]によって，また，式（1・3）の場合がKamp[24]によって考察された。それらによると，伝送零点の分離順序は任意に指定することができないが，図1・1に示すような回路としてw（**p**）が実現できることを明らかにしている。その後，応用及び理論的興味から，式（1・2）及び式（1・3）において，$p_2=p_i$（$i=3,4,\cdots,n$）と置いた2変数の場合，即ち，w（**p**）（$\mathbf{p}=(p_1,p_2)$）が，$\deg_{p_2}w=n-1$であり，且つ，

$$\tilde{f}_*(\mathbf{p})=g_{1*}(p_1)(\alpha-p_2)^{n-1} \quad (\alpha>0) \qquad (1\cdot4)$$

$$\tilde{f}_*(\mathbf{p})=g_{1*}(p_1)p_2^{n-1} \quad 又は \quad g_{1*}(p_1) \qquad (1\cdot5)$$

をそれぞれ満たす場合が考察されるようになる。(22)(23)の結果から式(1・4)は図1・1 (a)の形（但し，$p_2=p_3=\cdots=p_n$）でw（**p**）が実現されるための必要充分条件であるものと当初は予想されていた。[33] しかし，このような条件のみでは不充分であることが指摘され，[25][34] w（**p**）の分母分子の係数間

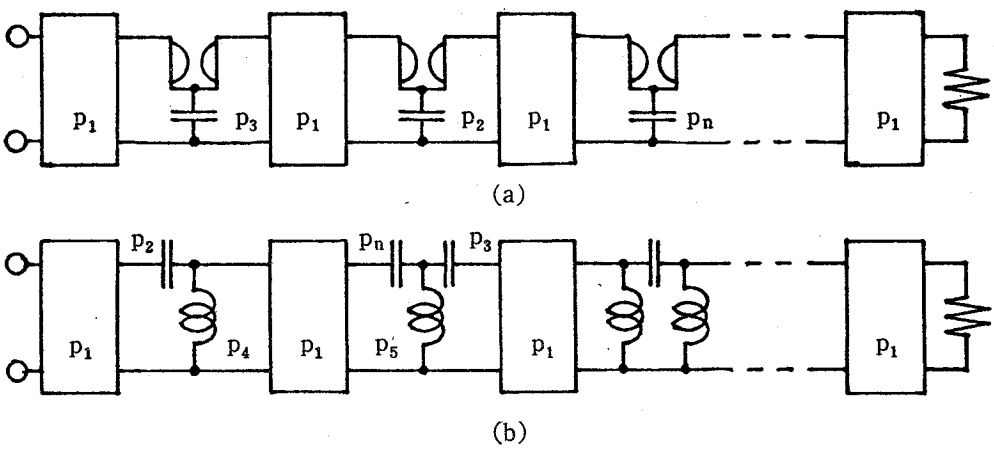


図1・1　文献(23)，(24)で考察された縦続形回路

の関係を規定する付帯条件がYoula，Scanlan，Rhodes[25]によって与えられた。これによって〔Ⅱ〕の縦続形回路の実現問題が解かれたことになる。筆者は先ず式（1・5）を満たす場合を考察し，〔Ⅰ〕の縦続形回路として実現されるための付帯条件を与え，[35]その後，〔Ⅱ〕の問題を考察し，(25)で報告された付帯条件とは別の付帯条件を与えている。[36]次に，$\tilde{f}_*(\mathbf{p})$（$\mathbf{p}=(p_1, p_2 \cdots, p_n)$）が，

$$\tilde{f}_*(\mathbf{p})=\prod_{i=1}^{n} g_{i*}(p_i) \qquad (1\cdot 6)$$

で表わされ，且つ，$\deg_{p_i} w \geqq \deg_{p_i} g_i$ を満たす$w(\mathbf{p})$を〔Ⅲ〕の縦続形回路として実現するための付帯条件を求める問題については，式（1・6）の$g_{i*}(p_i)$が特に，

$$g_{i*}(p_i)=(\alpha_i-p_i)^{\rho_i} \quad (\alpha_i>0,\ \deg_{p_i} w=\rho_i+\sigma_i)$$

と書ける特殊な場合が幾人かの人達によって考察されている。それらは，$\sigma_i=0$，$\rho_i \geqq 1$[37][38]の場合，$\sigma_{2k+1}=\rho_{2k}=0$，$\sigma_{2k}=\rho_{2k+1}=1$[39]の場合，及び，$\sigma_i=\rho_i=1$[40][41]の場合である。筆者と石井[26]は，$g_{i*}(p_i)$の零点が任意，且つ，$\deg_{p_i} g \geqq 1$の場合へ一般化し，第2章で明らかにした偶関数部の性質に基づく付帯条件を与え，〔Ⅲ〕の問題を解いている。尚，最近，Ahmad，Reddy，Ramachandran，Swamy[42]は，同じ問題を考察し，筆者等の条件とは別の条件を求めている。

以上が，分解式の右辺が式（1・1）の形で表わされる場合，即ち，伝送零点が孤立点から成る場合に対する従来の研究の概要である。

一方，連立伝送零点から成る縦続形構成については，$\tilde{f}_*(\mathbf{p})$（$\mathbf{p}=(p_1, p_2)$）が，

$$\tilde{f}_*(\mathbf{p})=-(p_1+\alpha_1 p_2)^{2k}(p_1+\alpha_2 p_2)^{2(k+1)} \quad (\alpha_1, \alpha_2>0)$$

と書ける$w(\mathbf{p})$（$\deg_{p_i} w=2k+1$ $(i=1, 2)$）より，$\tilde{f}_*(\mathbf{p})=0$の零点を連立零点としてもつ2変数のA，B区間を交互に分離し，$w(\mathbf{p})$を梯子形回路として実現するための付帯条件が，Ramachandran，Rao[43]によって与えられている。尚，筆者，Ishii，Ozaki[44]は，$\tilde{f}_*(\mathbf{p})$が一般にn（≧1）変数の既約実係数多項式の積で表わされる場合について，〔Ⅳ〕の形で$w(\mathbf{p})$が実現できるための条件を求めている。

以上，この分野に関連する従来の研究の概要を述べ，本論文の対象とする問題点を明らかにした。

第2章　多変数正(実)関数及び多変数UB(R)関数の性質

2·1節　まえがき

本章は，多種類の素子より成る1端子対網の駆動点イミタンスが具備しなければならない条件としての多変数正(実)関数，及び，回路の表現上，駆動点イミタンスと同等な反射係数について同様に多変数UB(R)(Unimodular Bounded (Real))関数の定義を紹介し，第3章，第4章の議論に必要と思われる基本的な既知の定理及び多変数リアクタンス正2端子対網の出力端子対を単位抵抗で終端したときの駆動点イミタンスが具備せねばならない条件等を述べる。

本論文では，n(≧1)複素変数 $p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n$，あるいは，(n+m)複素変数 $p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_m$ 等の有理関数fを考察するが，表記の簡単化のために複素変数の組をそれぞれ，

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n) \qquad \mathbf{q} = (q_1, q_2, \cdots\cdots, q_m)$$

のようにその左辺で記し，fをf($\mathbf{p}$)，f($\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$)等で表わす。また，変数 p_i の複素平面 $\mathbb{C}[p_i]$ の右半面あるいは虚軸等を次のように表わす。

$$\mathcal{D}^+(p_i) = \{p_i : \mathrm{Re}\ p_i > 0\}, \quad \mathcal{D}^0(p_i) = \{p_i : \mathrm{Re}\ p_i = 0\}$$
$$\overline{\mathcal{D}}(p_i) = \{p_i : \mathrm{Re}\ p_i \geqq 0\}$$

そして，$\mathbb{C}[p_i]$ のn個の直積を $\mathbb{C}[\mathbf{p}]$ で記し，その座標内の点を $\mathbf{p}_0$，$\mathbf{p}^0$ 等で表わす。但し，

$$\mathbf{p}_0 = (p_{10}, p_{20}, \cdots\cdots, p_{n0}), \qquad \mathbf{p}^0 = (p_1^0, p_2^0, \cdots\cdots, p_n^0)$$

2·2節　多変数正(実)関数とその基本的性質

〈定義1〉[1]

w($\mathbf{p}$)が次の条件を満たすとき，w($\mathbf{p}$)を$\mathbf{p}$の正(正実)関数とよぶ。[+2-1]

(i) w($\mathbf{p}$)は$\mathbf{p}$の複素(実)係数有理関数である。[+2-2]

(ii) 開領域$\mathcal{D}^+(\mathbf{p})$において，Re w($\mathbf{p}$)≧0 である。

ここで，$\mathcal{D}^{+}(\mathbf{p})=\mathcal{D}^{+}(p_1)\times\mathcal{D}^{+}(p_2)\times\cdots\cdots\times\mathcal{D}^{+}(p_n)$。尚，記号“×”は直積を意味する。

〈定義 2 〉[1]

正（正実）関数 w（**p**）が非真性特異点[45]を除く $\mathcal{D}^{0}$（**p**）において

$$\mathrm{Re}\ w(\mathbf{p})=0$$

を満たすとき，w（**p**）を**p**のリアクタンス正（リアクタンス）関数とよぶ。

ここで，$\mathcal{D}^{0}(\mathbf{p})=\mathcal{D}^{0}(p_1)\times\mathcal{D}^{0}(p_2)\times\cdots\cdots\times\mathcal{D}^{0}(p_n)$。

〈定義 3 〉

$\mathcal{C}$[**p**]内の領域$\mathcal{D}$で定義された関数 w（**p**）が各変数毎に正則であるとき，w（**p**）は$\mathcal{D}$において正則であると言う。[+2-3] ここで，各変数毎に正則であるとは，$\mathcal{D}$の各点において n 個の変数の内，（n－1）個を固定して残りの 1 変数の関数とみなしたとき，その変数について

$$(\partial/\partial p_i)\,w(\mathbf{p})\qquad(i=1,2\cdots\cdots n)$$

が存在する場合を言う。

〈定義 4 〉[3][29]

n（≧1）個の変数の組**p**，及び w（**p**，**q**）に対し，

$$w(\mathbf{p}_0,\mathbf{q})\underset{\mathbf{q}}{\equiv}0\quad 又は\quad w(\mathbf{p}_0,\mathbf{q})\underset{\mathbf{q}}{\equiv}\infty$$

が成り立ち，且つ，n≧2 のとき，点 $\mathbf{p}=\mathbf{p}_0$ をそれぞれ**p**の連立零点又は連立極とよぶ。特に，n＝1 のとき，即ち，一つの変数 $\mathbf{p}=(p_1)$ のみについて上記の等式が成り立つとき，点 $p_1=p_{10}$（$=\mathbf{p}_0$）をそれぞれ p_1 の孤立零点又は孤立極とよぶ。ここで，記号“$\underset{\mathbf{q}}{\equiv}$”は，**q**に無関係に等号が成り立つことを意味する。

〈定義 5 〉[22]

有理関数 f（**p**）の変数 p_i に対する次数を次のように定義する。即ち，f（**p**）

＋2－1：　誤解の恐れがない限り，接頭語“**p**の”を省略する。

＋2－2：　（　）同士が対応する。

＋2－3：　Hartogs の正則性定理[45]自体を，本論文では正則の定義としている。

の変数 p_i を除く（n－1）個の変数を任意の点に固定し，p_i の有理関数 f の分母と分子（分母子は互いに素として）の次数の大きい方を言い，$\deg_{p_i} f$ で記す。

〔定理2・1〕[+2-4]

$w(\mathbf{p}) = \psi(\mathbf{p})/\phi(\mathbf{p})$（$\psi$，$\phi$ は多項式）を正関数とするとき，次の性質を有する。

(1)[(1)] $1/w(\mathbf{p})$ は正関数である。

(2)[(1)] 開領域 $\mathcal{D}^+(\mathbf{p})$ において正則である。

(3)[(1)] 開領域 $\mathcal{D}^+(\mathbf{p})$ 内に零点及び非真性特異点をもたない。

(4)[(1)] $|\deg_{p_i}\psi - \deg_{p_i}\phi| \leqq 1 \qquad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$

(5) 別に n 個の正関数 $p_i = f_i(\mathbf{q})$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ が存在するとき，

$$w(f_1(\mathbf{q}), f_2(\mathbf{q}), \cdots\cdots\cdots, f_n(\mathbf{q}))$$

は $\mathbf{q}$ の正関数である。

(6) $\mathcal{D}^0(\mathbf{p})$ において，$\mathrm{Re}\ w(\mathbf{p}) \geqq 0$ である。

（定理2・1(6)の証明） 正関数 $w(\mathbf{p})$ は定理2・1(2)により $\mathcal{D}^+(\mathbf{p})$ において正則であるから，指数関数 $\exp[-w(\mathbf{p})]$ も同じ領域で正則である。$\mathcal{D}^0(\mathbf{p})$ における非真性特異点を除く $\mathcal{D}^+(\mathbf{p})$ の境界を $\partial\mathcal{D}^+$ とすると，絶対値最大値の原理[(45)]から，

$$\max\{|\exp[-w(\mathbf{p})]|\}_{\partial\mathcal{D}^+} > |\exp[-w(\mathbf{p})]|_{\mathcal{D}^+(\mathbf{p})}$$

となる。そこで，

$$\max\{|\exp[-w(\mathbf{p})]|\}_{\partial\mathcal{D}^+} = \min\{\exp[\mathrm{Re}\ w(\mathbf{p})]\}_{\partial\mathcal{D}^+}$$

に注意すると，次の不等式が得られる。

$$\min\{\mathrm{Re}\ w(\mathbf{p})\}_{\partial\mathcal{D}^+} < \{\mathrm{Re}\ w(\mathbf{p})\}_{\mathcal{D}^+(\mathbf{p})}$$

（証明終り）

+2－4： 以下，特に断わらない限り“正”及び“リアクタンス正”は，それぞれ“正実”及び“リアクタンス”で置き換えることができる。

〔定理 2・2 〕

正関数 $w(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ に対し，次の性質を有する。

(1) $\mathrm{Re}\, w(\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0) = 0$ （ $(\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0) \in \mathcal{D}^+(\mathbf{p}) \times \mathcal{D}^+(\mathbf{q})$ ）であれば，

$$w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv jc \qquad (\ c：実定数^{+2-5} \quad j = \sqrt{-1}\ )$$

(2) $\mathrm{Re}\, w(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}^0) = 0$ （ $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}^0) \in \mathcal{D}^0(\mathbf{p}) \times \mathcal{D}^+(\mathbf{p})$ ）であれば，

(i)[1] $$w(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} jc \qquad (\ c：実定数\ )$$

(ii) $\mathbf{q}$ に無関係に次の不等式が成り立つ。

$$(\partial / \partial p_i)\, w(\mathbf{p}, \mathbf{q})\big|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_0} > 0 \quad (\ i = 1, 2, \cdots\cdots, n\ )$$

（定理 2・2 (2)－(ii) の証明） 点 $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}^0) \in \mathcal{D}^0(\mathbf{p}) \times \mathcal{D}^+(\mathbf{q})$ において，$\mathrm{Re}\, w(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}^0) = 0$ であれば，$w(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} jc$ が成り立つから，

$$w_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - jc$$

で $w_0(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ を定義すると，$w_0(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ は正関数であることは明白。$\mathbf{p}$ の中の一つの変数，p_k を除く残りの p_i を p_{i0} に，そして $\mathbf{q}$ を $\mathbf{q}^0$ に固定すると，p_k の正関数 $1/w_0(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ は点 $p_k = p_{k0}$ を極としてもつ。従って，

$$\frac{\partial}{\partial p_k}\, w(\ p_{10}, \cdots\cdots, p_{k-1\,0}, p_k, p_{k+1\,0}, \cdots\cdots, p_{n0}, \mathbf{q}^0\ )\big|_{p_k = p_{k0}}$$

$$= 1 \Big/ \Big[\lim_{p_k \to p_{k0}} (\ p_k - p_{k0}\ ) \Big/ w_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}^0) \Big] \Big|_{\substack{p_i = p_{i0} \\ i \neq k}} > 0$$

が成り立つ。上式は，開領域 $\mathcal{D}^+(\mathbf{q})$ において実数値を採る関数とみなすと，$\mathbf{q}$ の各変数毎に $\mathcal{D}^+(q_j)$ （ $j = 1, 2, \cdots\cdots, m$ ）で正則であるから，$\mathbf{q}$ に無関係である。

（証明終り）

次の定理は，古賀[10]によって与えられた 2 変数有理関数の正性の判定法で，1 変数の場合における Brune の判定法の拡張に当るものである。古賀の方法以

+2−5： $w(\mathbf{p})$ が正実関数のときは，$c \equiv 0$ である。

外にOkabe，Ozaki[57]の方法があるが，1変数の場合において周知の宮田の判定法を多変数の場合に拡張したものを2・4節で述べる。

［定理2・3］[10]

有理関数$w(\mathbf{p})$（$\mathbf{p}=(p_1, p_2)$）が正関数であるための必要充分条件は次の三つである。

(i) 開領域$\mathcal{D}^+(\mathbf{p})$において，$w(\mathbf{p})$は正則である。

(ii) 任意の$p_{20}\in\mathcal{D}^0(p_2)$に対し，$p_1$の有理関数$w(\mathbf{p})|_{p_2=p_{20}}$は次の条件を満たす。(イ)開領域$\mathcal{D}^+(p_1)$において，$w(\mathbf{p})|_{p_2=p_{20}}$は正則である。(ロ)極を除く$\mathcal{D}^0(p_1)$において，$\mathrm{Re}\ w(\mathbf{p})|_{p_2=p_{20}}\geqq 0$である。(ハ)$\mathcal{D}^0(p_1)$における極の位数は1位で，その留数は正である。+2-6

(iii) $w(\mathbf{p})$の$\mathcal{D}^0(p_1)$におけるp_1の孤立極の位数は，1位で，その留数はp_2に無関係な正定数である。

定理2・3における(iii)は，次の定理により一般に保証される。

［定理2・4］[1]

(1) 正関数$w(p_1, \mathbf{q})$が，固定された点$(p_{10}, \mathbf{q}^0)\in\mathcal{D}^0(p_1)\times\mathcal{D}^+(\mathbf{q})$において，$w(p_{10}, \mathbf{q}^0)=\infty$であるとき，次の(i)及び(ii)が成り立つ。

(i) 点$p_1=p_{10}$は，$w(p_1, \mathbf{q})$の位数1の孤立極である。

(ii) 孤立極p_{10}における$w(p_1, \mathbf{q})$の留数は，$\mathbf{q}$に無関係な正定数である。

(2) $p_{10}\in\mathcal{D}^0(p_1)$（$|p_{10}|<\infty$，$p_{10}\neq 0$）を正実関数$w(p_1, \mathbf{q})$の$p_1$の孤立極とすれば

(i) 点$p_1=p_{10}^*$も$w(p_1, \mathbf{q})$のp_1の孤立極で，その位数は1位である。

(ii) 孤立極p_{10}^*における留数は，孤立極p_{10}における留数に等しい。

ここで，肩符“＊”は，複素共役を意味する。

［定理2・5］

$w(\mathbf{p}, \mathbf{q})$（$\mathbf{p}=(p_1, p_2)$）を$\mathcal{D}^0(p_i)$（$i=1, 2$）に孤立極をもたない正関数とする。また，固定された点$\mathbf{q}^0\in\mathcal{D}^+(\mathbf{q})$に対し，既約形$w(\mathbf{p}, \mathbf{q}^0)$の分母における既約多項式因数の一つを零に置くことによって定義される代数関数の

+2-6：(イ)～(ハ)は，1変数の場合のBruneによる正性の判定条件である。

枝関数の一つを $h(p_1)$ とする。もし，ほとんどすべての点 $p_{10} \in \mathcal{D}^0(p_1)$ において

$$\mathrm{Re}\ h(p_{10}) = 0,\ 且つ,\ w(\mathbf{p}, \mathbf{q}^0)\,|_{p_1 = p_{10},\ p_2 = h(p_{10})} = \infty$$

であれば，$h(p_1)$ について次の (i) ～ (iii) が成り立つ。

(i) $\mathcal{D}^+(p_1)$ において，$\mathrm{Re}\ h(p_1) < 0$ である。

(ii) $w(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ の分母は，$\mathbf{q}$ に無関係な因数 $(p_2 - h(p_1))$ をもち，その因数は唯一つである。

(iii) 代数特異点を除く $\mathcal{D}^0(p_1)$ において，$\mathbf{q}$ に無関係に

$$\lim_{p_2 \to h(p_1)} (p_2 - h(p_1))\, w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \geqq 0$$

定理 2・5 は，定理 2・4 (1)の拡張に相当するもので，定理 2・5 において p_1 を適当な $\mathcal{D}^0(p_1)$ の点に固定すれば，定理 2・4 (1)の場合になる。尚，定理 2・4 の意味の極，即ち，虚軸上の孤立極が存在すれば，変数 p_1 の縦続区間であるA又はB区間が分離できる。また，定理 2・5 に示すような連立極について，ある条件の下で同様な縦続区間を分離することが可能である。これらについては次章の定理 3・1 及び定理 3・2 で述べる。

［定理 2・6 ］

リアクタンス正関数 $w(\mathbf{p})$ 及び多項式 $f(\mathbf{p})$ をそれぞれ次のように定義する。

$$w(\mathbf{p}) = \psi(\mathbf{p}) / \phi(\mathbf{p}), \qquad f(\mathbf{p}) = \psi(\mathbf{p}) + \phi(\mathbf{p})$$

そのとき，次の(1)(2)が成り立つ。但し，ψ，ϕ は，互いに素な多項式とする。

(1) $$w(\mathbf{p}) = -\widetilde{w}_*(\mathbf{p})$$

(2) (i) $f(\mathbf{p})$ は，開領域 $\mathcal{D}^+(\mathbf{p})$ に零点をもたない。

(ii) $f(\mathbf{p})$ は，$\mathcal{D}^0(p_i)$ ($i = 1, 2, \cdots\cdots, n$) に孤立零点をもたない。

(iii) $f(\mathbf{p})$ が，$\mathcal{D}^0(\mathbf{p})$ において零点をもてば，それは連立零点で，$w(\mathbf{p})$ の不確定特異点[45]に起因するものに限られる。

ここで，記号“～”は，$w(\mathbf{p})$ の係数をその複素共役で，また脚符“ $*$ ”は，$\mathbf{p}$ におけるすべての p_i を $-p_i$ で置き換えることを意味する。

〈定義 6 〉

複素係数多項式 f (**p**) が，開領域$\mathcal{D}^{+}$(**p**) において，

$$f(\mathbf{p}) \neq 0$$

を満たすとき， f (**p**) は **p** の複素 Hurwitz 多項式とよぶ。特に，複素 Hurwitz 多項式のすべての係数が正であるとき，それを実 Hurwitz 多項式とよぶ。

〔定理 2・7 〕

$g_i(\mathbf{p})$ (i = 1, 2, ……, k) は既約複素 Hurwitz 多項式で，且つ，

$$g_i(\mathbf{p}) \not\equiv \varepsilon_i \tilde{g}_{i*}(\mathbf{p}) \qquad (\varepsilon_i = \pm 1) \qquad (2\cdot 1)$$

を満たすものとする。そのとき，

$$w(\mathbf{p}) = \frac{\prod_{i=1}^{k} g_i(\mathbf{p}) - \prod_{i=1}^{k} \varepsilon_i g_{i*}(\mathbf{p})}{\prod_{i=1}^{k} g_i(\mathbf{p}) + \prod_{i=1}^{k} \varepsilon_i \tilde{g}_{i*}(\mathbf{p})}$$

で定義される w (**p**) はリアクタンス正関数である。+2−7

（定理 2・7 の証明） 有理関数 $\varepsilon_i g_{i*}(\mathbf{p})/g(\mathbf{p})$ は開領域$\mathcal{D}^{+}$(**p**) において正則，且つ，不確定時異点を除く$\mathcal{D}^{0}$(**p**) において，

$$|\varepsilon_i \tilde{g}_{i*}(\mathbf{p})/g_i(\mathbf{p})| = 1 \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots, k)$$

が成立する。従って，絶対値最大値の原理から$\mathcal{D}^{+}$(**p**) で

$$|\varepsilon_i \tilde{g}_{i*}(\mathbf{p})/g_i(\mathbf{p})| \leqq 1$$

となる。それ故，$\mathcal{D}^{+}$(**p**) において

$$\mathrm{Re}\left\{1 + \prod_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon_i \tilde{g}_{i*}(\mathbf{p})}{g_i(\mathbf{p})}\right\} \geqq 1 - \left|\prod_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon_i \tilde{g}_{i*}(\mathbf{p})}{g_i(\mathbf{p})}\right|^2 \geqq 0$$

が成立する。そこで，

$$w_0(\mathbf{p}) = 1/\{1 + w(\mathbf{p})\}$$

+2−7 ： “複素”及び“リアクタンス正”は，それぞれ“実”及び“リアクタンス”で置き換えることができる。

で定義される$w_0(\mathbf{p})$を考えると，上述より$w_0(\mathbf{p})$は正関数である。また$w(\mathbf{p})$は，$w(\mathbf{p}) \equiv -\widetilde{w}_*(\mathbf{p})$を満たすことは明白。それ故，定理の結果を得る。

（証明終り）

2·3節　多変数UB（R）関数とその基本的性質

〈定義7〉

次の条件を満たす$s(\mathbf{p})$を$\mathbf{p}$のUB（UBR）関数とよぶ。

(i)　$s(\mathbf{p})$は，複素（実）係数有理関数である。

(ii)　開領域$\mathcal{D}^+(\mathbf{p})$において，$|s(\mathbf{p})| \leqq 1$である。

〈定義8〉

UB（UBR）関数$s(\mathbf{p})$が不確定特異点を除く$\mathcal{D}^0(\mathbf{p})$において，$|s(\mathbf{p})| \equiv 1$を満たすとき，$s(\mathbf{p})$を$\mathbf{p}$のPara－UB（Para－UBR）関数とよぶ。

［定理2·8］

(1)　有理関数$s(\mathbf{p})$が，UB関数であるための必要充分条件は，

$$w(\mathbf{p}) = \frac{\alpha + \alpha^* s(\mathbf{p})}{1 - s(\mathbf{p})} \qquad (\mathrm{Re}\ \alpha > 0) \qquad (2\cdot2)$$

で定義される$w(\mathbf{p})$が正関数なることである。

(2)　(1)における“UB”及び“正”は，それぞれ“Para－UB”及び“リアクタンス正”で置き換えることができる。

(3)　式（2·2）における複素定数αを，$\alpha = \alpha^*$とすれば，(1)における“UB”及び“正”は，それぞれ“UBR”及び“正実”で置き換えることができる。また，この置き換えにおける“UBR”及び“正実”は，それぞれ“Para－UBR”及び“リアクタンス”で置き換えることができる。

（定理2·8の証明）

$$\mathrm{Re}\ w(\mathbf{p}) = \frac{1 - |s(\mathbf{p})|^2}{|1 - s(\mathbf{p})|^2} \cdot \mathrm{Re}\ \alpha$$

$$s(\mathbf{p})\, s^*(\mathbf{p}) - 1 = -\frac{4\,\mathrm{Re}\ w(\mathbf{p})}{|w(\mathbf{p}) + \alpha^*|^2} \cdot \mathrm{Re}\ \alpha$$

より定理の結果を直ちに得ることができる。　（証明終り）

〔定理 2・9 〕

(1) 有理関数 s (**p**) が，UB関数であるためには，s (**p**) が次の条件を満たすことが必要充分である。

(i) s (**p**) は，開領域 $\mathcal{D}^{+}$ (**p**) において正則である。

(ii) 不確定特異点を除く $\mathcal{D}^{0}$ (**p**) において，$|s(\mathbf{p})| \leqq 1$ である。

(2) (1)における“UB”及び“$|s(\mathbf{p})| \leqq 1$”は，それぞれ“Para－UB”及び“$|s(\mathbf{p})| = 1$”で置き換えることができる。

上の定理は，定理 2・8 より容易に得られるので，証明は省略する。

〔定理 2・10 〕

(1) s (**p**) をUB関数とすれば，次の w (**p**) は正関数である。

$$w(\mathbf{p}) = \alpha + s(\mathbf{p}) \qquad (\mathrm{Re}\ \alpha \geqq 1)$$

(2) g_i (**p**) ($i = 1, 2, \cdots\cdots, k$) は，式 (2・1) を満たす既約複素Hurwitz多項式とする。そのとき，次の s (**p**) はPara－UB関数である。

$$s(\mathbf{p}) = \frac{\prod_{i=1}^{k} \varepsilon_i \widetilde{g}_{i*}(\mathbf{p})}{\prod_{i=1}^{k} g_i(\mathbf{p})}$$

2・4節　単位抵抗終端1端子対網の必要充分条件

正関数 w (**p**) が，互いに素な多項式 ψ (**p**)，ϕ (**p**) の商

$$w(\mathbf{p}) = \psi(\mathbf{p}) / \phi(\mathbf{p})$$

で表わされているとき，定理 2・8 (1)により

$$s(\mathbf{p}) = \frac{\psi(\mathbf{p}) - \alpha\ \phi(\mathbf{p})}{\psi(\mathbf{p}) + \alpha^{*} \phi(\mathbf{p})} \qquad (\mathrm{Re}\ \alpha > 0)$$

はUB関数である。従って，w (**p**) の $\mathcal{D}^{0}$ (**p**) における不確定特異点を除けば，定理 2・9 (1)の条件 (ii) より

$$1 - |s(\mathbf{p})|^{2} =$$

$$\frac{4\ \mathrm{Re}\ \alpha}{|\psi(\mathbf{p}) + \alpha^{*} \phi(\mathbf{p})|^{2}} \left[\psi(\mathbf{p}) \widetilde{\phi}_{*}(\mathbf{p}) + \widetilde{\psi}_{*}(\mathbf{p}) \phi(\mathbf{p}) \right] \geqq 0$$

が得られる。上記の除外点は，$\psi(\mathbf{p})$，$\phi(\mathbf{p})$ の共通零点であるから，それを含めて，$\mathcal{D}^0(\mathbf{p})$ において

$$\psi(\mathbf{p})\,\tilde{\phi}_*(\mathbf{p}) + \tilde{\psi}_*(\mathbf{p})\,\phi(\mathbf{p}) \geqq 0 \qquad (2\cdot3)$$

が成り立つ。簡単化のために $\alpha=1$ と置くと，1変数の場合における宮田の正性の判定法の拡張に当る次の定理が直ちに得られる。

［定理 2・11］

$\psi(\mathbf{p})$，$\phi(\mathbf{p})$ を互いに素な多項式とする。$w(\mathbf{p})=\psi(\mathbf{p})/\phi(\mathbf{p})$ が正関数であるための必要充分条件は次の二つである。

(i) $f(\mathbf{p})=\psi(\mathbf{p})+\phi(\mathbf{p})$ で $f(\mathbf{p})$ を定義するとき，$f(\mathbf{p})$ は定理2・6(2)－(ii)及び，$f(\mathbf{p}) \neq \varepsilon \tilde{f}_*(\mathbf{p})$（$\varepsilon=\pm1$）を満たす複素Hurwitz多項式である。

(ii) $\mathcal{D}^0(\mathbf{p})$ において，式（2・3）が成立する。

［定理 2・12］

正関数 $w(\mathbf{p})$ を次のように互いに素な多項式 $\psi(\mathbf{p})$，$\phi(\mathbf{p})$ の商で表わす。

$$w(\mathbf{p}) = \frac{\psi(\mathbf{p})}{\phi(\mathbf{p})} = \frac{\psi_1(\mathbf{p})+\psi_2(\mathbf{p})}{\phi_1(\mathbf{p})+\phi_2(\mathbf{p})}$$

但し，$\psi_1(\mathbf{p})=[\psi(\mathbf{p})+\varepsilon\tilde{\psi}_*(\mathbf{p})]/2 \qquad \psi_2(\mathbf{p})=[\psi(\mathbf{p})-\varepsilon\tilde{\psi}_*(\mathbf{p})]/2$

$\phi_1(\mathbf{p})=[\phi(\mathbf{p})+\varepsilon\tilde{\phi}_*(\mathbf{p})]/2 \qquad \phi_2(\mathbf{p})=[\phi(\mathbf{p})-\varepsilon\tilde{\phi}_*(\mathbf{p})]/2$

（2・4）

そのとき，次の(1)～(3)が成り立つ。

(1) 次式で定義される $w_0(\mathbf{p})$ は正関数である。

$$w_0(\mathbf{p}) = \frac{\psi_1(\mathbf{p})+\phi_2(\mathbf{p})}{\phi_1(\mathbf{p})+\psi_2(\mathbf{p})}$$

(2) $z(\mathbf{q})=\mu(\mathbf{q})/\nu(\mathbf{q})$（$\mu$，$\nu$ は互いに素な多項式）を正関数（リアクタンス正関数）すれば，次の $w_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$ も正関数（リアクタンス正関数）である。+2−8

+2−8： $\mathbf{q}=(q_1, q_2, \cdots\cdots, q_m)$ の一部あるいは全部の変数について，$q_j=p_{t_j}$（$j=1, 2, \cdots\cdots, r$．　$r \leqq m$）と置いてもよい。

$$w_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{\psi_1(\mathbf{p})\,\mu(\mathbf{q}) + \psi_2(\mathbf{p})\,\nu(\mathbf{q})}{\phi_2(\mathbf{p})\,\mu(\mathbf{q}) + \phi_1(\mathbf{p})\,\nu(\mathbf{q})}$$

(3) 恒等的に零を含めて次の有理関数は，すべてリアクタンス正関数である。

$$\psi_2(\mathbf{p})/\psi_1(\mathbf{p}),\quad \phi_1(\mathbf{p})/\phi_2(\mathbf{p}),\quad \psi_1(\mathbf{p})/\phi_2(\mathbf{p}),\quad \phi_1(\mathbf{p})/\psi_2(\mathbf{p})$$

（定理 2・12 の証明）

(1)の証明： $s(\mathbf{p})$，$s_0(\mathbf{p})$ を次のように定義する。

$$s(\mathbf{p}) = \frac{w(\mathbf{p}) - 1}{w(\mathbf{p}) + 1},\qquad s_0(\mathbf{p}) = \frac{w_0(\mathbf{p}) - 1}{w_0(\mathbf{p}) + 1}$$

定理 2・8 (1)より，$s(\mathbf{p})$ はＵＢ関数である。一方，$s_0(\mathbf{p})$ は $\mathcal{D}^0(\mathbf{p})$ において，$|s_0(\mathbf{p})| = |s(\mathbf{p})|$ となる。しかも，$s_0(\mathbf{p})$ の分母は，$s(\mathbf{p})$ のそれに等しいから，定理 2・9 (1)により $s_0(\mathbf{p})$ もＵＢ関数となる。それ故，$w_0(\mathbf{p})$ は正関数である。

(2)の証明： $w_0(\mathbf{p})$ を(1)で得た正関数とする。そのとき，$w_0(\mathbf{p}) + z^{-1}(\mathbf{q})$ も正関数である。従って，多項式

$$[\,\psi_1(\mathbf{p}) + \phi_2(\mathbf{p})\,]\,\mu(\mathbf{q}) + [\,\psi_2(\mathbf{p}) + \phi_1(\mathbf{p})\,]\,\nu(\mathbf{q})$$

は複素 Hurwitz 多項式である。そこで，

$$s_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{w_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) - 1}{w_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) + 1}$$

とすると，$s_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$ は開領域 $\mathcal{D}^+(\mathbf{p}) \times \mathcal{D}^+(\mathbf{q})$ において正則となる。そのうえ不確定特異点を除く $\mathcal{D}^0(\mathbf{p}) \times \mathcal{D}^0(\mathbf{q})$ で，

$$|s_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) - 1|$$
$$= -\frac{4\,[\,\psi(\mathbf{p})\,\tilde{\phi}_*(\mathbf{p}) + \tilde{\psi}_*(\mathbf{p})\,\phi(\mathbf{p})\,]\ \mathrm{Re}\ z(\mathbf{q})}{|\,\phi_2(\mathbf{p})\,z(\mathbf{q}) + \phi_1(\mathbf{p})\,|^2} \leqq 0$$

が成り立つ。それ故，$s_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$ はＵＢ関数である。結局，定理 2・8 (1)から(2)の結果が得られる。

尚，$z(\mathbf{q})$ がリアクタンス正関数であるとき，上式及び定理 2・8 (2)より明白。

(3)の証明： (2)において，$z(\mathbf{q})=q_1$ と置き，リアクタンス正関数 $w_1(\mathbf{p},q_1)$，$1/w_1(\mathbf{p},q_1)$ の q_1 に関する零点について考えれば，前半の二つが得られる。また，後半の二つは，$w_1(\mathbf{p},q_1)|_{q_1=0}$，$w_1(\mathbf{p},q_1)|_{q_1=\infty}$ より得られる。

（証明終り）

〈定義 9 〉[19]

$\mathbf{p}$ の複素（実）係数有理関数を要素とする $r\times r$ の行列 $W(\mathbf{p})$ が，任意の $1\times r$ 複素行列 x に対し，開領域 $\mathcal{D}^+(\mathbf{p})$ において

$$x\left[W(\mathbf{p})+W_T^*(\mathbf{p})\right]x_T^* \geqq 0$$

を満たすとき，$W(\mathbf{p})$ を $\mathbf{p}$ の正（正実）行列とよぶ。ここで，脚符“T”は行列の転置を，また，肩符“$*$”は各要素をその複素共役で置き換えることを意味する。

〈定義 10 〉

正（正実）行列 $W(\mathbf{p})$ が，非真特性特異点を除く $\mathcal{D}^0(\mathbf{p})$ において，

$$x\left[W(\mathbf{p})+W_T^*(\mathbf{p})\right]x_T^* \equiv 0$$

を満たすとき，$W(\mathbf{p})$ を $\mathbf{p}$ のリアクタンス正（リアクタンス）行列とよぶ。

［定理 2・13 ］

$W(\mathbf{p})$ をリアクタンス正行列とすると，次式が成立する。

$$W(\mathbf{p}) \equiv -\widetilde{W}_*(\mathbf{p})$$

ここで，記号“～”は，$W(\mathbf{p})$ の各要素における係数をその複素共役で置き換えることを意味する。

［定理 2・14 ］[19]

(1) $r\times r$ の有理行列 $W(\mathbf{p})$ が正行列であるための必要充分条件は，

$$S(\mathbf{p})=\left[W(\mathbf{p})-1_r\right]\left[W(\mathbf{p})+1_r\right]^{-1} \qquad (2\cdot5)$$

が次の (i) 及び (ii) を満たすことである。

(i) $S(\mathbf{p})$ は開領域 $\mathcal{D}^+(\mathbf{p})$ において正則である。

(ii) 不確定特異点を除く $\mathcal{D}^0(\mathbf{p})$ において

$$1_r - \widetilde{S}_{T*}(\mathbf{p})\, S(\mathbf{p}) \geqq 0_r$$

ここで，1_r，0_r はそれぞれ r×r の単位行列，零行列とする。

(2)　r×r の有理行列 W（**p**）がリアクタンス正行列であるための必要充分条件は式（2·5）の S（**p**）が次の（i）及び（ii）を満たすことである。

（i）　S（**p**）は開領域 $\mathcal{D}^+$（**p**）において正則である。

（ii）　不確定特異点を除く $\mathcal{D}^0$（**p**）において

$$1_r - \widetilde{S}_{T*}(\mathbf{p})\, S(\mathbf{p}) = 0_r$$

［定理 2·15 ］

正関数 w（**p**）＝ψ（**p**）／ϕ（**p**）（ψ，ϕ は互いに素な多項式）が与えられているものとする。いま，w（**p**）をリアクタンス正 2 端子対網 W（**p**）＝［w_{ij}（**p**）］（i，j＝1，2）の出力端子対を単位抵抗で終端したときの駆動点インピーダンスとすれば，

$$\psi(\mathbf{p})\,\widetilde{\phi}_*(\mathbf{p}) + \widetilde{\psi}_*(\mathbf{p})\,\phi(\mathbf{p}) = 2\,\widetilde{f}_*(\mathbf{p})\, f(\mathbf{p}) \qquad (2\cdot 6)$$

と書ける右辺の分解式 $\widetilde{f}_*$（**p**）f（**p**）が存在する。

逆に，w（**p**）が式（2·6）を満たせば，

$$w_{11}(\mathbf{p}) = \frac{\psi(\mathbf{p}) + \varepsilon\,\widetilde{\phi}_*(\mathbf{p})}{\phi(\mathbf{p}) - \varepsilon\,\widetilde{\phi}_*(\mathbf{p})} \qquad w_{12}(\mathbf{p}) = \frac{2\,f(\mathbf{p})}{\phi(\mathbf{p}) - \varepsilon\,\widetilde{\phi}_*(\mathbf{p})}$$

$$w_{21}(\mathbf{p}) = \frac{\varepsilon\, 2\,\widetilde{f}_*(\mathbf{p})}{\phi(\mathbf{p}) - \varepsilon\,\widetilde{\phi}_*(\mathbf{p})} \qquad w_{22}(\mathbf{p}) = \frac{\phi(\mathbf{p}) + \varepsilon\,\widetilde{\phi}_*(\mathbf{p})}{\phi(\mathbf{p}) - \varepsilon\,\widetilde{\phi}_*(\mathbf{p})}$$

$$(2\cdot 7)$$

を要素とする行列 W（**p**）はリアクタンス正行列である。ここで，f（**p**）は多項式で，f（**p**）＝$\widetilde{f}_*$（**p**）のとき，ε＝＋1，また，f（**p**）＝－$\widetilde{f}_*$（**p**）のとき，ε＝－1 とする。

（定理 2·15 の証明）　リアクタンス正行列 W（**p**）をインピーダンス行列とする 2 端子対網の出力端子対を順素子 q_1 で終端したとき，その駆動点インピーダンス w_0（**p**，q_1）は，

$$w_0(\mathbf{p},\ q_1) = w_{11}(\mathbf{p}) - \frac{w_{12}(\mathbf{p})\, w_{21}(\mathbf{p})}{q_1 + w_{22}(\mathbf{p})} \qquad (2\cdot 8)$$

と書ける。仮定により，$w(\mathbf{p}) = w_0(\mathbf{p}, 1)$ でなければならない。

一方，定理 2・12 (2)から，正関数 $w(\mathbf{p})$ より $w_0(\mathbf{p}, q_1)$ は

$$w_0(\mathbf{p}, q_1) = \frac{\psi_1(\mathbf{p})\, q_1 + \psi_2(\mathbf{p})}{\phi_2(\mathbf{p})\, q_1 + \phi_1(\mathbf{p})} \qquad (2\cdot 9)$$

と書けるリアクタンス正関数である。但し，$\psi_1(\mathbf{p}) \sim \phi_2(\mathbf{p})$ は式（2・4)の通りとする。

式（2・8）及び式（2・9）より

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_1} w_0(\mathbf{p}, q_1) &= \frac{\psi(\mathbf{p})\,\widetilde{\phi}_*(\mathbf{p}) + \widetilde{\psi}_*(\mathbf{p})\,\phi(\mathbf{p})}{\varepsilon 2\,[\phi_2(\mathbf{p})\, q_1 + \phi_1(\mathbf{p})]^2} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} w_0(\mathbf{p}, q_1) &= \left[\frac{\widetilde{w}_{21*}(\mathbf{p})}{-q_1 + \widetilde{w}_{22*}(\mathbf{p})}\right]\left[\frac{w_{21}(\mathbf{p})}{q_1 + w_{22}(\mathbf{p})}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot 10)$$

を得る。ここで，定理 2・12 (3)より

$$\phi_1(\mathbf{p}) = \varepsilon\,\widetilde{\phi}_{1*}(\mathbf{p}) \qquad\qquad \phi_2(\mathbf{p}) = -\varepsilon\,\widetilde{\phi}_{2*}(\mathbf{p})$$

であることに注意すると，式（2・10）より

$$\psi(\mathbf{p})\,\widetilde{\phi}_*(\mathbf{p}) + \widetilde{\psi}_*(\mathbf{p})\,\phi(\mathbf{p}) = 2\,\widetilde{g}_*(\mathbf{p}, q_1)\, g(\mathbf{p}, q_1) \qquad (2\cdot 11)$$

と書ける。但し，

$$g(\mathbf{p}, q_1) = [\phi_2(\mathbf{p})\, q_1 + \phi_1(\mathbf{p})]\left[\frac{w_{21}(\mathbf{p})}{q_1 + w_{22}(\mathbf{p})}\right] \qquad (2\cdot 12)$$

式（2・11）の左辺は変数 q_1 に依存しない $\mathbf{p}$ の多項式であること，及び，$\mathbf{p}$ に関する有限な極をもたないことに注意すると，式（2・12）の右辺の分母における q_1 に関する 1 次因数及び $\mathbf{p}$ に関する因数は分子の因数と約されなければならない。そこで，このような因数を分母分子から消去した後の多項式を新たに $f(\mathbf{p})$ と記せば，式（2・6）が得られる。

次に後半を示す。式（2・7）を要素とする行列 $W(\mathbf{p})$ は，

$$W(\mathbf{p}) + \widetilde{W}_{T*}(\mathbf{p}) = 0_2$$

を満たすことは明白。従って，

$$S(\mathbf{p}) = [\,W(\mathbf{p}) - 1_2\,][\,W(\mathbf{p}) + 1_2\,]^{-1}$$

は不確定特異点を除く$\mathscr{D}^0(\mathbf{p})$において，$\widetilde{S}_{T*}(\mathbf{p})\,S(\mathbf{p}) = 1_2$となる。定理2 12(3)に注意すると，行列$[\,W(\mathbf{p}) - 1_2\,]$は開領域$\mathscr{D}^+(\mathbf{p})$で正則。一方，行列$[\,W(\mathbf{p}) + 1_2\,]^{-1}$は

$$[\,W(\mathbf{p}) + 1_2\,]^{-1} = \frac{1}{\det.[W(\mathbf{p}) + 1_2]}\left[\begin{array}{c|c} w_{22}(\mathbf{p}) + 1 & -w_{12}(\mathbf{p}) \\ \hline -w_{21}(\mathbf{p}) & w_{11}(\mathbf{p}) + 1 \end{array}\right]$$

となる。ここで，

$$\det.[\,W(\mathbf{p}) + 1_2\,] = [\,w_{22}(\mathbf{p}) + 1\,][\,w(\mathbf{p}) + 1\,]$$

但し，det. Aは行列Aの行列式を意味する。

上式において，$w_{ii}(\mathbf{p})$（$i = 1, 2$）はリアクタンス正関数，$w(\mathbf{p})$は正関数であることを注意すれば，$[\,W(\mathbf{p}) + 1_2\,]^{-1}$は開領域$\mathscr{D}^+(\mathbf{p})$において正則。それ故，定理2・14(2)により$W(\mathbf{p})$はリアクタンス正行列である。　（証明終り）

〔定理2・16〕

全部には共通因数をもたない多項式$a(\mathbf{p})$，$b(\mathbf{p})$，$c(\mathbf{p})$，$d(\mathbf{p})$及び$f(\mathbf{p})$から成る行列

$$F(\mathbf{p}) = \frac{1}{f(\mathbf{p})}\left[\begin{array}{c|c} a(\mathbf{p}) & b(\mathbf{p}) \\ \hline c(\mathbf{p}) & d(\mathbf{p}) \end{array}\right]^{+2-9}$$

がリアクタンス正2端子対網の縦続行列であるための必要充分条件は次の(i)～(iii)を満たすことである。

(i)　恒等的に零である場合を含めて次の関数はリアクタンス正関数である。

$$\frac{c(\mathbf{p})}{a(\mathbf{p})},\ \frac{b(\mathbf{p})}{d(\mathbf{p})},\ \frac{b(\mathbf{p})}{a(\mathbf{p})},\ \frac{c(\mathbf{p})}{d(\mathbf{p})}$$

(ii)　$\dfrac{a(\mathbf{p})}{f(\mathbf{p})} = \dfrac{\widetilde{a}_*(\mathbf{p})}{\widetilde{f}_*(\mathbf{p})}$，$\dfrac{d(\mathbf{p})}{f(\mathbf{p})} = \dfrac{\widetilde{d}_*(\mathbf{p})}{\widetilde{f}_*(\mathbf{p})}$，$\dfrac{b(\mathbf{p})}{f(\mathbf{p})} = -\dfrac{\widetilde{b}_*(\mathbf{p})}{\widetilde{f}_*(\mathbf{p})}$，$\dfrac{c(\mathbf{p})}{f(\mathbf{p})} = -\dfrac{\widetilde{c}_*(\mathbf{p})}{\widetilde{f}_*(\mathbf{p})}$

(iii)　$a(\mathbf{p})\,d(\mathbf{p}) - b(\mathbf{p})\,c(\mathbf{p}) = \varepsilon\,\widetilde{f}_*(\mathbf{p})\,f(\mathbf{p})$

+2−9：　$F(\mathbf{p})$における$f(\mathbf{p})$は$\widetilde{f}_*(\mathbf{p})$で置き換えてよい。

2·5節　伝送零点と駆動点イミタンスの関係

リアクタンス正行列$W(\mathbf{p})=[w_{ij}(\mathbf{p})]$ $(i, j=1, 2)$ をイミタンス行列とする2端子対網の動作伝送係数$T_b(\mathbf{p})$は

$$T_b(\mathbf{p})=\frac{\delta}{2}\left\{\frac{w_{11}(\mathbf{p})+w_{22}(\mathbf{p})}{w_{21}(\mathbf{p})}+\frac{w_{11}(\mathbf{p})\,w_{22}(\mathbf{p})-w_{12}(\mathbf{p})\,w_{21}(\mathbf{p})}{w_{21}(\mathbf{p})}+\frac{1}{w_{21}(\mathbf{p})}\right\} \tag{2·13}$$

で与えられる。但し，δは，$W(\mathbf{p})$がインピーダンス（アドミタンス）行列のとき，$\delta=+1$（-1）とする。

〈定義11〉

$T_b(\mathbf{p})$の極をリアクタンス正2端子対網の伝送零点又は減衰極とよび，その極が孤立か，連立かに応じ，伝送零点にも“孤立”又は“連立”の接頭語を付す。

伝送零点は式（2·13）の右辺における第1項，第2項，及び，第3項に起因する極として次のように分類される。

(1)　$w_{ij}(\mathbf{p})$（$i=1, 2$）の極のうち，$w_{21}(\mathbf{p})$の極と一致しない極で，これらの極の内，孤立極（存在するとして）については，その変数の虚軸上にすべて有り，$T_b(\mathbf{p})$の1位の孤立極である。また，連立極については，それを定義する既約多項式因数の一つを$h(\mathbf{r})$（$\mathbf{r}$は$\mathbf{p}$の中の変数の組）とすると$h(\mathbf{r})$は唯一つで次の条件を満たす$T_b(\mathbf{p})$の分母における既約多項式因数である。

(i)　$h(\mathbf{r})=\varepsilon\,\widetilde{h}_*(\mathbf{r})$　　(ii) 複素Hurwitz多項式　　(iii)　$h(\mathbf{r})=0$の定義する代数関数の枝関数$p_k=h_\ell(\mathbf{r}_k)$（$\ell=1, 2, \cdots\cdots, \deg_{p_k} h$）は，代数特異点を除く任意の$\mathbf{r}_{k0}\in\mathcal{D}^0(\mathbf{r}_k)$で，$\mathrm{Re}\ h_\ell(\mathbf{r}_{k0})=0$　である。但し，$\mathbf{r}_k$は$\mathbf{r}$より変数p_kを除いた残りの変数の組である。

(2)　$w_{ij}(\mathbf{p})$（$i, j=1, 2$）のすべてに共通な極の内，孤立極（存在するとして）については，留数行列$[k_{ij}]$の作る行列式が非零である孤立極で，その変数の虚軸上に有り，$T_b(\mathbf{p})$の1位の孤立極である。また，連立極については，上記の意味の既約多項式因数$h(\mathbf{r})$が存在し，次の条件を満たす$T_b(\mathbf{p})$の分母の既約多項式因数である。

(i)　(1)の条件(i)～条件(iii)を満足する。　(ii) (1)の条件(iii)の点$p_{k0}=h_\ell(\mathbf{r}_{k0})$

での留数行列 $[k_{ij}(\mathbf{r}_{k0})]$ が $\det.[k_{ij}(\mathbf{r}_{k0})] \neq 0$ である。

(3) $w_{21}(\mathbf{p})$ の零点のすべてである。

リアクタンス正2端子対網の出力端子対を単位抵抗で終端したときの駆動点インピーダンス $\mathrm{w}(\mathbf{p})$ は

$$\mathrm{w}(\mathbf{p}) = \frac{\psi(\mathbf{p})}{\phi(\mathbf{p})} = w_{11}(\mathbf{p}) - \frac{w_{12}(\mathbf{p})\, w_{21}(\mathbf{p})}{1 + w_{22}(\mathbf{p})} \qquad (2\cdot14)$$

で表わされるから，式(2・6)に留意すると，$\mathrm{T_b}(\mathbf{p})$ は

$$\mathrm{T_b}(\mathbf{p}) = \frac{\psi(\mathbf{p}) + \phi(\mathbf{p})}{2\,\widetilde{\mathrm{f}}_*(\mathbf{p})}$$

とも表わされる。式(2・14)に従うと伝送零点の内，(1)で述べた $w_{22}(\mathbf{p})$ に起因する極以外の極，及び，(2)に該当するものはすべて $\mathrm{w}(\mathbf{p})$ あるいは $1/\mathrm{w}(\mathbf{p})$ の極である。また，(3)に起因する伝送零点は

$$\frac{\mathrm{w}(\mathbf{p}) + \widetilde{\mathrm{w}}_*(\mathbf{p})}{2} = -\frac{w_{12}(\mathbf{p})\, w_{21}(\mathbf{p})}{1 - w_{22}^2(\mathbf{p})} \qquad (2\cdot15)$$

における左辺の零点で与えられる。但し，右辺において分母，分子で相殺される因数は別に与えることが必要である。

ところで，式(2・15)の左辺は $\mathbf{p}$ に関する偶関数部とよばれるが，便宜上，次の記号を導入し，その零点における $\mathrm{w}(\mathbf{p})$ の性質を述べる。

〈定義 12〉

有理関数 $\mathrm{f}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ に対し，$\mathbf{p}$ 及び $\mathbf{p},\mathbf{q}$ に関する偶関数部 $\mathrm{Ev}_{\mathbf{p}}\,\mathrm{f}(\mathbf{p},\mathbf{q})$，$\mathrm{Ev}_{\mathbf{pq}}\,\mathrm{f}(\mathbf{p},\mathbf{q})$，及び，奇関数部 $\mathrm{Od}_{\mathbf{p}}\,\mathrm{f}(\mathbf{p},\mathbf{q})$，$\mathrm{Od}_{\mathbf{pq}}\,\mathrm{f}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ をそれぞれ次のように定義する。

$$\mathrm{Ev}_{\mathbf{p}}\,\mathrm{f}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{\mathrm{f}(\mathbf{p},\mathbf{q}) + \widetilde{\mathrm{f}}(-\mathbf{p},\mathbf{q})}{2}, \qquad \mathrm{Ev}_{\mathbf{pq}}\,\mathrm{f}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{\mathrm{f}(\mathbf{p},\mathbf{q}) + \widetilde{\mathrm{f}}(-\mathbf{p},-\mathbf{q})}{2}$$

$$\mathrm{Od}_{\mathbf{p}}\,\mathrm{f}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{\mathrm{f}(\mathbf{p},\mathbf{q}) - \widetilde{\mathrm{f}}(-\mathbf{p},\mathbf{q})}{2}, \qquad \mathrm{Od}_{\mathbf{pq}}\,\mathrm{f}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{\mathrm{f}(\mathbf{p},\mathbf{q}) - \widetilde{\mathrm{f}}(-\mathbf{p},-\mathbf{q})}{2}$$

$$-\mathbf{p} = (-\mathrm{p}_1, -\mathrm{p}_2, \cdots, -\mathrm{p}_n), \quad -\mathbf{q} = (-\mathrm{q}_1, -\mathrm{q}_2, \cdots, -\mathrm{q}_m)$$

［定理 2・17 ］[+2−10]

(1)　UB関数 $s(\mathbf{p},\mathbf{q})$ が点 $\mathbf{p}_0 \in \overline{\mathcal{D}}(\mathbf{p})$ において，

$$\mathrm{Od}_{\mathbf{q}}\, s(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} 0$$

を満たせば，$s(\mathbf{p}_0, \mathbf{q})$ は $\mathbf{q}$ に無関係な定数である。特に，$n=1$，即ち，$s(p_1, \mathbf{q})$ に対し，点 $p_{10} \in \overline{\mathcal{D}}(p_1)$ が $\mathrm{Od}_{\mathbf{q}}\, s(p_1, \mathbf{q})$ の ℓ 位の孤立零点であれば，

$$(\partial^k / \partial p_1^k)\, s(p_{10}, \mathbf{q}) \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots\cdots, \ell - 1)$$

も $\mathbf{q}$ に無関係である。

(2)　正関数 $w(\mathbf{p},\mathbf{q})$ が点 $\mathbf{p}_0 \in \overline{\mathcal{D}}(\mathbf{p})$ において

$$\mathrm{Od}_{\mathbf{q}}\, w(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} 0$$

を満たせば，$w(\mathbf{p}_0, \mathbf{q})$ は $\mathbf{q}$ に無関係な定数である。特に，$n=1$，即ち，$w(p_1, \mathbf{q})$ に対し，点 $p_{10} \in \overline{\mathcal{D}}(p_1)$ が $\mathrm{Od}_{\mathbf{q}}\, w(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ の ℓ 位の孤立零点であれば，

$$(\partial^k / \partial p_1^k)\, w(p_{10}, \mathbf{q}) \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots\cdots, \ell - 1)$$

も $\mathbf{q}$ に無関係である。

(3)　正関数 $w(\mathbf{p},\mathbf{q})$ が点 $\mathbf{p}_0 \in \overline{\mathcal{D}}(\mathbf{p})$ において

$$\mathrm{Ev}_{\mathbf{pq}}\, w(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} 0 \qquad \mathrm{Ev}_{\mathbf{p}}\, w(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} 0$$

を満たせば，$w(\mathbf{p}_0, \mathbf{q})$ は $\mathbf{q}$ に無関係な定数である。特に，$n=1$，即ち，$w(p_1, \mathbf{q})$ に対し，$\mathrm{Ev}_{p_1 \mathbf{q}}\, w(p_1, \mathbf{q})$，$\mathrm{Ev}_{p_1}\, w(p_1, \mathbf{q})$ の孤立零点 $p_{10} \in \overline{\mathcal{D}}(p_1)$ の位数の小さい方を ℓ とすると，

$$(\partial^k / \partial p_1^k)\, w(p_{10}, \mathbf{q}) \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots\cdots, \ell - 1)$$

も $\mathbf{q}$ に無関係である。

+2−10：　この定理における“UB”，“正”をそれぞれ“UBR”，“正実”で置き換えた場合の(1)〜(3)における各前半はSaito[22]によって得られた結果である。

［定理 2・18 ］[+2−11]

変数 p_ν（$\nu=1, 2, \cdots\cdots, n$），$q_\nu$（$\nu=1, 2, \cdots\cdots, m$），及び，$r_\nu$（$\nu=1, 2, \cdots\cdots, t$）について1次の既約な正関数 $w(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ の偶関数部の分子，$\mathrm{Num}\{\mathrm{Ev}_{\mathbf{pqrs}}\, w\}$ が

$$\mathrm{Num}\{\mathrm{Ev}_{\mathbf{pqrs}}\, w\} = \widetilde{g}_*(\mathbf{s})\, g(\mathbf{s}) \cdot \prod_{\nu=1}^{m} q_\nu^2 \cdot \prod_{\nu=1}^{n} (p_{\nu 0} - p_\nu)(p_{\nu 0}^* + p_\nu) \tag{2・16}$$

と書けるものとする。そのとき，任意の三つの変数 p_ν，q_ν，r_ν 及び $\widetilde{g}_*(\mathbf{s})$ の連立（孤立）零点 $\mathbf{s}_0 \in \overline{\mathcal{D}}(\mathbf{s})$ に対し次の何れか一つが成立する。

(i) $w(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s})|_{p_i = p_{i0}}$ は p_ν（$\nu \neq i$），q_ν，r_ν に無関係である。

(ii) $w(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s})|_{q_i = 0}$ は p_ν，q_ν（$\nu \neq i$），r_ν に無関係である。

(iii) $w(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s})|_{r_i = \infty}$ は p_ν，q_ν，r_ν（$\nu \neq i$）に無関係である。

(iv) $w(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s})|_{\mathbf{s} = \mathbf{s}_0}$ は p_ν，q_ν，r_ν に無関係である。

ここで，$\mathrm{Re}\ p_{\nu 0} > 0$，$\mathbf{r} = (r_1, r_2, \cdots\cdots, r_t)$，$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \cdots\cdots, s_\ell)$。尚，$\mathrm{Ev}_{\mathbf{pqrs}}\, w$ の分母と分子は互いに素，且つ，$\deg_{s_\nu} w = \deg_{s_\nu} g$（$\nu=1, 2, \cdots, \ell$）とする。

（定理 2・18 の証明） 正関数 $w(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ を次のように表わす。

$$w(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}) = \frac{a_0 + a_1 \lambda}{b_0 + b_1 \lambda} \tag{2・17}$$

ここで，λ は p_j，q_j，r_j の何れかの一つとする。尚，a_0，a_1，b_0，b_1 は λ を除く $\mathbf{p}$，$\mathbf{q}$，$\mathbf{r}$，$\mathbf{s}$ の多項式である。

いま，λ に対し，式（2・16）の分子を次のように定義する。

+2−11： この定理において，正関数 w が $\mathbf{s}$ を陽に含まず，且つ，w を駆動点インピーダンスと仮定すれば，式（2・16）は第3章で述べられるような $p_\nu = p_{\nu 0}$，$q_\nu = 0$，$r_\nu = \infty$ をそれぞれ孤立伝送零点としもつ変数 p_ν の Hazony−Youla，及び変数 q_ν，r_ν のA（B）区間から成る抵抗終端縦続形回路の必要充分条件である。

(a) $\lambda = p_j$: $D = \tilde{g}_*(s) g(s) \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq j}}^{n} \{(p_{\nu 0} - p_\nu)(p_{\nu 0}^* + p_\nu)\} \prod_{\nu=1}^{m} q_\nu^2$

(b) $\lambda = q_j$: $D = \tilde{g}_*(s) g(s) \prod_{\nu=1}^{n} \{(p_{\nu 0} - p_\nu)(p_{\nu 0}^* + p_\nu)\} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq j}}^{m} q_\nu^2$

(c) $\lambda = r_j$: $D = \tilde{g}_*(s) g(s) \prod_{\nu=1}^{n} \{(p_{\nu 0} - p_\nu)(p_{\nu 0}^* + p_\nu)\} \prod_{\nu=1}^{m} q_\nu^2$

式（2・17）及び式（2・16）から次の三つの関係式が求まる。

$$A = a_0 \tilde{b}_{0*} + \tilde{a}_{0*} b_0 \qquad (2 \cdot 18)$$

$$B = a_1 \tilde{b}_{1*} + \tilde{a}_{1*} b_1 \qquad (2 \cdot 19)$$

$$C = a_1 \tilde{b}_{0*} - \tilde{a}_{1*} b_0 + \tilde{a}_{0*} b_1 - a_0 \tilde{b}_{1*} \qquad (2 \cdot 20)$$

ここで，

$\lambda = p_j$: $A = p_{j0} p_{j0}^* D$, $B = D$, $C = (p_{j0} - p_{j0}^*) D$

$\lambda = q_j$: $A \equiv 0$, $B = D$, $C \equiv 0$

$\lambda = r_j$: $A = D$, $B \equiv 0$, $C \equiv 0$

尚，式（2・18）～式（2・20）における脚符“ $*$ ”は，λ を除くすべての変数に負符号を付したもので置き換えることを意味する。

式（2・18）～式（2・20）から

$$\left.\begin{aligned} (a_0 b_1 - a_1 b_0)(a_0 \tilde{a}_{1*} + \tilde{a}_{0*} a_1) &= a_0 a_1 C + a_0^2 B - a_1^2 A \\ (a_0 b_1 - a_1 b_0)(b_0 \tilde{b}_{1*} + \tilde{b}_{0*} b_1) &= b_0 b_1 C + b_0^2 B - b_1^2 A \end{aligned}\right\} \qquad (2 \cdot 21)$$

を得る。D の零点の一つを d_0 とすると，上式において

$$a_0 \tilde{a}_{1*} + \tilde{a}_{0*} a_1 \Big|_{d_0} \neq 0, \qquad b_0 \tilde{b}_{1*} + \tilde{b}_{0*} b_1 \Big|_{d_0} \neq 0 \qquad (2 \cdot 22)$$

が成り立つ。但し，d_0 は虚軸を含む右半面内の点とする。

実際，式（2・22）において等号が成立したとすると，式（2・18)(2・19)から，

$$\frac{a_0}{\tilde{a}_{0*}}\Big|_{d_0} = \frac{b_1}{\tilde{b}_{1*}}\Big|_{d_0} = -\frac{b_0}{\tilde{b}_{0*}}\Big|_{d_0} = -\frac{a_1}{\tilde{a}_{1*}}\Big|_{d_0} \qquad (2 \cdot 23)$$

が得られる。そのうえ，式（2・23）と式（2・20）から次式が成立する。

$$\frac{a_0}{\tilde{b}_{0*}}\Big|_{d_0} = \frac{a_1}{\tilde{a}_{1*}}\Big|_{d_0} \qquad \frac{b_0}{\tilde{a}_{0*}}\Big|_{d_0} = \frac{b_1}{\tilde{b}_{1*}}\Big|_{d_0} \qquad (2 \cdot 24)$$

一方，例えば，式（2・20）に a_0 を掛けた式に式（2・18）を代入すると，

$$a_1 A = \widetilde{a}_{0*}(b_0 a_1 - a_0 b_1) + a_0(a_0 \widetilde{b}_{1*} + b_0 \widetilde{a}_{1*})$$

となる。A の零点，即ち，D の零点 d_0 に固定すると，式（2・23）（2・24）及び上式から

$$\widetilde{a}_{0*}(b_0 a_1 - a_0 b_1)\Big|_{d_0} = 0$$

が成立する。ここで，$b_0 a_1 - a_0 b_1 \Big|_{d_0} \neq 0$ と仮定すると，$\widetilde{a}_{0*}\Big|_{d_0} = 0$ を得る。即ち，$a_0\Big|_{d_0} = 0$ となる。それ故，式（2・23）から

$$a_0\Big|_{d_0} = b_0\Big|_{d_0} = a_1\Big|_{d_0} = b_1\Big|_{d_0} = 0$$

が成り立つ。これは，$w(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ が既約であったことに反する。

それ故，点 d_0 において a_0，a_1，b_0，b_1 の少なくとも一つは零でなく，且つ，

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 \Big|_{d_0} = 0 \qquad (2\cdot 25)$$

でなければならない。上式より式（2・17）は λ に無関係となる。尚，$r_\nu = \infty$（$\nu = 1, 2, \cdots\cdots, t$）は式（2・16）の孤立零点であるから，変数変換 $r_\nu \to 1/r_\nu$ を施して，$r_\nu = 0$ の孤立零点に変換して考えればよい。

以上により，(a) のとき，$w|_{p_i = p_{i0}}$，$w|_{q_\nu = 0}$，$w|_{r_\nu = \infty}$，$w|_{\mathbf{s} = \mathbf{s}_0}$ は，p_j（$i \neq j$）に，(b) のとき，$w|_{p_\nu = p_{\nu 0}}$，$w|_{q_i = 0}$，$w|_{r_\nu = \infty}$，$w|_{\mathbf{s} = \mathbf{s}_0}$ は，q_j（$i \neq j$）に，そして (c) のとき，$w|_{p_\nu = p_{\nu 0}}$，$w|_{q_\nu = 0}$，$w|_{r_i = \infty}$，$w|_{\mathbf{s} = \mathbf{s}_0}$ は，r_j（$i \neq j$）に無関係となる。　（証明終り）

式（2・25）において，例えば，$a_0|_{d_0} \neq 0$，$b_0|_{d_0} \neq 0$ とすれば，式（2・25）は式（2・17）の分母分子の λ に関する最大公約数を求めるための条件である。一般には次の定理で与えられる。

〔定理 2・19〕[47][48]

m，n（$m \geqq n$）次の二つの多項式

$$\psi(p_1) = \alpha_0 p_1^m + \alpha_1 p_1^{m-1} + \cdots\cdots + \alpha_m$$

$$\phi(p_1) = \beta_0 p_1^n + \beta_1 p_1^{n-1} + \cdots\cdots + \beta_n$$

$$(\alpha_0 \neq 0, \qquad \beta_0 \neq 0)$$

が ℓ（$\leqq n$）次の最大公約数をもつための必要充分条件は，式（2·26）で定義された（$m+n-2k$）次の正方行列 $\Phi_{n-k}=[\psi,\ \phi]_{n-k}$（$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$）が次の何れかの一方を満たすことである。

(i)　$\det.\Phi_{n-k}\equiv 0$　　（$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ \ell-1$）

(ii)　$\mathrm{rank}.\Phi_n=m+n-\ell$

但し，rank. は行列の階数を意味する。

$$\Phi_{n-k}=\left(\begin{array}{cccccccccc}
\alpha_0, & \alpha_1, & \cdots\cdots, & \alpha_m & & & & & & \\
 & \alpha_0, & \alpha_1, & \cdots\cdots, & \alpha_m & & & & & \\
 & & \cdots\cdots & & & & & & & \\
 & & & \alpha_0, & \alpha_1, & \cdots\cdots, & \alpha_m & & & \\
\beta_0, & \beta_1, & \cdots\cdots, & \beta_n & & & & & & \\
 & \beta_0, & \beta_1, & \cdots\cdots, & \beta_n & & & & & \\
 & & \cdots\cdots & & & & & & & \\
 & & & \cdots\cdots & & & & & & \\
 & & & & \beta_0, & \beta_1, & \cdots\cdots, & \beta_n & &
\end{array}\right)\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}n-k \\ \left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}m-k\end{array}\qquad(2\cdot26)$$

（余白の要素は零）

2·6節　あとがき

本章では，多変数正（実）関数，同UB（R）関数の定義等及び基本的な性質を紹介すると共に，第3章及び第4章の議論に必要な多変数リアクタンス正2端子対網を単位抵抗で終端したときの駆動点インピーダンスが具備せねばならない条件，多変数正関数の偶関数部の性質等について述べた。

第３章　多変数正（実）関数の変換

3·1節　まえがき

本章は，正関数を駆動点イミタンスとする回路網から，適当な条件を満たすn（≧1）変数多項式の零点を伝送零点としてもつ相反なA，B（3・2節），Brune（3・3節），及び，非相反なRichards（3・4節），Hazony－Youla（3・5節）の四つの基礎的な縦続区間が分離できるための条件，及び，分離後の関数の次数がもとの関数のそれより低次となるための条件を明らかにする。そして，Richards，Hazony－Youlaのような非相反な区間は，同じ伝送零点をもつ区間を二区間，縦続接続することによって1変数の場合と同様，相反なDarlington－C（3・6節）及びDarlington－D（3・7節）の縦続区間に変換できることを示す。尚，3・4節では，Richards区間の分離問題に対して与えられた条件は，ジャイレータを含まないBott－Duffin形構成の操作を可能にするための一つの条件でもあることに言及し，これらの結果を行列の場合へ拡張する。3・8節では，2変数リアクタンス正関数（但し，一方の変数についてその次数が1次）の実現問題を考察し，その結果と3・2節及び3・4節の結果を基に，集中定数素子と分布定数素子が混在する回路や，整数倍の電気長をもつ単純枝等が分離できるための条件を明らかにする。

尚，上記の各縦続区間の分離問題に関する従来の研究については，第1章において詳しく述べたので，本節では省略する。

（本章の内容は，「関連発表論文」中，(1)(2)(3)(6)及び(7)に依っているが，3・6節，3・7節の内容のすべて，及び3・8節の内容の一部は未発表である。）

3·2節　A（B）区間の分離

3・8節で述べる集中分布定数素子混在回路，あるいは，二つの相異なった電気長をもつ分布定数回路の分離にとって応用価値が有り，また，3・3節，3・5節で述べる縦続区間の分離操作に対し基本的な役割を演じるA（B）区間の分離問題を本節において考察する。

ここで，A（B）区間とは，アドミタンス（インピーダンス）行列W（**p**）が，

$$W(\mathbf{p}) = \frac{1}{w_0(\mathbf{p})}\left[\begin{array}{c|c} 1 & \delta \\ \hline \delta & 1 \end{array}\right] \qquad (\delta = \pm 1)$$

の形で表わされるリアクタンス正2端子対網を言い，上式における$w_0(\mathbf{p})$は一般にリアクタンス正関数である。但し，行列W（**p**）が，アドミタンス（インピーダンス）であるとき，$w_0(\mathbf{p})$はインピーダンス（アドミタンス）と考え，δはそのとき，$\delta=-1$（$\delta=+1$）とする。[+3-1]

［定理3・1］

(1) $\mathcal{D}^0(p_i)$（$i=1, 2$）に孤立極をもたない正実関数$w(\mathbf{p}, \mathbf{q})$（$\mathbf{p}=(p_1, p_2)$）の分母における既約多項式因数の一つを

$$g(\mathbf{p}) = \alpha_1(p_2)\,p_1 + \alpha_2(p_2)$$

$$(\alpha_2(p_2)/\alpha_1(p_2)\ :\ \text{リアクタンス関数})^{+3-2}$$

とする。（但し，$w(\mathbf{p},\mathbf{q})$の分母，子は互いに素とする）。$w(\mathbf{p},\mathbf{q})$及び$g(\mathbf{p})$より作られる次の有理関数

$$k(p_2, \mathbf{q}) = \left[\frac{g(\mathbf{p})}{\alpha_1(p_2)}\, w(\mathbf{p}, \mathbf{q})\right]_{p_1 = -\frac{\alpha_2(p_2)}{\alpha_1(p_2)}} \qquad (3\cdot1)$$

のすべての有限な極は多項式$\alpha_1(p_2)$の零点に一致し，且つ，その極の位数が2であれば，

$$w_0(\mathbf{p}) = \frac{\beta_1(p_2)\,p_1 + \beta_2(p_2)}{\alpha_1(p_2)\,p_1 + \alpha_2(p_2)} \qquad (3\cdot2)$$

で表わされるリアクタンス関数$w_0(\mathbf{p})$が求まり，

$$w_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - w_0(\mathbf{p})$$

で定義される$w_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$は正実関数である。

+3−1：（　）同士が対応する。

+3−2：$\deg_{p_1} g = 1$であるような$g(\mathbf{p})$について$g(\mathbf{p})$が既約であることは，$\alpha_2(p_2)$，$\alpha_1(p_2)$が互いに素であることに同値である。

そして，次式が成り立つ。

$$\deg_{p_i} w_1 = \deg_{p_i} w - \deg_{p_i} g \quad (i = 1,\ 2) \qquad (3\cdot3)$$

(2) (1)における“正実”は，“リアクタンス”で置き換えることができる。

実現すべき $w(\mathbf{p},\mathbf{q})$ に対して，この定理に示すような $g(\mathbf{p})$ 及び $k(p_2, \mathbf{q})$ が存在すれば，図3－1 (a), (b) に示す縦続区間を分離して，p_1 について1次，p_2 について $\deg_{p_2}(\alpha_2/\alpha_1)$ だけ低い関数の合成の問題に帰着させることができる。尚，定理で派生したようなリアクタンス関数 $w_0(\mathbf{p})$ は，尾崎，嵩[1]あるいは古賀[10]の方法により実現することが可能であるが，3・8節では，この問題をリアクタンス正関数の場合にまで拡張し，文献 (1), (10) とは異なった実現方法を与えている。

次の系1，系2及び系3は式 (3・1) で定義された $k(p_2, \mathbf{q})$ の分子，$\mathrm{Num}\{k(p_2, \mathbf{q})\}$ が特殊な形を採る場合について述べたものである。

〈定理3・1系1〉

定理3・1において，$\mathrm{Num}\{k(p_2, \mathbf{q})\}$ が，

$$\mathrm{Num}\{k(p_2, \mathbf{q})\} = -\varepsilon k \alpha_2^2(p_2) \quad (k > 0,\ \varepsilon = \pm 1)$$

の右辺で与えられるとき，式 (3・2) の $w_0(\mathbf{p})$ は次の形を採る。

$$w_0(\mathbf{p}) = \frac{k\alpha_2(p_2)p_1}{\alpha_1(p_2)p_1 + \alpha_2(p_2)}$$

〈定理3・1系2〉

定理3・1において，$\mathrm{Num}\{k(p_2, \mathbf{q})\}$ が，

$$\mathrm{Num}\{k(p_2, \mathbf{q})\} = \varepsilon k \alpha_1^2(p_2) \quad (k > 0) \qquad (3\cdot4)$$

の右辺で与えられるとき，式 (3・2) の $w_0(\mathbf{p})$ は次の形を採る。

$$w_0(\mathbf{p}) = \frac{k\alpha_1(p_2)}{\alpha_1(p_2)p_1 + \alpha_2(p_2)}$$

〈定理3・1系3〉

定理3・1において，$\mathrm{Num}\{k(p_2, \mathbf{q})\}$ が，

$$\mathrm{Num}\{k(p_2, \mathbf{q})\} = \varepsilon[k_1 \mathcal{A}_1^2(p_2) - k_2 \mathcal{A}_2^2(p_2)] \quad (k_1, k_2 > 0)$$

の右辺で与えられるとき，式（3・2）の $w_0(\mathbf{p})$ は次の形を採る。

$$w_0(\mathbf{p}) = \frac{k_2 \mathcal{A}_2(p_2)\, p_1 + k_1 \mathcal{A}_1(p_2)}{\mathcal{A}_1(p_2)\, p_1 + \mathcal{A}_2(p_2)}$$

ここで，各系における ε は，$\mathcal{A}_1(p_2)$ が偶（奇）関数のとき，$\varepsilon = +1$（$\varepsilon = -1$）。

系1，系2によって得られた縦続区間のモデルは図3・1（c）～（f）のようになる。系3は系1，系2を包含するものである。その回路モデルは図3・1の（c）と（e），又は，（d）と（f）を縦続接続した形で表わすことができる。しかし，先に触れたように3・8節で述べる方法等を適用することによって他の等価なモデルが得られることに注意を要する。

ところで，式（3・1）で定義した $k(p_2, \mathbf{q})$ は，$w(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ の p_2 をパラメータとしたときの p_1 の極に対する留数に当るが，このような関数は一般に $\mathcal{A}_1(p_2)$ の零点で規定される極以外の有限な極をもちうる。例えば，図3・2に示す1端子対網の駆動点インピーダンスを $w(\mathbf{p})$ とすると，次のように書ける。

$$w(\mathbf{p}) = \frac{(p_1^2 + 1)(p_2^2 + 1)}{(p_1 + p_2)(p_1 p_2 + 1)}$$

上式は p_1，p_2 の孤立極をもたないリアクタンス関数であることは明らかである。その分母における因数の一つを，$g(\mathbf{p}) = p_2 p_1 + 1$ とすれば，この多項式は既約であり，且つ，$\mathcal{A}_2(p_2)/\mathcal{A}_1(p_2) = 1/p_2$ はリアクタンス関数であることは明白。そこで，$k(p_2)$ を求めると次式のようになる。

$$k(p_2) = \frac{(p_2^2 + 1)^2}{p_2^2\,(p_2^2 - 1)}$$

同様のことが因数（$p_2 + p_2$）についても書ける。この例に見られるように，1変数の場合の如く単に分母が既約因子に分解されたと言うだけでは，一般に部分分数に展開することができない。従って，連分数展開についても同様である。

（定理3・1(1)の証明）　リアクタンス関数 $\mathcal{A}_2(p_2)/\mathcal{A}_1(p_2)$ の極を除いた $\mathcal{D}^0(p_2)$ における任意の点を $p_2^{(0)}$ とすれば，$g(\mathbf{p})|_{p_2 = p_2^{(0)}}$ の零点は $p_1 = \infty$ を除く $\mathcal{D}^0(p_1)$ に存在するから，$k(p_2^{(0)}, \mathbf{q}^0)$ は

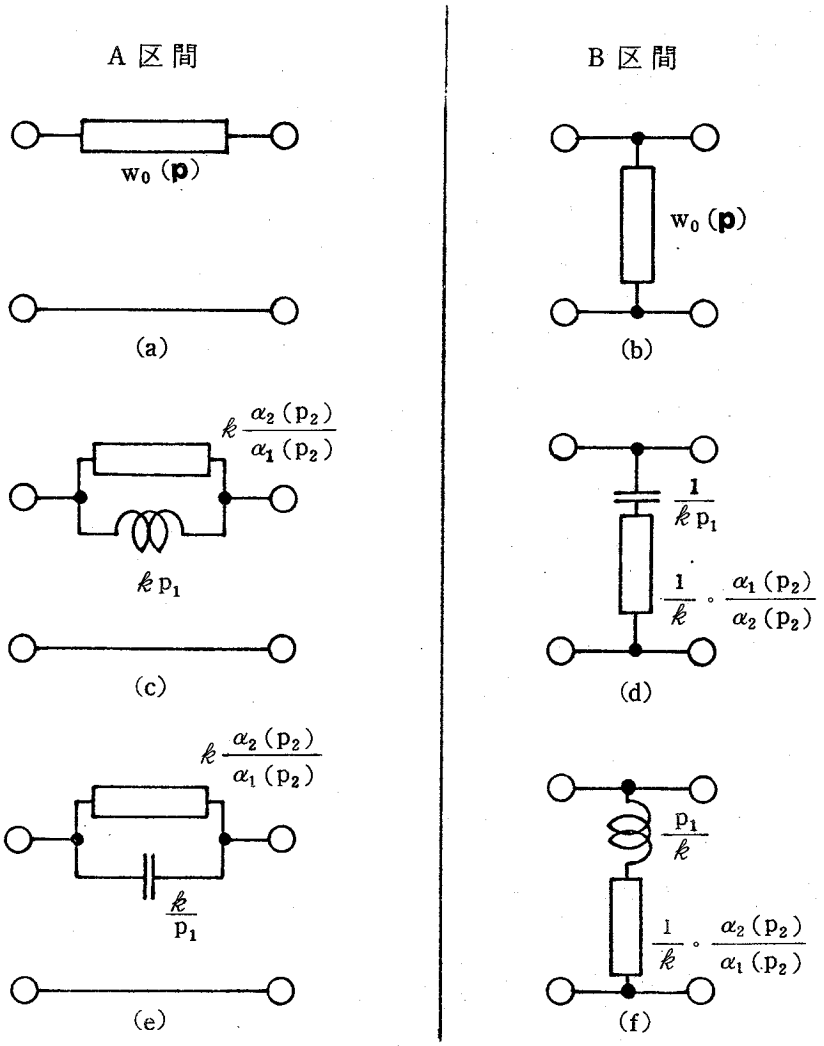


図 3・1　連立伝送零点をもつA，B区間

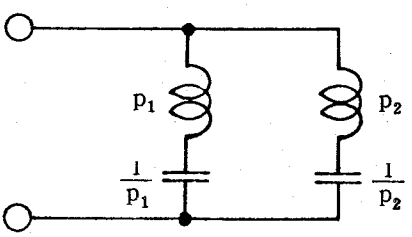


図 3・2　定理 3・1 の条件を満たさない回路例

$$k(p_2^{(0)}, \mathbf{q}^0) = \lim_{p_1 \to p_1^{(0)}} (p_1 - p_1^{(0)})\, w(\mathbf{p}, \mathbf{q}^0)\Big|_{p_2 = p_2^{(0)}} \geqq 0 \qquad (3\cdot5)$$

となる。ここで,

$$p_1^{(0)} = -\alpha_2(p_2^{(0)}) / \alpha_1(p_2^{(0)}) \in \mathcal{D}^0(p_1), \qquad \mathbf{q}^0 \in \mathcal{D}^+(\mathbf{q})$$

定理 2·5 (iii) により, $k(\mathbf{p}_2, \mathbf{q})$ は $\mathbf{q}$ に無関係である。以後, これを $k(p_2)$ で表わす。$k(p_2)$ は実係数有理関数であり, 且つ定理の仮定に注意すると,

$$k(p_2) = \frac{\varepsilon \gamma(p_2)}{\alpha_1^2(p_2)} \qquad (3\cdot6)$$

と書ける。但し, ε は $\alpha_1(p_2)$ が偶 (奇) 関数のとき, $\varepsilon = +1$ ($\varepsilon = -1$) とする。尚, $\gamma(p_2)$ は多項式で, 式 (3·5) より

(i) $\gamma(p_2) = \gamma_*(p_2)$

(ii) $\mathcal{D}^0(p_2)$ において, $\gamma(p_2) \geqq 0$

の性質を有することが知れる。

式 (3·2) の $w_0(\mathbf{p})$ を求めるために, 多項式 $\gamma(p_2)$, 及び,

$$h(p_2) = g(\mathbf{p})|_{p_1=1} = \alpha_1(p_2) + \alpha_2(p_2)$$

より作られる次の有理関数 $\underline{k}(p_2)$ を定義する。

$$\underline{k}(p_2) = \frac{\gamma(p_2)}{h(p_2)\, h_*(p_2)}$$

$g(\mathbf{p})$ は仮定によって既約であるから, $\alpha_1(p_2)$, $\alpha_2(p_2)$ は互いに素, 且つ, リアクタンス関数であるから, $\mathcal{D}^0(p_2)$ において,

$$|h(p_2)|^2 = h(p_2)\, h_*(p_2) > 0 \qquad (3\cdot7)$$

である。従って, $\underline{k}(p_2)$ は, $p_2 = \infty$ を除いて $\mathcal{D}^0(p_2)$ に極をもつことはない。そこで, $\underline{k}(p_2)$ は取敢ず $p_2 = \infty$ を極としてもたないものと仮定して話を進める。式 (3·7) 及び (i), (ii) から, $k(p_2)$ は次の性質を有することが知れる。

(i)′ $\underline{k}(p_2) = \underline{k}_*(p_2)$

(ii)′ $\mathcal{D}^0(p_2)$ において正則で, $\underline{k}(p_2) \geqq 0$

(i)′, (ii)′ は, $\underline{k}(p_2)$ が $\mathcal{D}^0(p_2)$ に極をもたない正実関数の偶関数部であるための必要充分条件である。[55] 従って, $\underline{k}(p_2)$ より

$$\underline{w}_0(p_2) = \frac{\beta_e(p_2) + \beta_o(p_2)}{\alpha_e(p_2) + \alpha_o(p_2)} \qquad (3\cdot 8)$$

なる正実関数が一意的に求まる。ここで，$\alpha_e(p_2)$，$\alpha_o(p_2)$ は $g(\mathbf{p})$ より決まる

(i)″ $\alpha_e(p_2) = \alpha_1(p_2)$，　$\alpha_o(p_2) = \alpha_2(p_2)$

(ii)″ $\alpha_e(p_2) = \alpha_2(p_2)$，　$\alpha_o(p_2) = \alpha_1(p_2)$

の何れか一方である。そして，$\beta_e(p_2)$，$\beta_o(p_2)$ は Diophantus の方程式

$$\alpha_e(p_2)\,x(p_2) - \alpha_o(p_2)\,y(p_2) = \gamma(p_2) \qquad (3\cdot 9)$$

より求まる解である。但し，脚符“e”，“o” はそれが偶関数，奇関数であることを意味する。

式 (3·8) に定理 2·12(2)の結果を適用すると，次のリアクタンス関数を得る。

$$w_0(\mathbf{p}) = \begin{cases} \dfrac{\beta_e(p_2)\,p_1 + \beta_o(p_2)}{\alpha_o(p_2)\,p_1 + \alpha_e(p_2)} \\[2ex] \dfrac{\beta_o(p_2)\,p_1 + \beta_e(p_2)}{\alpha_e(p_2)\,p_1 + \alpha_o(p_2)} \end{cases}$$

上式，右辺の何れの形を選ぶかは，与えられた $g(\mathbf{p})$，即ち上記 (i)″，(ii)″ の何れであるかに依存している。

$w(\mathbf{p},\mathbf{q})$ より $w_0(\mathbf{p})$ を引き差った残りの関数 $w_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$ が再び正実関数となることは定理 2·3 により容易に知れる。

次に，式 (3·3) を示す。$w_0(\mathbf{p})$ の作り方から知れるように $w_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$ の分母は因数 $g(\mathbf{p})$ を含まない。それ故，

$$\deg_{p_i} \mathrm{Den}\{w_1\} = \deg_{p_i} \mathrm{Den}\{w\} - \deg_{p_i} g \quad (i = 1,\ 2) \qquad (3\cdot 10)$$

となる。ここで，Den{f} は有理関数 f の分母を指す。また，その分子を Num{f} で記すと，定理 2·1(4)によれば，

$$|\ \deg_{p_i} \mathrm{Den}\{w_1\} - \deg_{p_i} \mathrm{Num}\{w_1\}\ | \leqq 1$$

でなければならない。いま，$\deg_{p_i} \mathrm{Num}\{w_1\} > \deg_{p_i} \mathrm{Den}\{w_1\}$ と仮定すると，$w(\mathbf{p},\mathbf{q})$ は孤立極 $p_i = \infty$ ($i = 1,\ 2$) をもつことになる。これは定理の仮定に反する。それ故，

$$\deg_{p_i} w_1 = \deg_{p_i} \mathrm{Den}\{w_1\} \geqq \deg_{p_i} \mathrm{Num}\{w_1\} \qquad (3\cdot 11)$$

$$\deg_{p_i} w = \deg_{p_i} \mathrm{Den}\{w\} \geqq \deg_{p_i} \mathrm{Num}\{w\} \qquad (3\cdot 12)$$

でなければならない。結局，式(3·12)(3·11)及び式(3·10)から式(3·3)が得られる。

ところで，先に $\underline{k}(p_2)$ は，極 $p_2=\infty$ をもたないものと仮定した。もし，このような極をもてば，$\underline{w}_0(p_2)$，$w_0(\mathbf{p})$ 及び $w(\mathbf{p},\mathbf{q})$ が順次同じ極をもつことになり，結局，定理の仮定に反する。　　（証明終り）

尚，系1～系3の各結果は式(3·9)のDiophantusの方程式を解けばよい。ところで，系2におけるように $\mathrm{Num}\{k(p_2,\mathbf{q})\}$ が式(3·4)の形で与えられるときには $k(p_2,\mathbf{q})$ の分母子は互いに約されて，$k(p_2,\mathbf{q})$ は恒等的に定数となる。それ故，系2は次のように言い換えることができる。但し，以下，$w(\mathbf{p},\mathbf{q})$ は正関数として取り扱う。

〔定理3·2〕[+3−3]

(1)　正関数 $w(\mathbf{p},\mathbf{q})$ が，既約多項式

$$g(\mathbf{p}) = \mathfrak{a}_1(p_2)\,p_1 + \mathfrak{a}_2(p_2) \qquad (3\cdot 13)$$

$$(\mathfrak{a}_2(p_2)/\mathfrak{a}_1(p_2)\ :\ \text{リアクタンス正関数})$$

のすべての零点の集合 $\mathbf{p}_0=(p_{10},p_{20})$ を（連立）極としてもち，且つ，p_0 の内，$\mathcal{D}^0(\mathbf{p})$ に属する要素のすべてから成る集合 $\mathbf{p}_0^{(0)}=(p_{10}^{(0)},\ p_{20}^{(0)})$ について

$$\frac{\partial}{\partial p_1}\ \frac{1}{w(\mathbf{p}_0^{(0)},\ \mathbf{q})} \underset{\mathbf{q}}{\equiv} \frac{1}{k_1} \quad (k_1：\text{実定数}) \qquad (3\cdot 14)$$

なる等式が成り立つならば，

$$w_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) = w(\mathbf{p},\mathbf{q}) - \frac{k\,\mathfrak{a}_1(p_2)}{\mathfrak{a}_1(p_2)p_1+\mathfrak{a}_2(p_2)} \quad (k \leqq k_1) \qquad (3\cdot 15)$$

で定義される $w_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$ も正関数で，各変数に関する次数は，$w(\mathbf{p},\mathbf{q})$ の対応する次数を越えない。

特に，k を k_1 に等しく選べば，

$$\deg_{p_i} w_1 = \deg_{p_i} w - \deg_{p_i} g \qquad (i=1,\ 2)$$

(2)　(1)における“正”は，“リアクタンス正”で置き換えることができる。

+3−3：　この定理における p_2 は，一般に，$\mathbf{r}_1=(p_2',\ p_3,\ \cdots,\ p_n)$ と考えてもよい。

(3) (1)における“正”，“リアクタンス正”は，それぞれ“正実”，“リアクタンス”で置き換えることができる。従って，この置き換えにおける“正実”は更に“リアクタンス”で置き換えることができる。

〈定理3・2系1〉

正関数$w(\mathbf{p},\mathbf{q})$が，$g(\mathbf{p})$（式(3・13)）のすべての零点の集合$\mathbf{p}_0$を極としてもち，且つ，$\mathbf{p}_0$の内，$\mathcal{D}^0(\mathbf{p})$に属する要素のすべてから成る集合$\mathbf{p}^{(0)}=(p_{10}^{(0)}, p_{20}^{(0)})$について

$$-\left[\frac{\mathcal{A}_2(p_{20}^{(0)})}{\mathcal{A}_1(p_{20}^{(0)})}\right]^2\cdot\frac{\partial}{\partial p_1}\frac{1}{w(\mathbf{p}_0^{(0)},\mathbf{q})}\underset{\mathbf{q}}{\equiv}\frac{1}{k_1}\quad(k_1：実定数)$$

であれば，

$$w_1(\mathbf{p},\mathbf{q})=w(\mathbf{p},\mathbf{q})-\frac{k\mathcal{A}_2(p_2)p_1}{\mathcal{A}_1(p_2)p_1+\mathcal{A}_2(p_2)}\quad(k\leqq k_1)$$

で定義される$w_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$も正関数である。次数については定理3・2の場合と同様である。

上記系1は先に示した定理3・1系1に当るもので，定理3・2において変数変換$p_1\to 1/p_1$を行えば容易に得られる。また，定理3・2におけるp_2を$\mathcal{D}^0(p_2)$の適当な点に固定すれば，即ち，$\mathcal{A}_2(p_2)/\mathcal{A}_1(p_2)$を$-j\omega_0(=\mathbf{p}_0=p_1^{(0)})$で置き換えれば，次の系2が得られる。そして，この場合が尾崎，嵩[1]によって議論された虚軸上の孤立極の分離問題に外ならない。

〈定理3・2系2〉

定理3・2において，$\mathbf{p}=(p_1)$，且つ，$g(\mathbf{p})$を

$$g(\mathbf{p})=p_1-j\omega_0\quad(\omega_0：実定数)$$

とすれば，式(3・15)は次式で置き換えることができる。[+3−4]

$$w_1(\mathbf{p},\mathbf{q})=\begin{cases} w(\mathbf{p},\mathbf{q})-\dfrac{k}{p_1-j\omega_0} & (\omega_0\neq\infty) \\ w(\mathbf{p},\mathbf{q})-kp_1 & (\omega_0=\infty)^{+3-5} \end{cases}\qquad(3\cdot16)$$

+3−4：　この場合，定理2・4により式(3・14)の仮定は不要である。

+3−5：　$j\omega_0$が$g(\mathbf{p})$の零点であることに対し，$\omega_0=\infty$は不自然であるが，変数変換$p_1\to 1/p_1$を行なって，p_1の原点で考えた後，変数をもとに戻したものと考えればよい。

（注１）　$w(\mathbf{p},\mathbf{q})$が特に正実であるとき，系２のような孤立極をもてば，共役点 $p_1=-j\omega_0$（$\omega_0 \neq 0, \infty$）も $w(\mathbf{p},\mathbf{q})$ の孤立極となるから，この共役点について系２を適用すると，式（3・16）は，

$$w_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) = w(\mathbf{p},\mathbf{q}) - \frac{2k\,p_1}{p_1^2+\omega_0^2}$$

と書ける。

定理３・２系２の場合の縦続区間を図３・３に示す。同図における (e) と (f) は（注１）によるもので，このような区間はそれぞれの作り方から容易に知れるように，伝送零点が互いに複素共役対にある同図 (a) 又は (b) の区間に縦続分解することができる。

尚，連立極の分離問題については，孤立の場合のように互いに複素共役対にある連立極を分離すると言う概念は存在しない。何故なら，$g(\mathbf{p})$（式（3・13））の $\mathcal{D}^0(\mathbf{p})$ における零点の集合 $\mathbf{p}_0^{(0)}$ に対し，その共役点 $\mathbf{p}_0^{(0)*}$ を零点の集合とする多項式を $f(\mathbf{p})$ とすると，

$$\left[\frac{\alpha_2(p_{20}^{(0)})}{\alpha_1(p_{20}^{(0)})}\right]^* = \frac{\tilde{\alpha}_2(p_{20}^{(0)*})}{\tilde{\alpha}_1(p_{20}^{(0)*})} = \frac{\tilde{\alpha}_{2*}(p_{20}^{(0)})}{\tilde{\alpha}_{1*}(p_{20}^{(0)})} = -\frac{\alpha_2(p_{20}^{(0)})}{\alpha_1(p_{20}^{(0)})}$$

が成り立つので，解析接続すると，

$$f(\mathbf{p}) = \alpha_1(p_2)\,p_1 + \alpha_2(p_2)$$

を得る。即ち，$f(\mathbf{p}) \equiv g(\mathbf{p})$。これは，$\mathrm{Den}\{w(\mathbf{p},\mathbf{q})\}$ が因数 $g^2(\mathbf{p})$ をもつことになり，定理２・５の性質に矛盾するからである。

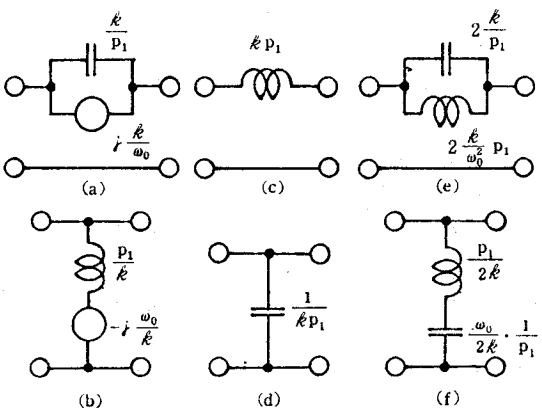


図３・３　孤立伝送零点をもつＡ，Ｂ区間

3·3節　Brune 区間の分離

前節では，$\mathcal{D}^0(\mathbf{p})$に属する伝送零点において正又は正実関数の値が$\mathbf{q}$に無関係に無限となる場合であった。本節では，そのような伝送零点において有限な純虚数値となる場合について考察し，定理3·2及びその系で得られた結果を拡張する。本節で考察されるBrune区間は，イミタンス行列が，

$$W(\mathbf{p}) = a\,p_1 \left[\begin{array}{c|c} 1 & m_1 \\ \hline m_1 & m_1^2 \end{array}\right] + b\,\frac{\mathcal{A}_2(p_2)}{\mathcal{A}_1(p_2)} \left[\begin{array}{c|c} 1 & m_2 \\ \hline m_2 & m_2^2 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{l} a,\ b,\ m_1,\ m_2 > 0 \\ \mathcal{A}_2(p_2)/\mathcal{A}_1(p_2)\ :\ \text{リアクタンス正関数} \end{array}\right)$$

の形で表わされる2端子対網である。

〔定理3·3〕

(1)　$w(\mathbf{p},\mathbf{q})$（$\mathbf{p}=(p_1,p_2)$）を正関数，$g(\mathbf{p})$を

$$g(\mathbf{p}) = \mathcal{A}_1(p_2)\,p_1 + \mathcal{A}_2(p_2) \qquad (3\cdot17)$$

$$(\mathcal{A}_2(p_2)/\mathcal{A}_1(p_2)\ :\ \text{リアクタンス正関数})$$

で定義される既約多項式とする。$g(\mathbf{p})$のすべての零点の集合$\mathbf{p}_0=(p_{10},p_{20})$について，

$$w(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} -x_0\,p_{10} \qquad (x_0:\text{実定数}) \qquad (3\cdot18)$$

且つ，$\mathbf{p}_0$の内，$\mathcal{D}^0(\mathbf{p})$に属する要素のすべてから成る集合$\mathbf{p}_0^{(0)}$について

$$\frac{\partial}{\partial p_1}\,w(\mathbf{p}_0^{(0)},\mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} a_0 \qquad (a_0:\text{実定数}) \qquad (3\cdot19)$$

なる等式が成り立てば，

$$w_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{I_1(\mathbf{p})\,w(\mathbf{p},\mathbf{q}) - I_2(\mathbf{p})}{I_3(\mathbf{p}) - I_4(\mathbf{p})\,w(\mathbf{p},\mathbf{q})} \qquad (3\cdot20)$$

で定義される$w_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$も正関数で，各変数に関する次数は$w(\mathbf{p},\mathbf{q})$の対応する次数を越えない。

ここで，

$$
\left.\begin{aligned}
I_1(\mathbf{p}) &= \frac{\phi_0}{a_0}\left\{\phi_0\,\alpha_1(p_2)\,p_1 + a_0\,\alpha_2(p_2)\right\} \\
I_2(\mathbf{p}) &= \frac{\phi_0}{a_0}\,x_0^2\,\alpha_2(p_2)\,p_1 \\
I_3(\mathbf{p}) &= a_0\,\alpha_1(p_2)\,p_1 + \phi_0\,\alpha_2(p_2) \\
I_4(\mathbf{p}) &= \alpha_1(p_2)
\end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot21)
$$

但し，　$\phi_0 = a_0 + x_0 = \dfrac{\partial}{\partial p_1}\,w(\mathbf{p}_0^{(0)}, \mathbf{q}) + x_0 \qquad (>0)$

特に，$w(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ が p_i（$i=1, 2$）に関して孤立極をもたなければ，

$$\deg_{p_i} w_1 = \deg_{p_i} w - \deg_{p_i} g \qquad (i=1, 2) \qquad (3\cdot22)$$

(2)　(1)における“正”は，“リアクタンス正”で置き換えることができる。

(3)　(1)における“正”，“リアクタンス正”は，それぞれ“正実”，“リアクタンス”又は共に“リアクタンス”で置き換えることができる。

実現すべき $w(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ に対し，定理 3・3 に示すような定数 x_0，a_0 が存在すれば，図 3・4 (a) に示すような縦続区間を分離して，[+3−6] p_1 について 1 次，p_2 について $\deg_{p_2}(\alpha_2/\alpha_1)$ 次だけ低い関数の合成に問題を帰着させることができる。

尚，式（3・21）で定義された $I_1(\mathbf{p})$，$I_2(\mathbf{p})$ の代わりにそれぞれを，

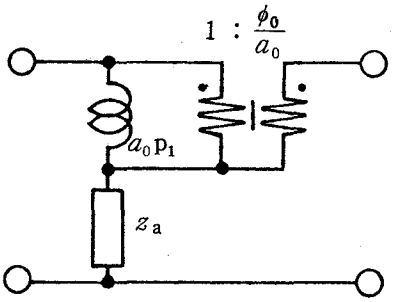
$$\left(\frac{a_0}{\phi_0}\right)^2 I_1(\mathbf{p}), \qquad \left(\frac{a_0}{\phi_0}\right)^2 I_2(\mathbf{p}) \qquad (3\cdot23)$$

で置き換えてもよい。勿論，この置換によって定義される $w_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ も正関数である。これを回路的に言えば，図 3・4 (a) の出力端に変成比 $1 : a_0/\phi_0$ の理想変成器を縦続接続して，回路の変換を行ったことを意味する。そのとき，図 3・4 (b) に示される形の Brune 区間が求まる。

〈定理 3・3 系 1〉

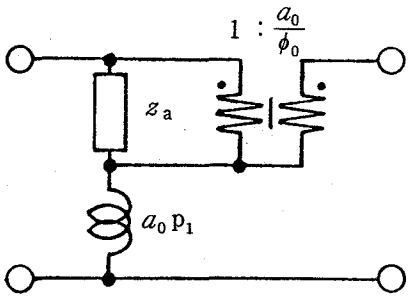
正関数 $w(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ が，$g(\mathbf{p})$（式（3・17））のすべての零点の集合 $\mathbf{p}_0$ について，

+3−6：　$w(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ は駆動点インピーダンスとしている。以後も特に断わらない限り同じである。尚，回路モデルにおける各枝もすべてインピーダンスで表わしている。



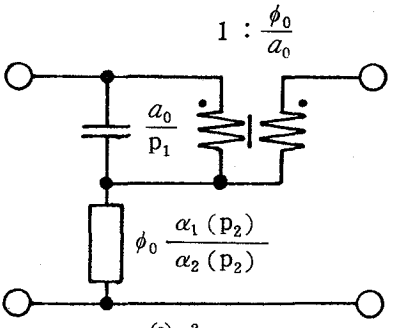
$$a_0 = \frac{\partial}{\partial p_1} w(\mathbf{p}_0^{(0)}, \mathbf{q})$$

(a)



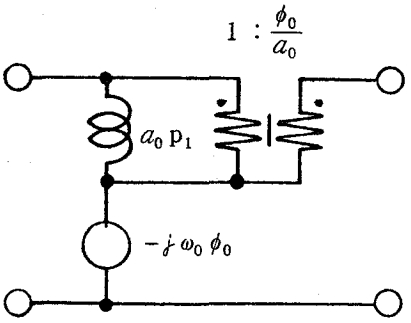
$$z_a = \phi_0 \frac{\alpha_2(p_2)}{\alpha_1(p_2)} \qquad \phi_0 = a_0 + x_0$$

(b)



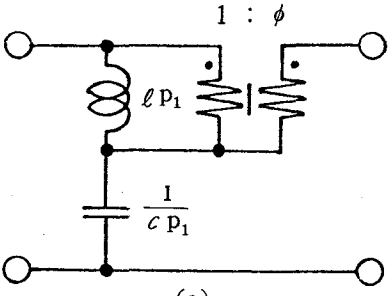
$$a_0 = -\left[\frac{\alpha_2(p_{20}^{(0)})}{\alpha_1(p_{20}^{(0)})}\right]^2 \frac{\partial}{\partial p_1} w(\mathbf{p}_0^{(0)}, \mathbf{q})$$

(c)



$$a_0 = \frac{\partial}{\partial p_1} w(\mathbf{p}_0^{(0)}, \mathbf{q}) \quad (\mathbf{p}_0^{(0)} = -j\omega_0)$$

(d)



(e)

$$\ell = \frac{a_0}{1+\phi}, \qquad c = \frac{1}{\ell} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 \phi}$$

$$\phi = \frac{a_0 - x_0}{a_0 + x_0}$$

$$a_0 = \frac{\partial}{\partial p_1} w(\mathbf{p}_0^{(0)}, \mathbf{q}) \quad (\mathbf{p}_0^{(0)} = -j\omega_0)$$

図 3・4　Brune 区間

$$\mathrm{w}(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} -\frac{x_0}{\mathrm{p}_{10}} \qquad (\ x_0 : \text{実定数}\ )$$

且つ，$\mathbf{p}_0$ の内，$\mathcal{D}^0(\mathbf{p})$ に属する要素のすべてから成る集合 $\mathbf{p}_0^{(0)}$ について

$$-\left[\frac{\mathcal{Q}_2(\mathrm{p}_{20}^{(0)})}{\mathcal{Q}_1(\mathrm{p}_{20}^{(0)})}\right]^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathrm{p}_1} \mathrm{w}(\mathbf{p}_0^{(0)}, \mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} a_0 \qquad (\ a_0 : \text{実定数}\ )$$

であれば，式（3・20）で定義された $\mathrm{w}_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ も正関数である（図3・4 (c)）。

但し，

$$\mathrm{I}_1(\mathbf{p}) = \frac{\phi_0}{a_0}\left\{a_0\,\mathcal{Q}_1(\mathrm{p}_2)\,\mathrm{p}_1 + \phi_0\,\mathcal{Q}_2(\mathrm{p}_2)\right\}$$

$$\mathrm{I}_2(\mathbf{p}) = \frac{\phi_0}{a_0} x_0^2\,\mathcal{Q}_1(\mathrm{p}_2)$$

$$\mathrm{I}_3(\mathbf{p}) = a_0\,\mathcal{Q}_1(\mathrm{p}_2)\,\mathrm{p}_1 + \phi_0\,\mathcal{Q}_2(\mathrm{p}_2)$$

$$\mathrm{I}_4(\mathbf{p}) = \mathcal{Q}_2(\mathrm{p}_2)\,\mathrm{p}_1$$

$$\phi_0 = a_0 + x_0 = x_0 - \left[\frac{\mathcal{Q}_2(\mathrm{p}_{20}^{(0)})}{\mathcal{Q}_1(\mathrm{p}_{20}^{(0)})}\right]^2 \frac{\partial}{\partial \mathrm{p}_1} \mathrm{w}(\mathbf{p}_0^{(0)}, \mathbf{q})$$

〈定理 3・3 系 2 〉

定理 3・3 において，$\mathbf{p} = (\mathrm{p}_1)$，且つ，

$$\mathrm{g}(\mathbf{p}) = \mathrm{p}_1 - j\,\omega_0 \qquad (\ \omega_0 : \text{実定数}\ )$$

とすれば，そのとき，式（3・21）は次の通りである（図3・4 (d)）。[+3−7]

$$\mathrm{I}_1(\mathbf{p}) = \frac{\phi_0}{a_0}(\ \phi_0\,\mathrm{p}_1 - j\,a_0\,\omega_0\ )$$

$$\mathrm{I}_2(\mathbf{p}) = -\,j\,\frac{\phi_0}{a_0} x_0^2\,\omega_0\,\mathrm{p}_1$$

$$\mathrm{I}_3(\mathbf{p}) = a_0\,\mathrm{p}_1 - j\,\omega_0\,\phi_0$$

$$\mathrm{I}_4(\mathbf{p}) = 1$$

$$\phi_0 = \frac{\partial}{\partial \mathrm{p}_1} \mathrm{w}(\mathbf{p}_0^{(0)}, \mathbf{q}) + x_0 \qquad (\mathbf{p}_0^{(0)} = j\,\omega_0)$$

+3−7： この場合，定理 2・4 により式（3・19）の仮定は不要である。尚，$\mathbf{p}_0 = \mathrm{p}_{10} = \mathbf{p}_0^{(0)} = \mathrm{p}_{10}^{(0)} = j\,\omega_0$

（注２）　$w(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ $(\mathbf{p}=(p_1))$ が正実であるとき，系２のように点 $p_{10}=j\omega_0$ で式（3・18）が成り立てば，共役点 p_{10}^* において，

$$w(\mathbf{p}_0^*, \mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} -x_0 p_{10}^*$$

$$\frac{\partial}{\partial p_1} w(\mathbf{p}_0^{(0)*}, \mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} a_0 \quad {}^{+3-7}$$

が保証されるので，残りの関数 $w_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ について

$$w_1(\mathbf{p}_0^*, \mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} -\frac{\phi_0}{a_0} x_0 p_{10}^*$$

$$\frac{\partial}{\partial p_1} w(\mathbf{p}_0^{(0)*}, \mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} \frac{\phi_0}{a_0}(a_0 - x_0)$$

となる。そこで，共役点について系２を $w_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ に適用すると，$w(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ より互いに複素共役対にある図３・４(d) の区間が二つ縦続に分離することができる。そして，二つの区間をまとめると式（3・20）における $I_1(\mathbf{p}) \sim I_4(\mathbf{p})$ は次のようになる（図３・４(e)）。+3−8

$$I_1(\mathbf{p}) = \phi p_1^2 + \omega_0^2$$

$$I_2(\mathbf{p}) = \frac{1+\phi}{a_0}(\omega_0 x_0)^2 p_1$$

$$I_3(\mathbf{p}) = \frac{1}{\phi} p_1^2 + \omega_0^2$$

$$I_4(\mathbf{p}) = \frac{1+\phi}{\phi} \cdot \frac{p_1}{a_0}$$

但し，

$$\phi = \frac{\frac{\partial}{\partial p_1} w(\mathbf{p}_0^{(0)}, \mathbf{q}) - x_0}{\frac{\partial}{\partial p_1} w(\mathbf{p}_0^{(0)}, \mathbf{q}) + x_0} \quad (>0)$$

〈補題３・１〉

(1)　式（3・18）は，次の二つに同値である。

$$w(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} x_0 \frac{\mathfrak{a}_2(p_{20})}{\mathfrak{a}_1(p_{20})} \qquad (3\cdot24)$$

$$w(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} a_0 p_{10} + \phi_0 \frac{\mathfrak{a}_2(p_{20})}{\mathfrak{a}_1(p_{20})}$$

+3−8：　3・2節でも述べたように，連立伝送零点の場合，互いに複素共役対にある連立伝送零点を分離すると言う概念は存在しない。

(2) 式(3・19)が成り立てば，$\mathbf{p}_0$ についても成り立つ。

(3) 式(3・18)及び式(3・19)が成り立てば，次式が成り立つ。

$$\frac{\partial}{\partial p_2} w(\mathbf{p}_0^{(0)}, \mathbf{q}) \left\{ \frac{\partial}{\partial p_2} \frac{\alpha_2(p_{20}^{(0)})}{\alpha_1(p_{20}^{(0)})} \right\}^{-1} \underset{\mathbf{q}}{\equiv} \phi_0$$

従って，$\mathbf{p}_0$ についても上式が成り立つ。

(4) 式(3・18)，(3・19)について次の不等式が成立する。

$$|x_0| < \frac{\partial}{\partial p_1} w(\mathbf{p}_0^{(0)}, \mathbf{q})$$

(定理3・3(1)の証明)　定理2・4より，$a_0 > 0$ である。以下，$x_0 \geqq 0$，及び $x_0 < 0$ に分けて証明する。

(i) $x_0 \geqq 0$ ：このとき，$z_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ を

$$z_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + x_0 p_1 \qquad (3 \cdot 25)$$

で定義すると，この $z_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ は，

$$\deg_{p_1} z_1 = \deg_{p_1} w + 1, \qquad \deg_{p_2} z_1 = \deg_{p_2} w \qquad (3 \cdot 26)$$

を満たす正関数である。そして，零点の集合 $\mathbf{p}_0$ に対し $z_1(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} 0$ となる。即ち，$1/z_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ は $g(\mathbf{p})$ の零点で規定される連立極をもつ。そこで，$\mathbf{p}_0$ の内，$\mathcal{D}^0(\mathbf{p})$ に属する $\mathbf{p}_0^{(0)}$ について，極 $p_1 = p_{10}^{(0)}$ における留数を求めると，

$$\lim_{p_1 \to p_{10}^{(0)}} (p_1 - p_{10}^{(0)}) \frac{1}{z_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})|_{p_2 = p_{20}^{(0)}}} \underset{\mathbf{q}}{\equiv} \frac{1}{\phi_0} > 0$$

が得られる。

定理3・2(1)より

$$\frac{1}{z_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})} = \frac{1}{z_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})} - \frac{1}{\phi_0} \cdot \frac{\alpha_1(p_2)}{\alpha_1(p_2) p_1 + \alpha_2(p_2)} \qquad (3 \cdot 27)$$

で定義される正関数 $z_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ が求まる。そして，次式が成立する。

$$\deg_{p_i} z_2 = \deg_{p_i} z_1 - \deg_{p_i} g \quad (i = 1, 2) \qquad (3 \cdot 28)$$

式(3・27)に式(3・25)を代入すると，$z_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ は，

$$z_2(\mathbf{p},\mathbf{q})=\phi_0\frac{x_0 p_1^2+\left\{w(\mathbf{p},\mathbf{q})+x_0\frac{\mathfrak{A}_2(p_2)}{\mathfrak{A}_1(p_2)}\right\}p_1+\frac{\mathfrak{A}_2(p_2)}{\mathfrak{A}_1(p_2)}w(\mathbf{p},\mathbf{q})}{a_0 p_1+\phi_0\frac{\mathfrak{A}_2(p_2)}{\mathfrak{A}_1(p_2)}-w(\mathbf{p},\mathbf{q})} \tag{3·29}$$

と書ける。上式は，$p_1=\infty$ を孤立極としてもつことは明白。定理2·4より

$$\lim_{p_1\to\infty}\frac{z_2(\mathbf{p},\mathbf{q})}{p_1}=\frac{\phi_0}{a_0}\left\{x_0+\lim_{p_1\to\infty}\frac{w(\mathbf{p},\mathbf{q})}{p_1}\right\}\geqq\frac{\phi_0}{a_0}\cdot x_0>0$$

それ故，次の正関数 $w_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$ を得る。

$$w_1(\mathbf{p},\mathbf{q})=z_2(\mathbf{p},\mathbf{q})-\frac{\phi_0}{a_0}\cdot x_0 p_1 \tag{3·30}$$

特に，$\lim_{p_1\to\infty} w(\mathbf{p},\mathbf{q})/p_1=0$ であれば，

$$\deg_{p_1} w_1=\deg_{p_1} z_1-1,\qquad \deg_{p_2} w_1=\deg_{p_2} z_2 \tag{3·31}$$

式(3·30)に式(3·29)を代入すると式(3·20)が，また式(3·31)に式(3·28)(3·26)を代入すると式(3·22)が求まる。

以上の操作を回路モデルで表わすと図3·5(a)のようになる。

(ii) $x_0<0$：式(3·24)に基づき，次の正関数 $z_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$ を定義する。

$$\frac{1}{z_1(\mathbf{p},\mathbf{q})}=\frac{1}{w(\mathbf{p},\mathbf{q})}-\frac{1}{x_0}\cdot\frac{\mathfrak{A}_1(p_2)}{\mathfrak{A}_2(p_2)} \tag{3·32}$$

$$\deg_{p_1} z_1=\deg_{p_1} w,\qquad \deg_{p_2} z_1=\deg_{p_2} w+\deg_{p_2} g \tag{3·33}$$

このとき，$\mathbf{p}_0$ は $z_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$ の連立極の集合である。従って，

$$\lim_{p_1\to p_{10}^{(0)}}(p_1-p_{10}^{(0)})z_1(p_1,p_{20}^{(0)},\mathbf{q})=-\frac{w^2(\mathbf{p}_0^{(0)},\mathbf{q})}{\frac{\partial}{\partial p_1}w(\mathbf{p}_0^{(0)},\mathbf{q})}=-\frac{x_0^2}{a_0}\left[\frac{\mathfrak{A}_2(p_{20}^{(0)})}{\mathfrak{A}_1(p_{20}^{(0)})}\right]^2\geqq 0$$

それ故，定理3·2系1より

$$z_2(\mathbf{p},\mathbf{q})=z_1(\mathbf{p},\mathbf{q})-\frac{x_0^2}{a_0}\cdot\frac{\mathfrak{A}_2(p_2)p_1}{\mathfrak{A}_1(p_2)p_1+\mathfrak{A}_2(p_2)} \tag{3·34}$$

なる正関数を得ることができ，

$$\deg_{p_i} z_2=\deg_{p_i} z_1-\deg_{p_i} g\quad(i=1,2) \tag{3·35}$$

である。式（3·34）に式（3·32）を代入すると，$1/z_2(\mathbf{p},\mathbf{q})$ は

$$\frac{1}{z_2(\mathbf{p},\mathbf{q})}=\frac{a_0}{x_0}\cdot\frac{1}{\mathcal{A}_2(p_2)}$$

$$\frac{x_0\mathcal{A}_2^2(p_2)+[x_0p_1-w(\mathbf{p},\mathbf{q})]\mathcal{A}_1(p_2)\mathcal{A}_2(p_2)-p_1w(\mathbf{p},\mathbf{q})\mathcal{A}_1^2(p_2)}{\phi_0p_1w(\mathbf{p},\mathbf{q})\mathcal{A}_1(p_2)+[a_0w(\mathbf{p},\mathbf{q})-x_0^2p_1]\mathcal{A}_2(p_2)} \tag{3·36}$$

と書ける。上式は $\mathcal{A}_2(p_2)$ の零点に起因する p_2 の孤立極，及び，$\deg_{p_2}\mathcal{A}_1>\deg_{p_2}\mathcal{A}_2$ の場合に限り $p_2=\infty$ の孤立極をもつ。これらの一つを $p_2^{(1)}\in\mathcal{D}^0(p_2)$ とすれば，[+3-9]

$$\lim_{p_2\to p_2^{(1)}}\frac{p_2-p_2^{(1)}}{z_2(\mathbf{p},\mathbf{q})}=-\frac{a_0}{\phi_0x_0}\lim_{p_2\to p_2^{(1)}}(p_2-p_2^{(1)})\frac{\mathcal{A}_1(p_2)}{\mathcal{A}_2(p_2)}>0 \tag{3·37}$$

従って，次の正関数 $w_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$ が得られる。

$$\frac{1}{w_1(\mathbf{p},\mathbf{q})}=\frac{1}{z_2(\mathbf{p},\mathbf{q})}+\frac{a_0}{\phi_0x_0}\cdot\frac{\mathcal{A}_1(p_2)}{\mathcal{A}_2(p_2)} \tag{3·38}$$

$$\deg_{p_1}w_1=\deg_{p_1}z_2,\qquad \deg_{p_2}w_1=\deg_{p_2}z_2-\deg_{p_2}g \tag{3·39}$$

式（3·38）及び式（3·36）から式（3·20）が，また式（3·39）（3·35）及び式（3·33）から式（3·22）がそれぞれ得られる。

以上の操作を回路モデルで表現すれば，図 3·5 (b) のように示される。

図 3·4 (a) は図 3·5 (a)，同図 (b) にそれぞれ等価で，図 3·5 (a) と同図 (b) について次の関係が成立する。

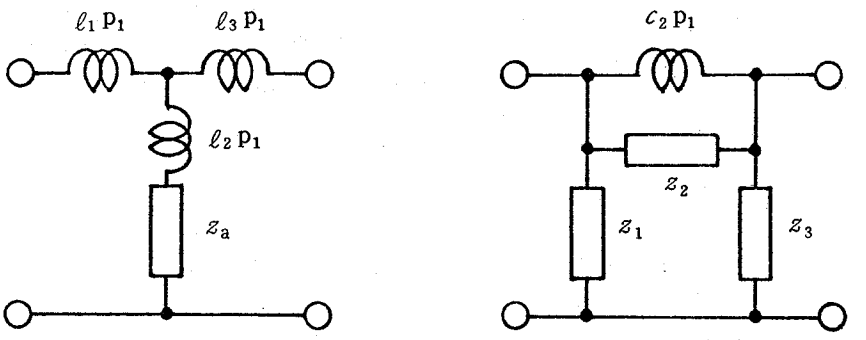
$$\ell_1=\frac{c_3}{c_2(c_1+c_3)},\qquad \ell_2=\frac{1}{c_1+c_3},\qquad \ell_3=\frac{1}{c_2(c_1+c_3)}$$

$$\frac{1}{\ell_1}+\frac{1}{\ell_2}+\frac{1}{\ell_3}=0,\qquad \frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_3}=0$$

但し，$\ell_1=-x_0<0,\qquad \ell_2=\phi_0=a_0+x_0>0,\qquad \ell_3=\dfrac{\phi_0}{a_0}x_0>0$

$$c_1=\frac{1}{x_0}>0,\qquad c_2=\frac{a_0}{x_0^2}>0,\qquad c_3=-\frac{a_0}{\phi_0}\cdot\frac{1}{x_0}<0$$

+3-9： $p_2=\infty$ については，変数変換 $p_2\to 1/p_2$ を行なって $p_2=0$ で考えた後，変数をもとに戻したものと考えればよい。



$$z_a = \ell_2 \frac{\alpha_2(p_2)}{\alpha_1(p_2)}$$

(a) $x_0 \geqq 0$

$$z_i = c_i \frac{\alpha_2(p_2)}{\alpha_1(p_2)}$$

(b) $x_0 < 0$

図 3・5　Brune の操作

（証明終り）

尚，式（3・23）に示した関係で記述される $w_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ を，即ち，図 3・4 (b) に示す Brune 区間を得るには，次式で定義される $z_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ に関して定理 3・3 (1) の証明と同様の操作を行えばよい。

$$x_0 \geqq 0 \quad : \quad \frac{1}{z_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})} = \frac{1}{w(\mathbf{p}, \mathbf{q})} + \frac{1}{x_0 p_1}$$

$$x_0 < 0 \quad : \quad z_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - x_0 \frac{\mathcal{A}_2(p_2)}{\mathcal{A}_1(p_2)}$$

〈定理 3・3 系 3〉

$w(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ を正関数とする（但し，$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n)$）。既約多項式

$$g(\mathbf{p}) = \mathcal{A}_1(p_n) \sum_{i=1}^{n-1} b_i p_i + \mathcal{A}_2(p_n) \qquad (b_i > 0)$$

のすべての零点の集合 $\mathbf{p}_0 = (p_{10}, p_{20}, \cdots\cdots, p_{no})$ について，

$$w(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} -\sum_{i=1}^{n-1} x_i p_{io}$$

及び，$\mathbf{p}_0$ の内，$\mathcal{D}^0(\mathbf{p})$ に属する要素のすべてから成る集合 $\mathbf{p}_0^{(0)}$ について

$$\frac{\partial}{\partial p_i} w(\mathbf{p}_0^{(0)}, \mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} a_i \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

と書ける実定数 x_i 及び a_i が存在し，且つ，すべての x_i が正，あるいは負であれば，次の等式が成り立つ。

$$x_i b_j = x_j b_i\,, \qquad a_i b_j = a_j b_i\,, \qquad a_i + x_i = a_j + x_j \quad (>0)$$

そして，式（3·20）で定義される $w_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$ も正関数で，各変数の次数は $w(\mathbf{p},\mathbf{q})$ の対応する次数を越えない。但し，式（3·20）における $I_1(\mathbf{p})\sim I_4(\mathbf{p})$ は次の通りである。

$$I_1(\mathbf{p}) = \frac{\phi_0}{a_0}\left\{\phi_0\,\alpha_1(p_n)\sum_{i=1}^{n-1} b_i\,p_i + \alpha_2(p_n)\right\}$$

$$I_2(\mathbf{p}) = \frac{\phi_0}{a_0}\,x_0^2\,\alpha_2(p_n)\sum_{i=1}^{n-1} b_i\,p_i$$

$$I_3(\mathbf{p}) = a_0\,\alpha_1(p_n)\sum_{i=1}^{n-1} b_i\,p_i + \phi_0\,\alpha_2(p_n)$$

$$I_4(\mathbf{p}) = \alpha_1(p_n)$$

ここで，　$a_0 = a_i / b_i$，　$x_0 = x_i / b_i$，　$\phi_0 = a_0 + x_0$

特に，$w(\mathbf{p},\mathbf{q})$ が p_i（$i=1, 2, \cdots\cdots, n$）についての孤立極をもたなければ，次式が成り立つ。

$$\deg_{p_i} w_1 = \deg_{p_i} w - \deg_{p_i} g \qquad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

上記系3は，定理3·3(1)における p_1 を $\sum_{i=1}^{n-1} b_i\,p_i$ で変換し，p_2 を p_n で置き換えたに過ぎない。このような変数変換によって定理3·3を多変数化の意味で拡張したが，脚注（+3−3）にも指摘したように定理3·3(1)における p_2 を $\mathbf{r}_1=(p_2, p_3, \cdots\cdots, p_n)$ で置き換えて多変数化へ持ち込むことができる。但し，+3−3の場合，リアクタンス正関数 $\alpha_2(\mathbf{r}_1)/\alpha_1(\mathbf{r}_1)$ については，特別の条件を課していない。しかし，今の場合 $\alpha_2(\mathbf{r}_1)/\alpha_1(\mathbf{r}_1)$ あるいはこの逆数の極がすべて孤立極であるという条件が必要である。これは，式（3·36）の場合を考えれば容易に知れる。

3·4節　Richards 区間の分離

本節では，伝送零点において正関数が複素定数となる場合を考察する。そのとき，このような条件を満たす2端子対網のイミタンス行列は，

$$W(\mathbf{p}) = \frac{1}{w_0(\mathbf{p})}\left[\begin{array}{c|c} 1 & \delta \\ \hline \delta & 1 \end{array}\right] + a\left[\begin{array}{c|c} 0 & \varepsilon \\ \hline -\varepsilon & 0 \end{array}\right] + j\,b\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{l} a\ (>0),\ b：実定数 \\ w_0(\mathbf{p})：リアクタンス正関数 \end{array}\right)$$

の形で表わすことができる。また，その条件は1変数の場合におけるBott-Buffin の操作を可能にするための条件でもあることを明らかにする。そして，これらの結果を行列の場合へ拡張する。但し，$w_0(\mathbf{p})$，δは3·2節の冒頭で述べた通りとする。

3·4·1　1端子対網に対するRichards及びBott-Duffinの操作

先ず，次の補題においてUB関数に対するRichards の変換を考察し，その結果を正関数の場合に翻訳する。

〈補題3·2〉

(1)　$g(\mathbf{p})$ $(\mathbf{p}=(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n))$は，

$$g(\mathbf{p}) \fallingdotseq \varepsilon \widetilde{g}_*(\mathbf{p}) \qquad (3\cdot 40)$$

の関係にある既約複素Hurwitz多項式とする。UB関数$s(\mathbf{p}, \mathbf{q})$が，$\widetilde{g}_*(\mathbf{p})$のすべての零点の集合$\mathbf{p}_0$について，

$$s(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} 0$$

なる等式が成り立てば，

$$s_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{s(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{s_0(\mathbf{p})}$$

で定義される$s_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$もUB関数で，各変数に関するその次数は$s(\mathbf{p}, \mathbf{q})$の対応する次数を越えない。

ここで，$s_0(\mathbf{p})$は次式で与えられるPara-UB関数である。

$$s_0(\mathbf{p}) = \frac{\varepsilon \widetilde{g}_*(\mathbf{p})}{g(\mathbf{p})} \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

特に，$g(\mathbf{p})$のすべての零点の集合$-\mathbf{p}_0^* = (-p_{10}^*, -p_{20}^*, \cdots\cdots, -p_{n0}^*)$について

$$s(-\mathbf{p}_0^*, \mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} \infty \qquad (3\cdot 41)$$

が成り立つならば，

$$\deg_{p_i} s_1 = \deg_{p_i} s - \deg_{p_i} g \quad (i=1, 2, \cdots, n) \qquad (3\cdot 42)$$

(2) (1)における“UB”は，“Para-UB”で置き換えることができる。

(3) (1)における“複素Hurwitz”，“UB”，“Para-UB”及び“$-\mathbf{p}_0^*$”は，それぞれ“実Hurwitz”，“UBR”，“Para-UBR”及び“$-\mathbf{p}_0$”で置き換えることができる。従って，この置き換えにおける“UBR”は，“Para-UBR”で置き換えることができる。

（補題3・2(1)の証明）　仮定により，Num{s}は既約因数$\widetilde{g}_*(\mathbf{p})$によって整除されるから，[47] $s_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$は開領域$\mathcal{D}^+(\mathbf{p})\times\mathcal{D}^+(\mathbf{q})$において正則である。また，不確定特異点を除く$\mathcal{D}^0(\mathbf{p})$において，$|s_0(\mathbf{p})|\equiv 1$であることに注意すれば，不確定特異点を除く$\mathcal{D}^0(\mathbf{p})\times\mathcal{D}^0(\mathbf{q})$で，$|s_1(\mathbf{p},\mathbf{q})|\leqq 1$となる。それ故，定理2・9により$s_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$はUB関数で，各変数に対するその次数は$s(\mathbf{p},\mathbf{q})$の対応する次数に等しい。特に，式(3・41)が成立すると，Den{s}は既約因数$g(\mathbf{p})$で整除されるから式(3・42)が求まる。　（証明終り）

補題3・2における$s(\mathbf{p},\mathbf{q})$，$s_0(\mathbf{p})$及び$s_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$に対し，

$$s(\mathbf{p},\mathbf{q})=\frac{w(\mathbf{p},\mathbf{q})-z_0}{w(\mathbf{p},\mathbf{q})+z_0^*}$$

$$s_0(\mathbf{p})=\frac{w_0(\mathbf{p})-z_0}{w_0(\mathbf{p})+z_0^*}$$

$$s_1(\mathbf{p},\mathbf{q})=\frac{w_1(\mathbf{p},\mathbf{q})-z_0}{w_1(\mathbf{p},\mathbf{q})+z_0^*}$$

なる$w(\mathbf{p},\mathbf{q})$，$w_0(\mathbf{p})$，$w_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$及び複素定数$z_0$（$\mathrm{Re}\ z_0>0$）を対応させれば，定理2・8から直ちに次の定理が得られる。

〔定理3・4〕

(1) $w(\mathbf{p},\mathbf{q})$を正関数とする。既約多項式$\widetilde{g}_*(\mathbf{p})$のすべての零点の集合$\mathbf{p}_0$について

$$w(\mathbf{p}_0,\mathbf{q})\underset{\mathbf{q}}{\equiv} z_0 \qquad (z_0\ (\mathrm{Re}\ z_0>0)\ :\ \text{複素定数})$$

が成り立つならば，

$$w_1(\mathbf{p},\mathbf{q})=\frac{w_0(\mathbf{p})w(\mathbf{p},\mathbf{q})-|z_0|^2-j2(\mathrm{Im}\,z_0)w(\mathbf{p},\mathbf{q})}{w_0(\mathbf{p})-w(\mathbf{p},\mathbf{q})} \qquad (3\cdot 43)$$

で定義される $w_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$ も正関数で，各変数に対するその次数は $w(\mathbf{p},\mathbf{q})$ の対応する次数を越えない。

ここで，$w_0(\mathbf{p})$ は次式で与えられるリアクタンス正関数である。

$$w_0(\mathbf{p}) = \frac{z_0\, g(\mathbf{p}) + \varepsilon z_0^* \widetilde{g}_*(\mathbf{p})}{g(\mathbf{p}) - \varepsilon \widetilde{g}_*(\mathbf{p})} \qquad (3\cdot 44)$$

特に，$g(\mathbf{p})$ のすべての零点の集合 $-\mathbf{p}_0^*$ について

$$w(-\mathbf{p}_0^*,\ \mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} -z_0^* \quad {}^{+3-10}$$

が成り立てば，

$$\deg_{p_i} w_1 = \deg_{p_i} w - \deg_{p_i} g \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

(2) (1)における“正”は，“リアクタンス正”で置き換えることができる。

(3) (1)における“正”，“複素 Hurwitz”，“リアクタンス正”及び“$-\mathbf{p}_0^*$”は，それぞれ“正実”，“実 Hurwitz”，“リアクタンス”及び“$-\mathbf{p}_0$”で置き換えることができる。但し，$\mathrm{Im}\ z_0 = 0$ とする。尚，この置き換えにより，“正実”は，そのうえ“リアクタンス”で置き換えることができる。

変換式 $w_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$ は

$$\underline{w}_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{\underline{w}_0(\mathbf{p})\,\underline{w}(\mathbf{p},\mathbf{q}) - (\mathrm{Re}\ z_0)^2}{\underline{w}_0(\mathbf{p}) - \underline{w}(\mathbf{p},\mathbf{q})} \qquad (3\cdot 45)$$

のように書き直すことができる。但し，

$$\underline{w}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = w(\mathbf{p},\mathbf{q}) - j\,\mathrm{Im}\ z_0$$

$$\underline{w}_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) = w_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) - j\,\mathrm{Im}\ z_0$$

$$\underline{w}_0(\mathbf{p}) = w_0(\mathbf{p}) - j\,\mathrm{Im}\ z_0 = (\mathrm{Re}\ z_0)\frac{g(\mathbf{p}) + \varepsilon \widetilde{g}_*(\mathbf{p})}{g(\mathbf{p}) - \varepsilon \widetilde{g}_*(\mathbf{p})} \qquad (3\cdot 46)$$

式 (3・45) は虚数抵抗，[49] $j\ \mathrm{Im}\, z_0$ を $w(\mathbf{p},\mathbf{q})$ から分離し，残りの関数 $\underline{w}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ に再び定理 3・4 を適用したに過ぎない。そこで，式 (3・45) の変換式について回路表示すると図 3・6 (a) に示す N_R のような Richards 区間を得ることができる。

+3−10： ここで示した条件は，$\mathbf{p}_0$ について $\widetilde{w}_*(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}) \equiv -z_0^*$ という条件に同値である。

式（3・45）を $\underline{w}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ について書き直せば，

$$\underline{w}(\mathbf{p},\mathbf{q})=\frac{1}{\dfrac{1}{\underline{w}_0(\mathbf{p})}+\dfrac{1}{\underline{w}_1(\mathbf{p},\mathbf{q})}}+\frac{1}{\dfrac{\underline{w}_0(\mathbf{p})}{(\mathrm{Re}\ z_0)^2}+\dfrac{\underline{w}_1(\mathbf{p},\mathbf{q})}{(\mathrm{Re}\ z_0)^2}} \qquad (3\cdot 47)$$

となり，図3・6 (b) のように表わすことができる。これは1変数の場合における Bott－Duffin 形構成の操作に当るもので，先の Richards の操作に対しこの操作は理想ジャイレータが不用となっている。[+3−11]

尚，式（3・44）における ε の符号の差異により，$\underline{w}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ は二通りに表現することができる。それを区別するために $\varepsilon=+1$ の場合の $\underline{w}_0(\mathbf{p})$，$\underline{w}_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$ をそれぞれ $\underline{w}_{0+}(\mathbf{p})$，$\underline{w}_{1+}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ で，同様に $\varepsilon=-1$ の場合のそれらを $\underline{w}_{0-}(\mathbf{p})$，$\underline{w}_{1-}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ で表わせば，

$$\underline{w}_{0-}(\mathbf{p})=(\mathrm{Re}\ z_0)^2/\underline{w}_{0+}(\mathbf{p})$$

$$\underline{w}_{1-}(\mathbf{p},\mathbf{q})=(\mathrm{Re}\ z_0)^2/\underline{w}_{1+}(\mathbf{p},\mathbf{q})$$

なる関係が成立する。従って，ε の符号の差異は，ジャイレーション比が $\mathrm{Re}\ z_0$ の理想ジャイレータで互いにインピーダンス変換を行なったに過ぎない。

定理3・4において，$g(\mathbf{p})$ は既約であることを仮定したが，次の系に示すように，一般にそれらの積で表わされる場合へ拡張することができる。

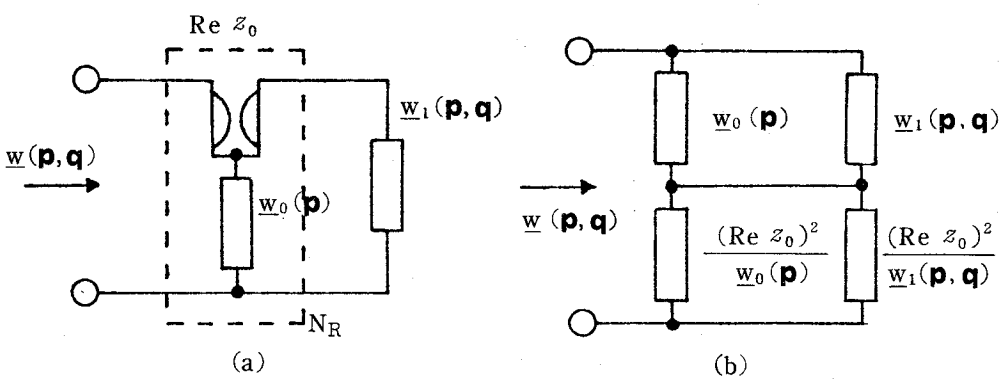


図3・6　1端子対網に対する Richards 及び Bott－Duffin の操作

+3−11：　縦続形の実現についても，ある条件の下で理想ジャイレータは除去できる（3・6節）。

〈定理 3・4 系 1 〉

定理 3・4 における $g(\mathbf{p})$, 及び $\varepsilon\widetilde{g}_*(\mathbf{p})$ は，それぞれ，

$$\left.\begin{aligned} g(\mathbf{p}) &= \prod_{k=1}^{t} g_k(\mathbf{p}) \\ \varepsilon\widetilde{g}_*(\mathbf{p}) &= \prod_{k=1}^{t} \varepsilon_k \widetilde{g}_{k*}(\mathbf{p}) \qquad (\varepsilon_k = \pm 1) \end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot 48)$$

で定義される多項式で置き換えることができる。但し，$g_k(\mathbf{p})$ は既約複素 Hurwitz 多項式で

$$g_i(\mathbf{p}) \neq g_j(\mathbf{p}) \qquad (i \neq j)$$

$$g_k(\mathbf{p}) \neq \varepsilon_k \widetilde{g}_{k*}(\mathbf{p})$$

を満たすものとする。

定理 3・4 では，$g(\mathbf{p})$ における各変数の次数について何ら制限を設けていない。もし，ある変数について，言うなれば p_1 について特に 1 次である場合に話を限定すると，式 (3・46) で示したリアクタンス正関数 $\underline{w}_0(\mathbf{p})$ は 3・2 節で示した $w_0(\mathbf{p})$ の形に帰着させることができる。以下，それらについて列挙する。

〈定理 3・4 系 2 〉

定理 3・4 において，$g(\mathbf{p})$ を

$$g(\mathbf{p}) = \psi(\mathbf{r}_1)\, p_1 + \phi(\mathbf{r}_1) \qquad (\mathbf{r}_1 = (p_2, p_3, \cdots, p_n))$$

とする。[+3−12] そのとき，式 (3・46) は次の形に書ける。

$$\underline{w}_0(\mathbf{p}) = r_0 \frac{\beta_1(\mathbf{r}_1)\, p_1 + \beta_2(\mathbf{r}_1)}{\alpha_1(\mathbf{r}_1)\, p_1 + \alpha_2(\mathbf{r}_1)} \qquad (r_0 = \mathrm{Re}\ z_0)$$

但し，

$$\beta_1(\mathbf{r}_1) = \frac{\psi(\mathbf{r}_1) - \varepsilon\widetilde{\psi}_*(\mathbf{r}_1)}{2} \qquad \beta_2(\mathbf{r}_1) = \frac{\phi(\mathbf{r}_1) + \varepsilon\widetilde{\phi}_*(\mathbf{r}_1)}{2}$$

$$\alpha_1(\mathbf{r}_1) = \frac{\psi(\mathbf{r}_1) + \varepsilon\widetilde{\psi}_*(\mathbf{r}_1)}{2} \qquad \alpha_2(\mathbf{r}_1) = \frac{\phi(\mathbf{r}_1) - \varepsilon\widetilde{\phi}_*(\mathbf{r}_1)}{2}$$

+3−12： 式 (3・40) から知られるように，$\psi(\mathbf{r}_1)/\phi(\mathbf{r}_1)$ はリアクタンス正関数を除く正関数である。

〈定理 3・4 系 3 〉

定理 3・4 において，g (**p**) を

$$g(\mathbf{p}) = \mathcal{A}_1(\mathbf{r}_1)\,p_1 + \{\sigma_0\,\mathcal{A}_1(\mathbf{r}_1) + \mathcal{A}_2(\mathbf{r}_1)\} \qquad (\sigma_0 > 0)$$

$$(\mathcal{A}_2(\mathbf{r}_1)/\mathcal{A}_1(\mathbf{r}_1)\ :\ \text{リアクタンス正関数})$$

とする。そのとき，式 (3・46) は次の形に書ける (図 3・7 (a))。[+3−13]

$$\underline{w}_0(\mathbf{p}) = \frac{r_0}{\sigma_0}\left\{p_1 + \frac{\mathcal{A}_2(\mathbf{r}_1)}{\mathcal{A}_1(\mathbf{r}_1)}\right\} \qquad (r_0 = \mathrm{Re}\ z_0)$$

〈定理 3・4 系 4 〉

定理 3・4 において，g (**p**) を

$$g(\mathbf{p}) = \{\sigma_0\,\mathcal{A}_1(\mathbf{r}_1) + \mathcal{A}_2(\mathbf{r}_1)\}\,p_1 + \mathcal{A}_1(\mathbf{r}_1)$$

とする。そのとき，式 (3・46) は次の形に書ける (図 3・7 (b))。

$$\underline{w}_0(\mathbf{p}) = \frac{r_0}{\sigma_0}\left\{\frac{1}{p_1} + \frac{\mathcal{A}_2(\mathbf{r}_1)}{\mathcal{A}_1(\mathbf{r}_1)}\right\} \qquad (r_0 = \mathrm{Re}\ z_0)$$

〈定理 3・4 系 5 〉

定理 3・4 において，**p** = (p_1)，且つ，g (**p**) を

$$g(\mathbf{p}) = p_1 + (\sigma_0 - j\,\omega_0) \qquad (\omega_0\ (\neq \infty)\ :\ \text{実定数})$$

とする。そのとき，式 (3・46) は次の形に書ける (図 3・7 (c))。

$$\underline{w}_0(\mathbf{p}) = \begin{cases} \dfrac{r_0}{\sigma_0}(p_1 - j\,\omega_0) & (r_0 = \mathrm{Re}\ z_0) \\[2ex] \dfrac{r_0}{\sigma_0}\left\{\dfrac{|p_{10}|^2}{p_1} + j\,\omega_0\right\} & (p_{10} = \mathbf{p}_0 = \sigma_0 + j\,\omega_0) \end{cases}$$

[+3−14]

(注 3)　w (**p**, **q**) (**p** = (p_1)) が正実であるとき，系 5 に示す点 $p_1 = p_{10}$ (ω_0

+3−13 :　$\varepsilon = +1$ の場合について示している。次の系 4，系 5 についても同様である。

+3−14 :　$\omega_0 = 0$ と置けば，Saito によって得られた結果に帰着する。[10]

$\neq 0$, ∞) で $w(\mathbf{p},\mathbf{q})$ の値が $\mathbf{q}$ に無関係な実定数 r_0 となれば，複素共役点 p_{10}^* においてもそれは r_0 となる。それ故，残りの $\underline{w}_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$ ($=w_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$) についても，点 p_{10}^* で $\underline{w}_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$ も $\mathbf{q}$ に無関係な実定数 r_0 となるから，再び $\underline{w}_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$ に系5を適用すると，次の $\underline{w}_0(\mathbf{p})$ が求まる（図3·7 (d)）。+3−15

$$\underline{w}_0(\mathbf{p}) = \frac{r_0}{2\sigma_0}\left\{p_1 + \frac{|p_{10}|^2}{p_1}\right\}$$

3·4·2　多端子対網に対するRichards 及び Bott−Duffin の操作

本項では，定理3·4の結果を直接，行列の場合へ拡張する。

［定理3·5］

(1)　$W(\mathbf{p},\mathbf{q})$ ($\mathbf{p}=(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n)$) を $r\times r$ の正行列，$g(\mathbf{p})$ を既約複素Hurwitz多項式とし，$\varepsilon\tilde{g}_*(\mathbf{p})$ とは式(3·40)の関係にあるものとする。$\tilde{g}_*(\mathbf{p})$ のすべての零点の集合 $\mathbf{p}_0$ について

$$W(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} Z_0 \qquad (Z_0 : r\times r \text{ の正値対称複素定数行列})$$

が成り立つならば，$W(\mathbf{p},\mathbf{q})$ は，

$$W(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \underline{Z}_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) + \underline{Z}_2(\mathbf{p},\mathbf{q}) + jX_0 \qquad (3\cdot 49)$$

のように分解される。ここで，$\underline{Z}_t(\mathbf{p},\mathbf{q})$ ($t=1, 2$) は次式で定義される正行列である。

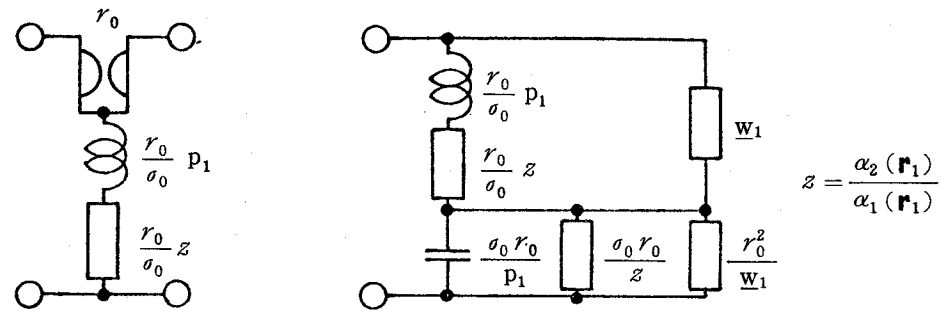
$$\underline{Z}_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) = [g(\mathbf{p}) + \varepsilon\tilde{g}_*(\mathbf{p})] \times \frac{[g(\mathbf{p}) + \varepsilon\tilde{g}_*(\mathbf{p})]\,\underline{W}(\mathbf{p},\mathbf{q}) - [g(\mathbf{p}) - \varepsilon\tilde{g}_*(\mathbf{p})]R_0}{\varepsilon 4\tilde{g}_*(\mathbf{p})\,g(\mathbf{p})} \qquad (3\cdot 50)$$

$$\underline{Z}_2(\mathbf{p},\mathbf{q}) = [g(\mathbf{p}) - \varepsilon\tilde{g}_*(\mathbf{p})] \times \frac{[g(\mathbf{p}) + \varepsilon\tilde{g}_*(\mathbf{p})]R_0 - [g(\mathbf{p}) - \varepsilon\tilde{g}_*(\mathbf{p})]\,\underline{W}(\mathbf{p},\mathbf{q})}{\varepsilon 4\tilde{g}_*(\mathbf{p})\,g(\mathbf{p})} \qquad (3\cdot 51)$$

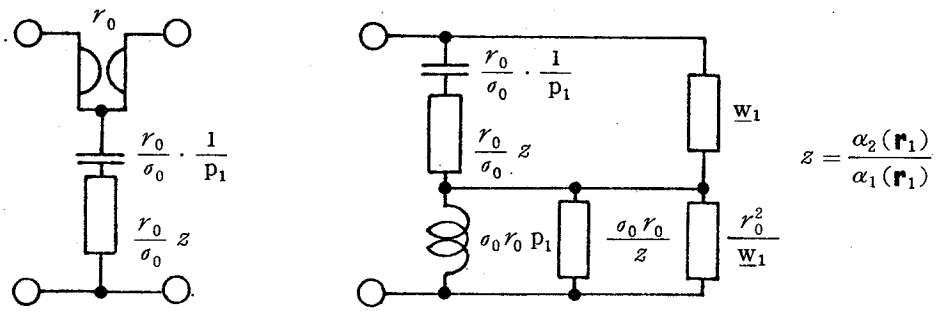
但し，　$\underline{W}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = W(\mathbf{p},\mathbf{q}) - jX_0$

$R_0 = \mathrm{Re}\ Z_0$,　$X_0 = \mathrm{Im}\ Z_0$

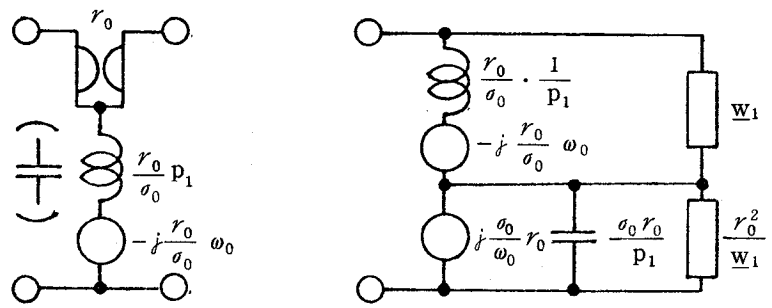
+3−15：　この場合が，定理3·4系1における $g_k(\mathbf{p})$ ($k=1,2$) を，$g_1(\mathbf{p})=p_1+p_{10}^*$，$g_2(\mathbf{p})=p_1+p_{10}$ とした場合に当る。



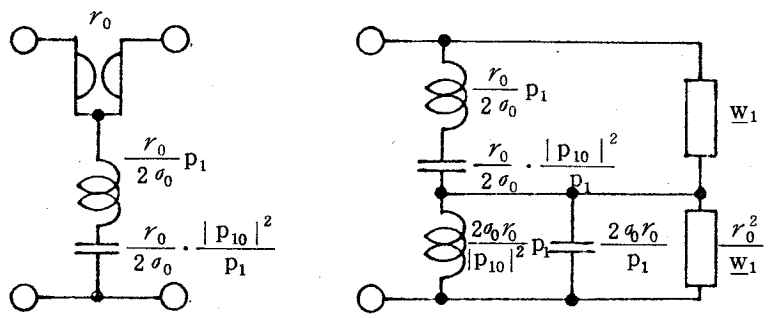
(a) 系 2 の場合



(b) 系 3 の場合



(c) 系 4 の場合



(d) (注3) の場合

図 3・7　$\deg_{p_i} g=1$ の場合に対する Richards 区間及び Bott-Duffin の操作

そして，次式で定義される$\underline{W}_t(\mathbf{p},\mathbf{q})$も正行列である。

$$\underline{W}_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) = [\underline{Z}_1^{-1}(\mathbf{p},\mathbf{q}) - \underline{W}_{01}^{-1}(\mathbf{p})]^{-1} \qquad (3\cdot52)$$

$$\underline{W}_2(\mathbf{p},\mathbf{q}) = [\underline{Z}_2^{-1}(\mathbf{p},\mathbf{q}) - \underline{W}_{02}^{-1}(\mathbf{p})]^{-1} \qquad (3\cdot53)$$

ここで，

$$\underline{W}_{01}(\mathbf{p}) = R_0 \frac{g(\mathbf{p}) + \varepsilon\widetilde{g}_*(\mathbf{p})}{g(\mathbf{p}) - \varepsilon\widetilde{g}_*(\mathbf{p})}$$

$$\underline{W}_{02}(\mathbf{p}) = R_0 \frac{g(\mathbf{p}) - \varepsilon\widetilde{g}_*(\mathbf{p})}{g(\mathbf{p}) + \varepsilon\widetilde{g}_*(\mathbf{p})}$$

一般に，次式が成り立つ

$$\deg_{p_i} \underline{W}_1 = \deg_{p_i} \underline{W}_2 \leqq \deg_{p_i} W \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \qquad (3\cdot54)$$

(2) (1)における“正”は“リアクタンス正”で置き換えることができる。

(3) (1)において，$X_0 = 0_r$とする。そのとき，“正”及び“複素Hurwitz”はそれぞれ“正実”及び“実Hurwitz”で置き換えることができる。従って，この置き換えにより，“正実”はそのうえ“リアクタンス”で置き換えることができる。

式(3・49)が既に示した式(3・47)に当るもので，r端子対網に対するBott-Duffinの操作における一段階を与える。$\underline{W}(\mathbf{p},\mathbf{q})$についてそのモデルを示すと図3・8(a)のようになる。

式(3・52)及び式(3・53)にそれぞれ式(3・50)及び式(3・51)を代入すると，$\underline{W}_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$，$\underline{W}_2(\mathbf{p},\mathbf{q})$は，

$$\underline{W}_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) = [\underline{W}(\mathbf{p},\mathbf{q}) - \underline{W}_{01}(\mathbf{p})][\underline{W}_{01}(\mathbf{p}) - \underline{W}(\mathbf{p},\mathbf{q})]^{-1}\underline{W}_{01}(\mathbf{p})$$

$$\underline{W}_2(\mathbf{p},\mathbf{q}) = [\underline{W}_{02}(\mathbf{p}) - \underline{W}(\mathbf{p},\mathbf{q})][\underline{W}(\mathbf{p},\mathbf{q}) - \underline{W}_{02}(\mathbf{p})]^{-1}\underline{W}_{02}(\mathbf{p})$$

の形に書き直すことができる。

上の二つの式を更に$\underline{W}(\mathbf{p},\mathbf{q})$について書き直せば

$$\underline{W}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \underline{W}_{11}^{(t)}(\mathbf{p}) - \underline{W}_{12}^{(t)}(\mathbf{p})[\underline{W}_t(\mathbf{p},\mathbf{q}) + \underline{W}_{22}^{(t)}(\mathbf{p})]^{-1}\underline{W}_{21}^{(t)}(\mathbf{p})$$

$$(t = 1,\ 2) \qquad (3\cdot55)$$

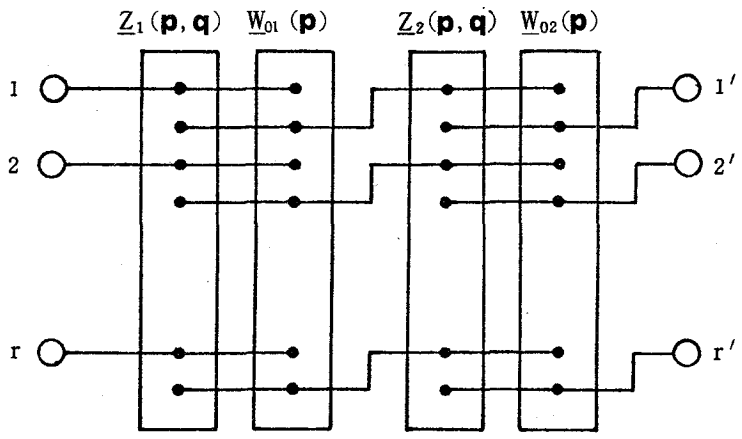
となる。ここで，$\underline{W}_0^{(t)}(\mathbf{p}) = [\underline{W}_{ij}^{(t)}(\mathbf{p})]$ は 2 r × 2 r のリアクタンス正行列で，次式の形で表わされる。

$$\underline{W}_0^{(t)}(\mathbf{p}) = \frac{g(\mathbf{p}) + \varepsilon_t \widetilde{g}_*(\mathbf{p})}{g(\mathbf{p}) - \varepsilon_t \widetilde{g}_*(\mathbf{p})} \left[\begin{array}{c|c} R_0 & R_0 \\ \hline R_0 & R_0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} 0_r & R_0 \\ \hline -R_0 & 0_r \end{array}\right]$$

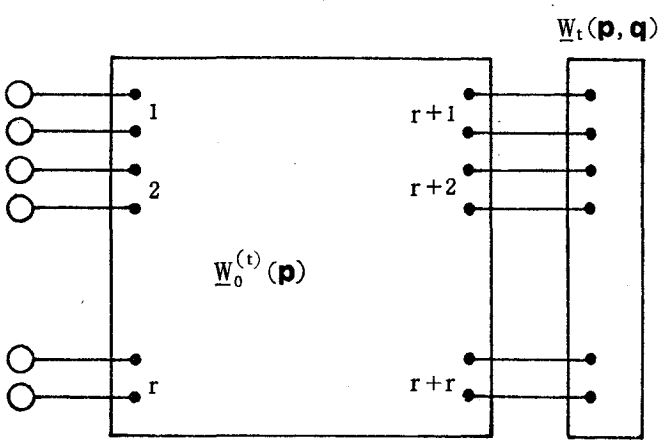
$$\varepsilon_1 = \pm 1, \qquad \varepsilon_2 = -\varepsilon_1$$

式（3・55）の表現は Bott－Duffin の操作に等価な Richards の操作である（図 3・8 (b)）。

尚，定理 3・5 における g (**p**)，$\varepsilon\widetilde{g}_*(\mathbf{p})$ をそれぞれ定理 3・4 系 1 ～定理 3・4 系 5 で示した多項式で置き換えれば，行列の場合に関するそれらの拡張が得られる。



(a)



(b)

図 3・8　多端子対網に対する Richards 及び Bott－Duffin の操作

（定理 3・5 (1)の証明）　定理の仮定から $\mathrm{Num}\{\underline{Z}_t\}$（$t=1, 2$），即ち，$\underline{Z}_t(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ の各要素の分子は既約因数 $\widetilde{g}_*(\mathbf{p})$ によって整除されるので，$\underline{Z}_t(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ は開領域 $\mathscr{D}^+(\mathbf{p}) \times \mathscr{D}^+(\mathbf{q})$ において正則。そして，$\mathscr{D}^0(\mathbf{p}) \times \mathscr{D}^+(\mathbf{q})$ において

$$\underline{Z}_t(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \underline{Z}^*_{tT}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{[g(\mathbf{p}) + \varepsilon g^*(\mathbf{p})]^2}{\varepsilon 4 g^*(\mathbf{p}) g(\mathbf{p})} [\underline{W}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \underline{W}^*_T(\mathbf{p}, \mathbf{q})]$$

と書ける。そこで，$\mathscr{D}^0(\mathbf{p})$ における不確定特異点を除けば，$\mathscr{D}^0(\mathbf{p}) \times \mathscr{D}^+(\mathbf{q})$ で

$$x [\underline{W}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \underline{W}^*_T(\mathbf{p}, \mathbf{q})] x^*_T \geqq 0$$

であることに注意すると，$\underline{Z}_t(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ は正行列である。但し，x は $1 \times r$ の任意の複素定数行列である。$g(\mathbf{p}) + \varepsilon \widetilde{g}_*(\mathbf{p})$ は開領域 $\mathscr{D}^+(\mathbf{p})$ に零点をもたないから，$\underline{W}_t^{-1}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ は $\mathscr{D}^+(\mathbf{p}) \times \mathscr{D}^+(\mathbf{q})$ で正則である。そして，$\mathscr{D}^0(\mathbf{p})$ における不確定特異点を除けば，$\mathscr{D}^0(\mathbf{p}) \times \mathscr{D}^+(\mathbf{q})$ において，

$$\begin{aligned} &x [\underline{W}_t^{-1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \underline{W}_{tT}^{-1*}(\mathbf{p}, \mathbf{q})] x^*_T \\ &\qquad = x [\underline{Z}_t^{-1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \underline{Z}_{tT}^{-1*}(\mathbf{p}, \mathbf{q})] x^*_T \geqq 0 \end{aligned}$$

が前述の結果より得られる。それ故，$\underline{W}_t^{-1}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ も正行列である。ところで，$\underline{W}_t(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ は容易に知れるように

$$\underline{W}_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = R_0 \underline{W}_2^{-1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) R_0$$

の関係にあるから，次式が成り立つ。

$$\deg_{p_i} \underline{W}_1 = \deg_{p_i} \underline{W}_2 \qquad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

一方，$\mathrm{Den}\{\underline{W}_1^{-1}\}$ は，因数 $g(\mathbf{p}) + \varepsilon \widetilde{g}_*(\mathbf{p})$ をもたないから，

$$\deg_{p_i} \left\{ R_0^{-1} \frac{g(\mathbf{p}) - \varepsilon \widetilde{g}_*(\mathbf{p})}{g(\mathbf{p}) + \varepsilon \widetilde{g}_*(\mathbf{p})} \right\} = r \deg_{p_i} g$$

に注意すると，

$$\deg_{p_i} \underline{W}_1^{-1} = \deg_{p_i} \underline{Z}_1^{-1} - r \deg_{p_i} g \qquad (3 \cdot 56)$$

が成り立つ。また $\mathrm{Num}\{\underline{Z}_1\}$ は因数 $g(\mathbf{p})$ をもたないこと及び $\deg_{p_i} \underline{W} = \deg_{p_i} W$ に注意すると，

$$\deg_{p_i} Z_1 = \deg_{p_i} \underline{W} + r \deg_{p_i} g$$

それ故，上式と式（3·56）から，$\deg_{p_i} \underline{W}_1 = \deg_{p_i} \underline{W}$ を得る。特に，$g(\mathbf{p})$ の零点の集合 $-\mathbf{p}_0^*$ について，$W(-\mathbf{p}_0^*, \mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} -Z_0^*$ であれば，$\mathrm{Num}\{\underline{Z}_1\}$，$\mathrm{Den}\{\underline{Z}_1\}$ は共に $g(\mathbf{p})$ によって整除されるから，$\deg_{p_i} \underline{W}_1$ は $\deg_{p_i} Z_1$ より小さくなる。　（証明終り）

3·5節　Hazony－Youla区間の分離

定理3·2の結果を定理3·3及び定理3·4系3においてそれぞれ拡張したが，本節では，これらの二つの結果を含む定理を述べる（但し，定理3·4系3における $\mathbf{r}_1$ は p_2 と考える）。ここで考察されるHazony－Youla区間はイミタンス行列 $W(\mathbf{p})$ が一般に

$$W(\mathbf{p}) = a\,p_1 \left[\begin{array}{c|c} 1 & m_1 \\ \hline m_1 & m_1^2 \end{array}\right] + b\,\frac{\alpha_2(p_2)}{\alpha_1(p_2)} \left[\begin{array}{c|c} 1 & m_2 \\ \hline m_2 & m_2^2 \end{array}\right] + c \left[\begin{array}{c|c} 0 & \varepsilon \\ \hline -\varepsilon & 0 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{l} a,\ b,\ c,\ m_1,\ m_2 > 0 \\ \alpha_2(p_2)/\alpha_1(p_2)\ :\ \text{リアクタンス正関数} \end{array}\right)$$

の形で表わされる2端子対網である。

〔定理3·6〕

(1)　$w(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ $(\mathbf{p} = (p_1, p_2))$ を正関数，$g(\mathbf{p})$ を

$$g(\mathbf{p}) = \alpha_1(p_2)\,p_1 + \{\sigma_0\,\alpha_1(p_2) + \alpha_2(p_2)\} \qquad (\sigma_0 > 0)$$

$$(\alpha_2(p_2)/\alpha_1(p_2)\ :\ \text{リアクタンス正関数})^{+3-16}$$

で表わされる既約多項式とする。$\tilde{g}_*(\mathbf{p})$ のすべての零点の集合 $\mathbf{p}_0 = (p_{10}, p_{20})$ について

$$w(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} (r_0 + \sigma_0 x_0) - x_0\,p_{10} \qquad (3\cdot57)$$

と書ける実定数 r_0 及び x_0 が存在すれば，

+3－16：　3·3節の終りでも述べたように，p_2 を $\mathbf{r}_1$ で置き換えた $\alpha_2(\mathbf{r}_1)/\alpha_1(\mathbf{r}_1)$ のすべての極が孤立であると言う仮定を設ければ，この定理は多変数化の意味で拡張することができる。

$$w_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{I_1(\mathbf{p})\,w(\mathbf{p},\mathbf{q}) - I_2(\mathbf{p})}{I_3(\mathbf{p}) - I_4(\mathbf{p})\,w(\mathbf{p},\mathbf{q})} \qquad (3\cdot58)$$

で定義される $w_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$ も正関数で，各変数に対する次数は $w(\mathbf{p},\mathbf{q})$ の対応する次数を越えることはない。

ここで，

$$I_1(\mathbf{p}) = \frac{r_0}{\sigma_0}\cdot\frac{\varphi_0^2}{\phi_0}\left\{\phi_0\,\mathcal{A}_1(p_2)\,p_1 + \frac{r_0}{\sigma_0}\mathcal{A}_2(p_2)\right\}$$

$$I_2(\mathbf{p}) = \varphi_0^2\left\{\frac{r_0}{\sigma_0}\cdot\frac{x_0^2}{\phi_0}\,\mathcal{A}_2(p_2)\,p_1 + r_0^2\,\mathcal{A}_1(p_2)\right\}$$

$$I_3(\mathbf{p}) = \frac{r_0}{\sigma_0}\mathcal{A}_1(p_2)\,p_1 + \phi_0\,\mathcal{A}_2(p_2)$$

$$I_4(\mathbf{p}) = \mathcal{A}_1(p_2)$$

但し，

$$\phi_0 = \frac{r_0}{\sigma_0} + x_0$$

$$\varphi_0 = \begin{cases} \dfrac{\sigma_0}{r_0}\phi_0 & (x_0 \geqq 0) \\ 1 & (x_0 < 0) \end{cases}$$

特に，$w(\mathbf{p},\mathbf{q})$ が p_i ($i=1,\ 2$) に関する孤立極をもたず，且つ，$g(\mathbf{p})$ のすべての零点の集合 $-\mathbf{p}_0^*$ について

$$w(-\mathbf{p}_0^*,\mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} -(r_0 + \sigma_0 x_0) + x_0\,p_{10}^* \qquad (3\cdot59)$$

が成り立つならば，

$$\deg_{p_i} w_1 = \deg_{p_i} w - \deg_{p_i} g \qquad (i=1,\ 2) \qquad (3\cdot60)$$

(2) (1)における“正”は“リアクタンス正”で置き換えることができる。

(3) (1)における“正”，“リアクタンス正”及び“$-\mathbf{p}_0^*$”は，それぞれ“正実”，“リアクタンス”及び“$-\mathbf{p}_0$”で置き換えることができる。この置き換えによって更に“正実”は“リアクタンス”で置き換えることができる。

実現すべき $w(\mathbf{p},\mathbf{q})$ について，この定理に示すような定数が存在すれば，図3・9 (a)(b) に示すような縦続区間を分離して，p_1 についての次数が1，p_2 に

ついてのそれが $\deg_{p_2}(\alpha_2/\alpha_1)$ だけ低い関数の合成に問題を帰着させることができる。尚，図3・9 (a)(b) では定数 x_0 の正負に応じて二つのモデルを割り当てている。これらの二つは，Burne 区間（図3・4 (a)又は (b))の場合を考えるとどちらか一方で統一できそうに思えるが，今の場合は統一できない。それは図3・9 (a)(b)の区間に△変換を行なったとき，その変換によって得られたアドミタンス行列は理想ジャイレータ，理想変成器，p_1 及び p_2 に関する順，逆素子（負の素子を含めて）等の素子で回路を表現できないからである。但し，後述の複素共役対を一対とする孤立伝送零点をもつ従来の Hazony－Youla区間についてはこの限りではない。

〈定理3・6系1〉

$g(\mathbf{p})$ を

$$g(\mathbf{p}) = \{\sigma_0 \alpha_1(p_2)\, p_1 + \alpha_2(p_2)\}\, p_1 + \alpha_1(p_2)$$

の形で与えられる既約多項式とする。正関数 $w(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ が $\widetilde{g}_*(\mathbf{p})$ のすべての零点の集合について，

$$w(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} (r_0 + \sigma_0 x_0) - \frac{x_0}{p_{10}}$$

を満たせば，式（3・58）で定義される $w_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$ も正関数で，各変数に対する次数は $w(\mathbf{p},\mathbf{q})$ の対応する次数を越えることはない。ここで，式（3・58）における $I_1(\mathbf{p}) \sim I_4(\mathbf{p})$ は次の通りである（図3・9 (c)，(d)）。

$$I_1(\mathbf{p}) = \frac{r_0}{\sigma_0} \cdot \frac{\varphi_0^2}{\phi_0} \left\{ \frac{r_0}{\sigma_0} \alpha_2(p_2)\, p_1 + \phi_0 \alpha_1(p_2) \right\}$$

$$I_2(\mathbf{p}) = \varphi_0^2 \left\{ r_0^2 \alpha_1(p_2)\, p_1 + \frac{r_0}{\sigma_0} \cdot \frac{x_0^2}{\phi_0} \alpha_2(p_2) \right\}$$

$$I_3(\mathbf{p}) = \phi_0 \alpha_2(p_2)\, p_1 + \frac{r_0}{\sigma_0} \alpha_1(p_2)$$

$$I_4(\mathbf{p}) = \alpha_1(p_2)\, p_1$$

（φ_0，ϕ_0 は定理3・6に定義した通りである）

特に，$w(\mathbf{p},\mathbf{q})$ が p_i（$i=1, 2$）に関する孤立極をもたず，且つ，$g(\mathbf{p})$ のすべての零点の集合 $-\mathbf{p}_0^*$ について，

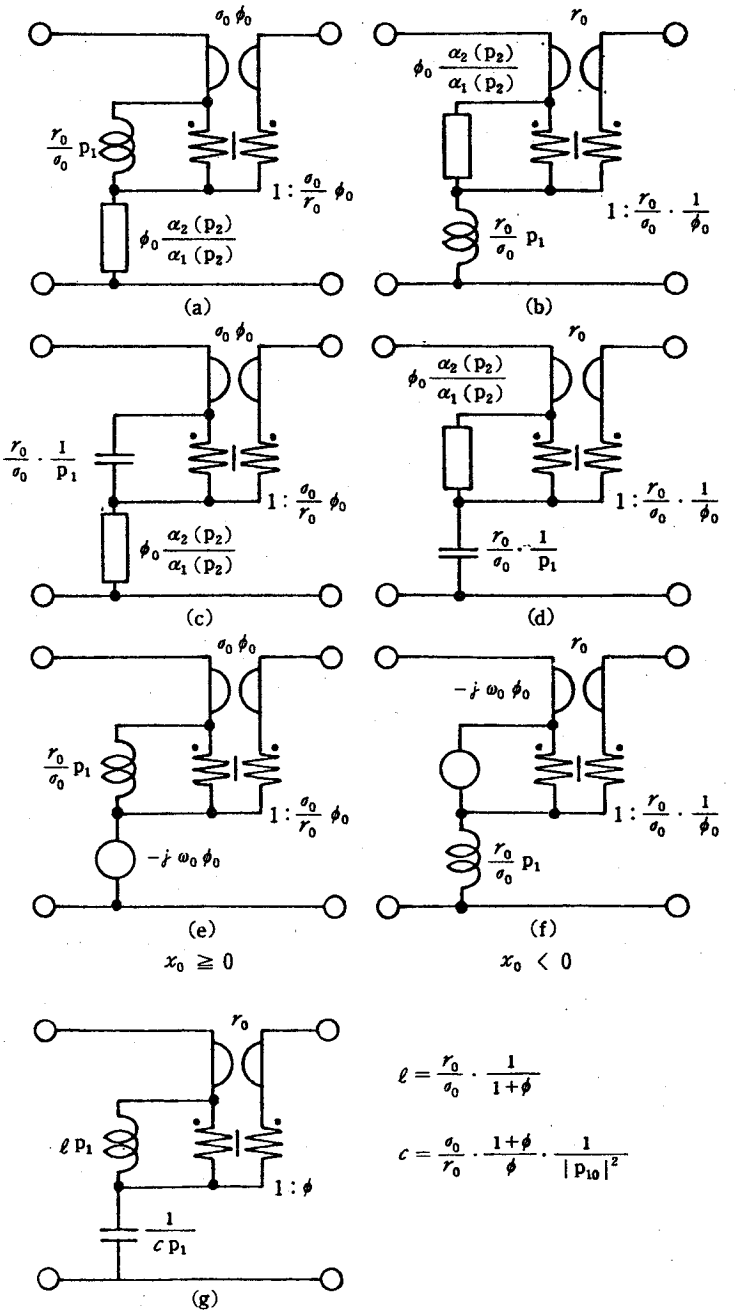


図 3・9　Hazony－Youla 区間

$$w(-\mathbf{p}_0^*, \mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} -(r_0 + \sigma_0 x_0) + \frac{x_0}{p_{10}^*}$$

であれば，式（3・60）が成立する。

〈定理 3・6 系 2 〉

定理 3・6 において，$\mathbf{p} = (p_1)$，且つ，$g(\mathbf{p})$ を

$$g(\mathbf{p}) = p_1 + (\sigma_0 - j\omega_0) \qquad (\omega_0 (\neq \infty) : 実定数)$$

とすれば，式（3・58）における $I_1(\mathbf{p}) \sim I_4(\mathbf{p})$ は次の通りである（図3・9(e)(f)）。

$$I_1(\mathbf{p}) = \frac{r_0}{\sigma_0} \cdot \frac{\varphi_0^2}{\phi_0} \left\{ \phi_0 p_1 - j \frac{r_0}{\sigma_0} \omega_0 \right\}$$

$$I_2(\mathbf{p}) = -j\varphi_0^2 \left\{ \frac{r_0}{\sigma_0} \cdot \frac{x_0^2}{\phi_0} p_1 + j r_0^2 \right\}$$

$$I_3(\mathbf{p}) = \frac{r_0}{\sigma_0} p_1 - j\omega_0 \phi_0$$

$$I_4(\mathbf{p}) = 1$$

（注 4 ）　$w(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ （$\mathbf{p} = (p_1)$）が正実であるとき，系 2 におけるように点 $\mathbf{p}_0 (= p_{10} = \sigma_0 + j\omega_0)$ で式（3・57）の実定数 r_0，x_0 が存在すれば，共役点 $\mathbf{p}_0^*$（$= p_{10}^*$）において，

$$w(\mathbf{p}_0^*, \mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} (r_0 + \sigma_0 x_0) - x_0 p_{10}^*$$

が成り立つから，

$$w_1(\mathbf{p}_0^*, \mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} \frac{\sigma_0}{r_0} \cdot \phi_0 (r_0 - x_0 p_{10}^*)$$

となる。そこで，$w_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ に系 2 を適用すると，$w(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ から互いに複素共役対にある伝送零点をもつ図 3・9 (e)の区間，あるいは，同図(f)の区間が二つ縦続に分離することができる。そこで，この二つの区間をまとめると，$I_1(\mathbf{p}) \sim I_4(\mathbf{p})$ は次のようになる（図 3・9 (g)）。

$$I_1(\mathbf{p}) = \phi p_1^2 + |p_{10}|^2$$

$$I_2(\mathbf{p}) = (1 + \phi)(r_0^2 + \omega_0^2 x_0^2) \frac{\sigma_0}{r_0} p_1$$

$$I_3(\mathbf{p}) = \frac{1}{\phi} p_1^2 + |p_{10}|^2$$

$$\mathrm{I}_4(\mathbf{p}) = \frac{1+\phi}{\phi} \cdot \frac{\sigma_0}{r_0}\,\mathrm{p}_1$$

但し，

$$\phi = \frac{\dfrac{r_0}{\sigma_0} + x_0}{\dfrac{r_0}{\sigma_0} - x_0}$$

〈補題 3・3 〉

定理 3・6 における実定数 r_0，x_0 について次の(1)及び(2)が成り立つ。

(1) 式（3・57）は次の式（3・61）及び式（3・62）に同値である。

$$\mathrm{w}(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} r_0 + x_0 \frac{\mathfrak{A}_2(\mathrm{p}_{20})}{\mathfrak{A}_1(\mathrm{p}_{20})} \qquad (3\cdot61)$$

$$\mathrm{w}(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} \frac{r_0}{\sigma_0}\,\mathrm{p}_{10} + \left\{\frac{r_0}{\sigma_0} + x_0\right\} \frac{\mathfrak{A}_2(\mathrm{p}_{20})}{\mathfrak{A}_1(\mathrm{p}_{20})} \qquad (3\cdot62)$$

(2)

$$|x_0| < \frac{r_0}{\sigma_0}$$

（定理 3・6 (1)の証明） 式(3・57)及び式(3・61)より，x_0 の正負に応じて次の $\mathrm{z}_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ を定義する。

$$\mathrm{z}_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \begin{cases} \mathrm{w}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + x_0\,\mathrm{p}_1 & (x_0 \geqq 0) \quad (3\cdot63) \\ \mathrm{w}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - x_0 \dfrac{\mathfrak{A}_2(\mathrm{p}_2)}{\mathfrak{A}_1(\mathrm{p}_2)} & (x_0 < 0) \quad (3\cdot64) \end{cases}$$

そのとき，$\mathrm{z}_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ は正関数で，$\mathbf{p}_0$ について $\mathbf{q}$ に無関係な実定数となる。いま，$x_0 < 0$ と仮定すれば，式（3・64）より

$$\mathrm{z}_1(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} r_0$$

である。定理 3・4 系 3 より

$$\mathrm{z}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\dfrac{r_0}{\sigma_0}\left\{\mathrm{p}_1 + \dfrac{\mathfrak{A}_2(\mathrm{p}_2)}{\mathfrak{A}_1(\mathrm{p}_2)}\right\}\mathrm{z}_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - r_0^2}{\dfrac{r_0}{\sigma_0}\left\{\mathrm{p}_1 + \dfrac{\mathfrak{A}_2(\mathrm{p}_2)}{\mathfrak{A}_1(\mathrm{p}_2)}\right\} - \mathrm{z}_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})} \qquad (3\cdot65)$$

なる正関数が得られる。上式は $\mathfrak{A}_1(\mathrm{p}_2)$ の零点を，また，$\deg_{\mathrm{p}_2} \mathfrak{A}_2 > \deg_{\mathrm{p}_2} \mathfrak{A}_1$

のとき $p_2=\infty$ をそれぞれ孤立極としてもつ。その一つを $p_2^{(1)}\in\mathcal{D}^0(p_2)$ とすると[+3-9]

$$\lim_{p_2\to p_2^{(1)}}(p_2-p_2^{(1)})\,z_2(\mathbf{p},\mathbf{q})\geqq-\frac{r_0}{\sigma_0}\cdot\frac{x_0}{\phi_0}\lim_{p_2\to p_2^{(1)}}(p_2-p_2^{(1)})\frac{\mathcal{A}_2(p_2)}{\mathcal{A}_1(p_2)}$$

それ故，次の正関数 $w_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$ を得る。

$$w_1(\mathbf{p},\mathbf{q})=z_2(\mathbf{p},\mathbf{q})+\frac{r_0}{\sigma_0}\cdot\frac{x_0}{\phi_0}\cdot\frac{\mathcal{A}_2(p_2)}{\mathcal{A}_1(p_2)}$$

定理に示したような結果を得るには，上式に式（3·65）を代入すればよい。また，次数についてはほとんど明らかであるので省略する。

尚，$x_0\geqq 0$ のときは，式（3·63）を用いると上述と同様の方法で定理の結果が得られる。（証明終り）

3·6節　Darlington－C区間の分離

3·4節では，Richards 区間の分離問題について述べたが，それはジャイレータを含む縦続区間であった。2端子対網としてのこのような Richards 区間が，二区間縦続に接続され，且つ，共に同じ伝送零点をもつと1変数の場合と同様，Darlington－C区間に相当する2端子対網に変換でき，ジャイレータを除くことができる。本節では，このような縦続区間の分離が可能となるための条件を明らかにする。

［定理 3·7］

(1)　$g(\mathbf{p})$（$\mathbf{p}=(p_1,p_2,\cdots\cdots,p_n)$）は既約複素 Hurwitz 多項式で，

$$g(\mathbf{p})\fallingdotseq\varepsilon\,\widetilde{g}_*(\mathbf{p})$$

の関係にあるものとする。尚，$w(\mathbf{p},\mathbf{q})$ は正関数で，$g(\mathbf{p})$ と $\widetilde{g}_*(\mathbf{p})$ から作られる

$$K\frac{e^{j\theta}g(\mathbf{p})+\varepsilon e^{-j\theta}\widetilde{g}_*(\mathbf{p})}{e^{j\theta}g(\mathbf{p})-\varepsilon e^{-j\theta}\widetilde{g}_*(\mathbf{p})}\qquad(3\cdot66)$$

（$K(>0)$，θ：任意の実数）

の形を採らないものと仮定する。

$\widetilde{g}_*(\mathbf{p})$ のすべての零点の集合 $\mathbf{p}_0$ について，$w(\mathbf{p}_0, \mathbf{q})$ 及び少なくとも一つの変数，言うなれば，p_1 について

$$g(\mathbf{p}_0)\frac{\partial w(\mathbf{p}_0, \mathbf{q})}{\partial p_1} \Big/ \frac{\partial \widetilde{g}_*(\mathbf{p}_0)}{\partial p_1} \qquad (3\cdot 67)$$

が共に $\mathbf{q}$ に無関係な実定数ならば，

$$w_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \phi_0 \frac{[w_0^2(\mathbf{p}) + \phi_0 r_0^2]\, w(\mathbf{p},\mathbf{q}) - (1+\phi_0) r_0^2 w_0(\mathbf{p})}{[\phi_0 w_0^2(\mathbf{p}) + r_0^2] - (1+\phi_0) w_0(\mathbf{p})\, w(\mathbf{p},\mathbf{q})} \qquad (3\cdot 68)$$

によって定義される $w_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$ も正関数で，各変数に対する次数は $w(\mathbf{p},\mathbf{q})$ の対応する次数を越えない。

ここで，

$$r_0 \underset{\mathbf{q}}{\equiv} w(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) \qquad (>0)$$

$$w_0(\mathbf{p}) = r_0 \frac{g(\mathbf{p}) + \varepsilon \widetilde{g}_*(\mathbf{p})}{g(\mathbf{p}) - \varepsilon \widetilde{g}_*(\mathbf{p})} \qquad (3\cdot 69)$$

$$\phi_0 = \frac{\dfrac{2r_0}{g(\mathbf{p}_0)} \cdot \dfrac{\partial \widetilde{g}_*(\mathbf{p}_0)}{\partial p_1} + \varepsilon \dfrac{\partial w(\mathbf{p}_0, \mathbf{q})}{\partial p_1}}{\dfrac{2r_0}{g(\mathbf{p}_0)} \cdot \dfrac{\partial \widetilde{g}_*(\mathbf{p}_0)}{\partial p_1} - \varepsilon \dfrac{\partial w(\mathbf{p}_0, \mathbf{q})}{\partial p_1}} \quad (>0) \qquad (3\cdot 70)$$

特に，

$$\frac{\partial^\ell}{\partial p_1^\ell}[w(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) + \widetilde{w}_*(\mathbf{p}_0, \mathbf{q})] \underset{\mathbf{q}}{\equiv} 0 \qquad (\ell = 0, 1) \qquad (3\cdot 71)$$

であれば，

$$\deg_{p_i} w_1 = \deg_{p_i} w - 2\deg_{p_i} g \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad (3\cdot 72)$$

(2) (1)における“正”は，“リアクタンス正”で置き換えることができる。

(3) (1)における“複素Hurwitz”，“正”及び“式(3・66)”は，それぞれ“実Hurwitz”，“正実”及び“式(3・73)”で置き換えることができる。この置き換えによって，“正実”は，そのうえ“リアクタンス”で置き換えることができる。

$$K\frac{g(\mathbf{p}) + \varepsilon g_*(\mathbf{p})}{g(\mathbf{p}) - \varepsilon g_*(\mathbf{p})} \qquad (3\cdot 73)$$

実現すべき $w(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ について，この定理に示すような定数が求まると，イ

ピーダンス行列が

$$W(\mathbf{p}) = z_1(\mathbf{p}) \left[\begin{array}{c|c} 1 & -\phi_0 \\ \hline -\phi_0 & \phi_0^2 \end{array}\right] + z_2(\mathbf{p}) \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right]$$

で表わされるリアクタンス正2端子対網を分離することができる(図3·10(a))。この2端子対網は1変数の場合におけるDarlington－C区間を一般化したモデルで，図3·10(b)のモデルに等価である。ここで，$z_1(\mathbf{p})$，$z_2(\mathbf{p})$は次式で与えられるリアクタンス正関数で，互いに他の逆回路網となっている。

$$z_1(\mathbf{p}) = \frac{r_0^2}{1+\phi_0} \cdot \frac{1}{w_0(\mathbf{p})}$$

$$z_2(\mathbf{p}) = \frac{\phi_0}{1+\phi_0} \cdot w_0(\mathbf{p})$$

式(3·69)におけるεの符号により$w(\mathbf{p},\mathbf{q})$は二通りに表現することができるが，3·4節で用いた同じ記号，即ち，$\varepsilon=+1$に対する$w_0(\mathbf{p})$，ϕ_0，$w_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$等を$w_{0+}(\mathbf{p})$，$\phi_{0+}$，$w_{1+}(\mathbf{p},\mathbf{q})$等で，$\varepsilon=-1$に対するそれらを$w_{0-}(\mathbf{p})$，$\phi_{0-}$，$w_{1-}(\mathbf{p},\mathbf{q})$等で記すと，それらの間にはそれぞれ，

$$\phi_{0-}\ \phi_{0+} = 1$$

$$w_{0-}(\mathbf{p}) = \frac{r_0^2}{w_{0+}(\mathbf{p})}$$

$$w_{1-}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{\phi_{0+}^2} \cdot w_{1+}(\mathbf{p},\mathbf{q})$$

の関係が成立する。$\varepsilon=+1$の場合を基準にして，この関係を回路的に言うと，$w_{0-}(\mathbf{p})$はジャイレーション比r_0の理想ジャイレータで$w_{0+}(\mathbf{p})$を，$w_{1-}(\mathbf{p},\mathbf{q})$は変成比1：$\phi_{0+}$の理想変成器で$w_{1+}(\mathbf{p},\mathbf{q})$を変換したものである。

定理3·4系1においては，既約多項式の積，即ち，$g(\mathbf{p})$，$\varepsilon\tilde{g}_*(\mathbf{p})$が，

$$g(\mathbf{p}) = \prod_{k=1}^{t} g_k(\mathbf{p})$$

$$\varepsilon\tilde{g}_*(\mathbf{p}) = \prod_{k=1}^{t} \varepsilon_k \tilde{g}_{k*}(\mathbf{p}) \qquad (\varepsilon_k = \pm 1)$$

$$\left(\begin{array}{l} g_k(\mathbf{p}) \text{ ：既約複素 Hurwitz 多項式} \\ g_i(\mathbf{p}) \not\equiv g_j(\mathbf{p}) \quad (i \neq j), \qquad g_k(\mathbf{p}) \not\equiv \varepsilon_k \widetilde{g}_{k*}(\mathbf{p}) \end{array}\right) \tag{3・74}$$

で表わされる場合を考察したが，今の場合は次のようになる。

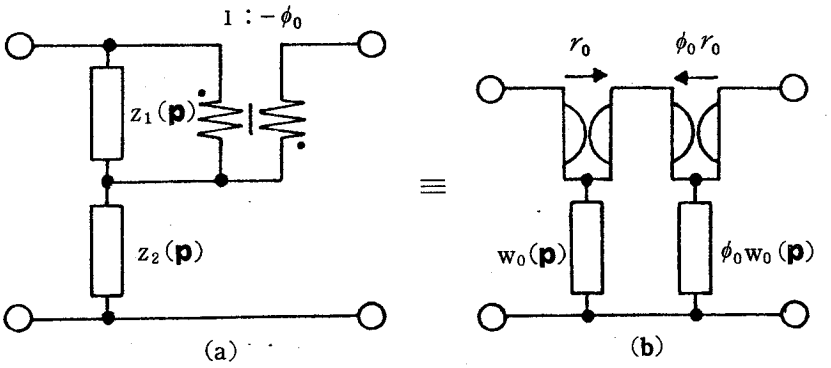


図 3・10　Darlington−C 区間

〈定理 3・7 系 1 〉

定理 3・7 における $g(\mathbf{p})$，$\varepsilon\widetilde{g}_*(\mathbf{p})$ は式（3・74）で定義された多項式で置き換えることができる。但し，次の条件を付加する。

$\widetilde{g}_{k*}(\mathbf{p})$（$k=1, 2, \cdots\cdots, t$）のすべての零点の集合 $\mathbf{p}_0^{(k)}$ について次式が成立する。+3−17

$$w(\mathbf{p}_0^{(i)}, \mathbf{q}) \equiv w(\mathbf{p}_0^{(j)}, \mathbf{q})$$

$$g(\mathbf{p}_0^{(i)}) \left\{ \frac{\partial \widetilde{g}_*(\mathbf{p}_0^{(i)})}{\partial p_1} \right\}^{-1} \cdot \frac{\partial w(\mathbf{p}_0^{(i)}, \mathbf{q})}{\partial p_1} \equiv g(\mathbf{p}_0^{(j)}) \left\{ \frac{\partial \widetilde{g}_*(\mathbf{p}_0^{(j)})}{\partial p_1} \right\}^{-1} \cdot \frac{\partial w(\mathbf{p}_0^{(j)}, \mathbf{q})}{\partial p_1}$$

$$(i, j = 1, 2, \cdots, t)$$

次に，定理 3・4 系 3 ～系 5 において考察した $g(\mathbf{p})$，即ち，

$$g(\mathbf{p}) = \alpha_1(\mathbf{r}_1) p_1 + \{\sigma_0 \alpha_1(\mathbf{r}_1) + \alpha_2(\mathbf{r}_1)\} \tag{3・75}$$

$$g(\mathbf{p}) = \{\sigma_0 \alpha_1(\mathbf{r}_1) + \alpha_2(\mathbf{r}_1)\} p_1 + \alpha_1(\mathbf{r}_1) \tag{3・76}$$

$$g(\mathbf{p}) = p_1 + p_{10}^* \tag{3・77}$$

+3−17 ：　この場合，定理 3・7 における $\mathbf{p}_0$ は，集合 $\mathbf{p}_0^{(k)}$（$k=1, 2, \cdots, t$）の集合である。

$$\left(\begin{array}{l} \alpha_2(\mathbf{r}_1)/\alpha_1(\mathbf{r}_1) \ : \ \text{リアクタンス正関数} \\ \sigma_0\,(>0),\ \ \omega_0\,(\neq\infty) : \text{実定数} \\ \mathbf{r}_1=(\mathrm{p}_2,\ \mathrm{p}_3,\ \cdots\cdots,\ \mathrm{p}_n) \end{array}\right)$$

の形で与えられる場合に対しては，式（3·67）に示した条件式は比較的簡単な形で表現することができる。以下，それらについて列挙する。尚，簡単化のために，$\varepsilon=+1$ の場合についてのみ記す。

〈定理 3·7 系 2 〉

g（**p**）を式（3·75）の通りとすれば，定理 3·7 における式（3·67）は，

$$(\partial/\partial \mathrm{p}_1)\ \mathrm{w}(\mathbf{p}_0,\ \mathbf{q})$$

で置き換えることができる。尚，このとき，式（3·66），（3·69）及び式（3·70）は次の通りである（図 3·11 (a)）。

$$\mathrm{K}_1\left\{\left\{\mathrm{p}_1+\frac{\alpha_2(\mathbf{r}_1)}{\alpha_1(\mathbf{r}_1)}\right\}^{-1}+j\,\mathrm{A}_1\right\}^{-1}+\mathrm{K}_2\left\{\mathrm{p}_1+\frac{\alpha_2(\mathbf{r}_1)}{\alpha_1(\mathbf{r}_1)}+j\,\mathrm{A}_2\right\}^{-1}$$

（$\mathrm{K}_i\,(>0)$，A_i（$i=1,\ 2$）：任意の実数）

$$\mathrm{w}_0(\mathbf{p})=\frac{r_0}{\sigma_0}\left\{\mathrm{p}_1+\frac{\alpha_2(\mathbf{r}_1)}{\alpha_1(\mathbf{r}_1)}\right\}$$

$$\phi_0=\frac{\dfrac{r_0}{\sigma_0}+\dfrac{\partial}{\partial \mathrm{p}_1}\ \mathrm{w}(\mathbf{p}_0,\ \mathbf{q})}{\dfrac{r_0}{\sigma_0}-\dfrac{\partial}{\partial \mathrm{p}_1}\ \mathrm{w}(\mathbf{p}_0,\ \mathbf{q})}$$

〈定理 3·7 系 3 〉

g（**p**）を式（3·76）の通りとすれば，定理 3·7 における式（3·67）は，

$$\mathrm{p}_{10}^2\ \frac{\partial}{\partial \mathrm{p}_1}\ \mathrm{w}(\mathbf{p}_0,\ \mathbf{q}) \qquad \left(\mathrm{p}_{10}=\sigma_0-\frac{\alpha_2(\mathbf{r}_{10})}{\alpha_1(\mathbf{r}_{10})}\right)$$

で置き換えることができる。尚，このとき，式（3·66），（3·69）及び式（70）は次の通りである（図 3·11 (b)）。

$$\mathrm{K}_1\left\{\left\{\frac{1}{\mathrm{p}_1}+\frac{\alpha_2(\mathbf{r}_1)}{\alpha_1(\mathbf{r}_1)}\right\}^{-1}+j\,\mathrm{A}_1\right\}^{-1}+\mathrm{K}_2\left\{\frac{1}{\mathrm{p}_1}+\frac{\alpha_2(\mathbf{r}_1)}{\alpha_1(\mathbf{r}_1)}+j\,\mathrm{A}_2\right\}^{-1}$$

$$w_0(\mathbf{p}) = \frac{r_0}{\sigma_0}\left\{\frac{1}{p_1} + \frac{\alpha_2(\mathbf{r}_1)}{\alpha_1(\mathbf{r}_1)}\right\}$$

$$\phi_0 = \frac{\dfrac{r_0}{\sigma_0} - p_{10}^2 \dfrac{\partial}{\partial p_1} w(\mathbf{p}_0, \mathbf{q})}{\dfrac{r_0}{\sigma_0} + p_{10}^2 \dfrac{\partial}{\partial p_1} w(\mathbf{p}_0, \mathbf{q})}$$

〈定理 3・7 系 4 〉

g (**p**) を式 (3・77) の通りとすれば，定理 3・7 における式 (3・67) は，

$$(\partial / \partial p_1)\ w(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) \qquad (\mathbf{p}_0 = p_{10} = \sigma_0 + j\omega_0)$$

で置き換えることができる。尚，このとき，式 (3・66)，(3・69) 及び式 (3・70) は次の通りである。[+3-18]

$$K_1\left\{\left\{p_1 - j\omega_0\right\}^{-1} + jA_1\right\}^{-1} + K_2\left\{p_1 - j\omega_0 + jA_2\right\}^{-1}$$

$$w_0(\mathbf{p}) = \frac{r_0}{\sigma_0}(p_1 - j\omega_0)$$

$$\phi_0 = \frac{\dfrac{r_0}{\sigma_0} + \dfrac{\partial}{\partial p_1} w(\mathbf{p}_0, \mathbf{q})}{\dfrac{r_0}{\sigma_0} - \dfrac{\partial}{\partial p_1} w(\mathbf{p}_0, \mathbf{q})}$$

尚，系 2 ～系 4 において，w (**p**, **q**) が正実であるときは，$A_1 = A_2 = 0$，且つ，$K_1 = 0$ 又は $K_2 = 0$ とすればよい。

定理 3・7 を証明する前に次の補題を示す。

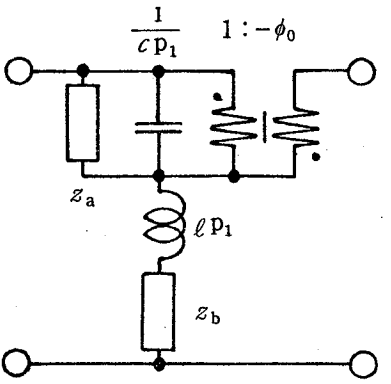
〈補題 3・4 〉

定理 3・7 の条件の下で次の(1)及び(2)が成り立つ。

(1)

$$\frac{\dfrac{\partial}{\partial p_1} w(\mathbf{p}_0, \mathbf{q})}{\dfrac{\partial}{\partial p_1} \tilde{g}_*(\mathbf{p}_0)} \underset{\mathbf{q}}{\equiv} \frac{\dfrac{\partial}{\partial p_k} w(\mathbf{p}_0, \mathbf{q})}{\dfrac{\partial}{\partial p_k} \tilde{g}_*(\mathbf{p}_0)} \qquad (k = 2, 3, \cdots, n) \qquad (3 \cdot 78)$$

+3−18 ： $\omega_0 = 0$ とすれば，1 変数の場合において周知の Darlington−C 区間となる。

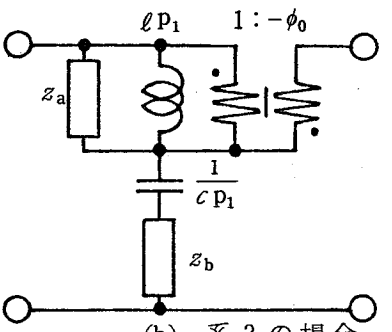


(a) 系 2 の場合

$$c=\frac{1+\phi_0}{\sigma_0\,r_0},\qquad \ell=\frac{r_0}{\sigma_0}\cdot\frac{\phi_0}{1+\phi_0}$$

$$z_a=\frac{1}{c}\cdot\frac{\alpha_2(\mathbf{r}_1)}{\alpha_1(\mathbf{r}_1)},\quad z_b=\ell\,\frac{\alpha_2(\mathbf{r}_1)}{\alpha_1(\mathbf{r}_1)}$$

$$\phi_0=\frac{\dfrac{r_0}{\sigma_0}+\dfrac{\partial}{\partial p_1}\,w(\mathbf{p}_0,\mathbf{q})}{\dfrac{r_0}{\sigma_0}-\dfrac{\partial}{\partial p_1}\,w(\mathbf{p}_0,\mathbf{q})}$$

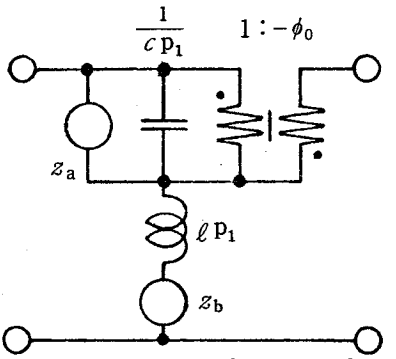


(b) 系 3 の場合

$$\ell=\frac{\sigma_0\,r_0}{1+\phi_0},\qquad c=\frac{\sigma_0}{r_0}\cdot\frac{1+\phi_0}{\phi_0}$$

$$z_a=\ell\,\frac{\alpha_2(\mathbf{r}_1)}{\alpha_1(\mathbf{r}_1)},\quad z_b=\frac{1}{c}\cdot\frac{\alpha_2(\mathbf{r}_1)}{\alpha_1(\mathbf{r}_1)}$$

$$\phi_0=\frac{\dfrac{r_0}{\sigma_0}-p_{10}^2\,\dfrac{\partial}{\partial p_1}\,w(\mathbf{p}_0,\mathbf{q})}{\dfrac{r_0}{\sigma_0}+p_{10}^2\,\dfrac{\partial}{\partial p_1}\,w(\mathbf{p}_0,\mathbf{q})}$$



(c) 系 4 の場合

$$c=\frac{1+\phi_0}{\sigma_0\,r_0},\qquad \ell=\frac{r_0}{\sigma_0}\cdot\frac{\phi_0}{1+\phi_0}$$

$$z_a=j\,\frac{r_0}{1+\phi_0}\cdot\frac{\sigma_0}{\omega_0},\quad z_b=-j\,\frac{\omega_0\,\phi_0}{1+\phi_0}\cdot\frac{r_0}{\sigma_0}$$

$$\phi_0=\frac{\dfrac{r_0}{\sigma_0}+\dfrac{\partial}{\partial p_1}\,w(\mathbf{p}_0,\mathbf{q})}{\dfrac{r_0}{\sigma_0}-\dfrac{\partial}{\partial p_1}\,w(\mathbf{p}_0,\mathbf{q})}$$

図 3・11　$\deg_{p_1} g=1$ である場合の Darlington−C 区間

(2)

$$\left| \frac{g(\mathbf{p}_0)}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial p_1} w(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) \Big/ \frac{\partial}{\partial p_1} \widetilde{g}_*(\mathbf{p}_0) \right| < r_0 \qquad (3\cdot 79)$$

（補題3・4の証明）　$s_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ を

$$s_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{w_0(\mathbf{p}) + r_0}{w_0(\mathbf{p}) - r_0} \cdot \frac{w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - r_0}{w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + r_0}$$

で定義すると，$s_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ はＵＢ関数である。それ故，開領域 $\mathcal{D}^+(\mathbf{p}) \times \mathcal{D}^+(\mathbf{q})$ において，$|s_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})| \leqq 1$ である。ここで，等号が成立すると，$w(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ は式（3・66）で示した形のリアクタンス正関数となる。仮定によって，このような場合は除かれているから，結局，その開領域において

$$|s_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})| < 1 \qquad (3\cdot 80)$$

でなければならない。

$\widetilde{g}_*(\mathbf{p})$ の零点の集合 $\mathbf{p}_0$ の要素で $\mathcal{D}^+(\mathbf{p})$ に属する一つを $\mathbf{p}_0^{(0)}(=(p_{10}^{(0)}, p_{20}^{(0)}, \cdots, p_{n0}^{(0)}))$ とする。定理3・7の仮定に注意すれば，点 $\mathbf{p}_0^{(0)}$ でこの補題の(1)，(2)が証明されれば充分である。いま，$\mathbf{p}_0^{(0)}$ から $p_{10}^{(0)}$ と $p_{k0}^{(0)}$ $(k=2, 3, \cdots, n)$ を除いた組を $\mathbf{r}_{1k}^{(0)} = (p_{20}^{(0)}, \cdots, p_{k-1\,0}^{(0)}, p_{k+1\,0}^{(0)}, \cdots, p_{n0}^{(0)})$ とすれば，$s_1(p_1, p_k)$ は次のように書ける。

$$s_1(p_1, p_k)$$

$$= \frac{w(p_1, p_k) - r_0}{p_1 - p_{10}^{(0)}} \cdot \frac{p_1 - p_{10}^{(0)}}{w_0(p_1, p_k) - r_0} \cdot \frac{w_0(p_1, p_k) + r_0}{w(p_1, p_k) + r_0} \qquad (3\cdot 81)$$

$$= \frac{w(p_1, p_k) - r_0}{p_k - p_{k0}^{(0)}} \cdot \frac{p_k - p_{k0}^{(0)}}{w_0(p_1, p_k) - r_0} \cdot \frac{w_0(p_1, p_k) + r_0}{w(p_1, p_k) + r_0} \qquad (3\cdot 82)$$

ここで，$s_1(p_1, p_k) = s_1(p_1, p_k, \mathbf{r}_{1k}^{(0)}, \mathbf{q}^0)$，　$w_0(p_1, p_k) = w_0(p_1, p_k, \mathbf{r}_{1k}^{(0)}, \mathbf{q}^0)$

$w(p_1, p_k) = w(p_1, p_k, \mathbf{r}_{1k}^{(0)}, \mathbf{q}^0)$，　$\mathbf{q}^0 \in \mathcal{D}^+(\mathbf{q})$

$s_1(p_1, p_k)$ は，開領域 $\mathcal{D}^+(p_1) \times \mathcal{D}^+(p_k)$ において正則であるから，その開領域において連続である。[45] それ故，

$$s_1(p_{10}^{(0)}, p_{k0}^{(0)}) = \lim_{p_1 \to p_{10}^{(0)}} s_1(p_1, p_{k0}^{(0)}) = \lim_{p_k \to p_{k0}^{(0)}} s_1(p_{10}^{(0)}, p_k) \qquad (3\cdot 83)$$

となる。式（3・83），（3・82），（3・81）及び式（3・80）から，

$$\left|\frac{\dfrac{\partial}{\partial p_1} w(\mathbf{p}_0^{(0)}, \mathbf{q}^0)}{\dfrac{\partial}{\partial p_1} w_0(\mathbf{p}^{(0)})}\right| = \left|\frac{\dfrac{\partial}{\partial p_k} w(\mathbf{p}_0^{(0)}, \mathbf{q}^0)}{\dfrac{\partial}{\partial p_k} w_0(\mathbf{p}_0^{(0)})}\right| < 1 \qquad (3\cdot84)$$

が得られる。そして，

$$\frac{\partial}{\partial p_i} w_0(\mathbf{p}_0^{(0)}) = \varepsilon \frac{2r_0}{g(\mathbf{p}_0^{(0)})} \cdot \frac{\partial}{\partial p_i} \tilde{g}_*(\mathbf{p}_0^{(0)}) \quad (i=1, 2, \cdots, n) \qquad (3\cdot85)$$

が成り立つこと，及び，式（3・84）の左辺は仮定により $\mathbf{q}$ に無関係であることに注意すると，点 $\mathbf{p}_0^{(0)}$ で補題の結果が得られる。　　（証明終り）

（定理 3・7 (1)の証明）　　定理 3・4 から

$$\underline{w}_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{w_0(\mathbf{p})\, w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - r_0^2}{w_0(\mathbf{p}) - w(\mathbf{p}, \mathbf{q})} \qquad (3\cdot86)$$

で定義される $\underline{w}_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ は正関数である。零点の集合 $\mathbf{p}_0$ について，上式は不定となるが，L'Hospital の公式を適用すると

$$\underline{w}_1(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) = r_0 \frac{\dfrac{\partial}{\partial p_1} w_0(\mathbf{p}_0) + \dfrac{\partial}{\partial p_1} w(\mathbf{p}_0, \mathbf{q})}{\dfrac{\partial}{\partial p_1} w_0(\mathbf{p}_0) - \dfrac{\partial}{\partial p_1} w(\mathbf{p}_0, \mathbf{q})} = \phi_0 r_0 \qquad (3\cdot87)$$

となる。補題 3・4 により，ϕ_0 は $\mathbf{q}$ に依存しない正定数である。それ故，$\underline{w}_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ に再び定理 3・4 を適用すると，

$$w_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \phi_0 \frac{w_0(\mathbf{p})\, \underline{w}_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - \phi_0 r_0^2}{\phi_0 w_0(\mathbf{p}) - \underline{w}_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})}$$

なる正関数が得られる。上式に式（3・86）を代入すると式（3・68）の形が求まる。

次に，式（3・72）が真であることを示す。次の等式は直ちに得られる。

$$\mathrm{Num}\{w_1(\mathbf{p}_0, \mathbf{q})\} = \mathrm{Den}\{w_1(\mathbf{p}_0, \mathbf{q})\} \underset{\mathbf{q}}{\equiv} 0$$

$$\mathrm{Num}\{w_1(-\mathbf{p}_0^*, \mathbf{q})\} = \mathrm{Den}\{w_1(-\mathbf{p}_0^*, \mathbf{q})\} \underset{\mathbf{q}}{\equiv} 0$$

式（3・87）を書き直すと，

$$\frac{\partial}{\partial p_1} w(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) = \frac{\phi_0 - 1}{\phi_0 + 1} \cdot \frac{\partial}{\partial p_1} w_0(\mathbf{p}_0)$$

上式と式（3・71）の $\ell = 1$ の場合から

$$\frac{\partial}{\partial p_1} w(-\mathbf{p}_0^*, \mathbf{q}) = \frac{\phi_0 - 1}{\phi_0 + 1} \cdot \frac{\partial}{\partial p_1} w_0(-\mathbf{p}_0^*)$$

従って，それぞれ

$$\frac{\partial}{\partial p_1} \mathrm{Num}\{w_1(\mathbf{p}_0, \mathbf{q})\} = \frac{\partial}{\partial p_1} \mathrm{Den}\{w_1(\mathbf{p}_0, \mathbf{q})\} \underset{\mathbf{q}}{\equiv} 0$$

$$\frac{\partial}{\partial p_1} \mathrm{Num}\{w_1(-\mathbf{p}_0^*, \mathbf{q})\} = \frac{\partial}{\partial p_1} \mathrm{Den}\{w_1(-\mathbf{p}_0^*, \mathbf{q})\} \underset{\mathbf{q}}{\equiv} 0$$

を得る。それ故，$w_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ の分母及び分子は共に，因数 $[\widetilde{g}_*(\mathbf{p})\, g(\mathbf{p})]^2$ によって整除される。（証明終り）

3・7節　Darlington－D区間の分離

3・5節においては理想ジャイレータを含む非相反な2端子対網であるHazony-Youla区間を求めた。本節では，同一の伝送零点をもつこのような区間が二つ縦続されているとき，前節と同様，二つの区間をまとめることによって理想ジャイレータを除くことができる。尚，本節では回路モデルを示すに止め，そのモデルが分離できるための条件は省略する。[+3-19]

$w_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$，$w_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ $(\mathbf{p} = (p_1, p_2))$ をそれぞれ出力側を見たときの駆動点インピーダンスとする（図3・12）。既約多項式 $\varepsilon \widetilde{g}_*(\mathbf{p}) = \mathcal{A}_1(p_2) p_1 - \{\sigma_0 \mathcal{A}_1(p_2) - \mathcal{A}_2(p_2)\}$（$\sigma_0 > 0$，$\mathcal{A}_2(p_2)/\mathcal{A}_1(p_2)$：リアクタンス正関数）のすべての零点の集合 $\mathbf{p}_0$ について，

$$w_t(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) \underset{\mathbf{q}}{\equiv} (r_t + \sigma_0 x_t) - x_t p_{10} \qquad (t = 1, 2)$$

$$(r_t, x_t \ : \ \text{実定数})$$

であれば，Hazony－Youla区間，N_t（$t = 1, 2$）のインピーダンス行列 $W_t(\mathbf{p})$ は

+3－19：式（3・88）で求められているインピーダンス行列 $W(\mathbf{p})$ の要素 $w_{11}(\mathbf{p})$ を p_1 で偏微分することによって，その条件を求めることができる。しかし，それは可成り複雑である。

$$W_t(\mathbf{p}) = k_t \left[\begin{array}{c|c} a_t p_1 + b_t \dfrac{\mathcal{Q}_2(p_2)}{\mathcal{Q}_1(p_2)} & p_1 + \dfrac{\mathcal{Q}_2(p_2)}{\mathcal{Q}_1(p_2)} + \varepsilon_t \sigma_0 \\ \hline p_1 + \dfrac{\mathcal{Q}_2(p_2)}{\mathcal{Q}_1(p_2)} - \varepsilon_t \sigma_0 & c_t p_1 + d_t \dfrac{\mathcal{Q}_2(p_2)}{\mathcal{Q}_1(p_2)} \end{array} \right]^{+3-20}$$

$$(\ \varepsilon_1 = \pm 1, \qquad \varepsilon_2 = -\varepsilon_1\ )$$

と書ける。ここで，$a_t \sim d_t$ 及び k_t は次の通りとする。

(i) $x_t \leqq 0$ のとき，

$$k_t = \frac{r_t}{\sigma_0}, \qquad a_t = \frac{1}{c_t} = 1 - \frac{x_t}{k_t}, \qquad b_t = d_t = 1$$

(ii) $x > 0$ のとき，

$$k_t = \frac{r_t}{\sigma_0} - x_t, \quad a_t = c_t = 1, \qquad b_t = \frac{1}{d_t} = \frac{r_t}{\sigma_0} \cdot \frac{1}{k_t}$$

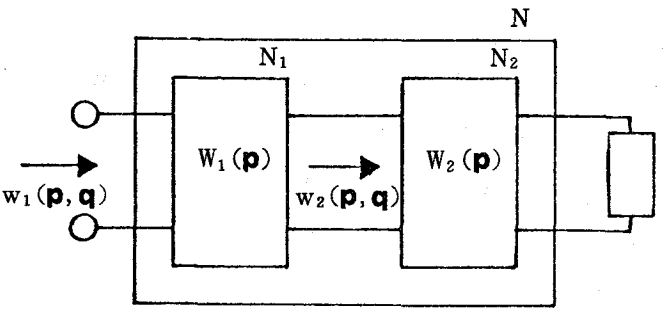


図 3・12　Hazony−Youla 区間の縦続接続

2 端子対網 N のインピーダンス行列 W(**p**) の各要素 $w_{ij}(\mathbf{p})$ ($i, j = 1, 2$) を求めると次のようになる。

$$w_{11}(\mathbf{p}) =$$

$$k_1 \frac{k_2 a_1 a_2 p_1^2 + \{k_2(a_1 b_2 + b_1 a_2) + k_1 b_1^{-1} c_1^{-1}(b_1 c_1 - 1)^2\} z p_1 + k_2 b_1 b_2 z^2 + \sigma_0^2 k_1}{(k_1 c_1 + k_2 a_2) p_1 + (k_2 b_2 + k_1 d_1) z}$$

+3−20 ：　本節では，+3−19 の理由によって回路の等価変換のみを考えているので，これ以後は，p_2 を $\mathbf{r}_1$ で置き換えてよい。

$$w_{12}(\mathbf{p}) = w_{21}(\mathbf{p}) = k_1 k_2 \frac{p_1^2 + 2zp_1 + z^2 - \sigma_0^2}{(k_1 c_1 + k_2 a_2) p_1 + (k_2 b_2 + k_1 d_1) z}$$

$$w_{22}(\mathbf{p}) =$$

$$k_1^2 \frac{k_1 k_2 c_1 c_2 p_1^2 + \{k_1(c_1 d_2 + c_2 d_2) + k_2^2 b_1^{-1} c_1^{-1} (b_1 c_1 - 1)^2\} z p_1 + k_1 k_2 d_1 d_2 z^2 + \sigma_0^2 k_2^2}{(k_1 c_1 + k_2 a_2) p_1 + (k_2 b_2 + k_1 d_1) z}$$

但し，　$z = \alpha_2(p_2) / \alpha_1(p_2)$

(3·88)

インピーダンス行列 $W(\mathbf{p})$ は，次の三種の極をもつことが知れる。

(イ) 既約多項式　$f(\mathbf{p}) = (k_1 c_1 + k_2 a_2)\alpha_1(p_2) p_1 + (k_2 b_2 + k_1 d_1)\alpha_2(p_2)$ の零点で規定される連立極

(ロ) 孤立極　$p_1 = \infty$

(ハ) リアクタンス正関数 $\alpha_2(p_2)/\alpha_1(p_2)$ のすべての孤立極

これらの極における留数を直接計算すれば，完全に密であることが知れ，式(3·88)は次式のように表わすことができる。

$$W(\mathbf{p}) = \ell_1 p_1 \left[\begin{array}{c|c} 1 & n_1 \\ \hline n_1 & n_1^2 \end{array}\right] + \beta_3 \cdot \frac{\alpha_1(p_2)}{\alpha_2(p_2)} \left[\begin{array}{c|c} 1 & n_3 \\ \hline n_3 & n_3^2 \end{array}\right]$$

$$+ \beta_2 \cdot \frac{\ell_2 \alpha_2(p_2) p_1 + \delta_2 \alpha_1(p_2)}{\ell_2 \alpha_1(p_2) p_1 + \beta_2 \alpha_2(p_2)} \left[\begin{array}{c|c} 1 & n_2 \\ \hline n_2 & n_2^2 \end{array}\right] \quad (3·89)$$

ここで，

$$\ell_1 = \frac{k_1 k_2 a_1 a_1}{k_1 c_1 + k_2 a_2}$$

$$\ell_2 = \frac{k_1^2 [k_1 d_1 (b_1 c_1 - 1) - k_2 a_2 (b_2 c_2 - 1)^2]^2}{(k_2 d_1 + k_2 b_2)^2 (k_1 c_1 + k_2 a_2)}$$

$$\beta_2 = \frac{k_1^2 [k_1 d_1 (b_1 c_1 - 1) - k_2 a_2 (b_2 c_2 - 1)^2]^2}{(k_1 d_1 + k_2 b_2)(k_1 c_1 + k_2 a_2)^2}$$

$$\delta_2 = \frac{\sigma_0^2 k_1^2}{k_1 d_1 + k_2 b_2}, \qquad \beta_3 = \frac{k_1 k_2 b_1 b_2}{k_1 d_1 + k_2 d_2}$$

$$n_1 = \frac{1}{a_1 a_2} (>0), \qquad n_2 = -\frac{k_2}{k_1} (<0), \qquad n_3 = \frac{1}{b_1 b_2} (>0)$$

式（3・89）を回路で表示すると，図3・13(a)に示すような相反2端子対網が求まる。特に，上段と下段の理想変成器について，

$$x_1,\ x_2 > 0 \Longrightarrow \quad n_3 = 1$$

$$x_1,\ x_2 < 0 \Longrightarrow \quad n_1 = 1$$

となる。

図3・12におけるN_1，N_2が共に図3・9 (c)(d) の Hazony－Youla 区間である場合は，図3・13(a)におけるp_1を$1/p_1$で置き換えればよい。また，N_1，N_2が共に図3・9 (e)(f) の縦続区間であれば，リアクタンス正関数$z\ (=\mathcal{Q}_2(p_2)/\mathcal{Q}_1(p_2))$を$-j\omega_0$で置き換えればよく，そのときの$W(\mathbf{p})$ ($\mathbf{p}=(p_1)$)の極は，式（3・88）より容易に知れるように，

$$p_1 = j\,\frac{k_2 b_2 + k_1 d_1}{k_1 c_1 + k_2 a_2}\,\omega_0 = -j\,\frac{\beta_2}{\ell_2}\,\omega_0 \qquad \text{及び} \qquad p_1 = \infty$$

の二つの孤立点である。そして，$W(\mathbf{p})$は次のように書ける。

$$W(\mathbf{p}) = \ell_1 p_1 \left[\begin{array}{c|c} 1 & n_1 \\ \hline n_1 & n_1^2 \end{array}\right] - j\beta_2\omega_0 \frac{p_1 + j\dfrac{\delta_2}{\ell_2}\cdot\dfrac{1}{\omega_0}}{p_1 - j\dfrac{\beta_2}{\ell_2}\omega_0} \left[\begin{array}{c|c} 1 & n_2 \\ \hline n_2 & n_2^2 \end{array}\right] - j\beta_3\omega_0 \left[\begin{array}{c|c} 1 & n_3 \\ \hline n_3 & n_3^2 \end{array}\right]$$

次に，N_1，N_2が図3・9 (g) の縦続区間であれば，リアクタンス正関数zを$1/p_1$で置き換えればよく，そのときの$W(\mathbf{p})$ ($\mathbf{p}=(p_1)$) の極は，上述と同様，式（3・88）より，

$$p_1 = \pm j\omega_0 = \pm j\sqrt{\frac{k_2 b_2 + k_1 d_1}{k_1 c_1 + k_2 a_2}}, \qquad p_1 = \infty \qquad \text{及び} \qquad p_1 = 0$$

の三つの孤立点であることが知れる。そして，そのとき$W(\mathbf{p})$は

$$W(\mathbf{p}) = \ell_1 p_1 \left[\begin{array}{c|c} 1 & n_1 \\ \hline n_1 & n_1^2 \end{array}\right] + \frac{2m_2 p_1}{p_1^2 + \omega_0^2} \left[\begin{array}{c|c} 1 & n_2 \\ \hline n_2 & n_2^2 \end{array}\right] + \frac{1}{c_3 p_1} \left[\begin{array}{c|c} 1 & n_3 \\ \hline n_3 & n_3^2 \end{array}\right]$$

$$m_2 = \frac{\ell_2 + \delta_2}{2}\,\omega_0^2 \qquad\qquad c_3 = \frac{1}{\beta_3}$$

と書ける。この場合が1変数の場合におけるDarligton－D区間（図3・13(b)）である。

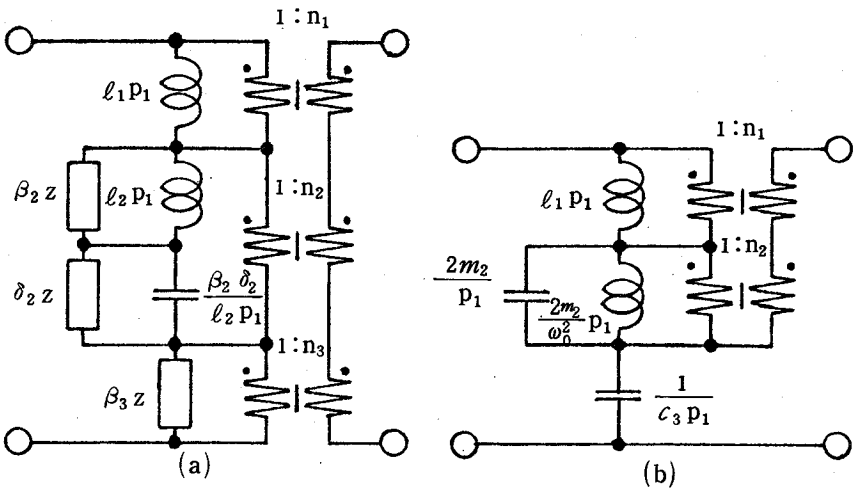


図 3·13　Darlington−D 区間

3·8 節　2 変数リアクタンス正関数の実現と集中分布定数素子混在系への応用

定理 3·1 では一方の変数についてその次数が 1 次である処の 2 変数リアクタンス関数の実現問題が派生した。本節では，これをリアクタンス正関数の場合へ拡張して，その構成法を明らかにする。そして，その結果を集中分布定数素子混在系の問題へ応用し，その結果と定理 3·1 の結果を基に，二，三の混在回路が分離できるための条件を導く。更に，定理 3·2 系 2，定理 3·4 系 5 の結果を基に整数倍の電気長をもつ u. e. 及び単純開放枝等が分離できるための条件を明らかにする。

3·8·1　2 変数リアクタンス正関数の実現

2 変数リアクタンス正関数を

$$w_0(\mathbf{p}) = \frac{\beta_1(p_2)\,p_1 + \beta_2(p_2)}{\alpha_1(p_2)\,p_1 + \alpha_2(p_2)} \qquad (3\cdot 90)$$

とする。上式が p_1 に関して $\mathcal{D}^0(p_1)$ に孤立極をもてば，多項式 $\alpha_t(p_2), \beta_t(p_2)$ $(t=1, 2)$ について定理 3·2 系 2 より，次の関係が成り立つ。

(i)　$p_1 = \infty$ が極のとき，

$$\alpha_1(p_2) \equiv 0, \qquad \alpha_2(p_2) = k\,\beta_1(p_2) \qquad (k > 0)$$

(ii) $p_1 = 0$ が極のとき，

$$\alpha_2(p_2) \equiv 0, \qquad \beta_2(p_2) \equiv k\,\alpha_1(p_2) \qquad (k > 0)$$

(iii) $p_1 = j\omega_0$ $(\omega_0 \neq 0, \infty)$ が極のとき，+3−21

$$\alpha_2(p_2) \equiv j\omega_0\alpha_1(p_2), \quad \alpha_1(p_2) \equiv k\left[\beta_2(p_2) - j\omega_0\beta_1(p_2)\right] \quad (k > 0)$$

尚，$w_0(\mathbf{p})$ が p_1 に関して $\mathcal{D}^0(p_1)$ に孤立零点をもてば，$1/w_0(\mathbf{p})$ の孤立極に変換して考えればよい。結局，このような極または零点をもてば，$w_0(\mathbf{p})$ または $1/w_0(\mathbf{p})$ は，p_1 の1次リアクタンス関数と p_2 のリアクタンス正関数の和の形に帰着し，容易に実現することができる。

そこで，上述のような場合を除くと，残りの孤立極及び孤立零点は p_2 に関するものに限られる。これ等の孤立極は，上記の場合と同様，定理3·2系2によって分離できる。また，孤立零点については $1/w_0(\mathbf{p})$ の孤立極に変換して分離すればよいことは，p_1 の場合と同様である。

以後，$w_0(\mathbf{p})$ は p_i ($i = 1, 2$) の孤立極及び孤立零点をもたないと仮定する。それ故，$w_0(\mathbf{p})$ の分母，分子の多項式は互いに素で，且つそれらの多項式は共に既約である。さて，この分母，分子から作られる行列式 $\mathcal{R}_0(p_2)$ を

$$\mathcal{R}_0(p_2) = \begin{vmatrix} \beta_1(p_2), & \beta_2(p_2) \\ \alpha_1(p_2), & \alpha_2(p_2) \end{vmatrix} \qquad (3\cdot 91)$$

で定義する。そのとき，$\mathcal{R}_0(p_2)$ は

$$\mathcal{R}_0(p_2) = \varepsilon\,\widetilde{g}_*(p_2)\,g(p_2) \qquad (3\cdot 92)$$

の右辺のように分解できる。実際，$w_0(\mathbf{p})$ における p_1 を $p_1 = 1$ に固定すると，それは p_2 の正関数である。従って，$\mathcal{D}^0(p_2)$ において，$\mathcal{R}_0(p_2) \geqq 0$ 及び，$\mathcal{R}_0(p_2) = \widetilde{\mathcal{R}}_{0*}(p_2)$ が成り立つ。それ故，式 (3·92) が得られる。

$g(p_2)$ を Hurwitz 多項式とし，且つ，$\widetilde{g}_*(p_2)$ の零点の一つを $p_{20} \in \overline{\mathcal{D}}(p_2)$ とすると，この p_{20} は仮定により $w_0(\mathbf{p})$ の孤立極でも，孤立零点でもない。従って，定理2·19から，

+3−21： $w_0(\mathbf{p})$ がリアクタンス関数である場合，(iii) は起り得ない。

$$w_0(p_1, p_{20}) \underset{p_1}{\equiv} \beta_1(p_{20}) / \alpha_1(p_{20})$$

が成立する。即ち，$w_0(p_1, p_{20})$ は p_1 に無関係な定数となる。

$\beta_1(p_2)/\alpha_1(p_2)$ はリアクタンス正関数であることに注意すると，

$$p_{20} \in \mathcal{D}^0(p_2) \text{ のとき，} \qquad \mathrm{Re}\ w_0(p_1, p_{20}) = 0$$

$$p_{20} \in \mathcal{D}^+(p_2) \text{ のとき，} \qquad \mathrm{Re}\ w_0(p_1, p_{20}) > 0$$

である。従って，3·3節～3·5節で述べたような孤立伝送零点をもつ p_2 の縦続区間を分離することができる。そして，分離後の残りの関数を $w_1(\mathbf{p})$ とすると，式(3·92)より $\deg_{p_2} w_1 < \deg_{p_2} w_0$ であることが知れる。

$w_1(\mathbf{p})$ の分母分子について，$w_0(\mathbf{p})$ の場合と同様の行列式を $\mathcal{R}_1(p_2)$ とすると，

$$\mathcal{R}_1(p_2) = [\varepsilon_1 \tilde{g}_{1*}(p_2) g_1(p_2)]^{-1} \mathcal{R}_0(p_2)$$
$$(\tilde{g}_{1*}(p_{20}) = 0, \qquad \varepsilon_1 = \pm 1)$$

と書ける。従って，$\mathcal{R}_1(p_2)$ の零点に対し，前述と同様の議論を行うことができ，結局，p_2 に関する次数は逐次低減し，最後には，p_2 について0次，p_1 について1次であるリアクタンス正関数に帰着する。

以上を要約すると，次の定理が得られる。

〔定理3·8〕

(1) 2変数リアクタンス正関数 $w_0(\mathbf{p})$ ($\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, $\deg_{p_1} w_0 = 1$) は，p_2 のリアクタンス正区間を縦続接続した2端子対網の出力端を，p_1 の順素子または逆素子と虚数抵抗の直列または並列接続した1端子対網で終端したときの駆動点イミタンスとして実現できる。

(2) (1)における“リアクタンス正”は，“リアクタンス”で置き換えることができる。[+3-22]

〈定理3·8系〉

(1) 1変数正関数は，リアクタンス正区間を縦続接続した2端子対網を，虚数抵抗と抵抗の直列接続または並列接続した1端子対網で終端したときの駆動点イミタンスとして実現できる。[+3-23]

(2) (1)における“正”は，“正実”で置き換えることができる。[+3-22, +3-23]

3·8·2 集中分布定数素子混在系への応用

本項では，$w_0(\mathbf{p})$ ($\mathbf{p}=(p_1, p_2)$)をリアクタンス関数として議論を進める。複素変数 p_1 及び p_2 に複素周波数，Richards の変数を割り当ることにより，$w_0(\mathbf{p})$ は集中定数素子と同軸管のようなTEM伝送線路（以下，u.e.と略記）を分布定数素子とする混在系，あるいは，二つの異なった電気長をもつ分布定数素子から成る混在系の駆動点イミタンスとなる。その変数の割り当て方は，次の三種である。

$$(a)\quad p_1 = p \qquad\qquad p_2 = \tanh \tau_2 p$$

$$(b)\quad p_1 = \tanh \tau_1 p \qquad\qquad p_2 = p$$

$$(c)\quad p_1 = \tanh \tau_1 p \qquad\qquad p_2 = \tanh \tau_1 p$$

$$(\tau_1,\ \tau_2 > 0)$$

定理3·8(2)の適用例として，図3·14における(a)と(b)の $w_0(\mathbf{p})$ について考える。

［定理3·9］

(1) p_i ($i=1, 2$) を (a) の通りとする。式(3·90)の $w_0(\mathbf{p})$ が，電気長 τ_2 の u.e. を ℓ 個縦続接続した棒状回路の出力端を，線輪または容量で終端したときの駆動点イミタンスとして実現できるためには（図3·14(a)），$w_0(\mathbf{p})$ が次の条件を満足することが必要充分である。

(i) $w_0(\mathbf{p})$ ($\deg_{p_1} w_0 = 1$) はリアクタンス関数である。

(ii) $\mathcal{R}_0(p_2) = k_0(1-p_2^2)^{\ell}$ $\quad$ ($\ell = \deg_{p_2} w_0$, $k_0 > 0$)

(2) p_i ($i=1, 2$) を (c) の通りとすれば，(1)における“線輪または容量”は，“電気長 τ_1 の開放枝または短絡枝”で置き換えることができる。

〈定理3·9系〉

(1) p_i ($i=1, 2$) を (a) の通りとする。式(3·90)の $w_0(\mathbf{p})$ が，電気長 τ_2 の u.e. を ℓ 個縦続接続した棒状回路の出力端を，容量（線輪）で終端したときの駆動点アドミタンス（インピーダンス）として実現できるためには，[+3-1]

+3-22： この場合，虚数抵抗は不用となる。

+3-23： この場合，理想ジャイレータを用いずに実現できる。

$w_0(\mathbf{p})$ が定理 3・9 の条件 (i), (ii) 及び次の (iii) を満足することが必要充分である。

(iii) ℓ が偶数のとき, $\deg_{p_2} \alpha_1 > \deg_{p_2} \beta_1$

ℓ が奇数のとき, $\deg_{p_2} \alpha_1 < \deg_{p_2} \beta_1$

(2) p_i ($i=1, 2$) を (*c*) の通りとすれば, (1)における"容量 (線輪) "は, "電気長 τ_1 の開放枝 (短絡枝) で置き換えることができる。

定理 3・9 は定理 3・8 より明らかである。また, その系は定理 3・8 を精密化したもので, この系の一般化したものを定理 4・3 で述べる。

〔定理 3・10 〕

(1) p_i ($i=1, 2$) を (*b*) の通りとする。式 (3・90) の $w_0(\mathbf{p})$ が, 電気長 τ_1 の u. e. の出力端を線輪及び容量からなる集中定数リアクタンス 1 端子対網で終端したときの駆動点アドミタンスとして実現できるためには (図 3・14 (b)), $w_0(\mathbf{p})$ が次の条件を満足することが必要充分である。

(i) $w_0(\mathbf{p})$ ($\deg_{p_1} w_0 = 1$) はリアクタンス関数である。

(ii) $\mathscr{R}_0(p_2) = \varepsilon k [\alpha_1^2(p_2) - \alpha_2^2(p_2)]$ ($k > 0$, $\varepsilon = \pm 1$)

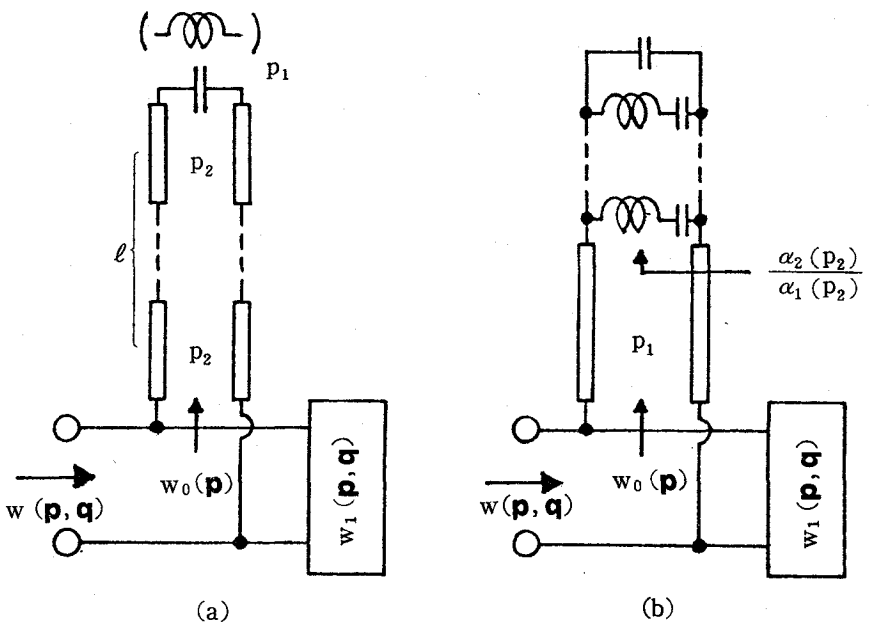


図 3・14 集中分布両素子混在回路の分離

但し，$\mathcal{A}_1(p_2)$ が偶（奇）関数であるとき，$\varepsilon=+1$（$\varepsilon=-1$）。[+3-1]

(2) p_i（$i=1, 2$）を (*c*) の通りとすれば，(1)における“線輪及び容量からなる集中定数リアクタンス1端子対網”は，“電気長 τ_2 の u.e. からなる棒状回路の終端を開放した分布定数リアクタンス1端子対網”で置き換えることができる。

式（3・90）の $w_0(\mathbf{p})$ が，特に p_i（$i=1, 2$）に関する孤立極をもたないと仮定すると，定理3・1における有理関数 $k(p_2, \mathbf{q})$ の分子，$\mathrm{Num}\{k(p_2, \mathbf{q})\}$ について

$$\mathrm{Num}\{k(p_2, \mathbf{q})\} = \mathcal{R}_0(p_2)$$

が成立する。この関係に注目すると次の二つの定理が得られる。

［定理3・11］

p_i（$i=1, 2$）は (*a*) あるいは (*c*) の通りとする。正実関数 $w(\mathbf{p}, \mathbf{q})$（$\mathbf{p}=(p_1, p_2)$）を駆動点アドミタンスとする回路網から，$w_0(\mathbf{p})$ を駆動点アドミタンスとする回路網（図3・14 (a)）が並列に分離できるための必要充分条件は，次の三つである。

(i) $w(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ の分母は，既約多項式因数 $\mathcal{A}_1(p_2)p_1+\mathcal{A}_2(p_1)$ をもつ。

(ii) $\mathcal{A}_2(p_2)/\mathcal{A}_1(p_2)$ はリアクタンス関数で，$\deg_{p_2}(\mathcal{A}_2/\mathcal{A}_1)=\ell$ である。

(iii) 次の右辺が成り立つ。

$$\left\{p_1+\frac{\mathcal{A}_2(p_2)}{\mathcal{A}_1(p_2)}\right\} w(\mathbf{p}, \mathbf{q})\Big|_{p_1=-\alpha_2(p_2)/\alpha_1(p_2)} \underset{\mathbf{q}}{\equiv} \frac{(1-p_2^2)^{\ell}}{\mathcal{A}_1^2(p_2)}$$

上の定理において，特に，$w_0(\mathbf{p})$ の終端が容量（$p_1=p$）あるいは電気長 τ_1 の開放枝（$p_1=\tanh \tau_1 p$）の混在系の駆動点アドミタンスとして実現されるためには，上記の三つの条件に，定理3・9系で示した条件 (iii) を付加しなければならない。

［定理3・12］

p_i（$i=1, 2$）を (*b*) 又は (*c*) の通りとする。正実関数 $w(\mathbf{p}, \mathbf{q})$（$\mathbf{p}=(p_1, p_2)$）を駆動点アドミタンスとする回路網から，図3・14 (b) に示すような $w_0(\mathbf{p})$ を駆動点アドミタンスとする回路網が並列に分離されるためには，$w(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ が次の

三つの条件を満たすことが必要充分である。

(i) $w(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ の分母は，既約多項式因数 $\mathcal{A}_1(p_2)p_1+\mathcal{A}_2(p_2)$ をもつ。

(ii) $\mathcal{A}_2(p_2)/\mathcal{A}_2(p_2)$ はリアクタンス関数である。

(iii) 次の右辺が成立する。

$$\left\{p_1+\frac{\mathcal{A}_2(p_2)}{\mathcal{A}_1(p_2)}\right\} w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \Bigg|_{p_1=-\alpha_2(p_2)/\alpha_1(p_2)} \underset{\mathbf{q}}{\equiv} \frac{\varepsilon k\left[\mathcal{A}_1^2(p_2)-\mathcal{A}_2^2(p_2)\right]}{\mathcal{A}_1^2(p_2)}$$

$$(k > 0)$$

定理 3・1 及び定理 3・8 の結果を基に図 3・14 に示すような集中分布両素子混在回路及び二種電気長分布定数回路が分離できるための条件を駆動点アドミタンスについて導いたが，勿論，インピーダンスで置き換えれば，上記二つの定理の条件は，図 3・14 の双対な混在回路を分離するための条件となる。次に，定理 3・4 系 5 及び定理 3・2 系 2 の応用として，整数倍の電気長をもつ u.e. 等の分離問題を考察する。

〈補題 3・5〉

実有理関数 $f(z)$ が，開領域 $|z|>1$ において $\mathrm{Re}\ f(z) \geqq 0$ であるためには，次の条件を満たすことが必要充分である。

(i) $f(z)$ は開領域 $|z|>1$ において正則である。

(ii) 極を除く単位円上，$|z|=1$ において，$\mathrm{Re}\ f(z)=0$ である。

(iii) 単位円上の極の位数は 1 位，その留数は一般に複素数で，その偏角は，極の偏角に等しい。

補題 3・5 の関数 $f(z)$ は，極 $e^{j\theta_\nu}$ における留数を $k_\nu e^{j\theta_\nu}$ とすると，

$$f(z)=f(\infty)+\sum_{\nu=1}^{\ell}\frac{k_\nu e^{j\theta_\nu}}{z-e^{j\theta_\nu}}+f_1(z)$$

$$(k_\nu\ (>0),\quad \theta_\nu : \text{実定数})$$

で表わされる。ここで，$f_1(z)$ は単位円上に極をもたない有理関数である。

上式，右辺の第 2 項目に関して

$$f_0(z)=\sum_{\nu=1}^{\ell}\left\{\frac{k_\nu}{2}+\frac{k_\nu e^{j\theta_\nu}}{z-e^{j\theta_\nu}}\right\} \qquad (3\cdot 93)$$

なる関数 $f_0(z)$ を定義すると次の補題が得られる。

〈補題 3・6 〉

式（3・93）の $f_0(z)$ は次の性質を有する。

(i) $f_0(z)$ は実有理関数である。

(ii) 開領域 $|z|>1$ において，$\mathrm{Re}\ f_0(z)\geqq 0$ である。

(iii) 極を除く単位円上，$|z|=1$ において，$\mathrm{Re}\ f_0(z)=0$ である。

〈補題 3・7 〉

$f(z,\mathbf{q})$ を開領域 $\{|z|>1\}\times\mathcal{D}^+(\mathbf{q})$ において，$\mathrm{Re}\ f(z,\mathbf{q})\geqq 0$ を満たす実有理関数とする。$f(z,\mathbf{q})$ について

$$f(\infty,\mathbf{q})\underset{\mathbf{q}}{\equiv} r_0 \qquad (r_0\ :\ \text{実定数})$$

であれば，

$$f_1(z,\mathbf{q})=r_0\frac{1+s(z,\mathbf{q})\,z^{\ell}}{1-s(z,\mathbf{q})\,z^{\ell}}$$

で定義される $f_1(z,\mathbf{q})$ も開領域 $\{|z|>1\}\times\mathcal{D}^+(\mathbf{q})$ において $\mathrm{Re}\ f_1(z,\mathbf{q})\geqq 0$ を満足する実有理関数で，その次数は $f(z,\mathbf{q})$ の対応する次数を越えない。

ここで，

$$s(z,\mathbf{q})=\frac{f(z,\mathbf{q})-r_0}{f(z,\mathbf{q})+r_0}$$

そして，ℓ は $f(z,\mathbf{q})-r_0$ の孤立零点 $z=\infty$ の位数である。

特に，$f(z,\mathbf{q})+r_0$ の孤立零点 $z=0$ の位数が $t\ (\leqq\ell)$ であれば，

$$\deg_z f_1=\deg_z f-t$$

〈補題 3・8 〉

$f(z,\mathbf{q})$ を開領域 $\{|z|>1\}\times\mathcal{D}^+(\mathbf{q})$ において $\mathrm{Re}\ f(z)\geqq 0$ を満たす実有理関数とする。$f(z,\mathbf{q})$ が点 $z=e^{j\theta_\nu}$（$\nu=1,2,\cdots,\ell$）を孤立極としてもてば，

$$f_1(z,\mathbf{q})=f(z,\mathbf{q})-f_0(z) \qquad (f_0(z)\ :\text{式（3・93）の通り})$$

で定義される $f_1(z,\mathbf{q})$ も開領域 $\{|z|>1\}\times\mathcal{D}^+(\mathbf{q})$ において $\mathrm{Re}\ f_1(z,\mathbf{q})\geqq 0$ を満たす実有理関数である。

補題3・5，補題3・6，及び補題3・8は，定理3・2系2におけるp_1を，また，補題3・7は定理3・4系5におけるp_1を次式で置き換えることによって容易に得られる。

$$p_1 = \frac{z-1}{z+1} \tag{3・94}$$

特に，上式において

$$z = e^{2\tau_1 p} \qquad (\tau_1 > 0) \tag{3・95}$$

と置くと，これらの補題から次に示すような整数倍の電気長をもつu.e.及び単純枝が分離できるための条件を求めることができる。

〔定理3・13〕

正実関数$w(p_1, \mathbf{q})$ $(p_1 = \tanh \tau_1 p)$を駆動点インピーダンスとする回路網より，電気長$\ell\tau_1$（ℓ：正整数）のu.e.が分離されるためには，式(3・94)及び式(3・95)の変数変換を施した関数$f(z, \mathbf{q})$が次の条件を満たすことが必要充分である。

(i) $f(\infty, \mathbf{q})$ $(= w(1, \mathbf{q}))$は$\mathbf{q}$に無関係な実定数である。

(ii) $f(z, \mathbf{q}) - f(\infty, \mathbf{q})$は，$z = \infty$を孤立零点としてもち，その位数は$\ell$である。

〔定理3・14〕

p_1を$p_1 = \tanh \tau_1 p$とする。正実関数$w(p_1, \mathbf{q})$を駆動点アドミタンスとする回路網より，電気長$\ell\tau_1$の単純枝が並列に分離されるためには，式(3・94)及び式(3・95)の変数変換を施した関数$f(z, \mathbf{q})$が次の条件を満たすことが必要充分である。

(i) $f(z, \mathbf{q})$は，± 1のℓ乗根を孤立極としてもつこと。

(ii) (i)の各極における留数の絶対値はすべて等しい。

3・9節　あとがき

本章では，回路構成の一操作を与える伝送零点の分離問題について考察し，1変数の場合において周知の縦続区間の拡張に相当する2端子対網が分離でき

るための条件，及び，次数が低減するための条件を明らかにした。また，一部の結果を多端子対網の場合へ拡張し，Bott－Duffin 形の操作についても言及した。そして，2変数リアクタンス正関数の内，一方の変数についてその次数が1次であるクラスについて，一つの構成法を提案し，その結果を基に二，三の集中分布両素子混在回路が分離できるための条件を導いた。

伝送零点の実現問題の鍵は，以上の議論の中で見られたように多項式$\widetilde{g}_*(\mathbf{p})$のすべての零点において，即ち，代数幾何学で言う代数曲面上において回路関数$w(\mathbf{p},\mathbf{q})$が，残りの変数の組$\mathbf{q}$に無関係になることが必要である。特に，3・2節，3・3節及び3・5節で考察した縦続区間は，2変数多項式$\widetilde{g}_*(\mathbf{p})$（$\mathbf{p}=(p_1, p_2)$）の$p_1$に関する次数が1次であることが特色と言える。即ち，p_1の根である代数関数が，p_2の有理関数となっていることが議論の中で強く利用されており，縦続区間のイミタンス行列は有理演算のみにより求められている。勿論，有理演算のみによりイミタンス行列が求まると言う観点からは，3・4節，3・6節における議論も同じであり，前記，三つの節において考察されている多項式より多変数化され，且つ各変数について高次化されていると言う意味において最も一般化されたものである。従って，これらの三つの節の議論についても（特に，連分数展開，部分分数展開や，Brune，Hazony－Youla 区間の分離操作にとって基礎となる定理3・1について）多変数化，高次化への拡張が望まれる。しかし，3・4節，3・6節で示したような形での一般化は期待できないようである。

第4章　多変数正実関数の抵抗終端縦続形構成

4·1節　まえがき

本章は，多変数正実関数が，次の四種の抵抗終端縦続形回路として実現されるための条件を必要充分の形で求め，それらの回路の構成法を明らかにする。

(1)　縦続形回路〔I〕　p_1に関して任意の伝送零点をもつリアクタンス2端子対網と，p_2に関して無限遠点（原点）に伝送零点をもつ低域（高域）梯子形2端子対網から成る縦続形回路（4·2節）

(2)　縦続形回路〔II〕　任意の伝送零点をもつp_1のリアクタンス2端子対網と，p_2に関して$p_2=\alpha$（$\alpha>0$）に伝送零点をもつリアクタンス2端子対網から成る縦続形回路（4·3節）

(3)　縦続形回路〔III〕　任意の伝送零点をもつp_i（$i=1, 2, \cdots, n$）のリアクタンス2端子対網を順次縦続接続した回路（4·4節）

(4)　縦続形回路〔IV〕　k_i（$i=1, 2, \cdots, n$）変数の連立伝送零点をもつRichards区間を順次縦続接続した回路（4·5節）

そして，(1)〜(3)の結果を集中定数素子と分布定数素子からなる混在系や，相異なる電気長をもつ分布定数素子からなる混在系へ応用し，マイクロ波フィルタなどに利用できると思われる幾つかの構造について，それらの実現条件を明らかにする。

一般に，多変数リアクタンス正2端子対網の出力端を単位抵抗で終端したときの1端子対網の駆動点イミタンス$w(\mathbf{p})=\psi(\mathbf{p})/\phi(\mathbf{p})$は，定理2·15で明らかにしたように，

$$\psi(\mathbf{p})\,\tilde{\phi}_*(\mathbf{p})+\tilde{\psi}_*(\mathbf{p})\,\phi(\mathbf{p})=2\,\tilde{f}_*(\mathbf{p})\,f(\mathbf{p}) \qquad (4\cdot1)$$

と書ける右辺の分解式が存在しなければならない。そして，$w(\mathbf{p})$が，$\mathbf{p}$の中の適当な変数の組のみに依存する縦続区間の縦続接続として実現されるためには，$\tilde{f}_*(\mathbf{p})$（$f(\mathbf{p})$は一般に複素Hurwitz多項式）が，更に，

$$\tilde{f}_*(\mathbf{p})=\Pi\,\tilde{g}_{k*}(\mathbf{p})$$

と因数分解される必要がある。従って，上記の各縦続形回路については，$f_*(\mathbf{p})$

$(=\tilde{f}_*(\mathbf{p}))$がそれぞれ次のように書ける場合に当たる。

$$f_*(\mathbf{p}) = \Pi g_{k*}(p_1)$$

$$f_*(\mathbf{p}) = (1-p_2)^n \ \Pi g_{k*}(p_1)$$

$$f_*(\mathbf{p}) = \prod_{k=1}^{n} g_{k*}(p_k)$$

$$f_*(\mathbf{p}) = \prod_{k=1}^{n} g_{k*}(\mathbf{p}_{k,i_k})$$

$$(\mathbf{p}_{k,i_k} = (p_{k,1},\ p_{k,2},\ \cdots\cdots,\ p_{k,i_k}))$$

$g_{k*}(\mathbf{p})$の零点は、式(2·13)で示したようにリアクタンス(正)2端子対網の伝送零点を与える。従って，この零点に着目すればよいが，このような零点において$w(\mathbf{p})$が定数になるとは一般に保証されない。これは伝送零点が任意に指定できないことを意味し，1変数の場合の縦続形構成と様相を異にする面である。そこで，本章では，上記の各式に，各縦続形回路として実現できるための付帯条件を与えることが目的となる。

(1)及び(2)の構造に対する付帯条件は，定理2·19で示した行列式の性質に基づく処の，また，(3)及び(4)の構造に対するそれは，定理2·17で明らかにした偶関数部の性質に基づく処のものである。

尚，縦続形構成問題に関する従来の研究については，第1章で詳しく述べたので，本章では省略する。

(本章の内容は「関連発表論文」中，(1)(4)(5)及び(7)に基づいているが，集中分布両素子等の混在系の応用に関する結果を新たに付け加えた。)

4·2節　縦続形回路〔I〕

本節では，縦続形回路〔I〕を考察するが，これは定理3·8(2)に述べた2変数リアクタンス関数の拡張に相当するもので，そこで用いられた手法がこの節においても用いられる。先ず，定理4·1においてp_2に関して無限遠点に伝送零点をもつA区間及びB区間，一区間(総数n区間)づつでp_1に関して任意の伝送零点をもつリアクタンス2端子対網を(n+1)区間に分割した場合の実現条件を明らかにし，その結果を基にp_2の各区間がm_i個の素子からなる低域通過梯子形2端子対網の場合へ拡張する(定理4·2)。そして，逆に定理4·1の

結果を精密化して，p_2 に関する総数 n 区間のすべてが，A または B 区間のみからなる場合を定理 4・3 で述べる。尚，これらの結果はすべて，変数変換 $p_2 \to 1/p_2$ を行うことによって，p_2 の原点を伝送零点としてもつ高域通過形の場合に翻訳することができる。

4・2・1　実現条件及び構成法

ここで，記号 $\langle a \circ b \rangle$ 及び $\langle a \cdot b \rangle$ を次のように定義しておく。

$$\langle a \circ b \rangle = \begin{cases} 0 & (a \leqq b) \\ a - b & (a > b) \end{cases}$$

$$\langle a \cdot b \rangle = \min\,(a, b)$$

尚，本節では，有理関数 $\psi(\mathbf{p})/\phi(\mathbf{p}) = \sum \alpha_i(p_1)\, p_2^{n-i} / \sum \beta_i(p_1)\, p_2^{n-i}$ の分母子に対し，式（4・1）の左辺を $\mathcal{K}(\psi, \phi)$（$= \psi(\mathbf{p})\,\phi_*(\mathbf{p}) + \psi_*(\mathbf{p})\,\phi(\mathbf{p})$）で，また，式（2・26）の行列 $\boldsymbol{\Phi}_{n-k}$ の行列式を $\mathcal{R}_{n-k}(\alpha_i, \beta_i)$ で記す。

［定理 4・1］

(1)　正実関数

$$w_1(\mathbf{p}) = \frac{\psi_1(\mathbf{p})}{\phi_1(\mathbf{p})} = \frac{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i(p_1)\, p_2^{n-i}}{\sum_{i=0}^{n} \beta_i(p_1)\, p_2^{n-i}} \qquad (4\cdot 2)$$

$$\left(\begin{array}{ll} \alpha_0(p_2),\ \beta_0(p_2) \neq 0, & \mathbf{p} = (p_1, p_2) \\ \psi_1,\ \phi_1 \text{ は互いに素な実係数多項式} & \end{array} \right)$$

が，p_2 に関して無限遠点に伝送零点をもつ A 及び B 区間（総数 n 区間），一区間づつで p_1 に関して任意の伝送零点をもつリアクタンス 2 端子対網を（n＋1）区間に分割した抵抗終端縦続形回路（図 4・1 (a)）の駆動点インピーダンスとして実現されるためには，$w_1(\mathbf{p})$ が次の (i) (ii) を満たすことが必要充分である。

(i)　$$\mathcal{R}_{n-k}(\alpha_i, \beta_i) = A_{n-k}^{(1)} \cdot \prod_{\nu=1}^{n} \left[g_{\nu *}(p_1)\, g_\nu(p_1) \right]^{\langle a_k \circ b_\nu \rangle} \cdot \prod_{\nu=2}^{n+1} h_\nu^{2\langle a_k \cdot b_\nu \rangle}(p_1)$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n-1) \qquad (4\cdot 3)$$

(ii)　$$\mathcal{K}(\psi_1, \phi_1) = B_1 \prod_{\nu=1}^{n+1} \left[g_{\nu *}(p_1)\, g_\nu(p_1) \right]$$

ここで，　　$a_k = n - k$　　$b_\nu = \nu - 1$

$A^{(1)}_{n-k}$，B_1（>0）：実定数

$\alpha_i(p_1)$，$\beta_i(p_1)$，$h_\nu(p_1)$：実係数多項式

(2) (1)における“無限遠点”，“図 4・1 (a)”及び条件“(ii)”は，それぞれ“原点”，“図 4・1 (b)”及び次の“式（4・4）”で置き換えることができる。

$$\mathcal{K}(\phi_1, \phi_1) = B_1 p_2^{2n} \prod_{\nu=1}^{n+1} [g_{\nu*}(p_1) g_\nu(p_1)] \qquad (4\cdot4)$$

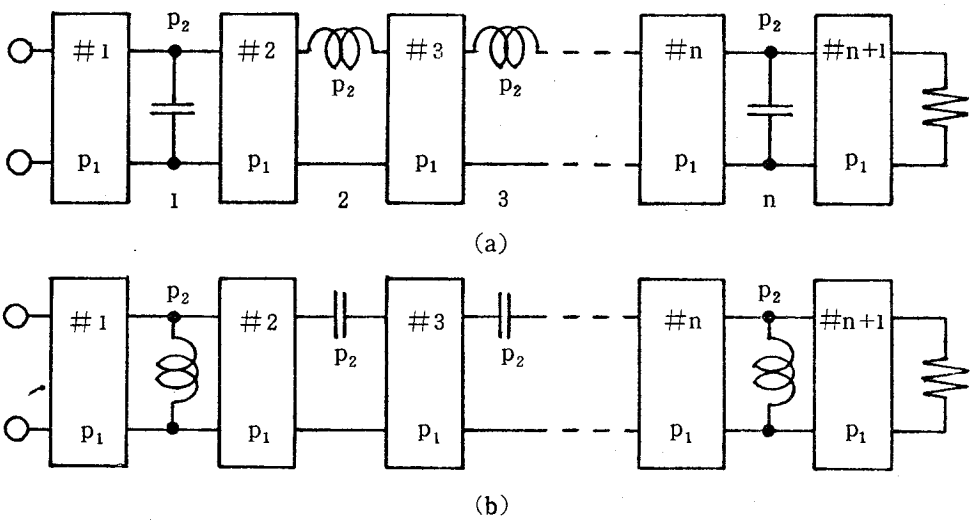


図 4・1　定理 4・1 で考察している抵抗終端縦続形回路

〈補題 4・1〉

定理 4・1 における実係数多項式 $h_\nu(p_1)$ は一般に実 Hurwitz 多項式であるが，特に，その零点について次の性質を有する。

(i)　$h_\nu(p_1)$（$\nu = 2, 3, \cdots\cdots, n$）の零点はすべて $\mathcal{D}^0(p_1)$ に存在する。

(ii)　$h_{n+1}(p_1)$（$\deg_{p_1} h_{n+1} = 0$ の場合を含む）の零点は $\overline{\mathcal{D}}(p_1)$ に存在するが，そのすべてが $\mathcal{D}^0(p_1)$ に限られることはない。

（定理 4・1 (1)の充分性の証明及び構成法）　$w_1(\mathbf{p})|_{p_2=\infty}$ は，p_1 の正実関数であることは明らかである。そして，条件 (ii) より，

$$w_1(\mathbf{p}) + w_{1*}(\mathbf{p})\Big|_{p_2=\infty} = \frac{\alpha_0(p_1)}{\beta_0(p_1)} + \frac{\alpha_{0*}(p_1)}{\beta_{0*}(p_1)} \equiv 0$$

が成り立つ。従って，$w_1(\mathbf{p})|_{p_2=\infty}$ は，リアクタンス関数であることが知れる。いま，それを次の右辺で表わす。

$$w_1(\mathbf{p})|_{p_2=\infty}=\mu_1(p_1)/\nu_1(p_1)$$

$$(\mu_1(p_1)=\alpha_0(p_1)/\gamma_0(p_1),\quad \nu_1(p_1)=\beta_0(p_1)/\gamma_0(p_1))$$

但し，$\gamma_0(p_1)$ は，$\alpha_0(p_1)$，$\beta_0(p_1)$ の共通因数で，$\mu_1(p_1)$，$\nu_1(p_1)$は互いに素とする。

条件(i)と条件(ii)における共通因数 $g_{1*}(p_1)$ に着目し，その零点の一つを p_{10} ($\in\bar{\mathcal{D}}(p_1)$) とすると，$w_1(\mathbf{p})$ はこのような点において p_2 に無関係な定数 φ となる。但し，p_{10} が $w_1(\mathbf{p})$ の極のときは，φ はその留数で定義する。

実際，$p_{10}\in\mathcal{D}^+(p_1)$ とすれば，

$$\mu_1(p_{10})\neq 0,\qquad \nu_1(p_{10})\neq 0 \tag{4·5}$$

であるから，p_2 の多項式 $\phi_1(\mathbf{p})|_{p_1=p_{10}}$，$\phi_1(\mathbf{p})|_{p_1=p_{10}}$ は，n次の最大公約数をもつことが定理2·19より知れる。それ故，$w_1(\mathbf{p})|_{p_1=p_{10}}$ は p_2 に依存しないから，p_2 を $p_2=\infty$ に固定してもよい。従って，定数 φ は，

$$\varphi=\mu_1(p_{10})/\nu_1(p_{10})\qquad (\mathrm{Re}\ \varphi>0)$$

で与えられる。同様に，$p_{10}\in\mathcal{D}^0(p_1)$のとき，もし，式(4·5)が成立すれば，

$$\varphi=\mu_1(p_{10})/\nu_1(p_{10})\qquad (\mathrm{Re}\ \varphi=0)$$

となる。また，$p_{10}\in\mathcal{D}^0(p_1)$ ($p_1=\infty$を含め)が，$w_1(\mathbf{p})$の孤立極であるとき，その点は$\mu_1(p_1)/\nu_1(p_1)$の極でもあるから，定理2·4によりφは次の右辺で与えられる。

$$\varphi=\lim_{p_1\to p_{10}}(p_1-p_{10})\,w_1(\mathbf{p})=\lim_{p_1\to p_{10}}(p_1-p_{10})\frac{\mu_1(p_1)}{\nu_1(p_1)}\quad (>0)$$

尚，$p_{10}\in\mathcal{D}^0(p_1)$ ($p_1=\infty$を含めて)が，$w_1(\mathbf{p})$の孤立零点のときは，正実関数 $1/w_1(\mathbf{p})$ の孤立極に変換して考えればよい。

以上により，3·2節～3·5節で述べた結果が適用でき，p_{10}を孤立伝送零点としてもつp_1のリアクタンス縦続区間が求まる。その縦続区間の縦続行列を，

$$\frac{1}{g_{10}(p_1)}\left[\begin{array}{c|c} a_{10}(p_1) & b_{10}(p_1)\\ \hline c_{10}(p_1) & d_{10}(p_1)\end{array}\right]\qquad (g_{10*}(p_{10})=0)$$

で表わす。但し，$p_{10}=0$ ($p_1=\infty$)または$\mathrm{Im}\ p_{10}=0$ の場合を除く p_{10} については，そのうえ，$g_{10*}(p_{10}^*)=0$ である。そして，$a_{10}(p_{10})\sim d_{10}(p_1)$ は次の関係を満たす。

$$a_{10}(p_1)\,d_{10}(p_1)-b_{10}(p_1)\,c_{10}(p_1)=\varepsilon\, g_{10*}(p_1)\,g_{10}(p_1)$$

分離後の駆動点インピーダンスを $w_{12}(\mathbf{p})$ とすると，それは

$$w_{12}(\mathbf{p})=\frac{\psi_{12}(\mathbf{p})}{\phi_{12}(\mathbf{p})}=\frac{\sum_{i=0}^{n}\alpha_{i1}(p_1)\,p_2^{n-i}}{\sum_{i=0}^{n}\beta_{i1}(p_1)\,p_2^{n-i}} \qquad (4\cdot 6)$$

の形に書ける正実関数である。ここで，$\alpha_{i1}(p_1)$，$\beta_{i1}(p_1)$ は次の通りである。

$$\alpha_{i1}(p_1)=\left[d_{10}(p_1)\,\alpha_i(p_1)-b_{10}(p_1)\,\beta_i(p_1)\right]\left[g_{10*}(p_1)\,g_{10}(p_1)\right]^{-1}$$

$$\beta_{i1}(p_1)=\left[a_{10}(p_1)\,\beta_i(p_1)-c_{10}(p_1)\,\alpha_i(p_1)\right]\left[g_{10*}(p_1)\,g_{10}(p_1)\right]^{-1} \qquad (4\cdot 7)$$

ところで，$\alpha_{01}(p_1)$，$\beta_{01}(p_1)$ は同時に，また，$\alpha_{n1}(p_1)$，$\beta_{n1}(p_1)$ のどちらも恒等的に零に成り得ないことに注意すると，次の何れか一つが成り立つ。

$$(a)\qquad \alpha_{01}(p_1)\not\equiv 0,\qquad \beta_{01}(p_1)\equiv 0 \qquad (4\cdot 8)$$

$$(b)\qquad \alpha_{01}(p_1)\equiv 0,\qquad \beta_{01}(p_1)\not\equiv 0$$

$$(c)\qquad \alpha_{01}(p_1)\not\equiv 0,\qquad \beta_{01}(p_1)\not\equiv 0$$

上記の (*a*) 又は (*b*) が起りうるのは，

$$g_1(p_1)=g_{10}(p_1) \qquad (4\cdot 9)$$

の場合に限られ，上記以外のとき (*c*) となる。

以下，(*a*) ～ (*c*) の各場合について議論する。

(*a*)　$\alpha_{01}(p_1)\not\equiv 0,\qquad \beta_{01}(p_1)\equiv 0$

この場合，$\deg_{p_2}\psi_{12}>\deg_{p_2}\phi_{12}$ であるから，$w_{12}(\mathbf{p})$ は $p_2=\infty$ を孤立極としてもつ。その留数を k_1 とすると，

$$\alpha_{01}(p_1)\equiv k_1\beta_{11}(p_1)\qquad (k_1>0) \qquad (4\cdot 10)$$

が成り立ち，$w_{12}(\mathbf{p})$ より順素子 $k_1 p_2$ が直列に，即ち，$p_2=\infty$ を孤立伝送零点としてもつA区間が分離される。

残りの駆動点インピーダンスを $w_2(\mathbf{p})$ とすると，勿論これは正実関数であり，

$$w_2(\mathbf{p}) = \frac{\psi_2(\mathbf{p})}{\phi_2(\mathbf{p})} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \zeta_i(p_1)\, p_2^{\,n-1-i}}{\sum_{i=0}^{n-1} \eta_i(p_1)\, p_2^{\,n-1-i}} \qquad (4\cdot 11)$$

の形に書ける。ここで，

$$\left.\begin{aligned} \zeta_i(p_1) &= \alpha_{i+1,1}(p_1) - k_1\,\beta_{i+2,1}(p_1) \\ \eta_i(p_1) &= \beta_{i+1,1}(p_1) \end{aligned}\right\} \qquad (4\cdot 12)$$

そして，式（4・11）は次の条件を満たす。

(i)′ $$\mathscr{R}_{n-1-k}(\zeta_i, \eta_i) = A^{(2)}_{n-1-k} \prod_{\nu=2}^{n} \left[g_{\nu *}(p_1)\, g_\nu(p_1)\right]^{\langle a_k \circ b_\nu \rangle} \cdot \prod_{\nu=3}^{n+1} h_\nu^{\,2\langle a_k \bullet b_\nu \rangle}(p_1)$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-2) \qquad (4\cdot 13)$$

(ii)′ $$\mathscr{K}(\psi_2, \phi_2) = B_2 \prod_{\nu=2}^{n+1} \left[g_{\nu *}(p_1)\, g_\nu(p_1)\right]$$

但し，　$a_k = n-1-k$，　$b_\nu = \nu - 2$，　$A^{(2)}_{n-1-k}$，B_2（>0）：実定数

$$\mathscr{R}_{n-1-k}(\zeta_i, \eta_i) = \det.\left[\psi_2, \phi_2\right]_{n-1-k}$$

実際，条件(ii)′は，式(4・12)(4・9)(4・7)及び条件(ii)から容易に求まる。また，条件(i)′は次のようにして求めることができる。式(4・9)に留意して，式(4・7)を $\alpha_i(p_1), \beta_i(p_1)$ について解き，それらを式(4・3)に代入すると，$\mathscr{R}_{n-k}(\alpha_i, \beta_i)$ は次のように書ける。

$$\mathscr{R}_{n-k}(\alpha_i, \beta_i) = \alpha_{01}(p_1)\left[g_{1*}(p_1)\, g_1(p_1)\right]^{n-k}$$

$$\times \left|\begin{array}{l} \alpha_{01}(p_1), \alpha_{11}(p_1), \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \alpha_{n1}(p_1) \\ \qquad \alpha_{01}(p_1), \alpha_{11}(p_1), \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \alpha_{n1}(p_1), \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad , \alpha_{01}(p_1), \alpha_{11}(p_1), \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \alpha_{n1}(p_1) \\ \beta_{11}(p_1), \beta_{21}(p_1), \cdots\cdots\cdots, \beta_{n1}(p_1) \\ \qquad \beta_{11}(p_1), \beta_{21}(p_1), \cdots\cdots\cdots, \beta_{n1}(p_1) \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad , \beta_{11}(p_1), \beta_{21}(p_1), \cdots\cdots\cdots, \beta_{n1}(p_1) \end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} (n-1-k) \\ \left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} (n-k) \end{array}$$

（行列式における余白の要素は零）

更に，式（4・12）を$\alpha_{i1}(p_1)$，$\beta_{i1}(p_1)$について解き，それらを上式に代入すると，

$$\mathscr{R}_{n-k}(\alpha_i,\beta_i)=(-1)^{n-k+1}[g_{1*}(p_1)g_1(p_1)]^{(n-k)}\alpha_{01}(p_1)\beta_{11}(p_1)\mathscr{R}_{n-1-k}(\zeta_i,\eta_i) \tag{4・14}$$

が求まる。但し，$\mathscr{R}_0(\zeta_i,\eta_i)\equiv 1$。

式（4・14）及び式（4・3）において，$k=n-1$ と置くと，$\mathscr{R}_1(\alpha_i,\beta_i)$は，

$$\mathscr{R}_1(\alpha_i,\beta_i)=g_{1*}(p_1)g_1(p_1)\alpha_{01}(p_1)\beta_{11}(p_1)=A_1^{(1)}g_{1*}(p_1)g_1(p_1)\prod_{\nu=2}^{n+1}h_\nu^2(p_1)$$

と書ける。そこで，式（4・10）に注意し，且つ乗算係数を別にすれば，

$$\alpha_{01}(p_1)\equiv k_1\beta_{11}(p_1)\approx\prod_{\nu=2}^{n+1}h_\nu(p_1)$$

の関係が成立する。それ故，式（4・14）及び上式から条件（i）′が得られる。

尚，式（4・8）より

$$\alpha_0(p_1)\equiv a_{10}(p_1)\alpha_{01}(p_1),\quad \beta_0(p_1)\equiv c_{10}(p_1)\alpha_{01}(p_1)$$

であるから，先に仮定した$\alpha_0(p_1)$，$\beta_0(p_1)$の共通因数$\gamma_0(p_1)$は，

$$\gamma_0(p_1)\approx\prod_{\nu=2}^{n+1}h_\nu(p_1)$$

である。

(*b*)　　$\alpha_{01}(p_1)\equiv 0$，　　$\beta_{01}(p_1)\not\equiv 0$

この場合，上述の(*a*)と数学的には同等である。回路的には，駆動点アドミタンス$1/w_1(\mathbf{p})$より逆素子$(k_1p_2)^{-1}$，即ち$p_2=\infty$に孤立伝送零点をもつB区間が分離されることになる。

(*c*)　　$\alpha_{01}(p_1)\not\equiv 0$，　　$\beta_{01}(p_1)\not\equiv 0$

この場合，式（4・6）の正実関数$w_{12}(\mathbf{p})$について，

(i)″　$\mathscr{R}_{n-k}(\alpha_{i1},\beta_{i1})=[g_{10*}(p_1)g_{10}(p_1)]^{-(n-k)}\mathscr{R}_{n-k}(\alpha_i,\beta_i)$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

(ii)″　$\mathscr{K}(\psi_{12},\phi_{12})=[g_{10*}(p_1)g_{10}(p_1)]^{-1}B_1\prod_{\nu=1}^{n+1}[g_{\nu*}(p_1)g_\nu(p_1)]$

を満たすことを示すのは容易である。

以上を要約すると，リアクタンス関数$\mu_1(p_1)/\nu_1(p_1)$の分母または分子が恒

等的に零になるまで (*c*) の場合が繰り返えされ，$g_{1*}(p_1)$ の零点を伝送零点 ($p_1=\infty$ を含め) としてもつ縦続区間が分離される。そして，(*a*) 又は (*b*) のどちらか一方が成り立ち，$p_2=\infty$ を伝送零点としてもつAあるいはB区間が分離される。

p_2 に関して n (＝$\deg_{p_2} w$) 回の操作後の駆動点インピーダンスを $w_{n+1}(\mathbf{p})$ とすると，$\deg_{p_2} w_{n+1}=0$ が成り立つ。即ち，$w_{n+1}(\mathbf{p})$ は，p_1 のみの正実関数となる。いま，その分母及び分子の多項式をそれぞれ，$\phi_{n+1}(\mathbf{p})$，$\psi_{n+1}(\mathbf{p})$ とすると，

$$\mathcal{K}(\phi_{n+1}, \phi_{n+1}) = B_{n+1} g_{n+1*}(p_1) g_{n+1}(p_1)$$

が成り立つ。それ故，定理 3·8 系により，$w_{n+1}(\mathbf{p})$ は $g_{n+1*}(p_1)$ の零点を伝送零点としてもつ縦続区間を縦続接続した 2 端子対網の出力端を抵抗で終端することによって実現することができる。　　(証明終り)

上の定理は，p_2 に関する区間が一個の素子のみから成る回路であった。p_2 の区間が，一般に m_i (≧1) 個の素子から成る場合は次のようになる。

〔定理 4·2 〕

(1)　式 (4·2) の正実関数 $w_1(\mathbf{p})$ が，図 4·1 (a) に示す p_2 の各区間が一般に m_i (≧1) 個の素子から成り，且つ，$p_2=\infty$ に m_i 位の伝送零点をもつ低域通過梯子形 2 端子対網であるときの抵抗終端縦続形回路の駆動点インピーダンスとして実現されるためには，$w_1(\mathbf{p})$ が定理 4·1 (1) に示した条件 (i) 及び条件 (ii) を満たすことが必要充分である。

但し，条件 (i) 及び条件 (ii) における "n" 及び "$b_\nu=\nu-1$" は，それぞれ次の右辺で与えられる式で置き換えるものとする。

$$\text{“}n\text{”} \longrightarrow \text{“}\sum_{i=1}^{n} m_i\text{”}$$

$$\text{“}b_\nu=\nu-1\text{”} \longrightarrow \text{“}b_\nu=\sum_{i=1}^{\nu} m_{i-1} \quad (\text{但し，} m_0=0)\text{”}$$

(2)　(1) における "図 4·1 (a)"，"$p_2=\infty$" 及び "低域" は，それぞれ "図 4·1 (*b*)"，"$p_2=0$" 及び "高域" で置き換えることができる。但し，$\mathcal{K}(\psi_1, \phi_1)$ は式 (4·4) の通りとする。

定理 4·2 (1) は，定理 4·1 (1) の証明と全く同じ方法で示すことができる。ところで，定理 4·1 は，p_2 のA及びB区間を一般に含みうる。そこで，図 4·2

に示すように，p_2に関して一種類の区間のみから成る場合の実現条件を次の定理4・3において明らかにし，定理4・1の結果を精密化する。この精密化によって4・2・2項で示すような集中定数素子と分布定数素子が混在する回路，あるいは，二つの異なった電気長をもつ分布定数素子から成る混在回路の実現問題に有効な条件を求めることができる。

図4・1に示すp_1の2端子対網，$\#\nu$に含まれる実軸上の伝送零点の内，即ち，定理4・1における多項式$g_{\nu*}(p_1)$に含まれる処の$(\sigma_{\nu j}-p_1)$ $(\sigma_{\nu j}>0)$の形で表わされる因数の総数を$\delta_\nu(\sigma_\nu)$で，また，同様に$\#\nu$に含まれる伝送零点$p_1=\infty$の総数を$\delta_\nu(\infty)$で記すと，次のようになる。

［定理4・3］

(1) 式(4・2)の正実関数$w_1(\mathbf{p})$が，図4・2(a)(同図(b))に示すようにp_1について任意の伝送零点をもつリアクタンス2端子対網と，p_2について無限遠点に伝送零点をもつA区間(B区間)のみで分割した抵抗終端縦続形回路の駆動点インピーダンス(アドミタンス)として実現されるためには，$w_1(\mathbf{p})$が定理4・1(1)の条件(i)，(ii)及び次の条件(iii)を満たすことが必要充分である。

(iii) 任意のνに対し，$\delta_\nu(\sigma_\nu)$，$\delta_\nu(\infty)$の一方が奇数のとき，

$$\deg_{p_1}\beta_0 > \deg_{p_1}\alpha_0, \quad \Delta_\nu = 0 \quad (\nu=2,\ 3,\ \cdots,\ n)$$

が成り立ち，もし共に奇数かまたは共に偶数のとき，

$$\deg_{p_1}\beta_0 < \deg_{p_1}\alpha_0, \quad \Delta_\nu = 1 \quad (\nu=2,\ 3,\ \cdots,\ n)$$

但し，　$\Delta_\nu = \deg_{p_1} g_\nu + \delta_\nu(\infty) - \deg_{p_1} h_\nu$

(2) (1)における“図4・2(a)(同図(b))”，“無限遠点”及び“定理4・1(1)”は，それぞれ“図4・2(c)(同図(d))”，“原点”及び“定理4・1(2)”で置き換えることができる。

(定理4・3(1)の充分性の証明)　$w_1(\mathbf{p})$を駆動点インピーダンスとして，以下$w_1(\mathbf{p})$が図4・2(a)の形で実現できることを示す。$w_1(\mathbf{p})$が，条件(i)及び条件(ii)を満たすとき，図4・1(a)の形で実現できることは明らか。従って，

条件(iii)を満たすとき，p_1 の縦続区間を分離した後の駆動点インピーダンス $w_{12}(\mathbf{p})$（式（4・6））において，式（4・8），即ち，

$$\alpha_{01}(p_1) \not\equiv 0, \qquad \beta_{01}(p_1) \equiv 0 \tag{4・15}$$

が常に成り立つことを示せばよい。

$w_1(\mathbf{p})$ の p_2 に関する係数多項式 $\alpha_0(p_1)$，$\beta_0(p_1)$ に対し，

$$t = \max(\deg_{p_1} \alpha_0,\ \deg_{p_1} \beta_0)$$

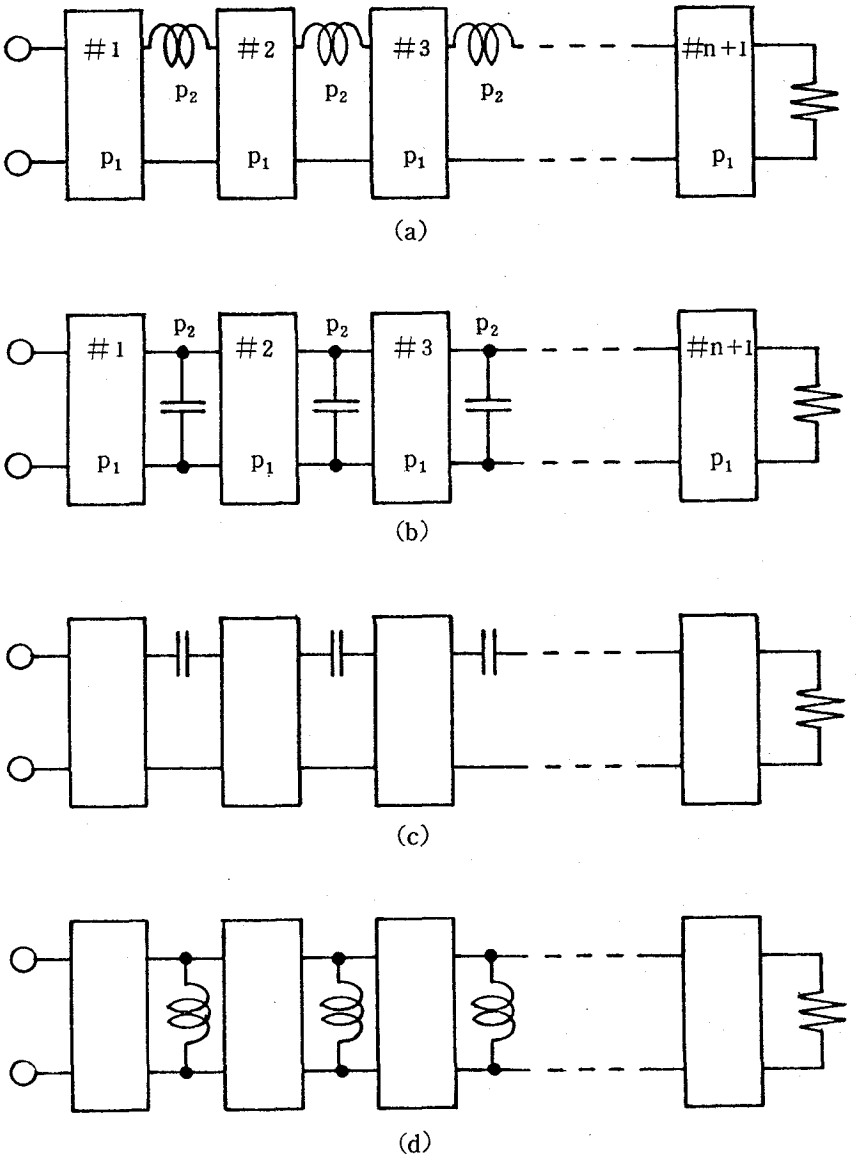


図 4・2　定理 4・3 で考察している抵抗終端縦続形回路

とする。$w_{12}(\mathbf{p})$ における $\alpha_{01}(p_1)$，$\beta_{01}(p_1)$ の次数の比を形式的に表わせば，次の表 4・1 のように書ける。

	[i]		[ii]	
	$t = \deg_{p_1} \alpha_0$		$t = \deg_{p_1} \beta_0$	
	$\dfrac{\deg_{p_1} \alpha_0}{\deg_{p_1} \beta_0}$	$\dfrac{\deg_{p_1} \alpha_{01}}{\deg_{p_1} \beta_{01}}$	$\dfrac{\deg_{p_1} \alpha_0}{\deg_{p_1} \beta_0}$	$\dfrac{\deg_{p_1} \alpha_{01}}{\deg_{p_1} \beta_{01}}$
(イ)	$\dfrac{t}{t-1}$	$\dfrac{t-2}{t-3}$	$\dfrac{t-1}{t}$	$\dfrac{t-3}{t-2}$
(ロ)		$\dfrac{t-1}{t-2}$		$\dfrac{t-2}{t-1}$
(ハ)		$\dfrac{t-2}{t-1}$		$\dfrac{t-1}{t-2}$

(イ)：　$g_{10*}(p_1) = (p_1 - p_{10})(p_1 - p_{10}^*)$　$(\mathrm{Re}\ p_{10} \geqq 0,\ \mathrm{Im}\ p_{10} \neq 0)$

(ロ)：　$g_{10*}(p_1) = p_1 - p_{10}$　$(\mathrm{Re}\ p_{10} \geqq 0,\ \mathrm{Im}\ p_{10} = 0)$

(ハ)：　$\begin{cases} g_{10*}(p_1) = p_{10} - p_1 \\ p_1 = \infty \end{cases}$　$(\mathrm{Re}\ p_{10} > 0,\ \mathrm{Im}\ p_{10} = 0)$

表 4・1　次 数 の 関 係

表の (イ) 及び (ロ) に属する $g_{10*}(p_1)$ の零点 p_{10} を伝送零点としてもつ縦続区間を分離しても，リアクタンス関数 $\alpha_0(p_1)/\beta_0(p_1)$ 及び $\alpha_{01}(p_1)/\beta_{01}(p_1)$ の分母分子の次数の関係は変化しない。即ち，

$$\deg_{p_1} \alpha_0 \gtrless \deg_{p_1} \beta_0 \ \longrightarrow\ \deg_{p_1} \alpha_{01} \gtrless \deg_{p_1} \beta_{01} \qquad (\text{復号同順})$$

ところが，(ハ) に属する伝送零点をもつ縦続区間を分離すると，

$$\deg_{p_1} \alpha_0 \gtrless \deg_{p_1} \beta_0 \ \longrightarrow\ \deg_{p_1} \alpha_{01} \lessgtr \deg_{p_1} \beta_{01} \qquad (\text{復号同順})$$

となり，不等号の向きが入れ換わることが知れる。

いま，簡単化のために，$\deg_{p_1}(\mu_1/\nu_1) = \deg_{p_1} g_{10}$　$(g_{10}(p_1) = g_1(p_1))$ と仮定する。即ち，$\mu_1(p_1)/\nu_1(p_1)$ は高々2次のリアクタンス関数とする。このとき，

条件(iii)より表4·1の[i]−(イ), [i]−(ロ)及び[ii]−(ハ)の場合を考えれば充分で，この三つの何れについても

$$\deg_{p_1} \alpha_{01} = 0, \qquad \deg_{p_1} \beta_{01} = -1$$

が成り立つ。これは，$\beta_{01}(p_1) \equiv 0$ であることを意味する。

次に，$\deg_{p_1}(\mu_1/\nu_1) > 2$ と仮定する。表の(イ)，(ロ)に属する伝送零点を分離しても，分離前と分離後の $\alpha_0(p_1)/\beta_0(p_1)$，$\alpha_{01}(p_1)/\beta_{01}(p_1)$ の分母分子の次数の大小関係は上で示したように変化しないから，このような(イ)及び(ロ)に属するものは最初から無かったと仮定しても一般性を失うことはない。

そこで，$w_1(\mathbf{p})$ が条件(iii)を，即ち，

(*a*)　$\delta_1(\sigma_1)$，$\delta_1(\infty)$ が共に偶数または奇数のとき，$t = \deg_{p_1} \alpha_0$

(*b*)　$\delta_1(\sigma_1)$ または $\delta_1(\infty)$ の一方が奇数のとき，　$t = \deg_{p_1} \beta_0$

を満たしているものと仮定する。そして，(ハ)に属する伝送零点を分離する毎に，上記の(*a*), (*b*)あるいは(*b*), (*a*)を交互に繰り返し，最後に，$\delta_1(\sigma_1) = 1$ または，$\delta_1(\infty) = 1$ に帰着する。この場合については既に述べた。

以上により，$\alpha_{01}(p_1) \not\equiv 0$，$\beta_{01}(p_1) \equiv 0$ が得られた。即ち，駆動点インピーダンス $w_{12}(\mathbf{p})$ より p_2 のA区間が分離をされることになる。

次に，分離後の駆動点インピーダンス $w_2(\mathbf{p})$（式(4·11)）が，再び条件(iii)を満たすことを示す。$w_2(\mathbf{p})$ の分母における多項式 $\eta_0(p_1)$ の次数は，式(4·12)及び式(4·15)から次のように表わすことができる。

$$\deg_{p_1} \eta_0 = \deg_{p_1} \beta_{11} = m - 1 \quad 又は \quad m$$

但し，
$$m = \deg_{p_1} g_2 + \delta_2(\infty) + \sum_{\nu=3}^{n+1} \deg_{p_1} h_\nu$$

$w_2(\mathbf{p})|_{p_2=\infty} = \zeta_0(p_1)/\eta_0(p_1)$ はリアクタンス関数であることに注意すると，$\zeta_0(p_1)$ 及び $\eta_0(p_1)$ の次数は形式的に次のように書ける。

$$\frac{\deg_{p_1} \zeta_0}{\deg_{p_1} \eta_0} = \begin{cases} \dfrac{m+1}{m} \quad 又は \quad \dfrac{m-1}{m} & (\triangle_2 = 0) \\[2ex] \dfrac{m}{m-1} \quad 又は \quad \dfrac{m-2}{m-1} & (\triangle_2 = 1) \end{cases}$$

そこで，

$$\max\{\deg_{p_1}\zeta_0,\ \deg_{p_1}\eta_0\}=m+1 \quad 又は \quad m-1$$

と仮定すると，

$$\deg_{p_1} w_2=\sum_{\nu=2}^{n+1}\{\deg_{p_1} g_\nu+\delta_\nu(\infty)\}\pm 1 \qquad (4\cdot 16)$$

となる。一方，条件 (ii)′ より

$$\deg_{p_1} w_2=\sum_{\nu=2}^{n+1}\{\deg_{p_1} g_\nu+\delta_\nu(\infty)\}$$

でなければならず，式（4·16）は矛盾する。それ故，次式が成り立つ。

$$\frac{\deg_{p_1}\zeta_0}{\deg_{p_1}\eta_0}=\begin{cases}\dfrac{m-1}{m} & (\triangle_2=0)\\[2ex] \dfrac{m}{m-1} & (\triangle_2=1)\end{cases}$$

換言すれば，

$$\triangle_2=0 \longrightarrow \deg_{p_1}\zeta_0<\deg_{p_1}\eta_0$$

$$\triangle_2=1 \longrightarrow \deg_{p_1}\zeta_0>\deg_{p_1}\eta_0$$

となる。　（証明終り）

4·2·2　集中分布定数素子混在系への応用

3·8 節でも触れたように，複素周波数及び Richards 変数を p_1 及び p_2 に割り当てる方法として，次の三種が考えられる。

$$p_1=p \qquad p_2=\tanh\tau_2 p \qquad (4\cdot 17)$$

$$p_1=\tanh\tau_1 p \qquad p_2=p \qquad (4\cdot 18)$$

$$p_1=\tanh\tau_1 p \qquad p_2=\tanh\tau_2 p \qquad (4\cdot 19)$$

従って，例えば，定理 4·2 の $w_1(\mathbf{p})$ に式（4·17）を割り当てると，$w_1(\mathbf{p})$ は集中定数リアクタンス 2 端子対網と，電気長 τ_2 の直列単純短絡枝，並列単純開放枝から成る集中・分布定数素子混在系の抵抗終端縦続形回路の駆動点イミタンスとして実現される。同様に，式（4·18）又は式（4·19）を割り当てること

によって上述と似た考察を行うことができる。しかし，従来の等電気長分布定数回路論[53][54]などで知られているように，迷結合の防止や短絡枝の実現に関する困難性等を考慮すると，上述の変数の割り当て方に対しては，定理 4・2 は形式論に過ぎなくなる。以下，マイクロ波フィルタなどに利用できると思われる具体的な構造を二つ想定して，その実現条件を明らかにする。尚，特に断わらない限り前項で用いた記号を使用する。

(1) 棒状回路と集中定数 L・C 梯子形 2 端子対網から成る縦続形回路[+4−1]

変数 p_1，p_2 を式（4・18）の通りとする。式（4・2）の正実関数 $w_1(\mathbf{p})$ が，図 4・3 (a) に示すような電気長 τ_1 の u.e. を σ_ν（$\nu=1, 2, \cdots\cdots, n+1$）個縦続接続した棒状回路と，$m_i$（$i=1, 2, \cdots\cdots, n$）個の線輪と容量から成る低域通過梯子形 2 端子対網とを縦続接続した 2 端子対網の出力端を抵抗で終端したときの駆動点インピーダンスとして実現できるためには，$w_1(\mathbf{p})$ が次の条件を満たすことが必要充分である。

(i) $$\mathscr{R}_{n-k}(\alpha_i, \beta_i) = A^{(1)}_{n-k} \prod_{\nu=1}^{n} (1-p_1^2)^{\sigma_\nu \langle a_k \circ b_\nu \rangle} \cdot \prod_{\nu=2}^{n+1} h_\nu^{2\langle a_k \bullet b_\nu \rangle}(p_1)$$

$$(k=0, 1, 2, \cdots\cdots, n-1)$$

(ii) $$\mathscr{K}(\psi_1, \phi_1) = B_1(1-p_1^2)^{\ell_1} \qquad \left(\ell_1 = \sum_{\nu=1}^{n+1} \sigma_\nu\right) \qquad (4\cdot 20)$$

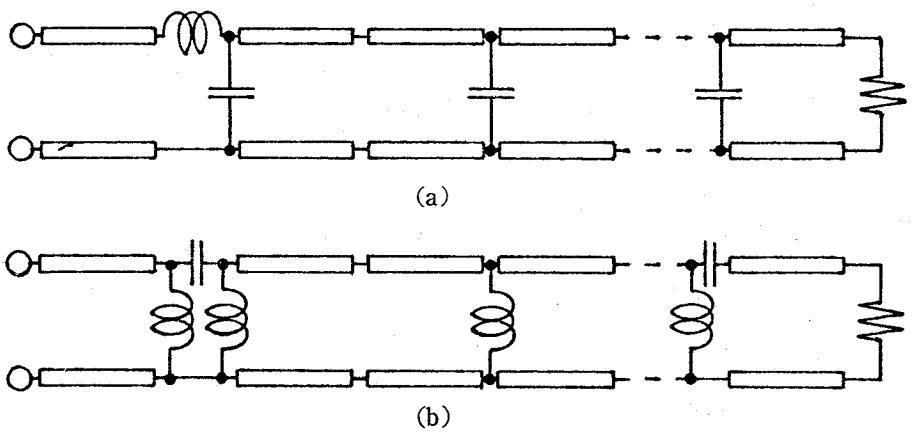


図 4・3 (1)で考察している集中分布定数素子混在回路

+4−1： この構造については，別の実現条件を次節の 4・3・2 項で与えている。

(iii) $\ell_i = \deg_{p_i} w_1 \qquad (i=1,\ 2)$

但し, $a_k = \ell_2 - k \qquad (\ell_2 = \sum_{i=1}^{n} m_i)$

$b_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} m_{i-1} \qquad (m_0 = 0)$

尚，図4・3 (b) に対する駆動点イミタンスを $w_1(\mathbf{p})$ とすれば，そのとき式（4・20）を次式で置き換えればよい。

$$\mathcal{K}(\psi_1, \phi_1) = B_1\, p_2^{2\ell_2}\,(1 - p_1^2)^{\ell_1}$$

(2) 電気長 τ_1 の u.e. と電気長 τ_2 の並列単純開放枝から成る縦続形回路[+4-1]

変数 p_1, p_2 を式（4・19）の通りとする。式（4・2）の正実関数 $w_1(\mathbf{p})$ が，電気長 τ_1 の u.e. を（n＋1）個縦続接続した棒状回路の出力端子対を抵抗で終端した回路の各 u.e. の連結点に電気長 τ_2 の単純開放枝を並列に接続した二種電気長分布定数回路（図4・4(a)）の駆動点アドミタンスとして実現されるためには，$w_1(\mathbf{p})$ が次の条件を満たすことが必要充分である。

(i) $\mathcal{R}_{n-k}(\alpha_i, \beta_i) = A^{(1)}_{n-k}\,(1-p_1^2)^{(n-k)(n-k+1)/2}\,[p_1^{n+k-1}(p_1+a)^2]^{n-k}$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1) \qquad (4\cdot21)$$

(ii) $\mathcal{K}(\psi_1, \phi_1) = B_1\,(1 - p_1^2)^{n+1} \qquad (4\cdot22)$

(iii) $\deg_{p_1} w_1 = n + 1, \qquad \deg_{p_2} w_1 = n \qquad (4\cdot23)$

但し, $a > 0, \qquad A^{(1)}_{n-k} > 0$

（証明） 充分性のみを示す。式（4・21）は次のようになっている。

$$g_{\nu *}(p_1)\, g_\nu(p_1) = 1 - p_1^2 \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \cdots,\ n+1)$$

$$h_\nu(p_1) = p_1 \qquad (\nu = 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n)$$

$$h_{n+1}(p_1) = p_1 + a$$

そして，式（4・21）及び式（4・23）より

$$\delta_\nu(\infty) = 0 \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n+1)$$

である。それ故，次式を得る。

$$\Delta_\nu = 0 \qquad (\nu = 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n)$$

次に，式（4·21）において $k = n - 1$ の場合を考えると，

$$\mathcal{R}_1(\alpha_i,\ \beta_i) = \alpha_0(p_1)\beta_1(p_1) - \alpha_1(p_1)\beta_0(p_1)$$
$$= A_1^{(1)}(1 - p_1^2)^2\ p_1^{2(n-1)}\ (p_1 + a)^2$$

と書ける。ここで，$A_1^{(1)} > 0$ に注意すると，

$$\deg_{p_1} \alpha_1 \beta_0 \geqq 2(n+1)$$

でなければならない。一方，$\deg_{p_1} w_1 = n + 1$（条件（iii））であるから，多項式 $\alpha_1(p_1)$，$\beta_0(p_1)$ について

$$\deg_{p_1} \alpha_1,\quad \deg_{p_1} \beta_0 \qquad \leqq n + 1$$

でなければならない。それ故，上式から $\beta_0(p_1)$ について

$$\deg_{p_1} \beta_0 = n + 1$$

が求まる。そして，$\alpha_0(p_1)/\beta_0(p_1)$ はリアクタンス関数であるから，結局，

$$\deg_{p_1} \alpha_0 < \deg_{p_1} \beta_0$$

でなければならない。上式と先に求めた Δ_ν は，定理 4·3 における条件（iii）である。それ故，図 4·4（a）の駆動点アドミタンスとして $w_1(\mathbf{p})$ は実現することができる。（証明終り）

図 4·4（a）における単純開放枝を単純単絡枝で置き換えた図 4·4（b）に示す抵抗終端縦続形回路は，式（4·22）を

$$\mathcal{K}(\psi_1,\ \phi_1) = B_1\ p_2^{2n}(1 - \mathbf{p}_1^2)^{n+1}$$

で置き換えればよい。

また，変数 p_1，p_2 に式（4·18）を割り当てれば，上に述べた結果は，図 4·4（a）（同図（b））における開放枝（短絡枝）を容量（線輪）で置き換えた場合の集中分布定数素子混在回路に対する実現条件となる。

尚，図 4·4（a）における #（n+1）の電気長 τ_1 の u.e. が存在しない場合の

回路に対しては，式（4·21），（4·22）及び式（4·23）は次のようになる。

(i) $\mathscr{R}_{n-k}(\alpha_i, \beta_i) = A^{(1)}_{n-k}\, p_1^{(n-k)(n+k-1)}(1-p_1^2)^{(n-k)(n-k+1)/2}$

(ii) $\mathscr{K}(\psi_1, \phi_1) = B_1(1-p_1^2)^n$

(iii) $n = \deg_{p_1} w_1 = \deg_{p_2} w_1$

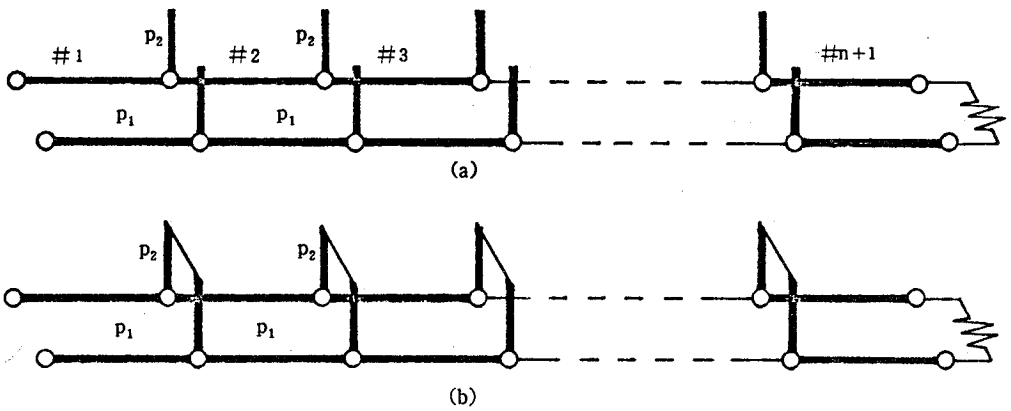


図 4·4　(2)で考察している二種電気長分布定数回路

前項に示した定理の応用として，二つの集中分布定数素子混在回路についてその実現条件を述べたが，幾つかの他の実際的な回路について似たような考察を行うことは可能である。次項では，例題を用いて定理 4·3 の結果を検証すると共に，構成手順を説明する。

4·2·3　構 成 例

次の正実駆動点アドミタンス $w_1(\mathbf{p})$ $(\mathbf{p}=(p_1, p_2))$ の構成を考える。

$$w_1(\mathbf{p}) = \frac{\psi_1(\mathbf{p})}{\phi_1(\mathbf{p})} = \frac{\alpha_0 p_2^3 + \alpha_1 p_2^2 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3}{\beta_0 p_2^3 + \beta_1 p_2^2 + \beta_2 p_2 + \beta_3}$$

$\alpha_0 = 12p_1^2(3p_1^2+2)(2p_1+1)$　$\alpha_1 = 3p_1(462p_1^5+234p_1^4+416p_1^3+207p_1^2+56p_1+26)$

$\alpha_2 = 3(540p_1^7+327p_1^6+1408p_1^5+697p_1^4+766p_1^3+399p_1^2+44p_1+16)$

$\alpha_3 = 3(54p_1^7+614p_1^6+387p_1^5+732p_1^4+301p_1^3+208p_1^2+38p_1+6)$

$\beta_0 = 4p_1^3(3p_1^2+2)(2p_1+1)$　　$\beta_1 = p_1^2(30p_1^5+18p_1^4+560p_1^3+279p_1^2+344p_1+170)$

$\beta_2 = p_1(3p_1^6+652p_1^5+391p_1^4+1486p_1^3+717p_1^2+620p_1+286)$

$\beta_3 = 2p_1^7+63p_1^6+696p_1^5+427p_1^4+712p_1^3+272p_1^2+150p_1+18$

定理 4・1 の条件 (ii) を調べると,

$$\mathcal{K}(\phi_1, \phi_1) = 648(1-p_1^2)^5(p_2^2+1)^2$$

となる。同様に，条件 (i) の $\mathcal{R}_{n-k}(\alpha_i, \beta_i)$ を求めると次のように書ける。

	$g_{1*}g_1^{\langle\circ\rangle}$	$g_{2*}g_2^{\langle\circ\rangle}$	$g_{3*}g_3^{\langle\circ\rangle}$
$\mathcal{R}_1(\ )/A_1$	$(1-p_1^2)^1$		
$\mathcal{R}_2(\ )/A_2$	$(1-p_1^2)^2$	$[(1-p_1^2)(p_1^2+1)^2]^1$	
$\mathcal{R}_3(\ )/A_3$	$(1-p_1^2)^3$	$[(1-p_1^2)(p_1^2+1)^2]^2$	$(1-p_2^2)^2$

$h_2^{2\langle\bullet\rangle}$	$h_3^{2\langle\bullet\rangle}$	$h_4^{2\langle\bullet\rangle}$
$p_1^2(3p_1^2+2)^2$	p_1^2	$(2p_1+1)^2$
$p_1^2(3p_1^2+2)^2$	p_1^4	$(2p_1+1)^4$
$p_1^2(3p_1^2+2)^2$	p_1^4	$(2p_1+1)^6$

即ち,

$g_{1*}(p_1)g_1(p_1) = 1-p_1^2$　　$g_{2*}(p_1)g_2(p_1) = (1-p_1^2)(p_1^2+1)^2$

$g_{3*}(p_1)g_3(p_1) = (1-p_1^2)^2$　　$g_{4*}(p_1)g_4(p_1) = 1-p_1^2$

$h_2(p_1) = p_1(3p_1^2+1)$　　$h_3(p_1) = p_1$　　$h_4(p_1) = 2p_1+1$

次に，定理 4・3 の条件 (iii) を検討すると，$w_1(\mathbf{p})|_{p_2=\infty}$ の分母の次数は分子のそれより 1 次高いことは視察により明白。また，$\Delta_2 = 1$, $\Delta_3 = 0$ であることは容易に知れる。従って，$w_1(\mathbf{p})$ は図 4・2 (a) の形で実現できるはずである。

以下，変数 p_1, p_2 をそれぞれ，$p_1 = \tanh \tau_1 p$，$p_2 = p$ として構成を進める。

$g_{1*}(p_1)$ の零点，$p_1=+1$ に対し p_2 に無関係に $w_1(\mathbf{p})|_{p_1=1} \underset{p_2}{\equiv} 3$ が求まる。即ち，特性アドミタンス $Y_1=3\,(\mho)$ の u.e. が分離できる。残りの関数 $w_{12}(\mathbf{p})$ は次のようになる。

$$w_{12}(\mathbf{p})=\frac{\psi_{12}(\mathbf{p})}{\phi_{12}(\mathbf{p})}=\frac{\alpha_{01}\,p_2^3+\alpha_{11}\,p_2^2+\alpha_{21}\,p_2+\alpha_{31}}{\beta_{11}\,p_2^2+\beta_{21}\,p_2+\beta_{31}}$$

$\alpha_{01}=4\,p_1^2(3p_1^2+2)(2p_1+1)$ $\qquad$ $\alpha_{11}=30p_1^6+18p_1^5+128p_1^4+63p_1^3+56p_1^2+26\,p_1$

$\alpha_{21}=3\,p_1^6+112\,p_1^5+67\,p_1^4+190\,p_1^3+87\,p_1^2+44\,p_1+16$

$\alpha_{31}=2p_1^6+9p_1^5+84p_1^4+49p_1^3+64p_1^2+20p_1+6$ $\qquad$ $\beta_{11}=24p_1^2(3p_1^2+2)(2p_1+1)$

$\beta_{21}=6\,p_1(30\,p_1^5+18\,p_1^4+72\,p_1^3+35\,p_1^2+32\,p_1+14)$

$\beta_{31}=6\,(3\,p_1^6+34\,p_1^5+21\,p_1^4+36\,p_1^3+14\,p_1^2+8\,p_1+1)$

明らかに，$w_{12}(\mathbf{p})|_{p_2=\infty} \underset{p_1}{\equiv} \infty$ である。従って，

$$c_1=\lim_{p_2\to\infty}\frac{w_{12}(\mathbf{p})}{p_2}=\frac{1}{6}\ (\mathrm{F})$$

の容量が並列に分離される。残りの駆動点アドミタンス $w_2^{(1)}(\mathbf{p})$ は，

$$w_2^{(1)}(\mathbf{p})=\frac{\psi_2^{(1)}(\mathbf{p})}{\phi_2^{(1)}(\mathbf{p})}=\frac{\zeta_0^{(1)}\,p_2^2+\zeta_1^{(1)}\,p_2+\zeta_2^{(1)}}{\eta_0^{(1)}\,p_2^2+\eta_1^{(1)}\,p_2+\eta_2^{(1)}}$$

$\zeta_0^{(1)}=4p_1(2p_1+1)(7p_1^2+3)$ $\qquad$ $\zeta_1^{(1)}=78p_1^5+46p_1^4+154p_1^3+73p_1^3+36p_1+15$

$\zeta_2^{(1)}=2p_1^6+9p_1^5+84p_1^4+49p_1^3+64p_1^2+20\,p_1+6$ $\qquad$ $\eta_0^{(1)}=24p_1^2(2p_1+1)(3p_1^2+2)$

$\eta_1^{(1)}=6\,p_1(30\,p_1^5+18\,p_1^4+72\,p_1^3+35\,p_1^2+32\,p_1+4)$

$\eta_2^{(1)}=6\,(3\,p_1^6+34\,p_1^5+21\,p_1^4+36\,p_1^3+14\,p_1^2+8\,p_1+1)$

となる。そして，次の条件を満たすことが知れる。

(i)′ $\qquad \mathscr{R}_1(\zeta_i^{(1)},\eta_i^{(1)})=A_1^{(1)}(p_1^2+1)^2(1-p_1^2)\,p_1^2(2\,p_1+1)^2$

$\qquad\qquad \mathscr{R}_2(\zeta_i^{(1)},\eta_i^{(1)})=A_2^{(1)}(p_1^2+1)^2(1-p_1^2)^4\,p_1^2(2\,p_1+1)^2$

(ii)′ $\qquad \mathscr{K}(\psi_i^{(1)},\phi_i^{(1)})=72\,(1-p_1^2)^4\,(p_1^2+1)^2$

(iii)′ $\qquad \deg_{p_1}\zeta_0^{(1)}<\deg_{p_1}\eta_0^{(1)}\ ,\qquad \Delta_3=0$

上記 (i)′ と (ii)′ の共通零点は $p_1=\pm j$ と $p_1=\pm 1$ である。その分離順序は何方でもよい。先ず，$p_1=+1$ とすると，特性アドミタンス $Y_2=1/3\,(\mho)$

のu.e.を分離することができる。分離後の関数$w_2^{(2)}(\mathbf{p})$は

$$w_2^{(2)}(\mathbf{p}) =$$

$$\frac{4p_1(2p_1^2+1)(2p_1+1)p_2^2+(20p_1^5+12p_1^4+42p_1^3+20p_1^2+12p_1+5)p_2}{4p_1^2(2p_1+1)p_2^2+(18p_1^4+10p_1^3+28p_1^2+13p_1)p_2} \times$$

$$\times \frac{+(2p_1^5+22p_1^4+13p_1^3+18p_1^2+6p_1+2)}{+(2p_1^5+3p_1^4+18p_1^3+10p_1^2+10p_1+2)}$$

となり，そして

(i)″ $\mathcal{R}_1(\zeta_i^{(2)}, \eta_i^{(2)}) = A_1^{(2)}(p_1^2+1)^2 p_1^2(2p_1+1)^2$

$\mathcal{R}_2(\zeta_i^{(2)}, \eta_i^{(2)}) = A_2^{(2)}(p_1^2+1)^4(1-p_1^2)^2 p_1^2(2p_1+1)^4$

(ii)″ $\mathcal{K}(\phi_2^{(2)}, \phi_2^{(2)}) = 8(1-p_1^2)^3(p_1+1)^2$

(iii)″ $\deg_{p_1}\zeta_0^{(2)} > \deg_{p_1}\eta_0^{(2)}, \quad \Delta_3 = 0$

を満たす。但し，$\phi_2^{(2)}$，$\psi_2^{(2)}$は，それぞれ$w_2^{(2)}(\mathbf{p})$の分母，分子における多項式，また，$\eta_i^{(2)}$，$\zeta_i^{(2)}$は，それぞれ$\psi_2^{(2)}$，$\phi_2^{(2)}$のp_2に関する係数多項式である。

先と同様，条件(i)″と条件(ii)″の共通零点$p_1=\pm j$は，$w_2^{(2)}(\mathbf{p})$の孤立極，孤立零点のどちらでもないことに注意すると，次の縦続行列で表わされるBrune区間が求まる。

$$\frac{1}{2(p_1^2+1)}\left[\begin{array}{c|c} p_1^2+2 & 2p_1 \\ \hline p_1 & 2(2p_1^2+1) \end{array}\right]$$

この区間を分離した後の残りの関数は，

$$w_{23}(\mathbf{p}) = \frac{4p_1(2p_1+1)p_2^2+(10p_1^3+6p_1^2+12p_1+5)p_2+(p_1^3+10p_1^2+5p_1+2)}{8p_1(2p_1+1)p_2+2(2p_1^3+2p_1^2+4p_1+1)}$$

となり，$c_2 = 1/2$ (F)の並列容量が分離できる。

そして，

$$w_3(\mathbf{p}) = \frac{4(p_1^2+1)(2p_1+1)p_2+(p_1^3+10p_1^2+5p_1+2)}{8p_1+(2p_1+1)p_2+2(2p_1^3+2p_1^2+4p_1+1)}$$

(i)‴ $\mathcal{R}_1(\mu_i, \lambda_i) = A_1^{(3)}(1-p_1^2)^2(2p_1+1)^3$

(ii)‴ $\mathcal{K}(\varphi_3, \phi_3) = 8(1-p_1^2)^3$

(iii)‴ $\deg_{p_1}\mu_0 > \deg_{p_1}\lambda_0$

$w_3(\mathbf{p})$ より，2個のu.e.を分離することができるが，その特性アドミタンスの値は共に1（℧）である。そして，次の $w_{34}(\mathbf{p})$ を得る。

$$w_{34}(\mathbf{p}) = \frac{4(2p_1+1)p_2+(p_1+2)}{2(2p_1+1)}$$

上式より分離される並列容量は，$c_3=2$（F）である。残りの関数は次に示すように p_1 のみの関数となる。

$$w_4(\mathbf{p}) = \frac{p_1+2}{2(2p_1+1)}$$

$w_4(\mathbf{p})$ は，特性アドミタンス1/2（℧）のu.e.を単位抵抗で終端することにより実現することができる。

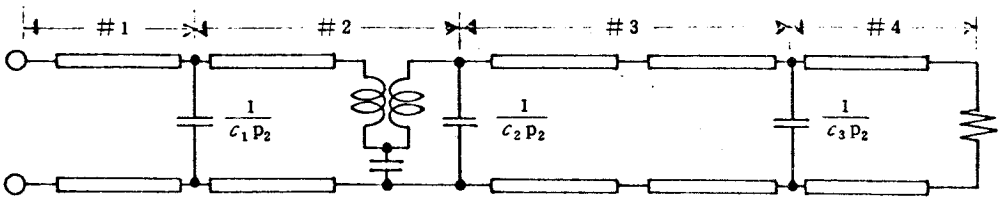


図4・5　例題の実現回路

4・3節　縦続形回路〔II〕

本節では，縦続形回路〔II〕，即ち，p_2 に関して＋1に伝送零点をもつ2端子対網と，p_1 に関して任意の伝送零点をもつ2端子対網とからなる抵抗終端縦続形回路（図4・6）の実現条件を必要充分の形で求め，その構成法を明らかにする。そして，その結果を集中分布定数素子混在系の問題へ応用する。

尚，本節では図4・6に示す回路の駆動点インピーダンス $w_1(\mathbf{p})$ に対し，変数 p_2 を式（3・94）の変数変換，即ち，

$$p_2=(z_2-1)/(z_2+1) \qquad (4\cdot 24)$$

を施した関数 $w_1(p_1, z_2)$ を考察する。このとき，もとの関数 $w_1(\mathbf{p})$ を正実関数とすると，

(i)　$w_1(p_1, z_2)$ は実有理関数

(ii)　開領域 $\mathcal{D}^+(p_1)\times\mathcal{D}^+(z_2)$ において，$\mathrm{Re}\, w_1(p_1, z_2) \geqq 0$，

但し，$\mathcal{D}^+(z_2)=\{z_2 \mid |z_2|>1\}$

なる性質を有する。そこで，このような性質を満たす関数を本節では便宜上，

定義 1 と同一の呼称を用いることにする。

また，次の記号を導入しておく。即ち，多項式 $f(p_1, z_2)$ に対し，$f_*(p_1, z_2)$ を

$$f_*(p_1, z_2) = z_2^n f(-p_1, z_2^{-1}) \qquad (n = \deg_{z_2} f)$$

の右辺で定義し，そして，有理関数 $\psi(p_1, z_2)/\phi(p_1, z_2)$ に対し，$\mathscr{X}(\psi, \phi)$ を

$$\mathscr{X}(\psi, \phi) = \psi(p_1, z_2)\phi_*(p_1, z_2) + \psi_*(p_1, z_2)\phi(p_1, z_2)$$

の右辺で定義する。

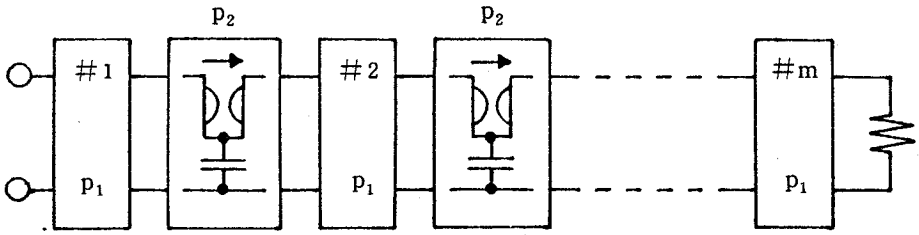


図 4・6　抵抗終端縦続形回路〔II〕

4・3・1　実現条件及び構成法

図 4・6 の駆動点インピーダンス $w_1(p_1, z_2)$ は，

$$w_1(p_1, z_2) = \frac{\psi_1(p_1, z_2)}{\phi_1(p_1, z_2)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i(p_1) z_2^{n-i}}{\sum_{i=0}^{n} \beta_i(p_1) z_2^{n-i}} \qquad (4 \cdot 25)$$

$$(\alpha_0(p_1) \neq 0, \quad \beta_0(p_1) \neq 0)$$

で表わされる（ψ_1, ϕ_1 は互いに素な多項式）。変数 z_2 の係数多項式 $\alpha_i(p_1)$，$\beta_i(p_1)$ より作られる式（2・26）の形の $2n \times 2n$ の正方行列を

$$\Phi^{(i)}(p_1) = [\psi_1, \phi_1]_n$$

で表わすと，任意の（$n+k$）次の小行列式 $\det.\Phi^{(i)}_{n+k}(p_1)$（$k = 1, 2, \cdots, n$）は，帰納法により次の因数をもつことが知れる。

$$\prod_{\nu=1}^{n} [g_{\nu*}(p_1) g_\nu(p_1)]^{\langle t \circ \nu - 1 \rangle} \quad (t = 1, 2, \cdots, n) \qquad (4 \cdot 26)$$

ここで，実係数多項式 $g_{\nu*}(p_1)\,g_\nu(p_1)$ は，$\mathscr{K}(\psi_1, \phi_1)$ に含まれる因数の一つである。なお，記号“$\langle\circ\rangle$”は4·2·1項で定義した通りである。また，t は $\Phi^{(1)}(p_1)$ の行ベクトルを上から順に $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n$ と番号付けを行なったとき，$\Phi^{(1)}(p_1)$ より任意の（n＋k）個の行ベクトルを選び出した場合の同じ添字をもつ行ベクトルの組の個数である。そして，この t は k に一致する。

いま，$g_{k*}(p_1)$ の零点の一つを $p_{1k} \in \bar{\mathscr{D}}(p_1)$ とすると，式（4·26）より，

$$\det.\,\Phi^{(1)}_{n+\ell}(p_{1k}) = 0 \qquad (\ell = 1, 2, \cdots, k)$$

が成り立つことは明白。即ち，

$$\mathrm{rank}.\,\Phi^{(1)}(p_{1k}) = n + k - 1 \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

が得られる。そこで，$\det.\,\Phi^{(1)}_{n+\ell}(p_{1k})$ を $g_{k*}(p_1)$ の関数と見なし，このときの階数を $\mathrm{rank}.\,\Phi^{(1)}(g_{k*})$ を記すと次の定理が得られる。

［定理 4·4 ］

式（4·25）の正実関数 $w_1(p_1, z_2)$ が，p_1 に関して任意の伝送零点をもつ2端子対網と，p_2 に関して $p_2 = +1$ にのみを伝送零点としてもつ2端子対網とを縦続接続した2端子対網の出力端を抵抗で終端したときの駆動点インピーダンスとして実現されるためには，$w_1(p_1, z_2)$ が次の条件を満たすことが必要充分である。

(i) $\quad \mathscr{K}(\psi_1, \phi_1) = B_1 z_2^n \prod_{\nu=1}^{n+1} [g_{\nu*}(p_1)\,g_\nu(p_1)] \qquad (B_1 > 0)$

(ii) $\quad \mathrm{rank}.\,\Phi^{(1)}(g_{\nu*}) = n + \nu - 1 \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n)$

但し，$\deg_{p_1} g_k = 0$ のとき，$\nu \neq k$ とする。

（定理 4·4 の充分性の証明と構成法） z_2 の係数多項式 $\alpha_0(p_1)$ と $\beta_0(p_1)$ の共通因数を $\gamma_0(p_1)$ とする。そのとき，

$$w_1(p_1, \infty) = \mu_1(p_1) / \nu_1(p_1) \qquad (4\cdot27)$$

は正実関数である。ここで，

$$\mu_1(p_1) = \alpha_0(p_1) / \gamma_0(p_1), \qquad \nu_1(p_1) = \beta_0(p_1) / \gamma_0(p_1)$$

式（4·27）は，定理4·1の場合とは異なりリアクタンス関数に成り得ないことに注意すると，その分母，分子に関して，

$$\mu_1(p_1)\nu_{1*}(p_1)+\mu_{1*}(p_1)\nu_1(p_1)=2\,g_{1*}(p_1)\,g_1(p_1) \qquad (4\cdot 28)$$

が成立する。これは，次のようにして示すことができる。

条件（ii）より

$$n=\min\{\,\mathrm{rank.}\,\Phi^{(1)}(g_{\nu*})\ :\ \nu=1,\ 2,\ \cdots,\ n\,\}$$

を満たす多項式 $g_{1*}(p_1)$ の零点の一つを $p_{10}\in\bar{\mathcal{D}}(p_1)$ とすると，$w_1(p_{10},z_2)$ は z_2 に無関係な定数 φ となる。但し，$p_{10}\in\mathcal{D}^0(p_1)$ が $w_1(p_1,z_2)$ の極になるときは，φ は留数で定義する。

実際，前節と同様の方法により，$p_{10}\in\mathcal{D}^+(p_1)$ とすると，φ は，

$$\varphi=\mu_1(p_{10})/\nu_1(p_{10}) \qquad (\mathrm{Re}\ \varphi>0)$$

で与えられる。そして，$p_{10}\in\mathcal{D}^0(p_1)$ に対し，$\mu_1(p_{10})\neq 0$，$\nu_1(p_{10})\neq 0$ であれば，

$$\varphi=\mu_1(p_{10})/\nu_1(p_{10}) \qquad (\mathrm{Re}\ \varphi=0)$$

となる。また，$p_{10}\in\mathcal{D}^0(p_1)$（$p_1=\infty$ を含め）が式（4·27）の極であれば，$w_1(p_1,z_2)$ の孤立極であるから，

$$\varphi=\lim_{p_1\to p_{10}}(p_1-p_{10})\frac{\mu_1(p_1)}{\nu_1(p_1)} \qquad (\varphi>0)$$

で与えられる。もし，$p_{10}\in\mathcal{D}^0(p_1)$（$p_1=\infty$ を含め）が式（4·27）の零点であれば，$w_1(p_1,z_2)$ の孤立零点となるから，$1/w_1(p_1,z_2)$ の孤立極として考えればよい。従って，式（4·28）が得られる。

上述の結果により，条件（i）及び条件（ii）の共通因数 $g_{1*}(p_1)$ の零点を伝送零点とする縦続区間が3·2節～3·5節より求まる。伝送零点 p_{10} を分離した後の残りの駆動点インピーダンスは再び正実関数で，この関数に対する条件は上記，条件（i）及び条件（ii）における因数 $g_{1*}(p_1)\,g_1(p_1)$ を，

$$[\,g_{10*}(p_1)\,g_{10}(p_1)\,]^{-1}[\,g_{1*}(p_1)\,g_1(p_1)\,] \qquad (g_{10*}(p_{10})=0)$$

で置き換えればよい。勿論，式（4·28）においても然り。結局，$g_{1*}(p_1)$（$p_1=$

∞を含めて）の零点を$w_1(p_1, z_2)$よりすべて分離すると，同じ記号の下で，正実関数$\mu_1(p_1)/\nu_1(p_1)$（$\deg_{p_1}(\mu_1/\nu_1)=0$）は，

$$\mu_1(p_1)\nu_{1*}(p_1)+\mu_{1*}(p_1)\nu_1(p_1)=2\varphi_1 \quad (\varphi_1>0) \qquad (4\cdot 29)$$

の形に書ける。

以上より知れるように，条件(ii)の下でp_{10}を$w_1(p_1, z_2)$より分離する操作は，正実関数$\mu_1(p_1)/\nu_1(p_1)$より同じ点を分離する操作と等価である。即ち，$\mu_1(p_1)/\nu_1(p_1)$を抵抗終端縦続形回路として実現することに等価である。

尚，上述の等価性から，$g_{1*}(p_1)$の零点を順次分離する代わりに定理2・15と式(4・28)から次のリアクタンス行列$[z_{ij}(p_1)]$で表わされる2端子対網を求め，$g_{1*}(p_1)$（$p_1=\infty$を含め）の零点を一度に分離してもよい。

$$z_{11}(p_1)=\frac{\mu_1(p_1)+\varepsilon\mu_{1*}(p_1)}{\nu_1(p_1)-\varepsilon\nu_{1*}(p_1)} \qquad z_{12}(p_1)=\frac{2g_1(p_1)}{\nu_1(p_1)-\varepsilon\nu_{1*}(p_1)}$$

$$z_{21}(p_1)=\frac{2\varepsilon g_{1*}(p_1)}{\nu_1(p_1)-\varepsilon\nu_{1*}(p_1)} \qquad z_{22}(p_1)=\frac{\nu_1(p_1)+\varepsilon\nu_{1*}(p_1)}{\nu_1(p_1)-\varepsilon\nu_{1*}(p_1)}$$

尚，この場合，分離後の式(4・24)の関係におけるφ_1は，$\varphi_1=1$となる。

以上を要約すると，同じ記号の下で正実関数$w_1(p_1, z_2)$は，次の条件を満たすことが知れる。

(i)′ $\mathscr{U}[\psi_1, \phi_1]=B_1 z_2^n \prod_{\nu=2}^{n+1}[g_{\nu*}(p_1)g_\nu(p_1)]$

(ii)′ $\operatorname{rank}\Phi^{(1)}(g_{\nu*})=n+\nu-1 \qquad (\nu=2, 3, \cdots, n)$

$(\deg_{p_1} g_k=0$ のとき，$\nu\neq k)$

(iii)′ 既約形$w_1(p_1, \infty)$は，式(4・29)を満たす。

さて，上記の条件を満たす$w_1(p_1, z_2)$は既に述べたように，孤立極及び孤立零点$p_1=\infty$が分離されているから，条件(iii)′より$p_2=\infty$において，

$$w_1(p_1, \infty) \underset{p_1}{\equiv} \varphi_1$$

が成り立つ。即ち，

$$\alpha_0(p_1)-\varphi_1\beta_0(p_1)\equiv 0 \qquad (4\cdot 30)$$

を得る。また，上式と条件(i)′より次式が求まる。

$$\alpha_n(p_1) + \varphi_1 \beta_n(p_1) = 0 \qquad (4\cdot 31)$$

それ故，補題3・7から，縦続行列が

$$\frac{1}{2z_2}\left[\begin{array}{c|c} z_2-\varepsilon & \varphi_1(z_2+\varepsilon) \\ \hline \varphi_1^{-1}(z_2+\varepsilon) & z_2-\varepsilon \end{array}\right] \qquad (\varepsilon=\pm 1)$$

で表わされるRichards 区間を分離することができる。分離後の駆動点インピーダンスを $w_2(p_1, z_2)$ とすると，この関数は，

$$w_2(p_1, z_2) = \frac{\psi_2(p_1, z_2)}{\phi_2(p_1, z_2)} = \varphi_1 \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i(p_1) z_2^{n-1-i}}{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(p_1) z_2^{n-1-i}}$$

と書ける正実関数である。但し，

$$\left.\begin{array}{l} a_i(p_1) = [\alpha_i(p_1) + \varphi_1 \beta_i(p_1)] - \varepsilon[\alpha_{i+1}(p_1) - \varphi_1 \beta_{i+1}(p_1)] \\ b_i(p_1) = [\alpha_i(p_1) + \varphi_1 \beta_i(p_1)] + \varepsilon[\alpha_{i+1}(p_1) - \varphi_1 \beta_{i+1}(p_1)] \end{array}\right\} \qquad (4\cdot 32)$$

そして，$w_2(p_1, z_2)$ は次の条件 (i)″ 及び条件 (ii)″ を満足する。

(i)″ $\quad \mathcal{U}(\psi_2, \phi_2) = B_2 z_2^{n-1} \prod_{\nu=2}^{n+1} [g_{\nu*}(p_2) g_\nu(p_2)]$

(ii)″ $\quad \mathrm{rank}.\Phi^{(2)}(g_{\nu*}) = (n-1) + (\nu-1) - 1 \qquad (\nu = 2, 3, \cdots, n)$

$(\deg_{p_1} g_k = 0$ のとき，$\nu \neq k)$ ここで，$\Phi^{(2)}(p_1) = [\psi_2, \phi_2]_{n-1}$

条件 (i)″ の証明は容易ゆえ，以下，条件 (ii)″ を示す。

式 (4・30) に注意して，式 (4・32) を $\alpha_i(p_1)$，$\beta_i(p_1)$ について解いたものを行列 $\Phi^{(1)}(p_1)$ に代入し，基本変形を行うと次の $2n \times 2n$ の行列が求まる。

$$\left[\begin{array}{cccccc} a_0(p_1), & a_1(p_1), & \cdots\cdots\cdots, & a_{n-1}(p_1), & & \\ & a_0(p_1), & a_1(p_1), & \cdots\cdots\cdots, & a_{n-1}(p_1) & \\ & & & a_0(p_1), & a_1(p_1), \cdots\cdots, & a_{n-1}(p_1) \\ & b_0(p_1), & b_1(p_1), & \cdots\cdots\cdots, & b_{n-1}(p_1) & \\ & & & b_0(p_1), & b_1(p_1), \cdots\cdots, & b_{n-1}(p_1) \\ & & & & b_0(p_1), \; b_1(p_1) & , \; b_{n-1}(p_1) \end{array}\right]$$

$\Phi^{(2)}(p_1)$

$$(4\cdot 33)$$

上式の第1行及び第2n行における$a_i(p_1)$及び$b_i(p_1)$（$i=0, 1, \cdots, n-1$）は，

$$a_i(p_1) = a_i(p_1) + \varphi_1 b_i(p_1)$$

$$b_i(p_1) = a_i(p_1) - \varphi_1 b_i(p_1)$$

で与えられる。

特に，$a_0(p_1)$，$b_{n-1}(p_1)$は，式（4·30）及び式（4·31）から，

$$a_0(p_1) = 4\varphi_1 \alpha_0(p_1)$$

$$b_{n-1}(p_1) = \varepsilon 4\varphi_1 \alpha_n(p_1)$$

と書ける。

そこで，$g_{\nu*}(p_1)$（$\nu=2, 3, \cdots\cdots, n$）の零点の一つを$p_1^0 \in \bar{\mathcal{D}}(p_1)$とすると，

$$a_0(p_1^0) \neq 0, \qquad b_{n-1}(p_1^0) \neq 0 \qquad (4\cdot34)$$

となる。実際，$w_1(p_1, z_2)$のz_2に関する係数多項式$\alpha_i(p_1)$, $\beta_i(p_1)$に対し，

$$\left|\frac{\alpha_i(p_1)}{\alpha_0(p_1)}\right|, \quad \left|\frac{\beta_i(p_1)}{\beta_0(p_1)}\right| < \zeta \qquad (\zeta > 0)$$

の性質があるので[25]，もし，$a_0(p_1^0)=0$とすると，$w_1(p_1, z_2)$の分母分子は共に因数$(p_1 - p_1^0)$をもつことになる。これは分母分子が，互いに素であったことに反する。同様に，$b_{n-1}(p_1^0)=0$とすると，条件(i)′に留意すれば

$$\beta_n(p_1)\alpha_{0*}(p_1) + \alpha_n(p_1)\beta_{0*}(p_1) \equiv 0$$

が成り立つから，$a_0(p_1^0) = 0$が成立する。

そこで，式（4·34）に留意して，式（4·33）の第1行第1列，第2n行第2n列，あるいは両方を含む任意の（$n+\nu$）（$\nu=2, 3, \cdots, n$）次の小行列式を採れば，条件(ii)′より

$$\det.\Phi^{(2)}_{n+\nu-2}(p_1^0) = 0 \qquad (\nu=2, 3, \cdots, n)$$

が成り立つ。それ故，条件(ii)″が得られた。

以上により，変数p_1, z_2の次数は逐次低減し，z_2に関してn回の操作後，駆動点インピーダンス$w_{n+1}(p_1, z_2)$はp_1のみの正実関数となり，その分母子，$\phi_{n+1}(p_1)$，$\psi_{n+1}(p_1)$は，

$$\mathscr{K}(\psi_{n+1},\ \phi_{n+1}) = \mathscr{K}(\psi_{n+1},\ \phi_{n+1}) = B_{n+1}\, g_{n+1*}(p_1)\, g_{n+1}(p_1)$$

の条件を満たすことになる。従って，p_1の区間を縦続接続した2端子対網を抵抗で終端することにより$w_{n+1}(p_1, z_2)$を実現することができる。

（証明終り）

〈定理4・4系〉

図4・6の抵抗終端縦続形回路において，p_2の2端子対網，一区間（総数n区間）でp_2の2端子対網を$n+1$（$=m$）区間に分割した抵抗終端縦続形回路の駆動点インピーダンスとして式（4・25）の正実関数$w_1(p_1, z_2)$が実現されるための必要充分条件は，$w_1(p_1, z_2)$が定理4・4の条件(i)，(ii)及び次の条件(iii)を満たすことである。

(iii) 任意のνについて，$g_\nu(p_1)$は定数でない。

ここで，$g_\nu(p_1)$が定数とは，変数変換$p_1 \to 1/p_1$を施した$w_1(p_1^{-1}, z_2)$に関する条件(i)の$p_1^{\ell}\, g_\nu(p_1^{-1})$も定数であることを意味する。但し，$\ell = \deg_{p_1} g$。

（証明） 簡単化のために，定理4・4の証明における駆動点インピーダンス$w_2(p_1, z_2)$について考える。そして，$g_2(p_1)$を上記の意味の定数とすると，

$$\mu_2(p_1)\,\nu_{2*}(p_1) + \mu_{2*}(p_2)\,\nu_2(p_2) = 2\varphi_2 \qquad (\varphi_2 > 0)$$

$$\deg_{p_1}(\mu_2/\nu_2) = 0$$

が成立する。それ故，$w_1(p_1, z_2)$より考えると，二つのRichards区間が連続して分離されたことになる。但し，$\mu_2(p_1)$及び$\nu_2(p_1)$は，それぞれ既約形$w_2(p_1, \infty)$の分母及び分子の多項式である。 （証明終り）

4・3・2 集中分布定数素子混在系への応用

定理4・4の条件を満たす$w_1(p_1, z_2)$が集中・分布定数素子混在系または二種電気長分布定数素子混在系として実現されるには，一般に変数p_1, z_2を

$$p_1 = \tanh \tau_1 p \qquad z_2 = (1-p)/(1+p)$$

$$p_1 = p \qquad z_2 = e^{2\tau_2 p} \qquad (4\cdot 35)$$

$$p_1 = \tanh \tau_1 p \qquad z_2 = e^{2\tau_2 p} \qquad (4\cdot 36)$$

で対応させればよい。

以下，二，三の混在系についてその実現条件を述べるが，次の(1)及び(2)はそれぞれ前節，4・2・2 項で考察した(1)及び(2)の縦続形回路と同じ回路に対する別の実現条件である。

(1) 棒状回路と集中定数L・C梯子形2端子対網から成る縦続形回路

変数 p_1, z_2 を式（4・35）の通りとする。図 4・3 (a) に示すように m_ν（≧1）（$\nu=1, 2, \cdots, n+1$）個の線輪及び容量から成る集中定数低域通過梯子形2端子対網，（n＋1）区間を，電気長 τ_2 の u.e.，σ_i（≧1）（$i=1, 2, \cdots, n$）個から成る棒状回路，n区間で分割した抵抗終端縦続形回路の駆動点インピーダンスとして，式（4・25）の正実関数 $w_1(p_1, z_2)$ が実現されるためには，$w_1(p_1, z_2)$ に対し変数変換 $p_1 \to 1/p_1$ を施した $w_1'(p_1, z_2) = \phi_1'(p_1, z_2) / \phi_1'(p_1, z_2)$ が次の条件を満足することが必要充分である。

(i) $\mathscr{K}(\phi_1', \phi_1') = B_1 z_2^{\ell_2} p_1^{2\ell_1}$

(ii) $\mathrm{rank}\ \Phi'(g_{\nu*}') = \sum_{i=1}^{n+1-\nu} \sigma_i \qquad (\Phi' = [\phi_1', \phi_1']_{\ell_2})$

$(g_\nu'(p_1) = p_1^{m_\nu} \quad (\nu=1, 2, \cdots\cdots, n))$

(iii) $\deg_{p_1} w_1' = \ell_1 = \sum_{\nu=1}^{n+1} m_\nu \qquad \deg_{p_2} w_1' = \ell_2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i$

尚，上述の“低域”を“高域”で置き換えた図 4・3(b) については，もとの $w_1(p_1, z_2)$ について考えればよく，結局，上記の条件における肩符“′”を取り除けばよい。

(2) 電気長 τ_1 の並列単純開放枝と電気長 τ_2 の u.e. から成る縦続形回路

変数 p_1, z_2 を式（4・36）の通りとする。式（4・25）の正実関数 $w_1(p_1, z_2)$ が，電気長 τ_2 の u.e. から成る棒状回路の各連結点に電気長 τ_1 の単純開放枝を並列に接続した抵抗終端縦続形回路（図 4・4 (a)）の駆動点インピーダンスとして実現されるためには，$w_1(p_1, z_2)$ に変数変換 $p_1 \to 1/p_1$ を施した $w_1'(p_1, z_2) = \phi_1'(p_1, z_2) / \phi_1'(p_1, z_2)$ が次の条件を満たすことが必要充分である。

(i) $\mathscr{K}(\phi_1', \phi_1') = B_1 z_2^n p_1^{2(n-1)}$

(ii) $\mathrm{rank}\ \Phi'(g_{\nu*}') = n + \nu - 1 \qquad (\Phi' = [\phi_1', \phi_1']_n)$

$(g_\nu'(p_1) = p_1 \quad (\nu=1, 2, \cdots, n))$

(iii) $\quad n = \deg_{z_2} w_1' = \deg_{p_1} w_1' + 1$

(iv) $\quad \dfrac{1}{w_1'(p_1, 1)} = r_0 + c_0 p_1 \qquad (r_0,\ c_0 > 0)$

(3) 相異なる電気長のu.e.から成る棒状回路

p_1及びz_2を式(4·36)の通りとする。式(4·25)の正実関数$w_1(p_1, z_2)$が，図4·7のように電気長τ_1のu.e.，ρ_ν ($\geqq 1$) ($\nu = 1, 2, \cdots\cdots, n+1$)個から成る棒状回路，($n+1$)区間を電気長$\tau_2$のu.e.，$\sigma_i$ ($\geqq 1$) ($i = 1, 2, \cdots, n$)個から成る棒状回路，n区間で分割した抵抗終端縦続形回路の駆動点インピーダンスとして実現されるためには，$w_1(p_1, z_2)$が次の条件を満たすことが必要充分である。

(i) $\quad \mathscr{U}(\psi_1, \phi_1) = B_1 z_2^{\ell_2} (1 - p_1^2)^{\ell_1}$

(ii) $\quad \mathrm{rank.}\ \Phi^{(1)}(g_{\nu *}) = \sum_{i=1}^{n+1-\nu} \sigma_i$

$\quad (g_{\nu *}(p_1) = (1 - p_1)^{\rho_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots\cdots, n))$

(iii) $\quad \deg_{p_1} w_1 = \ell_1 = \sum_{\nu=1}^{n+1} \rho_\nu \quad , \qquad \deg_{z_2} w_1 = \ell_2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i$

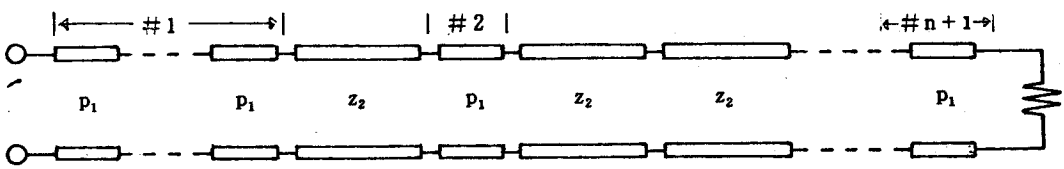


図4·7 (3)で考察している二種電気長棒状回路

(4) 電気長τ_1の分布定数素子から成る単純開放枝回路と電気長τ_2のu.e.から成る縦続形回路

変数p_1，z_2を式(4·36)の通りとする。式(4·25)の正実関数$w_1(p_1, z_2)$が，図4·8のような電気長τ_1の分布定数素子から成る単純開放枝回路，($n+1$)区間を電気長τ_2のu.e.，σ_i ($\geqq 1$) ($i = 1, 2, \cdots\cdots, n$)個から成る棒状回路，n区間で分割した抵抗終端縦続形回路の駆動点インピーダンスとして実現されるためには，$w_1(p_1, z_2)$に対し変数変換$p_1 \to 1/p_1$を施した$w_1'(p_1, z_2)$

$=\psi_1'(p_1, z_2)/\phi_1'(p_1, z_2)$が，次の条件を満たすことが必要充分である。

(i) $\mathscr{K}(\psi_1', \phi_1') = B_1 z_2^{\ell_2} p_1^{2\ell_1} (p_1^2 - 1)^{\ell_3}$

(ii) $\mathrm{rank.}\ \Phi'(g_{\nu*}') = \sum_{i=1}^{n+1-\nu} \sigma_i \qquad (\nu = 1, 2, \cdots\cdots, n)$

$(g_{\nu*}'(p_1) = p_1^{\kappa_\nu}(p_1 - 1)^{\rho_\nu}, \quad \kappa_\nu - 1 \leqq \rho_\nu$ [52], $\Phi'(p_1) = [\psi_1', \phi_1']_n)$

(iii) $\deg_{p_1} w_1' = \ell_1 + \ell_3 \qquad \deg_{z_2} w_1' = \ell_2$

$(\ell_1 = \sum_{\nu=1}^{n+1} \kappa_\nu, \quad \ell_2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i, \quad \ell_3 = \sum_{\nu=1}^{n+1} \rho_\nu)$

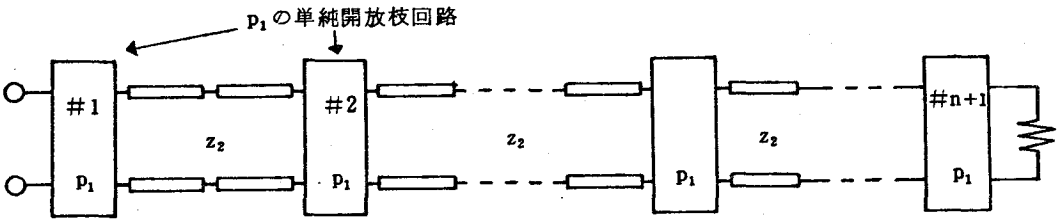


図 4・8　(4)で考察している二種電気長分布定数回路

(5) 電気長 τ_1 の分布定数素子から成る開放枝と電気長 τ_2 の u.e.から成る縦続形回路

変数 p_1, z_2 を式（4・36）の通りとする。式（4・25）の正実関数 $w_1(p_1, z_2)$が，図 4・9 に示すような電気長 τ_2 の u.e. から成る抵抗終端棒状回路の連結点に電気長 τ_1 の u.e. を二個縦続接続した開放枝を並列に接続した二種電気長分布定数回路の駆動点インピーダンスとして実現されるためには，$w_1(p_1, z_2)$が次の条件を満たすことが必要充分である。

(i) $\mathscr{K}(\psi_1, \phi_1) = B_1 z_2^n \prod_{\nu=1}^{\ell} (p_1^2 + \omega_\nu^2)^{2\rho_\nu}$

$(\omega_{1\nu}$ ： 実数，　$\omega_{1i} \neq \omega_{1j} \quad (i \neq j))$

(ii) $\mathrm{rank.}\ \Phi^{(1)}(g_{\nu*}) = n + \nu - 1 \qquad (\nu = 1, 2, \cdots\cdots, n)$

$(g_\nu(p_1) = (p_1^2 + \omega_{1\nu}^2)^{\rho_\nu} \qquad \rho_\nu = 0$ または $1)$

(iv) $\dfrac{1}{w_1(p_1, 1)} = r_0 + \sum_{\nu=1}^{n+1} \dfrac{2k_\nu p_1}{(p_1^2 + \omega_{1\nu}^2)^{\rho_\nu}} \qquad (k_\nu \geqq 0, \quad r_0 > 0)$

但し，$\rho_\nu = 0$ のとき，$k_\nu = 0$ とする。

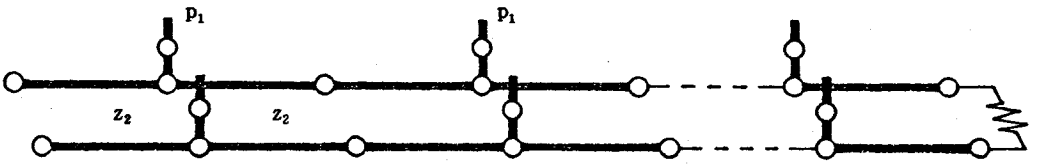


図 4・9　(5)で考察している二種電気長分布定数回路

4・3・3　構　成　例

本項では，二つの例題を示し，定理 4・4 の結果を検証する。尚，例題 1 は定理 4・4 に示す条件を満たすが，例題 2 は定理 4・4 のそれを満足しない。後者の例題は，文献 (25) において紹介されたもので，図 4・6 に示す形で実現できないことが知れている。

(1)　次の正実駆動点インピーダンス $w_1(p_1, z_2)$ を構成せよ。

$$w_1(p_1, z_2) =$$

$$\frac{9(3p_1^3+8p_1^2+8p_1+8)z_2^3-(p_1^3-8p_1^2+16p_1-8)z_2^2}{9(3p_1^3+8p_1^2+8p_1+8)z_2^3-(55p_1^3+28p_1^2+56p_1+8)z_2^2} \times$$

$$\times \frac{-(19p_1^3-40p_1^2+16p_1-24)z_2+3(3p_1^3-8p_1^2+8p_1-8)}{+(37p_1^3-52p_1^2+40p_1-24)z_2-3(3p_1^3-8p_1^2+8p_1-8)}$$

定理 4・4 の条件 (i) は次のように書ける。

$$\mathscr{K}(\phi_1, \phi_1) = 2560\ z_2^3\ (p_1^2+2)^2$$

上式の孤立零点 $p_1 = \pm j\sqrt{2}$ に対する $\det \Phi_{3+\nu}^{(1)}(p_1)$ ($\nu = 1, 2, 3$) を調べると，$\det.\Phi_6^{(1)}(\pm j\sqrt{2}) = 0$ となる。即ち，条件 (ii) は，

$$\mathrm{rank}\ \Phi^{(1)}(g_{\nu *}) = 3+\nu-1$$

$$\deg_{p_1} g_1 = \deg_{p_1} g_2 = \deg_{p_1} g_4 = 0, \qquad g_3(p_1) = p_1^2+2$$

で与えられる。

ここで，変数 p_1 及び z_2 を式 (4・35)，即ち，$p_1 = p$，$z_2 = e^{2\tau_2 p}$ として，以下構成を進める。尚，$\deg_{p_1} w_1 = 3$，$\deg_{p_1} g_3 = 2$ であるから，伝送零点

$p_1 = \pm j\sqrt{2}$ 以外に $p_1 = \infty$，且つ，位数1の孤立伝送零点が存在する。そこで，変数変換 $p_1 \to 1/p_1$ を施して，その位置を一応調べてみることにする。このときの関数を $w_1'(p_1, z_2) = \phi_1'(p_1, z_2) / \phi_1'(p_1, z_2)$ で表わすと，

$$\mathscr{U}(\phi_1', \phi_1') = 2560\, z_2^3\, p_1^2\, (2p_1^2+1)^2$$

$$\text{rank.}\ \Psi'(g_{\nu *}') = 3 + \nu - 1 \qquad (\Psi' = [\phi_1', \phi_1']_n)$$

但し，$\deg_{p_1} g_1' = \deg_{p_1} g_4' = 0$，　$g_2'(p_1) = p_1$，　$g_3'(p_1) = 2p_1^2 + 1$

となる。即ち，変数変換を施す前の関数で考えると，$g_1(p_1)$，$g_4(p_1)$は定理4・4の系で述べた意味の定数で，$p_1 = \infty$を伝送零点としてもつ縦続区間が，図4・6に示す＃2の位置に存在することになる。

$\deg_{p_1} g_1 = 0$ であるから，$w_1(p_1, \infty)$ は p_1 に無関係な定数か，または，$p_1 = \infty$を極または零点としてもつ。視察により $w_1(p_1, \infty)$ は定数である。従って，特性インピーダンス1（Ω）のu.e.を $w_1(p_1, z_2)$から分離することができる。

分離後の関数を $w_2(p_1, z_2)$ $(= \phi_2(p_1, z_2) / \phi_2(p_1, z_2))$ とすると，

$$w_2(p_1, z_2) = \frac{9(3p_1^3+5p_1^2+6p_1+4)z_2^2 - 2(14p_1^3-9p_1^2+12p_1-4)z_2 + 3(3p_1^3-5p_1^6+6p_1-4)}{9(3p_1^2+2p_1+4)z_2^2 - 4(7p_1^2-p_1+4)z_2 + 3(3p_1^2-2p_1+4)}$$

となる。そして，次の条件を満たす。

(i)　$\mathscr{U}(\phi_2, \phi_2) = 512\, z_2^3 (p_1^2+2)^2$

(ii)　$\text{rank.}\ \Phi^{(2)}(g_{\nu *}) = \nu \qquad (\nu = 2, 3)$

先の場合と同様，$\deg_{p_1} g_2 = 0$ であるから，再び $w_2(p_1, \infty)$ は p_1 に無関係であるか，または，$p_1 = \infty$ を極（零点）としてもつ。視察から明らかに，$p_1 = \infty$ は $w_2(p_1, z_2)$ の極である。従って，$w_2(p_1, z_2)$ より1（H）の直列線輪が分離できる。

残りの関数 $w_{23}(p_1, z_2)$ 及びその条件は次のように書ける。

$$w_{23}(p_1, z_2) = \frac{9(3p_1^2+2p_1+4)z_2^2 + 2(7p_1^2-4p_1+4)z_2 - 3(3p_1^2-2p_1+4)}{9(3p_1^2+2p_1+4)z_2^2 + 4(7p_1^2-p_1+4)z_2 + 3(3p_1^2-2p_1+4)}$$

(i)′ $\mathscr{U}(\psi_{23}, \phi_{23}) = 512\, z_2^2\, (p_1^2+2)^2$

(ii)′ $\mathrm{rank}.\, \Phi^{(23)}(g_{\nu *}) = \nu \qquad (\nu = 3)$

上式より，特性インピーダンス$w_{23}(p_1, \infty) = 1\,(\Omega)$のu.e.が分離され，そして，

$$w_3(p_1, z_2) = \frac{6(4p_1^2+p_1+4)z_2 - 2(4p_1^2-p_1+4)}{3(p_1^2+4p_1+4)z_2 + (p_1^2-4p_1+4)}$$

を得る。上式は次の条件を満たす。

(i)″ $\mathscr{U}(\psi_3, \phi_3) = 128\, z_2 (p_1^2+2)^2$

(ii)″ $\mathrm{rank}.\, \Phi^{(3)}(g_{3*}) = \nu - 2 \qquad (\nu = 3)$

条件(ii)″より，$g_{3*}(p_1)$の零点 $p_1 = \pm j\sqrt{2}$ において，$\det.\, \Phi_2^{(3)}(\pm j\sqrt{2}) = 0$ である。従って，$\psi_3(\pm j\sqrt{2}, z_2)$，$\phi_3(\pm j\sqrt{2}, z_2)$の最大公約数の最高次の次数は1である。それ故，$w_3(\pm j\sqrt{2}, z_2) \underset{z_2}{\equiv} \pm j\sqrt{2}$（複号同順）が成立し，$w_3(p_1, z_2)$より次の縦続行列で表わされるBrune区間を分離することができる。

$$\frac{1}{4(p_1^2+2)}\left[\begin{array}{c|c} 4(p_1^2+1) & 2p_1 \\ \hline 2p_1 & p_1^2+4 \end{array}\right]$$

最後に，駆動点インピーダンスは，

$$w_{34}(p_1, z_2) = \frac{2(3z_2-1)}{3z_2+1}$$

となり，その分母分子の多項式について

$$\mathscr{U}[\psi_{23}, \phi_{23}] = 24\, z_2$$

と書ける。これは，特性インピーダンス2 (Ω)のu.e.の終端を単位抵抗で終端することにより実現することができる。

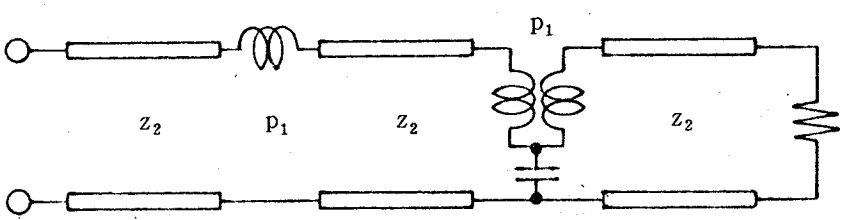


図4・10　例題(1)の実現回路

(2) 次式で与えられる正実駆動点インピーダンス$w_1(p_1, z_2)$を構成せよ。

$$w_1(p_1, z_2)$$

$$= \frac{(p_1+1)^2(7p_1+1)z_2^2 - 4(p_1-1)z_2 + 5(p_1-1)^3}{(p_1+4)(p_1+1)(7p_1+1)z_2^2 + 6(4p_1-1)z_2 + 5(p_1-4)(p_1-1)^2}$$

$$(\ p_1 = p\ ,\qquad z_2 = e^{2\tau_2 p}\ )$$

上式の分母，分子をそれぞれ，$\psi_1(p_1, z_2)$，$\phi_1(p_1, z_2)$とすると，$\mathscr{K}(\psi_1, \phi_1)$は，

$$\mathscr{K}(\psi_1, \phi_1) = -192\, z_2^2\,(p_1^6 - 9p_1^4 + 20p_1^2 - 15)$$

となる。そして，正実関数

$$w_1(p_1, \infty) = \frac{\mu_1(p_1)}{\nu_1(p_1)} = \frac{p_1+1}{p_1+4}$$

の分母子に対し，次式が成立する。

$$\mu_1(p_1)\,\nu_{1*}(p_1) + \mu_{1*}(p_1)\,\nu_1(p_1) = 2\,(4 - p_1^2)$$

上式の零点$p_1 = 2$は，$w_1(p_1, z_2)$が集中定数リアクタンス2端子対網と電気長τ_2のu.e.との縦続形で実現されるには，定理4·4に示すように，

$$\mathscr{K}(\psi_1, \phi_1) \quad 及び \quad \det.\Phi^{(1)}_{2+\nu}(p_1) \quad (\nu = 1,\ 2)$$

の零点でなければならない。ところが，$p_1 = 2$は何れの零点でもない。それ故，この$w_1(p_1, z_2)$は，u.e.と集中定数受動素子のみで実現することはできない。

4·4節　縦続形回路〔Ⅲ〕

本節では，p_i（$i = 1, 2, \cdots, n$）に関して任意の伝送零点をもつリアクタンス2端子対網を$i = 1$から$i = n$迄順次縦続接続した抵抗終端回路（図4·11）の実現条件を必要充分の形で求め，その構成法を明らかにする。そして，その結果を多種電気長分布定数回路の問題へ応用する。

4·4·1　実現条件及び構成法

図4·11において，入力側より数えてk番目の端子対から出力側をみたときの駆動点インピーダンス$w_k(\bar{\mathbf{p}}_k)$について考える。ここで，$\bar{\mathbf{p}}_k$は，

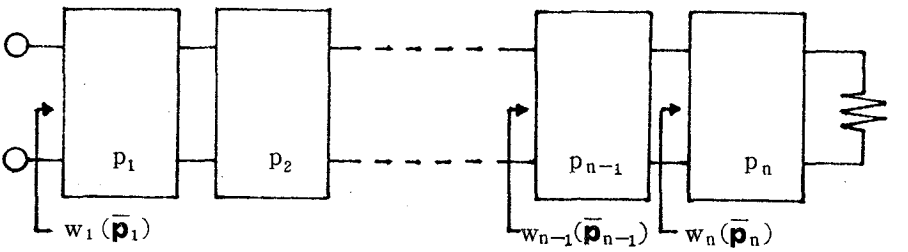


図 4·11　抵抗終端縦続形回路〔Ⅲ〕

$$\bar{\mathbf{p}}_k = (p_k,\ p_{k+1},\ p_{k+2},\ \cdots\cdots,\ p_{n-1},\ p_n)$$

で定義される変数の組である。但し，$k=n$ のとき，$\bar{\mathbf{p}}_n = (p_n)$ とする。

変数 p_k のリアクタンス 2 端子対網の縦続行列 $F_k(p_k)$ の各要素の分子の多項式を $a_k(p_k) \sim d_k(p_k)$ とすると，$w_k(\bar{\mathbf{p}}_k)$ は，

$$w_k(\bar{\mathbf{p}}_k) = \frac{\psi_k(\bar{\mathbf{p}}_k)}{\phi_k(\bar{\mathbf{p}}_k)} = \frac{a_k(p_k)\, w_{k+1}(\bar{\mathbf{p}}_{k+1}) + b_k(p_k)}{c_k(p_k)\, w_{k+1}(\bar{\mathbf{p}}_{k+1}) + d_k(p_k)} \qquad (4\cdot 37)$$

の形で表わされる（ψ_k，ϕ_k は互いに素な多項式）。ここで，

$$a_k(p_k)\, d_k(p_k) - b_k(p_k)\, c_k(p_k) = \varepsilon g_{k*}(p_k)\, g_k(p_k)$$

便宜上，変数 p_k 及び変数の組 $(p_k,\ p_{k+1})$ 等に関して，多項式 $\mathcal{K}_k(\bar{\mathbf{p}}_k)$，$\mathcal{K}_{k,\,k+1}(\bar{\mathbf{p}}_k)$ 等を次の右辺で定義する。

$$\mathcal{K}_k(\bar{\mathbf{p}}_k) = \psi_k(p_k, \bar{\mathbf{p}}_{k+1})\, \phi_k(-p_k, \bar{\mathbf{p}}_{k+1}) + \psi_k(-p_k, \bar{\mathbf{p}}_{k+1})\, \phi_k(p_k, \bar{\mathbf{p}}_{k+1})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{k,\,k+1}(\bar{\mathbf{p}}_k) = {} & \psi_k(p_k, p_{k+1}, \bar{\mathbf{p}}_{k+2})\, \phi_k(-p_k, -p_{k+1}, \bar{\mathbf{p}}_{k+2}) \\ & + \psi_k(-p_k, -p_{k+1}, \bar{\mathbf{p}}_{k+2})\, \phi_k(p_k, p_{k+1}, \bar{\mathbf{p}}_{k+2})\end{aligned}$$

そこで，式（4·37）についてその右辺を実際に求めると，

$$\mathcal{K}_k(\bar{\mathbf{p}}_k) = g_{k*}(p_k)\, g_k(p_k)\, \psi_{k+1}(\bar{\mathbf{p}}_{k+1})\, \phi_{k+1}(\bar{\mathbf{p}}_{k+1})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{k,\,k+1}(\bar{\mathbf{p}}_k) = {} & \{g_{k*}(p_k)\, g_k(p_k)\}\{g_{k+1*}(p_{k+1})\, g_{k+1}(p_{k+1})\} \\ & \psi_{k+2}(\bar{\mathbf{p}}_{k+2})\, \phi_{k+2}(\bar{\mathbf{p}}_{k+2})\end{aligned}$$

となる。

特に，$k=n-1$ とすると，駆動点インピーダンス $w_{n-1}(\overline{\mathbf{p}}_{n-1})$ について，

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{K}_{n-1}(\overline{\mathbf{p}}_{n-1}) &= g_{n-1*}(p_{n-1})\,g_{n-1}(p_{n-1})\,\psi_n(p_n)\,\phi_n(p_n)\\ \mathscr{K}_{n-1,n}(\overline{\mathbf{p}}_{n-1}) &= \{g_{n-1*}(p_{n-1})\,g_{n-1}(p_{n-1})\}\{g_{n*}(p_n)\,g_n(p_n)\}\end{aligned}\right\}\quad(4\cdot38)$$

と書ける。

いま，端子対 n より出力側を見たときの駆動点インピーダンス

$$w_n(p_n)=\psi_n(p_n)/\phi_n(p_n)$$

を正実関数とすると，多項式 $g_{n*}(p_n)$ と $\{\psi_n(p_n)\phi_n(p_n)\}$ は，一般に共通零点をもちうる。そしてその零点は，$\mathscr{D}^0(p_n)$ の有限な点に限られる。また，それは，$w_n(p_n)$ の極か，あるいは，零点のどちらかである。更に，この共通点は，$w_{n-1}(\overline{\mathbf{p}}_{n-1})$ の孤立極（孤立零点）になる場合と，そうでない場合との二通りに分けられるが，特に，前者の場合について次のことが成り立つ。

式（4·38）において，$g_{n*}(p_n)$ と $\phi_n(p_n)$（$\psi_n(p_n)$）の $\mathscr{D}^0(p_n)$ における共通零点が，$w_{n-1}(\overline{\mathbf{p}}_{n-1})$ の孤立極（孤立零点）であるとき，$g_{n-1*}(p_{n-1})$ の零点はすべて $\mathscr{D}^0(p_{n-1})$ に限られ，且つ，それらは $w_{n-1}(\overline{\mathbf{p}}_{n-1})$ の孤立極（孤立零点）となる。

これは次のようにして示される。簡単化のために極の場合についてのみ示す。共通零点が，$w_{n-1}(\overline{\mathbf{p}}_{n-1})$ の孤立極であるための必要充分条件は縦続行列 $F_{n-1}(\overline{\mathbf{p}}_{n-1})$ の（2，1）要素の分子の多項式 $c_{n-1}(p_{n-1})$ が，

$$c_{n-1}(p_{n-1})\equiv 0$$

なることである。そして，そのとき，

$$a_{n-1}(p_{n-1})\equiv A\,d_{n-1}(p_{n-1})\qquad(A>0)$$

が成り立ち，正実関数 $w_{n-1}(\overline{\mathbf{p}}_{n-1})$ は，

$$w_{n-1}(\overline{\mathbf{p}}_{n-1})=\frac{b_{n-1}(p_{n-1})}{d_{n-1}(p_{n-1})}+A\,w_n(p_n)$$

と表わされる。定理 2·16 に注意すると，$b_{n-1}(p_{n-1})/d_{n-1}(p_{n-1})$ はリアクタンス関数である故，上述の結果を得る。

次に，$k=\ell$（$\leq n-1$）とすると，正実関数

$$w_\ell(\overline{\mathbf{p}}_\ell) = \psi_\ell(\overline{\mathbf{p}}_\ell) / \phi_\ell(\overline{\mathbf{p}}_\ell)$$

の分母分子に対し（ψ_ℓ, ϕ_ℓ は互いに素な多項式） $\mathcal{K}_\ell(\overline{\mathbf{p}}_\ell)$, $\mathcal{K}_{\ell,\ell+1}(\overline{\mathbf{p}}_\ell)$, $\cdots$, $\mathcal{K}_{\ell,\ell+1,\ell+2,\cdots\cdots,n-1,n}(\overline{\mathbf{p}}_\ell)$ を求めると次のように書ける。

$$\mathcal{K}_\ell(\overline{\mathbf{p}}_\ell) = g_{\ell*}(p_\ell)g_\ell(p_\ell)\psi_{\ell+1}(\overline{\mathbf{p}}_{\ell+1})\phi_{\ell+1}(\overline{\mathbf{p}}_{\ell+1})$$

$$\mathcal{K}_{\ell,\ell+1}(\overline{\mathbf{p}}_\ell) = \left\{\prod_{i=\ell}^{\ell+1}[g_{i*}(p_i)g_i(p_i)]\right\}\psi_{\ell+2}(\overline{\mathbf{p}}_{\ell+2})\phi_{\ell+2}(\overline{\mathbf{p}}_{\ell+2})$$

$$\mathcal{K}_{\ell,\ell+1,\ell+2}(\overline{\mathbf{p}}_\ell) = \left\{\prod_{i=\ell}^{\ell+2}[g_{i*}(p_i)g_i(p_i)]\right\}\psi_{\ell+3}(\overline{\mathbf{p}}_{\ell+3})\phi_{\ell+3}(\overline{\mathbf{p}}_{\ell+3})$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{K}_{\ell,\ell+1,\ell+2,\cdots,n-1}(\overline{\mathbf{p}}_\ell) = \left\{\prod_{i=\ell}^{n-1}[g_{i*}(p_i)g_i(p_i)]\right\}\psi_n(p_n)\phi_n(p_n)$$

$$\mathcal{K}_{\ell,\ell+1,\ell+2,\cdots,n-1,n}(\overline{\mathbf{p}}_\ell) = \prod_{i=\ell}^{n}[g_{i*}(p_i)g_i(p_i)]$$

上式より，$k=n-1$ の場合と同様，帰納法により次の補題が得られる。

〈補題 4・2 〉

(1) 多項式，$\psi_{\ell+t}(\overline{\mathbf{p}}_{\ell+t})\cdot\phi_{\ell+t}(\overline{\mathbf{p}}_{\ell+t})$（$t=0, 1, 2, \cdots, n-\ell$）実Hurwitz多項式である。

(2) $g_{\ell+t*}(p_{\ell+t})$（$t=1, 2, \cdots, n-\ell$）と $\phi_{\ell+1}(\overline{\mathbf{p}}_{\ell+1})$（$\psi_{\ell+1}(\overline{\mathbf{p}}_{\ell+1})$）の虚軸上における共通な孤立零点が，$w_\ell(\overline{\mathbf{p}}_\ell)$ の孤立極（孤立零点）になれば，$g_{\ell+k*}(p_{\ell+k})$（$k=0, 1, 2, \cdots, t-1$）の零点は，すべて $\mathcal{D}^0(p_{\ell+k})$ に限られ，且つ，それらは $w_\ell(\overline{\mathbf{p}}_\ell)$ の孤立極（孤立零点）である。

〔定理 4・5 〕

式（4・37）において $k=1$ としたときの正実関数 $w_1(\overline{\mathbf{p}}_1)$ が，任意の伝送零点をもつ p_i（$i=1, 2, \cdots, n$）のリアクタンス2端子対網を重複することなく順次，一区間づつ縦続接続した n 変数2端子対網の出力端を抵抗で終端した回路の駆動点インピーダンスとして実現されるためには，$w_1(\overline{\mathbf{p}}_1)$ が次の条件を満たすことが必要充分である。

(i) $\mathcal{K}_{1,2,3,\cdots,k}(\overline{\mathbf{p}}_1) = h_{k+1}(\overline{\mathbf{p}}_{k+1})\prod_{i=1}^{k}\{g_{i*}(p_i)g_i(p_i)\}$

$$(k=1, 2, 3, \cdots\cdots, n) \qquad (4\cdot39)$$

(ii) $\deg_{p_i} w_1 = \deg_{p_i} g_i + \delta_i(\infty) \quad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$

$\delta_i(\infty)$ ： p_i の2端子対網における伝送零点 $p_i=\infty$ の位数

$h_{k+1}(\bar{\mathbf{p}}_{k+1})$ ： 実 Hurwitz 多項式 $\quad (h_{n+1}(\bar{\mathbf{p}}_{n+1}) \equiv B > 0)$

（定理 4·5 の充分性の証明及び構成法） 条件 (i) において，$k=1$ 及び $k=n$ の場合を再記すると，

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{K}_1(\bar{\mathbf{p}}_1) &= h_2(\bar{\mathbf{p}}_2)\, g_{1*}(p_1)\, g_1(p_1) \\ \mathcal{K}_{1,2,3,\cdots,n}(\bar{\mathbf{p}}_1) &= \prod_{i=1}^{n} \{g_{i*}(p_i)\, g_i(p_i)\} \end{aligned}\right\} \qquad (4\cdot 40)$$

となっている。

いま，式 (4·40) の共通因数 $g_{1*}(p_1)$ の零点の一つを $p_{10} \in \bar{\mathcal{D}}(p_1)$ とする。特に，$p_{10} \in \mathcal{D}^0(p_1)$ が $w_1(\bar{\mathbf{p}}_1)$ の孤立極または孤立零点となるとき，定理 3·2 系 2 によりこのような伝送零点はすべて分離することができる。従って，$w_1(\bar{\mathbf{p}}_1)$ はこのような極及び零点をもたないと仮定しても一般性を失うことはない。そこで，残りの $p_{10} \in \mathcal{D}^0(p_1)$ について考えると，

$$\mathrm{Ev}_{p_1} w_1(\bar{\mathbf{p}}_1)\,|_{p_1=p_{10}} \underset{\bar{\mathbf{p}}_2}{\equiv} 0$$

$$\mathrm{Ev}_{p_1 \bar{\mathbf{p}}_2} w_1(\bar{\mathbf{p}}_1)\,|_{p_1=p_{10}} \underset{\bar{\mathbf{p}}_2}{\equiv} 0$$

が成り立つ。それ故，定理 2·17 により $w_1(\bar{\mathbf{p}}_1)|_{p_1=p_{10}}$ は $\bar{\mathbf{p}}_2$ に無関係な純虚数となる。また，$p_{10} \in \mathcal{D}^+(p_1)$ の場合も同様で，このとき $w_1(\bar{\mathbf{p}}_1)|_{p_1=p_{10}}$ は $\bar{\mathbf{p}}_2$ に無関係で，その実部は正となる。従って，3·3 節～3·5 節の結果からこのような孤立伝送零点をすべて分離することができる。

尚，この場合，$p_{10} \in \mathcal{D}^0(p_1)$ において $\mathrm{Ev}_{p_1} w_1(\bar{\mathbf{p}}_1)$ が不定形となる場合が考えられるが，このようなことは起り得ない。何故なら，このようなことが生じると，因数 $(p_1 - p_{10})$ は $w_1(\bar{\mathbf{p}}_1)$ の分母 $\phi_1(\bar{\mathbf{p}}_1)$ に含まれる一つの因数であるから，点 p_{10} は $w_1(\bar{\mathbf{p}}_1)$ の孤立極となる。これは，既に述べたように p_1 の孤立極がすべて分離されていたことに反する。また，$p_{10} \in \mathcal{D}^+(p_1)$ については，$\phi_1(\bar{\mathbf{p}}_1)$ が実 Hurwitz 多項式という事実に反する。

最後に，残されている伝送零点は $p_1=\infty$ である。このとき，上述の議論により

$$\deg_{p_1} g_1 = 0, \quad \text{且つ,} \quad \deg_{p_1} w_1 = \delta_1(\infty)$$

となっていることに注意すると，条件 (i) の $k=1$ について，

$$\mathcal{K}_1(\overline{\mathbf{p}}_1) = h_2(\overline{\mathbf{p}}_2)$$

である。従って，$Ev_{p_1} w_1(\overline{\mathbf{p}}_1)$ は，孤立零点 $p_1=\infty$ をもつ。それ故，$w_1(\overline{\mathbf{p}}_1)$ よりこのような伝送零点をもつ区間を $\delta_1(\infty)$ 個分離することができる。

以上により，次の駆動点インピーダンス $w_2(\overline{\mathbf{p}}_2)$ が得られる。

$$w_2(\overline{\mathbf{p}}_2) = \frac{\psi_2(\overline{\mathbf{p}}_2)}{\phi_2(\overline{\mathbf{p}}_2)} = \frac{d_1(p_1)\,\psi_1(\overline{\mathbf{p}}_1) - b_1(p_1)\,\phi_1(\overline{\mathbf{p}}_1)}{a_1(p_1)\,\phi_1(\overline{\mathbf{p}}_1) - c_1(p_1)\,\psi_1(\overline{\mathbf{p}}_1)} \qquad (4\cdot41)$$

但し，　$a_1(p_1)\,d_1(p_1) - b_1(p_1)\,c_1(p_1) = \epsilon\, g_{1*}(p_1)\,g_1(p_1)$

$w_2(\overline{\mathbf{p}}_2)$ は正実関数で，且つ，

$$\deg_{p_1} w_2 = 0$$

$$\deg_{p_i} w_2 = \deg_{p_i} g_i + \delta_i\ (\infty) \qquad (i=2,\ 3,\ \cdots,\ n)$$

を満たすことは明白。これにより，$w_2(\overline{\mathbf{p}}_2)$ に対する定理の条件 (ii) が求まったことになる。

次に，式 (4·41) の分母分子を $\phi_1(\overline{\mathbf{p}}_1)$，$\psi_1(\overline{\mathbf{p}}_1)$ について解き，それらを式 (4·39) に代入すると，

$$\mathcal{K}_{2,3,\cdots,k}(\overline{\mathbf{p}}_2) = \left[g_{1*}(p_1)\,g_1(p_1)\right]^{-1}\mathcal{K}_{1,2,3,\cdots,k}(\overline{\mathbf{p}}_1)$$

$$(k=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n)$$

となる。上式は，$w_2(\overline{\mathbf{p}}_2)$ に対する条件 (i) である。　（証明終り）

〔定理 4·6 〕

(1) 図 4·11 に示す回路の適当な位置に q_i ($i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$) に関して無限遠点に伝送零点をもつ A または B 区間，一区間づつ挿入した抵抗終端縦続形回路（図 4·12 (a)）の駆動点インピーダンスとして，正実関数

$$w_1(\overline{\mathbf{p}}_1,\mathbf{q}) = \psi_1(\overline{\mathbf{p}}_1,\mathbf{q}) / \phi_1(\overline{\mathbf{p}}_1,\mathbf{q})$$

（ψ_1, ϕ_1 は互いに素な多項式）が実現されるためには，q_j の順序を特に指定しなければ，$w_1(\overline{\mathbf{p}}_1,\mathbf{q})$ が次の条件を満たすことが必要充分である。

(i)　$$\mathcal{K}(\psi_1,\phi_1) = \prod_{i=1}^{n}\left[g_{i*}(p_i)\,g_i(p_i)\right]$$

(ii) $w_1(\overline{\mathbf{p}}_1, \mathbf{q})|_{\mathbf{q}=0}$ は，定理 4·5 の条件 (i) 及び条件 (ii) を満たす。

(iii) $\deg_{q_j} w_1 = 1 \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots, m)$

ここで，$\mathbf{q} = 0$ は，$q_j = 0$ ($j = 1, 2, \cdots\cdots, m$) を意味する。

(2) (1)における“無限遠点”，“$\mathbf{q} = 0$”及び“図 4·12 (a)”は，それぞれ“原点”，“$\mathbf{q} = \infty$”及び“図 4·12 (b)”で置き換えることができる。但し，条件 (i) は次の通りとする。

$$\mathcal{K}(\phi_1, \phi_1) = \prod_{j=1}^{m} q_j^2 \cdot \prod_{i=1}^{n} \left[g_{i*}(p_i)\, g_i(p_i) \right]$$

ここで，$\mathbf{q} = \infty$ は，$q_j = \infty$ ($j = 1, 2, \cdots\cdots, m$) を意味する。

上記の定理は，定理 4·5 及び定理 2·18 から容易に求めることができる。尚，(1)及び(2)において，p_i ($i = 1, 2, \cdots\cdots, n$) の 2 端子対網が存在しないとき，あるいは，$p_1 = p_2 = \cdots\cdots = p_n$ としたとき，条件 (ii) は不要であることが知られている。[22][23]

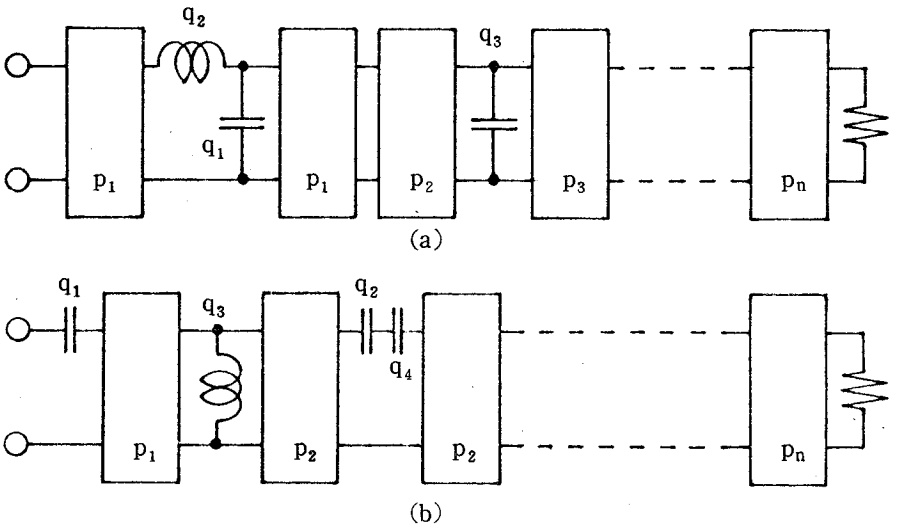


図 4·12　定理 4·6 で考察している縦続形回路

〔定理 4·7 〕

図 4·11 に示す回路に変数 q_j ($j=1, 2, \cdots\cdots, m$) に関して正の実軸上に伝送零点をもつ Richards 区間，一区間を挿入した抵抗終端縦続形回路（図 4·13 ）の駆動点インピーダンスとして，正実関数

$$w_1(\overline{\mathbf{p}}_1, \mathbf{q}) = \phi_1(\overline{\mathbf{p}}_1, \mathbf{q}) / \phi_1(\overline{\mathbf{p}}_1, \mathbf{q}) \qquad (4\cdot 42)$$

（ϕ_1, ϕ_1は互いに素な実係数多項式）が実現されるためには，q_j の順序を指定しなければ，$w_1(\overline{\mathbf{p}}_1, \mathbf{q})$ が次の条件を満たすことが必要充分である。

(i) $\mathcal{K}(\phi_1, \phi_1) = \prod_{i=1}^{n} [g_{i*}(p_i) g_i(p_i)] \prod_{j=1}^{m} (\sigma_j^2 - q_j^2), \qquad (\sigma_j > 0)$

(ii) $\deg_{q_j} w_1 = 1 \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots, m)$

(iii) $w_1(\overline{\mathbf{p}}_1, \mathbf{q})|_{\mathbf{q}=0}$ は，定理 4·5 の条件 (i) 及び条件 (ii) を満たす。

この定理は，定理 4·5 及び定理 2·18 から容易に得られる。尚，この定理において p_i ($i = 1, 2, \cdots\cdots, n$) に関する 2 端子対網が存在しないとき，あるいは，$p_1 = p_2 = \cdots\cdots = p_n$ のときは，前述と同様に条件 (iii)は不要であることが知られている。[23][24]

4·4·2 集中分布定数素子混在系への応用

前項の結果を集中分布定数素子混在系などへ適用するには，

(*a*) 一つの変数に複素周波数を，残りのすべての変数に Richards 変数を割り当てる

(*b*) すべての変数に Richards 変数を割り当てる

の二通りが考えられる。本項では，(*b*) の場合を考えることにし，二，三の多種電気長分布定数回路の実現条件を求める。尚，変数 p_i, q_j は，$p_i = \tanh \tau_i p$, $q_j = \tanh \lambda_j p$ としておく。但し，τ_i, $\lambda_j > 0$ 。

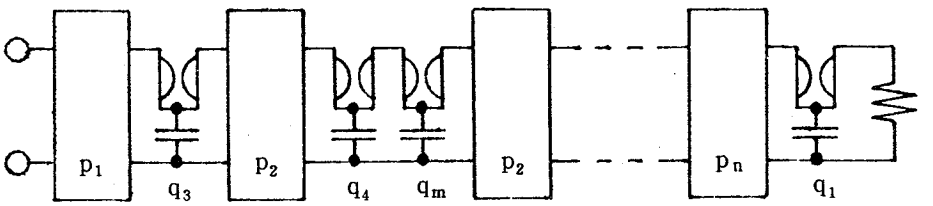


図 4·13 定理 4·7 で考察している縦続回路

(1)　n種の棒状回路の縦続形

式(4・37)の正実関数$w_1(\overline{\mathbf{p}}_1)$が，図4・11における$p_i$の2端子対網を電気長$\tau_i$のu.e.，$\sigma_i$個から成る棒状回路とした場合の駆動点インピーダンスとして実現されるためには，$w_1(\overline{\mathbf{p}}_1)$が次の条件を満たすことが必要充分である。

(i)　$$\mathcal{K}_{1,2,3,\cdots,k}(\overline{\mathbf{p}}_1)=h_{k+1}(\overline{\mathbf{p}}_{k+1})\prod_{i=1}^{k}(1-p_i^2)^{\sigma_i} \qquad (4\cdot43)$$
$$(k=1,2,\cdots\cdots,n)$$

(ii)　$$\deg_{p_i} w_1=\sigma_i \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

尚，式(4・42)の正実関数$w_1(\overline{\mathbf{p}}_1,\mathbf{q})$が，図4・13において$p_i$の2端子対網を上記の棒状回路，$q_j$の区間を電気長$\lambda_i$のu.e.としたときの駆動点インピーダンスとして実現されるためには，$w_1(\overline{\mathbf{p}}_1,\mathbf{q})$が次の条件を満たすことが必要充分である。但し，$q_j$の順序は問わないものとする。

(i)　$$\mathcal{K}(\phi_1,\phi_1)=B_1\prod_{i=1}^{n}(1-p_i^2)^{\sigma_i}\prod_{j=1}^{m}(1-q_j^2) \quad (B_1>0) \qquad (4\cdot44)$$

(ii)　$w_1(\overline{\mathbf{p}}_1,\mathbf{q})|_{\mathbf{q}=0}$は，式(4・43)を満足する。

(iii)　$$\deg_{p_i} w_1=\sigma_i \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$
$$\deg_{q_i} w_1=1 \qquad (j=1,2,\cdots\cdots,m)$$

次の(2)は，上記(1)の結果を少し拡張したものである。

(2)　n種の単純開放枝回路の縦続形

式(4・37)の正実関数$w_1(\overline{\mathbf{p}}_1)$が，図4・11に示す回路における$p_i$の2端子対網を電気長$\tau_i$の分布定数素子から成る単純開放枝回路とした場合の駆動点インピーダンスとして実現されるためには，$w_1(\overline{\mathbf{p}}_1)$が次の条件を満たすことが必要充分である。

(i)　$$\mathcal{K}_{1,2,3,\cdots,k}(\overline{\mathbf{p}}_1)=h_{k+1}(\overline{\mathbf{p}}_{k+1})\prod_{i=1}^{k}(1-p_i^2)^{\sigma_i}$$
$$(k=1,2,\cdots\cdots,n)$$

(ii)　$$\deg_{p_i} w_1=\rho_i+\sigma_i \qquad (\rho_i-1\leqq\sigma_i)$$
$$(i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

(3) 多種電気長樹枝状回路

図4·11における回路において，p_{2m-1}（$m=1, 2, \cdots\cdots$）に関するリアクタンス2端子対網が，電気長τ_{2m-1}のu.e.をσ_{2m-1}個，縦続接続した棒状回路であり，且つ，p_{2m}に関するリアクタンス2端子対網が，電気長τ_{2m}のu.e.，σ_{2m}個から成る棒状回路の終端を開放または短絡したB区間とする。 式（4·37）の正実関数$w_1(\bar{\mathbf{p}}_1)$が，上述の抵抗終端縦続形回路（図4·14）の駆動点アドミタンスとして実現されるためには，$w_1(\bar{\mathbf{p}}_1)$が次の条件を満たすことが必要充分である。

(i) $$\mathscr{K}_{1,2,\cdots,k}(\bar{\mathbf{p}}_1) = h_{k+1}(\bar{\mathbf{p}}_{k+1}) \prod_{i=1}^{k} \{g_{i*}(p_i)\, g_i(p_i)\}$$
$$(k=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

(ii) $$\deg_{p_i} w_1 = \sigma_i \qquad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

(iii) $$w_1(\bar{\mathbf{p}}_1)\,|_{p_1=p_3=\cdots=p_{\ell-1}=0} = r_0 + \sum_{m=1}^{\ell} y_{2m}(p_{2m}) \qquad (r_0 > 0)$$

(iv) $y_{2m}(p_{2m})$は，$\deg_{p_{2m}} y_{2m} = \sigma_{2m}$のリアクタンス関数である。

ここで，ℓはnが偶(奇)数のとき，$\ell = n/2$ （$\ell = (n-1)/2$）とする。

$$g_{2m*}(p_{2m})\, g_{2m}(p_{2m}) = (\mathrm{Den}\{y_{2m}\})^2$$

$$g_{2m-1*}(p_{2m-1})\, g_{2m-1}(p_{2m-1}) = (1-p_{2m-1}^2)^{\sigma_{2m-1}}$$

特に，上記のリアクタンス関数$y_{2m}(p_{2m})$が，

$$y_{2m}(p_{2m}) = \frac{2k_{2m}p_{2m}}{p_{2m}^2 + \omega_{2m}^2} \qquad (m=1, 2, \cdots\cdots \ell)$$

$$(k_{2m} > 0, \qquad \omega_{2m}^2 > 0)$$

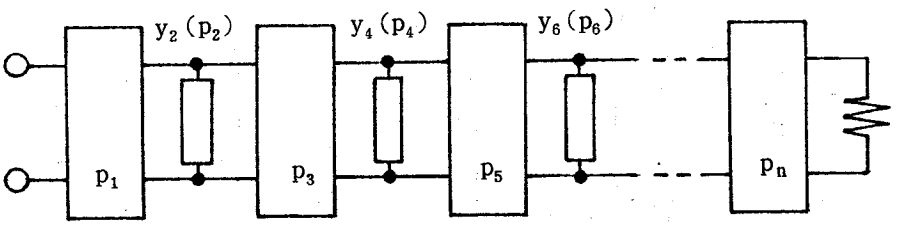


図4·14 多種電気長樹枝状回路

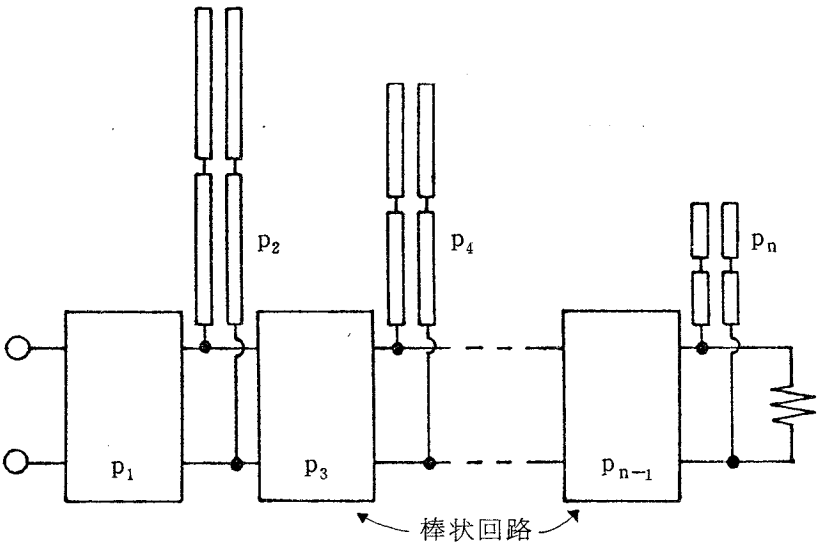
で表わされるとき，図 4·15 (a) に示すようにすべての枝が終端開放の開放枝回路に対する条件となる。また，

$$y_{2m}(p_{2m}) = k_{2m}\, p_{2m} \qquad (m = 1, 2, \cdots\cdots, \ell)$$

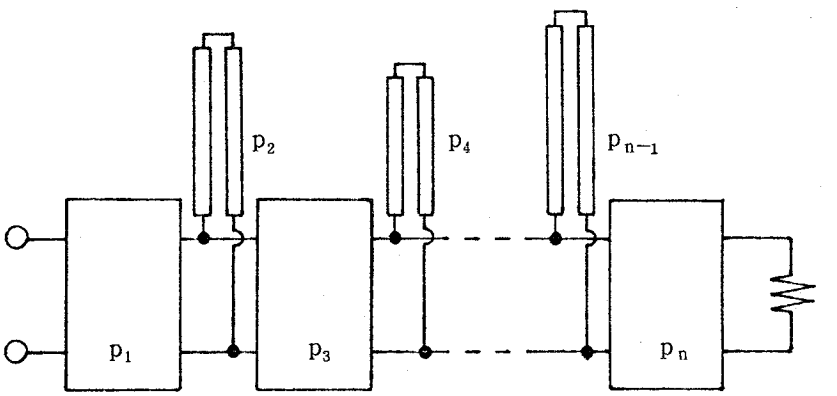
の場合で表わされるときも同様で，このとき，$\deg_{p_{2m}} y_{2m} = 0$ であることに注意されたい。そして，

$$y_{2m}(p_{2m}) = k_{2m} / p_{2m} \qquad (m = 1, 2, \cdots\cdots, \ell)$$

のときは，図 4·15 (b) のようにすべての枝が単純短絡枝となる。



(a)



(b)

図 4·15　図 4·14 の特殊な場合

以上，相異なる電気長をもつ分布定数素子から成る三種類の縦続形回路の実現条件を明らかにしたが，他の幾つかの実際的な回路について似たような考察は可能である。

4·4·3 構成例

次の正実駆動点アドミタンス $w_1(p_1, p_2, \cdots, p_5)$ の構成を考える。ここで，$p_i = \tanh \tau_i p$ ($i = 1, 2, \cdots, 5$) とする。

$$w_1(p_1, p_2, \cdots, p_5) =$$

$$\frac{6\{2(p_1+0.2)p_3p_4p_5+(p_1+0.4p_4+0.02)p_5+0.1(p_1+2)p_3p_4+0.1(p_1+0.4}{3\{2(5p_1+p_4+0.1)p_3p_5+(5p_1+0.1)p_4p_5+3(p_1+0.2p_4+2)p_3+(0.5p_1+1)}\ \times$$

$$\times\ \frac{p_3+0.6p_4+2)\}p_2^2+\{11(5p_1+2)p_3p_5+5.5(p_1+2)p_3+2.2(10p_5+1)\}p_2}{p_4+4(p_5+1)\}p_2^2+\{27.5(50p_1+1)p_3p_5+13.75(p_1+2)p_3+5.5(10p_5+1)\}p_2p_4}\ \times$$

$$\times\ \frac{+2(5p_1+0.1)p_3p_4p_5+(4p_3+5.5p_1+0.1)p_5+(p_1+2p_4+2)p_3+(0.5p_3+0.4p_4+1)}{+5(5p_1+p_4+0.1)p_3p_5+0.25(50p_1p_4+p_4+40)p_5+0.5(p_4+5p_1+10)p_3+1.25(p_1+2)p_4+1}$$

定理 4·5 の条件 (i) は次のようになる。

$$\mathcal{K}_4(\overline{\mathbf{p}}_1) = h_1(p_1, p_2, p_3, p_5)(1-p_4^2)$$

$$\mathcal{K}_{4,2}(\overline{\mathbf{p}}_1) = h_2(p_1, p_3, p_5)(1-p_4^2)(1+1.2p_2^2)^2$$

$$\mathcal{K}_{4,2,3}(\overline{\mathbf{p}}_1) = h_3(p_1, p_5)(1-p_4^2)(1+1.2p_2^2)^2(1-p_3^2)$$

$$\mathcal{K}_{4,2,3,1}(\overline{\mathbf{p}}_1) = h_4(p_5)(1-p_4^2)(1+1.2p_2^2)^2(1-p_3^2)$$

$$\mathcal{K}_{4,2,3,1,5}(\overline{\mathbf{p}}_1) = 2(1-p_4^2)(1+1.2p_2^2)^2(1-p_3^2)(1-p_5^2)$$

ここで，$h_1(p_1, p_2, p_3, p_5) \sim h_4(p_5)$ は次式で与えられる。

$$h_1 = 2(1+1.2p_2^2)(25p_1p_3+0.5p_3p_5+2.5p_1p_3+5p_3+1)(55p_1p_2p_3p_5+2.4p_2^2p_3p_5+6p_1p_2^2p_5+1.1p_2p_3p_5+5.5p_1p_2p_3+0.12p_2^2p_5+0.24p_2^2p_3+0.6p_1p_2^2+2p_3p_5+22p_2p_5+5p_1p_5+0.1p_1+2.2p_2+0.3p_3+0.1p_5+1)$$

$$h_2 = 2(25p_1p_3p_5+0.5p_3p_5+2.5p_1p_3+5p_3+10p_5+1)(55p_1p_5+2p_3p_5+0.5p_1+2.2p_2+0.2p_3+0.1p_5+1)$$

$$h_3 = 2(10p_5+1)(5p_1p_5+0.1p_1+0.1p_5+1)$$

$$h_4 = 2(10p_2+1)(0.5p_5+1)$$

また，条件(ii)は，

$$\deg_{p_1} w_1 = \deg_{p_3} w_1 = \deg_{p_4} w_1 = \deg_{p_5} w_1 = 1$$

$$\deg_{p_2} w_1 = 2$$

である。結局，各変数の順序は，入力端より p_4, p_2, p_3, p_1, p_5 の順に配列されていることになる。そして，p_4, p_3, p_5 についてはいずれも一個のu.e.から成る棒状回路である。また，簡単化のために，$p_3 = p_4 = p_5 = 0$ とすると，

$$w_1(p_1, p_2, \cdots, p_5)\big|_{p_3=p_4=p_5=0} = 1 + 0.5\,p_1 + \frac{2.2\,p_2}{1.2\,p_2^2 + 1}$$

と書ける。従って，上式より，p_2, p_1 についてはそれぞれ並列開放枝，並列単純開放枝であることが知れる。

各u.e.の特性アドミタンスは次の通りである（図4・16）。

$Y_4 = 0.4$　　$Y_{21} = 1.2$　　$Y_{22} = 1$

$Y_3 = 0.2$　　$Y_1 = 0.5$　　$Y_5 = 0.1$

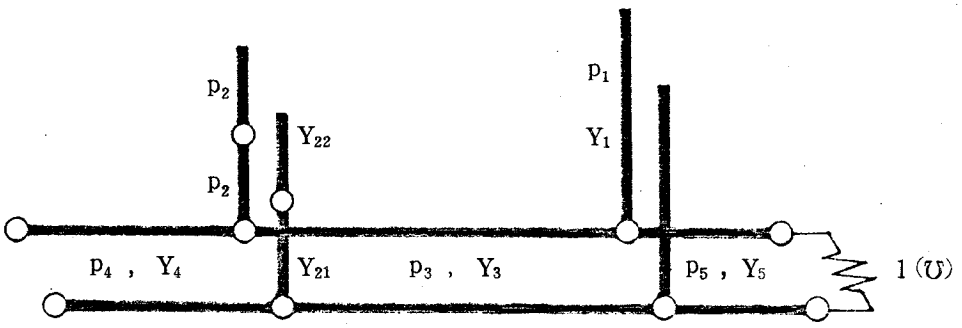


図4・16　例題の実現回路

4・5節　縦続形回路〔Ⅳ〕

本節では，3・4節で述べた連立伝送零点をもつRichards区間（リアクタンス2端子対網）を縦続接続した抵抗終端回路（図4・17）の実現条件を必要充分の形で求め，その構成法を明らかにする。

図4・17に示す回路は，図4・11に示すそれと形式的に同じである。従って，図4・17は，図4・11における変数 p_i を k_i 変数，

$$\mathbf{p}_{i,k_i} = (p_{i,1},\ p_{i,2}, \cdots\cdots,\ p_{i,k_i})$$

の組で置き換えた場合に当る。それ故，定理 4·5 における $\overline{\mathbf{p}}_1$, $\overline{\mathbf{p}}_{k+1}$ 及び因数 $g_{i*}(p_i)\,g_i(p_i)$ は，それぞれ，

$$\overline{\mathbf{p}}_1 \quad \longrightarrow \quad \overline{\mathbf{r}}_1 = (\mathbf{p}_{1,k_1},\ \mathbf{p}_{2,k_2},\ \cdots\cdots,\ \mathbf{p}_{n,k_n})$$

$$\overline{\mathbf{p}}_{k+1} \quad \longrightarrow \quad \overline{\mathbf{r}}_{k+1} = (\mathbf{p}_{k+1,k_{k+1}},\ \cdots\cdots,\ \mathbf{p}_{n,k_n})$$

$$g_{i*}(p_i)\,g_i(p_i) \longrightarrow \quad g_{i*}(\mathbf{p}_{i,k_i})\,g_i(\mathbf{p}_{i,k_i})$$

の右辺で置き換えればよく，図 4·17 の駆動点インピーダンス $w_1(\overline{\mathbf{r}}_1)$ に対し，定理 4·5 の条件 (i) に相当するものは，直ちに，

$$\mathcal{K}_{1,2,\cdots,k}(\overline{\mathbf{r}}_1) = h_{k+1}(\overline{\mathbf{r}}_1) \prod_{i=1}^{k} \left[g_{i*}(\mathbf{p}_{i,k_i})\, g_i(\mathbf{p}_{i,k_i}) \right]$$

$$(\ k = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n\ ) \qquad (4\cdot45)$$

と書ける。

上式より，$g_{1*}(\mathbf{p}_{1,k_1})$ のすべての零点の集合 $\mathbf{p}^0_{1,k_1}$ について，

$$\mathrm{Ev}_{\mathbf{p}_{1,k_1}}\, w_1(\overline{\mathbf{r}}_1)\,|_{\mathbf{p}_{1,k_1}=\mathbf{p}^0_{1,k_1}} \underset{\overline{\mathbf{r}}_2}{\equiv} 0$$

$$\mathrm{Ev}_{\mathbf{p}_{1,k_1},\cdots,\mathbf{p}_{n,k_n}}\, w_1(\overline{\mathbf{r}}_1)\,|_{\mathbf{p}_{1,k_1}=\mathbf{p}^0_{1,k_1}} \underset{\overline{\mathbf{r}}_2}{\equiv} 0$$

が成り立つ。それ故，定理 2·17 から，$w_1(\overline{\mathbf{r}}_1)\,|_{\mathbf{p}_{1,k_1}=\mathbf{p}^0_{1,k_1}}$ は，$\overline{\mathbf{r}}_2$ に無関係であることが保証される。しかし，その値が零点の集合 $\mathbf{p}^0_{1,k_1}$ のすべての要素に

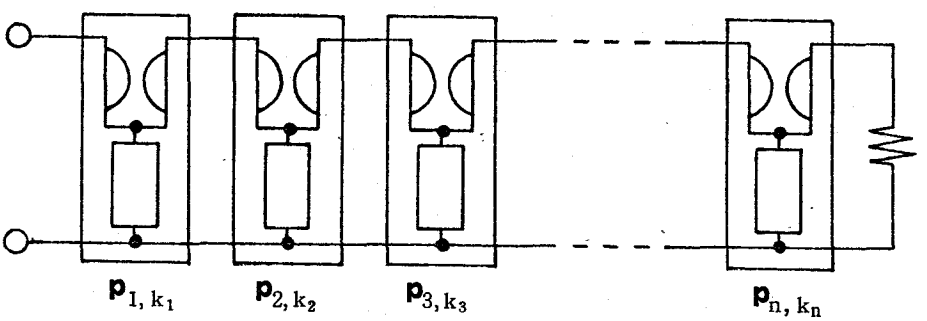


図 4·17　抵抗終端縦続形回路〔Ⅳ〕

ついて一定であるかどうかは不明である。従って，本節で考察される回路については，このことを直接保証する条件を与える必要があり，この点が前節で考察した孤立零点から成る縦続形回路〔III〕の場合と異なる。

4·5·1　実現条件及び構成法

上に述べたことに注意すると次の定理が得られる。

〔定理 4·8 〕

(1)　図 4·17 に示すように，$g_{i*}(\mathbf{p}_{i,k_i})$（$i=1, 2, \cdots\cdots, n$）の連立零点を伝送零点としてもつRichards 区間を，$i=1$ から $i=n$ 迄一区間づつ順次縦続接続し，その出力端を抵抗で終端したときの駆動点インピーダンスとして正実関数

$$w_1(\bar{\mathbf{r}}_1)=\psi_1(\bar{\mathbf{r}}_1)/\phi_1(\bar{\mathbf{r}}_1)$$

（ψ_1, ϕ_1 は互いに素な実係数多項式）が実現されるためには，$w_1(\bar{\mathbf{r}}_1)$は次の条件を満たすことが必要充分である。

(i)　$$\mathcal{K}(\psi_1, \phi_1)=\prod_{i=1}^{n}\left[g_{i*}(\mathbf{p}_{i,k_i})\,g_i(\mathbf{p}_{i,k_i})\right]$$

(ii)　$$\begin{aligned} w_1(\mathbf{p}^0_{1,k_1}, \bar{\mathbf{r}}_2) &\underset{\bar{\mathbf{r}}_2}{\equiv} r_1 \\ w_1(\mathbf{p}^1_{1,k_1}, \mathbf{p}^0_{2,k_2}, \bar{\mathbf{r}}_3) &\underset{\bar{\mathbf{r}}_3}{\equiv} r_2 \\ w_1(\mathbf{p}^1_{1,k_1}, \mathbf{p}^1_{2,k_2}, \mathbf{p}^0_{3,k_3}, \bar{\mathbf{r}}_4) &\underset{\bar{\mathbf{r}}_4}{\equiv} r_3 \\ &\vdots \\ w_1(\mathbf{p}^1_{1,k_1}, \mathbf{p}^1_{2,k_2}, \mathbf{p}^1_{3,k_3}, \cdots\cdots, \mathbf{p}^1_{n-1,k_{n-1}}, \mathbf{p}^0_{n,k_n}) &\equiv r_n \end{aligned} \qquad (4\cdot46)$$

(iii)　$\deg_{p_{i,j}} w_1=\deg_{p_{i,j}} g_j$　（$i=1, 2, \cdots, n$,　$j=1, 2, \cdots, k_i$）

ここで，　$g_i(\mathbf{p}_{i,k_i})$ ：既約実Hurwitz 多項式，　$r_i>0$

$\mathbf{p}^0_{i,k_i}$ ：$g_{i*}(\mathbf{p}_{i,k_i})$のすべての零点の集合

$\mathbf{p}^1_{i,k_i}(\in\mathcal{D}^0(\mathbf{p}_{i,k_i}))$: $g_i(\mathbf{p}_{i,k_i})+\varepsilon_i g_{i*}(\mathbf{p}_{i,k_i})$ の零点の一つ

(2)　(1)の条件を満たす $w_1(\bar{\mathbf{r}}_1)$ は，Bott−Duffin の操作のみで実現できる。

（定理 4·8 (1)の充分性の証明及び構成法）　式（4·46）及び定理 3·4 から，

$$w_2(\bar{\mathbf{r}}_1)=\frac{z_1(\mathbf{p}_{1,k_1})\,w_1(\bar{\mathbf{r}}_1)-r_1^2}{z_1(\mathbf{p}_{1,k_1})-w_1(\bar{\mathbf{r}}_1)} \qquad (4\cdot47)$$

で定義される正実関数が求まる。ここで，$z_1(\mathbf{p}_{1,k_1})$ は，

$$z_1(\mathbf{p}_{1,k_1}) = r_1 \frac{g_1(\mathbf{p}_{1,k_1}) + \epsilon_1 g_{1*}(\mathbf{p}_{1,k_1})}{g_1(\mathbf{p}_{1,k_1}) - \epsilon_1 g_{1*}(\mathbf{p}_{1,k_1})} \qquad (4\cdot 48)$$

で与えられるリアクタンス関数である。

そして，条件 (i)，式 (4・46) 及び定理 3・4 から

$$w_1(-\mathbf{p}^0_{1,k_1}, \bar{\mathbf{r}}_2) \underset{\bar{\mathbf{r}}_2}{\equiv} -r_1$$

が成り立つ。従って，条件 (ii) に注意すると，$w_2(\bar{\mathbf{r}}_1)$ の各 $p_{i,j}$ に関する次数は，

$$\deg_{p_{1,j}} w_2 = 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots, k_1)$$

$$\deg_{p_{i,j}} w_2 = \deg_{p_{i,j}} g_i \quad (i = 2, \cdots, n. \quad j = 1, \cdots, k_i)$$

となる。そこで，$w_2(\bar{\mathbf{r}}_1)$ を新たに $w_2(\bar{\mathbf{r}}_2)$ で記すと，その分母分子，$\phi_2(\bar{\mathbf{r}}_2)$，$\psi_2(\bar{\mathbf{r}}_2)$ について，条件 (i) 及び式 (4・48) より次式が得られる。

$$\mathcal{K}(\psi_2, \phi_2) = \prod_{i=2}^{n} [g_{i*}(\mathbf{p}_{i,k_i}) g_i(\mathbf{p}_{i,k_i})]$$

$\mathbf{p}^1_{1,k_1}$ は，多項式 $g_1(\mathbf{p}_{1,k_1}) + \epsilon_1 g_{1*}(\mathbf{p}_{1,k_1})$ の零点の一つであるから，$z_1(\mathbf{p}^1_{1,k_1}) = 0$ に注意すると，$w_2(\bar{\mathbf{r}}_2)$ は次のように表わすことができる。

$$w_2(\bar{\mathbf{r}}_2) = \frac{r_1^2}{w_1(\mathbf{p}^1_{1,k_1}, \bar{\mathbf{r}}_2)}$$

従って，$g_{i*}(\mathbf{p}_{i,k_i})$ の零点の集合 $\mathbf{p}^0_{i,k_i}$ ($i = 2, 3, \cdots\cdots, n$)，及び $g_i(\mathbf{p}_{i,k_i}) + \epsilon_i g_{i*}(\mathbf{p}_{i,k_i})$ ($i = 1, 2, \cdots\cdots, n-1$) の零点の一つ，$\mathbf{p}^1_{i,k_i}$ について，条件 (ii) より次の結果が得られる。

$$w_2(\mathbf{p}^0_{2,k_2}, \bar{\mathbf{r}}_3) = \frac{r_1^2}{w_1(\mathbf{p}^1_{1,k_1}, \mathbf{p}^0_{2,k_2}, \bar{\mathbf{r}}_3)} \underset{\bar{\mathbf{r}}_3}{\equiv} \frac{r_1^2}{r_2} \qquad (4\cdot 49)$$

$$w_2(\mathbf{p}^1_{2,k_2}, \mathbf{p}^0_{3,k_3}, \bar{\mathbf{r}}_4) = \frac{r_1^2}{w_1(\mathbf{p}^1_{1,k_1}, \mathbf{p}^1_{2,k_2}, \mathbf{p}^0_{3,k_3}, \bar{\mathbf{r}}_4)} \underset{\bar{\mathbf{r}}_4}{\equiv} \frac{r_1^2}{r_3}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$w_2(\mathbf{p}^1_{2,k_2}, \cdots, \mathbf{p}^1_{n-1,k_{n-1}}, \mathbf{p}^0_{n,k_n})$$

$$= \frac{r_1^2}{w_1(\mathbf{p}^1_{1,k_1}, \mathbf{p}^1_{2,k_2}, \cdots\cdots, \mathbf{p}^1_{n-1,k_{n-1}}, \mathbf{p}^0_{n,k_n})} \equiv \frac{r_1^2}{r_n}$$

(証明終り)

次の二つの定理は，既に述べた定理4・6及び定理4・7に相当するもので，定理4・8及び定理2・18から容易に求めることができる。

〔定理4・9〕

(1) 正実関数 $w_1(\bar{\mathbf{r}}_1, \mathbf{q}) = \psi_1(\bar{\mathbf{r}}_1, \mathbf{q}) / \phi_1(\bar{\mathbf{r}}_1, \mathbf{q})$（$\psi_1, \phi_1$は互いに素な実係数多項式）が，図4・18に示すように $g_{i*}(\mathbf{p}_{i,k_i})$（$g_i(\mathbf{p}_{i,k_i})$ は既約実Hurwitz多項式）の零点の集合 $\mathbf{p}^0_{i,k_i}$（$i=1, 2, \cdots\cdots, n$）を伝送零点としてもつRichards区間と，変数 q_j（$j=1, 2, \cdots\cdots, m$）に関して無限遠点を伝送零点としてもつAまたはB区間とを縦続接続した2端子対網の出力端を抵抗で終端したときの駆動点インピーダンスとして実現されるためには，q_j の順序を問わなければ，$w_1(\bar{\mathbf{r}}_1, \mathbf{q})$ が次の条件を満たすことが必要充分である。

(i) $$\mathcal{K}(\psi_1, \phi_1) = \prod_{i=1}^{n} \left[g_{i*}(\mathbf{p}_{i,k_i})\, g_i(\mathbf{p}_{i,k_i}) \right]$$

(ii) $$\deg_{q_j} w_1 = 1 \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots, m)$$

(iii) $w_1(\bar{\mathbf{r}}_1, \mathbf{q})|_{\mathbf{q}=0}$ は，定理4・8(1)の条件を満足する。

(2) (1)における“無限遠点”，“$\mathbf{q}=0$”は，それぞれ“原点”，“$\mathbf{q}=\infty$”で置き換えることができる。但し，(1)における条件(i)は次の通りとする。

$$\mathcal{K}(\psi_1, \phi_1) = \prod_{i=1}^{n} \left[g_{i*}(\mathbf{p}_{i,k_i})\, g_i(\mathbf{p}_{i,k_i}) \right] \prod_{j=1}^{m} q_j^2$$

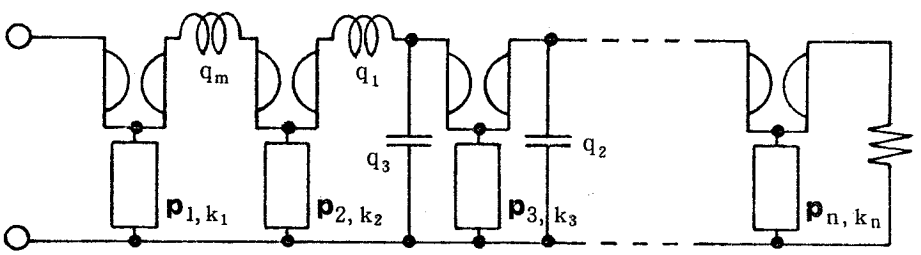


図4・18　定理4・9で考察している縦続形回路

〔定理4・10〕

定理4・9の正実関数 $w_1(\bar{\mathbf{r}}_1, \mathbf{q})$ が，図4・19に示すように図4・18におけるA及びB区間を孤立伝送零点をもつRichards区間で置き換えた場合の抵抗終端縦続形回路の駆動点インピーダンスとして実現されるためには，$w_1(\bar{\mathbf{r}}_1, \mathbf{q})$ が次の条件を満たすことが必要充分である。但し，q_j の順序は問わないとする。

(i) $\mathcal{K}(\psi_1, \phi_1) = \prod_{i=1}^{n} [g_{i*}(\mathbf{p}_{i,k_i}) g_i(\mathbf{p}_{i,k_i})] \prod_{j=1}^{m} (\sigma_j^2 - q_j^2)$

(ii) $\deg_{q_j} w_1 = 1 \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots, m)$

(iii) $w_1(\bar{\mathbf{r}}_1, \mathbf{q})|_{\mathbf{q}=0}$ は，定理 4・8(1)の条件を満足する。

但し，$\sigma_j > 0$

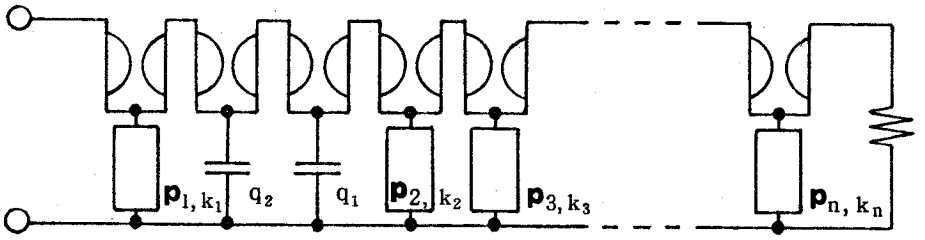


図 4・19　定理 4・10 で考察している縦続形回路

4・5・2　構　成　例

次の正実駆動点インピーダンス $w_1(p_1, p_2, p_3, p_4)$ を構成せよ。

$$w_1(p_1, p_2, p_3, p_4) = \psi_1(p_1, p_2, p_3, p_4) / \phi_1(p_1, p_2, p_3, p_4)$$

$$= \frac{\{2(p_4+4)(p_1+p_3)+p_4+16\}(p_2^2+1)+2\{2(p_1+p_3)+1\}p_2}{\{(p_4+4)(p_1+p_3)+2(p_4+1)\}(p_2^2+1)+2(p_1+p_3+1)p_2} \qquad (4\cdot 50)$$

定理 4・8 の条件 (i) は，

$$\mathcal{K}(\psi_1, \phi_1) = 4\{(p_2^2+1)p_4+2(2p_2^2+p_2+2)\}$$
$$\times\{(p_2^2+1)p_4-2(2p_2^2-p_2+2)\}\{p_1+p_3+1\}\{p_1+p_3-1\}$$

と書ける。

そこで，

$$(p_2^2+1)p_4-2(2p_2^2-p_2+2)=0 \qquad (4\cdot 51)$$
$$p_1+p_3-1=0$$

が定義する代数関数をそれぞれ式 (4・50) に代入すると，

$$w_1(p_1, p_2, p_3, p_4)\Big|_{p_4=\frac{2(2p_2^2-p_2+2)}{p_2^2+1}} \underset{(p_1,p_3)}{\equiv} 2 \qquad (4\cdot 52)$$

$$w_1(p_1,p_2,p_3,p_4)\Big|_{p_1=1-p_3}=\frac{(p_4+8)(p_2^2+1)+2p_2}{(p_4+2)(p_2^2+1)+2p_2} \qquad (4\cdot53)$$

となる。尚，式（4・52）は簡単化のために式（4・51）を p_4 について解いた代数関数に基づいたが，勿論，p_2 に関して解いても同じ結果が求まる。

式（4・52）から，次のリアクタンス関数 $z_1(p_2,p_4)$ を求めることができる。

$$z_1(p_2,p_4)=\frac{p_4p_2^2+2p_2+p_4}{2(p_2^2+1)} \qquad (4\cdot54)$$

上式の分子を零と置き，それを p_4 について解くと，

$$p_4=-2p_2/(p_2^2+1)$$

となる。定理4・8の条件に従うと，$z_1(p_2,p_4)$ の連立零点の一つを選べばよいから，上式より計算に容易な点 (p_2,p_4) として，（0，0）を採ることにする。これを式（4・53）に代入すると，直ちに

$$w_1(p_1,0,p_3,0)\Big|_{p_1=1-p_3}=4 \qquad (4\cdot55)$$

が求まる。

式（4・52）及び式（4・55）により，式（4・50）は定理4・8の条件（ii）を満たすことが知れる。

また，各変数の次数について，条件（iii）を満たしていることは明らかである。

以上により，式（4・50）は変数の組，(p_2,p_4)，(p_1,p_3) の順序でRichards区間が分離できることが知れる。初段の縦続区間の縦続行列またはインピーダンス行列は式（4・52）及び式（4・55）から容易に求まる。後段の縦続区間は，式（4・47）より駆動点インピーダンス $w_2(p_1,p_3)$ を求めて初段の場合と同様の操作を行えばよいが，わざわざ $w_2(p_1,p_3)$ を計算せずとも，式（4・49）に留意すると，式（4・52）及び式（4・55）から次段のジャイレーション比

$$w_2(p_1,p_3)\Big|_{p_1=1-p_3}=1$$

が直ちに求まる。従って，次のリアクタンス関数 $z_2(p_1,p_3)$ が得られる。

$$z_2(p_1,p_3)=p_1+p_3$$

また，終端の抵抗は，$z_1(p_2, p_4)$ 及び $z_2(p_1, p_3)$ の極，例えば，$p_2 = \pm j$，$p_1 = \infty$ に固定することによって求まる。その値は $w_1(p_1, p_2, p_3, p_4)|_{p_2=\pm j,\ p_1=\infty} = 2\ (\Omega)$ である。結局，式（4·50）は図 4·20 (a)の形で実現することができる。尚，同図 (b) は，(a) に等価な Bott-Duffin の操作のみで得た回路である。

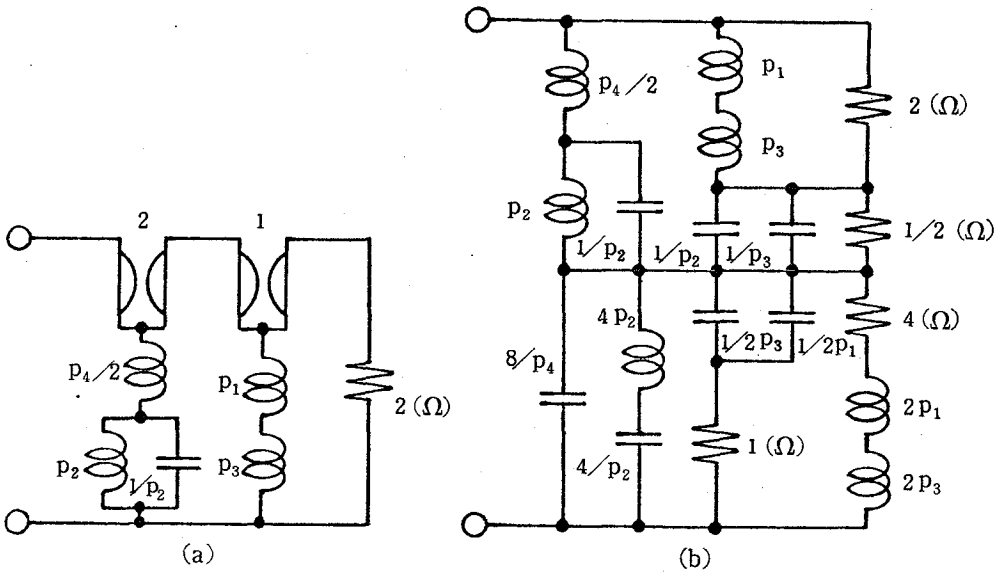


図 4·20　例題の構成

4·6 節　あとがき

この章では，正実関数が四つの抵抗終端縦続形回路の駆動点イミタンスとして実現できるための条件を必要充分の形で求め，その構成法を明らかにした。また，一部を除くこれらの結果を相異なる電気長をもつ分布定数素子から成る混在回路や，それらと集中定数素子から成る混在回路の問題へ応用し，マイクロ波フィルタなどに利用できると思われる構造についてその実現条件を明らかにした。

4·2 節及び 4·3 節で考察した二つの縦続形回路については，定理 2·19 の結果に基づく付帯条件を与えた。これらの付帯条件は，変数 p_1 の伝送零点の分離順序を明確に与えると共に，正実関数が残りの変数 p_2（または，z_2）に無関係となることを保証するものである。尚，この二つの縦続形回路については，p_2 に関する伝送零点が，無限遠点（原点）あるいは正の実軸上の点の一種類に

限定されていると言う共通点を見い出すことができる。定理 2·19 は，このように一種類に限られている場合に役立ったが，一般に p_2 に関する伝送零点が任意であるような縦続形回路についてもこの定理は有用になるのではないかと思われ，今後の研究に期待される。

4·4 節及び 4·5 節で考察した縦続形回路については，定理 2·17 で示した偶関数部の性質に基づく付帯条件を与えた。この場合上述と同様，変数の分離順序を明確に指示してくれることが知れる。しかし，変数の個数が多ければ多い程，実際問題に当ってその分の負担が，変数の分離順序を調べる操作に掛かってくる傾向がある。また，このような操作以外に多変数多項式の因数分解の問題が派生し，特に，4·5 節で考察したような連立伝送零点から成る場合に対しては，孤立点から成る場合に比べはるかに困難な問題となる。この二つの回路は，構造に関して変数 p_i あるいは変数の組 $\mathbf{p}_{i,k_i}$ の 2 端子対網が，$i=1$ から $i=n$ 迄順次縦続接続されていると言う共通点があり，このことが議論の中で利用されているので，偶関数部に基づく条件を確立することが可能であった。しかし，4·2 節や 4·3 節で取り扱ったような縦続形回路については，偶関数部に着目する方法は適していない。

第 5 章　結　論

筆者は，多変数正実関数を抵抗終端縦続 1 端子対網の駆動点イミタンスとして実現すると言う，いわれる Darlington 流の構成思想に立脚した観点から，それに必要と思われる基本的な性質（第 2 章），伝送零点の分離問題（第 3 章）を述べ，その応用として縦続形構成問題（第 4 章）を考察してきた。本研究を終るに当り、各章における所論を総括すれば次のようになる。

第 2 章では，(i) 宮田の方法を拡張した正（実）性の判定法　(ii) リアクタンス正 2 端子対網の出力端を正関数とする回路網で終端したときの駆動点イミタンスの正性　(iii) リアクタンス正 2 端子対網の出力端を抵抗で終端したときの駆動点イミタンスに対する分解式の存在性　(iv) 正関数の偶関数部に対する性質等を明らかにした。

第 3 章では，1 変数正実関数の縦続形構成において周知の A (B)，Brune，Richards，Hazony-Youla，Darlington-C，Darlington-D 区間に相当する連立伝送零点をもつ 2 端子対網を提案し，これらの縦続区間が与えられた正関数を駆動点イミタンスとする回路網から分離できるための条件を明らかにした。そして，孤立伝送零点をもつ上記の縦続区間は，連立伝送零点をもつ縦続区間の特殊な場合として求められることを，また，孤立伝送零点をもつリアクタンス縦続区間は，虚数抵抗を導入することにより常に複素共役な孤立伝送零点をもつリアクタンス正縦続区間に縦続分解できることを明らかにした。

また，一方の変数について 1 次の 2 変数リアクタンス正関数は，縦続形で実現しうることを明らかにし，その結果を用いて集中分布両素子混在回路，二つの相異なる電気長をもつ分布定数素子から成る混在回路が分離できるための条件，及び，整数倍の電気長をもつ u.e. や，単純枝が分離できるための条件を与えた。

第 4 章では，任意の伝送零点をもつ p_1 のリアクタンス 2 端子対網と，p_2 に関して (i) 無限遠点（原点）又は (ii) 正の実軸上に伝送零点をもつリアクタンス 2 端子対網から成る 2 変数縦続形回路，及び，(iii) p_i（$i=1, 2, \cdots, n$）に関して任意の伝送零点をもつリアクタンス 2 端子対網を順次縦続接続した n 変数回

路，(iv) $g_{i*}(\mathbf{p}_{i,k_i})$（$i=1, 2, \cdots\cdots, n$）の連立伝送零点をもつRichards 区間を順次縦続接続した$\sum k_i$ 変数回路の四種の抵抗終端回路の駆動イミタンスとして正実関数が実現されるための条件を必要充分の形で求め，その構成法を明らかにした。そして，集中分布定数素子混在系等の問題へ応用し，幾つかの実際的な回路について，それらの実現条件を示した。

現在，多変数正（実）関数（行列）の実現問題は，可変回路，集中分布定数素子混在系，相異なる電気長をもつ分布定数素子から成る混在系ばかりでなく，多次元ディジタルフィルタの設計などの分野への応用が期待され,[5] 今や複素及び（または）実多変数有理関数（行列）によって特徴づけられるシステムの主要な研究対象の一つにまで発展しつつある。本論文で述べたような縦続形構成の分野における問題点は，第3章及び第4章末においても述べたところであるが，ここでは更に根幹的な課題として次の三項目を挙げておきたい。

(i) 定理2·15に述べたように，多変数リアクタンス正2端対網の出力端を単位抵抗で終端したときの駆動点イミタンスの偶関部数の分子における多項式に対し分解式が存在しなければならない。一般に，多項式$\phi(\mathbf{p})$が，$\phi(\mathbf{p})=\tilde{\phi}_*(\mathbf{p})$及び，$\mathscr{D}^0(\mathbf{p})$のすべての点で$\phi(\mathbf{p})\geqq 0$ を満足するとき，1変数の場合と同様，スペクトラム因数分解，即ち，$\phi(\mathbf{p})=f(\mathbf{p})\tilde{f}_*(\mathbf{p})$（$f(\mathbf{p})$は複素Hurwitz多項式）の形に一意的に分解可能か，もし，可能ならその方法は？。勿論，行列の場合についても同様の問題が生じる。

(ii) 本論文では，Hurwitz多項式の判定法については触れていない。これについては，Strintzis[56]及びOkabe，Ozaki[57]等により研究されているが，変数の個数が多ければ多い程，煩雑な操作を必要とし簡単な判定法の発見が望まれる。

(iii) 縦続形構成については，上記(i)における$f(\mathbf{p})$自体の因数分解の問題が生ずる。これについては，Musser[58]の研究がある。特に，虚数抵抗を含まない縦続区間を得るには，$f(\mathbf{p})$は実数体の下で因数分解されねばならず，今後の研究に期待される。

謝　　辞

筆者の研究の機会を与えて頂くと共に，終始懇切な御指導及び御鞭撻を賜わりました大阪大学工学部電子工学科　尾崎　弘教授に深甚なる謝意を表します。

本研究を行うに際し，折りにふれ絶えず御教示，御鞭撻を賜わりました近畿大学電子工学科　石井順也教授に心から感謝致します。

本論文の提出を御許可頂き，御審査の労を賜わりました大阪大学工学部電子工学科　児玉慎三教授，並びに，同　寺田浩詔教授に厚く御礼申し上げます。

筆者が現在勤務中の近畿大学電子工学科において，公私にわたり御助言，御激励を賜わりました　長田　朗教授，岡本允夫教授及び梶谷浩二助教授に感謝致します。また，本論文の作成に当り種々有益なる御助言を頂いた，同　西村卓也講師，山口　孜講師に御礼申し上げます。

参　考　文　献

(1) 尾崎，嵩："多変数正実関数ならびに可変回路網について"，信学誌，Vol. 42 No. 12, p. 1226（昭和34—12）

H. Ozaki and T. Kasami: "Positive real functions of several variables and their applications to variable networks", IRE. Trans. Circuit Theory, vol. CT-7, p.251 (Sept., 1960)

(2) H.G. Ansell: "On certain two-variable generalizations of circuit theory with applications to network of transmission lines and lumped reactances", IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-11, p.214 (June, 1964)

(3) H. Ozaki: "New classes of multi-variable positive real functions. Part 1, : Formal deffinition and discussion on argument:". Journal IETE of India, vol. 23, No. 8, p.471 (Aug., 1977)

(4) H. Ozaki: "New classes of multi-variable positive real functions. Part 2, : Discussion on upper-half and right-half plane characteristics:", Journal IETE of India, vol. 24, No.6, p.233 (June, 1978)

(5) A. Fettweis: "Multidimensional wave digital filters", Proc. 1976 Eur. Conf. on Circuit Theory Design, vol.11, p.409 (Sept., 1976)

(6) B.D.O. Anderson and E.I. Jury: "Stability of multidimensional digital filters", IEEE Trans., Circuit & Systems, vol. CAS-21, p.300 (March, 1974)

(7) J.K. Lubbock and V.S. Bansal: "Multidimensional Laplace transformers for solution of nonlinear equations", Proc. IEE, vol.116, p.2075 (Dec., 1969)

(8) D.C. Reddy and N.C. Jagan: "Multidimensional transforms: new technique for the accociation of variables", Electron.

Letters, vol.7, p.278 (1971)

(9) H.A. Barker and S. Ambati: "Nonlinear sampled-data system analysis by multidemensional z-transforms", Proc. IEEE, vol.119, p.1407 (Sept., 1972)

(10) 古賀："2変数リアクタンス関数および2変数リアクタンス行列の受動回路網合成"，信学会回路網研資，CT79—1(1964—05)
T. Koga: "Synthesis of finite passive n-ports with prescribed two-variable reactance matrices", IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-13, p.31 (March, 1966)

(11) D.C. Youla: "The synthesis of networks containing lumped and distributed elements", Symp. on Generalized Networks (PIB), vol.16, p.289 (April, 1966)

(12) S. Okabe and H. Ozaki: "Junction matrix approch to the sturdy of multi-variable positive real matrices". Trans. IECE of Japan, vol. E61, p.788 (Oct., 1978)

(13) S. Okabe and H. Ozaki: "Realization of hemogeneous positive real functions with denominators composed of linear factors". Trans. IECE of Japan, vol.E61, No.8, p.605, (Aug., 1978)

(14) S. Okabe and H. Ozaki: "Realization of a class of homogeneous positive real matrices", in Proc. IEEE Int. Symp. Circuit & Syst., Tokyo, p.505 (1979)

(15) A.M. Soliman: "Synthesis of a class of two-variable positive real functions". Inst. Journal of Electronics, vol. XXXII, No.4, p.455 (April, 1972)

(16) A.M. Soliman: "Gyratorless realizations of a class of three-variable positive real functions", Inst. Journal of Electronics, Vol.XXXII, No.5, p.529 (May, 1972)

(17) 例えば，一松："解説，ヒルベルト数学の問題"，共立出版(昭和49)

(18) 例えば，永田："可換体論"，裳華房(昭和42)

(19) T. Koga: "Synthesis of finite passive n-ports with prescribed positive matrices of several variables", IEEE Trans., Circuit Theory, vol. CT-15, p.2 (March, 1968)

(20) N.K. Bose: "New techniques and results in multidimensional problems", Journal of Franklin Inst., vol.301, p.83 (1976)

(21) K. Kuroda: "On the realizability problem of positive real functions and matrices of several variables", Trans. IECE of Japan, vol.E61, p.376 (May, 1978)

(22) M. Saito: "Synthesis of transmission line networks by multivariable techniques", Symp. on Generalized Networks (PIB), vol.16, p.353 (April, 1966)

(23) J.O. Scanlan and J.D. Rhodes: "Realizability of resistively terminated cascade of lumped two-port networks separated by noncommensurate transmission lines", IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-14, p.388 (Dec., 1967)

(24) Y. Kamp: "Realization of multivariable functions by cascade of lossless two-ports separated by non-commensurate stubs", Philips Reseach Reports, vol.26, p.443 (Dec., 1971)

(25) D.C. Youla, J.D. Rhodes and P.C. Marston: "Driving point synthesis of resistor-terminated cascades composed of lumped lossless two-ports and commensurated TEM lines", IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-19, p.648 (Nov., 1972)

(26) 藤本，石井："多変数正実関数の偶関数部における孤立零点の分離"，信学会論文誌，Vol.56—A, No.10, p.568 (Sept., 1973)

(27) M.O. Ahmed, C.H. Reddy, V. Ramachandran and M.N.S. Swamy: "Cascade synthesis of a class of multivariable positive real functions", IEEE Trans. Circuit & System, vol.CAS-25, p.871 (Oct., 1978)

(28) H.K. Kim and C.S. Phan: "Zero removal synthesis of a class of multi-variable positive real functions without transformers", in Proc. IEEE Inst. Symp. Circuit & Syst., Phoenix, p.366 (1977)

(29) 黒田："同次形多変数リアクタンス関数の構成"，信学会，回路とシステム理論研資，CT—73—12（1973—05）

(30) H. Fujimoto and H. Ozaki: "Separation of two-variable reactance sections in the cascade synthesis of multi-variable positive real functions", Trans. IECE of Japan, vol. E61, No.6, p.433 (June, 1978)

(31) H. Fujimoto, J. Ishii and H. Ozaki: "Multi-variable Richards' transformations", in Proc. IEEE Inst. Symp. Circuit & Syst., Tokyo, p.501 (1979)

(32) V. Ramachandran, G.S. Takhar and M.N.S. Swamy: "On generation of a class of multi-variable transformations" in Proc. IEEE Inst. Symp. Circuit & Syst., Tokyo, p.318 (1979)

(33) T. Koga: "Synthesis of resistively terminated cascade of uniform lossless transmission lines and lumped passive lossless two-ports", IEEE Trans. Circuit Theory, vol.CT-18, p.444 (July, 1971)

(34) K. Zaki and R.W. Newcomb: "A note on the lumped-distributed synthesis", IEEE Trans. Circuit & System, vol.21, p.659 (Sept., 1974)

(35) 藤本："2変数正実関数の縦続形構成"，信学会論文誌，Vol. J59—A, No.5, p.409,（昭51—05）

(36) 藤本，石井："集中定数リアクタンス区間とUE区間から成る抵抗終端縦続形回路の構成"，信学会論文誌，Vol. J59—A, No.11, p.993（昭和51—11）

(37) Y. Kamp and J. Neirynck: "Cascade synthesis of a multi-variable transfer matrix", Electronics Letters, 23rd,

vol.4, No.17, p.369 (Aug., 1968)

(38) I. Shirakawa, H. Takahashi and H. Ozaki: "Synthesis of some classes of multi-variable cascade transmission line networks", IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-15, No.2, p.138 (June, 1968)

(39) Y. Kamp: "Synthesis of multivariable 2-port using parallel and series stubs", Electronics Letters, 1st, vol.4, No.22, p.474 (Nov., 1968)

(40) A. Premoli: "Analysis and synthesis of cascaded non-commensurable Ozaki-Ishii sections", Electronics Letters, 22nd, vol.6, No.2, p.37 (Jan., 1970)

(41) A. Premoli: "Realizability conditions of cascaded and shunt non-commensurable elements networks", Electronics Letters, 2nd, vol.6, No.7, p.200 (April, 1970)

(42) M.O. Ahmad, C.H. Reddy , V. Ramachandran and M.N.S. Swamy: "Partial derivative properties of multivariable cascade networks", Journal of The Franklin Inst., vol.307, No.6, p.315 (June, 1979)

(43) V. Ramachandran and A.S. Rao: "The real part of a multi-variable positive real function and some applications", IEEE Trans. Circuit & System, vol. CAS-21, p.598 (Sept., 1974)

(44) H. Fujimoto, J. Ishii and H. Ozaki: "Multi-variable Richards' transformations", Trans. IECE of Japan, vol.E62, No.8, p.529 (Aug., 1979)

(45) B.A. Fuks: "Theory of analytic function of several complex variables", Translation of Mathematical Monographs, vol.8, American Mathematical Society (1963)

(46) 大野："回路網の古典合成論 I —V", 信学誌 . Vol.57～Vol.58 (昭和 49 . 10 ～ 昭和 50 . 3)

(47) 高木：″代数学講義″，共立出版（昭和42）

(48) ファン・デル・ヴエルデン：″現代代数学Ⅰ″，東京図書（昭和41）

(49) V. Belevich: "Classical network theory", Holden-Day (1968)

(50) D.C. Youla: "A new theory of cascade synthesis", IRE Trans. Circuit Theory, vol.8, No.3, p.244 (Sept., 1961)

(51) 藤本：″単位円を境界とする正実関数について″，信学会論文誌，Vol.57—A，No.10，p.762（昭和49—10）

(52) 藤本：″分布定数回路の構成に対する一考察″，信学会論文誌，Vol.57—A, No.12, p.899（昭和49—12）

(53) 黒田：″分布定数回路網の構成″，電子通信工学構座，共立出版（昭和34）

(54) 板倉，熊谷：″超高周波回路″，現代電気工学講座，オーム社（昭和38）

(55) 尾崎，黒田：″回路網理論Ⅰ″，共立全書，共立出版（昭和34）

(56) M.G. Strintzis: "Tests of stability of multidimensional filter", IEEE Trans. Circuit & Systems, vol. CAS-24, No.8, p.432 (Aug., 1977)

(57) S. Okabe, H. Ozaki: "Properties of multivariable positive real functions on real- and imaginary-axis", Trans. IECE of Japan, vol.E61, No.9, p.717 (Sept., 1978)

(58) D.R. Musser: "Multivariable polynomial factorization", Journal of A.C.M., vol.22, No.2, p.291 (April, 1975)