The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Dérivées faibles et formalisme lagrangien
Author(s)	Lino, Riichi
Citation	Osaka Mathematical Journal. 1961, 13(1), p. 185-198
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/7710
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

Iino, Riichi
Osaka Math. J.
13 (1961), 185-198.

Dérivées Faibles et Formalisme Lagrangien

Par Riichi IINO

Dans les notes précédentes "Sur les dérivations dans les espaces vectoriels topologiques sur le corps des nombres complexes"[1], nous avons étudié dérivée au sens de Fréchet et dérivée faible sur une classe des applications de l'espace vectoriel topologique complexe, localement convexe et séparé dans l'espace complet du même type.

Ce travail a pour le premier but d'appliquer aux fonctions définies sur un espace de distributions vectorielles à valeurs dans un espace vectoriel topologique complexe des propriétés des dérivées au sens de Fréchet et dérivées faibles étudiées dans les notes précédentes. Le second but de ce travail est de discuter la possibilité du formalisme lagrangien dans la théorie quantique des champs par la méthode de la dérivation faible.

1. **Rappel des notions sur les espaces de distributions à valeurs vectorielles et le produit tensoriel topologique**[2]. Soit $\mathcal{H}$ un espace de distributions quasi-complet sur R^n, c'est-à-dire, un sous-espace de l'espace $\mathcal{D}'$ des distributions sur R^n, muni d'une topologie localement convexe plus fine que la topologie induite par celle de $\mathcal{D}'$ et quasi-complet, soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé et complet complexe. On appelle $\mathcal{H}(E)$ l'espace $\mathcal{H}\varepsilon E$ (produit ε d'espaces vectoriels topologiques[3]), identifié à l'espace $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{H}'_c\,;E)$ des applications linéaires continues de l'espace $\mathcal{H}'_c$ dans E ($\mathcal{H}'_c$ est le dual de $\mathcal{H}$, muni de la topologie de la convergence compacte), muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de $\mathcal{H}'$. $\mathcal{H}(E)$ est un sous-espace de l'espace $\mathcal{D}'(E)$ des distributions sur R^n à valeurs dans E, dont l'injection dans $\mathcal{D}'(E)$ est continue ; il est en général un espace quasi-complet, et complet si $\mathcal{H}$ est complet.

Si $\mathcal{H}$ est un espace de distributions complet, ayant la propriété d'approximation stricte[4], alors on a $\mathcal{H}(E)=\mathcal{H}\hat{\otimes}E$[5] (complété biprojectif de produit tensoriel de $\mathcal{H}$ et E). En outre, lorsque $\mathcal{H}$ et E sont des

1) R. Iino [1], [2] et [3].
2) On trouvera l'étude détaillée dans L. Schwartz [1] et [3].
3) L. Schwartz [1], exposé n° 7 et [3], chap. I.
4) L. Schwartz [3), préliminaire.
5) A. Grothendieck [1], chap. I. et L. Schwartz [3], corollaire 1 de la proposition 11, page 47.

espaces de Fréchet et $\mathcal{H}$ nucléaire, alors $(\mathcal{H}(E))'_c$ et $\mathcal{H}'\varepsilon E'_c$ sont identiques, algébriquement et topologiquement[1]. D'autre part, comme $\mathcal{H}(E)$ est aussi un espace de Fréchet, on a $((\mathcal{H}(E))'_c)'_c = \mathcal{H}(E)$. Alors pour tout espace vectoriel topologique F, localement convexe séparé et complet, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_c(\mathcal{H}(E)\,;\,F) &= \mathcal{L}_\varepsilon(((\mathcal{H}(E))'_c)'_c\,;\,F) \approx (\mathcal{H}(E))'_c\varepsilon F \\ &= (\mathcal{H}'\varepsilon E'_c)\varepsilon F = \mathcal{H}'\varepsilon(E'_c\varepsilon F) \qquad \text{(Associativité du produit } \varepsilon\text{)}. \end{aligned}$$

En vertu de la relation $E'_c\varepsilon F \approx \mathcal{L}_\varepsilon((E'_c)'_c\,;\,F)$ et du fait que E soit un espace de Fréchet, on a

$$\mathcal{L}_c(\mathcal{H}(E)\,;\,F) \approx \mathcal{H}'\varepsilon\mathcal{L}_c(E\,;\,F)\,. \tag{1.1}$$

2. **Dérivée faible.** Soit $\mathcal{H}$ un espace de distributions quasi-complet, E un espace vectoriel topologique complexe, localement convexe séparé et complet. Si f est une fonctionnelle continue définie sur $\mathcal{H}(E)$ dérivable au sens de Fréchet en un point $u \in \mathcal{H}(E)$, la dérivée $df(u) \in (\mathcal{H}(E))'$ [2]. Il est bien connu que $(\mathcal{H}(E))'$ est l'espace $J(\mathcal{H}, E)$ des formes bilinéaires intégrales[3] sur $\mathcal{H}\times E$; donc la dérivée $df(u)$ n'est autre qu'une forme bilinéaire intégrale sur $\mathcal{H}\times E$. En particulier, lorsque $\mathcal{H}$ est un espace de distributions normal (c'est-à-dire, il contient l'espace $\mathcal{D}$ des fonctions numériques indéfiniment dérivables à support compact sur R^n, l'injection de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{H}$ est continue et $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{H}$), et de plus un espace de Fréchet nucléaire, et E est un espace de Fréchet, la dérivée $df(u)$ est une distribution à valeurs dans E' contenue dans $\mathcal{H}'(E'_c)$, $\mathcal{H}'$ étant un espace de distributions (normal).

Plus généralement, supposons f une application continue de $\mathcal{H}(E)$ dans F (localement convexe séparé et complet) dérivable au sens de Fréchet en un point u de $\mathcal{H}(E)$; donc on a $df(u) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(E)\,;\,F)$. Comme $\mathcal{L}_c(\mathcal{H}(E)\,;F)$ est canoniquement isomorphe à un sous-espace vectoriel topologique de $(\mathcal{H}(E))'_c\varepsilon F$, à cet espace tout entier si $((\mathcal{H}(E))'_c)'_c = \mathcal{H}(E)$, on peut supposer $df(u) \in (\mathcal{H}(E))'_c\varepsilon F$, lorsque $\mathcal{H}(E)$ est tonnelé; en particulier, d'après (1.1), on peut supposer $df(u) \in \mathcal{H}'\varepsilon(\mathcal{L}_c(E\,;F))$, lorsque $\mathcal{H}$ et E sont les espaces de Fréchet et $\mathcal{H}$ nucléaire.

Supposons maintenant $\vec{e}$[4] un élément fixé de E et f une application continue de $\mathcal{H}(E)$ dans E, ayant une dérivée faible en $\vec{u} \in \mathcal{H}(E)$ au long de $h\otimes\vec{e}$ pour tout $h \in \mathcal{H}$[5]. Soient h, k deux éléments arbitraires de $\mathcal{H}$,

---

1) L. Schwartz [1], exposé n° 19, théorème 3, [4], corollaire 1 de la proposition 22.
2) R. Iino [1], n° 1.
3) L. Schwartz [1], exposé n° 7, et A. Grothendieck [1], chap. I, page 87.
4) Convenons désormais de noter $\vec{e}$ (resp. $\overleftarrow{e'}$) un élément de E (resp. E').
5) R. Iino [1], n° 2.

ξ une variable complexe et r un nombre réel positif quelconque. Par l'hypothèse, on a une relation suivante :

$$(2.1)\quad Df(\vec{u})[h\otimes\vec{e}]-Df(\vec{u})[k\otimes\vec{e}]=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\frac{f(\vec{u}+\xi h\otimes\vec{e})-f(\vec{u}+\xi k\otimes\vec{e})}{\xi^2}d\xi\text{[1]}.$$

Compte tenu du fait qu'un système fondamental de voisinages de $\vec{0}$ de $\mathcal{H}(E)$ soit constitué des polaires des parties $A'\otimes B'$ de l'espace $B(\mathcal{H}, E)$ des formes bilinéaires continues sur $\mathcal{H}\times E$, A' (resp. B') équicontinue dans $\mathcal{H}'$ (resp. E'), on peut aisément montrer que, pour une partie équicontinue N' de E' et un nombre $\alpha>0$ quelconque, il existe un voisinage V de 0 dans $\mathcal{H}$, tel que les relations $|\xi|=r$, $h-k\in V$ entraînent

$$|\langle Df(\vec{u})[h\otimes\vec{e}]-Df(\vec{u})[k\otimes\vec{e}],\ \vec{e}'\rangle|\leq\frac{\alpha}{r},\quad \text{pour tout } \vec{e}'\in N',$$

ce qui montre que $Df(\vec{u})$ est une application continue (linéaire[2]) de $\mathcal{H}\otimes\vec{e}$, muni de la topologie induite par celle $\mathcal{H}(E)$, dans E.

D'autre part, remarquons que l'espace $\mathcal{H}\otimes\vec{e}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}(E)$, et celui-ci, muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{H}(E)$, est isomorphe à $\mathcal{H}$, algébriquement et topologiquement, puisque la topologie initiale de $\mathcal{H}$ est celle de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de $\mathcal{H}'$.

Par conséquent, on a tout de suite le

Théorème 2.1. *Soient $\vec{e}$ un élément fixé de E, f une application continue de $\mathcal{H}(E)$, ayant la dérivée faible en $\vec{u}\in\mathcal{H}(E)$ au long $h\otimes\vec{e}$ pour tout $h\in\mathcal{H}$. $Df(\vec{u})$ est alors une application linéaire continue de l'espace $\mathcal{H}\otimes\vec{e}$, muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{H}(E)$, dans E. En posant $Df(\vec{u})[h\otimes\vec{e}]=\langle T(\vec{u},\vec{e}), h\rangle$, $T(\vec{u},\vec{e})$ est une application linéaire continue de $\mathcal{H}$ dans E. Donc, si $\mathcal{H}$ est un espace de distributions normal, $T(\vec{u},\vec{e})$ appartient à l'espace $\mathcal{H}'(E)$ des distributions à valeurs dans E.*

Pour une application dérivable au sens de Fréchet en $\vec{u}$, l'énoncé du théorème est la chose triviale, en faisant une restriction $df(\vec{u})$ à $\mathcal{H}\otimes\vec{e}$.

3. **Quelque propriétés algébriques des espaces particuliers des fonctions différentiables à valeurs vectorielles.** Remarquons d'abord que $\mathcal{E}^m$ = espace des fonctions m fois continûment différentiables sur $R^n(\mathcal{E}=\mathcal{E}^\infty)$, $\mathcal{S}^m$ = sous-espace de $\mathcal{E}^m$ des fonctions à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq m$ et $\mathcal{D}^m$ = sous-espace de $\mathcal{E}^m$ à support compact, considérés comme les espaces du type $(\mathcal{H}^m)$ défini par L. Schwartz[3],

1) R. Iino [2], n° 2 et n° 3.
2) R. Iino [1], n° 2.
3) L. Schwartz [1], exposé n° 10 et [2], n° 1.4.

sont des algèbres topologiques pour la multiplication usuelle ; nous appellerons $\mathcal{A}^m$ les algèbres. Comme $\mathcal{A}^m$ est un espace de distributions normal complet, ayant la propriété d'approximation stricte, on a $\mathcal{A}^m(E)=\mathcal{A}^m\widehat{\otimes}E$, quel que soit E localement convexe séparé et complet ; on sait que, par L. Schwartz[1], $\mathcal{A}^m(E)$ est l'espace des fonctions $\vec{\varphi}$ m fois continûment différentiables à valeurs dans E scalairement dans $\mathcal{A}^m$ (c'est-à-dire $\langle\vec{\varphi}, \vec{e}'\rangle\in\mathcal{A}^m$ pour $\vec{e}'\in E'$).

REMARQUE 3. 1. Si E est un espace de Banach, $\mathcal{A}^m(E)$ est exactement l'espace des fonctions $\vec{\varphi}$ m fois continûment différentiables à valeurs dans E dont la norme $\|D^p\vec{\varphi}(x)\|(|p|\leq m)$ dans E est une fonction numérique contenue dans $\mathcal{A}^0$, muni de la topologie définie naturellement.

Proposition 3. 1. *Si E est une B^*-algèbre complexe ayant un élément unité $\vec{1}$, $\mathcal{A}^m(E)$ est une algèbre topologique localement convexe séparée et complete, dont $*$-opération est continue.*

Démonstration. Montrons d'abord que $\mathcal{A}^m(E)$ est une $*$-algèbre. Puisque $\mathcal{A}^m(E)$ est un espace vectoriel, il suffit donc de montrer que, pour deux éléments arbitraires $\vec{\varphi}_1$, $\vec{\varphi}_2$ de $\mathcal{A}^m(E)$, on a $\vec{\varphi}_1\vec{\varphi}_2\in\mathcal{A}^m(E)$, et que on peut définir l'opération $*$ dans $\mathcal{A}^m(E)$: celui-la est aisément prouvable, en vertu de la théorie de la dérivation d'un produit[2]. Posons $\vec{\varphi}^*(x)=(\vec{\varphi}(x))^*$, où $*$ du second terme est l'opération $*$ dans E. Donc on a tout de suite $\vec{\varphi}^*\in\mathcal{A}^m(E)$. En effet, soit $h=(0, \cdots, 0, h_k, 0, \cdots, 0)$, $(1\leq k\leq n)$, (h est le point dans R^n dont la k-ième coordonnée est h_k, les autres étant nulles) : on a $\left\|\frac{\vec{\varphi}(x+h)-\vec{\varphi}(x)}{h_k}-\frac{\partial\vec{\varphi}(x)}{\partial x_k}\right\|=\left\|\frac{\vec{\varphi}^*(x+h)-\vec{\varphi}^*(x)}{h_k}-\left(\frac{\partial\vec{\varphi}(x)}{\partial x_k}\right)^*\right\|$, qui montre que $\vec{\varphi}^*$ admet dérivée première $\frac{\partial\vec{\varphi}^*(x)}{\partial x_k}=\left(\frac{\partial\vec{\varphi}(x)}{\partial x_k}\right)^*$, $(1\leq k\leq n)$, à cause de la remarque 3. 1 ; il en est de même pour toute dérivée D^p d'ordre $|p|\leq m$, donc $\vec{\varphi}^*\in E^m(E)$; enfin, il est aisé de voir que $\vec{\varphi}^*$ appartient à $\mathcal{A}^m(E)$, en vertu de la définition de l'espace du type $\mathcal{H}^m$ [3].

Comme nous avons déjà vu, $\mathcal{A}^m(E)$ étant un espace vectoriel topologique localement convexe séparé et complet, il nous reste à voir que le produit multiplicatif $\vec{\varphi}_1\vec{\varphi}_2$ (resp. $*$-opération $\vec{\varphi}^*$) est une application continue de $\mathcal{A}^m(E)\times\mathcal{A}^m(E)$ (resp. $\mathcal{A}^m(E)$) dans $\mathcal{A}^m(E)$; mais, en vertu de la remarque 3. 1 et du fait que $*$-opération dans E est continue,

1) L. Schwartz [1], exposé n° 10 et [2], n° 1.6.

2) N. Bourbaki [1], chap. I, §. 1, n° 3, proposition 3, page 7.

3) Il est facile de voir que les formules fondamentaux suivantes ont lieu :
a) $(\vec{\varphi}^*)^*=\vec{\varphi}$, b) $(\vec{\varphi}_1+\vec{\varphi}_2)^*=\vec{\varphi}_1^*+\vec{\varphi}_2^*$, c) $(\vec{\varphi}_1\,\vec{\varphi}_2)^*=\vec{\varphi}_2^*\,\vec{\varphi}_1^*$, d) $(\alpha\,\vec{\varphi})^*=\bar{\alpha}\,\vec{\varphi}^*$, pour tout nombre complexe α.

l'énoncé-ci sera démontré aisément.

Désignerons par $\mathcal{A}'^m$ le dual de $\mathcal{A}^m$. Il est clair que $\mathcal{A}'^m$ est un module sur l'algèbre $\mathcal{A}^m$. On a immédiatement le

Théorème 3.1. *L'espace $\mathcal{A}'^m(E)$ de distributions à valeurs dans E est un module sur l'algèbre $\mathcal{A}^m \hat{\otimes} E$*[1]*.*

Démonstration. Désignerons par $R_{\vec{a}}$ une application $\vec{b} \to \vec{b}\vec{a}$ de E dans E (produit multiplicatif à droite). Nous allons définir, pour $\vec{T} \in \mathcal{A}'^m(E)$, un produit multiplicatif à droite $R_{\vec{a}}(\vec{T}) = \vec{T}\vec{a}$ par $\vec{a} \in E$, par la formule:

$$\langle \vec{T}\vec{a}, \varphi \rangle = \langle \vec{T}, \varphi \rangle \vec{a}, \qquad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{A}^m, \tag{3.1}$$

ceci montre $\vec{T}\vec{a} \in \mathcal{A}'^m(E)$, car, comme on voit aisément, $\vec{T}\vec{a} \in \mathcal{L}(\mathcal{A}^m ; E)$, puisque $((\mathcal{A}^m)'_c)'_c = \mathcal{A}^m$ ($\mathcal{A}^m$ étant tonnelé[2]) et $R_{\vec{a}}$ linéaire continue de E dans lui-même. Définissons puis un produit multiplicatif à droite par $\vec{\varphi} = \varphi\vec{a}$, $\varphi \in \mathcal{A}^m$, $\vec{a} \in E$, par une relation suivante:

$$\langle \vec{T}\vec{\varphi}, f \rangle = \langle \vec{T}\vec{a}, \varphi f \rangle, \qquad \text{pour tout } f \in \mathcal{A}^m, \tag{3.2}$$

ce qui montre $\vec{T}\vec{\varphi} \in \mathcal{A}'^m(E)$.

Donc on voit tout de suite qu'une application $L_{\vec{T}}: \vec{\varphi} \to \vec{T}\vec{\varphi}$ de $\mathcal{A}^m \times E$ dans $\mathcal{A}'^m(E)$ est bilinéaire continue: en effet, d'après (3.2), on peut voir l'énoncé. Par conséquent, en vertu de la définition du produit tensoriel projectif, l'application se prolonge au $\mathcal{A}^m \hat{\otimes} E$, ce qui montre que $\mathcal{A}'^m(E)$ est un module à droite sur $\mathcal{A}^m \hat{\otimes} E$. Quant à la démonstration du fait qu'il est en même temps un module à gauche sur $\mathcal{A}^m \hat{\otimes} E$, elle est évidente, en utilisant une methode analogue à celle au-dessus.

REMARQUE 3.2. Dans le cas où $m = \infty$, $\mathcal{A}^\infty \hat{\otimes} E = \mathcal{A}^\infty(E)$, puisque $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{E}$ sont nucléaires[3].

$*$-opération dans $\mathcal{A}'^m(E)$. Soit $\vec{T} \in \mathcal{A}'^m(E)$. On définira $*$-opération dans $\mathcal{A}'^m(E)$ par l'égalité suivante:

$$\langle (\vec{T})^*, \varphi \rangle = \langle \vec{T}, \bar{\varphi} \rangle^*, \qquad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{A}^m, \tag{3.3}$$

où $\bar{\varphi}$ est complexe conjuguée de φ et $*$ surmontée du crochet désigne $*$-opération dans E. Alors on voit $(\vec{T})^* \in \mathcal{A}'^m(E)$: en effet, comme $\varphi \in \mathcal{A}^m$ entraîne $\bar{\varphi} \in \mathcal{A}^m$, donc (3.3) signe le fait que $(\vec{T})^* \in \mathcal{L}(\mathcal{A}^m ; E)$, $*$-opération étant continue dans E. En outre, on voit aisément que $*$-opération dans $\mathcal{A}'^m(E)$ définie ici est continue de $\mathcal{A}'^m(E)$ dans lui-même.

---

1) On désigne par le symbole $\hat{\otimes}$ un produit tensoriel projectif complété. Voir L. Schwartz [1] et A. Grothendieck [1].

2) L. Schwartz [3], prèliminaire, la note au bas de la page 17.

3) L. Schwartz [1], exposé n° 18.

Produit direct. Soit $\mathcal{D}'_x$ (resp. $\mathcal{D}'_y$) le dual de $\mathcal{D}_x$ (resp. $\mathcal{D}_y$) défini sur R^n_x (resp. R^n_y). Pour $\vec{S}_x \in \mathcal{D}'_x(E)$, $\vec{T}_y \in \mathcal{D}'_y(E)$, on définit un produit direct $\vec{S}_x \otimes \vec{T}_y \in \mathcal{D}'_{x,y}(E)$ par

$$(3.4)\quad \langle \vec{S}_x \otimes \vec{T}_y, \varphi(x)\psi(v)\rangle = \langle \vec{S}_x, \varphi(x)\rangle \langle \vec{T}_y, \psi(y)\rangle, \quad \text{pour } \varphi \in \mathcal{D}_x \text{ et } \varphi \in \mathcal{D}_y,$$

compte tenu du fait que $\mathcal{D}'_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$ égale à $\mathcal{D}'_{x,y}$.

4. **Application du type (L) et dérivée faible.** Soient E, F deux espace vectoriels topologiques complexes localement convexes séparés et F complet, Γ_E un ensemble filtrant de semi-normes définissant la topologie de F, Γ_F un ensemble de semi-normes définissant la topologie de F.

DÉFINITION 4.1. On dit qu'une application continue f de E dans F est du type (L), si elle vérifie la condition suivante:

(L) Pour tout semi-norme $q \in \Gamma_F$, il existe un nombre entier $n > 0$ (ne dépendant que de f), une semi-norme $p \in \Gamma_E$, un nombre positif M, tel qu'on ait:

$$(4.1)\qquad q(f(x)) \leq M\{p(x)\}^n, \qquad \text{pour tout } x \text{ dans } E.$$

On a immédiatement $f(0)=0$, F étant séparé. En vertu de la définition du polynôme[1], on sait qu'un polynôme sans terme constante défini sur E à valeurs dans F est une application du tyoe (L) et dérivable au sens de Fréchet partout dans E. Réciproquement, on peut montrer qu' une application du type (L) de E dans F dérivable au sens de Fréchet partout dans E est un polynôme sans terme constante (cet énoncé est une généralization du théorème de Liouville[2]), mais ceci ne nous servira pas.

Ensuite, soit E un espace de Banach complexe, et soit $\mathcal{A}^m = \mathcal{D}^m$ ou $\mathcal{S}^m$. Soit f une application de E dans lui-même du type (L); alors, pour un élément $\vec{\varphi}$ quelconque de $\mathcal{A}^m_x(E)$, une fonction $x \to f(\vec{\varphi}(x))$ est continue sur R^n_x à valeurs dans E, telle que, pour tout polynôme numérique $P(x)$, $P(x)f(\vec{\varphi}(x))$ est borné dans E. Par conséquent, l'intégrale suivante a un sens:

$$(4.2)\qquad \tilde{f}(\vec{\varphi}) = \int_{R^n} f(\vec{\varphi}(x))dx .$$

Proposition 4.1. *Soit $\vec{e}$ un élément fixé de E. Si f admet dérivée faible partout dans E au long de $\vec{e}$, l'application $\tilde{f}$ de $\mathcal{A}^m(E)$ dans E aussi possède une dérivée faible partout dans $\mathcal{A}^m(E)$ au long de $h \otimes \vec{e}$ pour tout $h \in \mathcal{A}^m$.*

1) R. Iino [2], n° 1.
2) R. Iino [3], n° 1.

Démonstration. Soient $\vec{a}$ un élément quelconque de E, ξ une variable complexe. Alors on a

$$
(4.3) \qquad \boldsymbol{D}f(\vec{a})[\vec{e}] = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r} \frac{f(\vec{a}+\xi\vec{e})}{\xi^2}\, d\xi\,,
$$

où r désigne un nombre réel positif indépendant de $\vec{a}$[1]. D'après la définition 4.1, il existe un nombre entier $n>0$ (ne dépend que de f), et un nombre réel positif M, tels qu'on ait

$$
(4.4) \qquad \|\boldsymbol{D}f(\vec{a})[\vec{e}]\| \leq \frac{M}{r}(\|\vec{a}\|+r\|\vec{e}\|)^n\,.
$$

Alors $\boldsymbol{D}f(\vec{a})[\vec{e}]$ reste borné dans E, lorsque $\vec{a}$ parcourt dans une partie bornée de E; ceci prouve que, pour $\vec{\varphi}\in\mathcal{A}^m(E)$ et $h\in\mathcal{A}^m$, $h(x)\boldsymbol{D}f(\vec{\varphi}(x))[\vec{e}] = \boldsymbol{D}f(\vec{\varphi}(x))[h(x)\vec{e}]$ admet une intégrale dans R^n_x. Par conséquent, on a

$$
\begin{aligned}
\int_{R^n}\boldsymbol{D}f(\vec{\varphi}(x))[\vec{e}]h(x)dx &= \int_{R^n}\boldsymbol{D}f(\vec{\varphi}(x))[h(x)\vec{e}]dx \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{R^n}\left\{\int_{|\xi|=r}\frac{f(\vec{\varphi}(x)+\xi h(x)\vec{e})}{\xi^2}d\xi\right\}dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\frac{d\xi}{\xi^2}\left\{\int_{R^n}f(\vec{\varphi}(x)+\xi h(x)\vec{e})dx\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\frac{\tilde{f}(\vec{\varphi}+\xi h\otimes\vec{e})}{\xi^2}d\xi = D\tilde{f}(\vec{\varphi})[h\otimes\vec{e}]\,.
\end{aligned}
$$

Remarque 4.1. D'après le théorème 3.1, si on pose $D\tilde{f}(\vec{\varphi})[h\otimes\vec{e}] = \langle T(\vec{\varphi},\vec{e}), h\rangle$, on peut supposer $T(\vec{\varphi},\vec{e})$ comme un élément de $\mathcal{A}'^m(\boldsymbol{E})$. Mais, comme on verr a aisément, une application $\vec{a}\to\boldsymbol{D}f(\vec{a})[\vec{e}]$ de E dans lui-même est continue (d'après (4.3)), donc une fonction $x\to\boldsymbol{D}f(\vec{\varphi}(x))[\vec{e}]$ est continue à valeurs dans E et $T(\vec{\varphi},\vec{e})$ est identique à $\boldsymbol{D}f(\vec{\varphi}(x))[\vec{e}]$ considérée comme une distribution appartenant à $\mathcal{A}'^m(E)$.

5. **Sur le formalisme lagrangien dans la théorie quantique des champs.** Bornons-nous à considérer un système composé d'un champ complexe quantifié sans champs extérieurs. Rappelons d'abord une procédure de formalisme lagrangien utilisée usuellement par physiciens[2]. On en va exposer particulièrement.

a) Variable de champ. On désigne par $\varphi(x,t)$ (s'appelle une variable de champ) une fonction numérique continûment dérivable dans $R^3_x\times R'_t$, et par φ^* une complexe conjuguée de φ.

b) Lagrangien et densité lagrangienne. On suppose le lagrangien

1) R. Iino [2], n° 2.

2) Voir par exemple G. Wentzel [1].

de champ (noté L) comme une fonctionnelle des φ et φ^* exprimée par l'intégrale de la densité lagrangienne (noté $\boldsymbol{L}$) :

$$(5.1)\qquad L(\varphi, \varphi^*)(t) = \int_{R^3} \boldsymbol{L}(\varphi, \operatorname{grad}\varphi, \dot{\varphi}\,;\ \varphi^*, \operatorname{grad}\varphi^*, \dot{\varphi}^*)(x, t)dx\,,$$

où $\cdot$ désigne l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial t}$.

c) Principe de la variation et équation de champ. Pour tout ségment (t_1, t_2) fermé ou ouvert dans R^1_t, le principe de la variation est comme suivant :

$$(5.2)\qquad \delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \delta\int_{t_1}^{t_2}\int_{R^3_x} \boldsymbol{L}\,dx\,dt = 0\,,$$

où la variation infinitésimale $\delta\varphi$ (resp. $\delta\varphi^*$) de φ (resp. φ^*), supposée comme indépendante de φ^* (resp. φ) est sousmise à la condition: $\delta\varphi(x, t_1)=\delta\varphi(x, t_2)=0$ (resp. $\delta\varphi^*(x, t_1)=\delta\varphi^*(x, t_2)=0$), dont les équations de champ

$$(5.3)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial\varphi} - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial x_i)}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right) = 0\,,\\ &\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial\varphi^*} - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial(\partial\varphi^*/\partial x_i)}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial\dot{\varphi}^*}\right) = 0\,,\end{aligned}$$

ont lieu.

d) Variable canonique conjuguée. Une variable canonique conjuguée π (resp. π^*) associée à φ (resp. φ^*) est définie par une dérivée fonctionnelle partielle ou dérivée faible partielle du lagrangien $L(\varphi, \varphi^*)$ par rapport à $\dot{\varphi}$ (resp. $\dot{\varphi}^*$), c'est-à-dire par

$$(5.4)\qquad \pi = D_{\dot{\varphi}}L(\varphi, \varphi^*) = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial\dot{\varphi}}\,,\quad \pi^* = D_{\dot{\varphi}^*}L(\varphi, \varphi^*) = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial\dot{\varphi}^*}\,.$$

Remarques que φ, φ^*, π et π^* ont jusqu'ici considérées comme fonctions au sens usuel du mot.

e) Relations canoniques de commutation. Elles sont définies par :

$$(5.5)\qquad \begin{aligned} &[\varphi(x, t), \pi(x', t)] = \varphi(x, t)\pi(x', t) - \pi(x', t)\varphi(x, t) = i\hbar\delta(x-x')^{1)}\,,\\ &[\varphi^*(x, t), \pi^*(x', t)] = i\hbar\delta(x-x')\,,\\ &[\varphi(x, t), \varphi(x', t)] = [\varphi(x, t), \varphi^*(x', t)] = [\varphi^*(x, t), \varphi^*(x', t)]\\ &= [\pi(x, t), \pi(x', t)] = [\pi(x, t), \pi^*(x', t)] = [\pi^*(x, t), \pi^*(x', t)]\\ &= [\varphi(x, t), \pi^*(x', t)] = [\varphi^*(x, t), \pi(x', t)] = 0\,,\end{aligned}$$

1) Bornons-nous à étudier le champ bosonnien.

où $i=\sqrt{-1}$, $2\pi\hbar$ la constante de Planck, $\delta(x-x')$ le noyau de Dirac défini par :

$$\langle\delta(x-x'), \varphi\rangle = \int_{R_x^3}\varphi(x, x)dx\,, \qquad \text{pour tout } \varphi\in\mathcal{D}_{x,x'}\,.$$

Remarquons que, par ces relations, φ, φ^*, π et π^* dès ce moment sont considérées comme fonctions ou distributions à valeurs algébriques (pratiquement, à valeurs dans une algèbre des opérateurs dans un espace hilbertien).

f) L'opérateur hamiltonien. L'opérateur hamiltonien $H(\varphi, \varphi^*)$ est défini par la densité hamiltonienne $\boldsymbol{H}$ comme suivant :

$$H(\varphi, \varphi^*) = \int_{R_x^3}\boldsymbol{H}(\varphi, \varphi^*)(x, t)dx\,, \tag{5. 6}$$

où $\boldsymbol{H}(\varphi, \varphi^*)$ s'écrit :

$$\boldsymbol{H}(\varphi, \varphi^*) = \pi(x, t)\dot{\varphi}(x, t)+\pi^*(x, t)\dot{\varphi}^*(x, t)-\boldsymbol{L}\,, \tag{5. 7}$$

($\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}$ (φ, grad φ, $\dot{\varphi}$; φ^*, grad φ^*, $\dot{\varphi}^*$) définie dans b), mais, φ, φ^*, $\cdots$ considérées ici comme fonctions ou distributions à valeurs algébriques).

Comme nous avons vu au-dessus, la variable de champ $\varphi(x, t)$, sa complexe conjuguée $\varphi^*(x, t)$ et les variables canoniques conjuguées $\pi(x, t)$, $\pi^*(x, t)$ ont été considérées comme fonctions numériques de a) à d) ; au contraire, elles-mêmes ont été interprétées comme fonctions ou distributions à valeurs algébriques, depuis l'introduction des relations canoniques de commutation. En outre comme, dans chaque échelon de la construction au-dessus, les quantités présentées n'ont pas été définies précisément ; l'opération d'intégrale, variation, dérivée faible, relations de commutation, produit multiplicatif dans (5. 7) ne sont pas bien définis.

Il est donc naturel de présenter un problème suivant : peut-on construire un formalisme lagrangien dans les conditions suivantes :

(A. 1) La variable de champ $\varphi(x, t)$ est une fonction à valeurs dans une B^*-algèbre E ayant un élément unité $\vec{1}$ (car, dans les densités lagrangiennes usuellement utilisées, les quantités telles que $(\vec{\varphi})^2$, $\vec{\varphi}\vec{\varphi}^*$ se présentent).

(A. 2) Les produits dans (5. 7) ou, plus généralement, produits qui paraissent dans les densités lagrangiennes ou les densités hamiltoniennes utilisées usuellement dans la thèorie quantique des champs, sont considérés comme produits multiplicatifs identifiés à ceux des fonctions à valeurs dans E, si tous les facteurs se réduisent à celles-ci.

Nous voulons discuter une possibilité de faire la formulation dans les conditions (A. 1) et (A. 2). Pour cela, nous allons faire quelque hypothèses suivantes :

(B. 1) L'algèbre E est une B^*-algèbre complexe (non commutative) ayant un élément unité $\vec{1}$.

(B. 2) La fonction $\boldsymbol{L}$ est une application du type (L) de $F=\prod_{i=1}^{10} E_i$ $(E_i=E,\ 1\leq i\leq 10)$ (product d'espaces vectoriels topologiques) dans E, ayant dérivées faibles partielles partout dans F au long de $\vec{1}$[1],

(B. 3) Une variable de champ $\vec{\varphi}$ appartient à $\mathcal{A}^m_{x,t}(E)$ $(m\geq 1)$, qui a été défini déjà dans n^0 3, où $x=(x_1,\ x_2,\ x_3)\in R^3_x$, $t\in R^1_t$, où $\mathcal{A}^m=\mathcal{D}^m$ où $\mathcal{S}^m$.

Dans ces hypothèses, une fonction $(x,t)\to \boldsymbol{L}(\varphi,\ \operatorname{grad}\vec{\varphi},\ \dot{\vec{\varphi}}\,;\ \vec{\varphi}^*,\ \operatorname{grad}\vec{\varphi}^*,\ \dot{\vec{\varphi}}^*)(x,t)$[2] est continue sur $R^3_x\times R^1_t$ et à valeurs dans E, telle qu'un produit multiplicatif par tout polynôme numérique $P(x,t)$ défini sur $R^3_x\times R^1_t$, en particulier, par tout polynôme numérique $P(x)$ défini sur R^3_x est borné dans E ; donc le lagrangien :

$$(5.1)' \qquad L(\vec{\varphi},\ \vec{\varphi}^*)(t)=\int_{R^3}\boldsymbol{L}(\vec{\varphi},\ \operatorname{grad}\vec{\varphi},\ \dot{\vec{\varphi}}\,;\ \vec{\varphi}^*,\ \operatorname{grad}\vec{\varphi}^*,\ \dot{\vec{\varphi}}^*)(x,t)dx\,,$$

et en même temps l'action :

$$(5.8) \qquad I(\vec{\varphi},\ \vec{\varphi}^*)=\int_{t_1}^{t_2}L(\vec{\varphi},\ \vec{\varphi}^*)(t)dt\,, \qquad \text{pour } t_1,\ t_2 \text{ arbitraires,}$$

sont bien définies.

Donc, d'après la considération analogue à celle de la proposition 4. 1, on peut facilement montrer que $I(\vec{\varphi},\vec{\varphi}^*)$ possède une dérivée partielle faible par rapport à $\vec{\varphi}$ (se note $D_\varphi I(\vec{\varphi})$) partout dans $\mathcal{A}^m_{x,t}(E)\times\mathcal{A}^m_{x,t}(E)$ au long de $h\otimes\vec{1}$ pour tout $h\in\mathcal{A}^m_{x,t}$; on a pour tout $h\in\mathcal{A}^m_{x,t}$

$$D_\varphi I(\vec{\varphi})[h\otimes\vec{1}]=\langle \boldsymbol{D}_\varphi\boldsymbol{L}(\vec{\varphi})[\vec{1}],\ h\rangle+\sum_{i=1}^{3}\langle \boldsymbol{D}_{\varphi_i}\boldsymbol{L}(\vec{\varphi})[\vec{1}],\ \frac{\partial h}{\partial x_i}\rangle+\langle \boldsymbol{D}_{\dot{\varphi}}\boldsymbol{L}(\vec{\varphi})[\vec{1}],\ \frac{\partial h}{\partial t}\rangle,$$

où on supprime $\vec{\varphi}^*$ et leur dérivées, car on suppose $\vec{\varphi}^*$ comme indépendante de $\vec{\varphi}$, et supprime aussi $\operatorname{grad}\vec{\varphi}$ et $\dot{\vec{\varphi}}$ dans $\boldsymbol{L}$ pour la brièveté, et on désigne de plus par $\boldsymbol{D}_\varphi\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{D}_{\varphi_i}\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{D}_{\dot{\varphi}}\boldsymbol{L}$ dérivées partielles faibles de $\boldsymbol{L}$ dans F par rapport aux $\vec{\varphi}(x,t)$, $\partial\vec{\varphi}(x,t)/\partial x_i$, $\dot{\vec{\varphi}}(x,t)$ respectivement : par exemple

$$\boldsymbol{D}_{\varphi_1}\boldsymbol{L}(\vec{\varphi})[\vec{1}]=\frac{\partial}{\partial\xi}\boldsymbol{L}\Big(\vec{\varphi}(x,t),\ \frac{\partial\vec{\varphi}(x,t)}{\partial x_1}+\xi\vec{1},\ \frac{\partial\vec{\varphi}(x,t)}{\partial x_2},\ \frac{\partial\vec{\varphi}(x,t)}{\partial x_3},$$
$$\dot{\vec{\varphi}}(x,t)\,;\ \vec{\varphi}^*(x,t),\ \operatorname{grad}\vec{\varphi}^*(x,t),\ \dot{\vec{\varphi}}^*(x,t)\Big)\Big|_{\xi=0},$$

1) Voir Appendice.

2) Il est clair qu' on a $\vec{\varphi}^*\in\mathcal{A}^m_{x,t}(E)$, $\partial\vec{\varphi}/\partial x_i$, $\partial\vec{\varphi}^*/\partial x_i$ $(i=1,2,3)$, $\dot{\vec{\varphi}}$, $\dot{\vec{\varphi}}^*\in\mathcal{A}^{m-1}_{x,t}(E)$. Voir la démonstration de la proposition 3. 1.

où ξ est une variable complexe.

Compte tenu de la remarque 4.1, on a donc pour tout $h \in \mathcal{A}^m_{x,t}$

$$D_\varphi I(\varphi)[h\otimes 1] = \langle \boldsymbol{D}_\varphi \boldsymbol{L}(\varphi)[\vec{1}] - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{D}_{\varphi_i}\boldsymbol{L}(\vec{\varphi})[\vec{1}]) - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D}_{\dot{\varphi}}\boldsymbol{L}(\vec{\varphi})[\vec{1}]),\ h\rangle\,,$$

où $\frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{D}_{\varphi_i}\boldsymbol{L}(\vec{\varphi})[\vec{1}])$, $(1\leq i\leq 3)$, et $\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D}_{\dot{\varphi}}\boldsymbol{L}(\vec{\varphi})[\vec{1}])$ sont dérivées au sens de distribution à valeurs vectorielles; par conséquent, lorsque $D_\varphi I(\vec{\varphi})[h\otimes\vec{1}]=0$ pour tout $h\in\mathcal{A}^m_{x,t}$ à support par rapport à t contenu dans (t_1, t_2), on a immédiatement dans $\mathcal{A}'^m_{x,t}(E)$

$$(5.3)' \qquad \boldsymbol{D}_\varphi \boldsymbol{L}(\vec{\varphi})[\vec{1}] - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{D}_{\varphi_i}\boldsymbol{L}(\vec{\varphi})[\vec{1}]) - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D}_{\dot{\varphi}}\boldsymbol{L}(\vec{\varphi})[\vec{1}]) = 0\,,$$

puisque $t_1 < t_2$ étant arbitraires. De même façon, on aura

$$(5.3)' \qquad \boldsymbol{D}_{\varphi^*} \boldsymbol{L}(\vec{\varphi}^*)[\vec{1}] - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{D}_{\varphi_i^*}\boldsymbol{L}(\vec{\varphi}^*)[\vec{1}]) - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D}_{\dot{\varphi}^*}\boldsymbol{L}(\vec{\varphi}^*)[\vec{1}]) = 0\,.$$

Ces deux équations ne sont autre que l'équation de champ $\vec{\varphi}$.

EXEMPLE. Supposons le cas $\boldsymbol{L}(\vec{\varphi}, \vec{\varphi}^*) = \dot{\vec{\varphi}}^*\dot{\vec{\varphi}} - c^2 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \vec{\varphi}^*}{\partial x_i}\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_i} - c^2\mu^2\varphi^*\varphi$ qui est la densité lagrangienne de champ complexe sans champs extérieurs utilisée usuellement[1]. Il est aisé de voir qu'elle satisfait à l'hypothèse (B.2). De plus on aura immédiatement pour (5.3)':

$$(\square - \mu^2)\vec{\varphi} = 0\,, \quad (\square - \mu^2)\vec{\varphi}^* = 0\,,$$

où $\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$.

Ensuite définissons une variable canonique conjuguée $\vec{\pi}$ (resp. $\vec{\pi}^*$) associée à $\vec{\varphi}$ (resp. $\vec{\varphi}^*$). Par les hypothèses et en vertu de la proposition 4.1, on a immédiatement, pour tout $t\in R^1_t$ et $h\in\mathcal{A}^m_x$,

$$D_{\dot{\varphi}(t)}L(\vec{\varphi}, \vec{\varphi}^*)(t)[h\otimes\vec{1}] =$$
$$\int_{R^3} h(x)\boldsymbol{D}_{\dot{\varphi}(t)}\boldsymbol{L}(\vec{\varphi}, \operatorname{grad}\vec{\varphi}, \dot{\vec{\varphi}}\,;\ \vec{\varphi}^*, \operatorname{grad}\vec{\varphi}^*, \dot{\vec{\varphi}}^*)(x, t)[\vec{1}]dx\,,$$

où par $\vec{\varphi}(t)$ on désigne l'application $x\to\dot{\vec{\varphi}}(x, t)$ de R^3_x dans $\mathcal{A}^{m-1}_x(E)$, donc on a

$$D_{\dot{\varphi}(t)}L(\vec{\varphi}, \vec{\varphi}^*)(t)[h\otimes\vec{1}] = \langle \boldsymbol{D}_{\dot{\varphi}(t)}\boldsymbol{L}(\vec{\varphi}, \vec{\varphi}^*)[\vec{1}], h(x)\rangle\,, \qquad \text{pour tout } h\in\mathcal{A}^m_x.$$

En posant $D_{\dot{\varphi}(t)}L(\vec{\varphi}, \vec{\varphi}^*)(t)[h\otimes\vec{1}] = \langle\vec{\pi}(x, t), h(x)\rangle$ pour tout $h\in\mathcal{A}^m_x$, on a

1) Les constantes c et μ sont la vitesse de la lumière et la masse de champ, respectivement.

(5. 4)′ $$\vec{\pi} = \boldsymbol{D}_{\dot{\varphi}(t)}\boldsymbol{L}(\vec{\varphi}, \vec{\varphi}^*)[\vec{1}]:$$

$\vec{\pi}$ s'appelle variable canonique conjuguée associée à $\vec{\varphi}$. De même façon, on peut définir $\vec{\pi}^*$ (variable canonique conjuguée associée à $\vec{\varphi}^*$) par $D_{\dot{\varphi}^*(t)}L(\vec{\varphi}, \vec{\varphi}^*)(t)[h\otimes\vec{1}]=\langle\vec{\pi}^*(x, t), h(x)\rangle$ pour tout $h\in\mathcal{A}_x^m$, on a donc

(5. 4)′ $$\vec{\pi}^* = \boldsymbol{D}_{\dot{\varphi}^*}\boldsymbol{L}(\vec{\varphi}, \vec{\varphi}^*)[\vec{1}]\,[1].$$

En vertu de la remarque 4.1 et de la définition du lagrangien (5. 1)′, il est facile de voir qu'une fonction $(x, t)\to\vec{\pi}(x, t)$ (resp. $\vec{\pi}^*(x, t)$) est au moins séparément continue de $R_x^3\times R_t^1$, à valeurs dans E, et de plus de voir qu'elle est bornée dans E, par une méthode analogue à celle dans la démonstration de la proposition 4. 1. Par conséquent on pourra définir la densité hamiltonienne et l'hamiltonien par

(5. 7)′ $$\boldsymbol{H}(\vec{\varphi}, \vec{\varphi}^*) = \vec{\pi}\dot{\vec{\varphi}}+\vec{\pi}^*\dot{\vec{\varphi}}^*-\boldsymbol{L}(\vec{\varphi}, \vec{\varphi}^*),$$

(5. 6)′ $$H(\vec{\varphi}, \vec{\varphi}^*) = \int_{R^3}\boldsymbol{H}(\vec{\varphi}, \vec{\varphi}^*)(x, t)\,dx.$$

On va finalement étudier les relations canoniques de commutation. Le subjet qui s'intéresse est la première relation de (5. 5):

(5. 5) $$[\vec{\varphi}(x, t), \vec{\pi}(x', t)] = i\hbar\delta(x-x').$$

Remarquons le fait que, pour t fixé de R_t^1, une fonction $x\to\vec{\varphi}(x)$[2] définie sur R_x^3 et une fonction $x'\to\vec{\pi}(x')$ définie sur $R_{x'}^3$ sont continues, prenant leurs valeurs dans E; donc

$$\vec{\varphi}(x)\vec{\pi}(x')-\vec{\pi}(x')\vec{\varphi}(x) = [\vec{\varphi}(x), \vec{\pi}(x')]$$

est bien définie sur $R_x^3\times R_{x'}^3$ (produit direct supposé dans n^0 3), et pour x' (resp. x) fixé dans $R_{x'}^3$ (resp. R_x^3) la fonction x (resp. x')$\to[\vec{\varphi}(x), \vec{\pi}(x')]$ est une fonction continue définie sur R_x^3 (resp. $R_{x'}^3$), à valeurs dans E. Au contraire, lorsqu on interprète $i\hbar\delta(x-x')$ (terme à droite de (5. 5)) comme $i\hbar\delta(x-x')\vec{1}$ (elle est naturelle), il est impossible pour $i\hbar\delta(x-x')\vec{1}$ de faire l'assertion au-dessus. Par conséquent, la relation canonique de commutation:

$$[\vec{\varphi}(x), \vec{\pi}(x')] = [\vec{\varphi}^*(x), \vec{\pi}^*(x')] = i\hbar\delta(x-x')\vec{1},$$

n'a pas sens précis dans nos hypothèses (B. 1), (B. 2) et (B. 3) lesquelles nous avons fait compte tenu des conditions (A. 1), (A. 2) et de la demande

1) Remarquons que $\vec{\pi}^*$ n'est pas nécéssairement égale à $(\vec{\pi})^*$ défini dans n° 3, mais, ainsi que l'exemple précédent, $\vec{\pi}^*=(\vec{\pi})^*$ a lieu dans les cas pratiques.

2) Désormais on supprimera t dans $\vec{\varphi}$ et $\vec{\pi}$.

de définir les intégrales de la densité lagrangienne et de la densité hamiltonienne[1]. Cette circonstance ne se changera pas par un relâchement des conditions, tant que nous n'abandonnerons pas la condittion (A. 2).

Appendice

Nous voulons étudier brievèment une dérivée partielle faible. Soient E, F, G trois espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés et G complet, f une application de $E\times F$ dans G, (x_0, y_0), (h, k) deux éléments de $E\times F$, s et t deux variables complexes. Posons $\varphi(s, t)= f(x_0+sh, y_0+tk)$. Si $\frac{\partial}{\partial s}\varphi(s, 0)\Big|_{s=0}$ $\left(\text{resp. } \frac{\partial}{\partial t}\varphi(0, t)\Big|_{t=0}\right)$ existe dans G, on dit que f a une dérivée partielle faible par rapport à x (resp. y) en (x_0, y_0) au long de h (resp. k); la valeur $\frac{\partial}{\partial s}\varphi(s, 0)\Big|_{s=0}$ $\left(\text{resp. } \frac{\partial}{\partial t}\varphi(0, t)\Big|_{t=0}\right)$ s'appelle dérivée partielle faible (première) par rapport à x (resp. y) en (x_0, y_0) au long de h (resp. k) et se note $D_x f(x_0, y_0)[h]$ (resp. $D_y f(x_0, y_0)[k]$).

Lorsque $\varphi(s, t)$ est une fonction régulière (holomorphe) dans un domaine cylindrique $D=\{(s, t)\,;\ |s|<R,\ |t|<R,\ R>0\}\subset C^2$ (l'espace de deux variables complexes), on a immédiatement le développement de Taylor à l'origine:

$$\varphi(s, t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{s^m t^n}{m!\,n!}\frac{\partial^{m+n}\varphi(0, 0)}{\partial s^m \partial t^n}, \qquad \text{pour tout } (s, t)\in D,$$

$$\text{où}\quad \frac{\partial^{m+n}\varphi(0, 0)}{\partial s^m \partial t^n} = \frac{m!\,n!}{(2\pi i)^2}\int_{|\xi|=\rho}\int_{|\xi|=\rho}\frac{f(x_0+\xi h,\ y_0+\zeta k)}{\xi^{m+1}\zeta^{n+1}}\,d\xi d\zeta\,, \qquad (0<\rho<R),$$

duquel on a les dérivées partielles faibles d'ordres supérieurs. Les propriétés fondamentales des dérivées partielles faibles s'obtiendront par une méthode analogue à celle de mes notes précédentes. Par exemple, les propriétés utilisées n^0 5 aisément s'obtiennent.

Université de Waseda

(Reçu le 23 Mars, 1961)

---

1) En même temps, nous avons tenu compte de la possibilité de faire la transformation de Fourier vectorielle des $\vec{\varphi}$, $\vec{\pi}$ qui est l'opération trés importante dans la théorie quantique des champs.

Index bibliographique

N. Bourbaki [1]: Fonctions d'une variable réelle. Chapitres I, II, III, Paris, Hermann.

R. Iino [1]: Sur les dérivations dans les espaces vectoriels topologiques sur le corps des nombres complexes. I. Proc. Japan Acad. **35** (1959), 343-348.

R. Iino [2]: Ibid. II, **35** (1959), 530-535.

R. Iino [3]: Ibid. III, **36** (1960), 27-32.

A. Grothendieck [1]: Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires. Annales de l'Institut Fourier. **4** (1952), 73-112.

L. Schwartz [1]: Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Séminaire Schwartz, Faculté des Sciences de Paris (1953/1954).

L. Schwartz [2]: Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles. Journal d'Analyse Mathématique, Jérusalem, **4** (1954/1955), 88-148.

L. Schwartz [3]: Théorie des distributions à valeurs vectorielles. (I). Annales de l'Institut Fourier, **7** (1957), 1-139.

L. Schwartz [4]: Ibid. (II), **8** (1958), 1-209.

G. Wentzel [1]: Quantum theory of fields. Interscience, New York (1949).