

Title	Note sur contractions et principes du maximum
Author(s)	Itô, Masayuki
Citation	Osaka Journal of Mathematics. 1967, 4(1), p. 217-226
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/7712
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

NOTE SUR CONTRACTIONS ET PRINCIPES DU MAXIMUM^{*)}

MASAYUKI ITÔ

(Received April 20, 1967)

1. Soit \mathfrak{X} un espace fonctionnel relativement à un espace X localement compact et séparé, et à une mesure ξ de Radon positive dans X . Deny [3] a démontré que les deux énoncés suivants sont équivalents sous la condition (*).

(*) A tout compact K de X , on peut associer une constante $A'(K)$ telle qu'on ait, pour toute u de \mathfrak{X} ,

$$\int_K |u(x)|^2 d\xi(x) \leq A'(K) \|u\|^2.$$

(1.1) La contraction "module" opère dans \mathfrak{X} . (resp. Les contractions normales opèrent dans \mathfrak{X} .)

(1.2) Le principe de domination est satisfait dans \mathfrak{X} . (resp. Le principe complet du maximum est satisfait dans \mathfrak{X} .)

Dans cet article, nous allons démontrer la même équivalence sans la condition (*).

2. Nous donnerons d'abord la définition de l'espace fonctionnel d'accord avec Deny [3].

DÉFINITION. Un espace fonctionnel $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(X; \xi)$ relativement à X et à ξ est un espace hilbertien des fonctions réelles et localement sommables pour ξ , vérifiant la condition suivante:

(a) A tout compact K de X , on peut associer une constante positive $A(K)$ telle qu'on ait, pour toute u de \mathfrak{X} ,

$$\int_K |u(x)| d\xi(x) \leq A(K) \|u\|.$$

Deux fonctions égales presque partout pour ξ représentent le même élément de \mathfrak{X} . La norme et le produit scalaire sont désignés respectivement par $\|u\|$ et (u, v) . On désignera par M l'ensemble des fonctions réelles, mesurables pour ξ

*) Cet article a été fait sous un bourse de la Fondation de Yukawa.

et bornées, à support compact dans X , et par M^+ l'ensemble des éléments non-négatifs de M . Par la condition (a), à toute fonction f de M , on peut associer un élément unique u_f de \mathfrak{X} tel qu'on ait

$$(u_f, v) = \int v(x)f(x)d\xi(x)$$

pour toute v de \mathfrak{X} . On désignera par $P(\mathfrak{X})$ l'ensemble $\{u_f; f \in M\}$, et par $P^+(\mathfrak{X})$ l'adhérence de $\{u_f; f \in M^+\}$. On appelle les éléments de $P^+(\mathfrak{X})$ potentiels purs de \mathfrak{X} . Alors, $P(\mathfrak{X})$ est dense dans \mathfrak{X} , et nous obtenons que la convergence forte dans \mathfrak{X} entraîne la convergence presque partout pour ξ sur X .

Le principe de domination: on dit que le principe de domination est satisfait dans \mathfrak{X} si, quels que soient f et g de M^+ , l'inégalité $u_f(x) \leq u_g(x)$ est satisfaite presque partout pour ξ sur X dès qu'elle l'est presque partout sur $\{x \in X; f(x) > 0\}$.

Le principe complet du maximum: on dit que le principe complet du maximum est satisfait dans \mathfrak{X} si, quels que soient f et g de M^+ , l'inégalité $u_f(x) \leq u_g(x) + 1$ est satisfaite presque partout sur X dès qu'elle l'est presque partout sur $\{x \in X; f(x) > 0\}$.

La contraction "module": on dit que la contraction "module" opère dans \mathfrak{X} si, quelle que soit u de \mathfrak{X} , on a $|u| \in \mathfrak{X}$ et $\| |u| \| \leq \|u\|$.

Les contractions normales: on dit que les contractions normales opèrent dans \mathfrak{X} si, quelle que soit une contraction T de la droite réelle¹⁾, on a $T \cdot u \in \mathfrak{X}$ et $\|T \cdot u\| \leq \|u\|$ pour toute u de \mathfrak{X} .

Théorème 1. *Soit \mathfrak{X} un espace fonctionnel relativement à X et à ξ . Deux énoncés suivants sont équivalents.*

- (A₁) *La contraction "module" opère dans \mathfrak{X} .*
- (A₂) *Le principe de domination est satisfait dans \mathfrak{X} .*

Théorème 2. *Soit \mathfrak{X} un espace fonctionnel relativement à X et à ξ . Deux énoncés suivants sont équivalents.*

- (B₁) *Les contractions normales opèrent dans \mathfrak{X} .*
- (B₂) *Le principe complet du maximum est satisfait dans \mathfrak{X} .*

Deny [3] a démontré les entraînements (A₁) \Leftrightarrow (A₂) et (B₁) \Leftrightarrow (B₂) sans la condition (*).

3. Démontrons l'entraînement (A₂) \Leftrightarrow (A₁). Pendant cette section, nous supposons que le principe de domination est satisfait dans \mathfrak{X} . Soit c un nombre positif, et posons

$$u_f^{(c)} = u_f + cf$$

1) On appelle une contraction normale de la droite réelle R une application T de R à R satisfaisant aux $T(0) = 0$ et $|T(a_1) - T(a_2)| \leq |a_1 - a_2|$ pour tout couple a_1 et a_2 de R .

pour toute f de M . L'ensemble $P(\mathfrak{X}^{(c)}) = \{u_f^{(c)}; f \in M\}$ est un espace pré-hilbertien par la norme

$$\|u_f^{(c)}\|_c = \left(\int u_f^{(c)}(x) f(x) d\xi(x) \right)^{1/2}.$$

La complété $\mathfrak{X}^{(c)}$ de $P(\mathfrak{X}^{(c)})$ par la norme susdite $\|\cdot\|_c$ est un espace fonctionnel relativement à X et à ξ .

Lemme 1. *A toute u de $P^+(\mathfrak{X}^{(c)})$, on peut associer une fonction non-négative unique f de $L^2 = L^2(\xi)$ telle qu'on ait, pour toute v de $\mathfrak{X}^{(c)}$,*

$$(u, v)_c = \int v(x) f(x) d\xi(x).$$

En effet, il existe une suite (f'_n) de M^+ telle que la suite $(u_{f'_n}^{(c)})$ converge fortement vers u dans $\mathfrak{X}^{(c)}$ avec $n \rightarrow \infty$. L'inégalité

$$c \|f'_n - f'_m\|_{L^2}^2 \leq \|u_{f'_n}^{(c)} - u_{f'_m}^{(c)}\|_c^2$$

entraîne l'existence d'une fonction non-négative f de L^2 telle qu'on ait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f'_n - f\|_{L^2} = 0.$$

Posons

$$f_n(x) = \sup (\inf (f'_n(x), f(x)), f_{n-1}(x)).$$

Par l'inégalité $\|u_{f'_n}^{(c)}\|_c \leq \|u_{f_n}^{(c)}\|_c$ et la convergence croissante de (f_n) vers f , la suite $(u_{f_n}^{(c)})$ converge fortement vers u dans $\mathfrak{X}^{(c)}$ avec $n \rightarrow \infty$. Pour toute fonction non-négative v de $\mathfrak{X}^{(c)}$, on a

$$(u, v)_c = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_{f_n}^{(c)}, v)_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \int v(x) f_n(x) d\xi(x) = \int v(x) f(x) d\xi(x),$$

parce que la suite (f_n) converge en croissant vers f presque partout pour ξ . Généralement, depuis que l'espace fonctionnel $\mathfrak{X}^{(c)}$ a un noyau positif²⁾, d'après le théorème de Aronszajn-Smith (voir [1]), à toute v de $\mathfrak{X}^{(c)}$, on peut associer un élément \tilde{v} de $\mathfrak{X}^{(c)}$ telle qu'on ait

$$\|\tilde{v}\|_c \leq \|v\|_c \quad \text{et} \quad |v(x)| \leq \tilde{v}(x)$$

presque partout pour ξ sur X . Par le résultat susdit, on a

$$\int \tilde{v}(x) f(x) d\xi(x) < +\infty.$$

Le théorème de convergence de Lebesgue entraîne

2) On l'appelle si tout potentiel pur d'un espace fonctionnel est non-négatif.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int v(x) f_n(x) d\xi(x) = \int v(x) f(x) d\xi(x),$$

c'est-à-dire que

$$(u, v)_c = \int v(x) f(x) d\xi(x).$$

De la même manière, on désigne par $u_f^{(c)}$ cet élément u . Nous posons

$$L^2(\mathfrak{X}^{(c)}) = \{f \in L^2; u_f^{(c)} \in P^+(\mathfrak{X}^{(c)})\}.$$

Évidemment, on a $L^2(\mathfrak{X}^{(c)}) = L^2(\mathfrak{X}^{(c')})$ pour tous $c, c' > 0$.

Lemme 2. *Le principe de domination est satisfait dans $\mathfrak{X}^{(c)}$ pour tout $c > 0$.*

En effet, pour un couple de f et g de M^+ , supposons que

$$u_f^{(c)}(x) \leq u_g^{(c)}(x)$$

presque partout pour ξ sur $\{x \in X; f(x) > 0\}$. Il suffit de le démontrer au cas où

$$\{x \in X; f(x) > 0\} \cap \{x \in X; g(x) > 0\} = \emptyset,$$

parce que, en général, on peut considérer l'inégalité

$$u_{(f-g)^+}^{(c)}(x) \leq u_{(f-g)^-}^{(c)}(x).$$

Depuis que le principe de domination est satisfait dans \mathfrak{X} et qu'on a $u_f(x) \leq u_g(x)$ presque partout pour ξ sur $\{x \in X; f(x) > 0\}$, $u_f(x) \leq u_g(x)$ presque partout pour ξ sur X , c'est-à-dire,

$$u_f(x) + cf(x) \leq u_g(x) + cg(x)$$

presque partout pour ξ dans $C\{x \in X; f(x) > 0\}$. En conséquence, on a

$$u_f^{(c)}(x) \leq u_g^{(c)}(x)$$

presque partout pour ξ sur X .

De plus, nous obtenons le lemme suivant.

Lemme 3. *Pour un couple f_1 et f_2 de $L^2(\mathfrak{X}^{(c)})$, l'inégalité $u_{f_1}^{(c)}(x) \leq u_{f_2}^{(c)}(x)$ est satisfaite presque partout pour ξ sur X dès qu'elle l'est presque partout pour ξ sur $\{x \in X; f(x) > 0\}$.*

D'abord, nous allons démontrer au cas où $f_2 \in M^+$. Il existe une suite $(f_{1,n})$ de M^+ , qui converge en croissant vers f_1 presque partout pour ξ sur X , telle que la suite $(u_{f_{1,n}}^{(c)})$ converge fortement vers $u_{f_1}^{(c)}$ dans $\mathfrak{X}^{(c)}$ avec $n \rightarrow \infty$. Depuis qu'on a

$$u_{f_{1,n}}^{(c)}(x) \leq u_{f_2}^{(c)}(x)$$

presque partout pour ξ sur $\{x \in X; f_{1,n}(x) > 0\}$, l'inégalité

$$u_{f_1, n}^{(c)}(x) \leq u_{f_2}^{(c)}(x)$$

est satisfaite presque partout pour ξ sur X par le lemme 2. Faisant $n \rightarrow \infty$, nous obtenons

$$u_{f_1}^{(c)}(x) \leq u_{f_2}^{(c)}(x)$$

presque partout pour ξ sur X . Au cas général, supposons que

$$\xi(\{x \in X; u_{f_1}^{(c)}(x) > u_{f_2}^{(c)}(x)\}) > 0.$$

Alors, il existe une fonction $g (\neq 0)$ de M^+ telle que

$$S_g \subset \{x \in X; u_{f_1}^{(c)}(x) > u_{f_2}^{(c)}(x)\}.$$

Soit E l'adhérence de l'ensemble

$$\{u_g^{(c)}; f \in M^+, S_f \subset \{x \in X; u_{f_1}^{(c)}(x) \leq u_{f_2}^{(c)}(x)\}\}.$$

Alors, E est un cône convexe fermé dans $\mathfrak{X}^{(c)}$. La projection de $u_g^{(c)}$ vers E est un potentiel pur dans $\mathfrak{X}^{(c)}$, que nous désignerons par $u_{g'}^{(c)}$. Par l'énoncé susdit, on a

$$u_g^{(c)}(x) = u_{g'}^{(c)}(x)$$

presque partout pour ξ sur $\{x \in X; u_{f_1}^{(c)}(x) \leq u_{f_2}^{(c)}(x)\}$, et

$$u_g^{(c)}(x) \geq u_{g'}^{(c)}(x)$$

presque partout pour ξ sur X . Alors, on a

$$\begin{aligned} & (u_{f_1}^{(c)} - u_{f_2}^{(c)}, u_g^{(c)} - u_{g'}^{(c)})_c \\ &= \int (u_g^{(c)}(x) - u_{g'}^{(c)}(x)) f_1(x) d\xi(x) - \int (u_g^{(c)}(x) - u_{g'}^{(c)}(x)) f_2(x) d\xi(x) \\ &= - \int (u_g^{(c)}(x) - u_{g'}^{(c)}(x)) f_2(x) d\xi(x) \leq 0. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} & (u_{f_1}^{(c)} - u_{f_2}^{(c)}, u_g^{(c)} - u_{g'}^{(c)})_c \\ &= \int (u_{f_1}^{(c)}(x) - u_{f_2}^{(c)}(x)) g(x) d\xi(x) - \int (u_{f_1}^{(c)}(x) - u_{f_2}^{(c)}(x)) g'(x) d\xi(x) \\ &\geq \int (u_{f_1}^{(c)}(x) - u_{f_2}^{(c)}(x)) g(x) d\xi(x) > 0, \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. Donc, on a

$$u_{f_1}^{(c)}(x) \leq u_{f_2}^{(c)}(x)$$

presque partout pour ξ sur X .

Lemme 4. *Le principe d'enveloppe inférieure est satisfait dans $\mathfrak{X}^{(c)}$, c'est-à-dire, pour toutes f_1 et f_2 de $L^2(\mathfrak{X}^{(c)})$, il existe une fonction f_0 de $L^2(\mathfrak{X}^{(c)})$ telle qu'on ait*

$$u_{f_0}^{(c)}(x) = \inf (u_{f_1}^{(c)}(x), u_{f_2}^{(c)}(x)).$$

En effet, posons, pour toute $u_f^{(c)}$ de $P^+(\mathfrak{X}^{(c)})$,

$$I(u_f^{(c)}) = \|u_f^{(c)}\|_c^2 - 2 \int \inf (u_{f_1}^{(c)}(x), u_{f_2}^{(c)}(x))f(x)d\xi(x).$$

Alors, $I(u_f^{(c)})$ est bornée inférieure, parce qu'on a

$$I(u_f^{(c)}) \geq \|u_f^{(c)}\|_c^2 - 2 \int u_{f_1}^{(c)}(x)f(x)d\xi(x) = \|u_f^{(c)} - u_{f_1}^{(c)}\|_c^2 - \|u_{f_1}^{(c)}\|_c^2 \geq -\|u_{f_1}^{(c)}\|_c^2.$$

Posons

$$m = \inf \{I(u_f^{(c)}); u_f^{(c)} \in P^+(\mathfrak{X}^{(c)})\}.$$

Alors, il existe une suite (f_n) de M^+ telle qu'on ait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(u_{f_n}^{(c)}) = m.$$

La suite $(u_{f_n}^{(c)})$ étant bornée dans $\mathfrak{X}^{(c)}$, nous pouvons supposer qu'il existe un potentiel pur $u_f^{(c)}$ de $\mathfrak{X}^{(c)}$ tel que la suite $(u_{f_n}^{(c)})$ converge faiblement vers $u_f^{(c)}$ dans $\mathfrak{X}^{(c)}$ avec $n \rightarrow \infty$. Ensuite, nous démontrerons l'égalité $u_f^{(c)} = u_{f_0}^{(c)}$. Depuis qu'on a, pour tout n ,

$$0 \leq \inf (u_{f_1}^{(c)}(x), u_{f_2}^{(c)}(x))f_n(x) \leq u_{f_1}^{(c)}(x)f_n(x)$$

presque partout pour ξ sur X et

$$\int u_{f_1}^{(c)}(x)f_n(x)d\xi(x) = (u_{f_1}^{(c)}, u_{f_n}^{(c)})_c$$

converge vers

$$(u_{f_1}^{(c)}, u_f^{(c)})_c = \int u_{f_1}^{(c)}(x)f(x)d\xi(x) < +\infty$$

avec $n \rightarrow \infty$, nous obtenons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \inf (u_{f_1}^{(c)}(x), u_{f_2}^{(c)}(x))f_n(x)d\xi(x) = \int \inf (u_{f_1}^{(c)}(x), u_{f_2}^{(c)}(x))f(x)d\xi(x).$$

Par suite, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(u_{f_n}^{(c)}) \geq I(u_f^{(c)}),$$

c'est-à-dire, $m = I(u_f^{(c)})$. On a donc, pour toute g de $L^2(\mathfrak{X}^{(c)})$,

$$(u_f^{(c)}, u_g^{(c)})_c \geq \int \inf (u_{f_1}^{(c)}(x), u_{f_2}^{(c)}(x))g(x)d\xi(x) \tag{1}$$

et

$$\|u_f^{(c)}\|_c^2 = \int \inf (u_{f_1}^{(c)}(x), u_{f_2}^{(c)}(x))f(x)d\xi(x). \tag{2}$$

L'inégalité (1) entraîne

$$u_{\mathcal{F}}^{(c)}(x) \geq \inf (u_{\mathcal{F}_1}^{(c)}(x), u_{\mathcal{F}_2}^{(c)}(x))$$

presque partout pour ξ sur X , et les inégalités (1) et (2) entraînent

$$u_{\mathcal{F}}^{(c)}(x) = \inf (u_{\mathcal{F}_1}^{(c)}(x), u_{\mathcal{F}_2}^{(c)}(x))$$

presque partout pour ξ sur $\{x \in X; f(x) > 0\}$. Par le lemme 3, nous obtenons que les inégalités

$$u_{\mathcal{F}}^{(c)}(x) \leq u_{\mathcal{F}_1}^{(c)}(x),$$

et

$$u_{\mathcal{F}}^{(c)}(x) \leq u_{\mathcal{F}_2}^{(c)}(x)$$

sont satisfaites presque partout pour ξ sur X . En conséquence, nous obtenons l'égalité $u_{\mathcal{F}}^{(c)} = u_{\mathcal{F}_0}^{(c)}$ que nous avons désiré.

Lemme 5. *On a $M \subset \mathfrak{X}^{(c)}$ pour tout $c > 0$.*

En effet, pour une fonction f de M , la transformation

$$A_f: u_g \in P(\mathfrak{X}^{(c)}) \rightarrow \int f(x)g(x)d\xi(x)$$

est linéaire et bornée dans $P(\mathfrak{X}^{(c)})$. Par suite, on peut prolonger A_f à $\mathfrak{X}^{(c)}$, et A_f est un fonctionnel linéaire et bornée. Il existe un élément unique u de $\mathfrak{X}^{(c)}$ tel qu'on ait, pour toute g de $L^2(\mathfrak{X}^{(c)})$,

$$(u, u_g)_c = \int f(x)g(x)d\xi(x),$$

c'est-à-dire, on a $u=f$, et $f \in \mathfrak{X}^{(c)}$.

De la même manière, nous obtenons $L^2(\mathfrak{X}^{(c)}) \subset \mathfrak{X}^{(c)}$. Soit A un ensemble mesurable pour ξ dans X tel que $\xi(A) > 0$, et posons

$$\mathfrak{X}_A^{(c)} = \overline{\{u \in \mathfrak{X}^{(c)}; S_u \subset A\}}.$$

Alors, $\mathfrak{X}_A^{(c)} \neq 0$, et il est un espace fonctionnel relativement à A et à ξ par la norme déduite de $\mathfrak{X}^{(c)}$. De la même manière que la démonstration du lemme 2, pour toute f de M^+ avec $S_f \subset A$,³⁾ nous obtenons que le potentiel $u_{\mathcal{F},A}^{(c)}$ de $\mathfrak{X}_A^{(c)}$ est non-négative et égal à $u_{\mathcal{F}}^{(c)} - u_{\mathcal{F}'}^{(c)}$, où $f' \subset L^2(\mathfrak{X}^{(c)})$ avec $S_{f'} \subset \overline{CA}$.

Lemme 6. *Soit $u_{\mathcal{F}}^{(c)}$ un élément dans $\mathfrak{X}^{(c)}$ tel que $f^+, f^- \in L^2(\mathfrak{X}^{(c)})$ et $u_{\mathcal{F}}^{(c)} \geq 0$. Alors, on a $f(x) \leq 0$ presque partout pour ξ sur $\{x \in X; u_{\mathcal{F}}^{(c)}(x) = 0\}$.*

En effet, posons

$$A = \{x \in X; u_{\mathcal{F}}^{(c)}(x) = 0, f(x) > 0\},$$

3) On désigne par S_f le support de f .

et supposons que $\xi(A) > 0$. Alors, selon $\mathfrak{X}_A^{(c)} \neq 0$, il existe une fonction g de M^+ avec $S_g \subset A$ telle que $u_{g,A}^{(c)}(x) \neq 0$, on a

$$(u_{f'}^{(c)}, u_{g,A}^{(c)})_c = (u_{f'}^{(c)}, u_g^{(c)} - u_{g'}^{(c)})_c = - \int u_{f'}^{(c)}(x)g(x)d\xi(x) \leq 0.$$

D'autre part, on a

$$(u_{f'}^{(c)}, u_{g,A}^{(c)})_c = \int u_{g,A}^{(c)}(x)f(x) = \int_A u_{g,A}^{(c)}(x)f(x)d\xi(x) > 0.$$

C'est une contradiction, d'où la démonstration est complète.

Démonstration de l'entraînement $(A_2) \Leftrightarrow (A_1)$. Nous démontrons d'abord que la contraction "module" opère dans l'espace fonctionnel $\mathfrak{X}^{(c)}$. Par le lemme 4, pour toutes f_1 et f_2 de $L^2(\mathfrak{X}^{(c)})$, il existe une fonction f_0 de $L^2(\mathfrak{X}^{(c)})$ telle que

$$u_{f_0}^{(c)} = \inf (u_{f_1}^{(c)}, u_{f_2}^{(c)}).$$

Depuis qu'on a

$$u_{f_0}^{(c)}(x) = \frac{1}{2}(u_{f_1}^{(c)}(x) + u_{f_2}^{(c)}(x) - |u_{f_1}^{(c)}(x) - u_{f_2}^{(c)}(x)|),$$

la fonction $|u_{f_1}^{(c)} - u_{f_2}^{(c)}|$ appartient à $\mathfrak{X}^{(c)}$. On a

$$\begin{aligned} \| |u_{f_1}^{(c)} - u_{f_2}^{(c)}| \|_c &= \| u_{f_1}^{(c)} + u_{f_2}^{(c)} - 2u_{f_0}^{(c)} \|_c^2 \\ &= \| u_{f_1}^{(c)} - u_{f_2}^{(c)} \|_c^2 + (u_{f_1}^{(c)} - u_{f_0}^{(c)}, u_{f_2}^{(c)} - u_{f_0}^{(c)})_c \\ &\leq \| u_{f_1}^{(c)} - u_{f_2}^{(c)} \|_c^2. \end{aligned}$$

Dans le calcul susdit, nous avons employé le lemme 6 et l'égalité

$$\xi(\{x \in X; u_{f_1}^{(c)}(x) - u_{f_0}^{(c)}(x) > 0, u_{f_2}^{(c)}(x) - u_{f_0}^{(c)}(x) > 0\}) = 0.$$

Ensuite, soit u un élément de $\mathfrak{X}^{(c)}$. Alors, il existe deux suites $(f_{1,n})$ et $(f_{2,n})$ de $L^2(\mathfrak{X}^{(c)})$ telles que la suite $(u_{f_{1,n}}^{(c)} - u_{f_{2,n}}^{(c)})$ converge fortement vers u dans $\mathfrak{X}^{(c)}$ avec $n \rightarrow \infty$. Par l'énoncé susdit, on a

$$|u_{f_{1,n}}^{(c)} - u_{f_{2,n}}^{(c)}| \in \mathfrak{X}^{(c)}$$

et

$$\| |u_{f_{1,n}}^{(c)} - u_{f_{2,n}}^{(c)}| \|_c \leq \| u_{f_{1,n}}^{(c)} - u_{f_{2,n}}^{(c)} \|_c.$$

Par suite, nous pouvons supposer qu'il existe un élément u' de $\mathfrak{X}^{(c)}$ tel que la suite $(|u_{f_{1,n}}^{(c)} - u_{f_{2,n}}^{(c)}|)$ converge faiblement vers u' dans $\mathfrak{X}^{(c)}$ avec $n \rightarrow \infty$. Depuis que la suite $(|u_{f_{1,n}}^{(c)} - u_{f_{2,n}}^{(c)}|)$ converge vers $|u|$ presque partout pour ξ sur X , on a $u'(x) = |u(x)|$ presque partout pour ξ sur X , d'où la fonction $|u|$ appartient à $\mathfrak{X}^{(c)}$. De plus, on a

$$\| |u| \|_c \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \| |u_{f_{1,n}}^{(c)} - u_{f_{2,n}}^{(c)}| \|_c \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \| u_{f_{1,n}}^{(c)} - u_{f_{2,n}}^{(c)} \|_c = \| u \|_c,$$

et par suite, la contraction "module" opère dans $\mathfrak{X}^{(c)}$.

Secondement, nous démontrons que la contraction "module" opère dans l'espace fonctionnel \mathfrak{X} . Soit f une fonction de M , et considérons la transformation de $u_g \in P(\mathfrak{X})$ en $\int |u_f(x)|g(x)d\xi(x)$. Depuis qu'on a

$$\begin{aligned} & \left| \int |u_f(x)|g(x)d\xi(x) \right| = \lim_{\substack{c \rightarrow 0 \\ c > 0}} \left| \int |u_f(x) + cf(x)|g(x)d\xi(x) \right| \\ & = \lim_{\substack{c \rightarrow 0 \\ c > 0}} |(|u_f^{(c)}|, u_g^{(c)})_c| \leq \lim_{\substack{c \rightarrow 0 \\ c > 0}} \| |u_f^{(c)}| \|_c \cdot \|u_g^{(c)}\|_c \\ & \leq \lim_{\substack{c \rightarrow 0 \\ c > 0}} \|u_f^{(c)}\|_c \cdot \|u_g^{(c)}\|_c = \|u_f\| \cdot \|u_g\|, \end{aligned}$$

par le théorème de Riesz, on a $|u_f| \in \mathfrak{X}$ et $\| |u_f| \| \leq \|u_f\|$. De la même manière que la démonstration susdite, pour toute u de \mathfrak{X} , nous avons $|u| \in \mathfrak{X}$ et $\| |u| \| \leq \|u\|$. C'est-à-dire que la contraction "module" opère dans \mathfrak{X} .

4. Démontrons l'entraînement $(B_2) \Rightarrow (B_1)$. De la même manière, il suffit de démontrer que les contractions normales opèrent dans $\mathfrak{X}^{(c)}$ pour tout $c > 0$. Pour cela, il suffit de démontrer que la contraction unité T opère dans $\mathfrak{X}^{(c)}$. (Voir [4] et [5].) De la même manière que le lemme 4, nous pouvons démontrer que, pour toutes f_1 et f_2 de $L^2(\mathfrak{X}^{(c)})$, il existe une fonction f_0 de $L^2(\mathfrak{X}^{(c)})$ telle que

$$u_{f_0}^{(c)} = \inf(u_{f_1}^{(c)}, u_{f_2}^{(c)} + 1).$$

Alors,

$$T \cdot (u_{f_1}^{(c)} - u_{f_2}^{(c)}) = \inf(u_{f_1}^{(c)} - u_{f_2}^{(c)}, 1) = u_{f_0}^{(c)} - u_{f_2}^{(c)}$$

si $u_{f_1}^{(c)} - u_{f_2}^{(c)} \geq 0$. De la même manière que l'entraînement $(A_2) \Rightarrow (A_1)$, on a

$$\begin{aligned} & \|T \cdot (u_{f_1}^{(c)} - u_{f_2}^{(c)})\|_c = \|u_{f_0}^{(c)} - u_{f_2}^{(c)}\|_c \\ & \leq \|u_{f_1}^{(c)} - u_{f_2}^{(c)}\|_c. \end{aligned}$$

Par suite, pour toute u de $\mathfrak{X}^{(c)}$, on a $T \cdot u \in \mathfrak{X}^{(c)}$ et

$$\|T \cdot u\|_c = \|T \cdot |u|\|_c \leq \| |u| \|_c \leq \|u\|_c.$$

En conséquence, les contractions normales opèrent dans $\mathfrak{X}^{(c)}$. Ainsi, la démonstration est complète.

REMARQUE. Ces deux résultats peuvent immédiatement être prolongés dans le cas d'un espace fonctionnel généralisé. (Au sujet de l'espace fonctionnel généralisé, voir [6].)

UNIVERSITÉ DE NAGOYA

4) On appelle la projection de la droite réelle R à $[0, 1]$ la contraction unité.

Bibliographie

- [1] N. Aronszajn and K.T. Smith: *Characterization of positive reproducing kernels. Applications to Green's functions*, Amer. J. Math. **79** (1957), 611–622.
- [2] J. Deny: *Formes et espaces de Dirichlet*, Sémin. Bourbaki, 12e, 1959/60, n° 187.
- [3] J. Deny: *Principe complet du maximum et contractions*, Ann. Inst. Fourier **15**. 1 (1965), 259–272.
- [4] M. Itô: *Condensor principle and the unit contraction*, Nagoya Math. J. **30** (1967), 9–28.
- [5] M. Itô: *Balayage principle and maximum principles on regular functional spaces*, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-1, to appear.
- [6] M. Itô: *A note on extended regular functional spaces*, Proc. Japan Acad. **44** (1967).