The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	確率誤差モデルに基づく画像からの幾何図形の最適抽出とその信頼性評価
Author(s)	金澤, 靖
Citation	大阪大学, 1997, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.11501/3129356
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

確率誤差モデルに基づく
画像からの幾何図形の最適抽出とその信頼性評価

金澤 靖

内容梗概

本論文は，画像に含まれる雑音や様々な処理の過程に混入する誤差に対する画像から抽出した基本的な幾何特徴および復元した 3 次元幾何特徴への影響を理論的に求め評価することを目的として，筆者が行なった研究の成果をまとめたものである．本論文では，画像内の雑音や誤差の統計的な確率モデルを定義し，統計的な解析に基づくいくつかの重要な幾何モデルの最適当てはめ法を提案している．ここでは統計的な立場とは異なり，誤差は比較的小さくかつある程度制御可能であるとして，誤差の定性的なモデルのみ既知として扱っている．本論文は以下の 6 章により構成されている．

第 1 章では，本研究の背景およびその位置付けと研究の概要について述べる．

第 2 章では，代表的な 2 次元の幾何特徴である直線と円錐曲線を対象とする．まず画像上の点をレンズ中心からのベクトルで表わすことにより，画像の誤差を画像面上に拘束されている確率変数ベクトルとして定義する．そして観測された画像内の点列に対する直線当てはめの最尤推定解を理論的に導出すると同時に解の理論的な信頼性も導出する．また信頼性を図示するための方法として「標準変位」と呼ぶ概念を導入する．この解の計算法として「くりこみ法」と呼ぶ手法を用いる．このくりこみ法は，最適解の推定，解の共分散行列の計算，誤差の大きさの推定などを系統的に行なうことができる．シミュレーション画像および実画像を用いた実験により本手法の有効性を示す．また同様な誤差モデルおよび導出法が画像上の円錐曲線の当てはめにも適用できることを示す．

第 3 章では，3 次元の基本的な幾何特徴である空間点と平面を対象とする．まずレンジファインダからの観測データに対し測定距離に比例した誤差モデルを定義する．この誤差モデルをもとに，データに対する平面当てはめの最尤推定解を示すと共にその共分散行列を理論的に導出する．そしてくりこみ法を導入することにより，最適解とその共分散行列を系統的に求められることを示す．ステレオ視における 3 次元復元においては，両カメラの位置関係が既知であり両画像の特徴点の対応が既に決定している場合を考える．第 2 章で定義した画像の誤差モデルを用いて，両画像におけるデータ点をエピ極線条件を満足するように最尤推定の原理で補正を行なうことにより，最適な 3 次元復元を導出する．そして同時にその復元点の信頼性を示す共分散行列も導出する．またデータ点が全て同一の平面上に載っているという拘束条件を用いた場合において空間平面を直接かつ最適に当てはめる方法を導出し，同時にその信頼性を表わす共分散行列を導出する．これらの有効性をシミュレーション画像および実画像を用いた実験により示す．

第 4 章では，幾何学的モデルの良さの尺度を表わす幾何学的情報量基準 (幾何学的 AIC を導入することにより，どの幾何モデルが適しているか，環境に影響を受けるような経験的しきい値を用いずに判定する方法について述べる．まず幾何学的 AIC について概説し，2 次元幾何モデルにおいては直線と円，一般的なコニックの判定について，3 次元幾何モデルにおいては，物体が平面であるかどうか，3 次元を復元するのにステレオカメラの視差が十分あるかどうか判定する方法について，それぞれのモデルに対する幾何学的 AIC を求め，それらの値を比較することによりモデルを判定する方法について述べる．そして，シミュレーション画像および実画像による実験により，これらの有効性を示す．

第 5 章では，このような信頼性評価は実際の画像処理などにどのように応用できるか，そのいくつかの応用例とその手順について示す．

第 6 章では，本論文のまとめを述べるとともに，問題点や残された課題について考察する．

関連発表論文

A. 学会誌掲載論文

[A1] Y. Kanazawa and K. Kanatani, Direct reconstruction of planar surfaces by stereo vision, *IEICE Transactions on Information and Systems*, Vol. E78-D, No. 7, pp. 917–922, 1995.

[A2] Y. Kanazawa and K. Kanatani, Reliability of 3-D reconstruction by stereo vision, *IEICE Transactions on Information and Systems*, Vol. E78-D, No. 10, pp. 1301–1306, 1995.

[A3] Y. Kanazawa and K. Kanatani, Reliability of fitting a plane to range data, *IEICE Transactions on Information and Systems*, Vol. E78-D, No. 12, pp.1630–1635, 1995.

[A4] Y. Kanazawa and K. Kanatani, Optimal line fitting and reliability evaluation, *IEICE Transactions on Information and Systems*, Vol. E79-D, No. 9, pp.1317–1322, 1996.

[A5] Y. Kanazawa and K. Kanatani, Optimal conic fitting and reliability evaluation, *IEICE Transactions on Information and Systems*, Vol. E79-D, No. 9, pp.1323–1328, 1996.

B. 国際会議発表論文

[B1] Yasushi Kanazawa and Kenichi Kanatani, Direct reconstruction of planar surfaces by stereo vision, *Proceedings on MVA'94 IAPR Workshop on Machine Vision Applications*, Dec. 13–15, 1994, Kawasaki, Japan, pp. 285–288.

[B2] Yasushi Kanazawa and Kenichi Kanatani, Reliability of plane fitting by range sensing, *Proceedings on ICRA'95 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, May 21–27, 1995, Nagoya, Japan, pp. 2037–2042.

[B3] Yasushi Kanazawa and Kenichi Kanatani, Reliability of conic fitting, *Proceedings on Second Asian conference on Computer Vision (ACCV'95)*, Singapore, December 1995, Vol.3 of 3, pp.III-397–401.

[B4] Yasushi Kanazawa and Kenichi Kanatani, Statistics inferrence by stereo vision: geometric information criterion, *Proceedings of the 1996 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS96)*, Osaka, Japan, November 1996, pp.1272–1279.

C. 研究会発表

[C1] 金澤靖, 金谷健一, ステレオによる平面の直接的な再構成, 情報処理学会研究報告, 94-CV-89, pp. 25–32, 1994.

[C2] 川島徹, 金澤靖, 金谷健一, ステレオによる 3 次元復元の信頼性評価, 情報処理学会研究報告, 94-CV-90, pp. 33–40, 1994.

[C3] 金澤靖, 金谷健一, レンジデータからの平面復元の信頼性評価, 情報処理学会研究報告, 94-CV-92, pp. 17–24, 1994.

[C4] 金澤靖, 塩沢仁, 金谷健一, 直線当てはめの信頼性評価, 情報処理学会研究報告, 95-CV-96, pp. 41–48, 1995.

[C5] 塩沢仁, 金澤靖, 金谷健一, コニック当てはめの信頼性評価, 情報処理学会研究報告, 95-CV-96, pp. 49–56, 1995.

[C6] 金澤靖, 金谷健一, 情報量基準によるステレオ画像からの平面の自動判定, 情報処理学会研究報告, 95-CV-97, pp. 15–22, 1995.

もくじ

1 序論 **1**

1.1 研究の目的とその背景 1

1.2 幾何情報の信頼性評価について 3

1.3 本論文の構成について 4

1.4 本論文で用いる記号について 4

2 2 次元幾何モデルの最適当てはめとその信頼性評価 **7**

2.1 直線の最適当てはめとその信頼性評価 7

2.1.1 はじめに 7

2.1.2 直線当てはめ 8

2.1.3 最適解とその信頼性 9

2.1.4 最小二乗近似 12

2.1.5 不偏推定量 12

2.1.6 くりこみ法 13

2.1.7 標準変位 14

2.1.8 エッジ漸近近似 16

2.1.9 信頼性に基づく直線の同一性の判定 17

2.1.10 実験 18

2.1.11 まとめ 20

2.2 コニックの最適当てはめとその信頼性評価 26

2.2.1 はじめに 26

2.2.2 コニック当てはめ 26

2.2.3 最適解とその信頼性 27

2.2.4 最小二乗近似 28

2.2.5 不偏推定量 28

2.2.6 くりこみ法 29

2.2.7 標準変位 30

2.2.8 実験 31

2.2.9 まとめ 31

3 3 次元幾何モデルの最適当てはめおよび最適補正とその信頼性評価 39
3.1 レンジデータへの平面の最適当てはめとその信頼性評価 39
3.1.1 はじめに 39
3.1.2 平面の当てはめ 40
3.1.3 最適解とその信頼性 41
3.1.4 レンジファインダの誤差モデル 41
3.1.5 最小二乗法 42
3.1.6 統計的偏差の除去 43
3.1.7 くりこみ法 44
3.1.8 平面の再構成とその信頼性 45
3.1.9 標準変位 45
3.1.10 シミュレーション 48
3.1.11 直線の当てはめ 48
3.1.12 まとめ 51
3.2 ステレオ視による 3 次元復元の信頼性評価 52
3.2.1 はじめに 52
3.2.2 ステレオの幾何学モデル 52
3.2.3 エピ極線方程式 53
3.2.4 誤差の統計的モデル 53
3.2.5 特徴点の最適補正 54
3.2.6 3 次元復元の信頼性 56
3.2.7 標準信頼領域と標準変位 57
3.2.8 実験 57
3.2.9 まとめ 60
3.3 ステレオ視による平面の最適当てはめとその信頼性評価 62
3.3.1 はじめに 62
3.3.2 ステレオとカメラモデル 62
3.3.3 平面の最適推定とその信頼性 63
3.3.4 くりこみ法 64
3.3.5 3 次元復元 67
3.3.6 標準変位 67
3.3.7 実験 67
3.3.8 まとめ 68

4 情報量基準による幾何モデルの判定 73
4.1 2 次元幾何モデルの判定 73
4.1.1 はじめに 73
4.1.2 幾何学的 AIC 74
4.1.3 直線当てはめの残差平方和 76

4.1.4 円当てはめの残差平方和 77
4.1.5 コニック当てはめの残差平方和 77
4.1.6 モデルの判定条件 78
4.1.7 実験 78
4.1.8 まとめ 80
4.2 ステレオ視における無限遠性および平面性の判定 83
4.2.1 はじめに 83
4.2.2 誤差の統計的モデル 83
4.2.3 ステレオ視の残差平方和 84
4.2.4 無限遠ステレオの残差平方和 85
4.2.5 平面のステレオ視の残差平方和 86
4.2.6 ステレオ視による無限遠性および平面性の判定 87
4.2.7 判定実験 88
4.2.8 まとめ 94

5 実際のシステムへの応用 97
5.1 幾何特徴の信頼性の利用 97
5.1.1 信頼性評価に基づく直線およびコニック検出法 97
5.1.2 3 次元幾何モデルの信頼性の応用 99
5.2 幾何学的 AIC の応用 99
5.2.1 輪郭線のセグメンテーション 99
5.3 まとめ 100

6 まとめ 103

謝辞 105

A 式の導出 113
A.1 式 (2.11) の導出 113
A.2 式 (2.13) の導出 114
A.3 式 (2.33) の導出 115
A.4 式 (2.72) の導出 116
A.5 式 (3.73) および (3.74) の導出 117
A.6 奥行き距離の導出 118
A.7 式 (3.79) の導出 119

B 従来の方法 120
B.1 従来の方法による 3 次元復元 120
B.2 従来の方法による平面の再構成法 120

第 1 章

序論

本章では，本研究の目的とその背景，本論文の構成，本論文で用いている記号について述べる．

1.1　研究の目的とその背景

人間は図 1.1のようなシーンを見たとき，ほぼ瞬時にして「机の上に本と花瓶が置いてある」と理解することができる．そして，その直後に「本を手に取って見る」という行動を起こすこともできる．これは「目」という画像入力センサからの 2 次元情報を，「脳」という情報処理機構が「本」「花瓶」「机」を認識すると同時に，それらの 3 次元環境を計測し，「手」という機械を制御して持ち上げた，と考えることができる．このような人間の視覚認識の機能を計算機上に実現しようとする研究は，**コンピュータビジョン**あるいは**ロボットビジョン**などと呼ばれ，人間の行なっていた作業をロボットに行なわせることができるだけでなく，人間の行動できない極限環境における作業や，あるいはマンマシンインターフェイスなどにも応用できるなど，その応用範囲が極めて広いことから，古くから研究が行なわれてきた．

コンピュータビジョンの初期には，多面体からなるシーンに代表されるような極めて限定された世界に対して「人間は，これらの世界をどのように処理しているか」を中心に据えた人工知能的な立場 [83] から研究が進められてきたが， 70 年代後半に Marr の提案した**計算論的視覚** (Computational Vision)[59] に代表されるような一層現実的な世界を対象とし，かつ計算機処理を中心に据えた研究が中心となった．また近年ではアクティブビジョン [2] やマルチエージェント，センサフュージョンといった新しい枠組も提案され研究されてきている．

このようにコンピュータビジョンにおける理論的な研究は徐々に進歩してきたにもかかわらず，実際に実用化されているものは未だ極めて限られた環境内における作業であり， 1960 〜 70 年代の初期の研究に基づくものがほとんどである．この理由として，多くの理論研究では，理想的な照明条件下において歪のないレンズを持ち，寸分の狂いもなく校正された理想的なカメラにより観測された理想的な物体の解析が主となっていることが挙げられる．しかし実際の環境においては，照明条件を理想的な状態に保つことは至難であり，歪のないレンズも存在せず，校正にも誤差があり，理想的な物体も存在しない．また画像を計算機で扱うためには標本化や量子化は避けることはできないだけでなく，逆にこれらに起因した誤差が混入してしまう．さらに，前処理などで使用している画像処理アルゴリズムの影響や数値計算の誤差も無視できない (図 1.2).

このように，コンピュータビジョン研究は実際の物理世界を対象としているため，理論的な扱いが可能で

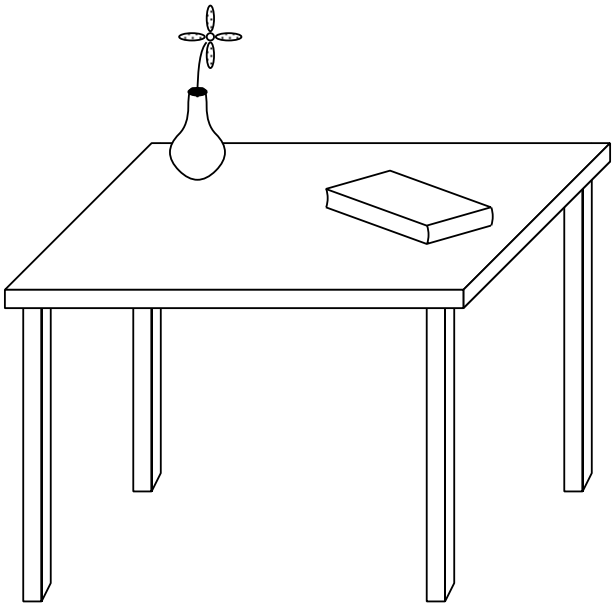


図 1.1: シーン

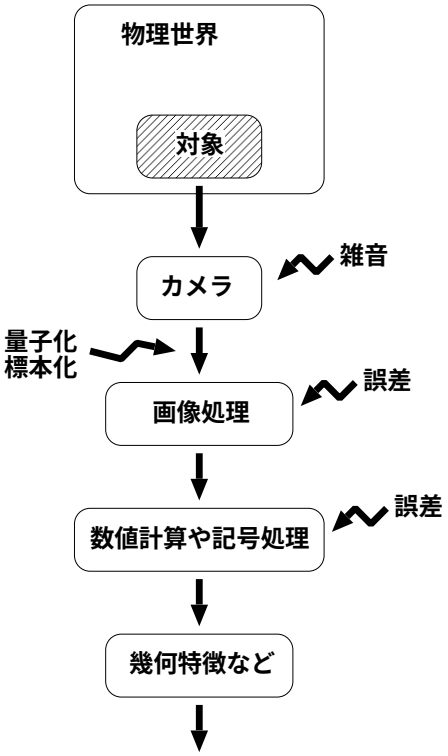


図 1.2: コンピュータビジョン研究の枠組

あるはずであるが，現実の対象やシステムとして理想的なものが存在せず，かつ雑音や誤差を無視できないことから，理論的な考察が必ずしも成功しない．しかし，混入する雑音や誤差を理論的な考察に組み込み，かつ対象となる物体の部分的な記述要素，例えば画像内の直線や円錐曲線 (コニック) に分割して考えれば，理論的な取り扱いが可能となるだけでなく，抽出した記述出要素に対する雑音や誤差の影響を定量的に評価することも可能となる．

このようなデータのあいまい性を扱うための最も自然な方法として，雑音や誤差の確率モデルを用いた統計学に基づく方法が考えられる．これは

- 確率・統計理論は実際的な数学として多くの工学分野にも適用されている．
- 確率モデルは測定のあいまい性を考慮するのに自然な方法の一つである．
- 確率モデルは理論的な考察に組み込みやすい．

などの利点があり，理論的に扱いやすい．しかし CCD カメラに代表されるように，コンピュータビジョンにおいて用いられるセンサは環境の幾何学的な情報を得るためのものであるため，実際の確率モデルも幾何学的な制約を持つ．したがって，一般の統計学で用いられる確率モデルと一致しないだけでなく，その正確な確率モデルを推定することは極めて難しい．しかし，どのような分布であっても，もし誤差が比較的小さく，かつサンプルが十分多ければ，大数の法則および中心極限定理により正規分布で近似できる．したがって画像の誤差の近似として正規分布を用いている研究も多い [60, 61, 86, 87].

そこで本研究では，画像の誤差に対する画像内の 2 次元幾何特徴への影響および画像から復元された 3 次元幾何特徴への影響の理論的な解析と評価を行なうことを目的とする．つまり， CCD カメラなどの画像入力センサから得られるデータは必ず誤差を含むとして，確率モデルに基づく誤差モデルを定義し，統計的な解析に基づく 2 次元および 3 次元幾何モデルの最適当てはめ法を提案する．ここでは，統計学的な立場と異なり，誤差は比較的小さくかつある程度制御可能であるものとする．そして，同時にその理論的な精度の限界も含めた定量的な信頼性を評価することを考える．なお本研究は，金谷によって導かれた「幾何学的な当てはめ問題の最適推定およびその最適補正に関する理論」 [32, 38, 39, 40] に基づいている．

1.2 幾何情報の信頼性評価について

画像から，その中に存在する正確な 2 次元的幾何情報や 3 次元的幾何情報を抽出することは，コンピュータビジョンにおいて極めて基本的かつ重要なプロセスである．画像内に存在する直線や曲線は 2 次元幾何情報であり， 1 台のカメラの画像から得ることができる．一方， 3 次元形状である平面や曲面を求めるには，一般に複数台のカメラの画像から三角測量の原理に基づく方法が多く用いられ，これは**ステレオ視**あるいは単に**ステレオ**と呼ばれている．

画像内の 2 次元幾何情報である直線や曲線を抽出することは，画像からの 3 次元の再構成にとって重要かつ不可欠なプロセスである．また検出した直線から「消失点」や「出現点」を計算することによって 3 次元形状を復元したり [23]，カメラのキャリブレーションを行なうことができる [42]．一方画像面に投影された曲線は，楕円や双曲線，放物線で近似できる場合が多く，これらは総称して「コニック (円錐曲線)」と呼ばれる．画像内のコニックが既知の形状を持つ円や楕円の投影像であることがわかっていれば，それらの 3 次元位置を計算することができる [41]．このように直線やコニックは，それ自体が重要な特徴であるだけでなく，3 次元を再構成する際に非常に重要な役割を持っている．したがって，直線当てはめやコニック当てはめに関する従来の研究は，いかに精度よく当てはめるかに力点が置かれてきた [5, 21, 58, 70, 72, 79, 88]．またコ

ニック当てはめに関しては，最小二乗法による手法では偏差を持つことが指摘されており [18, 29, 63]，この偏差を除去する手法についても研究されている [19, 63].

またステレオ視に関する従来の研究の多くは，画像間の対応する点の探索に関するものがほとんどであり，対応点が見つかった後は単純な方法により 3 次元点を復元しているに過ぎない場合が多い.

しかし画像に誤差が含まれている場合，その誤差は検出した直線やコニックに影響を与えるだけでなく，それらを使って求められた 3 次元形状にも影響を与える．したがって，当てはめた直線やコニックの定量的な信頼性を評価することは，3 次元形状の信頼性も定量的に評価することに繋がる．ステレオ視においても，復元点の信頼性を評価することができれば，その復元点から構成される 3 次元形状 (3 次元幾何情報) の信頼性を評価することも可能となる.

今，ロボットが観測した物体の手前 1[m] の指定された位置まで移動することを考える (図 1.3(a))．もし，現在位置における目標位置の検出誤差が ±10[cm] であれば，そのまま目標位置に移動しても物体にぶつかる心配はない．しかし検出誤差が ±1[m] であれば，そのまま移動すると物体にぶつかる可能性がでてくる．したがってそのような場合には，別の場所に移動し再度目標位置を測定し直すことが可能となる．このように自身の置かれている環境の信頼性を持ったマップを作成することができる [3].

また，もしロボットが自身の置かれている環境のモデルや位置が既知の物体のマップを持っており，認識した基準物体とモデル内の基準物体との対応をとることができれば，物体の位置の検出は，ロボット自身の位置の検出となる．つまり環境内における自分の位置の信頼性を評価することも可能となる (図 1.3(b))．これは既知の環境内におけるロボットのナビゲーションに利用することができる [60, 61, 80, 81, 87]．このように画像から得られる幾何情報の定量的な信頼性は，ロボットの木目細かな制御を可能とする.

1.3 本論文の構成について

まず第 2章では，まず画像の誤差の確率モデルを定義し，3 次元復元の基本となる画像内の直線当てはめおよび円錐曲線 (コニック) 当てはめについて，その最適な当てはめと信頼性の評価方法について述べると共に，その有効性をシミュレーション画像および実画像からの実験により示す.

第 3章では，3 次元幾何特徴の最適補正と最適当てはめについて，レンジファインダのデータから最適に平面を推定し，かつその信頼性を評価する方法，ステレオ視における対応点の最適な 3 次元復元とその信頼性の評価方法，ステレオ視における平面の最適な当てはめとその信頼性評価について述べ，それぞれその有効性をシミュレーション画像および実画像の実験により示す.

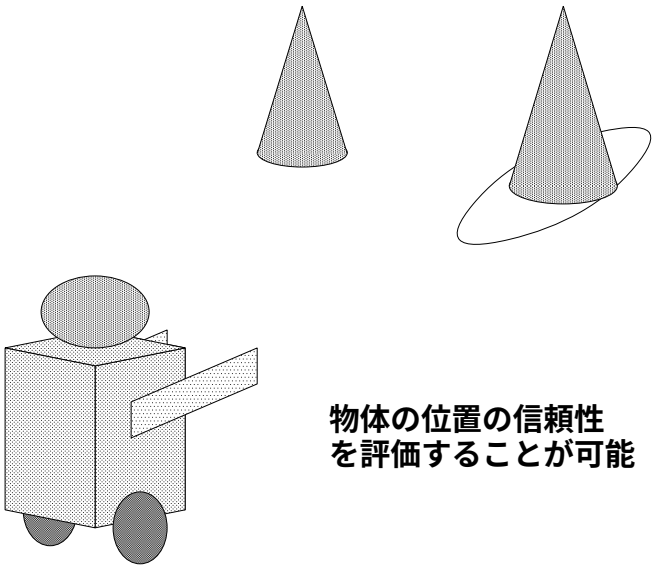
第 4章では，画像から抽出したエッジに対し当てはめるべきモデル (直線，コニック，円) の選択基準として幾何学的 AIC を用いた方法について述べ，またステレオ視において平面とみなせるかどうか，そのステレオ画像から 3 次元情報が取り出せるかどうかを AIC による基準を用いて判定する方法について述べる.

第 5章では，以上の考察を元に，実際の応用例についてその手順を結果と共に示す.

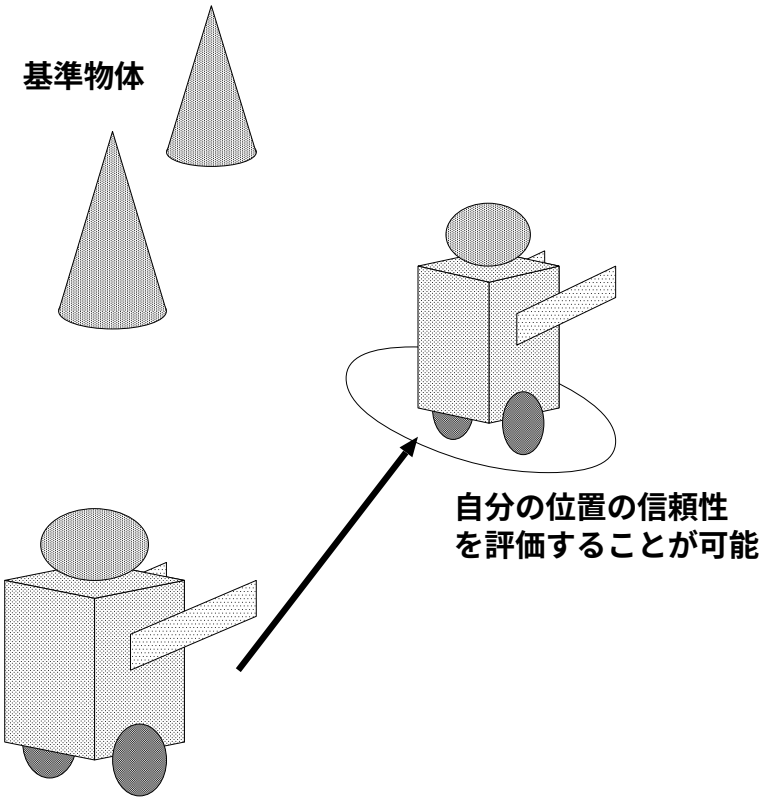
最後に，第 6章で本論文のまとめを述べる.

1.4 本論文で用いる記号について

表 1.1に本論文で使用する記号について示す.



(a)



(b)

図 1.3: 定量的な信頼性評価の必要性.

表 1.1: 本論文で用いている記号

記号	意味
x, y, ...	スカラー
$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, ...	ベクトル
$\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, ...	行列
$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, ...	テンソル
$\boldsymbol{A}^\top$, $\boldsymbol{a}^\top$	行列 (ベクトル) の転置
$\|\boldsymbol{a}\|$	ベクトル $\boldsymbol{a}$ のユークリッドノルム
$\|\boldsymbol{A}\|$	行列 $\boldsymbol{A}$ のフロベニウスノルム $\left(= \sqrt{\sum_{ij=1}^{3} A_{ij}^2}\right)$
$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$	ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積
$(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{B})$	3×3 行列 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ の内積 $(= \sum_{ij=1}^{3} A_{ij} B_{ij})$
$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$	ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ のベクトル積
$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{A}$	ベクトル $\boldsymbol{a}$ と行列 $\boldsymbol{A}$ の各列とのベクトル積を列とする行列
$\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$	行列 (ベクトル) のテンソル積
$\|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\|$	ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ のスカラ三重積
$(\,\cdot\,)^-$	(Moore-Penrose 型) 一般逆行列
$(\,\cdot\,)_r^-$	ランクを r に拘束した Moore-Penrose 型一般逆行列
	(スペクトル分解して，固有値を大きい方から r 個残した一般逆行列)
$N[\,\cdot\,]$	単位ベクトルへの正規化作用素
$E[\,\cdot\,]$	期待値
δ_{ij}	クロネッカのデルタ (i=j のとき 1，それ以外は 0 をとる)
ϵ_{ijk}	エディングトンのイプシロン ((ijk) が (123) の偶順列のとき 1，奇順列のとき 0 をとる)
$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{b})_{ij}$	$= \sum_{k,l,m,n=1}^{3} \epsilon_{ikl} \epsilon_{jmn} a_k b_m U_{ln}$
$[\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V}]_{ij}$	$= \sum_{k,l,m,n=1}^{3} \epsilon_{ikl} \epsilon_{jmn} U_{km} V_{ln}$

第 2 章

2 次元幾何モデルの最適当てはめとその信頼性評価

本章では，代表的な 2 次元幾何モデルである直線とコニックについて，その最適な当てはめ方法と信頼性評価の方法について述べる．

2.1　直線の最適当てはめとその信頼性評価

直線当てはめは，画像理解や画像からの 3 次元再構成において最も基本的かつ重要な問題の一つである．本節では，まず画像の誤差の統計的なモデルを導入し，統計的に最適に直線を当てはめる方法について述べる．また，その当てはめの信頼性を共分散行列の形で定量的に評価する手法，およびこの信頼性を視覚的に表示するための標準変位と呼ぶ概念について述べる．

2.1.1　はじめに

ロボットに効率よく作業させるための重要な問題の一つは 3 次元環境理解である．屋内のロボットの作業環境では床や天井や机など平面状のものが多く，それらの輪郭は通常直線状のエッジにより構成されている．したがって，画像内の直線を検出することは，画像理解や画像からの 3 次元の再構成にとって不可欠かつ重要なプロセスの一つである．また，検出した直線から「消失点」や「出現点」を計算することによって 3 次元形状を復元することもできる [23].

一般に，画像内の直線は Hough 変換 [9] やエッジ検出で得られた画素列に直線を当てはめることによって求められる．しかし，画像にはノイズが含まれており，エッジ検出などの画像処理には誤差が伴なう．したがって，最小二乗法のような最適化手法によって直線を最適に当てはめる必要がある [21, 58, 79, 88].

一方，当てはめた直線から消失点や出現点を計算して 3 次元解析を行なうことを目的とする場合は，単に最適に直線を当てはめただけでは不十分であり，その信頼性を定量的に評価することが必要である [7, 24]. なぜなら，ノイズや誤差によって消失点や出現点にも誤差が生じ，これが復元した 3 次元形状に誤差をもたらすからである．従来の処理ではこの誤差がどの程度であるかを定量的に評価するのが困難であった．

そこで本節では，金谷によって導かれた一般理論 [32, 40] を直線当てはめの問題に適用することを考える．つまり，画像の誤差の統計的なモデルを定義し，直線当てはめを**統計的推定問題**とみなし，**最尤推定**の意味で最適な解を得るための最適化手法として定式化する．そして，得られる最適解の**共分散行列**を理論的に導くことによって当てはめの信頼性を評価する．次に，最適化計算とその信頼性評価を系統的に行なう数値計算法を**くりこみ法**として定式化する．また，密な画素から成るエッジに当てはめた直線の信頼性を**漸近近似**

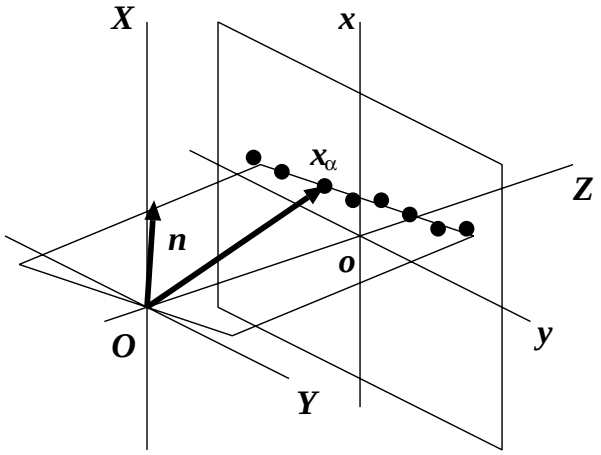


図 2.1: 直線の当てはめ.

により解析的な公式によって表わす．また，計算した信頼性を**標準変位**によって視覚的に表示する手法および，ノイズやオクルージョンにより分割されてしまったエッジに対し，統計的検定手法を用いた直線の同一性の判定方法を示す．最後に，シミュレーション画像や実画像による実験により，その有効性を示す.

2.1.2 直線当てはめ

検出した直線の画素列の座標を $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$, $\alpha = 1, ..., N$ とする．各画素の真の位置を $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$ とし，これらの点を通る直線の方程式を $Ax + By + C = 0$ とすると，次式が成り立つ.

$$A\bar{x}_\alpha + B\bar{y}_\alpha + C = 0, \qquad \alpha = 1, ..., N \tag{2.1}$$

点 (x_α, y_α) と直線の係数 A, B, C を次の 3 次元ベクトルで表わす.

$$\boldsymbol{x}_\alpha = \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

真の位置をベクトル $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha = (\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha, 1)^\top$ で表わすと，式 (2.1) は次のように表わせる.

$$(\boldsymbol{n}, \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha) = 0 \tag{2.3}$$

式 (2.2) のベクトル $\boldsymbol{x}_\alpha$, $\boldsymbol{n}$ は次のように解釈できる (図 2.1)． 3 次元空間に XYZ 座標系をとり， $Z = 1$ を**画像面**とみなす．そして $(0, 0, 1)$ を画像原点 o とし， X 軸， Y 軸に平行な座標軸を持つ xy 座標系をとる．すると $\boldsymbol{x}_\alpha$ は原点 O を始点とし画像面 $Z = 1$ の上の点 (x_α, y_α) を終点とするベクトルとなる．また $\boldsymbol{n}$ は画像面 $Z = 1$ の上の直線と原点 O とで定義される平面の単位法線ベクトルである.

図 2.1の関係はカメラの撮像のモデルに用いられる**透視変換**を表わし，ベクトル $\boldsymbol{x}_\alpha$, $\boldsymbol{n}$ の成分はそれぞれ画像面上の点と直線の**同次座標**に対応している． 3 次元空間の画像上への透視変換の関係を利用して画像から 3 次元復元を行なう場合は，この透視変換とその画像を撮影したカメラとを対応させるカメラキャリブレーションが必要となる [42]．しかし，直線当てはめの問題では，図 2.1の透視変換は計算の便宜のための仮想的なモデルであり，実際のカメラと対応している必要はない.

データ点列 $\{\boldsymbol{x}_\alpha\}$ から直線を当てはめる問題は，真の位置 $\{\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha\}, \alpha = 1, ..., N$ が

$$(\boldsymbol{n}, \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha) = 0, \qquad \alpha = 1, ..., N \tag{2.4}$$

を満たすような単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を，データ点列 $\{\boldsymbol{x}_\alpha\}$ から推定する統計的推定問題と解釈できる．ここで，ベクトル $\boldsymbol{n}$ にはスケールの不定性があるため，単位ベクトル ($\|\boldsymbol{n}\| = 1$) に正規化する．

2.1.3 最適解とその信頼性

データ $\boldsymbol{x}_\alpha$ を次のように分解する．

$$\boldsymbol{x}_\alpha = \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha + \Delta\boldsymbol{x}_\alpha \tag{2.5}$$

そして，誤差 $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ は期待値 $\boldsymbol{0}$，共分散行列

$$V[\boldsymbol{x}_\alpha] = E[\Delta\boldsymbol{x}_\alpha \Delta\boldsymbol{x}_\alpha^\top] \tag{2.6}$$

の独立な確率変数であると仮定する．ベクトル $\boldsymbol{x}_\alpha$，$\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$ の定義より $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ の第 3 成分は常に 0 であることから，共分散行列 $V[\boldsymbol{x}_\alpha]$ はランク 2 の特異行列となる．

観測データ $\boldsymbol{x}_\alpha$ は誤差を含むため，式 (2.3) を満たすとは限らない．そこで直線 $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}) = 0$ を仮定し，誤差を補正した $\boldsymbol{x}_\alpha - \Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ が式 (2.3) を満たすようにすることを考える．すなわち

$$(\boldsymbol{x}_\alpha - \Delta\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{n}) = 0 \tag{2.7}$$

となるように $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ を定める．このような $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ は無数に存在するが，その中で確率的に最も可能性の高いもの，言い変えれば尤度の最も高いものすなわち最尤推定量となる $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ を選ぶこととする．誤差の分布が正規分布であれば，これは次の**マハラノビス距離**の二乗の最小化として定式化される．

$$J_\alpha = (\Delta\boldsymbol{x}_\alpha, V[\boldsymbol{x}_\alpha]^- \Delta\boldsymbol{x}_\alpha) \to \min \tag{2.8}$$

このようにして選んだ $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ を式 (2.7) に代入した残差はベクトル $\boldsymbol{n}$ の関数であるから，これを $J_\alpha[\boldsymbol{n}]$ と書く．これは定数差を無視すれば，ベクトル $\boldsymbol{n}$ が真の値であると仮定したときの $\boldsymbol{x}_\alpha$ に含まれる誤差の対数尤度 (の符号を変えたもの) とみなせる．したがって，各点の誤差が独立であれば，$\boldsymbol{n}$ の最尤推定の意味での最適な推定値が次の最小化によって得られる．

$$\sum_{\alpha=1}^{N} J_\alpha[\boldsymbol{n}] \to \min \tag{2.9}$$

$\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ は小さいと仮定して，式 (2.7) を次のように書き換える．

$$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_\alpha) - (\boldsymbol{n}, \Delta\boldsymbol{x}_\alpha) = 0 \tag{2.10}$$

式 (2.10) を拘束条件として式 (2.8) を解くと，条件 $\|\boldsymbol{n}\| = 1$ のもとでの最尤推定の意味での最適解は，次式を最小化する $\boldsymbol{n}$ で与えられる (付録 A.1).

$$J[\boldsymbol{n}] = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_\alpha)^2}{(\boldsymbol{n}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{n})} \to \min \tag{2.11}$$

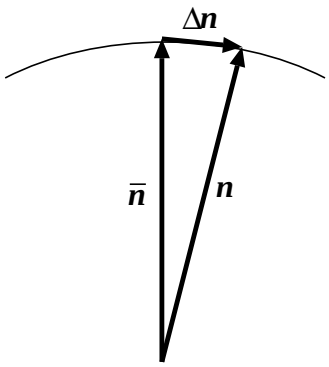


図 2.2: 当てはめた直線のベクトルとその誤差ベクトル

得られた最適解を $\hat{\boldsymbol{n}}$ と置き，次のように表わす．

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \bar{\boldsymbol{n}} + \Delta\boldsymbol{n} \tag{2.12}$$

ただし $\bar{\boldsymbol{n}}$ は $\boldsymbol{n}$ の真の値である．解の信頼性を表わす共分散行列 $V[\hat{\boldsymbol{n}}] = E[\Delta\boldsymbol{n}\Delta\boldsymbol{n}^\top]$ は次式で求めることができる (付録 A.2).

$$V[\hat{\boldsymbol{n}}] = \left(\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha^\top}{(\bar{\boldsymbol{n}}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\bar{\boldsymbol{n}})}\right)^- \tag{2.13}$$

この式 (2.13) は達成できる当てはめの精度の理論限界であることが金谷によって証明されている [32].

また当てはめの残差 $J[\hat{\boldsymbol{n}}]$ は次のように求まる．

$$\begin{aligned}
J[\bar{\boldsymbol{n}} + \Delta\boldsymbol{n}] &= \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\bar{\boldsymbol{n}} + \Delta\boldsymbol{n}, \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha + \Delta\boldsymbol{x}_\alpha)^2}{(\bar{\boldsymbol{n}} + \Delta\boldsymbol{n}, V[\boldsymbol{x}_\alpha](\bar{\boldsymbol{n}} + \Delta\boldsymbol{n}))} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{((\Delta\boldsymbol{n}, \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha) + (\bar{\boldsymbol{n}}, \Delta\boldsymbol{x}_\alpha))^2}{(\boldsymbol{n}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{n})} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\Delta\boldsymbol{n}, \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha)^2 + 2(\Delta\boldsymbol{n}, \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha)(\bar{\boldsymbol{n}}, \Delta\boldsymbol{x}_\alpha)) + (\bar{\boldsymbol{n}}, \Delta\boldsymbol{x}_\alpha)^2}{(\boldsymbol{n}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{n})} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\Delta\boldsymbol{n}, \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha)^2}{(\boldsymbol{n}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{n})} + 2\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\Delta\boldsymbol{n}, \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha)(\bar{\boldsymbol{n}}, \Delta\boldsymbol{x}_\alpha)}{(\boldsymbol{n}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{n})} + \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\bar{\boldsymbol{n}}, \Delta\boldsymbol{x}_\alpha)^2}{(\boldsymbol{n}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{n})} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\bar{\boldsymbol{n}}, \Delta\boldsymbol{x}_\alpha)^2}{(\boldsymbol{n}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{n})} + 2\left(\Delta\boldsymbol{n}, \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha \bar{\boldsymbol{n}}^\top}{(\boldsymbol{n}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{n})}\Delta\boldsymbol{x}_\alpha\right) \\
&\quad + \left(\Delta\boldsymbol{n}, \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha^\top}{(\boldsymbol{n}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{n})}\Delta\boldsymbol{n}\right) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\bar{\boldsymbol{n}}, \Delta\boldsymbol{x}_\alpha)^2}{(\boldsymbol{n}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{n})} - 2(\Delta\boldsymbol{n}, \boldsymbol{V}^-\Delta\boldsymbol{n}) + (\Delta\boldsymbol{n}, \boldsymbol{V}^-\Delta\boldsymbol{n}) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\bar{\boldsymbol{n}}, \Delta\boldsymbol{x}_\alpha)^2}{(\boldsymbol{n}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{n})} - (\Delta\boldsymbol{n}, \boldsymbol{V}^-\Delta\boldsymbol{n})
\end{aligned} \tag{2.14}$$

ただし式 (A.16) および (A.17)(付録 A.2) を用いた．ここで，$\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ は正規分布に従うことから式 (2.14) の第 1 項は自由度 N の χ^2 分布に従い，$\boldsymbol{V}^-$ のランクが 2 であることからコクランの定理により第 2 項は自由度 2 の χ^2 分布に従う．したがって式 (2.14) は自由度 $N-2$ の χ^2 分布に従うことがわかる．

ここで，もし画像の誤差が各座標成分ごとに独立で平均0，分散 σ^2 の正規分布に従えば，各データ $\boldsymbol{x}_\alpha$ の共分散行列は次のように書ける．

$$V[\boldsymbol{x}_\alpha] = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} = \sigma^2 \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{k}} \tag{2.15}$$

ここで，$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{k}\boldsymbol{k}^\top$, $\boldsymbol{k} = (0,0,1)^\top$，$\boldsymbol{I}$ は単位行列とする．したがって，式(2.11)の最適化は次の**最小二乗法**と等価である．

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_\alpha)^2}{1-(\boldsymbol{k},\boldsymbol{n})^2} = \sum_{\alpha=1}^{N} D(p_\alpha, l)^2 \to \min \tag{2.16}$$

ここに $D(p_\alpha, l)$ は点 p_α と当てはめるべき直線 l との距離である．式(2.13)の共分散行列 $V[\hat{\boldsymbol{n}}]$ は次のようになる．

$$V[\hat{\boldsymbol{n}}] = \frac{\sigma^2}{1+d^2} \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^N \bar{x}_\alpha^2 & \sum_{\alpha=1}^N \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & \sum_{\alpha=1}^N \bar{x}_\alpha \\ \sum_{\alpha=1}^N \bar{y}_\alpha \bar{x}_\alpha & \sum_{\alpha=1}^N \bar{y}_\alpha^2 & \sum_{\alpha=1}^N \bar{y}_\alpha \\ \sum_{\alpha=1}^N \bar{x}_\alpha & \sum_{\alpha=1}^N \bar{y}_\alpha & N \end{pmatrix}^- \tag{2.17}$$

ただし d は画像原点 O から直線 $Ax+By+C=0$ までの距離である．

この場合，解は解析的に解くことができる．当てはめるべき直線 l を

$$x\cos\theta + y\sin\theta = d \tag{2.18}$$

と表わせば，式 (2.16) の最小化は次のように書き直せる．

$$J[\theta, d] = \sum_{\alpha=1}^{N} (x_\alpha \cos\theta + y_\alpha \sin\theta - d)^2 \to \min \tag{2.19}$$

これを d で微分して 0 とおけば，d は次式で与えられる．

$$d = \bar{x}\cos\theta + \bar{y}\sin\theta \tag{2.20}$$

ただし，$\bar{x}$ および $\bar{y}$ はそれぞれ次式で定義される．

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} x_\alpha, \qquad \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} y_\alpha \tag{2.21}$$

式 (2.20) および (2.21) を式 (2.19) に代入すれば

$$J[\theta] = \sum_{\alpha=1}^{N} ((x_\alpha - \bar{x})\cos\theta + (y_\alpha - \bar{y})\sin\theta)^2 \tag{2.22}$$

となり，$\vec{n} = (\cos\theta, \sin\theta)^\top$ とおけば上の最小化は次のように書き直すことができる．

$$J[\vec{n}] = (\vec{n}, \boldsymbol{M}_0 \vec{n}) \tag{2.23}$$

ただし

$$\boldsymbol{M}_0 = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^N (x_\alpha - \bar{x})^2 & \sum_{\alpha=1}^N (x_\alpha - \bar{x})(y_\alpha - \bar{y}) \\ \sum_{\alpha=1}^N (y_\alpha - \bar{y})(x_\alpha - \bar{x}) & \sum_{\alpha=1}^N (y_\alpha - \bar{y})^2 \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

とおいた．$\vec{n}$ は単位ベクトル $(\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1)$ であるから，$J[\vec{n}]$ を最小にするベクトル $\vec{n}$ は，行列 $\boldsymbol{M}_0$ の最小固有値に対する単位固有ベクトルで与えられる．また式 (2.20) および (2.21) より，最適に当てはめた直線は重心 $(\bar{x}, \bar{y})$ を通ることがわかる．

このように，画像の誤差が一様等方性であれば，最適解は解析的に求めることができる．しかしこのような解法では解の信頼性を評価することが難しい．そこで，このような直接解法ではなく，**くりこみ法**と呼ぶ間接的な解法により解を求め，同時に信頼性の評価を行なうこととする．

2.1.4 最小二乗近似

一般に，誤差の絶対的な大きさを推定するのは困難であるが，使用した撮像デバイスや処理アルゴリズムの特性などから誤差の定性的な特徴 (例えば等方性や一様性など) を推定することは比較的容易である．そこで共分散行列が**定数倍を除いて**既知であると仮定する．そのために $\boldsymbol{x}_\alpha$ の共分散行列 $V[\boldsymbol{x}_\alpha]$ を次のように表わす．

$$V[\boldsymbol{x}_\alpha] = \epsilon^2 V_0[\boldsymbol{x}_\alpha] \tag{2.25}$$

ϵ は誤差の大きさを表わす未知の定数であり，$V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]$ は既知とする．ϵ を**ノイズレベル**，$V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]$ を**正規化共分散行列**と呼ぶ．

関数 $J[\boldsymbol{n}]$ を定数倍しても式 (2.11) の最小化の解は同じであるから，次のように書く．

$$\tilde{J}[\boldsymbol{n}] = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{M}\boldsymbol{n}) \to \min \tag{2.26}$$

ただし，$\boldsymbol{M}$ は次のように定義する**モーメント行列**である．

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^N W_\alpha \boldsymbol{x}_\alpha \boldsymbol{x}_\alpha^\top \tag{2.27}$$

$$W_\alpha = \frac{1}{(\boldsymbol{n}, V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{n})} \tag{2.28}$$

式 (2.28) の分母の $\boldsymbol{n}$ を適当な推定値で置き換えれば，式 (2.26) の最小化の解はモーメント行列 $\boldsymbol{M}$ の最小固有値に対する単位固有ベクトルで与えられる．これを**最小二乗近似**と呼ぶ．

2.1.5 不偏推定量

式 (2.26) の最小化を解くには，まず $\boldsymbol{n}$ の適当な初期値 $\boldsymbol{n}_0$ を仮定し，$W_\alpha = W_\alpha(\boldsymbol{n}_0)$ として最小二乗近似によって得られる解を $\boldsymbol{n}_1$ とし，次に $W_\alpha = W_\alpha(\boldsymbol{n}_1)$ として得られる解を $\boldsymbol{n}_2$ とし，以下これを繰り返すことが考えられる．しかし，このような反復では，真の重みを用いたとしても統計的な偏差を生じる．これは次のように示される．

モーメント行列 $\boldsymbol{M}$ の期待値は次のように書ける．

$$\begin{aligned} E[\boldsymbol{M}] &= \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^N W_\alpha E[(\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha + \Delta\boldsymbol{x}_\alpha)(\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha + \Delta\boldsymbol{x}_\alpha)^\top] \\ &= \bar{\boldsymbol{M}} + \frac{\epsilon^2}{N}\sum_{\alpha=1}^N W_\alpha V_0[\boldsymbol{x}_\alpha] \end{aligned} \tag{2.29}$$

ただし $\bar{\boldsymbol{M}}$ は式 (2.27) の $\boldsymbol{x}_\alpha$ を真の値 $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$ で置き換えて得られる行列である．式 (2.29) は，モーメント行列 $\boldsymbol{M}$ が真の値から $O(\epsilon^2)$ だけ摂動することを示している．このとき**摂動定理** [23, 31] により，その固有値，固有ベクトルも $O(\epsilon^2)$ の摂動を受ける．したがって最小二乗近似で得られる解も $O(\epsilon^2)$ の摂動を受け，その期待値は 0 でない．

そこで，**不偏モーメント行列** $\hat{\boldsymbol{M}}$ を次のように定義する．

$$\hat{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} - \epsilon^2 \boldsymbol{N} \tag{2.30}$$

ただし行列 $\boldsymbol{N}$ は次のように定義する．

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha V_0[\boldsymbol{x}_\alpha] \tag{2.31}$$

式 (2.29) より $E[\hat{\boldsymbol{M}}] = \bar{\boldsymbol{M}}$ となり，$\boldsymbol{n}$ の不偏推定量は次の最小化の解として得られる．

$$\hat{J}[\boldsymbol{n}] = (\boldsymbol{n}, \hat{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{n}) \to \min \tag{2.32}$$

したがって，不偏モーメント行列 $\hat{\boldsymbol{M}}$ の最小固有値に対する単位固有ベクトルが $\boldsymbol{n}$ の不偏推定量となる．この不偏推定量 $\hat{\boldsymbol{n}}$ の信頼性は第 1 近似により次式で与えられる (付録 A.3).

$$V[\hat{\boldsymbol{n}}] = \frac{\epsilon^2}{N} \left(\frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha^\top \right)^- \tag{2.33}$$

したがって，不偏モーメント行列 $\hat{\boldsymbol{M}}$ から求めた不偏推定量 $\hat{\boldsymbol{n}}$ の共分散行列 $V[\hat{\boldsymbol{n}}]$ は，第 1 近似において当てはめ精度の理論限界 (式 (2.13)) と一致していることがわかる．

2.1.6 くりこみ法

式 (2.30) によって不偏モーメント行列を計算するためには，ノイズレベル ϵ の値を知る必要がある．これを小さく見積れば偏差が打ち消せず，また大きく見積もると逆方向に偏差を生じてしまう．しかし，先に述べたように，ϵ の値を正確に知るのは困難である．しかし ϵ^2 を $E[\hat{\boldsymbol{M}}] = \bar{\boldsymbol{M}}$ となるように推定すれば偏差は生じない．真のモーメント行列 $\bar{\boldsymbol{M}}$ は最小固有値 0 の半正値対称行列であることから，$E[\hat{\boldsymbol{M}}]$ ではなく $\hat{\boldsymbol{M}}$ の最小固有値が 0 となるように ϵ^2 を推定することを考える．つまり $\hat{\boldsymbol{M}}$ の最小固有値を 0 とし，対応する単位固有ベクトルを $\hat{\boldsymbol{n}}$ とすると次の関係が成り立つ．

$$\hat{\boldsymbol{M}}\hat{\boldsymbol{n}} = (\boldsymbol{M} - \epsilon^2 \boldsymbol{N})\hat{\boldsymbol{n}} = 0 \tag{2.34}$$

これは次のように書き直せる．

$$\boldsymbol{M}\hat{\boldsymbol{n}} = \epsilon^2 \boldsymbol{N}\hat{\boldsymbol{n}} \tag{2.35}$$

つまり，ϵ^2 はモーメント行列 $\boldsymbol{M}$ の $\boldsymbol{N}$ に関する一般固有値であり，$\hat{\boldsymbol{n}}$ は対応する一般固有ベクトルとなることがわかる．もし $\boldsymbol{N}$ が正値対称行列であれば，スペクトル分解 [40] を用いて通常の固有値問題に直すことができる．しかし $\boldsymbol{N}$ は正則ではないため，ここでは反復により解くことを考える．行列 $\boldsymbol{M}$ の最小固有値を λ，対応する単位固有ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とするとき，行列 $\boldsymbol{M}'$ を

$$\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{M} - \frac{\lambda}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{N}\boldsymbol{n})} \boldsymbol{N} \tag{2.36}$$

と置き，その最小固有値を λ' とすると，摂動定理により

$$\lambda' = \lambda + (\boldsymbol{n}, \left(-\frac{\lambda}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{N}\boldsymbol{n})}\boldsymbol{N}\right)\boldsymbol{n}) + O(\lambda^2) = O(\lambda^2) \tag{2.37}$$

となる．つまり λ' は第 1 近似において 0 であり，これを反復すると急速に 0 に収束する．また同時に重み W_α の更新を組合せることを考える．このような手順を**くりこみ法**と呼ぶ．実際のくりこみ法の手順は次のように表わせる [26, 31].

1. $c = 0$, $W_\alpha = 1$, $\alpha = 1, ..., N$ とおく．
2. 式 (2.30) と (2.31) によって，行列 $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ を計算する．
3. 不偏モーメント行列
$$\hat{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} - c\boldsymbol{N} \tag{2.38}$$
を計算し，その最小固有値 λ と対応する単位固有ベクトル $\boldsymbol{n}$ を計算する．
4. $\lambda \approx 0$ であれば $\boldsymbol{n}$, c, $\boldsymbol{M}$ を返す．そうでなければ c と W_α を次のように更新する．
$$c \leftarrow c + \frac{\lambda}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{N}\boldsymbol{n})} \tag{2.39}$$
$$W_\alpha \leftarrow \frac{1}{(\boldsymbol{n}, V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{n})} \tag{2.40}$$
5. ステップ 2 に戻る．

返されたベクトル $\boldsymbol{n}$ を $\hat{\boldsymbol{n}}$ と書く．式 (2.32) は正規化共分散行列を用いているため，その残差を $\hat{J}[\hat{\boldsymbol{n}}]$ とすると，実際の当てはめの残差は $N\hat{J}[\hat{\boldsymbol{n}}]/\epsilon^2$ となる．式 (2.14) より，その残差は近似的に自由度 $N-2$ の χ^2 分布に従う確率変数となる [40] ことから，くりこみ法で返された c の値を用いて二乗ノイズレベル ϵ^2 の不偏推定量が次のように得られる [31].

$$\hat{\epsilon}^2 = \frac{c}{1 - 2/N} \tag{2.41}$$

式 (2.13) の共分散行列は，返された不偏モーメント行列 $\hat{\boldsymbol{M}}$ を用いて次のように近似することができる．

$$V[\hat{\boldsymbol{n}}] = \frac{\hat{\epsilon}^2}{N}\left(\hat{\boldsymbol{M}}\right)_2^- \tag{2.42}$$

くりこみ法が完全に収束していれば $\hat{\boldsymbol{M}}$ の最小固有値が厳密に 0 であり，$\hat{\boldsymbol{M}}$ のランクは 2 となるが，数値計算などの誤差のために最小固有値が 0 にならない可能性がある．式 (2.42) でランクを 2 に強制しているのはこれを防ぐためである [40].

2.1.7 標準変位

この信頼性を直観的にわかりやすいように変換することを考える．ここでは統計学における主成分分析の考え方を導入する．

図 2.2に示したように，$\hat{\boldsymbol{n}}$ は単位ベクトルであるから，その誤差は $\hat{\boldsymbol{n}}$ の方向には発生せず，それと直交する面上に分布する．そこで共分散行列 $V[\hat{\boldsymbol{n}}]$ を次のようにスペクトル分解する．

$$V[\hat{\boldsymbol{n}}] = \lambda_1 \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\top + \lambda_2 \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^\top, \qquad \lambda_1 \geq \lambda_2 > 0 \tag{2.43}$$

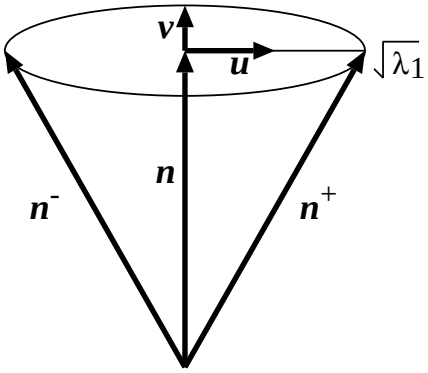


図 2.3: 標準変位と標準信頼領域

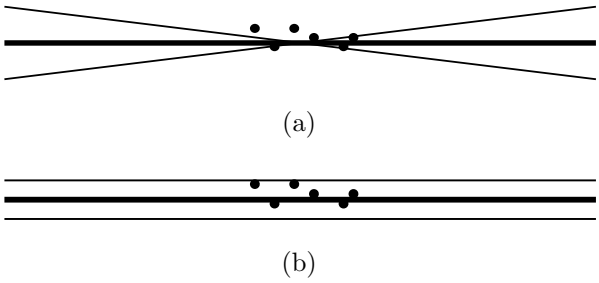


図 2.4: 誤差の発生しやすい方向

ここに λ_1，λ_2 は $V[\hat{\boldsymbol{n}}]$ の固有値であり，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ は対応する単位固有ベクトルである．つまり共分散行列は $V[\hat{\boldsymbol{n}}]$ は，$\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ を主軸とし $\sqrt{\lambda_1}$ および $\sqrt{\lambda_2}$ をそれぞれ半径とする楕円を表わしていることがわかる (図 2.3)．つまりベクトル $\boldsymbol{u}$ は誤差の最も発生しやすい方向を示し，λ_1 はその方向の分散を表わす．これらをわかりやすく当てはめた直線上に重ねると図 2.4のようになる．等方性の誤差を考えた場合，誤差の最も発生しやすい方向は図 2.4(a) に示すような点列の中心の周りの「回転」となることは容易に推測できる．また次に発生しやすい方向とは同図 (b) に示すような直線全体の平行移動であるが，等方性の場合ほとんど生じないことも容易に推測できる． そこで λ_1 と $\boldsymbol{u}$ を用いて，$\hat{\boldsymbol{n}}$ の信頼性を次の二つのベクトルで表わすことを考える．

$$\boldsymbol{n}^+ = N[\hat{\boldsymbol{n}} + \sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{u}] \tag{2.44}$$

$$\boldsymbol{n}^- = N[\hat{\boldsymbol{n}} - \sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{u}] \tag{2.45}$$

もし $\hat{\boldsymbol{n}}$ を正規分布に従う確率変数とみなせば，真のベクトル $\bar{\boldsymbol{n}}$ がこの二つのベクトル $\boldsymbol{n}^+$, $\boldsymbol{n}^-$ の間にある確率が約 68.3% であると考えることができる．これらのベクトルの表わす直線を**標準変位**と呼ぶ [47, 49, 52]．またこの楕円内の領域を**標準信頼領域**と呼び，$\hat{\boldsymbol{n}}$ が正規分布であるとみなせば，真のベクトル $\bar{\boldsymbol{n}}$ がこの領域内に入る確率が約 39.4% であると考えることができる．したがって，この標準変位や標準信頼領域は信頼性を表わす一つの目安となり，これらを図示することにより当てはめの信頼性が視覚的に確認できる．

2.1.8 エッジ漸近近似

以上述べたように，当てはめた直線の信頼性はくりこみ法の計算の過程から自動的に評価できる．しかし，画像のノイズが等方かつ一様であり，またエッジを構成する画素が十分が密であれば，その信頼性をあらかじめ計算することもできる．

画素数を N(奇数) とし，その両端点 (x_1, y_1) と (x_N, y_N) の間の距離を w とする．また中点 $\boldsymbol{x}_C$ を次のように定義する．

$$\boldsymbol{x}_C = \begin{pmatrix} \bar{x}_{(1+N)/2} \\ \bar{y}_{(1+N)/2} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

直線 $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}) = 0$ の方向を表わす単位ベクトルを $\boldsymbol{u}$ とすると，真の位置 $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$, $\alpha = 1, ..., N$ がほぼ等間隔であれば，次の関係が成り立つ．

$$\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha \approx \boldsymbol{x}_C + \frac{w}{N-1}\left(\alpha - \frac{N+1}{2}\right)\boldsymbol{u} \tag{2.47}$$

上式より，式 (2.17) は次のように近似できる．

$$V[\hat{\boldsymbol{n}}] \approx \frac{\epsilon^2}{N(1+d^2)}\left(\boldsymbol{x}_C\boldsymbol{x}_C^\top + \frac{w^2(N+1)}{12(N-1)}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\top\right)^- \tag{2.48}$$

エッジ密度 (単位長さ当りのエッジ画素数) を次のように定義する．

$$\rho = \frac{N}{w} \tag{2.49}$$

エッジが画像原点に近ければ $\|\boldsymbol{x}_C\| \approx 1$, $(\boldsymbol{x}_C, \boldsymbol{u}) \approx 0$ とみなせるから， $N \to \infty$ のとき式 (2.48) は次のように近似できる．

$$V[\hat{\boldsymbol{n}}] \approx \frac{12\epsilon^2}{\rho w^3(1+d^2)}\left(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\top + \frac{12}{w^2}\boldsymbol{x}_C\boldsymbol{x}_C^\top\right)^- \tag{2.50}$$

長さの単位を画像の大きさに比べ十分大きくとれば，画像の原点から直線までの距離 d は小さくなる．エッジの長さ w は通常は画像の大きさに比べ十分小さいから， $1 \ll 12/w^2$ である．したがって，式 (2.50) は次のように近似できる．

$$V[\hat{\boldsymbol{n}}] \approx \frac{12\epsilon^2}{\rho w^3}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\top \tag{2.51}$$

これから，標準変位が次のように近似できる．

$$\boldsymbol{n}^+ \approx N[\hat{\boldsymbol{n}} + \frac{2\sqrt{3}\epsilon}{\rho^{1/2}w^{3/2}}\boldsymbol{u}] \tag{2.52}$$

$$\boldsymbol{n}^- \approx N[\hat{\boldsymbol{n}} - \frac{2\sqrt{3}\epsilon}{\rho^{1/2}w^{3/2}}\boldsymbol{u}] \tag{2.53}$$

上式は，当てはめた直線がほぼそのエッジの中点を通ることを示しており，前節の実験結果をよく説明している．また誤差は $\rho^{-1/2}$ と $w^{-3/2}$ に近似的に比例することがわかる．したがって，当然ながらエッジ密度が大きければ，またエッジが長ければ誤差は小さくなる．式 (2.51) は，エッジに当てはめた直線から消失点を計算して， 3 次元形状を復元したりカメラキャリブレーションを行なったりするときの信頼性評価の基本となる式である [7, 24, 42].

2.1.9 信頼性に基づく直線の同一性の判定

ノイズなどの影響により本来 1 本の連続したエッジが複数のエッジに分割された場合を考える．これは実際のシーンからエッジ検出などの画像処理を行なって得られたエッジ画像には比較的多く発生する．また実際のシーンでは他の物体がエッジを隠してしまうことによりエッジが分割されることも多い．したがって実際に画像から直線を検出する際には，分割された直線を何らかの基準により同一直線かどうかの判定を行なう必要がある．従来このような複数の直線の同一性の判定は何らかの閾値で決定する場合が多い．この閾値は画像によって異なる場合が多く，対象となる画像から経験的に求めなければならない．このような経験から求めた閾値には当然汎用性がないことがわかる．そこで，共分散行列を用いた統計的な検定に基づく判定方法を考える．

2 本の直線 $(\hat{\boldsymbol{n}}_1, \boldsymbol{x}) = 0$, $(\hat{\boldsymbol{n}}_2, \boldsymbol{x}) = 0$ とそれらの共分散行列 $V[\hat{\boldsymbol{n}}_1]$, $V[\hat{\boldsymbol{n}}_2]$ が得られたとする．これらが同一直線である場合，真の直線をそれぞれ $(\bar{\boldsymbol{n}}_1, \boldsymbol{x}) = 0$, $(\bar{\boldsymbol{n}}_2, \boldsymbol{x}) = 0$ とすると

$$\bar{\boldsymbol{n}}_1 = \bar{\boldsymbol{n}}_2 \tag{2.54}$$

が成り立つはずである． $\hat{\boldsymbol{n}}_1 = \bar{\boldsymbol{n}}_1 + \Delta\boldsymbol{n}_1$, $\hat{\boldsymbol{n}}_2 = \bar{\boldsymbol{n}}_2 + \Delta\boldsymbol{n}_2$ とおき，もし 2 本の直線が統計的に独立であれば，式 (2.54) を満足するような $\Delta\boldsymbol{n}_1$, $\Delta\boldsymbol{n}_2$ は第 1 近似において次式を満たす解として与えられる [40].

$$J = (\Delta\boldsymbol{n}_1, V[\hat{\boldsymbol{n}}_1]^{-}\Delta\boldsymbol{n}_1) + (\Delta\boldsymbol{n}_2, V[\hat{\boldsymbol{n}}_2]^{-}\Delta\boldsymbol{n}_2) \to \min \tag{2.55}$$

ただし制約条件として，

$$\Delta\boldsymbol{n}_2 - \Delta\boldsymbol{n}_1 = \hat{\boldsymbol{n}}_2 - \hat{\boldsymbol{n}}_1 \tag{2.56}$$

$$\Delta\boldsymbol{n}_1 \in \{\bar{\boldsymbol{n}}_1\}_L^{\perp}, \qquad \Delta\boldsymbol{n}_2 \in \{\bar{\boldsymbol{n}}_2\}_L^{\perp} \tag{2.57}$$

を用いた．ここで $\{\bar{\boldsymbol{n}}_1\}_L^{\perp}$, $\{\bar{\boldsymbol{n}}_2\}_L^{\perp}$ はそれぞれベクトル $\bar{\boldsymbol{n}}_1$, $\bar{\boldsymbol{n}}_2$ と直交する線形部分空間を表わす．

この解を求め，式 (2.55) に代入すると，その当てはめの残差は次のように求まる [40].

$$\hat{J} = (\hat{\boldsymbol{n}}_2 - \hat{\boldsymbol{n}}_1, \hat{\boldsymbol{W}}(\hat{\boldsymbol{n}}_2 - \hat{\boldsymbol{n}}_1)) \tag{2.58}$$

ただし

$$\hat{\boldsymbol{W}} = (V[\hat{\boldsymbol{n}}_1] + V[\hat{\boldsymbol{n}}_2])_2^{-} \tag{2.59}$$

である．この残差 $\hat{J}$ は自由度 2 の χ^2 分布に従う確率変数であることから，直線 $(\hat{\boldsymbol{n}}_1, \boldsymbol{x}) = 0$ と $(\hat{\boldsymbol{n}}_2, \boldsymbol{x}) = 0$ が同一直線であるとする仮説は有意水準 $a\%$ のもとで

$$\hat{J} > \chi^2_{2,a} \tag{2.60}$$

のとき棄却される．また新たに推定された直線 $\hat{\boldsymbol{n}}$ とその共分散行列 $V[\hat{\boldsymbol{n}}]$ は次式で与えられる [40].

$$\hat{\boldsymbol{n}} = N[\hat{\boldsymbol{n}}_1 - V[\hat{\boldsymbol{n}}_1]\hat{\boldsymbol{W}}(\hat{\boldsymbol{n}}_1 - \hat{\boldsymbol{n}}_2)] = N[\hat{\boldsymbol{n}}_2 - V[\hat{\boldsymbol{n}}_2]\hat{\boldsymbol{W}}(\hat{\boldsymbol{n}}_2 - \hat{\boldsymbol{n}}_1)] \tag{2.61}$$

$$\begin{aligned} V[\hat{\boldsymbol{n}}] &= \hat{V}[\hat{\boldsymbol{n}}_1] - \hat{V}[\hat{\boldsymbol{n}}_1]\hat{\boldsymbol{W}}\hat{V}[\hat{\boldsymbol{n}}_1] = \hat{V}[\hat{\boldsymbol{n}}_1]\hat{\boldsymbol{W}}\hat{V}[\hat{\boldsymbol{n}}_2] \\ &= \hat{V}[\hat{\boldsymbol{n}}_2] - \hat{V}[\hat{\boldsymbol{n}}_2]\hat{\boldsymbol{W}}\hat{V}[\hat{\boldsymbol{n}}_2] \end{aligned} \tag{2.62}$$

ただし

$$\hat{V}[\hat{\boldsymbol{n}}_1] = \boldsymbol{P}_{\hat{\boldsymbol{n}}} V[\hat{\boldsymbol{n}}_1] \boldsymbol{P}_{\hat{\boldsymbol{n}}} \tag{2.63}$$

$$\hat{V}[\hat{\boldsymbol{n}}_2] = \boldsymbol{P}_{\hat{\boldsymbol{n}}} V[\hat{\boldsymbol{n}}_2] \boldsymbol{P}_{\hat{\boldsymbol{n}}} \tag{2.64}$$

$$\boldsymbol{P}_{\hat{\boldsymbol{n}}} = \boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{n}}^\top \tag{2.65}$$

である．

2.1.10 実験

(1) シミュレーション

両端点間の長さが 40 画素の 8 点から成る点列に対し，それぞれ xy 独立に標準偏差 0.5, 1.0, 3.0 の正規乱数を誤差として加えたときの，データ点列，本手法による当てはめ結果とその標準変位，最小二乗法との比較をそれぞれ図 2.5〜 2.7に示す．これらを見るとわかるように，誤差が大きくなればなるほど標準変位が広がり，その当てはめの信頼性が低くなることがわかる．また 2.1.7で述べたように，誤差は主として点列の中心の周りの回転として生じていることもわかる．

また，本実験では等方性の誤差を加えているため最小二乗法と等価であり，当てはめ結果がほとんど一致していることもわかる．

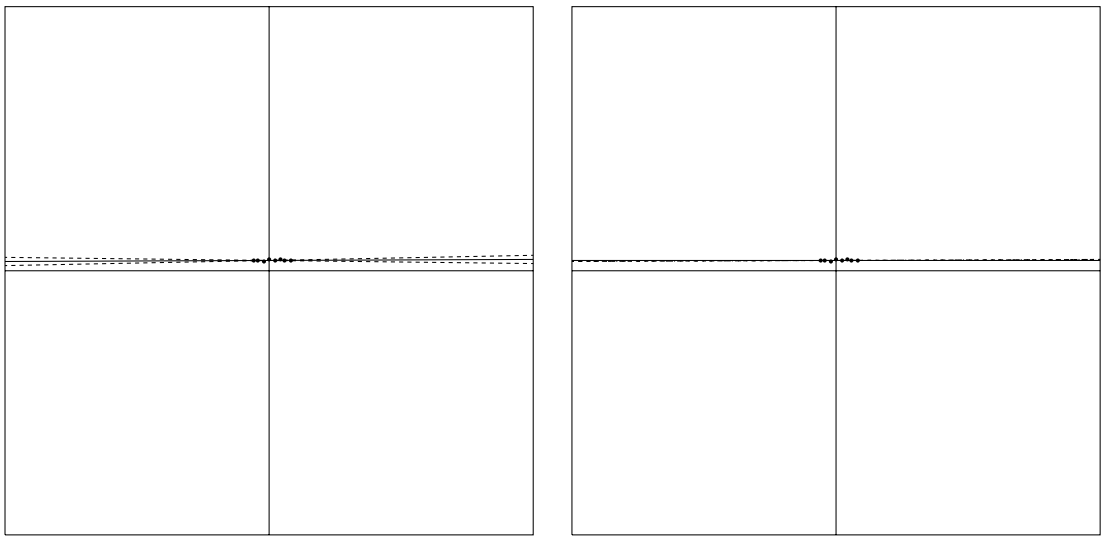
図 2.8に，両端点の長さ 40 画素の構成画素密度の異なるエッジ (5 点， 10 点， 20 点， 40 点) からなる点列に対し，同じ標準偏差 3 画素の正規乱数を誤差として加えたときの，本手法による当てはめ結果とその標準変位を示す．これより，エッジを構成する画素の密度が高ければ高いほど信頼性が高いことがわかる．

真の直線を $(\bar{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{x}) = 0$，当てはめた直線を $(\hat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{x}) = 0$ とする．ベクトル $\hat{\boldsymbol{n}}$ の $\bar{\boldsymbol{n}}$ からのずれは第 1 近似において $\bar{\boldsymbol{n}}$ に直交する．そこで $\hat{\boldsymbol{n}}$ を $\bar{\boldsymbol{n}}$ に直交する平面上へ射影する．図 2.9(a) は 100 回シミュレーションを行なったときの誤差の分布を示す．これからわかるように，誤差の分布はほぼ 1 次元的である．これは点列の中心の周りの回転の自由度に対応している．図 2.9(a) の上下方向は当てはめた直線の平行移動の自由度に対応しているが，これはほぼ 0 である．図 2.9(b) の楕円は，式 (2.13) の共分散行列から定まる各方向の標準偏差を表わすものであるが，ほぼ線分に縮退している．図 2.9(a) と比較すると，誤差の分布が理論的な下限をほぼ達成していることがわかる．

(2) 実画像実験

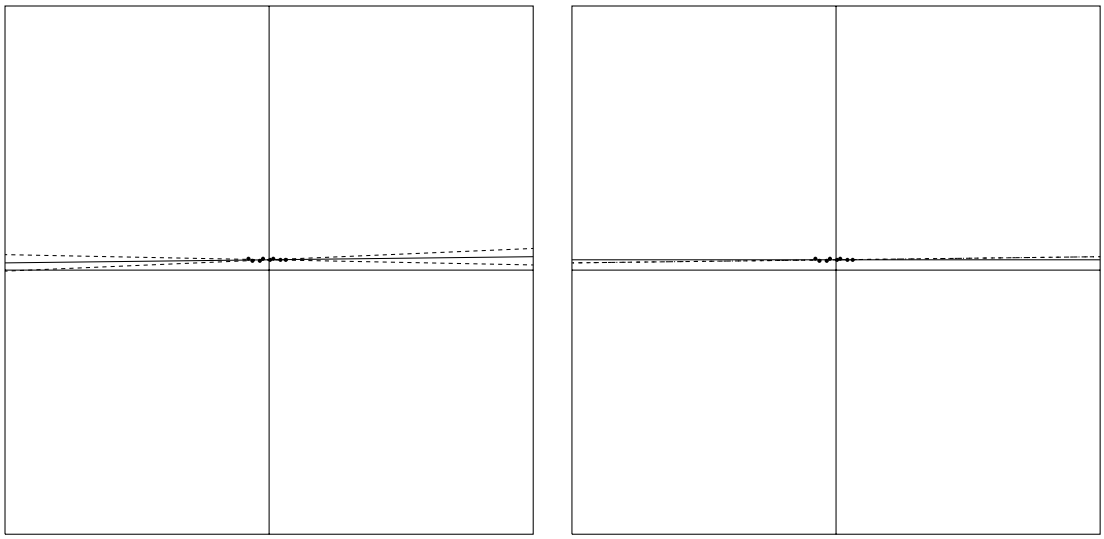
図 2.10〜図 2.12にそれぞれ，実画像から検出した短いエッジを (a) に，当てはめた直線と標準変位を (b) に示す．これらを比較してわかるように，シミュレーションの結果と同じように，エッジの長さが長ければ当てはめた直線は信頼性が高く，短ければ信頼性が低くなることがわかる．

次に χ^2 検定による直線の同一性の判定結果を示す．図 2.10と図 2.11はほぼ同一の直線のそれぞれ別の部分であり，図 2.12は同一直線上にないエッジである．図 2.10と 2.11の同一性の判定結果を図 2.13に示す．同図 (a) はそれぞれ当てはめた直線とその標準変位を重ねて描画したものであり，同図 (b) は両方の直線から求められた直線とその標準変位を描画したものである．同様に図 2.11と図 2.12から得られた結果を図 2.14に示す．有意水準 a=5% とした時 ($\chi^2_{2,5} = 5.99$) のそれぞれの組合せにおける同一直線性の判定結果を表 2.1に示す．



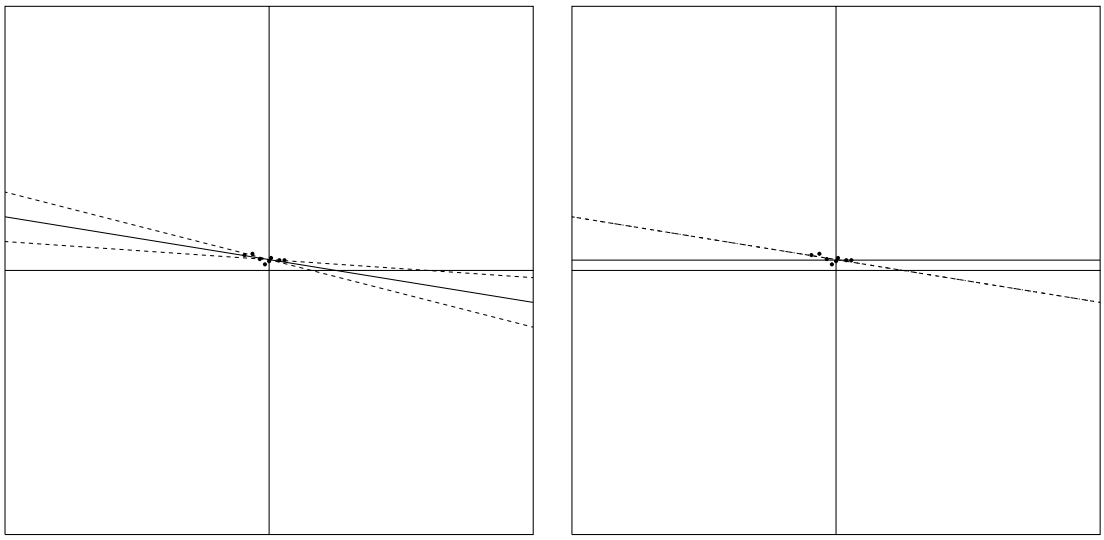
(a) (b)

図 2.5: (a) データ点列 (標準偏差 σ=0.5) に当てはめた直線 (実線) と標準変位 (破線). (b) 真の直線 (実線) と本手法 (破線), 最小二乗法 (一点鎖線).



(a) (b)

図 2.6: (a) データ点列 (標準偏差 σ=1.0) に当てはめた直線 (実線) と標準変位 (破線). (b) 真の直線 (実線) と本手法 (破線), 最小二乗法 (一点鎖線).



(a) (b)

図 2.7: (a) データ点列 (標準偏差 σ=3.0) に当てはめた直線 (実線) と標準変位 (破線). (b) 真の直線 (実線) と本手法 (破線), 最小二乗法 (一点鎖線).

これらを比較すると，同一直線と判定された場合はそれぞれのエッジが互いの標準変位内に入っているのに対し，同一直線と判定されない場合は入っていないのがわかる．また同一でないと判定された場合，それらの直線から求めた直線も信頼性が低いことがわかる．

2.1.11 まとめ

本節では，金谷によって提案された一般理論を用いて，画像の誤差の統計的なモデルを定義し，くりこみ法により統計的に最適に直線を当てはめる方法を導出した．同時にその当てはめの信頼性を共分散行列の形で定量的に評価を行ない，標準変位と呼ぶ手法を用いて，この信頼性を視覚的に表示できることを示した．また，密な画像から成るエッジに当てはめた直線の信頼性を漸近近似により解析的な公式で表わした．

シミュレーション例や実画像例で仮定したように，誤差が等方性の場合の最適解は最小二乗法で得られるものに一致し，偏差は存在しない．したがって，本手法を用いても，当てはめの精度自体の向上がないだけでなく，固有値計算を繰り返し行なわなければならないなど，処理が複雑になる．しかし，本手法の利点は，信頼性が自動的に評価できることにある．そこで，実際の処理においては，通常得られるエッジ長 (画素数) は十分長く，エッジ密度も高いことが予想されうることから，最小二乗法により直線を当てはめ，エッジの漸近近似による信頼性評価を行なうのが最も適しているのではないかと思われる．

以上述べたように，「直線当てはめ」は，誤差の等方性を仮定すれば最小二乗法に代表されるように比較的簡単に最適解を求めることができる．求めた直線からは，消失点や出現点などの 3 次元復元に重要な役割を持つ情報を得ることができる．したがって直線を精度よく当てはめることは非常に重要となることはもちろん，その定量的な信頼性を求めることもまた重要となる．したがって本手法のような定量的な信頼性評価は 3 次元の環境理解や画像理解において極めて重要となると思われる [47, 49, 52].

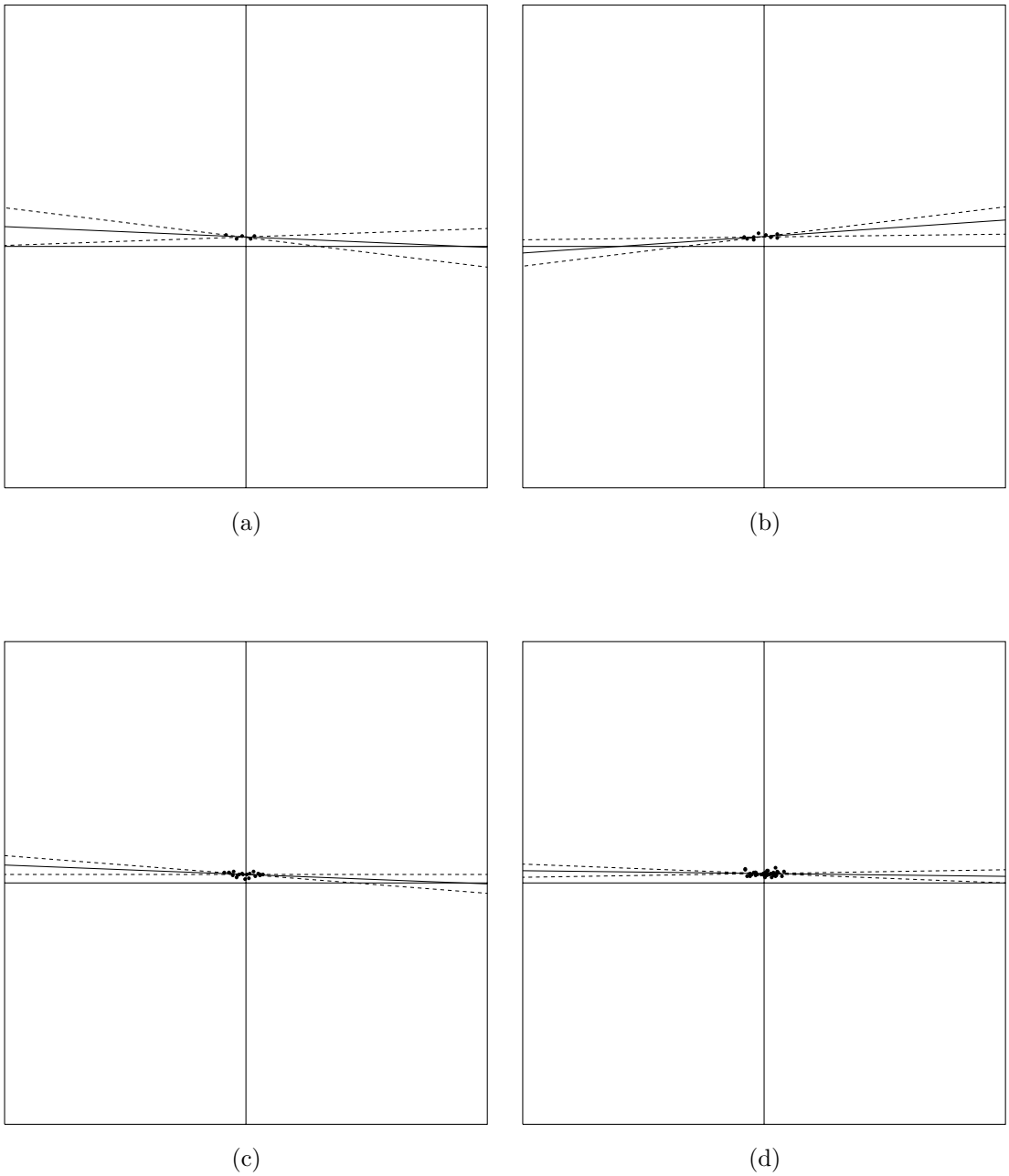
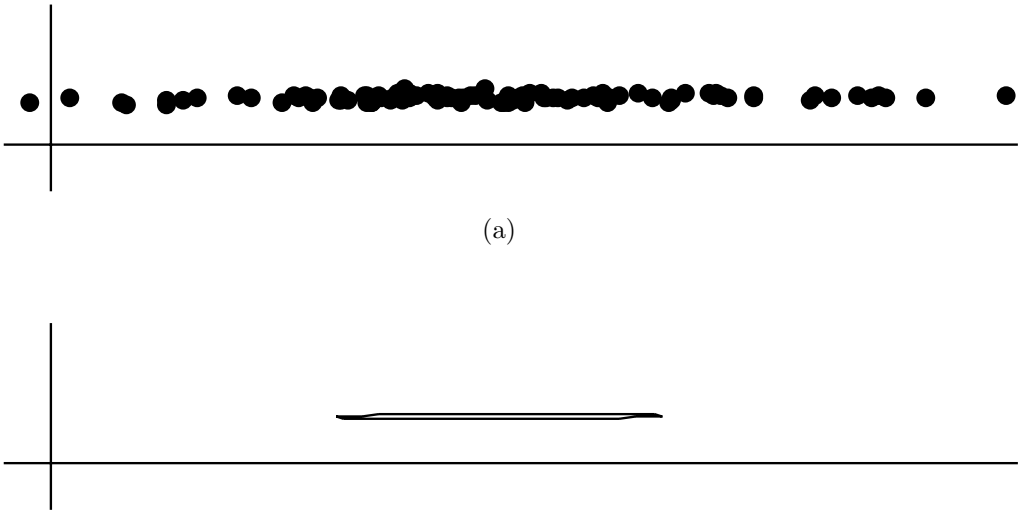


図 2.8: データ点数による標準変位の変化 (σ=2.0). (a) 5 画素. (b) 10 画素. (c) 20 画素. (d) 40 画素.



(a)

(b)

図 2.9: (a) 誤差の分布. (b) 誤差分布の理論限界.

(a) (b)

図 2.10: 実画像のエッジからの当てはめ例 (1). (a) 拡大図. (b) 当てはめた直線と標準変位

(a) (b)

図 2.11: 実画像のエッジからの当てはめ例 (2). (a) 拡大図. (b) 当てはめた直線と標準変位

(a) (b)

図 2.12: 実画像のエッジからの当てはめ例 (3). (a) 拡大図. (b) 当てはめた直線と標準変位

表 2.1: 同一性の判定結果

組合せ	残差 J	判定結果 (有意水準 a=5%, $\chi^2_{2,5} = 5.99$)
図 2.10と図 2.11	1.94511	同一直線
図 2.10と図 2.12	51.5693	同一直線でない
図 2.11と図 2.12	63.2766	同一直線でない

(a) (b)

図 2.13: 同一直線性検定結果 (1). 残差 J=1.94511. (a) 別々に当てはめた直線と標準変位. (b) 直線から得られた直線と標準変位

(a) (b)

図 2.14: 同一直線性検定結果 (2). 残差 J=51.5693. (a) 別々に当てはめた直線と標準変位. (b) 直線から得られた直線と標準変位

(a) (b)

図 2.15: 同一直線性検定結果 (3). 残差 J=63.2766. (a) 別々に当てはめた直線と標準変位. (b) 直線から得られた直線と標準変位

2.2 コニックの最適当てはめとその信頼性評価

画像処理によって得られたエッジにコニックを当てはめることは，画像理解や画像からの 3 次元再構成において重要な問題の一つである．本節でも，まず画像の誤差の統計的なモデルを導入し，統計的に最適にコニックを当てはめる手法を示すと同時に，その当てはめの信頼性を共分散テンソルの形で定量的に評価する手法について述べる．

2.2.1 はじめに

ロボットなどに搭載されたカメラの画像から物体の 3 次元形状を復元することを考える．室内環境の多くの物体は直線や曲線から構成されており，画像面に投影された曲線は楕円や双曲線，放物線で近似できる場合が多い．これらの曲線は総称して**コニック (円錐曲線)** と呼ばれ，画像から物体を認識するための重要な特徴の一つである [13, 69, 70]．また，画像中のコニックが既知の形状をもつ円や楕円の投影像であることがわかっていれば，それらの 3 次元位置を計算することもできる [23, 41]．したがって，コニックを検出し，正確にコニックを当てはめることは，画像理解や 3 次元の再構成において極めて重要なプロセスである．

コニック当てはめは古くから各種の方法が提案されてきた [5, 70, 72]．多くは最小二乗法をもとにするものであるが，最小二乗解には偏差があることが指摘された [18, 29, 63]． Porrill ら [63] は画像の誤差の統計的な性質を考慮して，拡張カルマンフィルタによる不偏推定法を提案し，岩崎ら [19] は**くりこみ法**と呼ばれる不偏推定法を導いた．

しかし，従来のコニック当てはめ手法は**最適に当てはめる**ことのみを目的としており，**当てはめたコニックがどの程度の信頼性を持つのか**を定量的に評価してはいない．当てはめたコニックの信頼性が定量的に評価できれば，そのコニックから 3 次元復元を行なったときに，得られた 3 次元形状の信頼性を評価することができる．このような信頼性評価はどのようなデータを用いるにせよ，コンピュータビジョンのロボティクスへの応用においては不可欠である [47, 49, 52]．

そこで本節では，金谷によって導かれた理論 [32] をコニック当てはめ問題について適用することを考える．つまり前章と同様に，画像の誤差の統計的なモデルを導入し，統計的に最適かつ不偏なコニックの当てはめを計算する方法について述べる．また当てはめたコニックに対する信頼性も同時に計算する**くりこみ法** [26] について述べる．このコニック当てはめのくりこみ法は既に岩崎ら [19] が示しているが，そこではデータを「N ベクトル」 [23] と呼ぶ単位ベクトルに正規化して解析している．本節では画像の誤差の挙動がより直接的に反映されるように，画像座標そのものを用いた定式化を行ない，さらに高次の誤差項を解析することにより，より厳密なくりこみ法を構成する．当てはめの信頼性が共分散テンソルの形で定量的に評価できることは岩崎・金谷 [18] が示しているが，本節では当てはめたコニックの信頼性を視覚的に表示するために**標準変位**と呼ぶ手法を導入する．最後にシミュレーション画像と実画像を用いた実験により，その有効性を示す．

2.2.2 コニック当てはめ

コニックとは次式で表わされる xy 平面上の曲線のことである．

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2(Dx + Ey) + F = 0 \tag{2.66}$$

ここで行列 $\boldsymbol{Q}$ を次のように定義する．

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \tag{2.67}$$

ベクトル $\boldsymbol{x} = (x, y, 1)^\top$ を用いると，式 (2.66) は次のように書ける．

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}) = 0 \tag{2.68}$$

式 (2.68) が**実コニック**，すなわち楕円や双曲線，放物線を表わすためには行列 $\boldsymbol{Q}$ の**符号**[1]が $(2, 1)$ または $(1, 2)$ でなければならないことが知られている [23].

画像から検出した画素列の座標を $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$, $\alpha = 1, ..., N$ とし，それらの真の値を $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$ とする．ベクトル $\boldsymbol{x}_\alpha$=$(x_\alpha, y_\alpha, 1)^\top$ をデータとすると，コニック当てはめ問題は，真の位置 $\{\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha\}$, $\alpha = 1, ..., N$ が

$$(\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha, \boldsymbol{Q}\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha) = 0, \qquad \alpha = 1, ..., N \tag{2.69}$$

を満たすようなノルム 1 の行列 $\boldsymbol{Q}$ を，データ列 $\{\boldsymbol{x}_\alpha\}$ から推定する統計的推定問題となる．ここで行列 $\boldsymbol{Q}$ はスケールの不定性があるため，$\|\boldsymbol{Q}\| = 1$ と正規化する．

2.2.3 最適解とその信頼性

各データ $\boldsymbol{x}_\alpha$ を真の値 $\boldsymbol{x}_\alpha$ と誤差 $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ に分解する．

$$\boldsymbol{x}_\alpha = \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha + \Delta\boldsymbol{x}_\alpha \tag{2.70}$$

誤差 $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ は期待値 $\boldsymbol{0}$，共分散行列

$$V[\boldsymbol{x}_\alpha] = E[\Delta\boldsymbol{x}_\alpha \Delta\boldsymbol{x}_\alpha^\top] \tag{2.71}$$

の独立な確率変数であると仮定する．ベクトル $\boldsymbol{x}_\alpha$, $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$ の定義より，$\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ の第 3 成分は常に 0 であるから，共分散行列 $V[\boldsymbol{x}_\alpha]$ はランク 2 の特異行列である．

当てはめの最適解は次式を最小化する $\boldsymbol{Q}$ で与えられる (付録 A.4).

$$J[\boldsymbol{Q}] = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{x}_\alpha \otimes \boldsymbol{x}_\alpha - V[\boldsymbol{x}_\alpha]; \boldsymbol{Q})^2}{4(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{Q}V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_\alpha) + 2(V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{Q}; \boldsymbol{Q}V[\boldsymbol{x}_\alpha])} \to \min \tag{2.72}$$

次に解の信頼性を表わす共分散行列を求める．式 (2.72) の最適化によって得られた最適解 $\hat{\boldsymbol{Q}}$ を次のように分解する．

$$\hat{\boldsymbol{Q}} = \bar{\boldsymbol{Q}} + \Delta\boldsymbol{Q} \tag{2.73}$$

ただし $\bar{\boldsymbol{Q}}$ は $\boldsymbol{Q}$ の真の値である．推定値 $\hat{\boldsymbol{Q}}$ の信頼性は次の**共分散テンソル**によって評価できる．

$$\mathcal{V}[\hat{\boldsymbol{Q}}] = E[\Delta\boldsymbol{Q} \otimes \Delta\boldsymbol{Q}] \tag{2.74}$$

直線当てはめの同様に考えると，式 (2.72) の最適化から得られる最適解の共分散テンソルは次のように表わせる [32].

$$\mathcal{V}[\hat{\boldsymbol{Q}}] = \left(\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\mathcal{P}_{\bar{\boldsymbol{Q}}}(\boldsymbol{x}_\alpha \otimes \boldsymbol{x}_\alpha) \otimes \mathcal{P}_{\bar{\boldsymbol{Q}}}(\boldsymbol{x}_\alpha \otimes \boldsymbol{x}_\alpha)}{4(\boldsymbol{x}_\alpha, \bar{\boldsymbol{Q}}V[\boldsymbol{x}_\alpha]\bar{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{x}_\alpha) + 2(V[\boldsymbol{x}_\alpha]\bar{\boldsymbol{Q}}; \bar{\boldsymbol{Q}}V[\boldsymbol{x}_\alpha])} \right)^- \tag{2.75}$$

[1]正の固有値の数と負の固有値の数を並べたもの．

また $\mathcal{P}_{\bar{\boldsymbol{Q}}} = (P_{ijkl})$ は次のように定義する**射影テンソル**である．

$$P_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \bar{Q}_{ij}\bar{Q}_{kl} \tag{2.76}$$

式 (2.75) は達成できる当てはめの精度の理論限界であることが証明されている [32].

2.2.4 最小二乗近似

一般に，誤差の絶対的な大きさを推定するのは困難であるが，撮像デバイスや処理アルゴリズムの特性から誤差の定性的な特徴 (例えば等方性や一様性など) を推定することは比較的容易である．そこで，本節でも直線当てはめと同じ誤差モデルを考える．つまり共分散行列は定数倍を除いて既知である (式 (2.25)) と仮定する．

式 (2.72) の分母を定数で置き換えると，次のような (2 次の) **最小二乗近似**を得る．

$$\tilde{J}[\boldsymbol{Q}] = (\boldsymbol{Q}; \mathcal{M}^*\boldsymbol{Q}) \to \min \tag{2.77}$$

ただし $\mathcal{M}^*$ は次のように定義する**有効モーメントテンソル**である．

$$\mathcal{M}^* = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha(\boldsymbol{x}_\alpha \otimes \boldsymbol{x}_\alpha - \epsilon^2 V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]) \otimes (\boldsymbol{x}_\alpha \otimes \boldsymbol{x}_\alpha - \epsilon^2 V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]) \tag{2.78}$$

$$W_\alpha = \frac{1}{4(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{Q}^* V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{Q}^*\boldsymbol{x}_\alpha) + 2\epsilon^2(V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{Q}^*; \boldsymbol{Q}^* V_0[\boldsymbol{x}_\alpha])} \tag{2.79}$$

式 (2.79) の分母の $\boldsymbol{Q}^*$ は $\boldsymbol{Q}$ の適当な推定値とする．式 (2.78), (2.79) で $\epsilon^2 = 0$ としたものがよく用いられる (1 次の) 最小二乗近似である．

最小化 (2.77) の解は $\mathcal{M}^*$ の最小固有値に対するノルム 1 の固有行列で与えられる．ただし $\mathcal{T}\boldsymbol{A} = \lambda\boldsymbol{A}$(すなわち，要素で表わして $\sum_{k,l=1}^{3} T_{ijkl}A_{kl} = \lambda A_{ij}$) の関係が成り立つとき，行列 $\boldsymbol{A}$ をテンソル $\mathcal{T}$ の固有値 λ に対する**固有行列**と呼ぶ．

テンソル $\mathcal{M}^*$ の固有行列 $\boldsymbol{Q}$ を計算するには，$\boldsymbol{Q} = (Q_{ij})$, $\mathcal{M}^* = (M^*_{ijkl})$ をぞれぞれ次のような 6 次元ベクトル $\boldsymbol{q}$ と 6 次元行列 $\boldsymbol{M}^*$ に変換すればよい．このとき，行列 $\boldsymbol{Q}$ がテンソル $\mathcal{M}^*$ の固有値 λ の固有行列である必要十分条件は，ベクトル $\boldsymbol{q}$ が行列 $\boldsymbol{M}^*$ の固有値 λ の固有ベクトルであることである [23].

$$\boldsymbol{q} = (Q_{11}, Q_{22}, Q_{33}, \sqrt{2}Q_{23}, \sqrt{2}Q_{31}, \sqrt{2}Q_{12})^\top \tag{2.80}$$

$$\boldsymbol{M}^* = \begin{pmatrix} M^*_{1111} & M^*_{1122} & M^*_{1133} & \sqrt{2}M^*_{1123} & \sqrt{2}M^*_{1131} & \sqrt{2}M^*_{1112} \\ M^*_{2211} & M^*_{2222} & M^*_{2233} & \sqrt{2}M^*_{2223} & \sqrt{2}M^*_{2231} & \sqrt{2}M^*_{2212} \\ M^*_{3311} & M^*_{3322} & M^*_{3333} & \sqrt{2}M^*_{3323} & \sqrt{2}M^*_{3331} & \sqrt{2}M^*_{3312} \\ \sqrt{2}M^*_{2311} & \sqrt{2}M^*_{2322} & \sqrt{2}M^*_{2333} & 2M^*_{2323} & 2M^*_{2331} & 2M^*_{2312} \\ \sqrt{2}M^*_{3111} & \sqrt{2}M^*_{3122} & \sqrt{2}M^*_{3133} & 2M^*_{3123} & 2M^*_{3131} & 2M^*_{3112} \\ \sqrt{2}M^*_{1211} & \sqrt{2}M^*_{1222} & \sqrt{2}M^*_{1233} & 2M^*_{1223} & 2M^*_{1231} & 2M^*_{1212} \end{pmatrix} \tag{2.81}$$

2.2.5 不偏推定量

前節の (1 次または 2 次の) 最小二乗近似で得られる解は統計的な偏差を生じることが知られている [18, 19, 23, 29]．これは式 (2.78) のテンソルの期待値が 0 ではなく $E[\mathcal{M}^*]{=}O(\epsilon^2)$ となるためである．このため，よ

く知られた摂動定理 [23, 31] より，テンソル $\mathcal{M}^*$ の固有行列の期待値は真の値に比べて $O(\epsilon^2)$ の偏差が生じる．この偏差は次のようにして取り除くことができる．まず**モーメントテンソル** $\mathcal{M}$ を次のように定義する．

$$\mathcal{M} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha \boldsymbol{x}_\alpha \otimes \boldsymbol{x}_\alpha \otimes \boldsymbol{x}_\alpha \otimes \boldsymbol{x}_\alpha \tag{2.82}$$

$\mathcal{M}$ の $\boldsymbol{x}_\alpha$ を $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$ に置き換えた値を $\bar{\mathcal{M}}$ とする．すると式 (2.69) より $\bar{\mathcal{M}}\boldsymbol{Q} = 0$ が成り立つ．すなわち $\boldsymbol{Q}$ は $\bar{\mathcal{M}}$ の固有値 0 に対する固有行列である．そこで，テンソル $\mathcal{N}^{(1)} = (N^{(1)}_{ijkl})$, $\mathcal{N}^{(2)} = (N^{(2)}_{ijkl})$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} N^{(1)}_{ijkl} &= \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha \big(V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{ij} x_{\alpha(k)} x_{\alpha(l)} + V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{ik} x_{\alpha(j)} x_{\alpha(l)} + V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{il} x_{\alpha(j)} x_{\alpha(k)} \\ &\quad + V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{jk} x_{\alpha(i)} x_{\alpha(l)} + V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{jl} x_{\alpha(i)} x_{\alpha(k)} + V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{kl} x_{\alpha(i)} x_{\alpha(j)}\big) \end{aligned} \tag{2.83}$$

$$N^{(2)}_{ijkl} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha \left(V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{ij} V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{kl} + V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{ik} V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{jl} + V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{il} V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{jk}\right) \tag{2.84}$$

テンソル $\mathcal{N}^{(1)}$ の定義式において $\boldsymbol{x}_\alpha$ を $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$ で置き換えた値を $\bar{\mathcal{N}}^{(1)}$ とすると，モーメントテンソル $\mathcal{M}$ の期待値が次式となることがわかる [40].

$$E[\mathcal{M}] = \bar{\mathcal{M}} + \epsilon^2 \bar{\mathcal{N}}^{(1)} + \epsilon^4 \mathcal{N}^{(2)} \tag{2.85}$$

またテンソル $\mathcal{N}^{(1)}$ の期待値は次式で得られることがわかる [40].

$$E[\mathcal{N}^{(1)}] = \bar{\mathcal{N}}^{(1)} + 2\epsilon^2 \mathcal{N}^{(2)} \tag{2.86}$$

そこで**不偏モーメントテンソル** $\hat{\mathcal{M}}$ を

$$\hat{\mathcal{M}} = \mathcal{M} - \epsilon^2 \mathcal{N}^{(1)} + \epsilon^4 \mathcal{N}^{(2)} \tag{2.87}$$

と定義すれば $E[\hat{\mathcal{M}}] = \bar{\mathcal{M}}$ となる．したがって，次の最小化の解が $\boldsymbol{Q}$ の不偏推定量となる．

$$\hat{J}[\boldsymbol{Q}] = (\boldsymbol{Q}; \hat{\mathcal{M}}\boldsymbol{Q}) \to \min \tag{2.88}$$

すなわち， $\boldsymbol{Q}$ の不偏推定量は $\hat{\mathcal{M}}$ の最小固有値に対するノルム 1 の固有行列で与えられる．

2.2.6 くりこみ法

式 (2.87) の不偏モーメントテンソルを計算するためにはノイズレベル ϵ の値を知る必要がある．これを小さく見積もれば偏差が打ち消せず，また大きく見積もれば逆方向に偏差を生じてしまう．そこで直線当てはめと同様に**くりこみ法** [26, 31] を用いる．これは反復によって式 (2.87) の不偏モーメントテンソルの最小固有値が 0 になるように ϵ を決定するものであり，これによって偏差が除去されるとともに，事後的にノイズレベル ϵ を推定することもできる．

ϵ を変数 c に置き換え， W_α の更新を考慮すると， (2 次の) くりこみ法が次のように構成できる [40].

1. $c = 0$, $W_\alpha = 1$, $\alpha = 1, ..., N$ とする．
2. 式 (2.82), (2.83), (2.84) によりテンソル $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}^{(1)}$, $\mathcal{N}^{(2)}$ を計算する．

3. 次のテンソルの最小固有値 λ と対応するノルム 1 の固有行列 $\boldsymbol{Q}$ を計算する．

$$\hat{\mathcal{M}} = \mathcal{M} - c\mathcal{N}^{(1)} + c^2\mathcal{N}^{(2)} \tag{2.89}$$

4. $\lambda \approx 0$ なら $\boldsymbol{Q}$, c, $\hat{\mathcal{M}}$ を返して終了する．そうでなければ c, W_α を次のように更新する．

$$D = \Big((\boldsymbol{Q};\mathcal{N}^{(1)}\boldsymbol{Q}) - 2c(\boldsymbol{Q};\mathcal{N}^{(2)}\boldsymbol{Q})\Big)^2 - 4\lambda(\boldsymbol{Q};\mathcal{N}^{(2)}\boldsymbol{Q}) \tag{2.90}$$

$$\text{If} \quad D \geq 0, \qquad c \leftarrow c + \frac{(\boldsymbol{Q};\mathcal{N}^{(1)}\boldsymbol{Q}) - 2c(\boldsymbol{Q};\mathcal{N}^{(2)}\boldsymbol{Q})\sqrt{D}}{2(\boldsymbol{Q};\mathcal{N}^{(2)}\boldsymbol{Q})} \tag{2.91}$$

$$\text{If} \quad D < 0, \qquad c \leftarrow c + \frac{\lambda}{(\boldsymbol{Q};\mathcal{N}^{(1)}\boldsymbol{Q})} \tag{2.92}$$

$$W_\alpha \leftarrow \frac{1}{4(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{Q}V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_\alpha) + 2c(V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{Q}; \boldsymbol{Q}V_0[\boldsymbol{x}_\alpha])} \tag{2.93}$$

5. ステップ 2 へ戻る．

上記の計算において c^2 の項を無視し，式 (2.91) の代わりに常に式 (2.92) を用いるものが通常の (1 次の) くりこみ法である．両者の差は極めて小さい．

くりこみ法で返された行列 $\boldsymbol{Q}$ を $\hat{\boldsymbol{Q}}$ と書く．くりこみ法で返された c の値から二乗ノイズレベルの不偏推定量 $\hat{\epsilon}^2$ が次のように得られる [31].

$$\hat{\epsilon}^2 = \frac{c}{1 - 5/N} \tag{2.94}$$

これは式 (2.88) の残差を $\hat{J}[\hat{\boldsymbol{Q}}]$ とするとき， $N\hat{J}[\hat{\boldsymbol{Q}}]/\epsilon^2$ が近似的に自由度 $N-5$ の χ^2 分布に従う確率変数であることから導かれる [40].

推定値 $\hat{\boldsymbol{Q}}$ の共分散テンソルは次のように近似できる．

$$\mathcal{V}[\hat{\boldsymbol{Q}}] \approx \frac{\hat{\epsilon}^2}{N}\left(\hat{\mathcal{M}}\right)_5^- \tag{2.95}$$

式 (2.95) でランクを 5 に拘束しているのは，くりこみ法が完全に収束していない場合に $\hat{\mathcal{M}}$ の固有値が厳密に 0 とは限らないことを考慮したためである．

2.2.7 標準変位

式 (2.95) で計算した共分散テンソル $\mathcal{V}[\hat{\boldsymbol{Q}}]$ を次のようにスペクトル分解する [23].

$$\mathcal{V}[\hat{\boldsymbol{Q}}] = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i \boldsymbol{U}_i \otimes \boldsymbol{U}_i \tag{2.96}$$

ここに λ_i は $\mathcal{V}[\hat{\boldsymbol{Q}}]$ の固有値であり， $\boldsymbol{U}_i$ は対応するノルム 1 の固有行列である．つまり行列 $\boldsymbol{U}_1$ は誤差の最も発生しやすい方向を示し， λ_1 はその方向における分散を示している．したがって，計算した $\hat{\boldsymbol{Q}}$ の信頼性を次の二つの行列で表わすことができる．

$$\boldsymbol{Q}^+ = N[\hat{\boldsymbol{Q}} + \sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{U}] \tag{2.97}$$

$$\boldsymbol{Q}^- = N[\hat{\boldsymbol{Q}} - \sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{U}] \tag{2.98}$$

これらの行列の表わすコニックを直線当てはめと同様に**標準変位**と呼ぶ [47, 49, 52].

2.2.8 実験

(1) シミュレーション実験

図 2.16は楕円上の第 1 象限における 40 個の等分点を示す．長軸半径，短軸半径はそれぞれ 100(画素)，50(画素) である．各点の x，y 座標に期待値 0，標準偏差 0.5(画素) の正規乱数を独立に加えてシミュレーションを行なった．

図 2.17(a) はノイズを加えたデータ点の一例であり，図 2.17(b) はこれにくりこみ法による当てはめを行なった結果を示している．図中の実線は当てはめた楕円を示し，破線は標準変位を示す．

図 2.18(a) は図 2.16と同じ点列に対し，誤差の標準偏差を 0.1 画素としたときの当てはめ結果を示し，同図 (b) は 0.5 画素としたときの当てはめ結果を示す．これらを比較すると，加える誤差が大きければ標準変位の範囲が広がることがわかる．つまり誤差が大きければ信頼性が低下することを示唆している．

また，σ=0.1，0.5，1.0 とし，毎回異なる誤差を用いてくりこみ法および最小二乗法 (くりこみ法で反復を行なわず，最初から真の値による式 (2.93) の重みを与えたもの) で 10 回の当てはめを行なった結果を図 2.19〜図 2.21に示す．図中破線で示した楕円は真の楕円を表わす．これらにより，誤差の小さいときは最小二乗法はそれほど偏差を生じないが，誤差が大きくなるにつれて偏差が増すことがわかる．一方くりこみ法による当てはめでは，ばらつきは多少増えるものの偏差が取り除かれていることがわかる．

図 2.22〜図 2.23は同じ区間 $[0,-\pi]$ での等分された点の数を変えた結果を示す．図 2.24〜 2.26は，楕円の上部において，データ点数を一定 (40 画素) とし，区間を $[-\pi/6,\pi/6]$, $[-\pi/4,\pi/4]$, $[-\pi/3,\pi/3]$ と変えたときの 10 回の当てはめ結果の分布を示す．これらより，当てはめた楕円の精度はデータ点数にはあまり影響がなく，区間長が長いほど高くなることがわかる．

(2) 実画像実験

図 2.27(a) に実画像からエッジを検出した二値画像を示す．図 2.27(b) にくりこみ法による当てはめ結果と標準変位を示す．図 2.28(a), (b) および図 2.29(a), (b) はエッジの部分の画素数を少なくしたものである．シミュレーションと同様に当てはめる画素の数 (エッジの長さ) が少なくなると標準変位の差が急速に広がる．

2.2.9 まとめ

本節では，金谷による一般理論を用いて，直線当てはめと同様に画像の誤差の統計的なモデルを定義し，くりこみ法による統計的に最適なコニック当てはめの方法を導いた．同時に，当てはめの信頼性を共分散テンソルの形で定量的に評価を行なうとともに，標準変位と呼ぶ手法を用いて，この信頼性を視覚的に表示した．

シミュレーション実験で示したように，直線当てはめと違いコニック当てはめにおいては，最小二乗法は偏差を生じてしまう．一方くりこみ法による当てはめでは偏差が取り除かれるだけでなく，信頼性も同時に評価することができる．このようなコニック当てはめの定量的な信頼性は，当てはめたコニックに対する単なる付加的な情報だけではなく，コニック検出による 3 次元復元，コニックパターンによるカメラキャリブレーション等，さまざまな応用に対し重要な意味を持っていることがわかる．

しかし実際に応用することを考えると，エッジは楕円あるいは円を当てはめれば十分であり，双曲線や放物線も含む一般的なコニックを当てはめる必要のない場合が多い．したがってコニックが双曲線や放物線にならないような当てはめに限定することも考えられる．

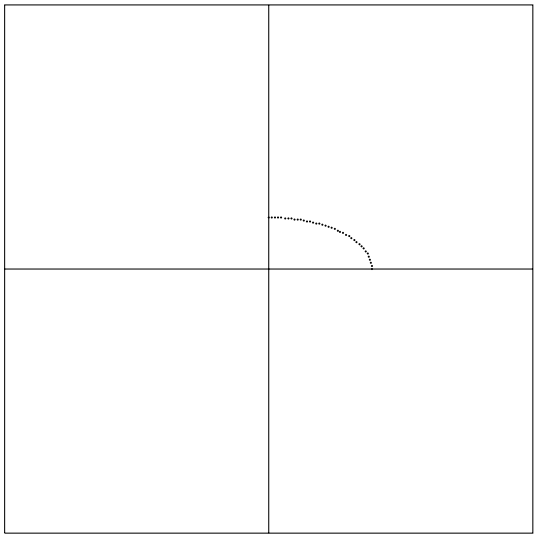
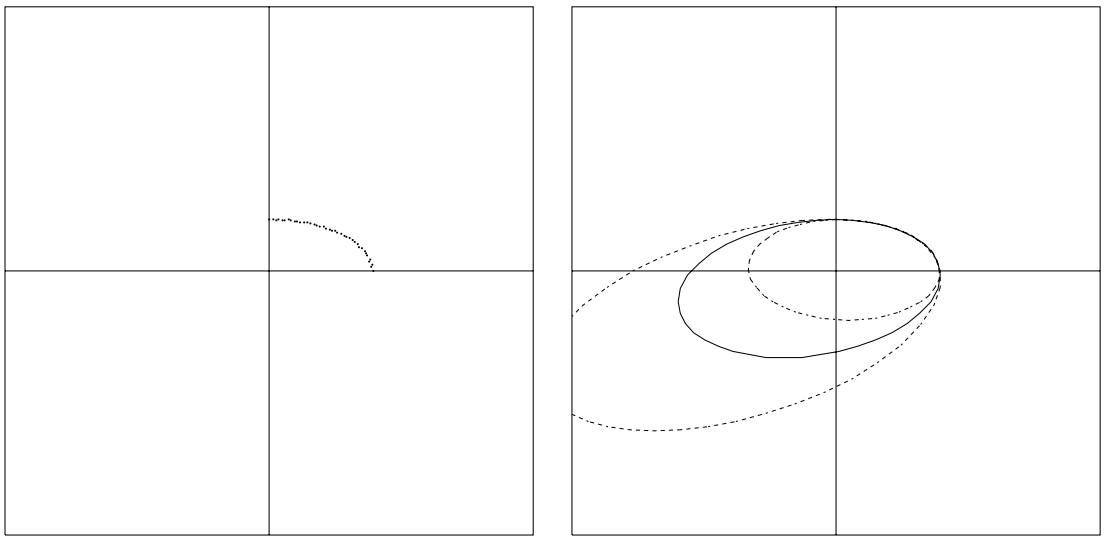
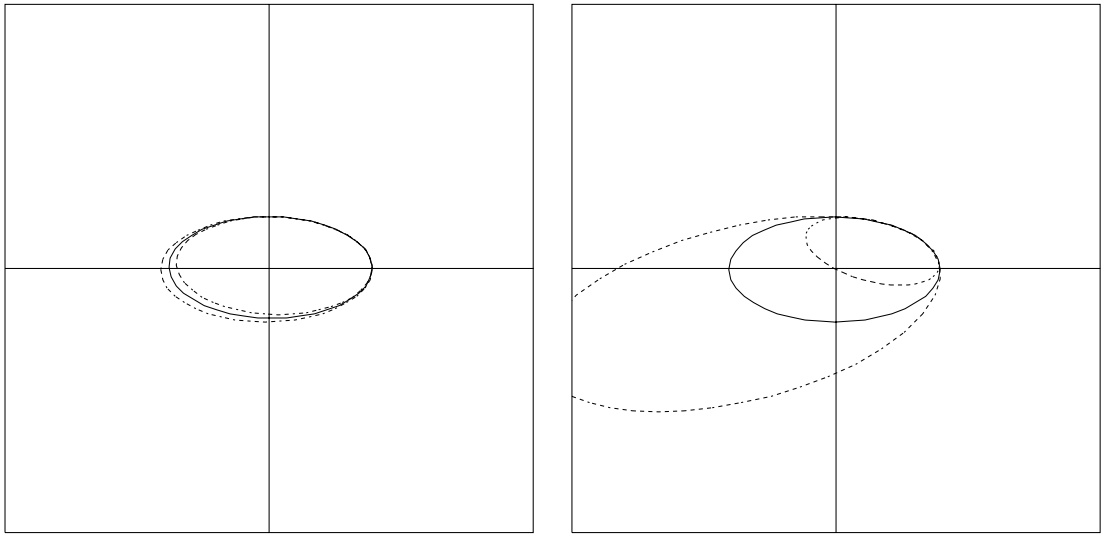


図 2.16: 楕円上の 40 個の等分点.



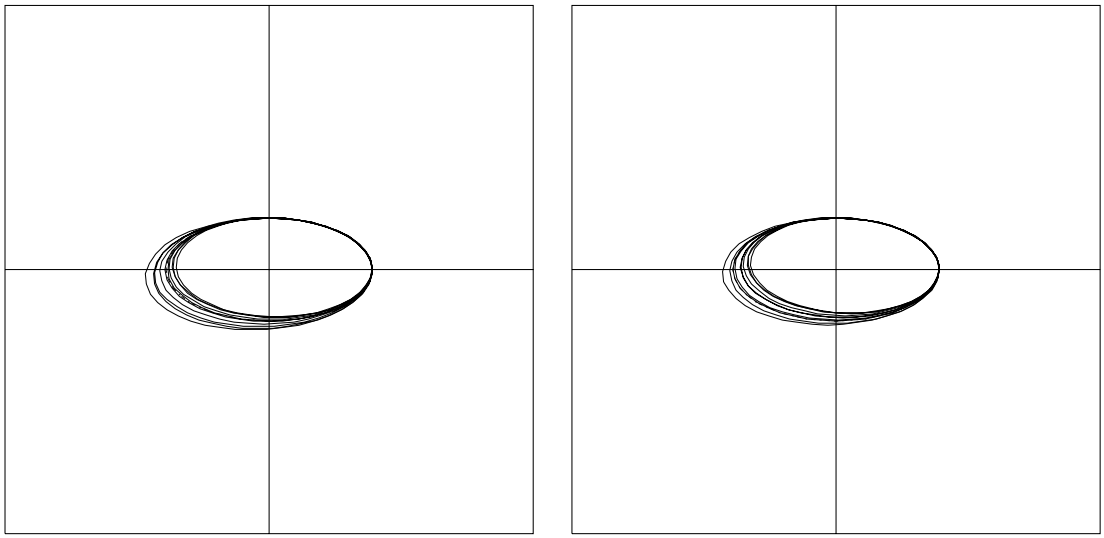
(a) (b)

図 2.17: (a) ノイズを加えたデータ点. (b) くりこみ法による当てはめと標準変位.



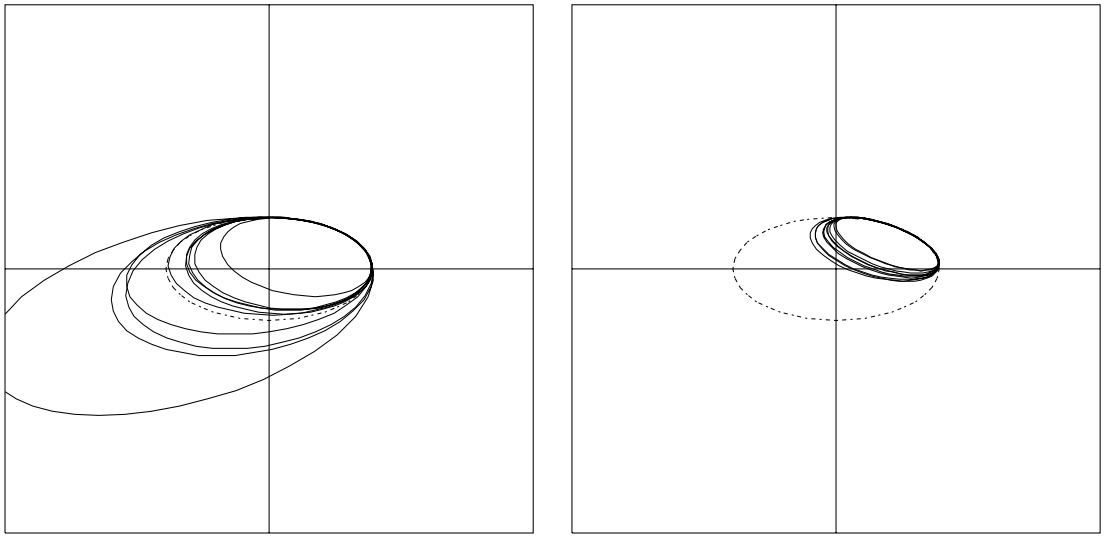
(a) (b)

図 2.18: [0,π] 区間， 40 画素． (a) 標準偏差 σ=0.1． (b) 標準偏差 σ=1.0.



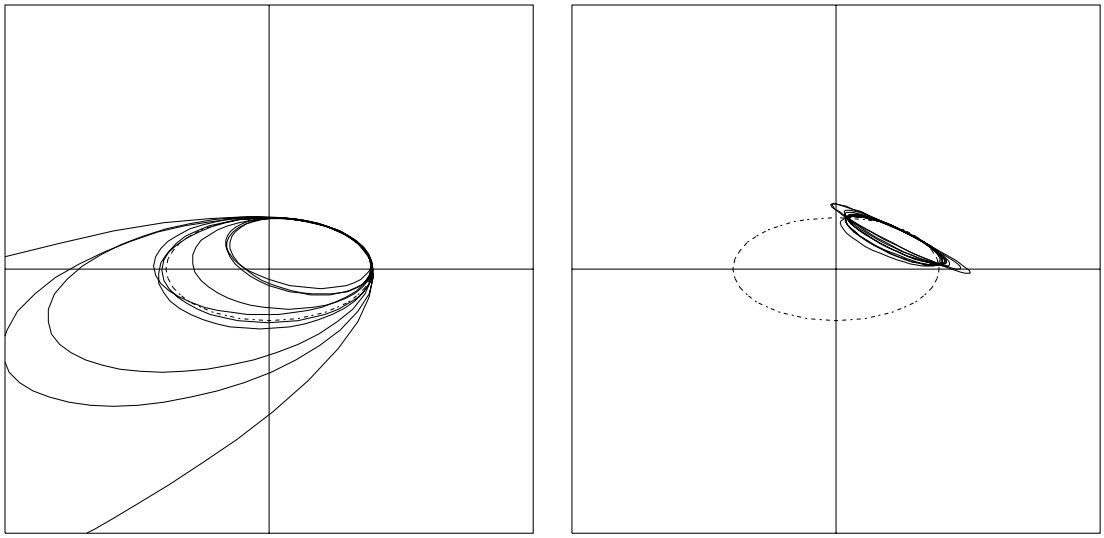
(a) (b)

図 2.19: [0,π] 区間， 40 画素，標準偏差 σ=0.1． (a) くりこみ法による当てはめ． (b) 最小二乗法による当てはめ．



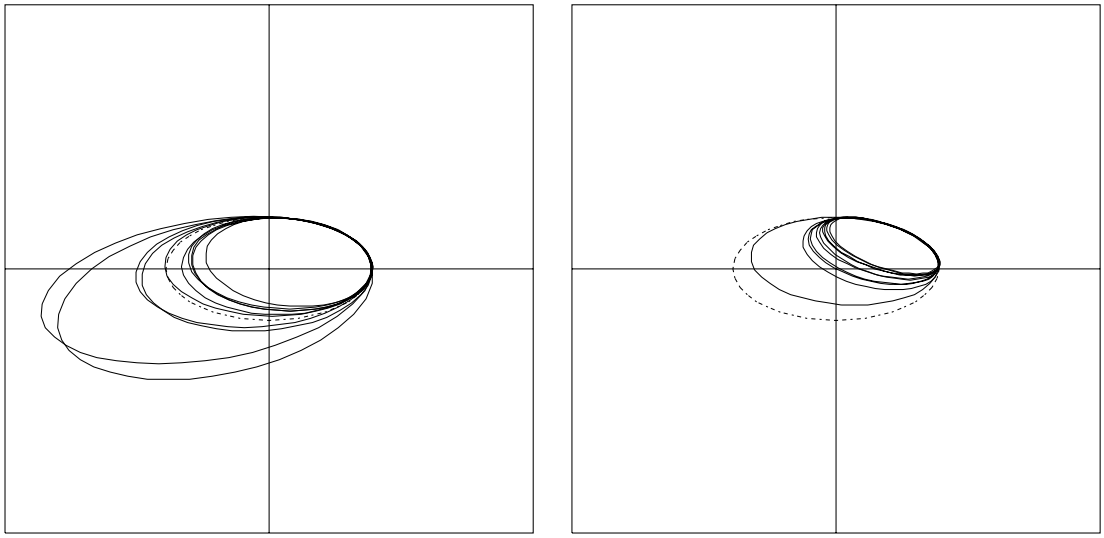
(a) (b)

図 2.20: [0,π] 区間, 40 画素, 標準偏差 σ=0.5. (a) くりこみ法による当てはめ. (b) 最小二乗法による当てはめ.



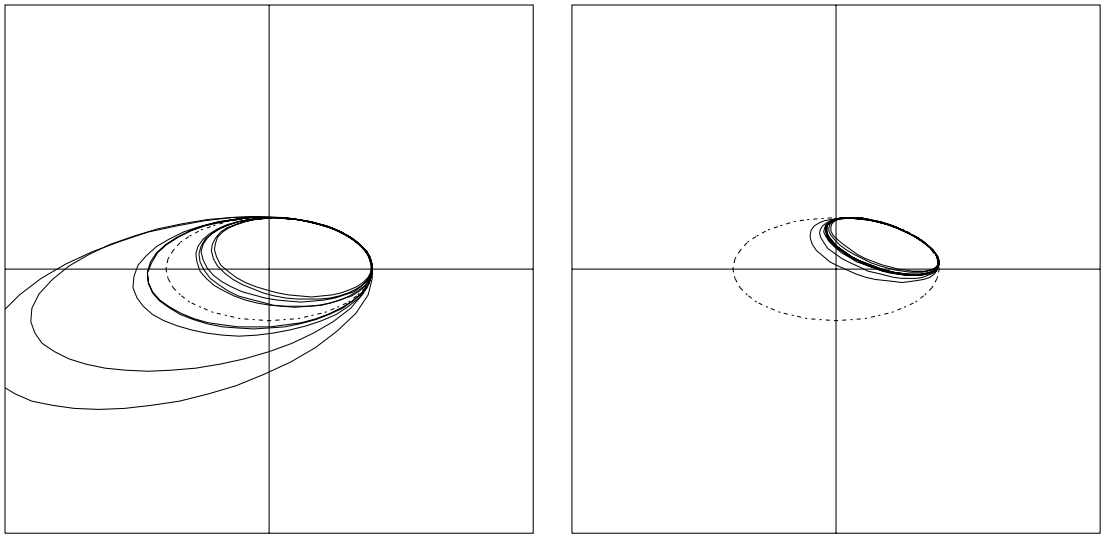
(a) (b)

図 2.21: [0,π] 区間, 40 画素, 標準偏差 σ=1.0. (a) くりこみ法による当てはめ. (b) 最小二乗法による当てはめ.



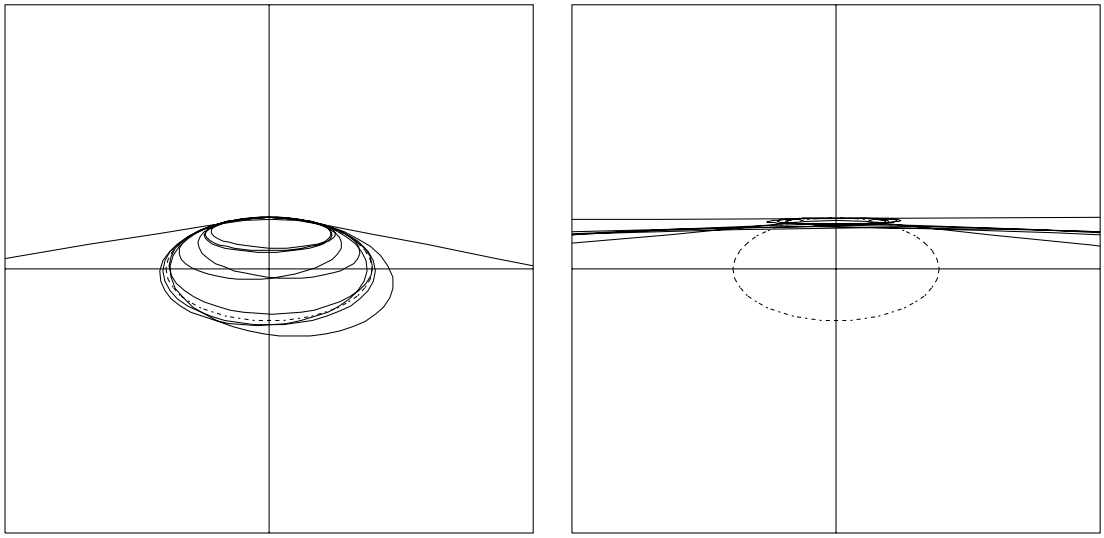
(a) (b)

図 2.22: [0,π] 区間，20 画素，標準偏差 σ=0.5. (a) くりこみ法による当てはめ. (b) 最小二乗法による当てはめ.



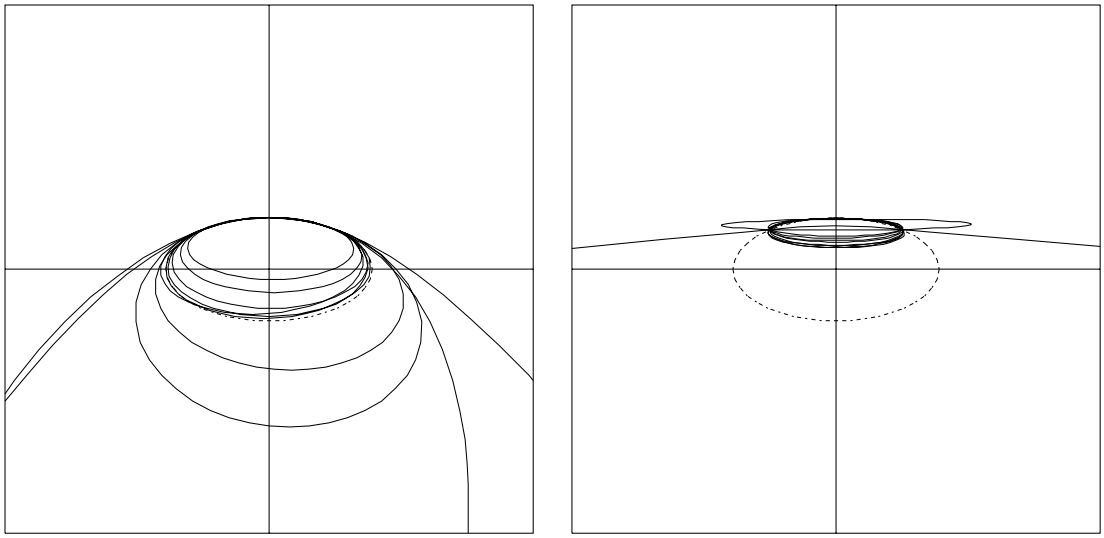
(a) (b)

図 2.23: [0,π] 区間，60 画素，標準偏差 σ=0.5. (a) くりこみ法による当てはめ. (b) 最小二乗法による当てはめ.



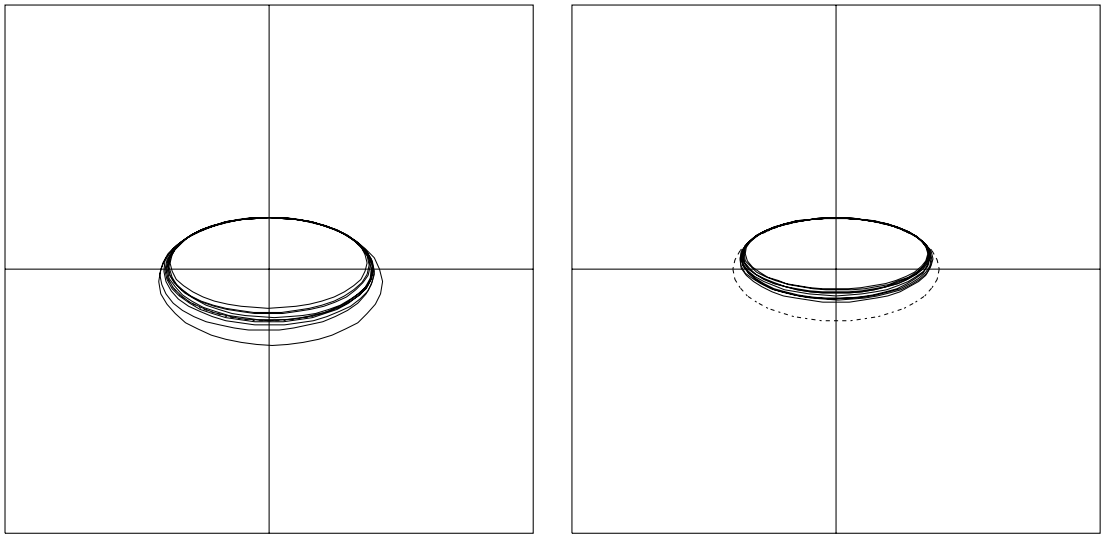
(a) (b)

図 2.24: $[-\pi/6,\pi/6]$ 区間, 40 画素, 標準偏差 σ=0.5. (a) くりこみ法による当てはめ. (b) 最小二乗法による当てはめ.



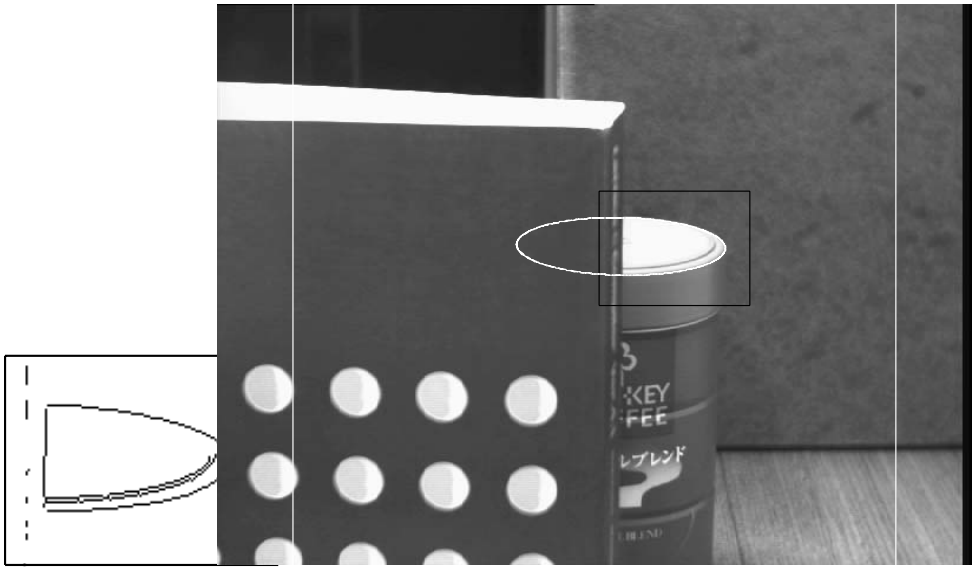
(a) (b)

図 2.25: $[-\pi/4,\pi/4]$ 区間, 40 画素, 標準偏差 σ=0.5. (a) くりこみ法による当てはめ. (b) 最小二乗法による当てはめ.



(a) (b)

図 2.26: $[-\pi/3,\pi/3]$ 区間，40 画素，標準偏差 σ=0.5. (a) くりこみ法による当てはめ. (b) 最小二乗法による当てはめ.



(a) (b)

図 2.27: (a) エッジ画像. (b) くりこみ法による当てはめと標準変位.

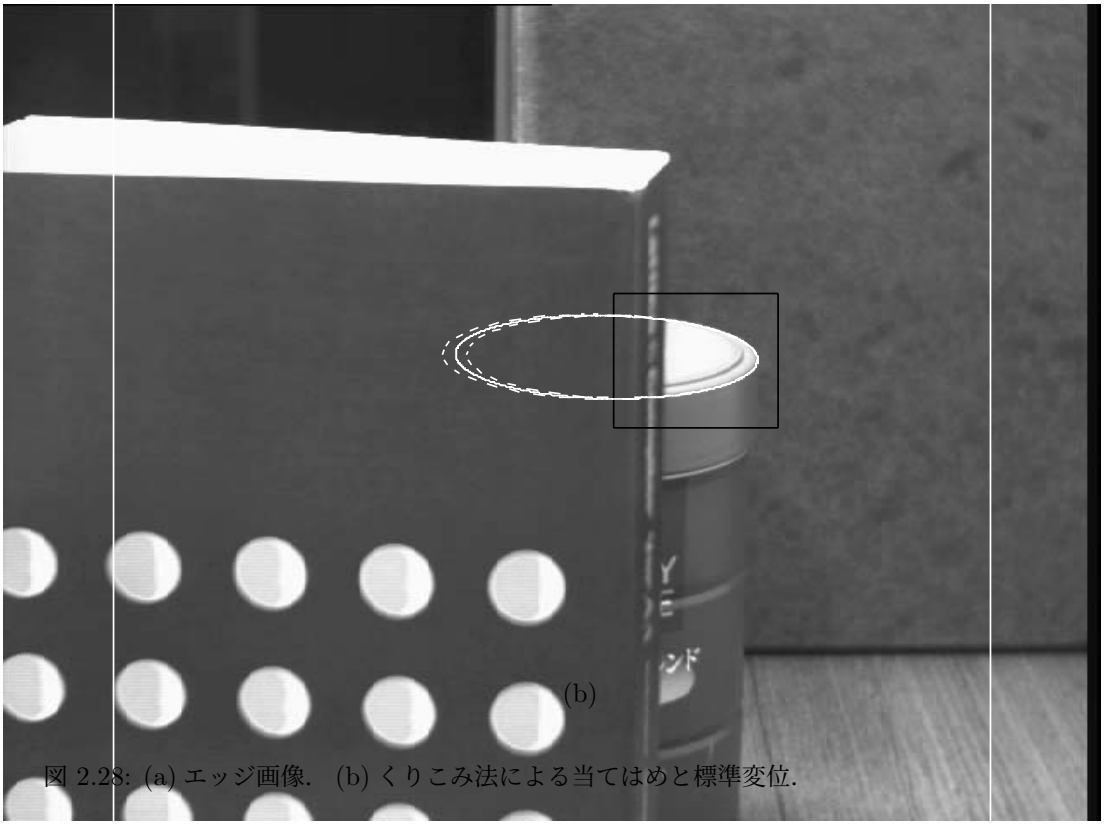


図 2.28: (a) エッジ画像. (b) くりこみ法による当てはめと標準変位.

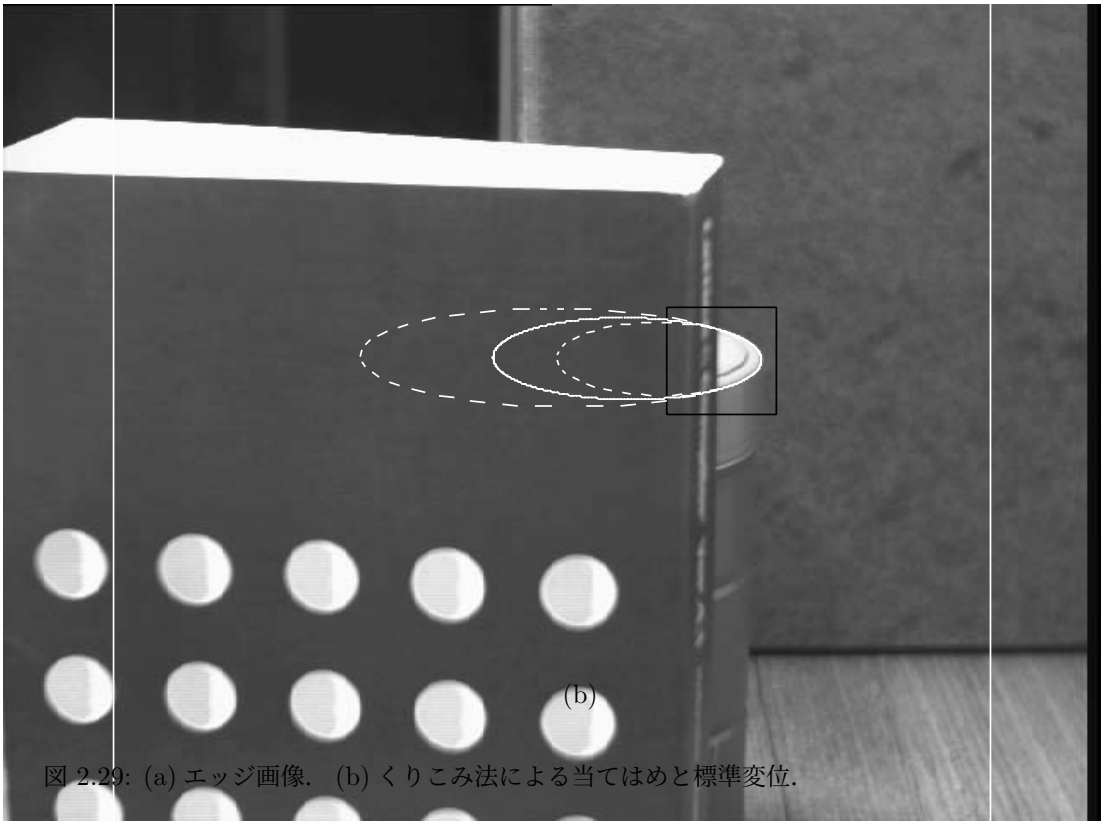


図 2.29: (a) エッジ画像. (b) くりこみ法による当てはめと標準変位.

第 3 章

3 次元幾何モデルの最適当てはめおよび最適補正とその信頼性評価

本章では，レンジファインダから得られるデータに対する平面の最適当てはめとその信頼性評価について，また通常のステレオにおける 3 次元復元のための最適な補正と復元の信頼性評価，ステレオで平面を観測した場合における直接的かつ最適な平面の復元方法とその信頼性評価について述べる．

3.1 レンジデータへの平面の最適当てはめとその信頼性評価

レンジファインダは直接距離を測定することのできるセンサであり，ロボットの行動制御のためのセンサとして広く用いられている．またロボットの行動空間を考えた場合，室内では机や壁，床，天井などの平面状の物体が多い．そこで本節では，このレンジファインダから得られたデータに平面を当てはめることを考える．

3.1.1 はじめに

室内環境を考えた場合，壁や床，天井などの平面状の物体の認識は自律走行ロボットの環境認識にとって極めて重要な問題の一つである．一般的にレンジファインダは，ステレオカメラによる距離測定と比較すると距離データの解像度が低いという欠点があるが，対応点問題を解く必要がない，すなわち直接距離データを得ることができるという利点は大きい．

レンジファインダによって観測されたデータに形状を当てはめる問題は，環境認識にとって重要な問題の一つである．多くの場合，3 次元形状は各点の 3 次元位置に対して平面や曲面などを当てはめることによってモデル化される．しかし，レンジファインダから得られる観測データは一般に解像度も低い上，誤差も含まれており，それを考慮した上で最適に形状を当てはめなければならない．

このような問題に対して武田ら [76] は，距離データの誤差がセンサ方向の誤差の距離測定誤差とセンサの配置の角度誤差の二つの独立な 1 次元分布の同時分布を持つとして直線の最尤推定を行なっている．また，Boyer ら [6] は，誤差や outlier に対してロバストな面の構成法を提案している．彼らはレンジデータに対してエッジ検出等の前処理を行なうことにより outlier を除去し，滑らかな領域を抽出して情報量基準 (AIC) により面の当てはめを行なっている．

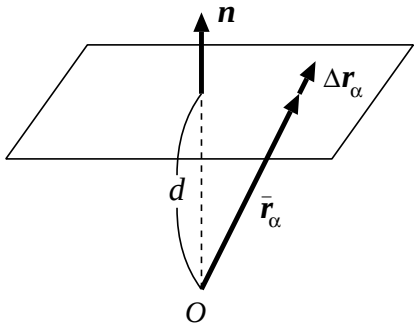


図 3.1: 平面のパラメータとレンジデータの誤差.

しかし実際のロボットを制御することを考えた場合，正確に制御するためには単に最適に形状を復元するだけでは不十分である．復元した形状の信頼性を正しく評価できなければ，ロボットは適切な行動を取ることができないからである．これに対し，武田らの方法は最適に形状 (直線) を推定しているが，その信頼性を求めていない．また Takeda ら [77] は， Sensory Uncertainty Feild (SUF) を導入し，ロボットの現在位置のある種の信頼性をデータから求め，ロボットの行動制御に用いている．しかし，これにはあらかじめデータの分布の上限を求める必要があり，また誤差の大きさの標準偏差もあらかじめ見積っておかなければならない．

そこで，本節でも金谷の導いた一般理論 [32] をレンジデータへの平面当てはめ問題に適用することを考える．つまり認識対象の物体を平面と仮定して誤差の挙動をモデル化し，得られた観測データから最適に平面を当てはめ，同時にその当てはめた平面の信頼性を評価する方法について述べる．

3.1.2 平面の当てはめ

図 3.1に示すように， 3 次元空間内に単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を持ち，原点 O から距離 d だけ離れた平面を想定する．ここで $\boldsymbol{n}$ は原点 O から外に向かう方向にとる．この $\{\boldsymbol{n}, d\}$ を**平面パラメータ**と呼ぶ． 3 次元位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすると，この平面は次のように表わすことができる．

$$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}) = d \tag{3.1}$$

レンジファインダを原点に固定し，平面上の観測点を $\{\boldsymbol{r}_\alpha\}$, $\alpha = 1, ..., N$ とする．それらの点の真の位置を $\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha$ とし，観測点のデータ $\boldsymbol{r}_\alpha$ は誤差 $\Delta\boldsymbol{r}_\alpha$ が加わって

$$\boldsymbol{r}_\alpha = \bar{\boldsymbol{r}}_\alpha + \Delta\boldsymbol{r}_\alpha \tag{3.2}$$

と書けるとする．そして，誤差 $\Delta\boldsymbol{r}_\alpha$ は期待値 0 の独立な確率変数であるとみなし，共分散行列

$$V[\boldsymbol{r}_\alpha] = E[\Delta\boldsymbol{r}_\alpha \Delta\boldsymbol{r}_\alpha^\top] \tag{3.3}$$

を持つと仮定する．

3 次元位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の同次座標による 4 次元ベクトル表現 $\boldsymbol{\rho}$ と平面パラメータを表わす 4 次元ベクトル $\boldsymbol{\nu}$ を次のように定義する．

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\nu} = N[\begin{pmatrix} \boldsymbol{n} \\ -d \end{pmatrix}] \tag{3.4}$$

これらを用いれば式 (3.1) は

$$(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\rho}) = 0 \tag{3.5}$$

と書き表わすことができる．

定義より，$\boldsymbol{\rho}_\alpha$ の共分散行列は次のように与えられる．

$$V[\boldsymbol{\rho}_\alpha] = \begin{pmatrix} V[\boldsymbol{r}_\alpha] & \\ & 0 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

$\boldsymbol{\rho}_\alpha$ の真の値を $\bar{\boldsymbol{\rho}}_\alpha$ とすると，観測されたデータ点に平面を当てはめる問題は次のように書ける．すなわち，真の位置 $\{\bar{\boldsymbol{\rho}}_\alpha\}$, $\alpha = 1, ..., N$ が

$$(\boldsymbol{\nu}, \bar{\boldsymbol{\rho}}_\alpha) = 0, \qquad \alpha = 1, ..., N \tag{3.7}$$

を満たすような 4 次元単位ベクトル $\boldsymbol{\nu}$ を，データ $\{\boldsymbol{\rho}_\alpha\}$, $\alpha = 1, ..., N$ から推定する問題とみなせる．

3.1.3 最適解とその信頼性

直線当てはめ，コニック当てはめと同様に，$\|\boldsymbol{\nu}\| = 1$ の条件のもとでの当てはめの $\boldsymbol{\nu}$ の最適解は，次の最小化によって求めることができる [32].

$$J[\boldsymbol{\nu}] = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\rho}_\alpha)^2}{(\boldsymbol{\nu}, V[\boldsymbol{\rho}_\alpha]\boldsymbol{\nu})} \to \min \tag{3.8}$$

得られた最適解を $\hat{\boldsymbol{\nu}}$ と置き，次のように表わす．

$$\hat{\boldsymbol{\nu}} = \bar{\boldsymbol{\nu}} + \Delta\hat{\boldsymbol{\nu}} \tag{3.9}$$

ここで $\bar{\boldsymbol{\nu}}$ は $\boldsymbol{\nu}$ の真の値である．$\hat{\boldsymbol{\nu}}$ の信頼性は次式の共分散行列で評価できる [32].

$$V[\hat{\boldsymbol{\nu}}] = E[\Delta\hat{\boldsymbol{\nu}}\Delta\hat{\boldsymbol{\nu}}^\top] = \left(\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\bar{\boldsymbol{\rho}}_\alpha \bar{\boldsymbol{\rho}}_\alpha^\top}{(\bar{\boldsymbol{\nu}}, V[\boldsymbol{\rho}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\nu}})} \right)^- \tag{3.10}$$

この共分散行列は，達成できる精度の限界を示すものであることが証明されている [32].

3.1.4 レンジファインダの誤差モデル

一般に距離データは超音波や赤外線，レーザを測定方向に放射し，その反射を観測することにより計測される．現在利用可能なレンジファインダの原理は種々多様であり，もしその特性すなわち誤差の性質が既知であればその特性から求まる共分散行列を用いて，式 (3.8) の最小化を解けばよい．しかし一般的には誤差の性質を前もって知ることは困難であり，何らかの仮定を置き，そのもとで最適化する必要がある．レンジファインダにおいては，次の二つの仮定が考えられる．

1. 誤差は距離によらない．

2. 誤差は距離が大きいほど大きい．

このうち前者の場合，通常の最小二乗法が最適となる．

そこで本論文では後者の場合を考える．つまり距離が遠くなればなるほどその誤差は大きくなると考える．また，センサの放射方向の誤差に比べて，得られた距離データの誤差の方が大きいとする．すなわち第 1 近似として，図 3.1に示すように誤差の方向はセンサの放射方向とし，その大きさは原点から平面上の観測点までの距離に比例すると仮定する．したがって，$\boldsymbol{r}_\alpha$ の共分散行列は次式のようにモデル化できる．

$$V[\boldsymbol{r}_\alpha] = \epsilon^2 \bar{\boldsymbol{r}}_\alpha \bar{\boldsymbol{r}}_\alpha^\top \tag{3.11}$$

ここで ϵ は定数である．この結果，$\|\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha\|$ の標準偏差は $\epsilon\|\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha\|$ となり，この定数 ϵ を**ノイズレベル**と呼ぶ．あらかじめ ϵ の大きさを知ることは非常に困難であるため，以下この ϵ は未知であると仮定する．したがって，$\boldsymbol{\rho}_\alpha$ の共分散行列は式 (3.6) から次のように書換えられる．

$$V[\boldsymbol{\rho}_\alpha] = \epsilon^2 V_0[\boldsymbol{\rho}_\alpha], \qquad V_0[\boldsymbol{\rho}_\alpha] = \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{r}}_\alpha \bar{\boldsymbol{r}}_\alpha^\top & \\ & 0 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

ここで，$V_0[\boldsymbol{\rho}_\alpha]$ を**正規化共分散行列**と呼ぶ．

3.1.5 最小二乗法

$(\boldsymbol{n}, \bar{\boldsymbol{r}}_\alpha) = d$ の関係と式 (3.4) から，式 (3.8) の最適化は次のように書き表わせる．

$$J[\boldsymbol{n}, d] = \frac{1}{\epsilon^2 d^2} \sum_{\alpha=1}^{N} \left((\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}_\alpha) - d\right)^2 \to \min \tag{3.13}$$

ここで係数 $1/\epsilon^2 d^2$ を無視すれば，式 (3.13) はよく知られた**最小二乗法**となる．また式 (3.13) の最適化の解は次のように解析的に求めることができる．

$\boldsymbol{n}$ は単位ベクトルであることがわかっているから，$\tilde{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{n}/d$ と置くと，係数を無視すれば式 (3.13) は次のように書き直せる．

$$J[\tilde{\boldsymbol{n}}] = \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{\alpha=1}^{N} \left((\tilde{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{r}_\alpha) - 1)\right)^2 \tag{3.14}$$

式 (3.14) は $\tilde{\boldsymbol{n}}$ に関する二次式であるため，その解は次式から求めることができる．

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{r}_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha^\top\right) \tilde{\boldsymbol{n}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{r}_\alpha \tag{3.15}$$

したがって，平面の推定値 $\{\hat{\boldsymbol{n}}, \hat{d}\}$ は次式から求めることができる．

$$\hat{\boldsymbol{n}} = N[\tilde{\boldsymbol{n}}], \qquad \hat{d} = \frac{1}{\|\tilde{\boldsymbol{n}}\|} \tag{3.16}$$

これらの式により直接解を求めることができる．しかしノイズレベル ϵ を求めることができない．つまり信頼性を評価することが難しい．そこでこのような直接解法ではなく，くりこみ法により間接的に解を求め，同時にノイズレベルの推定を行なうこととする．

3.1.6 統計的偏差の除去

式 (3.8) の解は定数倍しても変らない．そこで分母の $V[\boldsymbol{\rho}]$ を $V_0[\boldsymbol{\rho}]$ に置き換えると，次のように書き直すことができる．

$$\tilde{J}[\boldsymbol{\nu}] = (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{M}\boldsymbol{\nu}) \to \min \tag{3.17}$$

ただし， $\boldsymbol{M}$ は次のように定義した行列であり，これを**モーメント行列**と呼ぶ.

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha \boldsymbol{\rho}_\alpha \boldsymbol{\rho}_\alpha^\top \tag{3.18}$$

$$W_\alpha = \frac{1}{(\boldsymbol{\nu}, V_0[\boldsymbol{\rho}_\alpha]\boldsymbol{\nu})} \tag{3.19}$$

W_α は未知数 $\boldsymbol{\nu}$ の関数であるが，もし W_α を定数で近似すれば，解はモーメント行列 $\boldsymbol{M}$ の最小固有値に対する単位固有ベクトルで与えられる．これを**最適最小二乗近似**と呼ぶこととする．実際には W_α は未知数 $\boldsymbol{\nu}$ を含んでいるから，まず $\boldsymbol{\nu}$ の適当な推定値 $\boldsymbol{\nu}_0$ を仮定し，最適化 (3.17) の解 $\boldsymbol{\nu}_1$ を求める． 次に $\boldsymbol{\nu}_0$ を $\boldsymbol{\nu}_1$ に置き換えて解 $\boldsymbol{\nu}_2$ を更新する．この処理を収束するまで繰り返せばよいように思える．

しかし，このようにして得られた解には，例え真の値 $\bar{\boldsymbol{\nu}}$ による重みを用いたとしても，統計的な偏差が生じることが知られている [26]．以下にそれを示す．

モーメント行列 $\boldsymbol{M}$ の期待値を考える．

$$\begin{aligned} E[\boldsymbol{M}] &= \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha E[(\bar{\boldsymbol{\rho}}_\alpha + \Delta\boldsymbol{\rho}_\alpha)(\bar{\boldsymbol{\rho}}_\alpha + \Delta\boldsymbol{\rho}_\alpha)^\top] \\ &= \bar{\boldsymbol{M}} + \frac{\epsilon^2}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha V_0[\boldsymbol{\rho}_\alpha] \end{aligned} \tag{3.20}$$

ただし， $\bar{\boldsymbol{M}}$ は式 (3.18) の $\boldsymbol{\rho}_\alpha$ を真の値 $\bar{\boldsymbol{\rho}}_\alpha$ で置き換えて得られるものである．式 (3.7) により $\bar{\boldsymbol{M}}\bar{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{0}$ であるから，真の値 $\bar{\boldsymbol{\nu}}$ はモーメント行列 $\bar{\boldsymbol{M}}$ の固有値 0 に対する単位固有ベクトルとなる． $E[\boldsymbol{M}]$ は $\bar{\boldsymbol{M}}$ から $O(\epsilon^2)$ だけ摂動を受けているため， $\boldsymbol{M}$ から計算される固有ベクトル $\boldsymbol{\nu}$ も $O(\epsilon^2)$ だけの摂動を受ける．これは摂動定理 [23] としてよく知られている．そこで**不偏モーメント行列**を次のように定義する．

$$\hat{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} - \epsilon^2 \boldsymbol{N} \tag{3.21}$$

ただし $\boldsymbol{N}$ は次のように定義する行列である．

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha V_0[\boldsymbol{\rho}_\alpha] \tag{3.22}$$

式 (3.20), (3.21) より

$$E[\hat{\boldsymbol{M}}] = \bar{\boldsymbol{M}} \tag{3.23}$$

であることがわかる．したがって， $\boldsymbol{\nu}$ の不偏推定値は次の最適化で求められる．

$$\hat{J}[\boldsymbol{\nu}] = (\boldsymbol{\nu}, \hat{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{\nu}) \to \min \tag{3.24}$$

この最適化の解 $\hat{\boldsymbol{\nu}}$ は，式 (3.21) の不偏モーメント行列 $\hat{\boldsymbol{M}}$ の最小固有値に対する単位固有ベクトルである．

3.1.7 くりこみ法

式 (3.21) によって不偏モーメント行列を計算するためには，ノイズレベル ϵ の値を正確に知る必要がある．しかし，実際に ϵ の値を前もって評価することは非常に難しい．もし小さく見積ると偏差を十分に打ち消せない．一方，大きく見積ると逆の方向に偏差を生じてしまう．また $V_0[\boldsymbol{\rho}_\alpha]$ の計算において，真の値 $\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha$ を観測値 $\boldsymbol{r}_\alpha$ で近似しているため，観測された点が原点に近ければ精度がよく，遠ければ精度が悪いとみなされてしまう．

このようなことを防ぐために直線当てはめやコニック当てはめと同様に**くりこみ法**を用いる．また各々の繰り返しにおいて，当てはめた平面に $\boldsymbol{r}_\alpha$ を射影し，その射影した点を $\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha$ の近似値として用いて $V_0[\boldsymbol{\rho}_\alpha]$ を更新することも同時に行なう．

ϵ を変数 c で置き換えると，くりこみ法の手順は次のようになる [26, 47].

1. 次の行列 $\boldsymbol{V}_\alpha$ を計算する．

$$\boldsymbol{V}_\alpha = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha^\top & \\ & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha = 1, ..., N \tag{3.25}$$

   そして， $c = 0$, $W_\alpha = 1$, $V_0[\boldsymbol{\rho}_\alpha] = \boldsymbol{V}_\alpha$, $\alpha = 1$, ..., N とおく．

2. 式 (3.18) と (3.22) により $\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{N}$ を計算する．

3. 不偏モーメント行列

$$\hat{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} - c\boldsymbol{N} \tag{3.26}$$

   を計算し，その最小固有値 λ と対応する単位固有ベクトル $\boldsymbol{\nu}$ を計算する．

4. もし $\lambda \approx 0$ であれば $\boldsymbol{\nu}$, c, $\hat{\boldsymbol{M}}$ を返す．そうでなければ c, $V_0[\boldsymbol{\rho}_\alpha]$, W_α を次のように更新する．

$$c \leftarrow c + \frac{\lambda}{(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{N}\boldsymbol{\nu})} \tag{3.27}$$

$$V_0[\boldsymbol{\rho}_\alpha] \leftarrow \frac{\nu_4^2}{((\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\rho}_\alpha) - \nu_4^2)^2} \boldsymbol{V}_\alpha \tag{3.28}$$

$$W_\alpha \leftarrow \frac{1}{(\boldsymbol{\nu}, V_0[\boldsymbol{\rho}_\alpha]\boldsymbol{\nu})} \tag{3.29}$$

5. ステップ 2 に戻る．

返された $\boldsymbol{\nu}$ を $\hat{\boldsymbol{\nu}}$ と書く．くりこみ法で返された c の値から，二乗ノイズレベル ϵ^2 の不偏推定量が次のように得られる．

$$\hat{\epsilon}^2 = \frac{c}{1 - 3/N} \tag{3.30}$$

これは式 (3.24) の残差を $\hat{J}[\hat{\boldsymbol{\nu}}]$ とするとき， $N\hat{J}[\hat{\boldsymbol{\nu}}]/\epsilon^2$ が近似的に自由度 $N-3$ の χ^2 分布に従う確率変数であることから導かれる [40].

式 (3.10) の共分散行列は，返された不偏モーメント行列 $\hat{\boldsymbol{M}}$ を用いて次のように近似することができる．

$$V[\hat{\boldsymbol{\nu}}] = \frac{\hat{\epsilon}^2}{N} \left(\hat{\boldsymbol{M}}\right)_3^- \tag{3.31}$$

くりこみ法が完全に収束していれば $\hat{\boldsymbol{M}}$ の最小固有値が厳密に 0 であり， $\hat{\boldsymbol{M}}$ のランクは 3 となるが，数値計算などの誤差のために最小固有値が 0 とならない可能性がある．式 (3.31) でランクを 3 に強制しているのは，これを防ぐためである．

3.1.8 平面の再構成とその信頼性

得られた解 $\hat{\boldsymbol{\nu}}$ より，平面のパラメータ $\{\boldsymbol{n}, d\}$ は次のように計算できる．

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{1-\hat{\nu}_4{}^2}} \begin{pmatrix} \hat{\nu}_1 \\ \hat{\nu}_2 \\ \hat{\nu}_3 \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

$$d = -\frac{\hat{\nu}_4}{\sqrt{1-\hat{\nu}_4{}^2}} \tag{3.33}$$

ここで $\boldsymbol{\nu} \to \boldsymbol{\nu} + \Delta\boldsymbol{\nu}$ となると，$\boldsymbol{n}$ および d の変動量 $\Delta\boldsymbol{n}$ および Δd は，第 1 近似においてそれぞれ次式で表わされる [40].

$$\Delta\boldsymbol{n} = \sqrt{1+d^2}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}} \begin{pmatrix} \Delta\nu_1 \\ \Delta\nu_2 \\ \Delta\nu_3 \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

$$\Delta d = -\sqrt{(1+d^2)^3}\Delta\nu_4 \tag{3.35}$$

したがって，式 (3.31) で得られた $\hat{\boldsymbol{\nu}}$ の共分散行列 $V[\hat{\boldsymbol{\nu}}]$ から $\boldsymbol{n}$ の共分散行列 $V[\hat{\boldsymbol{n}}]$，$\boldsymbol{n}$ と d の相関ベクトル $V[\hat{\boldsymbol{n}}, d]$，$d$ の分散 $V[\hat{d}]$ が次のように計算される [47].

$$V[\hat{\boldsymbol{n}}] = E[\Delta\boldsymbol{n}\Delta\boldsymbol{n}^\top] = (1+d^2)\boldsymbol{P}_{\hat{\boldsymbol{n}}} \begin{pmatrix} V[\hat{\boldsymbol{\nu}}]_{11} & V[\hat{\boldsymbol{\nu}}]_{12} & V[\hat{\boldsymbol{\nu}}]_{13} \\ V[\hat{\boldsymbol{\nu}}]_{21} & V[\hat{\boldsymbol{\nu}}]_{22} & V[\hat{\boldsymbol{\nu}}]_{23} \\ V[\hat{\boldsymbol{\nu}}]_{31} & V[\hat{\boldsymbol{\nu}}]_{32} & V[\hat{\boldsymbol{\nu}}]_{33} \end{pmatrix} \boldsymbol{P}_{\hat{\boldsymbol{n}}} \tag{3.36}$$

$$V[\hat{\boldsymbol{n}}, d] = E[\Delta\boldsymbol{n}\Delta d] = -(1+d^2)^2\boldsymbol{P}_{\hat{\boldsymbol{n}}} \begin{pmatrix} V[\hat{\boldsymbol{\nu}}]_{14} \\ V[\hat{\boldsymbol{\nu}}]_{24} \\ V[\hat{\boldsymbol{\nu}}]_{34} \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

$$V[d] = E[\Delta d\Delta d] = (1+d^2)^3 V[\hat{\boldsymbol{\nu}}]_{44} \tag{3.38}$$

ただし $\boldsymbol{P}_{\hat{\boldsymbol{n}}} = \boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{n}}^\top$ であり，これは単位法線ベクトル $\hat{\boldsymbol{n}}$ を持つ平面への射影行列である．

データ点 $\{\boldsymbol{r}_\alpha\}$ を求めた平面 $(\hat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{r}) = d$ 上に乗せるには，次のような補正を行なえばよい．

$$\hat{\boldsymbol{r}}_\alpha = \frac{\hat{d}\boldsymbol{r}_\alpha}{(\hat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{r}_\alpha)} \tag{3.39}$$

3.1.9 標準変位

ベクトル $\boldsymbol{\nu}$ の推定値を $\hat{\boldsymbol{\nu}}$，その共分散行列を $V[\hat{\boldsymbol{\nu}}]$ とする．$\hat{\boldsymbol{\nu}}$ は単位ベクトルであるから，誤差は $\hat{\boldsymbol{\nu}}$ に直交する平面に拘束される．

共分散行列 $V[\hat{\boldsymbol{\nu}}]$ の最大固有値を $\lambda_{\max}$，対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{\xi}_{\max}$ とすると，$\boldsymbol{\xi}_{\max}$ は誤差の最も発生しやすい方向を表わし，$\sqrt{\lambda_{\max}}$ はその方向における標準偏差を示している．したがって推定した平面の標準変位は次のように表わせる．

$$\boldsymbol{\nu}^+ = N[\hat{\boldsymbol{\nu}} + \sqrt{\lambda_{\max}}\boldsymbol{\xi}_{\max}] \tag{3.40}$$

$$\boldsymbol{\nu}^- = N[\hat{\boldsymbol{\nu}} - \sqrt{\lambda_{\max}}\boldsymbol{\xi}_{\max}] \tag{3.41}$$

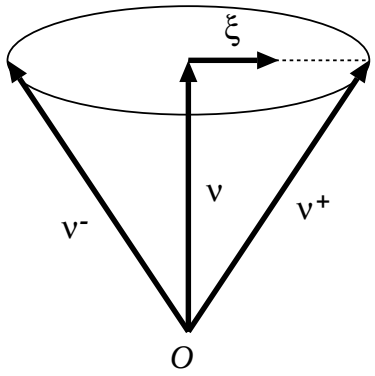


図 3.2: 標準変位.

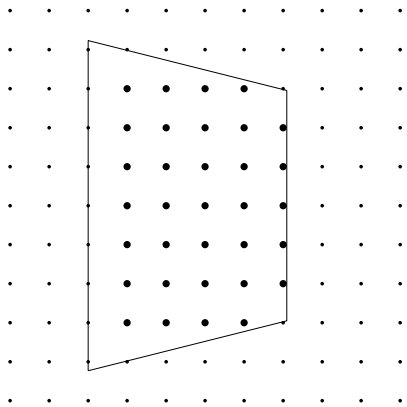


図 3.3: センサから見た平面.

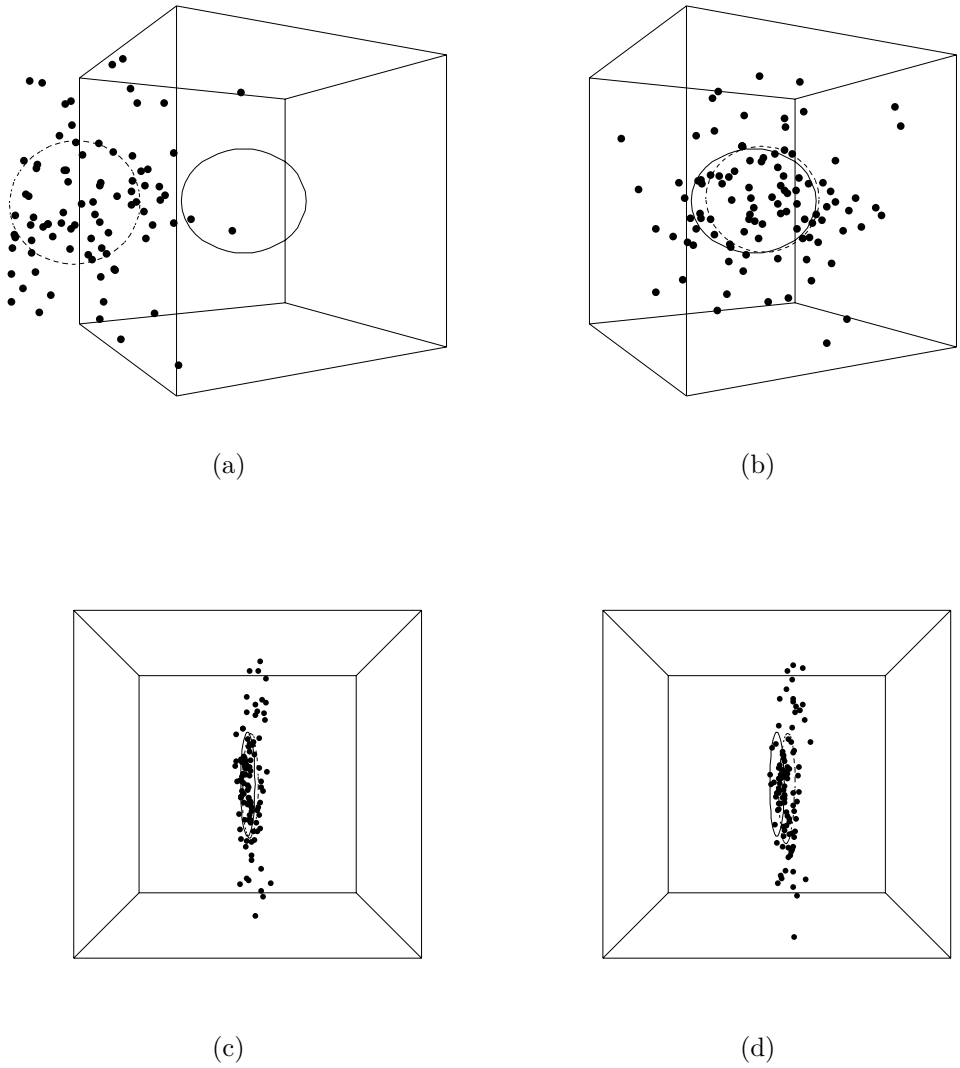


図 3.4: (a) 最適最小二乗法の誤差分布. (b) くりこみ法の誤差分布. (c) (b) を横から見た場合. (d) 共分散行列の更新をしない場合.

3.1.10 シミュレーション

3 次元空間内にある大きさを持つ平面を想定する．原点にレンジファインダを置き，空間に対して等間隔に放射して距離データを求めるものとする．図 3.3にシミュレーションに用いたパターンを示す．これはセンサの中心から見たデータを画像として可視化したものである．図中の小さな点は距離データが得られなかった (距離無限大の) 観測点であり，大きな点が距離データの得られた実際の観測点である．これに式 (3.11) のモデルにしたがってそれぞれの観測点に独立に $\epsilon = 0.1$ の正規乱数を加える．真の平面パラメータを $\{\bar{\boldsymbol{n}}, \bar{d}\}$，計算により求めた平面パラメータを $\{\hat{\boldsymbol{n}}, \hat{d}\}$ とすると，$\bar{\boldsymbol{n}}$ と $\hat{\boldsymbol{n}}$ はそれぞれ単位ベクトルであるから，その誤差は第 1 近似において $\bar{\boldsymbol{n}}$ に直交する．したがって，当てはめの誤差を次に示す 3 次元ベクトルで表わすことができる [47].

$$\Delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{P}_{\bar{\boldsymbol{n}}}(\hat{\boldsymbol{n}} - \bar{\boldsymbol{n}}) + \frac{\hat{d} - \bar{d}}{\bar{d}}\bar{\boldsymbol{n}}. \tag{3.42}$$

ただし $\boldsymbol{P}_{\bar{\boldsymbol{n}}} = \boldsymbol{I} - \bar{\boldsymbol{n}}\bar{\boldsymbol{n}}^\top$ である．式 (3.38) により求められる共分散行列 $V[\hat{\boldsymbol{n}}]$，相関ベクトル $V[\hat{\boldsymbol{n}}, d]$，分散 $V[\hat{d}]$ から誤差ベクトル $\Delta \boldsymbol{u}$ の共分散行列が次のように計算される．

$$V[\Delta \boldsymbol{u}] = V[\hat{\boldsymbol{n}}] + \frac{1}{\bar{d}}(V[\hat{\boldsymbol{n}}, \hat{d}]\bar{\boldsymbol{n}}^\top + \bar{\boldsymbol{n}}V[\hat{\boldsymbol{n}}, \hat{d}]^\top) + \frac{V[\hat{d}]}{\bar{d}^2}\bar{\boldsymbol{n}}\bar{\boldsymbol{n}}^\top \tag{3.43}$$

もし $\hat{\boldsymbol{u}}$ の分布が正規分布であれば，パラメータ空間における等確率面は $(\boldsymbol{u} - \hat{\boldsymbol{u}}, V[\hat{\boldsymbol{u}}]^{-1}(\boldsymbol{u} - \hat{\boldsymbol{u}})) =$ (一定) の曲面である．そこで楕円体

$$(\boldsymbol{u} - \hat{\boldsymbol{u}}, V[\hat{\boldsymbol{u}}]^{-1}(\boldsymbol{u} - \hat{\boldsymbol{u}})) = 1 \tag{3.44}$$

の内部を**標準信頼領域**と呼ぶ．図 3.4は，異なる誤差パターンで 100 回シミュレーションを行なったときの $\Delta \boldsymbol{u}$ を 3 次元的にプロットしたものである．図 3.4(a) は (重みを真の値から計算する) 最適最小二乗近似による誤差の分布を表わし，図 3.4(b) は本手法による誤差の分布を表わす．また図 3.4(c) は図 3.4(b) を横から見た図を示す．図 3.4(d) は本手法において，共分散行列の更新を行なわない場合の誤差の分布を表わす．それぞれ図中の楕円体は標準信頼領域を表わしている．これらの図を比較して分かるように，最小二乗解は偏差を生じているが，本手法では生じていない．また本手法における誤差の分布は標準信頼領域で示される限界をほぼ達成していることがわかる．

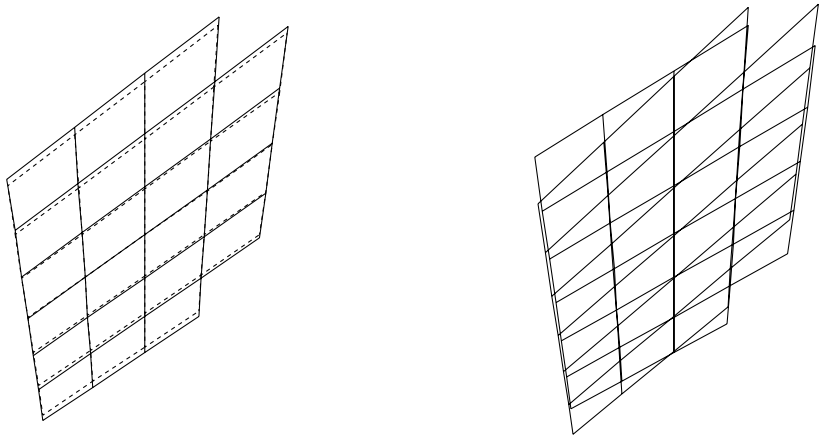
また図 3.5に本手法により当てはめた平面および標準変位を示す．これは式 (3.31) から得られた共分散行列 $V[\hat{\boldsymbol{\nu}}]$ を用いて計算した．

3.1.11 直線の当てはめ

センサの放射方向を水平面に限定した場合，物体が平面であれば観測点は一直線上に乗る．武田ら [76]，Takeda ら [77] が考えたのはこのような場合である．田川[75] は同じモデルに基づいた複数視点からのデータに対し直線を当てはめている．ここでは，平面の場合と同様に考えて解析を行なう．

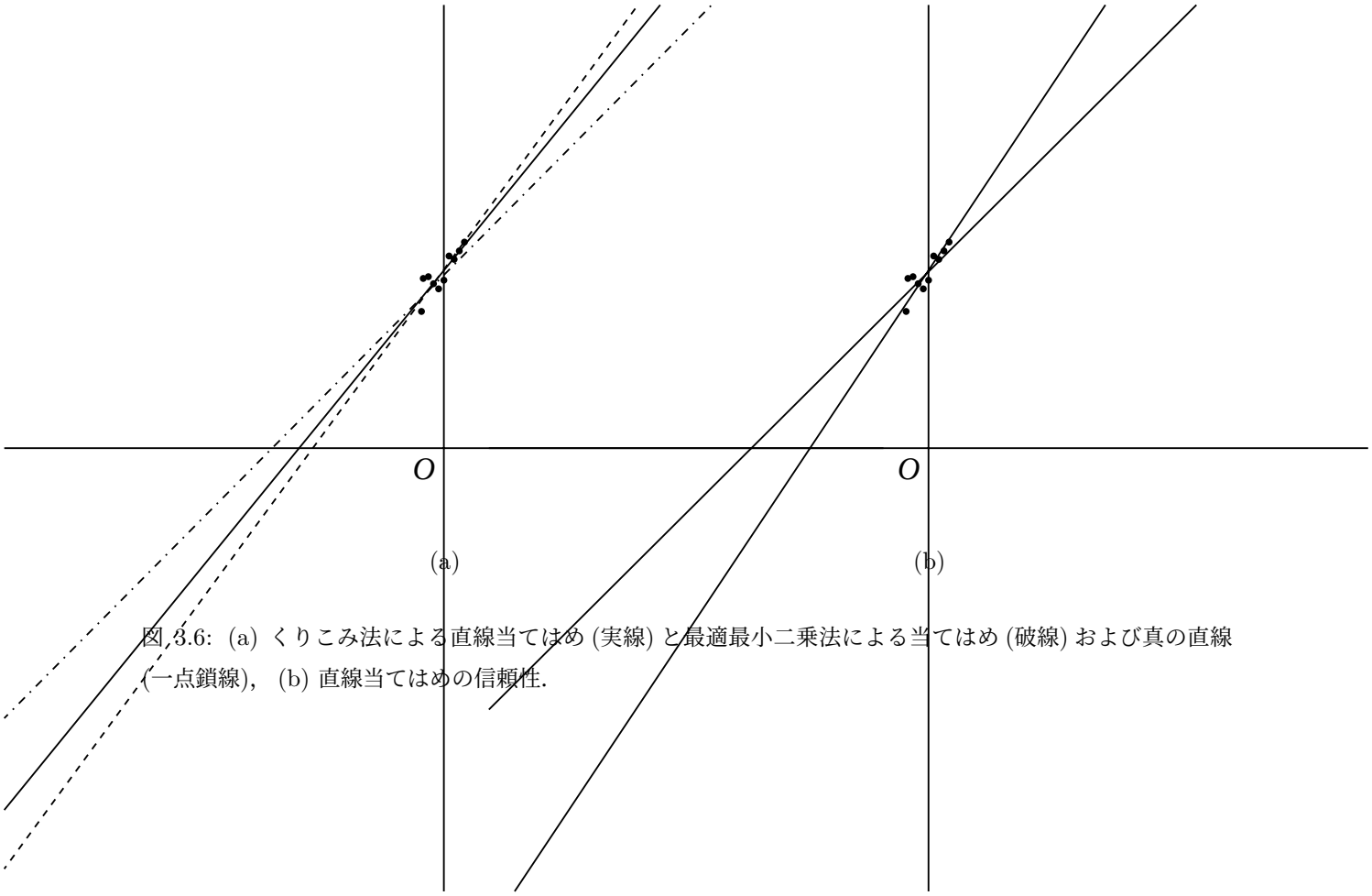
水平面上に XY 座標をとり，原点 O にセンサを固定した場合，その観測点 (x_α, y_α) は次のようなベクトルで表わせる．

$$\boldsymbol{x}_\alpha = \begin{pmatrix} x_\alpha/r_0 \\ y_\alpha/r_0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.45}$$



(a) (b)

図 3.5: (a) くりこみ法による復元. (b) その標準変位.



(a) (b)

図 3.6: (a) くりこみ法による直線当てはめ (実線) と最適最小二乗法による当てはめ (破線) および真の直線 (一点鎖線), (b) 直線当てはめの信頼性.

ここで r_0 はスケール変換のための定数 (例えば観測点までの平均値) とする．当てはめる直線の方程式を $Ax + By + C = 0$ とすると，これは次の 3 次元ベクトルで指定できる．

$$\boldsymbol{n} = N[\begin{pmatrix} A \\ B \\ C/r_0 \end{pmatrix}] \tag{3.46}$$

このとき，直線当てはめの問題は次のように書ける．すなわち，真の位置 $\{\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha\}$, $\alpha = 1, ..., N$ が

$$(\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha, \boldsymbol{n}) = 0, \qquad \alpha = 1, ..., N \tag{3.47}$$

を満たすような 3 次元ベクトル $\boldsymbol{n}$ を，データ列 $\{\boldsymbol{x}_\alpha\}$, $\alpha = 1, ..., N$ から推定する問題とみなせる．

$\|\boldsymbol{n}\| = 1$ の条件のもとでのこの問題の $\boldsymbol{n}$ の最適解は，次の最小化によって与えられる [32].

$$J[\boldsymbol{n}] = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_\alpha)^2}{(\boldsymbol{n}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{n})} \to \min \tag{3.48}$$

平面の場合と同様に，誤差の方向はセンサの放射方向であり，その大きさは距離に比例すると仮定すれば，$\boldsymbol{x}_\alpha$ の $V[\boldsymbol{x}_\alpha]$ は次のように表わすことができる．

$$V[\boldsymbol{x}_\alpha] = E[\Delta\boldsymbol{x}_\alpha \Delta\boldsymbol{x}_\alpha^\top] = \epsilon^2 V_0[\boldsymbol{x}_\alpha] \tag{3.49}$$

ここで

$$V_0[\boldsymbol{x}_\alpha] = (\boldsymbol{x}_\alpha - \boldsymbol{k})(\boldsymbol{x}_\alpha - \boldsymbol{k})^\top \tag{3.50}$$

であり， $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)^\top$ とする．

得られた解を $\hat{\boldsymbol{n}}$ とすると， $\hat{\boldsymbol{n}}$ の信頼性は次の共分散行列で評価できる．

$$V[\hat{\boldsymbol{n}}] = \left(\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha^\top}{(\bar{\boldsymbol{n}}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\bar{\boldsymbol{n}})} \right)^- \tag{3.51}$$

これは達成できる精度の限界を示すものであることが証明されている [32].

最適解を求めるためのくりこみ法の手順は次のようになる．

1. $c = 0$, $W_\alpha = 1$, $\alpha = 1, ..., N$ と置く．

2. 次の行列 $\boldsymbol{M}$ および $\boldsymbol{N}$ を計算する．

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha \boldsymbol{x}_\alpha \boldsymbol{x}_\alpha^\top \tag{3.52}$$

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha V_0[\boldsymbol{x}_\alpha] \tag{3.53}$$

$$W_\alpha = \frac{1}{(\boldsymbol{n}, V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{n})} \tag{3.54}$$

3. 不偏モーメント行列

$$\hat{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} - c\boldsymbol{N} \tag{3.55}$$

の最小固有値 λ と対応する単位固有ベクトル $\boldsymbol{n}$ を計算する．

4. $\lambda \approx 0$ であれば $\boldsymbol{n}$, c, $\hat{\boldsymbol{M}}$ を返して終了する．そうでなければ定数 c と重み W_α を次のように更新する．

$$c \leftarrow c + \frac{\lambda}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{N}\boldsymbol{n})} \tag{3.56}$$

$$W_\alpha \leftarrow \frac{1}{(\boldsymbol{n}, V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{n})} \tag{3.57}$$

5. ステップ 2 に戻る．

返された $\boldsymbol{n}$ を $\hat{\boldsymbol{n}}$ と書く．くりこみ法で返された c の値から，二乗ノイズレベル ϵ^2 の不偏推定量が次のように得られる．

$$\hat{\epsilon}^2 = \frac{c}{1 - 2/N} \tag{3.58}$$

これは式 (3.48) の残差を $\hat{J}[\hat{\boldsymbol{n}}]$ とするとき， $N\hat{J}[\hat{\boldsymbol{n}}]/\epsilon^2$ が近似的に自由度 $N-2$ の χ^2 分布に従う確率変数であることから導かれる [40].

式 (3.51) の共分散行列は，返された不偏モーメント行列 $\hat{\boldsymbol{M}}$ を用いて次のように近似できる．

$$V[\boldsymbol{n}] \approx \frac{\hat{\epsilon}^2}{N} \left(\hat{\boldsymbol{M}}\right)_2^- \tag{3.59}$$

くりこみ法が完全に収束していれば $\hat{\boldsymbol{M}}$ の最小固有値が厳密に 0 であり， $\hat{\boldsymbol{M}}$ のランクは 2 となるが，誤差のために最小固有値が 0 とならない可能性がある．式 (3.59) でランクを 2 に強制しているのは，これを防ぐためである．

共分散行列 $V[\hat{\boldsymbol{n}}]$ の最大固有値を $\lambda_{\max}$，対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{\xi}_{\max}$ とすると，推定した直線の標準変位は次のように表わせる．

$$\boldsymbol{n}^+ = N[\boldsymbol{n} + \sqrt{\lambda_{\max}}\boldsymbol{\xi}_{\max}] \tag{3.60}$$

$$\boldsymbol{n}^- = N[\boldsymbol{n} - \sqrt{\lambda_{\max}}\boldsymbol{\xi}_{\max}] \tag{3.61}$$

10 点のデータ点に対し，シミュレーションを行なった結果を図 3.6に示す．図 3.6(a) において，黒点がデータ点を示し，実線はくりこみ法による当てはめ結果，破線は最適最小二乗法による当てはめ結果，一点鎖線は真の直線を示す．また図 3.6(b) は当てはめた直線の信頼性を表わす標準変位を示したものである．

3.1.12 まとめ

本節では，前章と同様に金谷による一般理論をレンジファインダから得られるデータに平面を当てはめる問題に適用した．その際，レンジファインダ等から得られるレンジデータに含まれる誤差の統計的なモデルとして，誤差は距離に比例するというモデルを仮定し，最適な復元方法とその定量的な信頼性評価の方法を示した．

ここで一番問題となるのは採用したノイズモデルの妥当性である．実際のレンジファインダには様々な種類があり，それぞれ計測原理も異なる．したがって本手法が適用範囲できないレンジファインダも存在する．しかし，もし誤差の定性的な性質が予めわかっていれば本節と同様の理論で最適に当てはめることができる．したがって残された課題としては，実際のレンジファインダからのデータを用い，本節で採用した誤差モデルがどの程度有効なのか確認する必要がある．

3.2 ステレオ視による３次元復元の信頼性評価

2 台のカメラの位置関係が既知のとき，空間中の特徴点をそれぞれの投影像からステレオにより復元する問題を考える．一般に画像座標は量子化誤差を含めて必ず誤差を含んでいるため，対応する画像座標はエピ極線方程式を厳密に満たすとは限らない．そこで本節では画像面上に誤差のモデルを導入し，観測した画像座標を誤差のモデルに基づいて “統計的に最適” に補正する方法について述べる．また補正した点からの 3 次元復元および復元した点の信頼性を表す共分散行列を計算する手法について述べる．

3.2.1 はじめに

ステレオは画像から 3 次元を復元するための最も基本的な手段であり，移動ロボットや自律走行車などにおける視覚センサとして広く利用されている．しかし，従来のステレオの研究のほとんどすべては画像間の対応探索のアルゴリズムに関するものであった．確かに対応点探索は効率よく自動化するのが困難な課題であり，いったん対応が定まれば 3 次元を復元するのは自明のことと思える．そのため実画像からのステレオによる 3 次元復元のデモンストレーションも，実際には単に視差を表示したものであることが多かった．しかし，実際に 3 次元復元を行なおうとするといろいろな現実的な課題に直面する．そのひとつが復元した 3 次元形状の信頼性である [23, 24, 47]．信頼性が正しく評価できなければ移動ロボットや自律走行車が目的遂行のための適切な行動をとることができない．

画像に誤差がなければ，2 台のカメラによって観測した点から 3 次元位置が三角測量の原理で一意に決定できる．しかし，現実には量子化誤差や画像処理による誤差により，画像座標には何らかの誤差が含まれる．そのため，それぞれのカメラの原点を始点とし，観測した画像上の対応点を通る視線は交わるとは限らない．そこで，従来は両方の視線に最も近い点を最小二乗法で推定し，空間位置とすることがよく行なわれてきた [81]．しかし，このようにして復元した空間点の信頼性を理論的に評価することは困難である．Matthies と Shafer[60] は復元した 3 次元点の誤差モデルを球形と仮定した場合と楕円体で近似した場合におけるロボットのナビゲーションの精度を比較した．また Matthies[61] は 1 次元および 2 次元の対応探索にそれぞれにおける誤差モデルを仮定して自動走行車に応用した． Ayache と Faugeras[3] はガウス雑音を仮定して，拡張カルマンフィルタを用いて環境の 3 次元マップを作成した．これらはいずれも分散が 1 画素の誤差を仮定している．

本節では，金谷によって導かれた最適補正の理論 [38] を用いて，第 2章において仮定した誤差の統計的なモデル，すなわち誤差の定性的な特徴は既知であるが，その絶対的な大きさは未知であるとするモデルを用い，幾何学的な制約条件を満足するように画像を最適に補正することにより，3 次元位置を計算する方法について述べる．このようにして復元した空間点は，その信頼性を表わす共分散行列も理論的に計算できる．以下，これらの手法について述べ，シミュレーションおよび実画像による実験により，その有効性を示す．

3.2.2 ステレオの幾何学モデル

図 3.7に示すようにカメラを配置する．それぞれのカメラのレンズの中心を O, O' とし，光軸を Z, Z' 軸にとる．また Z, Z' 軸に直交する画像面を置き，それぞれ焦点距離 (すなわち O, O' からの距離) を f, f' とする．2 台のカメラの位置関係を回転 $\boldsymbol{R}$(3×3行列) と並進 $\boldsymbol{h}$(3次元ベクトル) で表わし，それぞれ既知とする．この $\{\boldsymbol{R}, \boldsymbol{h}\}$ を**運動パラメータ** (motion parameter) と呼ぶ．

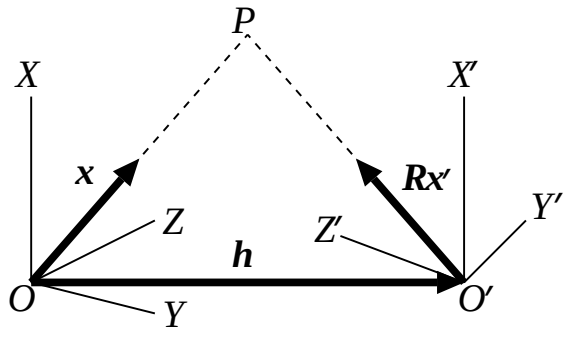


図 3.7: ステレオの幾何学モデル.

空間中の点を 2 台のカメラで撮影し，それぞれの画像面の画像座標 (x, y), (x', y') の位置に観測したとき，これを次の 3 次元ベクトルで表わす.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x/f \\ y/f \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x'/f' \\ y'/f' \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.62}$$

3.2.3 エピ極線方程式

図 3.7の幾何学的関係からわかるように，ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{h}$ は**共面**，すなわち同一平面上にあり，次の**エピ極線方程式** (epipolar equation) を満足する.

$$|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{R}\boldsymbol{x}'| = 0 \tag{3.63}$$

基本行列 (essential matrix) を

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{h} \times \boldsymbol{R} \tag{3.64}$$

と定義する．この基本行列 $\boldsymbol{G}$ を用いると，エピ極線方程式 (3.63) は次のように書き直すことができる.

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}') = 0 \tag{3.65}$$

式 (3.63) および式 (3.65) を「エピ極線方程式」と呼ぶのは次の理由による．式 (3.65) は $\boldsymbol{x}'$ を固定すれば，第 1 の画像面の直線の方程式を表わす．この直線は第 2 のカメラ系の原点 O' を始点とし，点 $\boldsymbol{x}'$ を通る視線の像であり， $\boldsymbol{x}'$ の**エピ極線** (epipolar) として知られている．同様に $\boldsymbol{x}$ を固定すれば，式 (3.65) は第 2 の画像面上の直線の方程式を表わす．この直線は $\boldsymbol{x}$ のエピ極線，すなわち第 1 のカメラ系の原点 O を始点とし，点 $\boldsymbol{x}$ を通る視線の像である．いいかえれば，視点 O, O' と観測点 P のつくる平面と各画像面との交線がエピ極線である (図 3.8)．このことから，ステレオ画像の互いに対応する点はそれぞれ他方の点のエピ極線上にあるという，よく知られた**エピ極線拘束条件** (epipolar constraint) が得られる [11, 22, 23].

3.2.4 誤差の統計的モデル

エピ極線方程式を用いれば，ある点に対応する点は他方の画像のその点に関するエピ極線上にあるから，対応点探索はその上の 1 次元探索に帰着する．特にエッジ間の対応については，各エッジ要素に対応する点

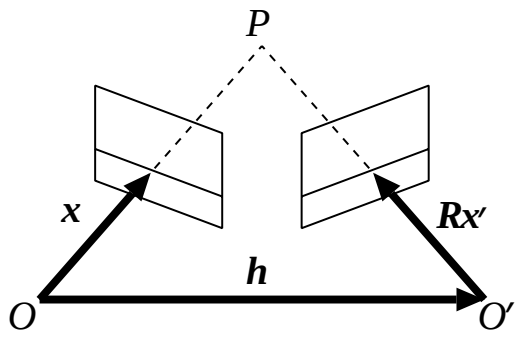


図 3.8: エピ極線拘束条件.

は他方の画像上のその画素のエピ極線と対応するエッジとの交点として一意的に定まる．しかし，エピ極線拘束条件は画像や運動パラメータが厳密に正しいときのみに成立するものであり，個々の特徴点間の対応を求める場合は，対応する特徴点が厳密にエピ極線上に存在するとは限らない．したがってエピ極線の近傍も探索する必要があり，そのようにして最適にマッチさせた特徴点の値は必ずしもエピ極線方程式 (3.65) を満たすとは限らない．本節ではこのような場合を想定する．

対応が定まった特徴点の組を式 (3.62) のベクトルの形で表わしたものを $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'$ とする．画像には誤差や歪みがあり，それらの真の値は $\bar{\boldsymbol{x}}$, $\bar{\boldsymbol{x}}'$ であるとし，次のように書く．

$$\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{x}} + \Delta\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x}' = \bar{\boldsymbol{x}}' + \Delta\boldsymbol{x}' \tag{3.66}$$

そして，誤差 $\Delta\boldsymbol{x}$, $\Delta\boldsymbol{x}'$ を期待値 $\mathbf{0}$ の独立な確率変数であるとみなし，それぞれの共分散行列を

$$V[\boldsymbol{x}] = E[\Delta\boldsymbol{x}\Delta\boldsymbol{x}^\top], \qquad V[\boldsymbol{x}'] = E[\Delta\boldsymbol{x}'\Delta\boldsymbol{x}'^\top] \tag{3.67}$$

とする．これは画像上の点ごとに異なっていてもよい．実際の誤差の絶対的なレベルをあらかじめ知ることは不可能であるため，未知の**ノイズレベル** ϵ を導入し，それぞれの共分散行列を

$$V[\boldsymbol{x}] = \epsilon^2 V_0[\boldsymbol{x}], \qquad V[\boldsymbol{x}'] = \epsilon^2 V_0[\boldsymbol{x}'] \tag{3.68}$$

の形に書く． $V_0[\boldsymbol{x}]$, $V_0[\boldsymbol{x}']$ を**正規化共分散行列**と呼び，既知と仮定する．誤差は画像面上に拘束されているため，共分散行列 $V[\boldsymbol{x}]$, $V[\boldsymbol{x}']$ は共にランク 2 の特異行列である．

3.2.5 特徴点の最適補正

式 (3.66)， (3.68) で定義された画像の誤差の統計モデルを用いて，誤差 $\Delta\boldsymbol{x}$, $\Delta\boldsymbol{x}'$ を推定することを考える．そのためには，観測値 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'$ を補正した

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - \Delta\boldsymbol{x}, \qquad \hat{\boldsymbol{x}}' = \boldsymbol{x}' - \Delta\boldsymbol{x}' \tag{3.69}$$

がエピ極線方程式 (3.65) を満たすようにすればよい (図 3.9)． エピ極線方程式 (3.65) に代入すると次のようになる．

$$(\boldsymbol{x} - \Delta\boldsymbol{x}, \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}' - \Delta\boldsymbol{x}')) = 0 \tag{3.70}$$

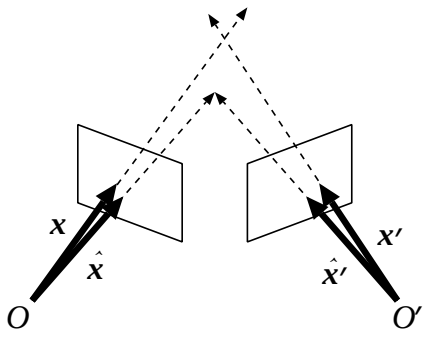


図 3.9: 特徴点の補正.

これを展開し，1次近似をとると次のようになる.

$$(\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}', \Delta\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{G}^\top\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{x}') = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}') \tag{3.71}$$

この式は誤差 $\Delta\boldsymbol{x}$, $\Delta\boldsymbol{x}'$ の定義する6次元空間内の超平面を表わす．この超平面上で最も確率が大きい点を $\Delta\boldsymbol{x}$, $\Delta\boldsymbol{x}'$ の推定値とすればよい．誤差の分布が正規分布であれば，確率が最も大きい $\Delta\boldsymbol{x}$, $\Delta\boldsymbol{x}'$ は**マハラノビス距離**で測って原点から最も近い点である．これは次の最適化として定式化できる [40].

$$J = (\Delta\boldsymbol{x}, V_0[\boldsymbol{x}]^-\Delta\boldsymbol{x}) + (\Delta\boldsymbol{x}', V_0[\boldsymbol{x}']^-\Delta\boldsymbol{x}') \to \min \tag{3.72}$$

ここで $V_0[\boldsymbol{x}]^-$, $V_0[\boldsymbol{x}']^-$ は，それぞれ $V_0[\boldsymbol{x}]$, $V_0[\boldsymbol{x}']$ の一般逆行列である．式 (3.72) の J は，定数差を除いて，「誤差が正規分布に従い，$\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{x}}'$ が真の位置である」というモデルのもとでの観測値 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'$ に対する対数尤度の符号を換えたものに等しい.

最小化 (3.72) の解 $\Delta\boldsymbol{x}$, $\Delta\boldsymbol{x}'$ はそれぞれ次式で与えられる (付録 A.5).

$$\Delta\boldsymbol{x} = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}')V_0[\boldsymbol{x}]\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}'}{(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{G}^\top V_0[\boldsymbol{x}]\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}') + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{G}V_0[\boldsymbol{x}']\boldsymbol{G}^\top\boldsymbol{x})} \tag{3.73}$$

$$\Delta\boldsymbol{x}' = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}')V_0[\boldsymbol{x}']\boldsymbol{G}^\top\boldsymbol{x}}{(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{G}^\top V_0[\boldsymbol{x}]\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}') + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{G}V_0[\boldsymbol{x}']\boldsymbol{G}^\top\boldsymbol{x})} \tag{3.74}$$

補正した $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{x}}'$ は確率変数であるから，式 (3.73) および (3.74) より，その正規化共分散行列は次のようになる [40].

$$V_0[\hat{\boldsymbol{x}}] = V_0[\boldsymbol{x}] - \frac{(V_0[\boldsymbol{x}]\boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{x}}')(V_0[\boldsymbol{x}]\boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{x}}')^\top}{(\hat{\boldsymbol{x}}', \boldsymbol{G}^\top V_0[\boldsymbol{x}]\boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{x}}') + (\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{G}V_0[\boldsymbol{x}']\boldsymbol{G}^\top\hat{\boldsymbol{x}})} \tag{3.75}$$

$$V_0[\hat{\boldsymbol{x}}'] = V_0[\boldsymbol{x}'] - \frac{(V_0[\boldsymbol{x}']\boldsymbol{G}^\top\hat{\boldsymbol{x}})(V_0[\boldsymbol{x}']\boldsymbol{G}^\top\hat{\boldsymbol{x}})^\top}{(\hat{\boldsymbol{x}}', \boldsymbol{G}^\top V_0[\boldsymbol{x}]\boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{x}}') + (\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{G}V_0[\boldsymbol{x}']\boldsymbol{G}^\top\hat{\boldsymbol{x}})} \tag{3.76}$$

$\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{x}}'$ の正規化相関行列も同様に求めることができる [40].

$$V_0[\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{x}}'] = \frac{(V_0[\boldsymbol{x}]\boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{x}}')(V_0[\boldsymbol{x}']\boldsymbol{G}^\top\hat{\boldsymbol{x}})^\top}{(\hat{\boldsymbol{x}}', \boldsymbol{G}^\top V_0[\boldsymbol{x}]\boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{x}}') + (\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{G}V_0[\boldsymbol{x}']\boldsymbol{G}^\top\hat{\boldsymbol{x}})} \tag{3.77}$$

ここで，誤差 $\Delta\boldsymbol{x}$, $\Delta\boldsymbol{x}'$ は互いに独立であると仮定しているが，補正後の $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{x}}'$ には互いに相関が生じることがわかる.

式 (3.73) は第 1 近似における解であるから，式 (3.69) の補正を行なってもエピ極線方程式 $(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{x}}') = 0$ が厳密に満されるとは限らない．そこで，これが十分満されるまで $\boldsymbol{x} \leftarrow \hat{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{x} \leftarrow \hat{\boldsymbol{x}}'$ として，この補正を反復する．

3.2.6 3 次元復元の信頼性

奥行き Z(付録 A.6) を用いると，復元点 $\boldsymbol{r}$ は次のように計算できる．

$$\boldsymbol{r} = Z\hat{\boldsymbol{x}} \tag{3.78}$$

この復元点 $\boldsymbol{r}$ の信頼性を表わす共分散行列 $V[\boldsymbol{r}]$ は次式で与えられる (付録 A.7).

$$\begin{aligned} V[\boldsymbol{r}] &= E[\Delta\boldsymbol{r}\Delta\boldsymbol{r}^\top] \\ &= E[(Z\Delta\hat{\boldsymbol{x}} + \Delta Z\hat{\boldsymbol{x}})(Z\Delta\hat{\boldsymbol{x}} + \Delta Z\hat{\boldsymbol{x}})^\top] \\ &= Z^2E[\Delta\hat{\boldsymbol{x}}\Delta\hat{\boldsymbol{x}}^\top] + Z(E[\Delta\hat{\boldsymbol{x}}\Delta Z]\hat{\boldsymbol{x}}^\top + \hat{\boldsymbol{x}}E[\Delta Z\Delta\hat{\boldsymbol{x}}^\top]) + E[\Delta Z\Delta Z]\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{x}}^\top \\ &= Z^2V[\hat{\boldsymbol{x}}] + Z(V[\hat{\boldsymbol{x}}, Z]\hat{\boldsymbol{x}}^\top + \hat{\boldsymbol{x}}V[\hat{\boldsymbol{x}}, Z]^\top) + V[Z]\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{x}}^\top \end{aligned} \tag{3.79}$$

ただし，共分散行列 $V[\hat{\boldsymbol{x}}]$, $V[\hat{\boldsymbol{x}}']$, 相関行列 $V[\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{x}}']$, 相関ベクトル $V[\hat{\boldsymbol{x}}, Z]$, 分散 $V[Z]$ はそれぞれ式 (3.75), (3.76), (3.77) および (A.51) から次のように計算できる．

$$V[\hat{\boldsymbol{x}}] = \hat{\epsilon}^2V_0[\hat{\boldsymbol{x}}], \qquad V[\hat{\boldsymbol{x}}'] = \hat{\epsilon}^2V_0[\hat{\boldsymbol{x}}'], \qquad V[\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{x}}'] = \hat{\epsilon}^2V_0[\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{x}}'] \tag{3.80}$$

$$V[Z] = \frac{Z^2(\hat{\boldsymbol{m}}, V[\hat{\boldsymbol{x}}]\hat{\boldsymbol{m}}) - 2ZZ'(\hat{\boldsymbol{m}}, V[\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{x}}']\boldsymbol{R}^\top\hat{\boldsymbol{m}}) + Z'^2(\hat{\boldsymbol{m}}, \boldsymbol{R}V[\hat{\boldsymbol{x}}']\boldsymbol{R}^\top\hat{\boldsymbol{m}})}{\|\hat{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{x}}'\|^2} \tag{3.81}$$

$$V[\hat{\boldsymbol{x}}, Z] = -\frac{ZV[\hat{\boldsymbol{x}}] - Z'V[\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{x}}']\hat{\boldsymbol{m}}}{(\hat{\boldsymbol{m}}, \hat{\boldsymbol{x}})} \tag{3.82}$$

ただし， $\hat{\boldsymbol{m}} = N[\boldsymbol{h} \times \hat{\boldsymbol{x}}] \times \hat{\boldsymbol{x}}'$ と置いた．

一方，式 (3.80) に現れる $\hat{\epsilon}^2$ は二乗ノイズレベル ϵ^2 の推定値であり，補正前の対応点 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'$ と，補正後の対応点 $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{x}}'$ から，以下のように推定できる [40].

$$\hat{\epsilon}^2 = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}')^2}{\|V_0[\hat{\boldsymbol{x}}']\boldsymbol{G}^\top\hat{\boldsymbol{x}}\|^2 + \|V_0[\hat{\boldsymbol{x}}]\boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{x}}'\|^2} \tag{3.83}$$

以上のプロセスは概念的には図 3.10のようになる．画像上の共分散行列 $V[\boldsymbol{x}]$, $V[\boldsymbol{x}']$ はそれぞれの画像上に**計量** (**マハラノビス計量**) を定義する．したがって 1 組の対応点は両者の直積空間上の 1 点とその空間の計量を定める．エピ極線方程式 (3.65) はこの直積空間中の 3 次元超曲面を定める．しかし画像から得られた直積点はその上にあるとは限らない．そこでこの超曲面に乗るように，この空間の計量に基づく最短距離の点に射影し，同時に共分散行列も射影する．この射影は，誤差の分布を正規分布とみなしたとき等確率面となる楕円体の長軸方向に行なう．このとき，射影による移動量から誤差の大きさを推定するのが式 (3.83) である．この 3 次元超曲面を式 (3.78), (A.44) によって 3 次元空間に写像して，復元点 $\boldsymbol{r}$ とその共分散行列 $V[\boldsymbol{r}]$ が得られる．

このようにして得られた共分散行列 $V[\boldsymbol{r}]$ は 3 次元空間中に (マハラノビス) 計量を定義し，その計量で測った一定の距離だけ誤差が生じる確率はどの方向にいっても等しい．

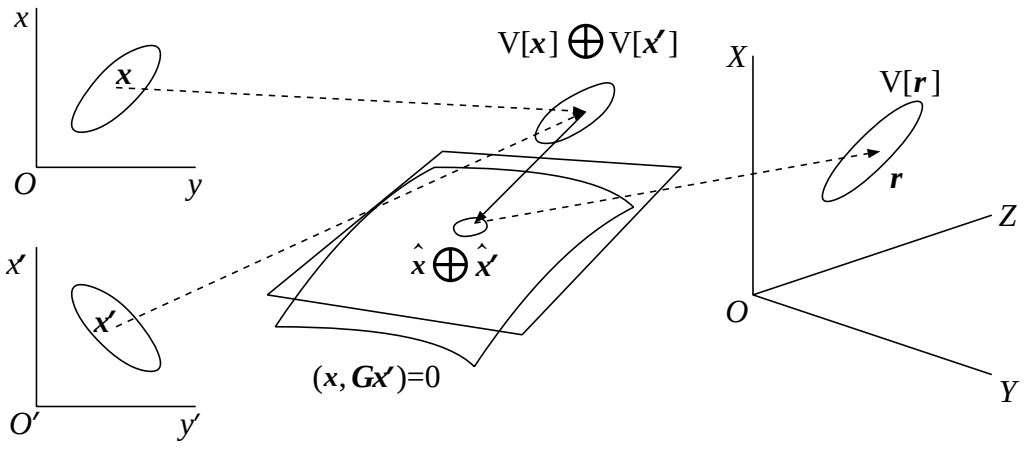


図 3.10: 3 次元復元の信頼性評価の原理.

3.2.7 標準信頼領域と標準変位

復元した 3 次元点の共分散行列 $V[\boldsymbol{r}]$ の固有値をそれぞれ λ_1, λ_2, λ_3 とし，対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ とする．この $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ をそれぞれ軸とし，対応する $\sqrt{\lambda_1}$, $\sqrt{\lambda_2}$, $\sqrt{\lambda_3}$ をそれぞれ半径とする楕円体を考えると，この楕円体は復元点 $\boldsymbol{r}$ の信頼性を表わしているとみなすことができる．この楕円体の内側を復元点の**標準信頼領域**と呼ぶ.

また，共分散行列 $V[\boldsymbol{r}]$ の最大固有値を $\lambda_{\max}$ とし，対応する単位固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_{\max}$ とすると，前節までの考察と同様 $\boldsymbol{u}_{\max}$ が誤差の最も発生しやすい方向であり，$\sqrt{\lambda_{\max}}$ がその方向の標準偏差を示す．したがって，復元した 3 次元点の標準変位は次のように書ける.

$$\boldsymbol{r}^+ = \boldsymbol{r} + \sqrt{\lambda_{\max}}\boldsymbol{u}_{\max} \tag{3.84}$$

$$\boldsymbol{r}^- = \boldsymbol{r} - \sqrt{\lambda_{\max}}\boldsymbol{u}_{\max} \tag{3.85}$$

3.2.8 実験

(1) シミュレーション

空間中に格子状の円筒を置き，その側面の 10×10 の格子点を特徴点とする (図 3.11参照)．それぞれのカメラとも焦点距離を $f = 600$(画素) に想定する．各 x, y 座標に独立に標準偏差 $\sigma = 2$(画素) の正規乱数をノイズとして加える (図 3.12)．したがってノイズレベルは $\epsilon = \sigma/f = 1/300$ であり，正規化共分散行列は次のようになる.

$$V_0[\boldsymbol{x}] = V_0[\boldsymbol{x}'] = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \tag{3.86}$$

ただし計算では ϵ は未知数として扱う.

これらのデータにより空間点を復元した結果を図 3.13(a) に示す．比較のために，従来の方法 (付録 B.1) による復元結果を図 3.13(b) に示す．比較してわかる通り，復元結果それ自体には大きな差はない.

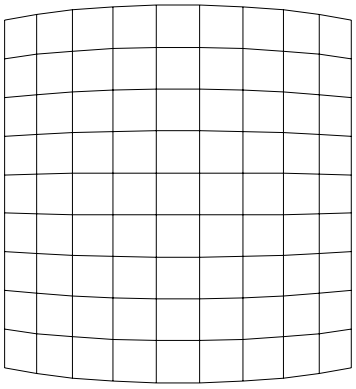


図 3.11: 特徴点 (真の値).

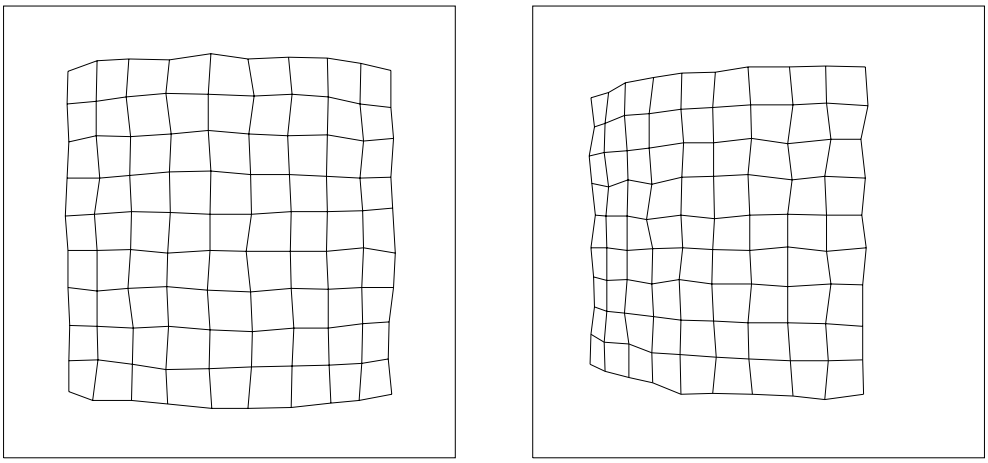
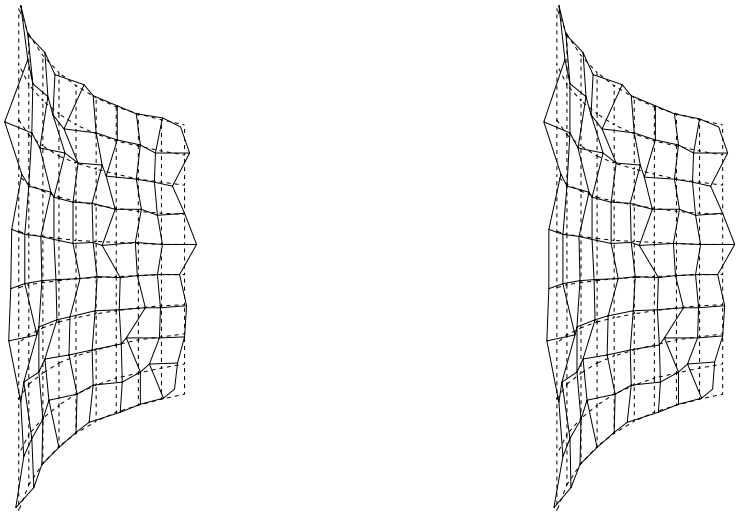


図 3.12: シミュレーションステレオ画像.



(a) (b)

図 3.13: (a) 本手法による復元結果. (b) 最小二乗法による復元結果.

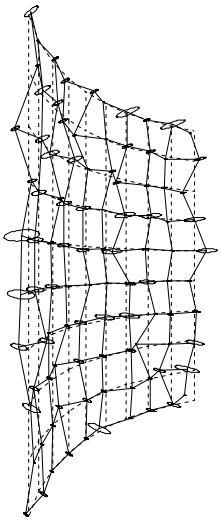


図 3.14: 復元点の信頼性.

図 3.15: 実ステレオ実画像.

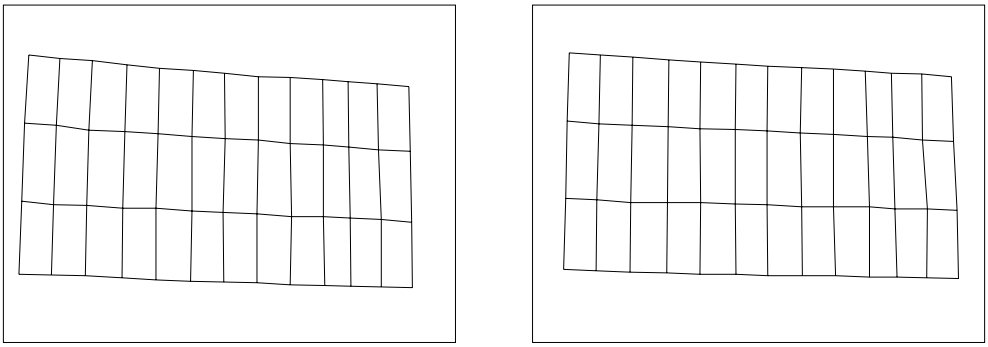


図 3.16: 図 3.15から抽出した格子のステレオ画像.

復元点とその標準誤差領域を図 3.14(a) に示す．この図より，復元した特徴点はほぼこの楕円面内に入っていることがわかる．また各特徴点から計算した $\hat{\epsilon}^2$ をもとにして推定した画像上の誤差 (単位は画素) の分布を図 3.14(b) に示す.

(2) 実画像による実験

図 3.15に建物の壁面を撮影した左右のステレオ画像を示す．これらの画像から，窓の隅を特徴点として抽出した画像を図 3.16に示す．また各点の標準変位のカメラに近い方のみからなる格子と遠い方からなる格子，および復元結果を図 3.17に示す.

この実験で用いたステレオの基線長 $\|\boldsymbol{h}\|$ は物体までの距離に比べて極めて小さい (約 1/16)．したがって復元した 3 次元形状の信頼性がかなり低いことがわかる．また壁面は右手が遠方に傾いているため，復元誤差も右手のほうが信頼性が低いこともわかる．このように，単に 3 次元位置が定まるだけでなく，その信頼性が定量的に評価できる.

3.2.9 まとめ

本節では，ステレオ画像の対応点から 3 次元復元を行なうために，金谷の導いた理論をもとに，画像の誤差の統計モデルを定義し，それに基づいた最適な復元法を示した．3 次元復元自体は従来の方法を用いても

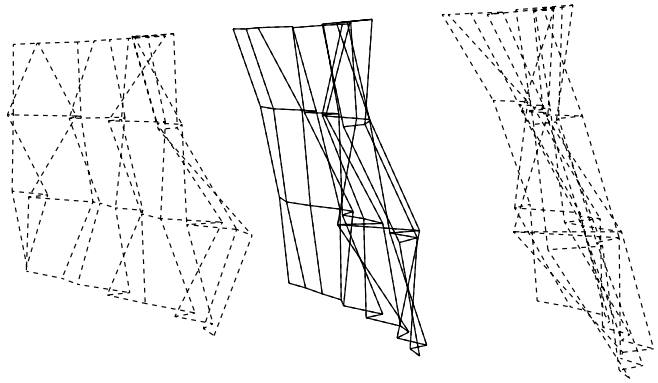


図 3.17: 復元結果とその信頼性.

ほとんど差はないが，単に3次元位置が復元できるだけでなく，復元した点の信頼性まで定量的に計算できる．

このことは，実際の応用を考えた場合非常に大きな意味を持つ．例えば移動ロボットの視覚としてステレオ視を採用し，本節の理論により3次元復元および信頼性評価を行なうことを考えると，位置情報の信頼性の高い物体が認識できれば，近くまで移動して物体を取ることが可能であり，逆に信頼性の低い物体に対しては再度別の位置から測定したり，別の方法で測定するなどの木目細かな制御を行なうことができる．またもしロボットが環境のモデルを持っている場合，固定された物体 (壁や机など) の位置を計測することにより，自分の現在位置の信頼性を評価することも可能となる．これを利用することにより，自律走行ロボットのナビゲーションなどに非常に有効な手法となると思われる．

一方，本節では対応点は決定済みとして扱ってきたが，実際の応用を考えた場合，この対応点探索は非常に重要な課題となる．しかし，もし精度の悪い方法で求めた場合，キャリブレーションの誤差と同様に復元点の信頼性を低下させることになる．また誤対応があれば，その復元点は極めて低い信頼性を持つと思われる．したがって，本手法の今後の課題としては，信頼性の評価を実際のデータを用いて対応点問題から検証していくことが重要であり，そのまま実用化に繋がると思われる．

3.3 ステレオ視による平面の最適当てはめとその信頼性評価

ステレオカメラの位置関係が与えられたとき，着目している空間中の特徴点がすべて同一平面上にあることが既知の場合に，その空間平面を推定する問題を考える．従来は与えられた特徴点からその空間位置を推定し，その空間点に平面を最小二乗法等で当てはめるというような間接的な方法がよく用いられてきた．本節では，観測した特徴点の幾何学的な制約を利用して，画像の誤差の統計的モデルをもとに，最尤推定法により直接的かつ最適に平面を当てはめる方法および復元の信頼性を定量的に評価する方法について述べる．

3.3.1 はじめに

第 3.1節で述べたように，屋内環境では壁や床，天井，机など平面状の物体が数多く存在している．したがって，これらのような平面状の物体を認識することは極めて重要な技術である．本節では，第 3.1節で考えたレンジファインダではなく，通常のステレオカメラから得られる画像に対し平面を当てはめることを考える．従来，ステレオ画像内の空間平面を認識する場合，まず両画像の対応点を求め，そこからその点の空間位置を推定し，推定された空間点に平面を当てはめることによって求められていた．しかし前節でも述べたように，画像には誤差が含まれており，それは 3 次元復元点にも影響を与える．したがって求める平面にも誤差が含まれることになる．そこで，本節でも金谷によって導かれた一般理論 [38] を用いて，画像の誤差の統計的モデルを定義し，幾何学的な制約条件，すなわち「観測された点はすべて同じ平面上に分布している」という条件を満足するように，画像内の点を最適に補正し空間平面を直接再構成する方法について述べる．また同時にその信頼性を表わす共分散行列と，その信頼性を図示するための手法として「標準変位」について述べる．

3.3.2 ステレオとカメラモデル

前節と同様なステレオモデルを考える (図 3.7).

着目する特徴点を $\{P_\alpha\}$, α=1, ..., N とし，第 1，第 2 のカメラの画像面での画像座標をそれぞれ (x_α, y_α), (x'_α, y'_α) とする．以下ではこれを 3 次元ベクトル

$$\boldsymbol{x}_\alpha = \begin{pmatrix} x_\alpha/f \\ y_\alpha/f \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}'_\alpha = \begin{pmatrix} x'_\alpha/f \\ y'_\alpha/f \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.87}$$

で表わす.

特徴点 $\{P_\alpha\}$ がすべて同一平面上にある場合を考える．その平面の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$，第 1 カメラ系の原点 O からの距離を d とすると，平面の方程式は $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}) = d$ と表わせる．第 1 のカメラからの奥行き距離を Z とすると，平面上の特徴点 $\boldsymbol{r}$ は画像上の観測点 $\boldsymbol{x}$ を用いて次のように表わせる．

$$\boldsymbol{r} = Z\boldsymbol{x} \tag{3.88}$$

したがって平面の方程式より，奥行き距離 Z は次のように求めることができる．

$$Z = \frac{d}{(\boldsymbol{n}, \mathbf{n})} \tag{3.89}$$

ステレオにおける対応する点の一般的な関係は，第 1 カメラ座標における特徴点へのベクトルを $\boldsymbol{r}$，第 2 カメラ座標におけるそれを $\boldsymbol{r}'$ とすれば

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{r}' \tag{3.90}$$

と表わすことができ，奥行き距離を用いて，

$$Z\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h} + Z'\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}' \tag{3.91}$$

となる．ここで Z' は第 2 のカメラからの奥行き距離である．式 (3.91) を書き直すと次のようになる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= \frac{Z}{Z'}\boldsymbol{R}^\top(\boldsymbol{x} - \frac{1}{Z}\boldsymbol{h}) \\ &= \frac{Z}{Z'}\boldsymbol{R}^\top(\boldsymbol{x} - \frac{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x})}{d}\boldsymbol{h}) = -\frac{Z}{Z'd}\boldsymbol{R}^\top(\boldsymbol{h}\boldsymbol{n}^\top - d\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} \\ &= k\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{3.92}$$

ただし

$$\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{R}^\top(\boldsymbol{h}\boldsymbol{n}^\top - d\boldsymbol{I}) \tag{3.93}$$

と置いた．この式からベクトル $\boldsymbol{x}'$ と $\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{x}$ は平行になることがわかる．したがって，対応点 $\boldsymbol{x}_\alpha$，$\boldsymbol{x}'_\alpha$ と運動パラメータ $\{\boldsymbol{R}, \boldsymbol{h}\}$，面のパラメータ $\{\boldsymbol{n}, d\}$ の関係は次のように与えられる．

$$\boldsymbol{x}'_\alpha \times \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\alpha = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{R}^\top(\boldsymbol{h}\boldsymbol{n}^\top - d\boldsymbol{I})}{\sqrt{1+d^2}} \tag{3.94}$$

3×4 行列 $\boldsymbol{B}_\alpha$ と 4 次元ベクトル $\boldsymbol{\nu}$ を次のように定義する．

$$\boldsymbol{B}_\alpha = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}'_\alpha \times \boldsymbol{R}^\top\boldsymbol{h}\boldsymbol{x}_\alpha^\top & \boldsymbol{x}'_\alpha \times \boldsymbol{R}^\top\boldsymbol{x}_\alpha \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\nu} = \frac{1}{\sqrt{1+d^2}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{n} \\ -d \end{pmatrix} \tag{3.95}$$

これらを用いると式 (3.94) は次のように書ける．

$$\boldsymbol{B}_\alpha\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{0} \tag{3.96}$$

行列 $\boldsymbol{B}_\alpha$ のランクは 1 であり，式 (3.96) の各行の中で独立な式は一つである．

$\boldsymbol{x}_\alpha$, $\boldsymbol{x}'_\alpha$ の真の値を $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$, $\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ とすると，平面を当てはめる問題は，真の位置 $\{\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha\}$ から求められる $\boldsymbol{B}_\alpha$, $\alpha = 1, ..., N$ が

$$\boldsymbol{B}_\alpha\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{0}, \qquad \alpha = 1, ..., N \tag{3.97}$$

を満たすような 4 次元単位ベクトル $\boldsymbol{\nu}$ を，データ列 $\{\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}'_\alpha\}$, $\alpha = 1, ..., N$ から推定する問題とみなせる．

3.3.3 平面の最適推定とその信頼性

観測した $\boldsymbol{x}_\alpha$, $\boldsymbol{x}'_\alpha$ は式 (3.94) の条件を満たすとは限らない．したがって，誤差のモデルを前節と同様に

$$\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{x}} + \Delta\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x}' = \bar{\boldsymbol{x}}' + \Delta\boldsymbol{x}' \tag{3.98}$$

そして，誤差 $\Delta\boldsymbol{x}$, $\Delta\boldsymbol{x}'$ を期待値 $\boldsymbol{0}$ の独立な確率変数であるとみなし，それぞれの共分散行列を

$$V[\boldsymbol{x}] = E[\Delta\boldsymbol{x}\Delta\boldsymbol{x}^\top], \qquad V[\boldsymbol{x}'] = E[\Delta\boldsymbol{x}'\Delta\boldsymbol{x}'^\top] \tag{3.99}$$

とする．また，それぞれの共分散行列を

$$V[\boldsymbol{x}] = \epsilon^2 V_0[\boldsymbol{x}], \qquad V[\boldsymbol{x}'] = \epsilon^2 V_0[\boldsymbol{x}'] \tag{3.100}$$

の形に書く．

そして，まず面のパラメータ $\boldsymbol{\nu}$ を仮定し， $\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}'_\alpha$ を補正した $\boldsymbol{x}_\alpha - \Delta\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}'_\alpha - \Delta\boldsymbol{x}'_\alpha$ が式 (3.94) を満たすようにする．すわなち

$$(\boldsymbol{x}_\alpha - \Delta\boldsymbol{x}_\alpha) \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}'_\alpha - \Delta\boldsymbol{x}'_\alpha) = \boldsymbol{0} \tag{3.101}$$

となるように $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$, $\Delta\boldsymbol{x}'_\alpha$ を定める．このような $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$, $\Delta\boldsymbol{x}'_\alpha$ は無数に存在するが，その中で確率的に最も可能性の高いものを選ぶ．誤差の分布が正規分布であれば，これは次のような**マハラノビス距離**による最適化として定式化できる．

$$J_\alpha = (\Delta\boldsymbol{x}_\alpha, V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]^- \Delta\boldsymbol{x}_\alpha) + (\Delta\boldsymbol{x}'_\alpha, V_0[\boldsymbol{x}'_\alpha]^- \Delta\boldsymbol{x}'_\alpha) \to \min \tag{3.102}$$

誤差は画像面上に 2 次元的に分布することから，行列 $V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]$, $V_0[\boldsymbol{x}'_\alpha]$ はともにランク 2 の特異行列である．

このようにして最適に選んだ $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$，$\Delta\boldsymbol{x}'_\alpha$ を式 (3.102) に代入した残差は，仮定した面のパラメータ $\boldsymbol{\nu}$ の関数であるから，これを $J_\alpha[\boldsymbol{\nu}]$ と書く．これは定数差を無視すると，パラメータ $\boldsymbol{\nu}$ が真の値であると仮定したときの観測データ $\boldsymbol{x}_\alpha$，$\boldsymbol{x}'_\alpha$ に含まれる誤差の対数尤度 (の符号を変えたもの) とみなすことができる．したがって，各点の誤差が独立であれば， $\boldsymbol{\nu}$ の最適な推定はその総和の最小化，すなわち次の最小化によって得られる．

$$\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} J_\alpha[\boldsymbol{\nu}] \to \min \tag{3.103}$$

前節までと同様に計算すると，この最小化は次のように表わせる．

$$J[\boldsymbol{\nu}] = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{B}_\alpha\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{W}_\alpha(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{B}_\alpha\boldsymbol{\nu}) \to \min \tag{3.104}$$

ただし $\boldsymbol{W}_\alpha(\boldsymbol{\nu})$ は次のように定義される 3×3 行列である．

$$\boldsymbol{W}_\alpha(\boldsymbol{\nu}) = \Big(V[\boldsymbol{B}_\alpha\boldsymbol{\nu}]\Big)^-_1 \tag{3.105}$$

定義より $\boldsymbol{B}_\alpha\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{x}'_\alpha \times \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\alpha$ であるから $\boldsymbol{B}_\alpha\boldsymbol{\nu}$ の共分散行列 $V[\boldsymbol{B}_\alpha\boldsymbol{\nu}]$ は次のように表わされる．

$$V[\boldsymbol{B}_\alpha\boldsymbol{\nu}] = \bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha \times \boldsymbol{A}V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{A}^\top \times \bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha + (\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha) \times V[\boldsymbol{x}'_\alpha] \times (\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha) + [V[\boldsymbol{x}'_\alpha] \times \boldsymbol{A}V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{A}^\top] \tag{3.106}$$

$\|\boldsymbol{\nu}\| = 1$ の拘束条件の下で式 (3.104) を最小にする $\boldsymbol{\nu}$ の共分散行列は次式で与えられる．

$$V[\boldsymbol{\nu}] = \left(\sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{B}_\alpha^\top \boldsymbol{W}_\alpha(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{B}_\alpha\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\nu}}\right)^- \tag{3.107}$$

ただし $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^\top$ と定義する．

3.3.4 くりこみ法

式 (3.104) 中の行列 $\boldsymbol{W}_\alpha(\boldsymbol{\nu})$ が定数行列 $\boldsymbol{W}_\alpha$ であれば，式 (3.104) は次のように書き直せる．

$$J[\boldsymbol{\nu}] = (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{M}\boldsymbol{\nu}) \to \min \tag{3.108}$$

ここで $\boldsymbol{M}$ は次のように定義した 4×4 **次元モーメント行列**である．

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{B}_\alpha^\top \boldsymbol{W}_\alpha \boldsymbol{B}_\alpha \tag{3.109}$$

式 (3.108) の右辺は $\boldsymbol{\nu}$ の 2 次形式であるから，これを最小にする解はモーメント行列 $\boldsymbol{M}$ の最小固有値に対する 4 次元単位固有ベクトルによって与えられる．そこで，例えば $\boldsymbol{\nu}$ の適当な初期値 $\boldsymbol{\nu}_0$ を仮定し，$\boldsymbol{W}_\alpha = \boldsymbol{W}_\alpha(\boldsymbol{\nu}_0)$ として得られる解を $\boldsymbol{\nu}_1$ とし，次に $\boldsymbol{W}_\alpha = \boldsymbol{W}_\alpha(\boldsymbol{\nu}_1)$ として得られる解を $\boldsymbol{\nu}_2$ とし，以下これを反復することが考えられる．しかし，このような反復では解に統計的な偏差が生じることが知られている [26]．以下にこれを示す．

4×4 行列 $\boldsymbol{N}^{(1)}$, $\boldsymbol{N}^{(2)}$ を次のように定義する．

$$\boldsymbol{N}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\left((\boldsymbol{h},\boldsymbol{X}_\alpha\boldsymbol{h})V_0[\boldsymbol{x}_\alpha] + (\boldsymbol{h},\boldsymbol{Y}_\alpha\boldsymbol{h})\boldsymbol{x}_\alpha\boldsymbol{x}_\alpha^\top\right) & \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}(V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{X}_\alpha\boldsymbol{h} + (\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{Y}_\alpha\boldsymbol{h})\boldsymbol{x}_\alpha) \\ \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\left((V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{X}_\alpha\boldsymbol{h})^\top + (\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{Y}_\alpha\boldsymbol{h})\boldsymbol{x}_\alpha^\top\right) & \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}(V_0[\boldsymbol{x}_\alpha];\boldsymbol{X}_\alpha) + (\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{Y}_\alpha\boldsymbol{x}_\alpha) \end{pmatrix} \tag{3.110}$$

$$\boldsymbol{N}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{h},\boldsymbol{Y}_\alpha\boldsymbol{h})V_0[\boldsymbol{x}_\alpha] & \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{Y}_\alpha\boldsymbol{h} \\ \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}(V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{Y}_\alpha\boldsymbol{h})^\top & \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}(V_0[\boldsymbol{x}_\alpha];\boldsymbol{Y}_\alpha) \end{pmatrix} \tag{3.111}$$

ただし 3×3 行列 $\boldsymbol{X}_\alpha$, $\boldsymbol{Y}_\alpha$ は次のように定義する．

$$\boldsymbol{X}_\alpha = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}'_\alpha \times \boldsymbol{W}_\alpha \times \boldsymbol{x}'_\alpha)\boldsymbol{R}^\top \tag{3.112}$$

$$\boldsymbol{Y}_\alpha = \boldsymbol{R}[\boldsymbol{W}_\alpha \times V_0[\boldsymbol{x}'_\alpha]]\boldsymbol{R}^\top \tag{3.113}$$

また $\boldsymbol{M}$ の期待値を求めると次のようになる．

$$E[\boldsymbol{M}] = \bar{\boldsymbol{M}} + \epsilon^2\bar{\boldsymbol{N}}^{(1)} + \epsilon^4\boldsymbol{N}^{(2)} \tag{3.114}$$

ここで $\bar{\boldsymbol{M}}$ および $\bar{\boldsymbol{N}}^{(1)}$ は，式 (3.109) および (3.110) において，データ $\boldsymbol{x}_\alpha$ の代りに真値 $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$ を使って計算された値である．式 (3.114) より，$\boldsymbol{M}$ の期待値 $E[\boldsymbol{M}]$ は真値 $\bar{\boldsymbol{M}}$ から $O(\epsilon^2)$ だけ偏差を持つことがわかる．したがって摂動定理により，$\boldsymbol{M}$ から計算される固有ベクトル $\boldsymbol{\nu}$ も真値 $\bar{\boldsymbol{\nu}}$ から $O(\epsilon^2)$ だけ偏差を持つ．

一方 $\boldsymbol{N}^{(1)}$ の期待値は，式 (3.110), (3.111) より次のようになる．

$$E[\boldsymbol{N}^{(1)}] = \bar{\boldsymbol{N}}^{(1)} + 2\epsilon^2\boldsymbol{N}^{(2)} \tag{3.115}$$

ここで**不偏モーメント行列** $\hat{\boldsymbol{M}}$ を次のように定義する．

$$\hat{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} - \epsilon^2\boldsymbol{N}^{(1)} + \epsilon^4\boldsymbol{N}^{(2)} \tag{3.116}$$

以上から

$$E[\hat{\boldsymbol{M}}] = \bar{\boldsymbol{M}} \tag{3.117}$$

となり，$\boldsymbol{\nu}$ の不偏推定量は不偏モーメント行列 $\hat{\boldsymbol{M}}$ の最小固有値に対する単位固有ベクトルで与えられることがわかる．しかし，未だノイズレベル ϵ の値は未知であり，もし小さく見積れば偏差が残り，大きく見積ると逆方向の偏差が生じてしまう．そこで前節までと同様に**くりこみ法** [25] を用いる．

ϵ^2 を変数 c に置きかえると，(2 次の) くりこみ法が次のように表わせる．

1. $c = 0$, $\boldsymbol{W}_\alpha = \boldsymbol{I}$, $\alpha = 1, ..., N$ とおく.

2. 式 (3.109) により $\boldsymbol{M}$ を計算する.

3. 式 (3.110), (3.111) により $\boldsymbol{N}^{(1)}$, $\boldsymbol{N}^{(2)}$ を計算する.

4. 行列

$$\hat{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} - c\boldsymbol{N}^{(1)} + c^2\boldsymbol{N}^{(2)} \tag{3.118}$$

の最小固有値 λ と対応する 4 次元単位ベクトル $\boldsymbol{\nu}$ を計算する.

5. $\lambda \approx 0$ であれば $\boldsymbol{\nu}$, c, $\hat{\boldsymbol{M}}$ を返す．そうでなければ c と $\boldsymbol{W}_\alpha$ を次のように更新する.

$$D = \Big((\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{N}^{(1)}\boldsymbol{\nu}) - 2c(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{N}^{(2)}\boldsymbol{\nu})\Big)^2 - 4\lambda(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{N}^{(2)}\boldsymbol{\nu}) \tag{3.119}$$

$$\text{if} \qquad D \geq 0, \qquad c \leftarrow c + \frac{(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{N}^{(1)}\boldsymbol{\nu}) - 2c(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{N}^{(2)}\boldsymbol{\nu}) - \sqrt{D}}{2(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{N}^{(2)}\boldsymbol{\nu})} \tag{3.120}$$

$$\text{if} \qquad D < 0, \qquad c \leftarrow c + \frac{\lambda}{(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{N}^{(1)}\boldsymbol{\nu})} \tag{3.121}$$

$$\boldsymbol{n} = N[\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}], \qquad d = -\frac{\nu_4}{\sqrt{1-\nu_4^2}} \tag{3.122}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{R}^\top(\boldsymbol{h}\boldsymbol{n}^\top - d\boldsymbol{I})}{\sqrt{1+d^2}} \tag{3.123}$$

$$\boldsymbol{W}_\alpha \leftarrow \Big(\boldsymbol{x}'_\alpha \times \boldsymbol{A}V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{A}^\top \times \boldsymbol{x}'_\alpha + (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\alpha) \times V_0[\boldsymbol{x}_\alpha] \times (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\alpha) + c[V_0[\boldsymbol{x}'_\alpha] \times \boldsymbol{A}V_0[\boldsymbol{x}'_\alpha]\boldsymbol{A}^\top]\Big)_2^- \tag{3.124}$$

6. ステップ 2 に戻る.

得られた $\boldsymbol{\nu}$ より，面のパラメータ $\{\boldsymbol{n}, d\}$ が次のように計算できる.

$$\boldsymbol{n} = N[\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}], \qquad d = -\frac{\nu_4}{\sqrt{1-\nu_4^2}}. \tag{3.125}$$

またくりこみ法で返された c の値から，二乗ノイズレベルの不偏推定量 $\hat{\epsilon}^2$ は次式で得られる.

$$\hat{\epsilon}^2 = \frac{c}{1 - 3/2N} \tag{3.126}$$

これは式 (3.104) の残差を $\hat{J}[\hat{\boldsymbol{\nu}}]$ とするとき， $N\hat{J}[\hat{\boldsymbol{\nu}}]/\epsilon^2$ が近似的に自由度 $2N-3$ の χ^2 分布に従う確立変数であることから導かれる [40].

式 (3.107) の共分散行列は，返された不偏モーメント行列 $\hat{\boldsymbol{M}}$ を用いて次のように近似することができる.

$$V[\boldsymbol{\nu}] = \frac{\hat{\epsilon}^2}{N}\left(\hat{\boldsymbol{M}}\right)_3^- \tag{3.127}$$

くりこみ法が完全に収束していれば $\hat{\boldsymbol{M}}$ のランクは 3 となるが，数値計算などの誤差のために最小固有値が 0 でない可能性がある．式 (3.127) でランクを 3 に強制しているのは，これを防ぐためである [40].

3.3.5 3 次元復元

対応する点 $\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}'_\alpha$ が式 (3.94) を満たすように統計的に最適な補正を行なうと，それから計算される空間点 $\boldsymbol{r}_\alpha$ は求めた平面上に載る．その最適な補正は以下のようになる [40].

1. 対応する点 $\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}'_\alpha$ を次のように補正する．

$$\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha = \boldsymbol{x}_\alpha - (V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{A}^\top \times \boldsymbol{x}'_\alpha)\boldsymbol{W}_{0\alpha}(\boldsymbol{x}'_\alpha \times \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\alpha) \tag{3.128}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha = \boldsymbol{x}'_\alpha - (V_0[\boldsymbol{x}'_\alpha] \times (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\alpha))\boldsymbol{W}_{0\alpha}(\boldsymbol{x}'_\alpha \times \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\alpha) \tag{3.129}$$

ただし 3×3 行列 $\boldsymbol{W}_{0\alpha}$ を次のように定義する．

$$\boldsymbol{W}_{0\alpha} = \Big(\boldsymbol{x}'_\alpha \times \boldsymbol{A}V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{x}'_\alpha + (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\alpha) \times V_0[\boldsymbol{x}'_\alpha] \times (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\alpha)\Big)^-_2 \tag{3.130}$$

2. $\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha \times \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha \approx \boldsymbol{0}$ の条件が満たされていなければ， $\boldsymbol{x}_\alpha \leftarrow \hat{\boldsymbol{x}}_\alpha$, $\boldsymbol{x}'_\alpha \leftarrow \hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ としてステップ 1 に戻る．

3. 復元した空間点 $\boldsymbol{r}$ は次式で計算することができる．

$$\boldsymbol{r}_\alpha = \frac{d\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha}{(\boldsymbol{n}, \hat{\boldsymbol{x}}_\alpha)} \tag{3.131}$$

3.3.6 標準変位

推定した平面の共分散行列 $V[\hat{\boldsymbol{\nu}}]$ の最大固有値 $\lambda_{\max}$ に対する単位固有ベクトルを $\boldsymbol{\xi}_{\max}$ とする．ベクトル $\boldsymbol{\xi}_{\max}$ は $\boldsymbol{\nu}$ の真の値から最もずれやすい方向を表わし， $\sqrt{\lambda_{\max}}$ はその方向における標準偏差を表わす．したがって当てはめた平面の標準変位は次のベクトルで表わせる．

$$\boldsymbol{\nu}^+ = N[\hat{\boldsymbol{\nu}} + \sqrt{\lambda_{\max}}\boldsymbol{\xi}_{\max}] \tag{3.132}$$

$$\boldsymbol{\nu}^- = N[\hat{\boldsymbol{\nu}} - \sqrt{\lambda_{\max}}\boldsymbol{\xi}_{\max}] \tag{3.133}$$

3.3.7 実験

(1) シミュレーション

空間中に平面を置き，その平面上に特徴点を格子状に 11×11 個配置する．それぞれのカメラの画像面を焦点距離 $f = 600$ 画素とし，各 x, y 画像座標に独立に標準偏差 2 画素の正規乱数を誤差として加える (図 3.18)．したがって正規化共分散行列 $V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]$, $V_0[\boldsymbol{x}'_\alpha]$ はともに $\mathrm{diag}(1,1,0)$ (対角要素が $1,1,0$ の対角行列) であり，ノイズレベル $\epsilon = 2/600 = 1/300$ となる．ただし，計算ではノイズレベル ϵ は未知とみなす．

本手法により再構成した結果を図 3.19に，また通常の方法 (付録 B.2) により空間点を求め，最小二乗法により平面を当てはめた結果を図 3.20に示す．それぞれ図中の破線は真の特徴点位置からなる格子である．また図 3.22に図 3.19の標準変位を示す．

これらの図を比較してみると，本手法のほうがより望ましい結果が得られていることがわかる．なお，くりこみ法における繰り返しはおよそ 3 〜 4 回程度である．

(2) 誤差の解析

第 4と同様に，面のパラメータ $\{\boldsymbol{n}, d\}$ の**誤差ベクトル** $\Delta\boldsymbol{u}$ を次のように定義する．

$$\Delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{P}_{\bar{\boldsymbol{n}}}(\boldsymbol{n} - \bar{\boldsymbol{n}}) + \frac{d - \bar{d}}{\bar{d}}\bar{\boldsymbol{n}} \tag{3.134}$$

ここで $\boldsymbol{P}_{\bar{\boldsymbol{n}}} = \boldsymbol{I} - \bar{\boldsymbol{n}}\bar{\boldsymbol{n}}^\top$ であり，$\{\bar{\boldsymbol{n}}, \bar{d}\}$ は面のパラメータ $\{\boldsymbol{n}, d\}$ の真の値である．式 (3.107) から計算した 4 次元ベクトル $\boldsymbol{\nu}$ の理論共分散行列 $V[\boldsymbol{\nu}]$ により，誤差ベクトルの共分散行列 $V[\boldsymbol{u}]$ は次のようになる．

$$V[\boldsymbol{u}] = V[\boldsymbol{n}] + \frac{1}{\bar{d}}(V[\boldsymbol{n}, d]\bar{\boldsymbol{n}}^\top + \bar{\boldsymbol{n}}V[\boldsymbol{n}, d]^\top) + \frac{1}{\bar{d}^2}V[d]\bar{\boldsymbol{n}}\bar{\boldsymbol{n}}^\top \tag{3.135}$$

ここで $V[\boldsymbol{n}]$, $V[\boldsymbol{n}, d]$, $V[d]$ は 3.1節で示した通り以下の式で与えられる．

$$V[\boldsymbol{n}] = (1 + \bar{d}^2) \times \boldsymbol{P}_{\bar{\boldsymbol{n}}} \begin{pmatrix} V[\boldsymbol{\nu}]_{11} & V[\boldsymbol{\nu}]_{12} & V[\boldsymbol{\nu}]_{13} \\ V[\boldsymbol{\nu}]_{21} & V[\boldsymbol{\nu}]_{22} & V[\boldsymbol{\nu}]_{23} \\ V[\boldsymbol{\nu}]_{31} & V[\boldsymbol{\nu}]_{32} & V[\boldsymbol{\nu}]_{33} \end{pmatrix} \boldsymbol{P}_{\bar{\boldsymbol{n}}} \tag{3.136}$$

$$V[\boldsymbol{n}, d] = -(1 + \bar{d}^2)^2 \boldsymbol{P}_{\bar{\boldsymbol{n}}} \begin{pmatrix} V[\boldsymbol{\nu}]_{14} \\ V[\boldsymbol{\nu}]_{24} \\ V[\boldsymbol{\nu}]_{34} \end{pmatrix} \tag{3.137}$$

$$V[d] = (1 + \bar{d}^2)^3 V[\boldsymbol{\nu}]_{44} \tag{3.138}$$

異なる誤差により 100 回実験を行なったときの誤差の分布を図 3.21に示す．図中の楕円は式 (3.135) の共分散行列 $V[\boldsymbol{u}]$ を図示したものである (各方向の標準偏差の下限を表わす)．これらを見ると，通常の方法では統計的偏差が生じていることがわかる．本手法では偏差が生じていない．また理論共分散行列は誤差の分布の下限を与えるものであるが，本手法の計算結果はほぼその下限を達成していることがわかる．

(3) 実画像による実験

図 3.23に実ステレオ画像を示す．また図 3.24に復元結果と標準変位を示す．この実験において，カメラ間の距離に比べ建物までの距離が遠い (約 1/16) ことや，カメラの運動パラメータ $\{\boldsymbol{h}, \boldsymbol{R}\}$ の不正確さが画像の “誤差” と見做されてしまったため，信頼性が低いことがわかる．

3.3.8 まとめ

本節では，金谷の導いた最適当てはめの一般理論に基づき，画像の誤差モデルに基づく平面の直接的な再構成法および定量的な信頼性の評価方法について述べた．また当てはめた平面の信頼性を図示するために標準変位と呼ぶ概念を導入した．

本手法の実際の応用を考えた場合，前節と同様に対応点をどのように検出するかという問題と，対象が平面であり，特徴点が全てその平面上に載っているというのをどのように判定するのかという問題が残されている．ここでも，もし精度の低い対応点探索法を採用すれば，それはそのまま各画像の各特徴点の補正量を大きくすることにつながり，復元された平面の信頼性を低くする．同様に誤対応があれば，その点を復元した平面に射影した場合の補正量が極めて大きくなることが考えられる．あるいは，もし誤対応が多ければ平面自体を求められない (収束しない) 場合も考えられる．このように実際の応用においては，その補正量の大きなものを除いて平面を当てはめを行なう「ロバスト推定」的な手法を導入することも必要となると思われる．

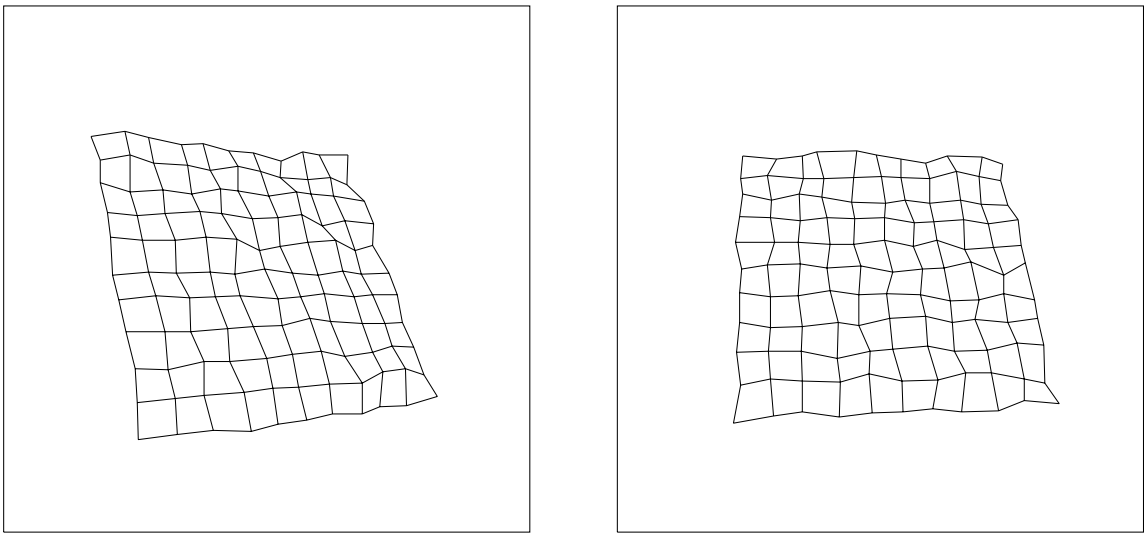
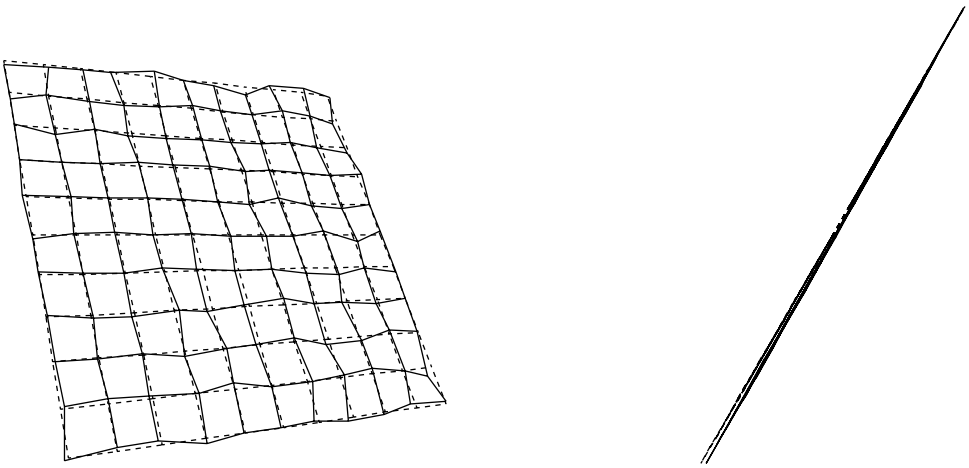
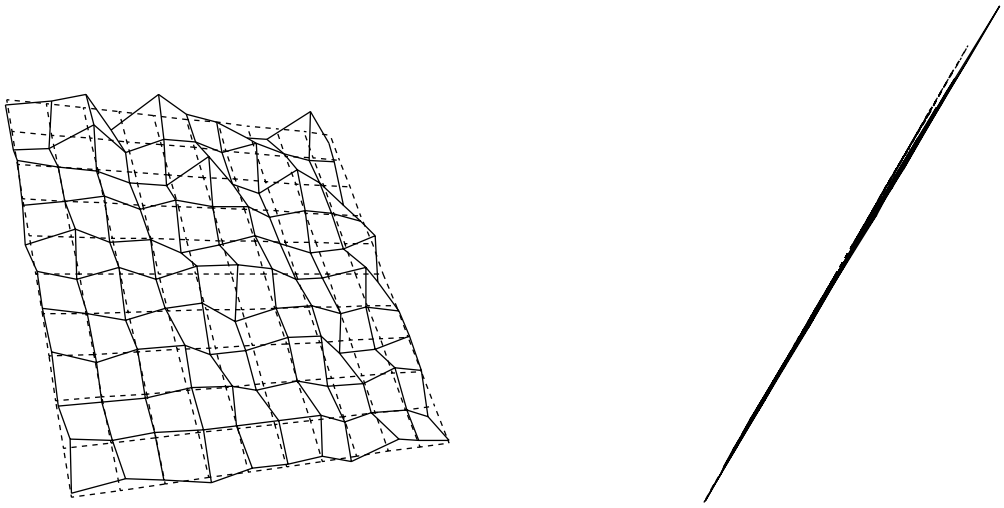


図 3.18: シミュレーションステレオ画像.



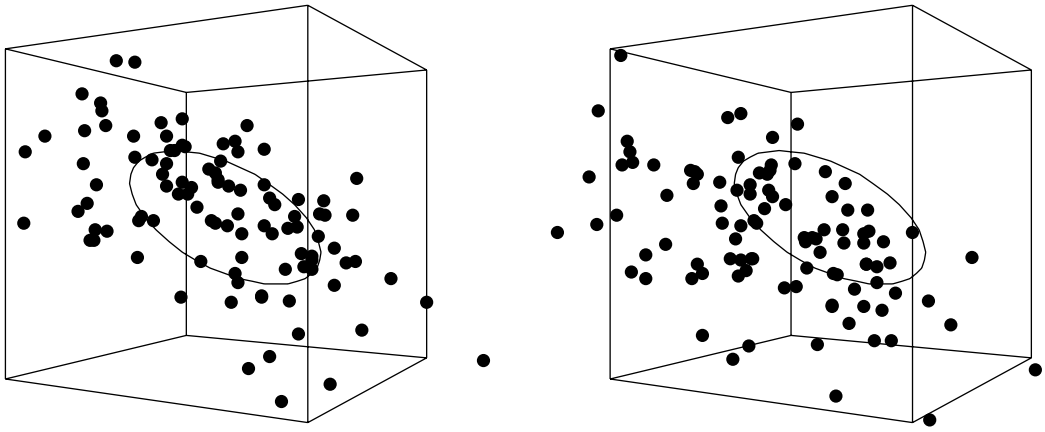
(a) (b)

図 3.19: (a) 本手法による再構成結果. (b) 横から見た図.



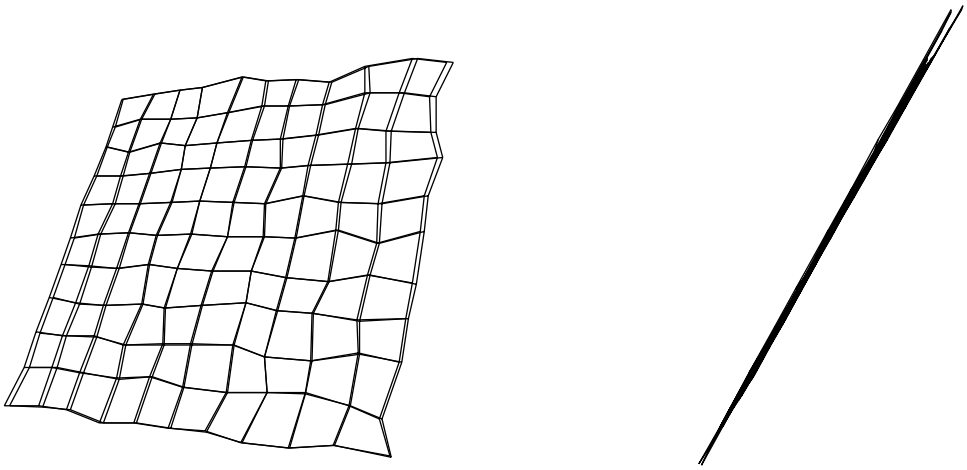
(a) (b)

図 3.20: (a) 最小二乗法による再構成結果. (b) 横から見た図.



(a) (b)

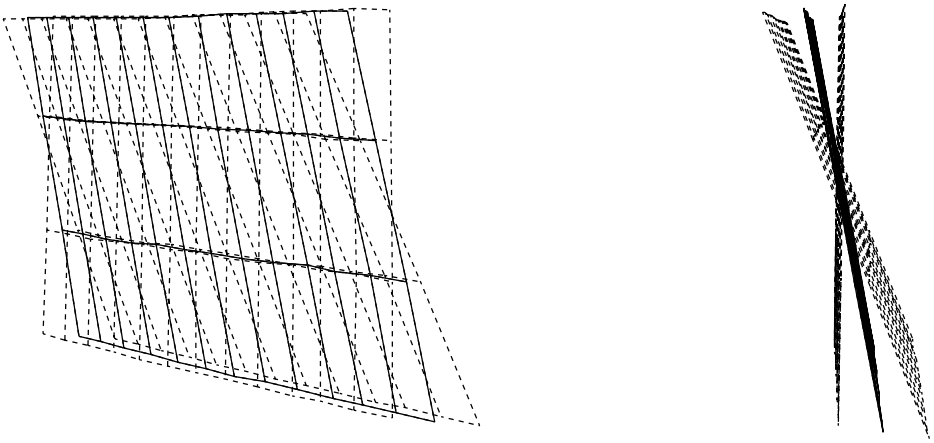
図 3.21: (a) 本手法による誤差分布. (b) 通常の方法による誤差分布.



(a) (b)

図 3.22: (a) 標準変位. (b) 横から見た図.

図 3.23: 実ステレオ画像.



(a) (b)

図 3.24: (a) 復元結果とその標準変位. (b) 横から見た図.

第 4 章

情報量基準による幾何モデルの判定

本章では，抽出されたエッジに対してどの幾何モデル (直線，円，コニック) を当てはめるべきなのかを**幾何学的情報量基準 (AIC)** と呼ばれる基準による判断する方法について述べる．またステレオから復元した 3 次元点群に対する平面性および無限遠性の AIC を用いた判定方法について述べる．

4.1　2 次元幾何モデルの判定

2章でも述べたように，画像内の直線やコニックは重要な意味と役割りを持つ．しかし得られたエッジが予め直線である，あるいはコニックであるとの情報を得るのは極めて困難である．したがって得られたエッジに対し，直線を当てはめたほうがいいのか，コニックを当てはめたほうがいいのか，判断する必要がある．本節では，金谷によって提案された**幾何学的情報量基準 (幾何学的 AIC)** を用いて恣意的なしきい値を用いずにモデルの判定を行なう方法について述べる．

4.1.1　はじめに

2章では，エッジが直線であることや楕円であることが予めわかっていれば，精度よく最適に当てはめることが可能であることを示した．しかし，工業用部品の外観検査装置における視覚に代表される非常に限定された環境の場合を除き，実際の画像では抽出したエッジの形状を予め知るのは極めて困難である．したがって，得られたエッジに対しどのような幾何モデルを当てはめればよいか判断する必要がある．そのためには画像内の誤差を正確に知っておかなければならない．なぜなら，直線を例にとると，精度が低ければ直線と判断する基準を緩くしなければならないが，精度が高ければその基準を厳しくとらなければならないからである．もし仮に精度がわかっていたとしても，それは誤差の確率分布がわかっているのであり，統計的検定を行なう場合は**有意水準**を何 % に設定すればよいかという問題が生じる．

計算機にこのような判断を行なわせる場合，従来の多くの研究では実験環境や実験例に応じた基準を経験的に設定していることが多い．これでは実際の様々な環境に対応できるシステムを開発するのは極めて困難である．つまりこのような経験的かつ恣意的な基準の設定は好ましくない．

統計学におけるモデル選択の基準として **AIC**(**Akaike's Information Criterion**)[1] がよく用いられるが，これは

$$AIC = (\text{対数尤度}) + (\text{モデルのパラメータ数}) \tag{4.1}$$

で定義される．一般に高次のモデルほど自由度が増し，与えられたデータに対する適合度が高くなるが，モデルがより複雑になってしまう．この適合度と複雑さというトレードオフの関係にある 2 つの基準を総合したモデル選択の基準が AIC である．本節では金谷によって提案された幾何学的モデルのための情報量基準「幾何学的情報量基準 (幾何学的 AIC)」 [39, 40] を用いて，そのモデルを判定する方法について述べる．

4.1.2 幾何学的 AIC

まず，金谷の導いた幾何学的 AIC について文献 [38] をもとに簡単に説明する．

(1) モデルの幾何学的推定

m 次元空間 $\mathcal{R}^m$ に N 個のデータ点 $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_N$ が与えられたとする．これらはすべて $\mathcal{R}^m$ の m' 次元多様体 $\mathcal{D}$ に拘束されているものとする．この多様体 $\mathcal{D}$ を**データ空間**と呼ぶ．各データ点 $\boldsymbol{a}_\alpha$ は真の位置 $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ に誤差 $\Delta\boldsymbol{a}_\alpha$ が加わったものとすると次式のように表せる．

$$\boldsymbol{a}_\alpha = \bar{\boldsymbol{a}}_\alpha + \Delta\boldsymbol{a}_\alpha \tag{4.2}$$

ここで，$\Delta\boldsymbol{a}_\alpha$ は各 α について独立で期待値 $\mathbf{0}$，共分散行列 $V[\boldsymbol{a}_\alpha]$ の正規分布に従う確率変数であるとする．また各データはデータ空間 $\mathcal{D}$ に拘束されているため共分散行列 $V[\boldsymbol{a}_\alpha]$ は特異である．

誤差すなわちデータの精度を予め正確に推定するのは困難であるが，誤差の定性的な性質を予測することは比較的容易である．そこで各データの共分散行列 $V[\boldsymbol{a}_\alpha]$ は定数倍を除いて既知であると仮定する．すなわち

$$V[\boldsymbol{a}_\alpha] = \epsilon^2 V_0[\boldsymbol{a}_\alpha] \tag{4.3}$$

と表わせるとする．ここで ϵ は**ノイズレベル**と呼び，これは未知として扱う．また $V_0[\boldsymbol{a}_\alpha]$ は**正規化共分散行列**と呼び，既知であるとして扱う．

幾何学的モデルの推定は，このようなデータに対し，真の位置 $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$, $\alpha = 1$, ..., N が含まれる部分多様体 $\mathcal{S}$ を推定する問題となる．ここで，この $\mathcal{S}$ を単に**モデル**と呼ぶ．

(2) モデルの残差平方和

モデル $\mathcal{S}$ は n 次元ベクトル $\boldsymbol{u}$ をパラメータとして含むとする．パラメータ $\boldsymbol{u}$ の定義域は $\mathcal{R}^n$ における p 次元部分多様体 $\mathcal{U}$ であるとし，これを**パラメータ空間**と呼ぶ．$\mathcal{U}$ の次元をモデル $\mathcal{S}$ の**自由度**と呼び，多様体 $\mathcal{S}$ の次元が d であるとき，$r = m' - d$ として，p をモデル $\mathcal{S}$ の**次元**，r を**余次元**と呼ぶ．最適性の基準として最尤推定を採用すると，モデルを最適に推定することは次のように解釈できる．あるモデル $\mathcal{S}$ を仮定すると，観測したデータ $\{\boldsymbol{a}_\alpha\}$ は $\mathcal{S}$ 上に載っているとは限らない．そこで各 $\boldsymbol{a}_\alpha$ を $\mathcal{S}$ 上の点 $\hat{\boldsymbol{a}}_\alpha$ に射影することを考える (図 4.1)．このような射影の仕方は無数に存在するが，その中で最も確率的に確からしいものを選ぶとすると，次のマハラノビス距離の二乗和を最小にする $\hat{\boldsymbol{a}}_\alpha$ で与えられる．

$$J(\{\hat{\boldsymbol{a}}_\alpha\}; \mathcal{S}) = \sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{a}_\alpha - \hat{\boldsymbol{a}}_\alpha, V_0[\boldsymbol{a}_\alpha]^{-}(\boldsymbol{a}_\alpha - \hat{\boldsymbol{a}}_\alpha)) \tag{4.4}$$

式 (4.4) はモデル $\mathcal{S}$ の関数であるから $J(\mathcal{S})$ と書き，解を $\hat{\mathcal{S}}$ とする．したがって式 (4.4) は $J(\hat{\mathcal{S}})$ が最小値となる．この最小値 $J(\hat{\mathcal{S}})$ を**残差平方和**と呼び，以下単に $\hat{J}$ で表わす．また $\hat{J}/\epsilon^2$ は第 1 近似において自由度

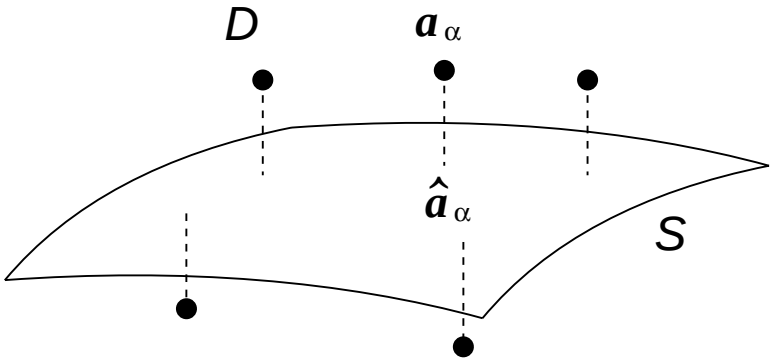


図 4.1: データ $\boldsymbol{a}_\alpha$ の多様体 $\mathcal{S}$ 上への射影.

$rN - n'$ の χ^2 分布に従う確率変数であることが示される [40]．したがって二乗ノイズレベル ϵ^2 の不偏推定量は次のように与えられる．

$$\hat{\epsilon}^2 = \frac{\hat{J}}{rN - n'} \tag{4.5}$$

(3) 幾何学的 AIC

モデル $\mathcal{S}$ の「よさ」をその「予測能力」で測ることを考える．つまり，現在のデータ $\boldsymbol{a}_\alpha$ と同じ確率分布に従う独立な「将来の」データを $\boldsymbol{a}^*_\alpha$ とするとき，現在のデータから推定した最尤推定量を $\hat{\boldsymbol{a}}_\alpha$ の $\boldsymbol{a}^*_\alpha$ に関する残差平方和を

$$\hat{J}^* = \sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{a}^*_\alpha - \hat{\boldsymbol{a}}_\alpha, V_0[\boldsymbol{a}_\alpha]^-(\boldsymbol{a}^*_\alpha - \hat{\boldsymbol{a}}_\alpha)) \tag{4.6}$$

とし，現在のデータ $\boldsymbol{a}_\alpha$ に関する期待値を $E[\,\cdot\,]$，将来のデータに関する期待値を $E^*[\,\cdot\,]$ とすると，

$$I(\mathcal{S}) = E^*[E[\hat{J}^*]] \tag{4.7}$$

が小さいモデルほどよいモデルであるとみなすことができる．これをモデル $\mathcal{S}$ の期待残差と呼ぶ．この期待残差の不偏推定量は次式で与えられる [40].

$$AIC(\mathcal{S}) = \hat{J} + 2(pN + n')\epsilon^2 \tag{4.8}$$

これをモデル $\mathcal{S}$ の**幾何学的情報量基準 (幾何学的 AIC)** と呼ぶ．したがって，この幾何学的 AIC を計算することにより，モデルのよさを評価することができる．

(4) 情報量基準によるモデル選択

式 (4.8) を用いてモデルの幾何学的 AIC を計算するには，ノイズレベル ϵ が既知でなければならない．しかし今まで述べているようにノイズの定性的な特徴は容易に推定できるが，ノイズレベルを推定することは困難である．そこで AIC によるモデルの絶対的な評価によるモデル決定ではなく，複数モデルが存在するときの相対的な比較によるモデル決定を考える．

まず二つのモデル $\mathcal{S}_1$ と $\mathcal{S}_2$ を考え，次元，余次元，自由度をそれぞれ p_1, r_1, n'_1 および p_2, r_2, n'_2 とする．また $\mathcal{S}_2$ は $\mathcal{S}_1$ に別の制約を加えて得られたモデルであるとする．つまり $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_1$ であり，これを

$$\mathcal{S}_2 \succ \mathcal{S}_1 \tag{4.9}$$

で表わし，「$\mathcal{S}_2$ は $\mathcal{S}_1$ より強い」と呼ぶ．通常残差平方和はそのモデルのよさ (当てはめのよさ) を表わす一つの目安となるが，このような場合，常に

$$J(\mathcal{S}_2) \geq J(\mathcal{S}_1) \tag{4.10}$$

が成り立つことはあきらかであり，残差平方和だけでは判断できないことがわかる．

しかし，同じデータに対しモデルを当てはめるのであるから，その真のノイズレベルは等しいはずである．そこで $\mathcal{S}_1$ のもとでの二乗ノイズレベルを式 (4.5) によって推定し，それをそれぞれの幾何学的 AIC に代入すれば

$$AIC(\mathcal{S}_1) = J(\hat{\mathcal{S}}_1) + \frac{2(p_1 N + n'_1)}{r_1 N - n'_1} J(\hat{\mathcal{S}}_1) \tag{4.11}$$

$$AIC(\mathcal{S}_2) = J(\hat{\mathcal{S}}_2) + \frac{2(p_2 N + n'_2)}{r_1 N - n'_1} J(\hat{\mathcal{S}}_1) \tag{4.12}$$

が得られる．したがって，もし $AIC(\mathcal{S}_2) < AIC(\mathcal{S}_1)$ であればモデル $\mathcal{S}_2$ のほうがよいモデルであるとみなせる．この条件を具体的に求めると次式が得られる．

$$\frac{J(\mathcal{S}_2)}{J(\mathcal{S}_1)} < 1 + \frac{2((p_1 - p_2)N + (n'_1 - n'_2))}{r_1 N - n'_1} \tag{4.13}$$

この式 (4.13) が満足されるとき $\mathcal{S}_2$ を選択すればよい．あるいは $AIC(\mathcal{S}_1)$ と $AIC(\mathcal{S}_2)$ の比の平方根をとった次の値

$$K = \sqrt{\frac{AIC(\mathcal{S}_2)}{AIC(\mathcal{S}_1)}} \tag{4.14}$$

を考えると，この K は二つのモデルの当てはまりのよさの比を表わしている．もし $K < 1$ であれば，モデル $\mathcal{S}_1$ をより「強い」モデル $\mathcal{S}_2$ に置き換えることによって予測能力が高まると期待される．

4.1.3 直線当てはめの残差平方和

2.1節より，直線 $Ax + By + C = 0$ をベクトル $\boldsymbol{n} = (A, B, C)^\top$ で表わすと，最適解は次の最小化で与えられる．

$$J[\boldsymbol{n}] = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_\alpha)^2}{(\boldsymbol{n}, V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{n})} \to \min \tag{4.15}$$

求められた最適解を $\hat{\boldsymbol{n}}$ とすると，当てはめの**残差平方和**は次式で計算できる．

$$\hat{J}_{line} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\hat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{x}_\alpha)^2}{(\hat{\boldsymbol{n}}, V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\hat{\boldsymbol{n}})} \tag{4.16}$$

直線モデルを $\mathcal{S}_{line}$ とする． $\mathcal{S}_{line}$ は次元 1，余次元 1，自由度 2 であるから，式 (4.5) および (4.8) より二乗ノイズレベルの推定値と幾何学的 AIC は次のように計算できる．

$$\hat{\epsilon}^2 = \frac{\hat{J}_{line}}{N - 2} \tag{4.17}$$

$$AIC(\mathcal{S}_{line}) = \hat{J}_{line} + 2(N + 2)\epsilon^2 \tag{4.18}$$

4.1.4 円当てはめの残差平方和

xy 平面上の円は次式で表わされる．

$$A(x^2+y^2)+2(Dx+Ey)+F=0 \tag{4.19}$$

これは一般的なコニック $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2(Dx+Ey)+F=0$ の $A=C$, $B=0$ の場合でありコニックの一つである．4 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{u}$ を

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} A \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

と置くと，式 (4.19) は次式のように書き直せる．

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{a})=0 \tag{4.21}$$

したがって直線当てはめと同様に最適解は次式の最小化で与えられる．

$$J[\boldsymbol{u}]=\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{a}_\alpha)^2}{(\boldsymbol{u},V_0[\boldsymbol{a}_\alpha]\boldsymbol{u})}\to\min \tag{4.22}$$

最適な推定値を $\hat{\boldsymbol{u}}$ とすると，当てはめの**残差平方和**は次式で計算できる．したがって直線当てはめと同様に最適解は次式の最小化で与えられる．

$$\hat{J}_{circle}=\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{(\hat{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{a}_\alpha)^2}{(\hat{\boldsymbol{u}},V_0[\boldsymbol{a}_\alpha]\hat{\boldsymbol{u}})} \tag{4.23}$$

円モデルを $\mathcal{S}_{circle}$ とする．$\mathcal{S}_{circle}$ は次元 1，余次元 1，自由度 3 であるから，二乗ノイズレベルの推定値およびその幾何学的 AIC はそれぞれ次式で計算できる．

$$\hat{\epsilon}^2=\frac{\hat{J}_{circle}}{N-3} \tag{4.24}$$

$$AIC(\mathcal{S}_{circle})=\hat{J}_{circle}+2(N+3)\epsilon^2 \tag{4.25}$$

4.1.5 コニック当てはめの残差平方和

コニック当てはめの最適解は次式の最小化の解で与えらえる．

$$J[\boldsymbol{Q}]=\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_\alpha)^2}{(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{Q}V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_\alpha)}\to\min \tag{4.26}$$

最適な推定値を $\hat{\boldsymbol{Q}}$ とすると，当てはめの**残差平方和**は次式で計算できる．

$$\hat{J}_{conic}=\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{(\boldsymbol{x}_\alpha,\hat{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{x}_\alpha)^2}{(\boldsymbol{x}_\alpha,\hat{\boldsymbol{Q}}V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\hat{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{x}_\alpha)} \tag{4.27}$$

コニックモデルを $\mathcal{S}_{conic}$ とする．$\mathcal{S}_{conic}$ は次元 1，余次元 1，自由度 5 であるから，二乗ノイズレベルの推定値およびその幾何学的 AIC は次のように計算できる．

$$\hat{\epsilon}^2=\frac{\hat{J}_{conic}}{N-5} \tag{4.28}$$

$$AIC(\mathcal{S}_{conic})=\hat{J}_{conic}+2(N+5)\epsilon^2 \tag{4.29}$$

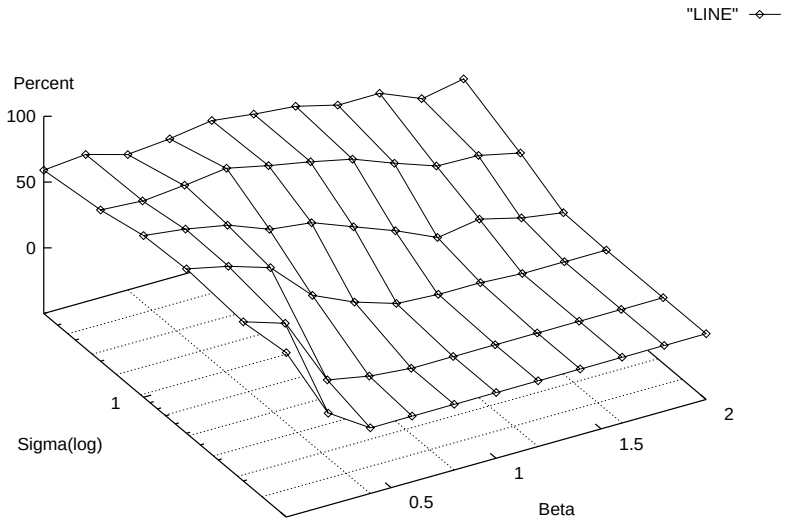


図 4.2: 直線と判定される割合.

4.1.6 モデルの判定条件

直線モデル $\mathcal{S}_{line}$，円モデル $\mathcal{S}_{cirlce}$，コニックモデル $\mathcal{S}_{conic}$ のそれぞれの「強さ」は

$$\mathcal{S}_{line} \succ \mathcal{S}_{circle} \succ \mathcal{S}_{conic} \tag{4.30}$$

となる．与えられた点列に対し，直線モデル $\mathcal{S}_{line}$ と円モデル $\mathcal{S}_{circle}$ を比較する場合，式 (4.13) により以下の条件を満足するとき，直線モデル $\mathcal{S}_{line}$ が選択される．

$$\frac{\hat{J}_{line}}{\hat{J}_{circle}} < 1 + \frac{2}{N-3} \tag{4.31}$$

また同様に円モデル $\mathcal{S}_{circle}$ とコニックモデル $\mathcal{S}_{conic}$ では，以下の条件を満足するとき，円モデル $\mathcal{S}$ が選択される．

$$\frac{\hat{J}_{circle}}{\hat{J}_{conic}} < 1 + \frac{4}{N-5} \tag{4.32}$$

また直線モデル $\mathcal{S}_{line}$ と楕円モデル $\mathcal{S}_{conic}$ を比較する場合，以下の条件が満足されれば直線モデル $\mathcal{S}_{line}$ が選択されれる．

$$\frac{\hat{J}_{line}}{\hat{J}_{conic}} < 1 + \frac{6}{N-5} \tag{4.33}$$

4.1.7 実験

(1) シミュレーション実験

次の曲線を考える．

$$\frac{(x-50\beta)^2}{(50\beta)^2} + \frac{y^2}{50^2} = 1 \tag{4.34}$$

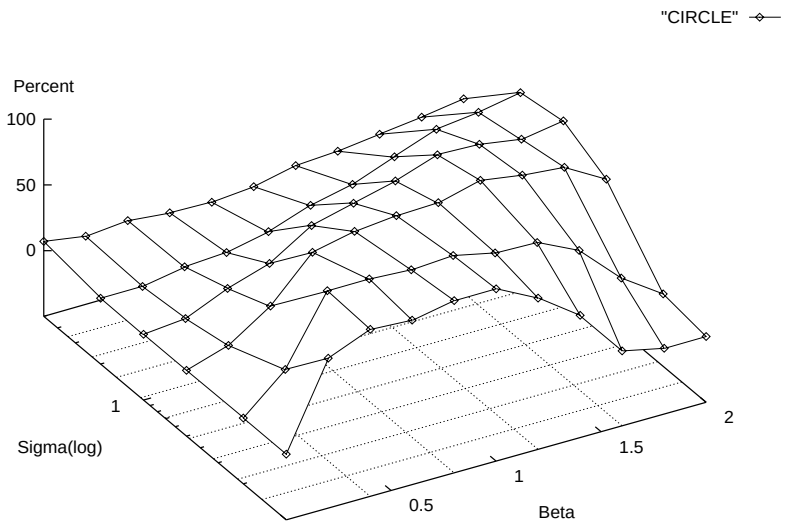


図 4.3: 円と判定される割合.

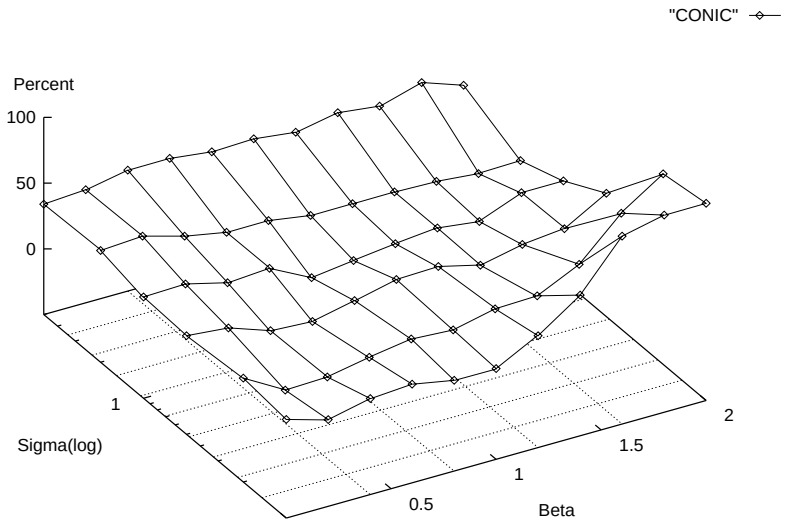


図 4.4: コニックと判定される割合.

この $0 \leq \beta \leq 2$ の範囲で変えたときの，楕円の下部 $(-\pi/6 \sim \pi/6)$ の部分の 11 点のデータに対し，平均 0，標準偏差 σ 画素のノイズを誤差 x, y 座標に独立に加えたときの判定の割合をクラフ化したものを図 4.2〜4.4に示す．見てわかる通り，β が小さいとき ($\beta = 0$ は直線) 直線と判断される場合が多く，β が 1 に近づくにつれて円と判断される場合が多くなる．また誤差の大きさが大きくなれば，強いモデルと判定される割合が減少することがわかる．つまり誤差の大きさに自動的に追従していることがわかる．

(2) 実画像実験

図 4.5に実画像 (512×480 画素) を示す．この画像からエッジ検出を行ない，そのエッジに対してモデルを当てはめた結果を図 4.6から図 4.8に示す．図 4.6はエッジの長さ (画素数) が 40 画素であり直線と判断された．また図 4.7は長さが 120 画素であり円と判断され，図 4.8は長さが 180 画素でありコニックと判断された．これらを比較すると，検出されたエッジが楕円の一部であったとしても，その長さが短ければ楕円と判断されずに，直線や円と判断されることがわかる．

4.1.8 まとめ

与えられた点列に対し，幾何学的 AIC を用いた恣意的なしきい値を使わない直線・円・コニックの判定方法について述べた．シミュレーションの結果から，判定結果は誤差の大きさに自動的に追従しており，これは従来の経験的なしきい値では対応できない．

予め当てはめたいモデルがわかっている場合，例えば工業用部品の外観検査などにおいては，そのモデルを最適に精度よく当てはめればよいため，このようは判定は必要ないと思われる．しかし，ある検出されたエッジから，そのエッジを記述できる最適なモデルを推定するような問題いわゆるエッジのセグメンテーションを考えた場合，得られたエッジを部分エッジ (セグメント) に分割し，それぞれのセグメントに対しモデルの判定を行なうことにより，より詳細なかつ最適な記述を作成できるのではないかと思われる．このセグメンテーション問題については第 5章で詳しく検討する．

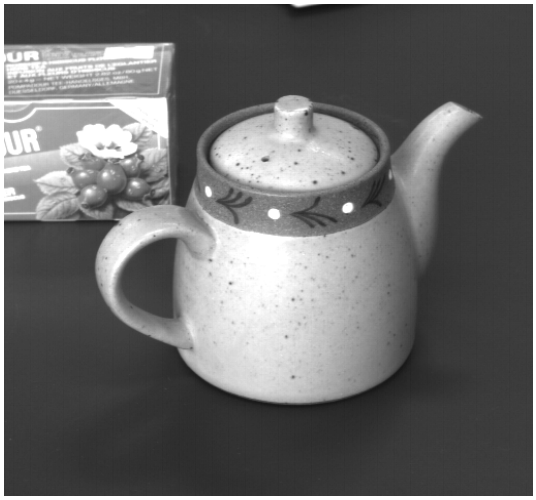


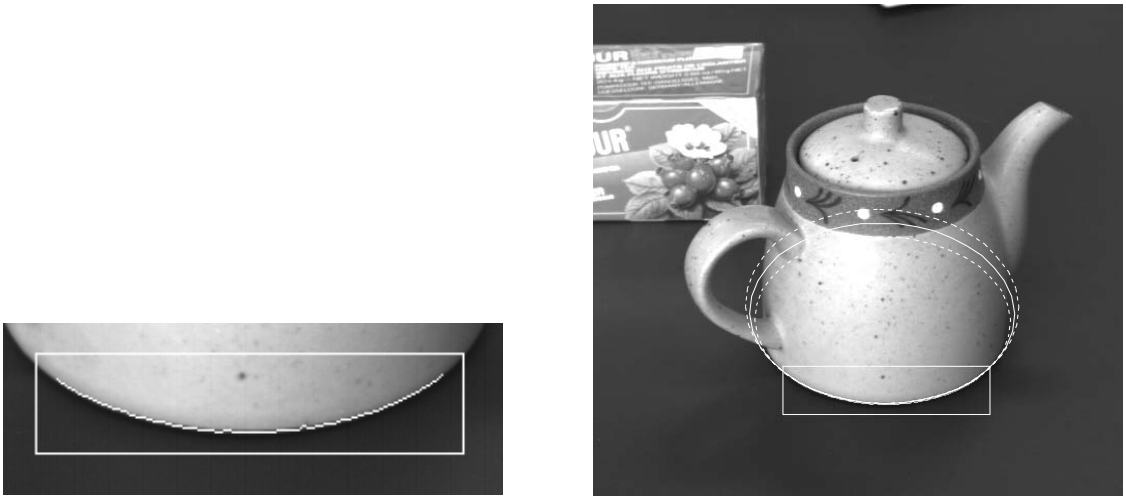
図 4.5: 実画像 (512×480).

(a) (b)

図 4.6: (a) 検出したエッジ (60 画素). (b) 当てはめ結果 (直線).

(a) (b)

図 4.7: (a) 検出したエッジ (120 画素). (b) 当てはめ結果 (円).



(a) (b)

図 4.8: (a) 検出したエッジ (180 画素). (b) 当てはめ結果 (コニック).

4.2 ステレオ視における無限遠性および平面性の判定

ステレオ視によって 3 次元位置の測定や形状復元を行なう場合に，物体が無限遠にあれば視差が生じないため，3 次元位置や形状を復元することができない．一方，前章で示したように物体が平面であることが既知であれば，その知識を利用して形状を精度よくロバストに復元することができる．本節では，金谷によって提案された**幾何学的情報量基準** (AIC) を用いて，物体が無限遠にあるかどうか，物体が平面とみなせるかどうかを画像の誤差に関する知識を用いず，さらに何らの恣意的なしきい値をも用いずに自動的に判定することが可能であることを示す．

4.2.1 はじめに

ステレオ視によって 3 次元位置の測定や形状復元を行なう場合に，物体が無限遠にあれば視差が生じないため，3 次元の形状を復元することができない．一方，前章で示したように物体が平面であることが既知であれば，その知識を利用して形状を精度よくロバストに復元することができる [47]．このことは，もし計算機によって物体が無限遠にあることが判定できれば，あるいは物体が平面であるかどうかを自動的に判定できれば 3 次元復元の信頼性が向上することを意味する．例えば平面かどうかを判定する素朴な方法は，平面性を仮定しないで 3 次元復元を行ない，復元した形状がほぼ平面であれば平面と判定することである．しかし前節と同様に「ほぼ平面であるかどうか」をどのような基準で判定すればよいかという問題に直面する．まず第 1 にステレオ視による 3 次元復元の精度を知らなければならない．なぜなら，精度が低ければ平面からのずれが大きくても平面とみなせるが，精度が高いと判定は厳しくしなければならないためである．しかし，精度は用いたカメラ系のみらなず，その画像の撮影条件やその物体のカメラに相対的な位置や向きに依存し，画像ごとに異なるため，これをあらかじめ予測することは不可能に近い．また仮に精度が既知であるとしても，それからわかるのは誤差の「確率分布」であり，統計的検定論にしたがって，平面であるものが平面でないと判定される確率 (**有意水準**) が $a\%$ 以下になるように決めるとしても，その有意水準は何 % にすべきであるかという問題が残る．

計算機にこのような「知的な」判断をさせる研究では，実験した例題に応じて判定の基準やそのしきい値を適当に調節しているような場合も見られるが，そのような恣意的な調節は絶対に避けるべきである．上述の問題では，画像や 3 次元復元の精度に関する知識を用いず，さらに何らの恣意的なしきい値をも用いないで判定が行なわれるのが望ましい．そこで本節でも金谷によって提案された幾何学的モデルのための情報量基準「幾何学的 AIC」 [39] を用いて，ステレオにおける無限遠性および平面性を判定する方法について述べる．

4.2.2 誤差の統計的モデル

3.2節や 3.3節と同じように，運動パラメータを $\{\boldsymbol{h}, \boldsymbol{R}\}$ としたステレオカメラモデル (図 4.9) を考える．特徴点の画像座標をそれぞれ

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.35}$$

と表わす．

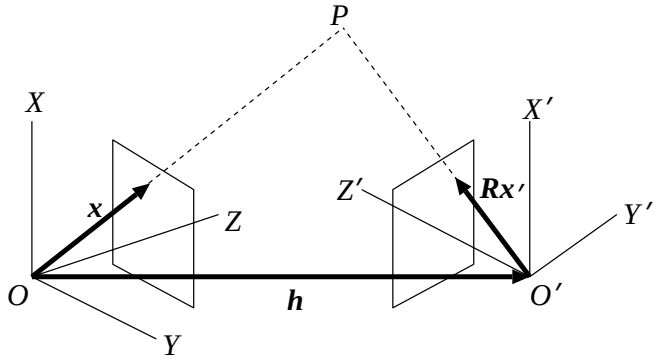


図 4.9: ステレオ視の幾何学的関係.

一般的に画像の誤差の絶対的な大きさを予め推定するのは困難であるが，誤差の定性的な特性は撮像デバイスや画像処理のアルゴリズムから比較的容易に推定できる．そこで前章と同様に共分散行列は定数倍を除いて既知であると仮定する．

$$V[\boldsymbol{x}] = \epsilon^2 V_0[\boldsymbol{x}], \qquad V[\boldsymbol{x}'] = \epsilon^2 V_0[\boldsymbol{x}'] \tag{4.36}$$

ここで ϵ をノイズレベル， $V_0[\boldsymbol{x}]$ を正規化共分散行列と呼ぶ.

4.2.3 ステレオ視の残差平方和

3.2節におけるステレオの最適復元問題を，補正量の残差平方和という観点から整理する． $\{\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}'_\alpha\}$, $\alpha = 1, ..., N$ を観測データとする．もし画像に誤差がなければ，次のエピ極線方程式を満たす.

$$|\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{R}\boldsymbol{x}'_\alpha| = 0 \tag{4.37}$$

これは $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{h} \times \boldsymbol{R}$ とおくと，次のように書換えられる.

$$(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}'_\alpha) = 0 \tag{4.38}$$

実際には誤差があるため，観測データはエピ極線方程式 (4.38) を満足しない．したがって，これはエピ極線方程式を満足するように $\boldsymbol{x}_\alpha$， $\boldsymbol{x}'_\alpha$ を補正する推定問題とみなすことができる．すなわち観測データ $\{\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}'_\alpha\}$ から，エピ極線方程式

$$(\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha, \boldsymbol{G}\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha) = 0, \qquad \alpha = 1, ..., N \tag{4.39}$$

を満たすような真の位置 $\{\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha\}$ を推定する問題となる．補正項すなわち推定誤差を $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$， $\Delta\boldsymbol{x}'_\alpha$ とすると，補正した

$$\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha = \boldsymbol{x}_\alpha - \Delta\boldsymbol{x}_\alpha, \qquad \hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha = \boldsymbol{x}'_\alpha - \Delta\boldsymbol{x}'_\alpha \tag{4.40}$$

がエピ極線方程式 (4.38) を満足するように選べばよい．このような補正は無数に存在するが，その中で確率的に最も確からしいものを選ぶ．すなわち 3.2節で示したように，正規化共分散行列 $V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]$, $V_0[\boldsymbol{x}'_\alpha]$ に関する**マハラノビス距離**の二乗和

$$J = \sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{x}_\alpha - \hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]^-(\boldsymbol{x}_\alpha - \hat{\boldsymbol{x}}_\alpha)) + \sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{x}'_\alpha - \hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha, V_0[\boldsymbol{x}'_\alpha]^-(\boldsymbol{x}'_\alpha - \hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha)) \tag{4.41}$$

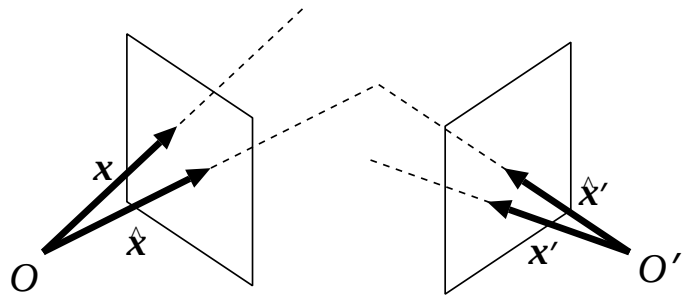


図 4.10: 視線が交わるように補正する．

を最小にする $\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha$，$\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ を選べばよい [31]．つまり，式 (4.41) を最小にする $\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha$，$\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ は真の位置 $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$，$\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ の**最尤推定量**にほかならない [30, 31]．このときの J の最小値 $\hat{J}$ を**残差平方和**と呼ぶ．エピ極線方程式 (4.38) のもとで式 (4.41) を最小にする最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha$，$\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ は 3.2節より第 1 近似において次のように与えられる [30, 49].

$$\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha = \boldsymbol{x}_\alpha - \frac{(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}'_\alpha)V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}'_\alpha}{(\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha, \boldsymbol{G}^\top V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha) + (\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, \boldsymbol{G}V_0[\boldsymbol{x}'_\alpha]\boldsymbol{G}^\top\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha)} \tag{4.42}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha = \boldsymbol{x}'_\alpha - \frac{(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}'_\alpha)V_0[\boldsymbol{x}'_\alpha]\boldsymbol{G}^\top\boldsymbol{x}_\alpha}{(\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha, \boldsymbol{G}^\top V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha) + (\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, \boldsymbol{G}V_0[\boldsymbol{x}'_\alpha]\boldsymbol{G}^\top\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha)} \tag{4.43}$$

これを式 (4.41) に代入すると，ステレオ視における残差平方和は次のように書ける．

$$\hat{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}'_\alpha)^2}{(\boldsymbol{x}'_\alpha, \boldsymbol{G}^\top V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}'_\alpha) + (\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{G}V_0[\boldsymbol{x}'_\alpha]\boldsymbol{G}^\top\boldsymbol{x}_\alpha)} \tag{4.44}$$

4.2.4 無限遠ステレオの残差平方和

ステレオにおいて無限遠の特徴点を観測したとする．それらの画像座標を $\{\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}'_\alpha\}$, $\alpha = 1, ..., N$ とすると，画像に誤差のない場合，ある定数 k を用いて

$$\boldsymbol{x}_\alpha = k\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}'_\alpha \tag{4.45}$$

のように表わせる．つまり $\boldsymbol{x}_\alpha$ と $\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}'_\alpha$ は平行になるはずである．しかし一般に画像には誤差が存在するため，観測データ $\{\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}'_\alpha\}$ は式 (4.45) を満足しない．そこで式 (4.45) を満足するように $\boldsymbol{x}_\alpha$，$\boldsymbol{x}'_\alpha$ を補正することを考える (図 4.11)．これは観測データ $\{\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}'_\alpha\}$ から

$$\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha = k\boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha, \qquad \alpha = 1, ..., N \tag{4.46}$$

を満たすような真の位置 $\{\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha\}$ を推定するという問題になる．

この問題についての最尤推定の意味で最適な解は，条件 (4.46) のもとでの式 (4.41) を最小にする解で与えられる．第 1 近似において，最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha$, $\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ は次式で与えられる．

$$\Delta\boldsymbol{x}_\alpha = -((\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}'_\alpha) \times V_0[\boldsymbol{x}_\alpha])^\top \boldsymbol{W}_\alpha(\boldsymbol{x}_\alpha \times \boldsymbol{R}\boldsymbol{x}'_\alpha) \tag{4.47}$$

$$\Delta\boldsymbol{x}'_\alpha = (\boldsymbol{x}_\alpha \times \boldsymbol{R}V_0[\boldsymbol{x}'_\alpha])^\top \boldsymbol{W}_\alpha(\boldsymbol{x}_\alpha \times \boldsymbol{R}\boldsymbol{x}'_\alpha) \tag{4.48}$$

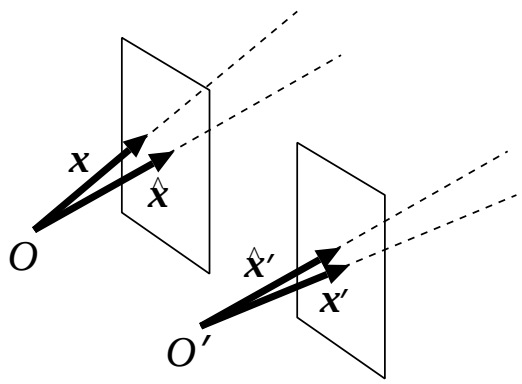


図 4.11: 視線が平行になるように補正する．

ここで， $\boldsymbol{W}_\alpha$ は次式で与えられる行列である．

$$\boldsymbol{W}_\alpha = \Big((\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}'_\alpha) \times V_0[\boldsymbol{x}_\alpha] \times (\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}'_\alpha) + \boldsymbol{x}_\alpha \times \boldsymbol{R} V_0[\boldsymbol{x}'_\alpha] \boldsymbol{R}^\top \times \boldsymbol{x}_\alpha \Big)_2^- \tag{4.49}$$

式 (4.48) を式 (4.41) に代入すると，無限遠ステレオにおける残差平方和は次のように求められる．

$$\hat{J}_\infty = \sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{x}_\alpha \times \boldsymbol{R}\boldsymbol{x}'_\alpha, \boldsymbol{W}_\alpha(\boldsymbol{x}_\alpha \times \boldsymbol{R}\boldsymbol{x}'_\alpha)) \tag{4.50}$$

4.2.5 平面のステレオ視の残差平方和

ここでも， 3.3節でのステレオによる平面の最適な復元問題を，補正量の残差平方和という観点から整理する． $\{\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}'_\alpha\}$, $\alpha = 1, ..., N$ を空間内の平面上にある特徴点の画像座標とする．図 4.12に示すように，平面の法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$，原点から平面までの距離を d とおく．画像に誤差がなければ $\{\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}'_\alpha\}$ は，ある定数 k を用いた次式の関係を満足する．

$$\boldsymbol{x}' = k\boldsymbol{R}^\top((\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{h} - d\boldsymbol{x}) \tag{4.51}$$

実際には誤差があるため，観測データ $\{\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}'_\alpha\}$ は式 (4.51) を満足しない．したがって，式 (4.51) を満足するように $\boldsymbol{x}_\alpha$, $\boldsymbol{x}'_\alpha$ を補正する推定問題は，平面のパラメータ $\{\boldsymbol{n}, d\}$ と

$$\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha \times \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha = \boldsymbol{0}, \qquad \alpha = 1, ..., N, \qquad \text{ただし} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}^\top(\boldsymbol{h}\boldsymbol{n}^\top - d\boldsymbol{I}) \tag{4.52}$$

を満たすような真の位置 $\{\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha\}$ をデータ $\{\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}'_\alpha\}$ から推定する問題となる．

これ問題を解くことにより，平面パラメータ $\{\boldsymbol{n}, d\}$ の最尤推定量 $\{\hat{\boldsymbol{n}}, \hat{d}\}$ が得られたとると， 3.3節より真の位置 $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$, $\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ の最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha$, $\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ が第 1 近似において次のように計算される [38, 47].

$$\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha = \boldsymbol{x}_\alpha - (V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\hat{\boldsymbol{A}}^\top \times \boldsymbol{x}'_\alpha)\hat{\boldsymbol{W}}_\alpha(\boldsymbol{x}'_\alpha \times \hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}_\alpha) \tag{4.53}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha = \boldsymbol{x}'_\alpha + (V_0[\boldsymbol{x}'_\alpha] \times (\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}_\alpha))\hat{\boldsymbol{W}}_\alpha(\boldsymbol{x}'_\alpha \times \hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}_\alpha) \tag{4.54}$$

$$\hat{\boldsymbol{W}}_\alpha = \Big(\boldsymbol{x}'_\alpha \times \hat{\boldsymbol{A}} V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\hat{\boldsymbol{A}}^\top \times \boldsymbol{x}'_\alpha + (\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}_\alpha) \times V_0[\boldsymbol{x}'_\alpha] \times (\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}_\alpha) \Big)_2^- \tag{4.55}$$

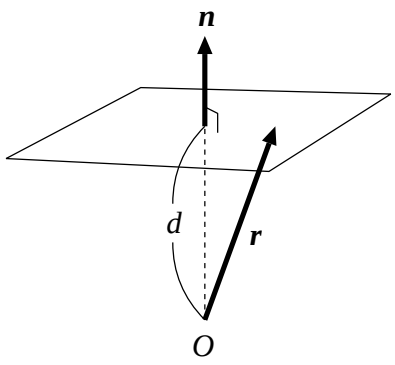


図 4.12: 平面パラメータ.

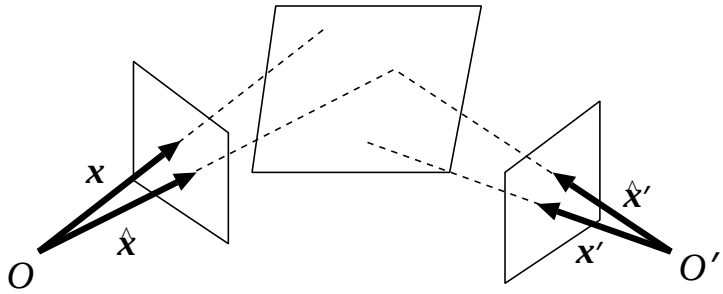


図 4.13: 視線が平面上で交わるように補正する.

これを式 (4.41) に代入すると，平面モデルの残差平方和は次のように計算される [40].

$$\hat{J}_{\Pi} = \sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{x}'_{\alpha} \times \hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}_{\alpha}, \hat{\boldsymbol{W}}_{\alpha}(\boldsymbol{x}'_{\alpha} \times \hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}_{\alpha})) \tag{4.56}$$

4.2.6 ステレオ視による無限遠性および平面性の判定

物体形状を仮定しないステレオ視のモデルを $\mathcal{S}$ とすると，モデル $\mathcal{S}$ は式 (4.38) のエピ極線方程式の定める $\mathcal{X}$ の余次元 1 の (3 次元) 多様体である．このモデルは未知パラメータを含んでいないので自由度は 0 であり，$\mathcal{S}$ がそれ自身の最尤推定量でもある．このモデルの幾何学的 AIC は次のようになる．

$$AIC(\mathcal{S}) = \hat{J} + 6N\epsilon^2 \tag{4.57}$$

また特徴点が無限遠にあるというモデルを $\mathcal{S}_{\infty}$ とする．式 (4.45) の 3 つの式のうち，独立なのは 2 つであるため，モデル $\mathcal{S}_{\infty}$ は $\mathcal{X}$ の余次元 0 の 2 次元多様体となる．またこのモデルも未知パラメータを含まないため自由度は 0 となる．したがってこのモデルの幾何学的 AIC は次のようになる．

$$AIC(\mathcal{S}_{\infty}) = \hat{J} + 4N\epsilon^2 \tag{4.58}$$

物体が平面であるというモデル $\mathcal{S}_\Pi$ は式 (4.51) によって定義される．式 (4.51) の 3 個の成分方程式は代数的に従属であり，ランクは 2 である．したがって，モデル $\mathcal{S}_\Pi$ は $\mathcal{X}$ の余次元 2 の (2 次元) 多様体である．これを指定する平面パラメータの自由度は 3 であるから，モデル $\mathcal{S}_\Pi$ の幾何学的 AIC は次のようになる．

$$AIC(\mathcal{S}_\Pi) = \hat{J}_\Pi + (4N+6)\epsilon^2 \tag{4.59}$$

モデル $\mathcal{S}_\infty$ および $\mathcal{S}_\Pi$ の拘束条件 (4.45) と (4.51) は，エピ極線方程式 (4.37) すなわちモデル $\mathcal{S}$ の拘束条件を含んでいることがわかる．また式 (4.51) において，$d \to \infty$, $k \to 0$, ただし kd は有限の定数とすることにより，式 (4.45) を得ることができる．したがって，各モデルの強さは次のようになる．

$$\mathcal{S}_\infty \succ \mathcal{S}_\Pi \succ \mathcal{S} \tag{4.60}$$

したがって次の条件を満足するとき無限遠であると判定できる．

$$K_\infty = \sqrt{\frac{1}{7}\left(\frac{\hat{J}_\infty}{\hat{J}} + 4\right)} < 1 \tag{4.61}$$

また次の条件を満足するとき物体が平面であると判定できる．

$$K_\Pi = \sqrt{\frac{1}{7}\left(\frac{\hat{J}_\infty}{\hat{J}} + \frac{4N+6}{N}\right)} < 1 \tag{4.62}$$

4.2.7 判定実験

(1) シミュレーション実験

(a) 無限遠性テスト 図 4.14に示すように，ステレオカメラで平面上に分布する特徴点を観測し，誤差が加わった画像に対し，基線ベクトル $\boldsymbol{h}$ の長さを変化させたときに，無限遠と判定される割合がどのように変化するかシミュレーションを行なった．

図 4.15に，大きさ 512×512 画素，焦点距離 $f = 600$(画素)，基線長 $\|\boldsymbol{h}\|$=0.5，各特徴点 (格子点) に x, y 独立に期待値 0，標準偏差 1(画素) の正規乱数を誤差として加えた画像の例を示す．

標準偏差 σ=0.5 ∼ 3.0 における基線長 ($\|\boldsymbol{h}\|$) に対する K_∞(式 (4.61)) のグラフを図 4.16に示す．図 4.17は基線長に対する無限遠と判定される割合のグラフを示す．これらを見てわかるように，画像に含まれる誤差が大きければ大きいほど誤って無限遠と判定される割合も大きくなる．つまり誤差の大きさに自動的に追従していることがわかる．図 4.18に図 4.15の画像からそのまま直接復元した形状を示す．見てわかるように，実際の形状はほとんど平面に近いのにもかかわらず，非常に凹凸の激しい形状が復元されている．この例では $K_\infty = 0.93$ となり，本手法では「再構成できない」と判断された．つまり「視差が十分でない」と判断された．

(b) 平面性テスト 図 4.19に示すように，平面を折り曲げた形状を運動パラメータが既知のステレオカメラで観測し，誤差が加わった画像に対して曲げの角度 θ を変化させたときに，平面と判定される割合がどのように変化するかシミュレーションを行なった．

図 4.20に，大きさ 512×512 画素，焦点距離 $f = 600$(画素)，角度 θ=20°，各特徴点 (格子点) に x, y 独立に期待値 0，標準偏差 1(画素) の正規乱数を誤差として加えた画像の例を示す．

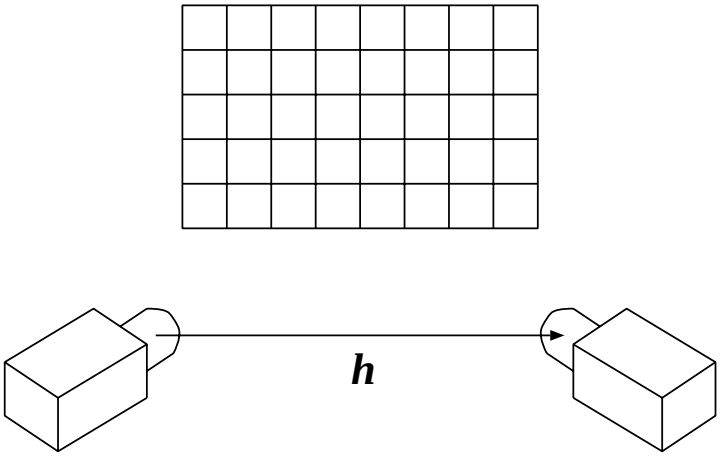


図 4.14: 無限遠性テスト.

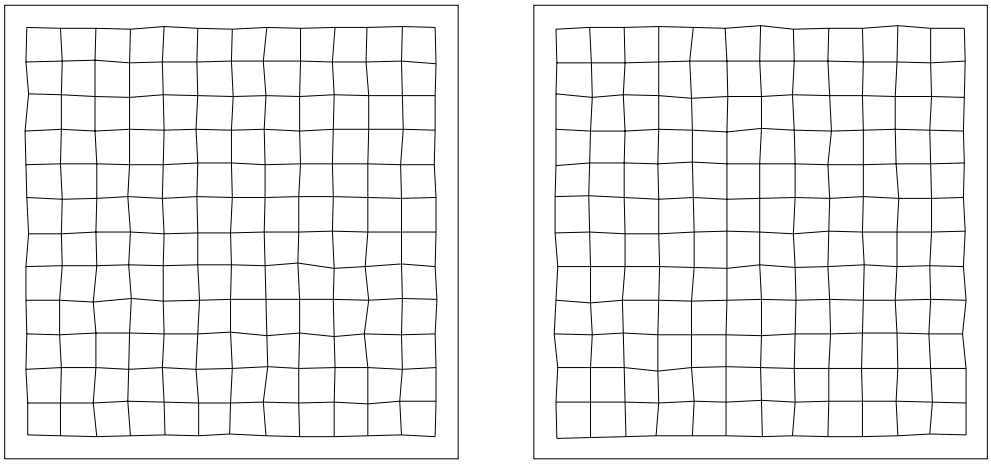


図 4.15: シミュレーション画像の例 ($\sigma = 1.0$, $\|\boldsymbol{h}\| = 0.5$).

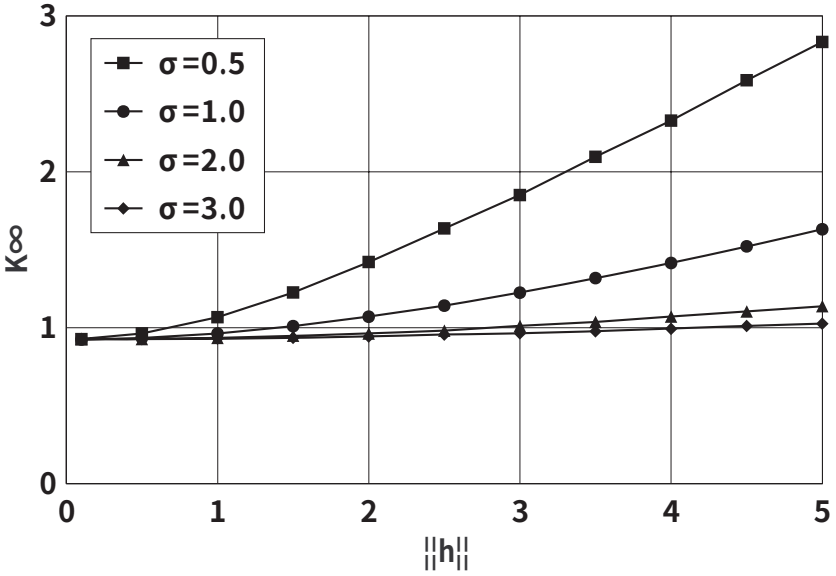


図 4.16: 基線長 $\|\boldsymbol{h}\|$ に対する K_∞ の平均値.

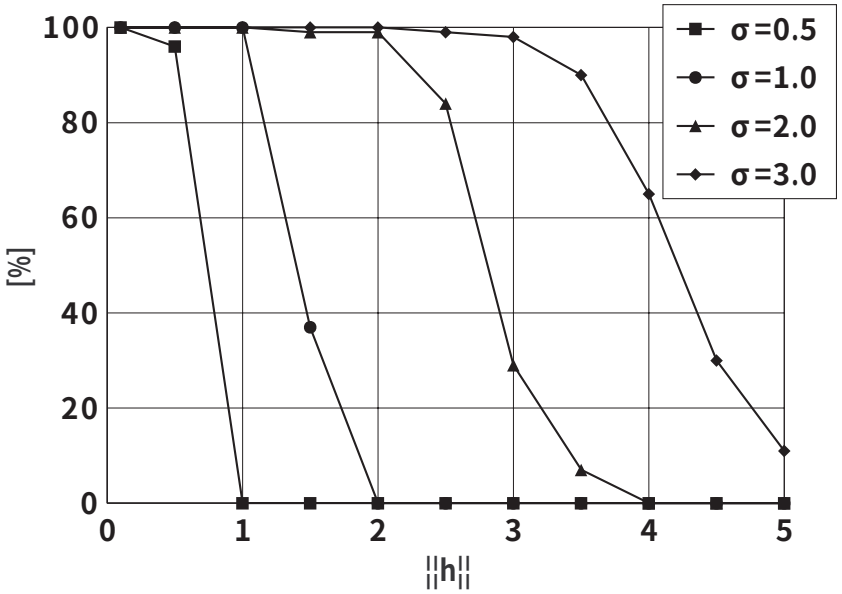
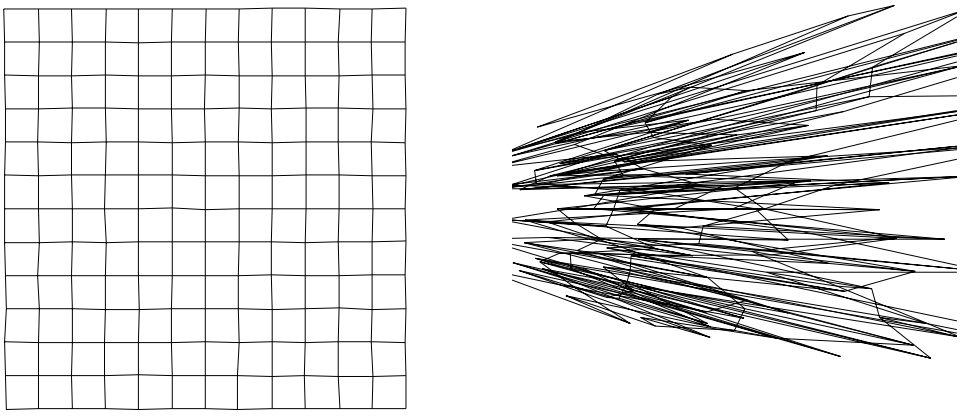


図 4.17: 無限遠と判定される割合.



(a) (b)

図 4.18: 図 4.15から直接再構成した形状 ($K_\infty = 0.93$). (a) 前から見た形状. (b) 上から見た形状

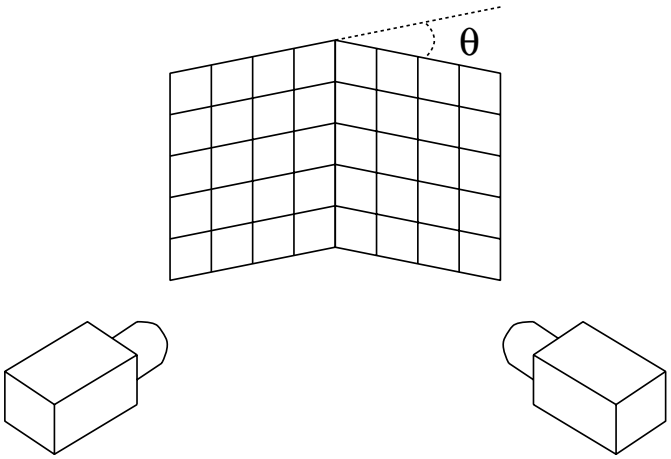


図 4.19: 平面性テストのシミュレーション.

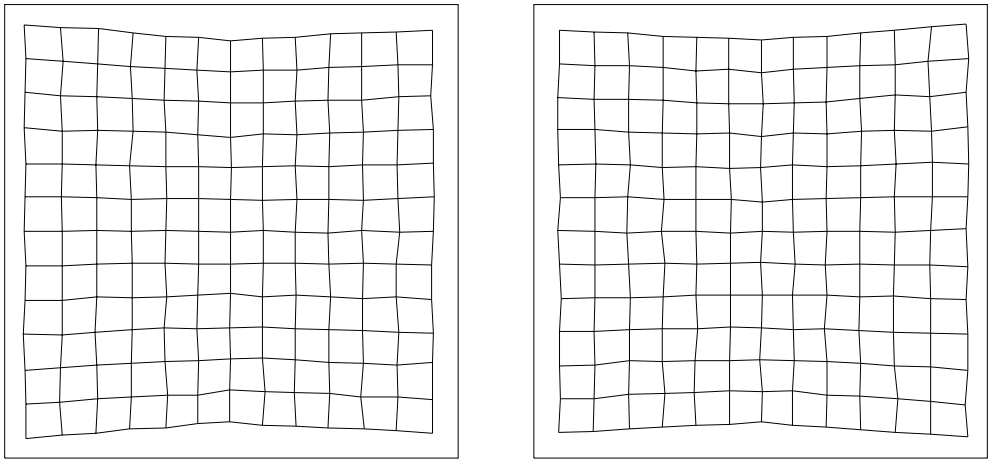


図 4.20: シミュレーション画像の例 ($\sigma = 1.0$, $\theta = 20°$).

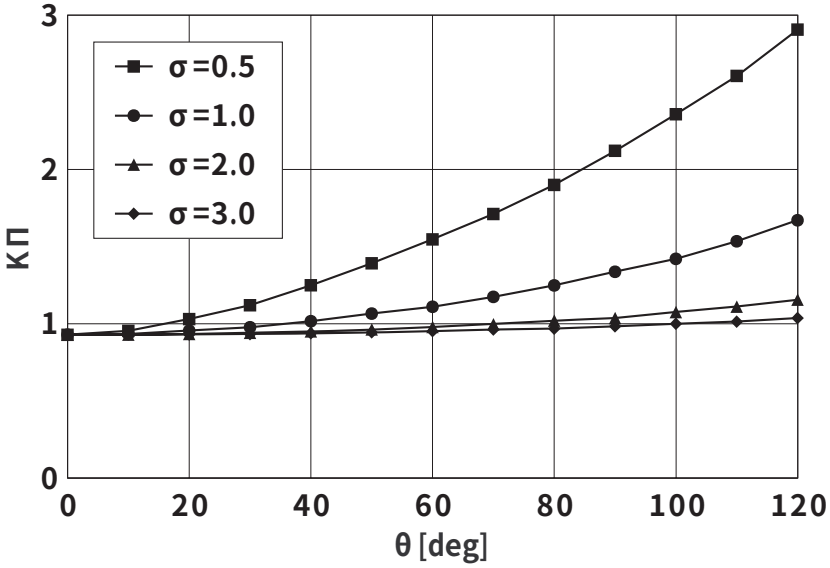


図 4.21: 角度 θ に対する K_{Π} の平均値.

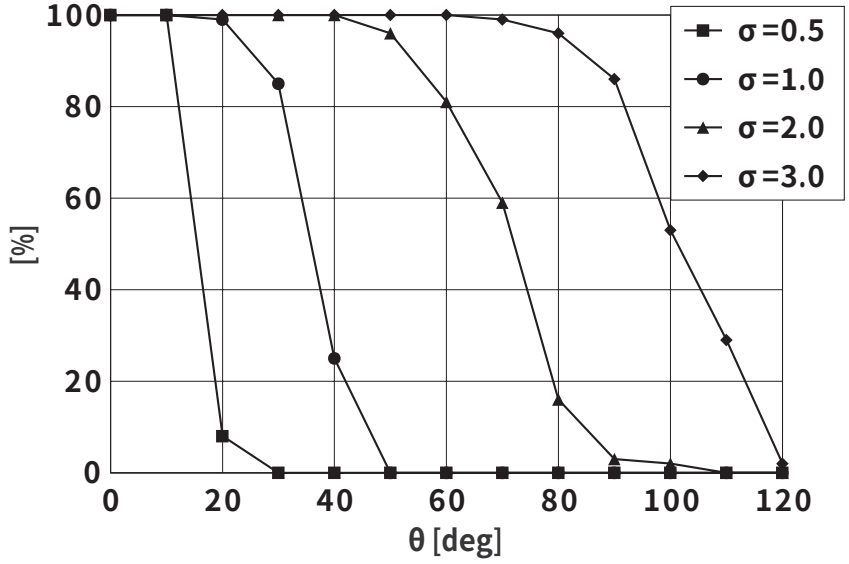
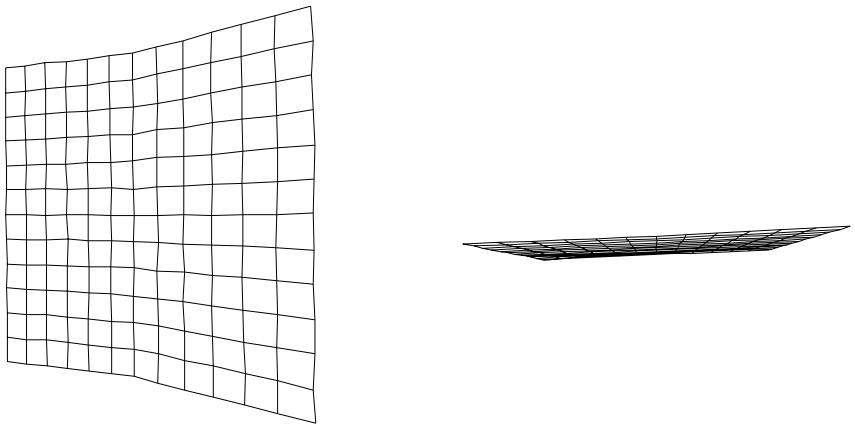


図 4.22: 平面と判定される割合.



(a) (b)

図 4.23: 図 4.20から判定された形状 ($K_{\mathrm{II}} = 0.94$). (a) 前から見た形状. (b) 上から見た形状

標準偏差 σ=0.5 ～ 3.0 における角度 θ に対する K_Π(式 (4.62)) のグラフを図 4.21に示す．図 4.22は角度 θ に対する平面と判定される割合のグラフを示す．これらを見てわかるように，画像に含まれる誤差が大きければ大きいほど，誤って平面と判定される割合も大きくなる．ここでも，判定結果が誤差の大きさに自動的に追従していることがわかる．

図 4.23および 4.24に図 4.20の画像から復元された形状を示す．図 4.23は何も判定を加えず直接再構成した形状であり，図 4.24は本手法により再構成した形状を示す．ここでは K_Π=0.94 となり，平面と判定された．

(2) 実画像実験

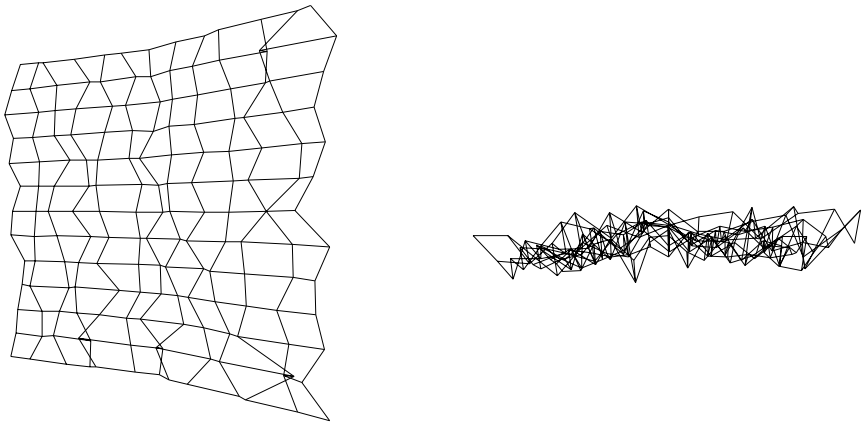
図 4.25に実ステレオ画像を示す．窓の枠の格子点を特徴点として用い，無限遠性と平面性の判定を行なった． K_∞ および K_Π はそれぞれ K_∞=3.09 および K_Π=0.86 となり，図 4.26に示すように，無限遠の特徴点を観測したものではなく，また形状は平面としてみなすことができると判定された．このように平面と判定されれば，同時にその標準変位も求めることができる．

4.2.8 まとめ

本節では金谷によって提案された幾何学的 AIC を用いて，ステレオ視によって 3 次元形状復元を行なう場合に，物体が平面とみなせるかどうか，視差が十分あるかどうかについて画像の誤差や 3 次元復元の精度に関する知識を用いず，さらに何らの恣意的なしきい値をも用いずに自動的に判定する新しい方法について述べた．シミュレーション実験により，その判定結果は誤差の大きさに自動的に追従していることがわかった．

もし形状が平面であると判定されれば，その平面は 3章で示した通り，最適な平面とその定量的な信頼性を評価することができる．またもし視差が十分でなく無限遠シーンと判定された場合，例えそのデータから 3 次元情報を復元したとしても，その信頼性は極めて低いと判断することができる．つまり求められた形状の信頼性を積極的に利用することが可能となる．

このことは，もし予め当てはめたいモデルがわかっていない場合，例えばロボットが自分で自分の周りの環境モデルを作成する場合や， 3 次元物体のモデル記述 (セグメンテーション) を行なう場合には，本節で述べたようなモデルの判断は極めて重要となると思われる．これらの具体的な方法については第 5章で述べる．



(a) (b)

図 4.24: 図 4.20から直接再構成した形状. (a) 前から見た形状. (b) 上から見た形状

図 4.25: 実ステレオ画像.

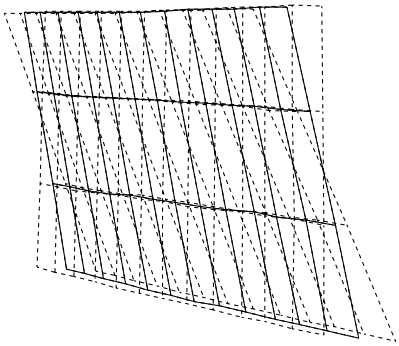


図 4.26: K_∞=3.09, K_Π=0.86. 復元した平面とその標準変位.

第 5 章

実際のシステムへの応用

本章では，前章までの考察をもとに 2 次元および 3 次元の幾何モデルの信頼性は実際のシステムに対してどのように利用できるかという点について，その具体的な手順と簡単な処理例について述べる．

5.1 幾何特徴の信頼性の利用

第 2章から第 3章では，画像から得られた点 (列) に対し幾何モデルを最適に当てはめ，かつその信頼性を共分散行列 (テンソル) の形で評価する方法について述べた．これらは，観測された全てのデータ点がある想定した幾何モデルを構成しているという条件のもとで，最適にモデルを当てはめ，かつ信頼性を求めるものであった．本節では，得られた信頼性をその後の画像処理などに積極的に応用することを考える．

5.1.1 信頼性評価に基づく直線およびコニック検出法

第 2章ではデータは全て同じ直線やコニック上にあると仮定して最適な当てはめを行なった．しかし実際の処理においては，得られた点全てが同一直線や同一コニック上にあるとは限らない．また同一直線あるいは同一コニック上にあるべきエッジや線が他の物体に隠されて別々のものとして検出されることも多い．このような分割されてしまった直線状エッジや線を抽出するための代表的な方法として Hough 変換 [9] による方法が挙げられる． Hough 変換は投票という形を用いるため雑音や誤差に対しロバストであり，和田 [78] らは ρ - θ 空間を非線形に変換した γ - ω 空間を用いることにより高精度に検出できることを示した．しかし，Hough 変換の検出精度は投票空間における分解能に大きく依存するため，高精度の検出を行なうためには一般に膨大な投票空間が必要となる．

画像内のエッジや線は，その濃淡変化が不連続であったり，急激に変化していたりすることが多いことから，その検出には空間微分などの局所処理を用いる場合が多い．そこで，このような局所的に検出されたエッジや線に対する直線やコニックの検出法として，まず局所的に直線やコニックを当てはめ，その直線上あるいはコニック上に載っているエッジや線を検出していくという方法が考えられる．しかし空間微分などの局所処理は画像内の雑音の影響を受けやすいため，当てはめた直線やコニックにも誤差が多い．そこで当てはめた直線やコニックの信頼性を利用しながら，同一と判定されるエッジを検出していくことにより，画像内の直線状あるいはコニック状のエッジを検出していくことを考える．ここでは，標準変位を用いて，画像内の直線を検出する手順の一例を示す．

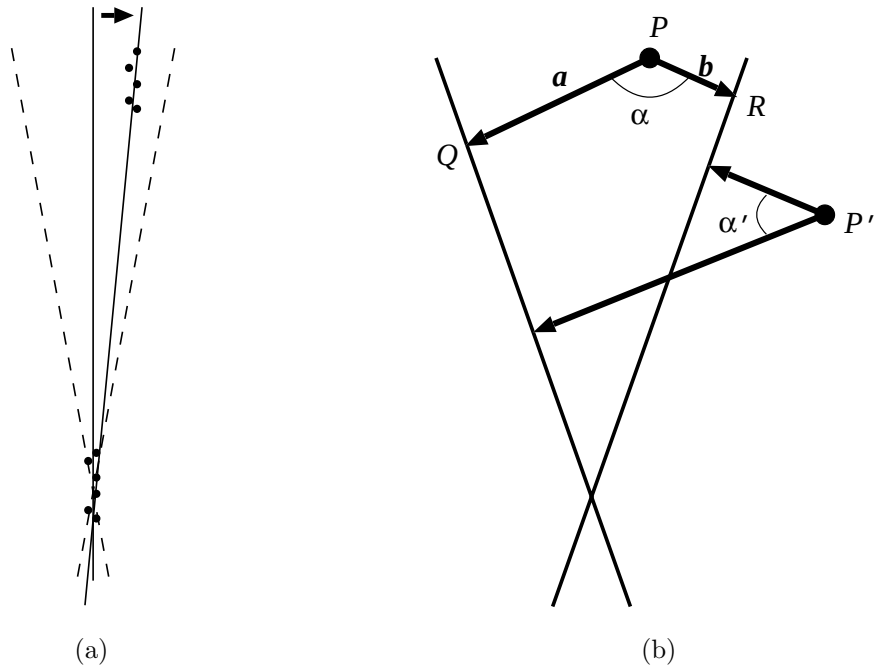


図 5.1: (a) 信頼性評価に基づく画像内の直線の検出方法. (b) 標準変位で囲まれる領域に含まれるかどうかの判定.

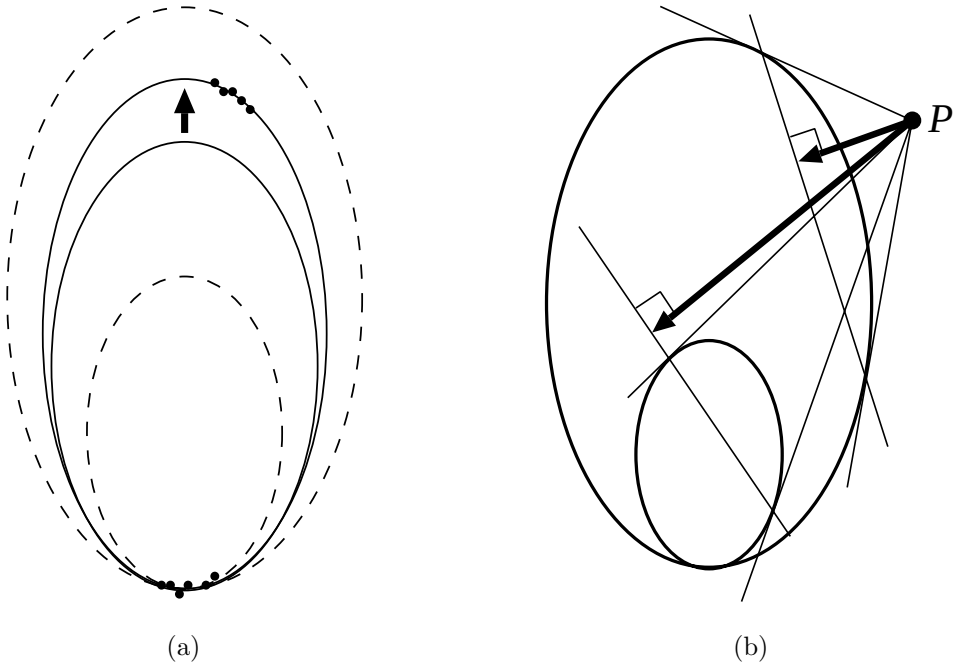


図 5.2: (a) 信頼性評価に基づく画像内のコニックの検出方法. (b) 極線を利用した標準変位で囲まれる領域に含まれるかどうかの判定.

1. 微分画像などから微分値の極大点列をエッジの候補点列として検出する.
2. 見つけた候補点列に対し，それらが直線であるとした場合の最適な直線を当てはめ，同時にその共分散行列を求める.
3. 当てはめた直線に対し，標準変位の範囲に含まれる候補点 (列) を見つけ，候補点 (列) も含めて新たに直線を当てはめる (図 5.1(a)).
4. 2〜 3を候補点がなくなるまで繰り返す.
5. 直線に対し最適な射影を式 (A.9) により計算し，線分の両端点を求める.
6. 新たなエッジ候補点列を見付け， 1〜 4 を繰り返す.

あるデータ点が標準変位内に含まれるかどうかの判定は，データ点から標準変位の直線に対する垂線をベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ とし，その二つのベクトルの角度 α を計算することにより行なえる．つまり α が鈍角であれば標準変位で示される領域に含まれ，鋭角であれば領域に含まれない (図 5.1(b)).

また，画像内のコニックはデータ点に対する極線を用いることにより同様な方法で検出できる (図 5.2(a)).

5.1.2 3 次元幾何モデルの信頼性の応用

ステレオによって 3 次元復元を行なった際，復元点の性格な位置が既知であれば，復元点の 3 次元位置を求めることは基準位置からのカメラの 3 次元位置を求めることなる．したがって，復元点の 3 次元位置の信頼性はカメラ座標の原点位置の信頼性とみなせる．つまり，ロボットや自律走行車などにステレオカメラを搭載し，移動しながら基準位置にある物体を観測することにより自分の位置を更新することができる [60, 61].

5.2 幾何学的 AIC の応用

第 4章では，画像内の点列あるいはステレオにおける対応点列がどのような幾何モデルと判断すればよいかについて，幾何学的 AIC を用いることにより恣意的あるいは経験的なしきい値を使わずに判断する方法について述べた．しかし実際のシーンにおいては，画像内で検出された点列あるいはステレオにおいて検出された対応点列が一つの幾何モデル上に載っていることはほとんどない．したがって得られた点列をなんらかの方法により分離し，個々の幾何モデルを当てはめることが重要となってくる．そこで本節では，幾何学的 AIC を用いて点列を個々の幾何モデルに分離し，最適なモデルを当てはめることにより，物体形状のセグメンテーションに応用することを考える.

5.2.1 輪郭線のセグメンテーション

微分， 2 値化，細線化などの処理やゼロクロス法 [74] などにより，画像内のエッジを検出した場合において，得られた点列を何らかの方法で直線部分あるいはコニック部分に分割することを考える．これは図形のモデル化やベクトル化などに用いられるだけでなく，パターン認識において重要な特徴の一つとなる.

直線当てはめ (2.1節) とコニック当てはめ (2.2節) を用い，モデルの判断基準として幾何学的 AIC を用いた場合，直線部分と曲線 (コニック) 部分に分割するには以下のような手順となる.

1. 得られた画像からエッジ検出，輪郭線追跡等により細線化画像を作成する．
2. 細線化画像から，全ての連結した画素列 (例えばチェーンコード化しておく) を抽出する．
3. 得られた画素列に対し，両端点を通る直線からの距離が最大になるような分割点候補を求める．
4. 分割する前の画素列に対し，最適に直線とコニックを当てはめ，それぞれ残差平方和を求める．
5. 分割候補のそれぞれの画素列に対し，最適に直線とコニックを当てはめ，それぞれ残差平方和を求める．
6. 分割する前の残差平方和と，二つに分割後の残差平方和から，それぞれのモデル (1 直線モデル， 1 コニックモデルと 2 直線モデル， 1 コニック 1 直線モデル， 2 コニックモデル) の幾何学的 AIC を求め，比較することにより分割するかどうかを判定する．
7. 分割すべきと判断された線分に対し， 2〜 6を再帰的に行なう．
8. 全ての画素列に対し， 2〜 7を繰り返す．
9. 連結された画素列を分割した場合，それぞれ当てはめた直線やコニックの交点を求め，折れ点とする．また両端点は最適補正により直線やコニック上の点に射影する．

この方法によるセグメンテーション結果を図 5.3〜 5.5に示す．図 5.3の原画像から空間微分・細線化を行ない， 3 画素置きに輪郭線上の点をサンプリングしたものを図 5.4に示す．この点列に対する直線と円弧へのセグメンテーション結果を図 5.5に示す．セグメントの分割点は × で示し，円弧と判定されたセグメントは破線で表示している．

もし，直線部分だけに分割する場合には，モデルの判定は「1 直線モデル」と「2 直線モデル」とを比較することで行なうことができる (図 5.6).

同様な方法により，ステレオ画像から復元された 3 次元データを平面パッチに分割することもできる．

5.3 まとめ

前章までに個々に述べた幾何モデルの信頼性評価について，実際に応用するための処理とその結果について簡単に述べた．信頼性評価に基づく直線およびコニック検出においては，どのような点をエッジの候補点列とするかによって，結果に大きく影響を及ぼすことが考えられる．また幾何学的 AIC によるセグメンテーションでは，各モデルの比較の順番により分割が異なる場合も考えられる．実際には，ここに述べた手順においては簡単に述べているが，難しい処理，例えば対応点問題などをどのように処理するのかの問題が残されている．しかしながら，このような幾何情報の信頼性評価は，応用範囲が広くかつ様々な分野の基礎技術となる可能性を持っていることがわかる．

図 5.3: 原画像

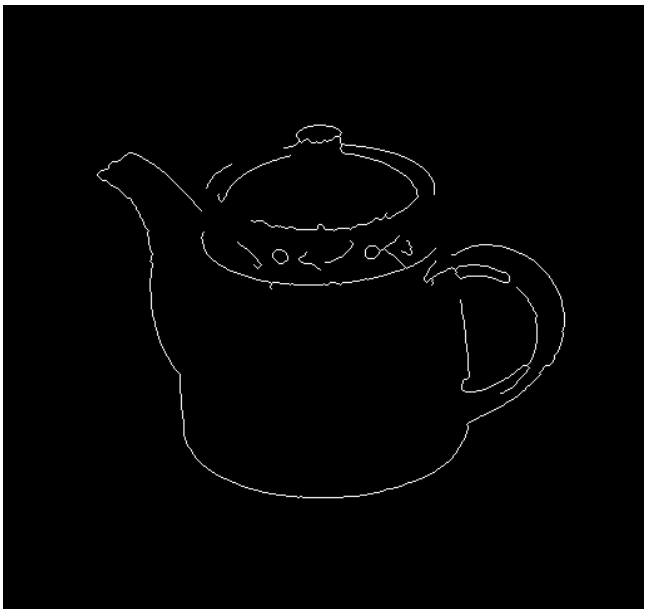


図 5.4: 輪郭線

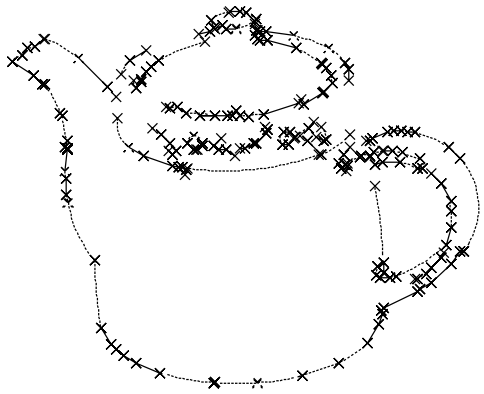


図 5.5: 直線と円弧へのセグメンテーション結果

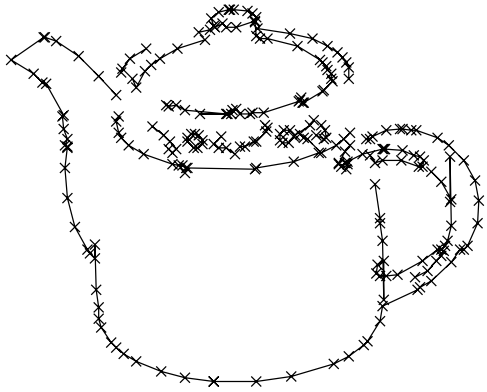


図 5.6: 線分へのセグメンテーション結果

第 6 章

まとめ

本論文では，画像の誤差の統計的のモデルを定義することにより，コンピュータビジョンにおいて重要な 2 次元幾何特徴である

- 直線
- コニック

について，その最適な当てはめとその定量的な信頼性評価について述べ，シミュレーション画像および実画像の実験により，その有効性を示した.

また 3 次元復元において基本となるステレオ視やレンジファインダのデータからの

- 3 次元復元
- 平面の直接的な再構成

について，その最適な当てはめとその定量的な信頼性評価方法について，シミュレーション画像および実画像の実験により，その有効性を示した.

そして幾何学的 AIC を導入することにより，経験的あるいは恣意的なしきい値を用いることなく，最適に当てはめられた各幾何モデルを判定する方法について，シミュレーション画像および実画像を用いた実験を行ない，その有効性を示した.

これらを実際に応用することを考えた場合の問題点を以下に挙げる.

1. 仮定している誤差モデルの妥当性.
2. 固有値計算の反復に伴なう計算コスト.
3. キャリブレーションの精度の問題.
4. ステレオ視における対応点問題.

1に関しては，理論的な解析のためには必要な前提条件であり，本論文で多く用いた「正規分布」の仮定は，よく知られた「標本数が大きくなれば標本平均値の分布は正規分布に近づく」という「中心極限定理」により，妥当であると考えてよいと思われるが，実際のディジタル化された画像の誤差がどのような分布をしているのか，その測定方法も含めて検討する必要がある.

2については，実際の応用を考えた場合，この計算コストは無視できなくなるが，このように理論的に最適な当てはめとその理論限界を求めておくことは極めて重要である．この理論限界を知った上で，実際の応用における計算時間と精度との妥協を計ることが重要になってくる．

3と 4については， 4章で述べたように，これらの不正確さはすべて誤差として扱われることとなり，例えば誤対応等は非常に大きな誤差として検出される．したがって最適な当てはめが求まらない場合もあるため，何らかのロバスト性を高めるための処理が必要になる．例えば，補正量の著しく大きな特徴点を「誤対応」として当てはめのデータから除外するなどの方法を用いたり， RANSAC[12] のような投票法を採用することなどが考えられる

また幾何学的 AIC による 2 次元モデルや 3 次元モデルの判定方法については，ロボットや計算機が自身でその周囲の環境モデルを作り出すような場合，具体的には，画像内のエッジに対しセグメンテーションを行ないモデルを生成する場合や，空間内に復元された形状のセグメンテーションを行なって環境モデルを生成する場合などにおいて，そのセンサーの精度に合ったモデル生成を行なえるという意味で重要な意味を持つと思われるが，このような方法に基づく判定の幾何学的意味を検討する必要があると思われる．また他の判定基準，例えば MDL[64, 65] についても検討し，このような幾何学的なモデル判定においてはどの基準が適しているのか，それぞれどのような特徴を持つのか，比較することが必要となる．

今後の課題として，これらの問題点について実験や解析を行ない，より深く考察するだけでなく，本論文で述べた手法を統合したインテリジェントな応用システムを構成することなどが挙げられる．

謝辞

豊橋技術科学大学在学中は学部および大学院修士課程を通じて御指導頂き，同大学院終了後も本論文をまとめるまでの間，折に触れ励まし御教示頂いた大阪大学産業科学研究所北橋忠宏教授に衷心より感謝いたします．本論文をまとめるにあたり，貴重な御助言と御指導を頂いた大阪大学基礎工学部情報工学科都倉信樹教授およびシステム工学科谷内田正彦教授に深く感謝いたします．

また本研究を進めるにあたり，長期にわたり研究におけるものの考え方から具体的手法に至るまで懇切な研究指導を頂いた群馬大学工学部情報工学科金谷健一教授に心から感謝いたします．その際，日頃お世話になりました群馬大学工学部情報工学科金谷研究室の諸氏に御礼申し上げます．

富士電機株式会社在職中に 1 年間研究指導を頂いた東京大学工学部電子情報工学科石塚満教授に深く感謝いたします．

さらに，このような研究の機会を与え，終始激励下さいました群馬工業高等専門学校の諸先生方に厚く御礼を申し上げます．

参考文献

[1] H. Akaike, A new look at the statistical model identification, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 19, pp. 716–723, 1974.

[2] J. Y. Aloimonos, I. Wwiss, and A. Bandyopadhyay, Active vision, *Proceedings of 1st ICCV*, pp. 35–54, 1987.

[3] N. Ayache and O. D. Faugeras, Building, registrating, and fusing noisy visual maps, *International Journal of Robotics Research*, Vol. 7, No. 6, pp. 45–65, 1988.

[4] D. H. Ballard, Reference frames for animate vision, *Proceedings of 11th IJCAI*, pp. 1635–1641, 1989.

[5] F. L. Bookstein, Fitting conic sections to scatterd data, *Computer Graphics and Image Processing*, Vol. 9, No. 1, pp. 56–71, 1979

[6] K. L. Boyer, M. J. Mirza and G. Ganguly, The robust sequential estimator: A general approach and its application to surface organization in range data, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 16, No. 10, pp. 987–1001, 1994.

[7] B. Brillault-O'Mahony, New method for vanishing point detection, *CVGIP: Image Understanding*, Vol. 54, No. 2, pp. 289–300, 1991.

[8] S. Das and N. Ahuja, Performance analysis of stereo, vergence, and focus as depth cues for active vision, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 17, No. 12, pp. 1213–1219, 1995.

[9] R. O. Duda and P. E. Hart, *Pattern Recognition and Scene Analysis*, Wiley, New York, 1973.

[10] T. Ellis, A. Abbood and B. Brillault, Ellipse detection and matching with uncertainty, *Image and Vision Computing*, Vol. 10, No. 5, pp. 271–276, 1992.

[11] O. Faugeras, *Three-Dimensional Computer Vision: A Geometric Viewpoint*, MIT Press, Cambridge, MA, U.S.A., 1993.

[12] M. A. Fischler and R. C. Bolles, Random sample consensus: A paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography, *Communications of ACM*, Vol. 24, No. 7, pp. 381–395, 1981.

[13] D. Forsyth, J. L. Mundy, A. Zisserman, C. Coelho, A. Heller and C. Rothwell, Invariant descriptors for 3-D object recognition and pose, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 13, No. 10, pp. 971–991, 1991.

[14] 顧海松, 浅田稔, 白井良明, 動き情報に基づくエッジセグメントの最適分割, 電子情報通信学会誌 D-II, Vol. J76-D-II, No. 8, pp.1544-1553, 1993.

[15] H. Gu, Y. Shirai and M. Asada, MDL-based segmentation and motion modeling in a long image sequence of scene with multiple independently moving objects, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 18, No. 1, pp. 58–64, 1996.

[16] A. Guzman, Decomposition of a visual scene into three-dimensional bodies, *Proceedings of AFIPS Fall Joint Computer Conference*, Vol. 33, pp. 291–304, 1968.

[17] D. A. Huffman, Impossible objects as nonsence sentences, *Machine Intelligence*, Edinburgh University Press, Vol. 6, pp. 295–323, 1971.

[18] 岩崎利夫, 金谷健一, コニック当てはめの統計的偏差と不偏推定法, 情報処理学会研究報告, 92-CV-77, pp. 9–16, 1992.

[19] 岩崎利夫, 丸山保, 金谷健一, くりこみ法によるコニック当てはめ, 情報処理学会研究報告, 92-CV-79, pp. 25–32, 1992.

[20] S. H. Joseph, Unbiased least squares fitting of circular arcs, *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, Vol. 56, No. 5, pp. 424–432, 1995.

[21] B. Kamgar-Parsi, B. Kamgar-Parsi and N. Netanyahu, A nonparametric method for fitting a straight line to a noisy image, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 11, No. 9, pp. 998–1001, 1989.

[22] 金谷健一, 「画像理解 /3 次元認識の数理」, 森北出版, 1990.

[23] K. Kanatani, *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.

[24] 金谷健一, 画像の 3 次元解釈の統計的信頼性, 情報処理学会論文誌, Vol. 34, No. 10, pp. 2062–2070, 1993.

[25] 金谷健一, くりこみ法による 3 次元運動解析: 統計的に最適なアルゴリズム, 情報処理学会研究報告, 94-CV-88, pp. 43–50, 1994.

[26] 金谷健一, コンピュータビジョンのためのくりこみ法, 情報処理学会論文誌, Vol. 35, No. 2, pp. 201–209, 1994.

[27] 金谷健一, パラメトリック当てはめの精度の理論限界, 情報処理学会研究報告, 94-CV-91, pp. 15–22, 1994.

[28] 金谷健一, パラメトリック当てはめの最尤推定, 情報処理学会研究報告, 94-CV-91, pp. 23–30, 1994.

[29] K. Kanatani, Statistical bias of conic fitting and renormalization, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 16, No. 3, pp. 320–326, 1994.

[30] 金谷健一, 幾何学的補正問題の精度の理論限界と最適計算法, 情報処理学会研究報告, 95-CV-94, pp. 33–44, 1995.

[31] 金谷健一, 「空間データの数理 — 3 次元コンピューティングに向けて —」, 朝倉書店, 1995.

[32] 金谷健一, 当てはめ問題の最適推定と精度の理論限界, 情報処理学会論文誌, Vol. 36, No. 8, pp. 1865–1873, 1995.

[33] 金谷健一, 幾何学的モデルの選択基準について, 情報処理学会研究報告, 95-MSP-2, pp. 27–32, 1995.

[34] 金谷健一, 幾何学的モデル選択の情報量基準, 電子情報通信学会技術研究報告, IT95-16, pp. 19–24, 1995.

[35] 金谷健一, 情報量基準による幾何学的推論, 情報処理学会研究報告, 95-AI-101, pp. 1–6, 1995.

[36] 金谷健一, 塩沢仁, 情報量基準による動画像解析の特異性の自動判定, 情報処理学会研究報告, 95-CV-97, pp. 23–30, 1995.

[37] 金谷健一, 画像理解のための統計学: 画像の幾何学的解釈の信頼性評価, 情報処理, Vol. 37, No. 1, pp. 52–60, 1996.

[38] 金谷健一, 幾何学的補正問題の最適計算と精度の理論限界, 情報処理学会論文誌, Vol. 37, No. 3, pp. 363–370, 1996.

[39] 金谷健一, 情報量基準による幾何学的モデル選択, 情報処理学会論文誌, Vol. 37, No. 6, pp. 1073–1080, 1996.

[40] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier Science, Amsterdam, 1996.

[41] K. Kanatani and W. Liu, 3-D interpretation of conics and orthogonality, *CVGIP: Image Understanding*, Vol. 58, No. 3, pp. 286–301, 1993.

[42] K. Kanatani and T. Maruyama, Optimal focal length calibration system, *Proceeding on IEEE/RSJ International Conference Intelligent Robots Systems*, July 1993, Yokohama, Japan, Vol. 3, 1816–1821.

[43] 金澤靖, 金谷健一, ステレオによる平面の直接的な再構成, 情報処理学会研究報告, 94-CV-89, pp. 25–32, 1994.

[44] Yasushi Kanazawa and Kenichi Kanatani, Direct reconstruction of planar surfaces by stereo vision, *Proceedings on MVA'94 IAPR Workshop on Machine Vision Applications*, Dec. 13–15, 1994, Kawasaki, Japan, pp. 285–288.

[45] 金澤靖，金谷健一，レンジデータからの平面復元の信頼性評価，情報処理学会研究報告，94-CV-92, pp. 17–24, 1994.

[46] Yasushi Kanazawa and Kenichi Kanatani, Reliability of plane fitting by range sensing, *Proceedings on ICRA'95 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, May 21–27, 1995, Nagoya, Japan, pp. 2037–2042.

[47] Y. Kanazawa and K. Kanatani, Direct reconstruction of planar surfaces by stereo vision, *IEICE Transactions on Information and Systems*, Vol. E78-D, No. 7, pp. 917–922, 1995.

[48] 金澤靖, 塩沢仁, 金谷健一, 直線当てはめの信頼性評価, 情報処理学会研究報告, 95-CV-96, pp. 41–48, 1995.

[49] Y. Kanazawa and K. Kanatani, Reliability of 3-D reconstruction by stereo vision, *IEICE Transactions on Information and Systems*, Vol. E78-D, No. 10, pp. 1301–1306, 1995.

[50] 金澤靖，金谷健一，情報量基準によるステレオ画像からの平面の自動判定，情報処理学会研究報告，95-CV-97, pp. 15–22, 1995.

[51] Y. Kanazawa and K. Kanatani, Reliability of conic fitting, *Proceedings on Second Asian conference on Computer Vision (ACCV'95)*, Singapore, December 1995, Vol.3 of 3, pp.III-397–401.

[52] Y. Kanazawa and K. Kanatani, Reliability of fitting a plane to range data, *IEICE Transactions on Information and Systems*, Vol. E78-D, No. 12, pp.1630–1635, 1995.

[53] Y. Kanazawa and K. Kanatani, Optimal line fitting and reliability evaluation, *IEICE Transactions on Information and Systems*, Vol. E79-D, No. 9, pp.1317–1322, 1996.

[54] Y. Kanazawa and K. Kanatani, Optimal conic fitting and reliability evaluation, *IEICE Transactions on Information and Systems*, Vol. E79-D, No. 9, pp.1323–1328, 1996.

[55] Y. Kanazawa and K. Kanatani, Statistics inferrence by stereo vision: geometric information criterion, *Proceedings of the 1996 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS96)*, Osaka, Japan, November 1996, pp.1272–1279.

[56] Y. Kanazawa and K. Kanatani, Infinity and planarity test for stereo vision, *IEICE Transactions on Information and Systems*, to submit.

[57] 川島徹, 金澤靖, 金谷健一, ステレオによる 3 次元復元の信頼性評価, 情報処理学会研究報告, 94-CV-90, pp. 33–40, 1994.

[58] N. Kiryati and A. M. Bruckstein, What's in a set of points?, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 14, No. 4, pp. 496–500, 1992.

[59] D. Marr, *Vision – A Computational Investigation into the Human Representation and Processing of Visual Information*, Freeman, 1982.

[60] L. Matthies and S. A. Shafer, Error modeling in stereo navigation, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. RA-3, No. 3, pp. 239–248, 1987.

[61] L. Matthies, Stereo vision for planetary rovers: stochastic modeling to near real-time implementation, *International Journal of Computer Vision*, Vol. 8, No. 1, pp. 71–91, 1992.

[62] 中谷広正，北橋忠宏，無限遠点を用いた情景中の対象物の 3 次元構造の復元，電子通信学会論文誌, Vol. J68-D, No. 8, pp. 1481–1488, 1985.

[63] J. Porrill, Fitting ellipses and predicting confidence envelopes using a bias corrected Kalman filter, *Image and Vision Computing*, Vol. 8, No. 1, pp. 37–41, 1990.

[64] J. Rissanen, Universal coding, information, prediction and estimation, *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 30, No. 4, pp. 629–636, 1984.

[65] J. Rissanen, *Stochastic complexty in Statistical Inquiry*, World Scientific, 1989.

[66] L. G. Roberts, Machine perception of three-dimensional solid, *Optical and Electro-Optical Information Processing*, MIT Press, pp.159–197, 1963.

[67] P. L. Rosin, Ellipse fitting by accumulating five-point fits, *Pattern Recognition Letters*, Vol. 14, No. 8, pp. 661–669, 1993.

[68] P. L. Rosin and G. A. W. West, Nonparametric segmentation of curves into various representations, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 17, No. 12, pp. 1140–1153, 1995.

[69] C. A. Rothwell, A. Zisserman, C. I. Marinos, D. A. Forsyth and J. L. Mundy, Relative motion and pose from arbitary plane curves, *Image and Vision Computing*, Vol. 10, No. 4, pp. 250–262, 1992.

[70] S. Safaee-Rad, I. Tchoukanov, B. Benhabib and K. C. Smith, Accurate parameter estimation of quadratic curves from grey-level images, *CVGIP: Image Understanding*, Vol. 54, No. 2, pp. 259–274, 1991.

[71] 坂本慶行, 石黒真木夫, 北川源四郎, 「情報量統計学」, 共立出版, 1983.

[72] P. D. Sampson, Fitting conic sections to “very scatterd” data: An iterative refinement of the Bookstein algorithm, *Computer Graphics and Image Processing*, Vol. 18, No. 1, pp. 97–108, 1982.

[73] 塩沢仁, 金澤靖, 金谷健一, コニック当てはめの信頼性評価, 情報処理学会研究報告, 95-CV-96, pp. 49–56, 1995.

[74] 高木幹雄, 下田陽久監修, 「画像解析ハンドブック」, 東京大学出版会, 1991.

[75] 田川憲男, 守屋正, 直線当てはめにおける最尤推定の有効性と多視点データに対する不偏当てはめ手法, —, pp. 43–48, 1996.

[76] 武田晴夫, ジャンクロード・ラトーム, 透視距離データからの直線の最ゆう推定, 電子情報通信学会論文誌 D-II, Vol. J77-D-II, No. 6, pp. 1096–1103, 1994.

[77] H. Takeda, C. Facchinetti and J. C. Latombe, Planning the motions of a mobile robot in a sensory uncertainty field, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 16, No. 10, pp. 1002–1017, 1994.

[78] 和田俊和, 関真規夫, 松山隆司, ディジタル直線の幾何学的特性に基づいた γ-ω ハフ変換の高精度化, 電子情報通信学会論文誌 D-II, Vol. J77-D-II, No. 3, pp. 529–539, 1995.

[79] I. Weiss, Line fitting in a noisy image, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 11, No. 3, pp. 325–329, 1989.

[80] J. weng, P. Cohen and N. Rebibo, Motion and structure estimation from stereo image sequences, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 8, No. 3, pp. 362–382, 1992.

[81] J. Weng, T. S. Huang and N. Ahuja, *Motion and Structure from Image Sequences*, Springer, Berlin, F.R.G., 1993.

[82] M. Werman and Z. Geyzel, Fitting a second degree curve in the presence of error, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 17, No. 2, pp. 207–211, 1995.

[83] P. H. Winston, Ed., *The Psychology of Computer Vision*, McGraw-Hill, 1975.

[84] 谷内田正彦 編, 「コンピュータビジョン」, 丸善, 1990.

[85] 山西健司, 韓太舜, MDL 入門: 情報理論の立場から, 人工知能学会誌, Vol. 7, No. 3, pp. 427–434, 1992.

[86] Z. Zhang and O. D. Faugeras, *3D Dynamic Scene Analysis*, Springer-Verlag, 1992.

[87] Z. Zhang and O. D. Faugeras, Estimation of displacements from two 3-D frames obtained from stereo, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 14, No. 12, pp. 1141–1156, 1992.

[88] Y. T. Zhou, V. Venkateswar, and R. Chellappa, Edge detection and linear feature extraction using a 2-D random field model, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 11, No. 1, pp. 84–95, 1989.

付録 A

式の導出

A.1 式 (2.11) の導出

式 (2.10) を拘束条件として式 (2.8) をラグランジュの未定乗数法により解く．式 (2.10) のラグランジュ乗数を $2\lambda_\alpha$ とおき，次の関数 F_α を考える．

$$F_\alpha = (\Delta \boldsymbol{x}_\alpha, V[\boldsymbol{x}_\alpha]^- \Delta \boldsymbol{x}_\alpha) - 2\lambda_\alpha((\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_\alpha) - (\boldsymbol{n}, \Delta \boldsymbol{x}_\alpha)) \tag{A.1}$$

F_α を $\Delta \boldsymbol{x}_\alpha$ で微分して 0 とおけば

$$V[\boldsymbol{x}_\alpha]^- \Delta \boldsymbol{x}_\alpha = \lambda_\alpha \boldsymbol{n} \tag{A.2}$$

を得る．この式の両辺から $V[\boldsymbol{x}_\alpha]$ をかければ

$$V[\boldsymbol{x}_\alpha] V[\boldsymbol{x}_\alpha]^- \Delta \boldsymbol{x}_\alpha = \lambda_\alpha V[\boldsymbol{x}_\alpha] \boldsymbol{n} \tag{A.3}$$

となる．ここで行列 $\boldsymbol{A}$ の零空間を $\mathcal{N}_A$ で表わし，その零空間に直交する空間への射影行列を $\boldsymbol{P}_{\mathcal{N}_A}$ とすれば,

$$\boldsymbol{P}_{\mathcal{N}_{V[\boldsymbol{x}_\alpha]}} = V[\boldsymbol{x}_\alpha] V[\boldsymbol{x}_\alpha]^- \tag{A.4}$$

と表わすことができ，次の関係が成り立つ.

$$\boldsymbol{P}_{\mathcal{N}_{V[\boldsymbol{x}_\alpha]}} \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{P}_{\mathcal{N}_{V[\boldsymbol{x}_\alpha]}} \boldsymbol{x}_\alpha = \Delta \boldsymbol{x}_\alpha, \quad \boldsymbol{P}_{\mathcal{N}_{V[\boldsymbol{x}_\alpha]}} \Delta \boldsymbol{x}_\alpha = \Delta \boldsymbol{x}_\alpha \tag{A.5}$$

したがって式 (A.3) は次のように書き直せる.

$$\Delta \boldsymbol{x}_\alpha = \lambda_\alpha V[\boldsymbol{x}_\alpha] \boldsymbol{n} \tag{A.6}$$

これを式 (2.10) に代入すると

$$(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{n}) = (\lambda_\alpha V[\boldsymbol{x}_\alpha] \boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}) = \lambda_\alpha (\boldsymbol{n}, V[\boldsymbol{x}_\alpha] \boldsymbol{n}) \tag{A.7}$$

となり， λ_α は次式で求めることができる.

$$\lambda_\alpha = \frac{(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}, V[\boldsymbol{x}_\alpha] \boldsymbol{n})} \tag{A.8}$$

また，式 (A.8) を式 (A.6) に代入すると，補正項 $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ は次式で与えられる．

$$\Delta\boldsymbol{x}_\alpha = \frac{(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{n})V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{n}}{(\boldsymbol{n}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{n})} \tag{A.9}$$

この式 (A.9) を式 (2.8) および (2.9) に代入して整理する．

$$\begin{aligned} J[\boldsymbol{n}] &= \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{n})^2}{(\boldsymbol{n}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{n})^2} \left(V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{n}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]^- V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{n}\right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{n})^2}{(\boldsymbol{n}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{n})^2} \left(\boldsymbol{n}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]V[\boldsymbol{x}_\alpha]^- V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{n}\right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{n})^2}{(\boldsymbol{n}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{n})^2} (\boldsymbol{n}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{n}) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{n})^2}{(\boldsymbol{n}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{n})} \end{aligned} \tag{A.10}$$

ここで一般逆行列の性質 $V[\boldsymbol{x}_\alpha]V[\boldsymbol{x}_\alpha]^- V[\boldsymbol{x}_\alpha] = V[\boldsymbol{x}_\alpha]$ を用いた．

A.2 式 (2.13) の導出

$\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha = \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha + \Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ とし，式 (2.11) に代入して微小量に関して 2 次の項まで残すと次のようになる．

$$J[\bar{\boldsymbol{n}} + \Delta\boldsymbol{n}] = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{((\Delta\boldsymbol{n}, \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha) + (\bar{\boldsymbol{n}}, \Delta\boldsymbol{x}_\alpha))^2}{(\bar{\boldsymbol{n}}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\bar{\boldsymbol{n}})} \tag{A.11}$$

$\boldsymbol{n}$ は単位ベクトルであるから拘束条件

$$(\bar{\boldsymbol{n}}, \Delta\boldsymbol{n}) = 0 \tag{A.12}$$

を用いる．これは当てはめの誤差 $\Delta\boldsymbol{n}$ は，真のベクトル $\bar{\boldsymbol{n}}$ に第 1 近似において直交することを意味する (図 2.2)．この拘束条件に対するラグランジュ乗数を導入し，

$$F = J[\bar{\boldsymbol{n}} + \Delta\boldsymbol{n}] - 2\lambda(\bar{\boldsymbol{n}}, \Delta\boldsymbol{n}) \tag{A.13}$$

を $\Delta\boldsymbol{n}$ で微分して $\boldsymbol{0}$ とおくと次式が得られる．

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\Delta\boldsymbol{n}, \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha) + (\bar{\boldsymbol{n}}, \Delta\boldsymbol{x}_\alpha)}{(\bar{\boldsymbol{n}}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\bar{\boldsymbol{n}})} \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha = \lambda\bar{\boldsymbol{n}} \tag{A.14}$$

上式の両辺に射影行列 $\boldsymbol{P}_{\bar{\boldsymbol{n}}} = \boldsymbol{I} - \bar{\boldsymbol{n}}\bar{\boldsymbol{n}}^\top$ をかけると， $\boldsymbol{P}_{\bar{\boldsymbol{n}}}\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha = \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$, $\boldsymbol{P}_{\bar{\boldsymbol{n}}}\bar{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{0}$ であるから，式 (A.14) は次のように書き直せる．

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha^\top}{(\bar{\boldsymbol{n}}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\bar{\boldsymbol{n}})}\right) \Delta\boldsymbol{n} + \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\frac{\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha \bar{\boldsymbol{n}}^\top}{(\bar{\boldsymbol{n}}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\bar{\boldsymbol{n}})}\right) \Delta\boldsymbol{x}_\alpha = 0 \tag{A.15}$$

ここで，

$$\boldsymbol{V} = \left(\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha^\top}{(\bar{\boldsymbol{n}}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\bar{\boldsymbol{n}})}\right)^- \tag{A.16}$$

と置き，これを式 (A.14) の両辺に掛けると $\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^{-} = \boldsymbol{P}_{\bar{\boldsymbol{n}}}$ となるから， $\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^{-}\Delta\boldsymbol{n} = \boldsymbol{P}_{\bar{\boldsymbol{n}}}\Delta\boldsymbol{n} = \Delta\boldsymbol{n}$ より次式を得る．

$$\Delta\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{V}\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\frac{\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha\bar{\boldsymbol{n}}^\top}{(\bar{\boldsymbol{n}}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\bar{\boldsymbol{n}})}\right)\Delta\boldsymbol{x}_\alpha \tag{A.17}$$

したがって，解 $\hat{\boldsymbol{n}}$ の共分散行列 $V[\hat{\boldsymbol{n}}]$ が次のように評価できる．

$$\begin{aligned}
V[\hat{\boldsymbol{n}}] &= E[\Delta\boldsymbol{n}\Delta\boldsymbol{n}^\top] \\
&= \boldsymbol{V}\left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\frac{\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha\bar{\boldsymbol{n}}^\top E[\Delta\boldsymbol{x}_\alpha\Delta\boldsymbol{x}_\beta]\bar{\boldsymbol{n}}\bar{\boldsymbol{x}}_\beta^\top}{(\bar{\boldsymbol{n}}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\bar{\boldsymbol{n}})(\bar{\boldsymbol{n}}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\bar{\boldsymbol{n}})}\right)\boldsymbol{V} \\
&= \boldsymbol{V}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\frac{\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha\bar{\boldsymbol{n}}^\top\delta_{\alpha\beta}V[\boldsymbol{x}_\alpha]\bar{\boldsymbol{n}}\bar{\boldsymbol{x}}_\beta^\top}{(\bar{\boldsymbol{n}}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\bar{\boldsymbol{n}})(\bar{\boldsymbol{n}}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\bar{\boldsymbol{n}})}\boldsymbol{V} \\
&= \boldsymbol{V}\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha(\bar{\boldsymbol{n}}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\bar{\boldsymbol{n}})\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha^\top}{(\bar{\boldsymbol{n}}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\bar{\boldsymbol{n}})^2}\boldsymbol{V} \\
&= \boldsymbol{V}\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha^\top}{(\bar{\boldsymbol{n}}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\bar{\boldsymbol{n}})}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^{-}\boldsymbol{V} \\
&= \boldsymbol{V}
\end{aligned} \tag{A.18}$$

よって式 (2.13) を得る．

A.3 式 (2.33) の導出

式 (2.32) から求めた不偏推定量 $\hat{\boldsymbol{n}}$ と不偏モーメント行列 $\hat{\boldsymbol{M}}$ を次のように分解する．

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \bar{\boldsymbol{n}} + \Delta\boldsymbol{n}, \qquad \hat{\boldsymbol{M}} = \bar{\boldsymbol{M}} + \Delta\boldsymbol{M} \tag{A.19}$$

摂動定理により $\Delta\boldsymbol{n}$ は次のように書ける．

$$\Delta\boldsymbol{n} = -\bar{\boldsymbol{M}}^{-}\Delta\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{n}} + O(\epsilon^4) \tag{A.20}$$

$O(\epsilon^4)$ の項を無視すれば，共分散行列 $V[\hat{\boldsymbol{n}}]$ は次のように書ける．

$$\begin{aligned}
V[\hat{\boldsymbol{n}}] &= E[\Delta\boldsymbol{n}\Delta\boldsymbol{n}^\top] \\
&= E[(\bar{\boldsymbol{M}}^{-}\Delta\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{n}})(\bar{\boldsymbol{M}}^{-}\Delta\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{n}})^\top] \\
&= \bar{\boldsymbol{M}}^{-}E[(\Delta\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{n}})(\Delta\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{n}})^\top]\bar{\boldsymbol{M}}^{-}
\end{aligned} \tag{A.21}$$

また $\Delta\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{n}}$ は

$$\begin{aligned}
\Delta\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{n}} &= (\hat{\boldsymbol{M}} - \bar{\boldsymbol{M}})\bar{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{M}}\bar{\boldsymbol{n}} \\
&= \left(\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}W_\alpha\boldsymbol{x}_\alpha\boldsymbol{x}_\alpha^\top - \epsilon^2\boldsymbol{N}\right)\bar{\boldsymbol{n}} \\
&= \left(\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}W_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha + \Delta\boldsymbol{x}_\alpha)(\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha + \Delta\boldsymbol{x}_\alpha)^\top\right)\bar{\boldsymbol{n}} + O(\epsilon^2) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}W_\alpha(\Delta\boldsymbol{x}_\alpha, \bar{\boldsymbol{n}})\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha + O(\epsilon^2)
\end{aligned} \tag{A.22}$$

となり，$O(\epsilon^2)$ の項を無視すれば，次の関係が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
E[(\Delta\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{n}})(\Delta\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{n}})^\top] &= \frac{1}{N^2}E[\sum_{\alpha,\beta=1}^{N} W_\alpha W_\beta \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha(\Delta\boldsymbol{x}_\alpha,\bar{\boldsymbol{n}})(\Delta\boldsymbol{x}_\beta,\bar{\boldsymbol{n}})\bar{\boldsymbol{x}}_\beta^\top] \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N} W_\alpha W_\beta \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha \bar{\boldsymbol{n}}^\top E[\Delta\boldsymbol{x}_\alpha \Delta\boldsymbol{x}_\beta^\top]\bar{\boldsymbol{n}}\bar{\boldsymbol{x}}_\beta^\top \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N} W_\alpha W_\beta \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha \bar{\boldsymbol{n}}^\top \delta_{\alpha\beta} V[\boldsymbol{x}_\alpha]\bar{\boldsymbol{n}}\bar{\boldsymbol{x}}_\beta^\top \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{\alpha}^{N} W_\alpha^2 \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha \bar{\boldsymbol{n}}^\top V[\boldsymbol{x}_\alpha]\bar{\boldsymbol{n}}\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha^\top \\
&= \frac{\epsilon^2}{N^2}\sum_{\alpha}^{N} W_\alpha^2 \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha(\bar{\boldsymbol{n}}, V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\bar{\boldsymbol{n}})\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha^\top \\
&= \frac{\epsilon^2}{N^2}\sum_{\alpha}^{N} W_\alpha \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha^\top \\
&= \frac{\epsilon^2}{N}\bar{\boldsymbol{M}} \qquad \text{(A.23)}
\end{aligned}
$$

したがって，式 (A.21) から不偏推定量 $\hat{\boldsymbol{n}}$ の共分散行列は第 1 近似において，次のように与えられる．

$$
\begin{aligned}
V[\hat{\boldsymbol{n}}] &= \frac{\epsilon^2}{N}\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{M}}\bar{\boldsymbol{M}}^- \\
&= \frac{\epsilon^2}{N}\bar{\boldsymbol{M}}^- \\
&= \frac{\epsilon^2}{N}\left(\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha^\top\right)^- \qquad \text{(A.24)}
\end{aligned}
$$

ここで一般逆行列の性質 $\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{M}}\bar{\boldsymbol{M}}^- = \bar{\boldsymbol{M}}^-$ を用いた．

A.4 式 (2.72) の導出

行列 $\boldsymbol{X}_\alpha$ を次のように定義する．

$$\boldsymbol{X}_\alpha = \boldsymbol{x}_\alpha \otimes \boldsymbol{x}_\alpha \qquad \text{(A.25)}$$

上式で $\boldsymbol{x}_\alpha$ を $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$ に置き換えたものを $\bar{\boldsymbol{X}}_\alpha$ とおけば，式 (2.69) は次のように書ける．

$$(\bar{\boldsymbol{X}}_\alpha; \boldsymbol{Q}) = 0 \qquad \text{(A.26)}$$

式 (2.70) を式 (A.25) に代入すると次式を得る．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{X}_\alpha &= (\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha + \Delta\boldsymbol{x}_\alpha) \otimes (\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha + \Delta\boldsymbol{x}_\alpha) \\
&= \bar{\boldsymbol{X}}_\alpha + \Delta\boldsymbol{x}_\alpha \otimes \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha + \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha \otimes \Delta\boldsymbol{x}_\alpha + \Delta\boldsymbol{x}_\alpha \otimes \Delta\boldsymbol{x}_\alpha \qquad \text{(A.27)}
\end{aligned}
$$

上式の期待値は次のようになる．

$$E[\boldsymbol{X}_\alpha] = \bar{\boldsymbol{X}}_\alpha + V[\boldsymbol{x}_\alpha] \qquad \text{(A.28)}$$

$\boldsymbol{X}_\alpha$ の**有効値** $\boldsymbol{X}^*_\alpha$ を次のように定義する．

$$\boldsymbol{X}^*_\alpha = \boldsymbol{X}_\alpha - V[\boldsymbol{x}_\alpha] \tag{A.29}$$

$\boldsymbol{X}^*_\alpha = \bar{\boldsymbol{X}}_\alpha + \Delta\boldsymbol{X}_\alpha$ とおけば，$\Delta\boldsymbol{X}_\alpha$ は次のような期待値 $\boldsymbol{O}$ の確率変数行列となる．

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{X}_\alpha &= \boldsymbol{X}^*_\alpha - \bar{\boldsymbol{X}}_\alpha \\ &= \Delta\boldsymbol{x}_\alpha \otimes \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha + \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha \otimes \Delta\boldsymbol{x}_\alpha + \Delta\boldsymbol{x}_\alpha \otimes \Delta\boldsymbol{x}_\alpha - V[\boldsymbol{x}_\alpha]\end{aligned} \tag{A.30}$$

ベクトル $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha, \Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ の第 i 成分をそれぞれ $\bar{\boldsymbol{x}}_{\alpha(i)}, \Delta\boldsymbol{x}_{\alpha(i)}$ と書くと，共分散テンソル $\mathcal{V}[\boldsymbol{X}_\alpha]$ の $ijkl$ 要素 $\mathcal{V}[\boldsymbol{X}_\alpha]_{ijkl}$ は次のようになる．

$$\begin{aligned}E[\Delta\boldsymbol{X}_\alpha \otimes \Delta\boldsymbol{X}_\alpha]_{ijkl} &= E[\Delta x_{\alpha(j)}\Delta x_{\alpha(k)}]\bar{x}_{\alpha(i)}\bar{x}_{\alpha(l)} + E[\Delta x_{\alpha(j)}\Delta x_{\alpha(l)}]\bar{x}_{\alpha(i)}\bar{x}_{\alpha(k)} \\ &\quad + E[\Delta x_{\alpha(i)}\Delta x_{\alpha(k)}]\bar{x}_{\alpha(j)}\bar{x}_{\alpha(l)} + E[\Delta x_{\alpha(i)}\Delta x_{\alpha(l)}]\bar{x}_{\alpha(j)}\bar{x}_{\alpha(k)} \\ &\quad - E[\Delta x_{\alpha(i)}\Delta x_{\alpha(j)}]V[\boldsymbol{x}_\alpha]_{kl} - E[\Delta x_{\alpha(k)}\Delta x_{\alpha(l)}]V[\boldsymbol{x}_\alpha]_{ij} \\ &\quad + E[\Delta x_{\alpha(i)}\Delta x_{\alpha(j)}\Delta x_{\alpha(k)}\Delta x_{\alpha(l)}V[\boldsymbol{x}_\alpha]_{ij}V[\boldsymbol{x}_\alpha]_{kl} \\ &= V[\boldsymbol{x}_\alpha]_{jl}\bar{x}_{\alpha(i)}\bar{x}_{\alpha(k)} + V[\boldsymbol{x}_\alpha]_{jk}\bar{x}_{\alpha(i)}\bar{x}_{\alpha(l)} + V[\boldsymbol{x}_\alpha]_{il}\bar{x}_{\alpha(j)}\bar{x}_{\alpha(k)} \\ &\quad + V[\boldsymbol{x}_\alpha]_{ik}\bar{x}_{\alpha(j)}\bar{x}_{\alpha(l)} + V[\boldsymbol{x}_\alpha]_{ik}V[\boldsymbol{x}_\alpha]_{jl} + V[\boldsymbol{x}_\alpha]_{il}V[\boldsymbol{x}_\alpha]_{jk}\end{aligned} \tag{A.31}$$

ただし，期待値 $\mathbf{0}$，共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma} = (\Sigma_{ij})$ の正規分布に従う確率変数 $\boldsymbol{v} = (v_i)$ に対する次の恒等式を用いた．

$$E[v_i v_j v_k v_l] = \Sigma_{ij}\Sigma_{kl} + \Sigma_{ik}\Sigma_{jl} + \Sigma_{il}\Sigma_{jk} \tag{A.32}$$

直線当てはめと同様に考えれば，行列 $\boldsymbol{Q}$ の当てはめの最適解は次の最小化によって得られる [32, 53].

$$J[\boldsymbol{Q}] = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{X}^*_\alpha; \boldsymbol{Q})^2}{(\boldsymbol{Q}; \mathcal{V}[\boldsymbol{X}_\alpha]\boldsymbol{Q})} \to \min \tag{A.33}$$

式 (A.31) を分母に代入すると次式を得る．

$$(\boldsymbol{Q}; \mathcal{V}[\boldsymbol{X}_\alpha]\boldsymbol{Q}) = 4(\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha, \boldsymbol{Q}V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{Q}\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha) + 2(V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{Q}; \boldsymbol{Q}V[\boldsymbol{x}_\alpha]) \tag{A.34}$$

この式中の $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$ をデータ $\boldsymbol{x}_\alpha$ で近似し，式 (A.33) に代入すると，式 (2.72) を得る．

A.5 式 (3.73) および (3.74) の導出

誤差 $\Delta\boldsymbol{x}$ および $\Delta\boldsymbol{x}'$ は画像面上に拘束されているから，ベクトル $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)^\top$ と置くと

$$(\Delta\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k}) = (\Delta\boldsymbol{x}', \boldsymbol{k}) = 0 \tag{A.35}$$

と書ける．式 (3.71) と (A.35) を拘束条件として，式 (3.72) を最小化する $\Delta\boldsymbol{x}$, $\Delta\boldsymbol{x}'$ をラグランジュの未定乗数法で求める．ラグランジュ乗数をそれぞれ 2λ, 2μ, $2\mu'$ とおけば次の関数 F を停留化すればよい．

$$\begin{aligned}F &= (\Delta\boldsymbol{x}, V_0[\boldsymbol{x}]^-\Delta\boldsymbol{x}) + (\Delta\boldsymbol{x}, V_0[\boldsymbol{x}]^-\Delta\boldsymbol{x}) \\ &\quad - 2\lambda((\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}', \Delta\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}', \Delta\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}')) - 2\mu(\Delta\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k}) - 2\mu'(\Delta\boldsymbol{x}', \boldsymbol{k})\end{aligned} \tag{A.36}$$

式 (A.36) を $\Delta\boldsymbol{x}$ で微分して 0 とおけば

$$V_0[\boldsymbol{x}]^{-}\Delta\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}' + \mu\boldsymbol{k} \tag{A.37}$$

となり，両辺に $V_0[\boldsymbol{x}]$ を掛ければ， $V_0[\boldsymbol{x}]V_0[\boldsymbol{x}]^{-}\Delta\boldsymbol{x} = \Delta\boldsymbol{x}$, $V_0[\boldsymbol{x}]\boldsymbol{k} = 0$ であるから次式を得る．

$$\Delta\boldsymbol{x} = \lambda V_0[\boldsymbol{x}]\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}' \tag{A.38}$$

同様に式 (A.36) を $\Delta\boldsymbol{x}'$ で微分して 0 とおけば

$$V_0[\boldsymbol{x}']^{-}\Delta\boldsymbol{x}' = \lambda\boldsymbol{G}^{\top}\boldsymbol{x} + \mu'\boldsymbol{k} \tag{A.39}$$

となり，両辺に $V_0[\boldsymbol{x}']$ を掛ければ， $V_0[\boldsymbol{x}']V_0[\boldsymbol{x}']^{-}\Delta\boldsymbol{x}' = \Delta\boldsymbol{x}'$, $V_0[\boldsymbol{x}']\boldsymbol{k} = 0$ であるから次式を得る．

$$\Delta\boldsymbol{x}' = \lambda V_0[\boldsymbol{x}']\boldsymbol{G}^{\top}\boldsymbol{x} \tag{A.40}$$

式 (A.38) および (A.40) を式 (3.71) に代入すれば λ は次式で与えられる．

$$\lambda = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}')}{(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{G}^{\top}V_0[\boldsymbol{x}]\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}') + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{G}V_0[\boldsymbol{x}']\boldsymbol{G}^{\top}\boldsymbol{x})} \tag{A.41}$$

これを式 (A.38) および (A.40) に代入することにより，式 (3.73) および (3.74) を得る．

A.6 奥行き距離の導出

XY 面および $X'Y'$ 面から復元点 P までの距離を Z，Z' とすると，補正した $\hat{\boldsymbol{x}}$，$\hat{\boldsymbol{x}}'$ は次の関係を満足する．

$$Z\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{h} + Z'\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{x}}' \tag{A.42}$$

ここで， Z, Z' を $\hat{\boldsymbol{x}}$ および $\hat{\boldsymbol{x}}'$ の**奥行き** (depth) と呼ぶ．式 (A.42) の両辺に対し， $\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{x}}'$ とのベクトル積をとれば

$$Z\hat{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{x}}' = \boldsymbol{h} \times \boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{x}}' \tag{A.43}$$

を得る．両辺と $\hat{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{x}}'$ との内積を取れば， Z は次式で与えられる．

$$Z = \frac{(\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{x}}', \hat{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{x}}')}{\|\hat{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{x}}'\|^2} \tag{A.44}$$

また式 (A.42) の両辺に対し， $\hat{\boldsymbol{x}}$ とのベクトル積をとれば

$$\boldsymbol{0} = \hat{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{h} + \mathbf{Z}'\hat{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{x}}' \tag{A.45}$$

を得る． Z と同様に両辺と $\hat{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{x}}'$ との内積を取れば， Z' は次式で与えられる．

$$Z' = \frac{(\hat{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{h}, \hat{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{x}}')}{\|\hat{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{x}}'\|^2} \tag{A.46}$$

A.7 式 (3.79) の導出

もし $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{x}}'$ がそれぞれ $\Delta\hat{\boldsymbol{x}}$, $\Delta\hat{\boldsymbol{x}}'$ だけ摂動すると， Z, Z' も ΔZ, $\Delta Z'$ だけ摂動する．これらは 1 次近似により次式を満足する．

$$\Delta Z\hat{\boldsymbol{x}} = \Delta Z'\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{x}}' - Z\Delta\hat{\boldsymbol{x}} + Z'\boldsymbol{R}\Delta\hat{\boldsymbol{x}}' \tag{A.47}$$

ここで式 (A.47) の両辺と $\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{x}}'$ とのベクトル積を取れば次式を得る．

$$\Delta Z(\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{x}}') \times \hat{\boldsymbol{x}} = -Z(\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{x}}') \times \Delta\hat{\boldsymbol{x}} + Z'(\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{x}}' \times \boldsymbol{R}\Delta\hat{\boldsymbol{x}}' \tag{A.48}$$

$\hat{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{x}}'$ からなる平面 (エピポーラ平面) の単位法線ベクトルを $\hat{\boldsymbol{n}}$ とすると

$$\hat{\boldsymbol{n}} = N[\boldsymbol{h} \times \hat{\boldsymbol{x}}] \tag{A.49}$$

で与えられるから，式 (A.48) の両辺と $\hat{\boldsymbol{n}}$ との内積をとると次式を得る．

$$\Delta Z(\hat{\boldsymbol{n}}, (\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{x}}') \times \hat{\boldsymbol{x}}) = -Z(\hat{\boldsymbol{n}}, (\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{x}}') \times \Delta\hat{\boldsymbol{x}}) + Z'(\hat{\boldsymbol{n}}, (\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{x}}') \times \boldsymbol{R}\Delta\hat{\boldsymbol{x}}') \tag{A.50}$$

ここで $\hat{\boldsymbol{m}} = \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{x}}'$ とおくことにより，次式のように書き直せる．

$$\Delta Z = -\frac{(\hat{\boldsymbol{m}}, Z\Delta\hat{\boldsymbol{x}} - Z'\boldsymbol{R}\Delta\hat{\boldsymbol{x}}')}{(\hat{\boldsymbol{m}}, \hat{\boldsymbol{x}})} \tag{A.51}$$

式 (3.78) において $\boldsymbol{r}$, Z, $\hat{\boldsymbol{x}}$ をそれぞれ $\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}$, $Z + \Delta Z$, $\hat{\boldsymbol{x}} + \Delta\hat{\boldsymbol{x}}$ とすると， 1 次近似により次式を得る．

$$\Delta\boldsymbol{r} = Z\Delta\hat{\boldsymbol{x}} + \Delta Z\hat{\boldsymbol{x}} \tag{A.52}$$

以上から復元した空間点 $\boldsymbol{r}$ の信頼性を表わす共分散行列 $V[\boldsymbol{r}] = E[\Delta\boldsymbol{r}\Delta\boldsymbol{r}^\top]$ は次のように計算できる．

$$\begin{aligned}
V[\boldsymbol{r}] &= E[\Delta\boldsymbol{r}\Delta\boldsymbol{r}^\top] \\
&= E[(Z\Delta\hat{\boldsymbol{x}} + \Delta Z\hat{\boldsymbol{x}})(Z\Delta\hat{\boldsymbol{x}} + \Delta Z\hat{\boldsymbol{x}})^\top] \\
&= Z^2E[\Delta\hat{\boldsymbol{x}}\Delta\hat{\boldsymbol{x}}^\top] + Z(E[\Delta\hat{\boldsymbol{x}}\Delta Z]\hat{\boldsymbol{x}}^\top + \hat{\boldsymbol{x}}E[\Delta Z\Delta\hat{\boldsymbol{x}}^\top]) + E[\Delta Z\Delta Z]\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{x}}^\top \\
&= Z^2V[\hat{\boldsymbol{x}}] + Z(V[\hat{\boldsymbol{x}}, Z]\hat{\boldsymbol{x}}^\top + \hat{\boldsymbol{x}}V[\hat{\boldsymbol{x}}, Z]^\top) + V[Z]\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{x}}^\top
\end{aligned} \tag{A.53}$$

付録 B

従来の方法

B.1　従来の方法による 3 次元復元

それぞれのカメラに観測される点をそれぞれ $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'$ とする．各カメラの原点を O, O' とするとき，O を始点とし $\boldsymbol{x}$ を通る視線と，O' を始点とし $\boldsymbol{x}'$ を通る視線の交点を求めればよい．しかし誤差により，これらの視線は必ず交差するとは限らない．そこで，これらの視線の両方に最も近い点を復元点 $\boldsymbol{r}$ とする．この $\boldsymbol{r}$ はつぎのように計算できる．

$$\boldsymbol{m} = N[\boldsymbol{x}], \qquad \boldsymbol{m}' = N[\boldsymbol{x}'] \tag{B.1}$$

$$\hat{r} = \frac{(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{m}) - (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{R}\boldsymbol{m}')(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{R}\boldsymbol{m}')}{1 - (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{R}\boldsymbol{m}')^2} \tag{B.2}$$

$$\hat{r}' = \frac{(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{R}\boldsymbol{m}')(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{m}) - (\boldsymbol{h}, \boldsymbol{R}\boldsymbol{m}')}{1 - (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{R}\boldsymbol{m}')^2} \tag{B.3}$$

$$\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}(\hat{r}\boldsymbol{m} + (\boldsymbol{h} + \hat{r}'\boldsymbol{R}\boldsymbol{m}')) \tag{B.4}$$

B.2　従来の方法による平面の再構成法

対応する点を $\boldsymbol{x}_\alpha$, $\boldsymbol{x}'_\alpha$ とする．それぞれのカメラ系の原点を O, O' とするとき，O を始点とし $\boldsymbol{x}_\alpha$ を通る視線と，O' を始点とし $\boldsymbol{x}'_\alpha$ を通る視線の交点を求めればよい．しかし，$\boldsymbol{x}_\alpha$, $\boldsymbol{x}'_\alpha$ は誤差を含んでいるため，この 2 つの視線が交差するとは限らない．そこでこれらの視線の両方に最も近い点を復元点 $\boldsymbol{r}_\alpha$ とする．この $\boldsymbol{r}_\alpha$ はつぎのように計算できる．

$$\boldsymbol{m}_\alpha = N[\boldsymbol{x}_\alpha], \qquad \boldsymbol{m}'_\alpha = N[\boldsymbol{x}'_\alpha] \tag{B.5}$$

$$\hat{r}_\alpha = \frac{(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{m}_\alpha) - (\boldsymbol{m}_\alpha, \boldsymbol{R}\boldsymbol{m}'_\alpha)(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{R}\boldsymbol{m}'_\alpha)}{1 - (\boldsymbol{m}_\alpha, \boldsymbol{R}\boldsymbol{m}'_\alpha)^2} \tag{B.6}$$

$$\hat{r}'_\alpha = \frac{(\boldsymbol{m}_\alpha, \boldsymbol{R}\boldsymbol{m}'_\alpha)(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{m}_\alpha) - (\boldsymbol{h}, \boldsymbol{R}\boldsymbol{m}'_\alpha)}{1 - (\boldsymbol{m}_\alpha, \boldsymbol{R}\boldsymbol{m}'_\alpha)^2} \tag{B.7}$$

$$\boldsymbol{r}_\alpha = \frac{1}{2}(\hat{r}_\alpha\boldsymbol{m}_\alpha + (\boldsymbol{h} + \hat{r}'_\alpha\boldsymbol{m}'_\alpha)) \tag{B.8}$$

計算した復元点 $\{\boldsymbol{r}_\alpha\}$ に最小二乗法で平面を当てはめるには次のようにする．

1. 復元点 $\{\boldsymbol{r}_\alpha\}$ の**重心** $\boldsymbol{r}_G$ を次のように計算する.

$$\boldsymbol{r}_G = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{r}_\alpha \tag{B.9}$$

2. **モーメント行列**

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{r}_G)(\boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{r}_G)^\top \tag{B.10}$$

の最小固有値に対する単位固有ベクトルを平面の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ とする.

3. 平面までの距離 d を次のように計算する.

$$d = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}_G) \tag{B.11}$$

各復元点 $\{\boldsymbol{r}_\alpha\}$ を求めた平面に載せる補正は次のように行なう.

$$\hat{\boldsymbol{r}}_\alpha = \boldsymbol{r}_G + \boldsymbol{P}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{r}_G) \tag{B.12}$$

ただし $\boldsymbol{P}_{\mathbf{n}} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^\top$ である.