様式３

論　文　内　容　の　要　旨

氏　名　（　日下部　佑太　）	
論文題名	Oka manifolds and ellipticity （岡多様体と楕円性）

論文内容の要旨

本論文の目的は，岡多様体と種々の楕円性の関係を明らかにすることである．ある複素多様体が岡多様体であるとは，Stein空間からの写像に関する岡の原理が成り立つことをいう．より具体的に述べると，Stein空間を定義域とする正則写像の近似や拡張の問題が連続解を持つ場合に，それをホモトピーによって正則な解に変形できることをいう．一方で，楕円性とは小林，Eisenman，Brodyらによる双曲性と真逆の性質であり，具体的には複素Euclid空間から多くの支配的な正則写像が存在することを意味する．

Forstneričの岡の原理によって，岡多様体はCAP（Convex Approximation Property）と呼ばれる性質で特徴付けられる．ここで複素多様体 Y がCAPを満たすとは，複素Euclid空間内のコンパクト凸集合 K の近傍から Y への任意の正則写像を複素Euclid空間全体から Y への正則写像によって K 上一様に近似できることをいう．この特徴付けを用いることで複素Lie群や複素等質多様体が岡であることを確かめられるが，これらを除いてある複素多様体のCAPを直接確かめることは一般に困難である．そのような中，1989年に示されたGromovの岡の原理によってGromovが導入した楕円性が岡性を導くことが知られている．ここで複素多様体 Y が楕円的であるとは，Y 上の正則ベクトル束の全空間 E からの正則写像 $s\colon E \to Y$ で各 $y \in Y$ に対し $s(0_y) = y$ かつ $s|_{E_y}\colon E_y \to Y$ が 0_y で沈め込みとなるものが存在することをいう．

Gromovは楕円多様体に対する岡の原理を確立した論文の中で，Stein多様体に対しては楕円性が岡性を特徴付けることも示し，任意の複素多様体に対してこれが成り立つかどうかを問題にした．またGromovは，楕円性の変種であるEll$_1$と呼ばれる条件から正則写像の近似定理が導かれると予想した．ここで複素多様体 Y が条件Ell$_1$を満たすとは，任意のStein多様体 X からの正則写像 $f\colon X \to Y$ に対して正則写像 $s\colon X \times \mathbb{C}^N \to Y$ で各 $x \in X$ に対し $s(x,0) = f(x)$ かつ $s(x,\cdot)\colon \mathbb{C}^N \to Y$ が 0 で沈め込みとなるものが存在することをいう．Forstneričの岡の原理より正則写像の近似定理は岡性を導き，また岡性が条件Ell$_1$を導くことも容易に確かめられるため，Gromovの予想は条件Ell$_1$が岡性を特徴付けるという予想だと言い換えることができる．

本論文の目標は，上で述べたGromovの問題と予想を解決することである．本論文では初めにStein空間とdominating sprayについて簡単に復習し，それに続く論文の前半においてGromovの予想を肯定的に解決する．その証明では，条件Ell$_1$より見かけ上弱い新たな楕円性の変種である凸楕円性を考察し，それが岡性を特徴付けることを示す．その後Gromovの予想の解決を応用することで，岡であるようなZariski開集合で被覆される複素多様体は岡多様体であるという局所化原理を確立する．この岡多様体の局所化原理によって新たな岡多様体の例がいくつか与えられるが，Gromovの問題に否定的な解答を与える非楕円的な岡多様体の例もそのうちの一つであり，その証明は論文の後半で与えられる．最後の節では，以上の結果の一般化や改良を与える最近の研究を紹介する．具体的には凸楕円性による岡性の特徴付けの相対版や，Gromovの問題に対するさらなる反例などについて述べる．

様式 7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏　名　（　日下部　佑太　）		
論文審査担当者	（職）	氏　名
	主査　教授	山ノ井 克俊
	副査　教授	後藤 竜司
	副査　教授	石田 政司
	副査　教授	太田 慎一

論文審査の結果の要旨

本論文は、岡多様体と楕円性の関係を明らかにしたものである。 複素多様体 Y が岡多様体であるとは、シュタイン空間からの写像に関する岡の原理が成り立つことをいう。つまり、 複素多様体 Y への、シュタイン空間を定義域とする正則写像の近似・拡張問題が、連続解を持つ場合に、それをホモトピーによって正則な解に変形できることをいう。また、複素多様体 Y が楕円的であるとは、Y 上のある正則ベクトル束の全空間 E からの正則写像 s:E→Y で、Y の各点 y 上のファイバーE(y)に s を制限した時に、[1] E(y)の原点 o の近傍で沈め込みであり、[2] 原点 o の像が y となる、ものが存在することをいう。1980 年代に、Gromov は楕円的な複素多様体は岡多様体となることを証明した。さらに、複素多様体がシュタインである場合に、その逆を証明したうえで、シュタインとは限らない一般の複素多様体に対しても逆が成り立つかを問うた。この問題は長らく未解決問題であった。

本論文の主結果は大きく三つに分けられる。まず日下部氏は、Gromov による条件 Ell_1 が岡性を特徴付けることを証明した。この結果も 1980 年代の Gromov の研究に遡る問題であった。ここで、複素多様体 Y が条件 Ell_1 をみたすとは、任意のシュタイン多様体 X からの正則写像 f:X→Y に対して、X 上の自明なベクトル束 p:E→X と E からの正則写像 s:E→Y で、X の各点 x 上のファイバーE(x)に s を制限した時に、[1] E(x)の原点 o の近傍で沈め込みであり、[2] 原点 o の像が f(x)となる、ものが存在することをいう。これは、上記の楕円性と似ているが少し弱い条件になっている。本論文の二つ目の主結果として、日下部氏は岡多様体の条件 Ell_1 による新しい特徴付けを用いて、岡多様体に対する局所化原理を証明した。これは、複素多様体が、岡であるようなザリスキー開集合によって被覆されれば、それ自身も岡多様体となる、というものである。そして、本論文の三つ目の主結果として、日下部氏は 3 次元以上の複素アフィン空間の中に、ある可算閉集合を、その補集合が岡多様体であるが、楕円的でないように構成した。ここで、この可算閉集合の補集合が岡多様体であることは、上記の局所化原理によって確かめられている。これによって、岡多様体は楕円的か、という Gromov によって提起された問題は否定的に解決されたことになる。また、局所化原理の別の応用として、ホップ多様体から有限個の点を抜いたもの、および爆発させたものは岡多様体であることが証明されている。以上が、本論文の主結果である。さらに、本論文の最終章では、岡多様体の条件 Ell_1 による特徴付けの別の応用として、2 次元以上の複素アフィン空間内で、コンパクト凸集合の補集合は岡多様体であることなど、日下部氏の最新の研究成果にもふれられている。本論文における日下部氏の研究は、岡多様体と楕円性の関係を明らかにするものであり、この分野に新たな視点をもたらす重要なものである。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。