



Title	多重符号の符号構成法，復号法，および評価方法に関する研究
Author(s)	井上， 徹
Citation	大阪大学， 1986， 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/791
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

多重符号の符号構成法、復号法、 および評価方法に関する研究

1985年12月

井 上 徹

内 容 梗 概

本論文は筆者の誤り制御方式に関する研究の成果をまとめたものであり本文は6章より構成されている。

本研究の目的は理論的、実用的に数多い特長を有する多重符号の符号構成法、復号法ならびに評価方法の提案および解析を行い、実用的な通信システムの応用を図ることにある。以下に各章の内容を簡単に述べる。

第1章は本研究全編にわたる序論であり、従来行なわれてきたこの種の研究の概要を系統的に概説し、本研究の動機、意義、関連研究分野との位置づけを明らかにしめようとするものである。

第2章は本研究の全般にわたって用いられる誤り検出確率、復号誤り確率、または伝送制御を変えることにより復号のパフォーマンスがどう変化するかを明らかにし実用的に重要な伝送方式、よく用いられるブロック符号の復号パフォーマンスを論じる。

第3章は重要な多重符号である一般化積符号につき、その特性を接続符号、積符号と比較して明らかにする。更にこの符号をPCM録音機に用いた場合の効果を他の符号と比較してその有意性を明らかにする。

第4章は重畳符号を応用した多重符号の符号構成法を従来行なわれてきた方法と関連づけて論じ、新しい符号構成法を2種提案する。更に提案された2種の構成法により構成された重畳符号がもとの符号の最小距離を減少することなく冗長度を大巾に節減せしめうる直交化交錯法を導入し、従来のBCH符号、RS符号、VG限界式との比較を行う。更に畳み込み符号に重畳符号を応用し

た場合の効果を論ずる。

第5章は多重符号の復号法として新しい復号法を提案し，従来方法と比較し，その特長を明らかにする。更に提案方式を従来，優れた復号法の一つと考えられてきたChaseの復号法に適用した場合，新しい復号方法が実現できることを明らかにし，その有意性を明らかにする。

第6章は本論文全般に記述されている研究成果を総括する結論であり，あわせて今後に残された問題についても論じている。

多重符号の符号構成法，復号法および評価方法に関する研究

目 次

第1章 序論	1
1.1 多重符号および重畳符号を用いた符号構成法	1
1.2 A R Q と多重符号	1
1.3 一般化積符号	2
1.4 多重符号の研究の歴史	3
1.5 多重符号の復号法の研究	3
1.6 本研究の位置付けと目的	4
第2章 基礎的考察	5
2.1 序言	5
2.2 G o - b a c k - 2 A R Q の評価	5
2.2.1 逆方向通信路誤り無しの場合	7
2.2.2 逆方向通信路誤り有りの場合	16
2.3 G o - B a c k - N A R Q の評価	24
2.4 R S 符号の誤り検出能力	35
2.5 結言	37
第3章 一般化積符号	38
3.1 序言	38
3.2 符号構成法	38
3.3 P C M 録音機への応用	46
3.3.1 誤りの特性	46
3.3.2 積符号 I P C と一般化積符号 R S C	46

3 . 3 . 3 復号パフォーマンス	5 2
3 . 4 結言	6 0
第 4 章 重畳符号を応用した多重符号の構成法	6 2
4 . 1 序言	6 2
4 . 2 接続符号に応用した符号構成法	6 2
4 . 3 方法Ⅰ	6 5
4 . 3 . 1 擬似誤りⅠと擬似誤りⅡ	6 5
4 . 3 . 2 符号化アルゴリズム	6 7
4 . 3 . 3 直交化交錯法	6 9
4 . 3 . 4 他の符号との比較	7 2
4 . 4 方法Ⅱ	7 7
4 . 4 . 1 原理	7 7
4 . 4 . 2 適用例	8 3
4 . 5 畳み込み符号への適用	8 4
4 . 6 結言	9 0
第 5 章 多重符号の復号法	9 2
5 . 1 序言	9 2
5 . 2 R E (残留イレージャ) 復号法	9 3
5 . 2 . 1 復号器の構成	9 3
5 . 2 . 2 復号器の動作原理	9 5
5 . 2 . 3 Chase 復号器との比較	1 0 4
5 . 2 . 4 考察	1 1 1
5 . 3 誤り監視計数復号	1 1 2
5 . 3 . 1 原理	1 1 2

5 . 3 . 2	復号器の構成	1 1 3
5 . 3 . 3	最小ステップ誤り推定法	1 1 6
5 . 3 . 4	シミュレーション	1 1 8
5 . 4	多次元 Chase 復号	1 2 0
5 . 4 . 1	信頼指数 α の計算	1 2 0
5 . 4 . 2	多次元 Chase 復号	1 2 3
5 . 4 . 3	信頼指数とアナログ重み	1 2 4
5 . 4 . 4	多次元 Chase 復号器の種類	1 2 5
5 . 4 . 5	RE 復号を適用した多次元 Chase 復号器	1 2 9
5 . 5	結言	1 3 1
第 6 章	結論	1 3 2
謝 辞		1 3 4
文 献		1 3 6
付 録 A		1 4 2
B		1 4 2
C		1 4 3
D		1 4 4
E		1 4 4
F		1 4 5
G		1 4 7
H		1 4 8
I		1 4 9
J		1 5 0
K		1 5 4
L		1 6 0
M		1 6 2

第1章 序 論

誤り制御符号は近年ディジタル通信システム，各種メモリ，ディジタルオーディオなどの信頼性向上のために盛んに実用化されるようになってきており，今後もますます発展することが予想される。

本章は本論文に關係する誤り訂正符号に關する研究のあらましを述べ，本研究の位置づけと目的を明確にする。

1.1 多重符号および重疊符号を用いた符号構成法

本論文では多重に符号化された符号語によって情報を送受するデータ伝送系に用いられる符号を多重符号と総称する。多重符号とは積符号，連接符号，はじめそれらを基礎とした重疊符号および2次元の符号を基礎に構成された多次元の符号を含むこととする。

1.2 ARQと多重符号

本論文では判定帰還形誤り制御方式を便宜上実用機の呼称でもあるARQ (Automatic Repeat Request) と呼ぶ。

ブロック伝送を行うARQは通常単純な構成の巡回符号を誤り検出符号あるいは軽微の誤りを訂正する誤り訂正符号が用いられている。しかし，一旦，誤りが検出されると再送要求信号を送信局へ返送し，誤りの検出されたブロックを再送する。この意味でARQも同一情報を広義の多重符号化を行うデータ伝送を行っていると言えよう。

本論文ではCCITT V.41 勧告にあるGo-back-2 ARQの解析を行い，この方式を長い伝搬遅延のある通信路に適用した場合の問題点とこの点を改良したGo-back-N ARQとの比較検討結果について報告する。

ARQの研究は古くはReifen⁽⁵⁰⁾, Benice & Frey⁽³⁾⁽⁴⁾ などが
ありARQの実用機としての報告としてはCrips⁽⁷⁾やBacher⁽²⁾の報告
がある。一方, Cuperman⁽⁸⁾はバースト誤りを模擬するギルバートの通
信路のパラメータを符号語の誤り検出確率と結びつけた式を導いた。Elliot⁽¹⁰⁾
Horsteinら⁽¹⁷⁾はギルバートのモデルを用いて各種の通信方式の研究を
行った。又, 藤原, 中西, 笠原らは有限長の符号の中に現れる単一バースト誤
りの確率密度関数および分布関数を導いた。⁽¹⁴⁾

本報告ではこれらの研究成果をふまえ更に発展させて, 逆方向通信路を考慮
した場合,⁽²⁰⁾ 更にはGo-back-N ARQとGo-back-2 ARQとの比較
検討を行う。⁽²¹⁾ 更に最近特に注目を浴びているRS(Reed-Solomon)符号
の誤り検出能力についても触れる。⁽³²⁾

1.3 一般化積符号

積符号⁽¹¹⁾, 連接符号⁽¹²⁾はこれまで理論的観点から研究が先行してきた。
特にShannon, C. E.⁽⁵¹⁾の第2定理(即ち, 通信路容量Cより小なる任意
の情報伝送速度Rに対して符号長Nを大とし, 通信路符号器, 復号器を適当に
設計すれば復号誤り確率をいくらでも小さくすることができる)を満足する符
号としてElias, P.⁽¹⁶⁾はHamming符号をもとに積符号を無限に繰り返して
拡張することによって初めて漸近的距離比(Asymptotic
distance ratio)

$$\delta(R) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{D_m/N > 0} D_m/N > 0$$

を満足する符号を構成した。⁽¹¹⁾

又, Forney, G. D.によって導入された連接符号はJustesen, J.
によってその内部符号を適当に選ぶことにより漸近的距離比 $\delta(R) > 0$ を満足
する符号を構成した。⁽⁴⁰⁾

この積符号，連接符号を実用化した報告は比較的少なく又，通信路，ハードウェア量などの点から適宜修正を加えた符号構成法が望まれていた。筆者はいわば積符号，連接符号の中間的な符号構成をもつ符号を提案する。⁽²³⁾⁽²⁴⁾

同時にこの符号がPCM録音機への応用に適していることを従来の符号例と比較して述べる。⁽³⁷⁾⁽³⁸⁾⁽⁵³⁾

1.4 多重符号の研究の歴史

2種以上の符号を結合して符号比率を改善する方法に重畳符号がある。主として一次元の符号に重畳符号を用いてその符号比率を改善する研究にはすでにかなり多くの報告がある。⁽⁴¹⁾⁽⁴³⁾⁽⁵²⁾

筆者は積符号の符号語を構成する過程に重畳化の手法を取り入れ従来方法に比し，生起する擬似誤りが効果的に分散される符号構成法(方法Ⅰ)を提案する。又，2次元の符号に重畳符号を用いる符号構成法の研究は笠原，杉山，平沢，滑川の論文⁽⁴²⁾に端を発するがそのほとんどがすでに構成された積符号，連接符号の符号語に更に新たな情報を付加して伝送するタイプのものであった。これに対し筆者は重畳符号を応用して検査シンボルを削減する符号構成法(方法Ⅱ)を提案する。⁽³⁵⁾⁽³⁹⁾ 本論文第4章では新しい符号構成法によって構成された符号と従来の符号との優劣が比較される。最後に畳み込み符号にこの構成法を適用した時の効果について論ずる。⁽³⁶⁾

1.5 多重符号の復号法の研究

多重符号の復号法に関しては従来ただ一度の復号で所定の復号パフォーマンスを行う復号がほとんどであったが，このような能力限度いっぱいの復号を行うと訂正能力は向上するもののそれに伴う復号誤りも又，増大するという問題があった。筆者は誤り訂正個数を少なくして復号回数を繰り返す方法を提案する。このようにして復号した復号パフォーマンスが従来の優れた復号法として

(6)

知られたChaseの方法と比較してどのような特長を有するか明らかにする。

1.6 本研究の位置付けと目的

本研究は多重符号の構成法について提案し、詳細な検討を加える。特に重畳符号化を用いる符号構成法に関してその復号過程で生成する擬似誤りを首尾よく分散させ小さな最小距離の重畳符号を重畳させても充分効果を発揮する符号構成法を提案する。

更に従来の重畳符号化法が新たな情報を付加する方法であったのに対しもとの符号の検査記号数を重畳符号を応用して大巾に節減することによって同一フォーマットで異なった信頼度で伝送することを可能にする。

更に多重符号の復号法を考察し従来方法と比較検討し考察する。新しい復号法が通信路誤り率不良のところで特に効力を発揮することを示す。

新しい復号法が誤り監視計数器を導入することにより繰り返し回数の減少、又、バースト誤りの検出などより高度なシステムを構築できることを示す。

最後に新しい復号法が多次元に拡張したChaseの復号法に容易に適用でき、その演算回数が大巾に減少せしめうることを示す。

(6)

第2章 基礎的考察

2.1 序言

本章ではデータ伝送系においてよく用いられる二、三の符号を例にとりその評価方法を確立、整理し、以下の章の評価計算の準備とする。

従来A R Qでは逆方向通信路の誤りを考慮した解析報告は少なく、又、G o - b a c k - N方式の実用的な解析報告もあまりなされていない。

本章では単体の符号を伝送制御手段と組み合わせたA R Qをとりあげ従来あまり解析されなかった逆方向通信路を考慮した解析、およびG o - b a c k - N A R Qの解析を行う。⁽¹⁹⁾⁽²⁰⁾⁽²¹⁾

2.2 G o - b a c k - 2 A R Qの評価

本章ではC C I T T V . 4 1 勧告のG o - b a c k - 2 A R Q を実用的観点からモデル化し解析を行う。A R Qシステムの解析は既に多くの文献が見られ、各種のタイプについて検討されているが、以下のような仮定のもとに、実用的な見地からモデル化し解析する。

[仮定] :

(1) ビット同期は充分安定であるとし同期獲得条件に厳しいパターンチェックを行う方式とする

(2) 生成多項式 $G(x) = (X + 1)P(x)$ (2.1)

但し、 $P(x)$ は次数3次以上の原始多項式とする。従って最小距離4である。

符号系のもつ統計能力

次数 r の生成多項式 $G(x) = (X + 1)P(x)$ の統計的能力

(a) 符号語の誤り検出としては

(i) r ビット以下のバースト誤りのすべて

(ii) 奇数のランダム誤り

を検出する。

(b) 符号語の誤り見逃しとしては

(i) $b = r + 1$ ビットのバースト誤りは 2^{-r+1} の確率で見逃す

(ii) $b > r + 1$ ビットのバースト誤りは 2^{-r} の確率で見逃す。

通信路モデル

バースト誤りを良く模擬する Gilbert のモデル⁽¹⁵⁾を用いる。

平均ビット誤り率 P_e ，バースト誤りの平均長を $\bar{B}$ とすると次式で与えられる。⁽¹⁴⁾

$$P_e = \frac{(1-h)P}{p+P} \quad (2.2)$$

$$\bar{B} = \frac{(1-h)p}{(1-hq)^2} \left(h + \frac{1-h}{p^2} \right) \quad (2.3)$$

但し $q = 1 - p$ ， $Q = 1 - P$

又， h はバースト誤り状態において誤らないビットの生起確率で " 0 " と " 1 " が等確率に生起するとすると $h = 0.5$ となる。なお $h = 0.5$ としてデータ p_e ， $\bar{B}$ が与えられた時のギルバートのパラメータ P ， p を逆算すると次の様に与えられる。

$$p = \frac{1}{3} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{21}{\bar{B}} - \frac{6}{\bar{B}^2} + \frac{1}{\bar{B}^3}} + \sqrt{\frac{54}{\bar{B}} + \frac{378}{\bar{B}^2} - \frac{162}{\bar{B}^3} + \frac{27}{\bar{B}^4}} \right. \\ \left. + \sqrt[3]{1 + \frac{21}{\bar{B}} - \frac{6}{\bar{B}^2} + \frac{1}{\bar{B}^3}} - \sqrt{\frac{54}{\bar{B}} + \frac{378}{\bar{B}^2} - \frac{162}{\bar{B}^3} + \frac{27}{\bar{B}^4}} - 2 + \frac{1}{\bar{B}} \right) \quad (2.4)$$

$$P = \frac{2 P_e}{1 - 2 P_e} p \quad (2.5)$$

又， $p + P = 1$ の時，ランダム誤り状態を表す。（付録 A 参照）。

システムの評価基準

信頼度 R と伝送能率 η を次の様に定義する。⁽¹⁹⁾⁽²²⁾

$$R = \frac{\text{正しい全受信情報ビット数}}{\text{全送信情報ビット数}} \quad (2.6)$$

$$\eta = \frac{\text{全送信情報ビット数}}{\text{通信路に送信された全ビット数}} \quad (2.7)$$

2.2.1 逆方向通信路誤り無しの場合

逆方向通信路誤り無しのシステムの状態遷移図は図 2.1 に示すようになる。

ブロック単位の誤り検出について

通信路の各事象の生起確率および誤りビット数の期待値を求めるために

$P_D(\ell, m, n)$; n ビット中, 長さ m ビットのバースト誤りを生じ,

誤りビット数が ℓ である確率 ($2 \leq \ell \leq m \leq n$)

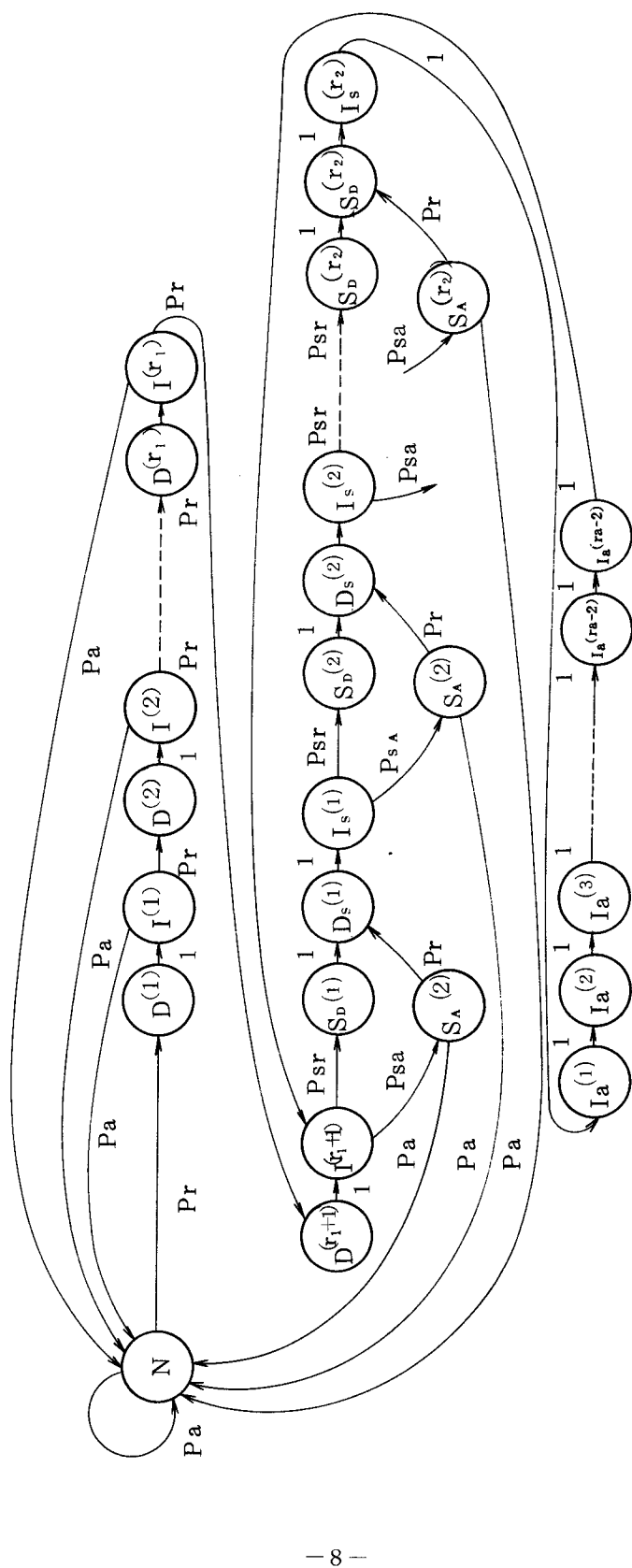


図 2 . 1 システムの受信側の状態遷移図

N :新しいブロックを受信する状態

$D^{(i)}$: 第 i 番目の再送サイクルで誤りを含むブロックを受信し, これを検出し
棄脚する状態

$I^{(i)}$: 第 i 番目の再送サイクルで誤りを含むブロックに続くブロックを受信し,
これをアイドルとする状態

$S_a^{(i)}$: 第 i 番目の再同期サイクルで同期ブロックをアクセプトする状態

$S_D^{(i)}$: // // 同期ブロックを拒絶する状態

$D_s^{(i)}$: // // 同期ブロックに続く棄脚すべきブロックを
受信する状態

$I_s^{(i)}$: 第 i 番目の再同期サイクルで同期ブロック, 棄却するブロックに続くアイ
ドルとすべきブロックを受信する状態

$I_a^{(i)}$: アラームに入り, アイドルブロックで等価的に与えられる第 i 番目のブ
ロックを受信する状態

とし, $P_D(\ell, m, n)$ を ℓ, m 要素とする $(n-1) \times (n-1)$ の行列

P_D を

$$P_D = \begin{bmatrix} P_D(2, 2, n), P_D(2, 3, n) \cdots P_D(2, n, n) \\ 0 \quad P_D(3, 3, n) \cdots P_D(3, n, n) \\ \vdots \quad \vdots \\ 0 \cdots \cdots \cdots 0 \quad P_D(n, n, n) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

とすると, 付録 B のようにして

$$P_D = R_V \cdot P_C = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_1 V \\ \vdots \\ R_1 V^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_C(1, n-1) & & \\ & \ddots & 0 \\ & & \ddots \\ 0 & & & P_C(1, 1) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

が得られる。ここで R_1 および V は付録 B に述べた通り Gilbert により与

えられている $V(i) = P(0^{i-1}1 | 1)$ を要素とし $P_c(i, n)$ は n ビット中 i ビット誤りの生起確率で Cuperman⁽⁸⁾ により

$$P_c(i, n) = (1-h)^i \sum_{m=i}^n C_i h^{m-i} P_0(m, n) \quad (2.10)$$

但し

$$P_0(m, n) = \frac{P^{m-1}}{p + P} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(n-j-2)! q^{m-j-1}}{m! j! (m-j-1)! (n-m-j)!} (P-q)^i Q^{n-m-j-2} \\ \times [A^2(j) - p A(j) - m(q-P)Q] \quad (2.11)$$

$$A(j) = (n-m-j)P + mQ \quad (2.12)$$

で与えられる。

信頼度の計算

信頼度 R は式 (2.6) の定義より

$$R = (n - e) / n = 1 - e / n \quad (2.13)$$

ここで e は 1 ブロック当たりの誤って受信したビット数の期待値である。

2.2 で述べた誤り見逃し事象より式 (2.8) の P_D を用いて次式で与えられる。

$$e = 2^{-r} (W \cdot P_D \cdot E^T) \quad (2.14)$$

但し, $W = \{W_2, W_3, \dots, W_n\}$, $E = (e_2, e_3, \dots, e_n)$

とし, 誤りビットの重み W および見逃しバースト誤りの重み E は

$$W_2 = W_3 = 0 \quad W_i = i \quad i = 4, \dots, n$$

$$e_2 = e_3 = \dots = e_r = 0, e_{r+1} = 2, e_i = 1, i \geq r+2 \quad (2.15)$$

である。式 (2.14) は付録 C のようにして r 次の行列演算に変換し計算する。

$$R = 1 - \frac{1}{n \cdot 2^r} \{ n \cdot P e - p(1, n) - W' P_D {}^t E^T \}$$

$$W' = (2, 3, 4, 5, \dots, r, 0)$$

$$E' = (1, 1, 1, \dots, 1, -1) \quad (2.16)$$

$$P_D' = \begin{bmatrix} R_1' \\ R_1' V' \\ \vdots \\ R_1' V'^{r-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_c(1, n-1) & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & P_c(1, n-r) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

伝送能率 η の計算

(2.16) と同様にして 1 ブロック受信される確率 P_a は

$$P_a = P(0^n) + 2^{-r} \{ 1 - P(0^n) - P(1, n) - P_D' E'^T \} \quad (2.18)$$

但し

$$P(0^n) = \frac{1}{(p+P)(J-L)} \{ (J+p-Q)(1-L)J^n - (L+p-Q)(1-J)L^n \} \quad \dots\dots (2.19)$$

$$P_r = 1 - P_a \quad \dots\dots (2.20)$$

である。以上により P_a, P_r, P_{sa}, P_{sr} に従って遷移する受信側の状態 遷移図は図 2.1 に与えられる。従って定義 (2.7) より図 2.1 の遷移確率行列より定常状態の伝送能率 η は付録 D の方法より

$$\eta = \frac{n-a-r}{n} \cdot \left[1 + 2P_r \frac{1-P_r^{r_1}}{1-P_r} - P_r^{r_1+1} + \frac{P_r^{r_1+1}}{1-(P_{sr}+P_r P_{sa})^{r_2}} \right. \\ \left. \{ 1 + (1+2(P_{sr}+P_r P_{sa})) \frac{1-(P_{sr}+P_r P_{sa})^{r_2}}{1-(P_{sr}+P_r P_{sa})} \} \right. \\ \left. + (ra-1)(P_{sr}+P_r P_{sa})^{r_2} \right] - 1 \quad (2.21)$$

但し, a : サービスビット数

r_1 : 再送サイクルの繰返し回数

r_2 : 再同期サイクルの繰返し回数

ra : アラーム時間等価ブロック数

で与えられる。

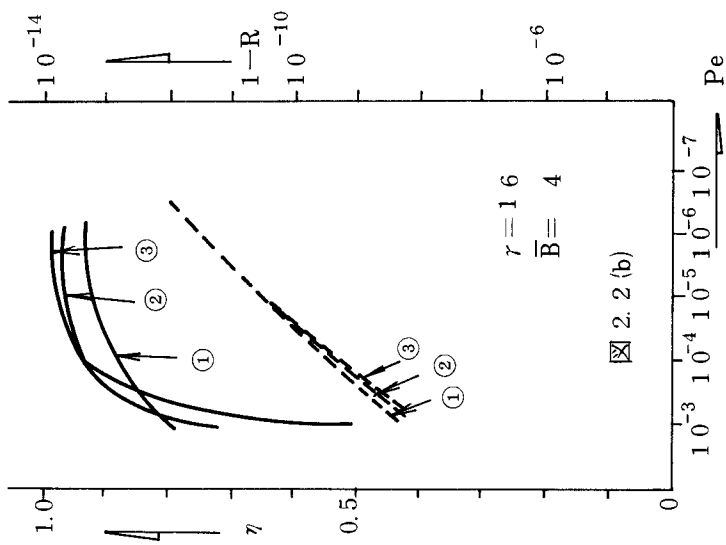
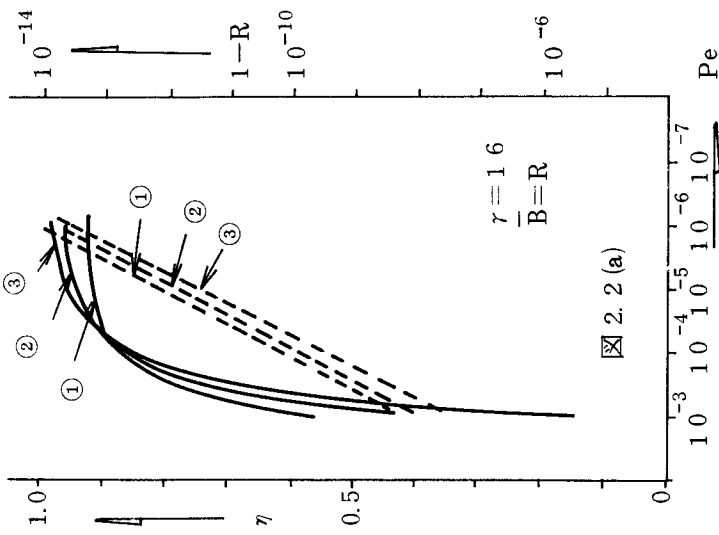


図 2.2 平均ビット誤り率 Pe 対 R, γ

① $n=260.0$ の場合

② $n=500$ "

③ $n=980$ "

$R \cdots$ ランダム通信路

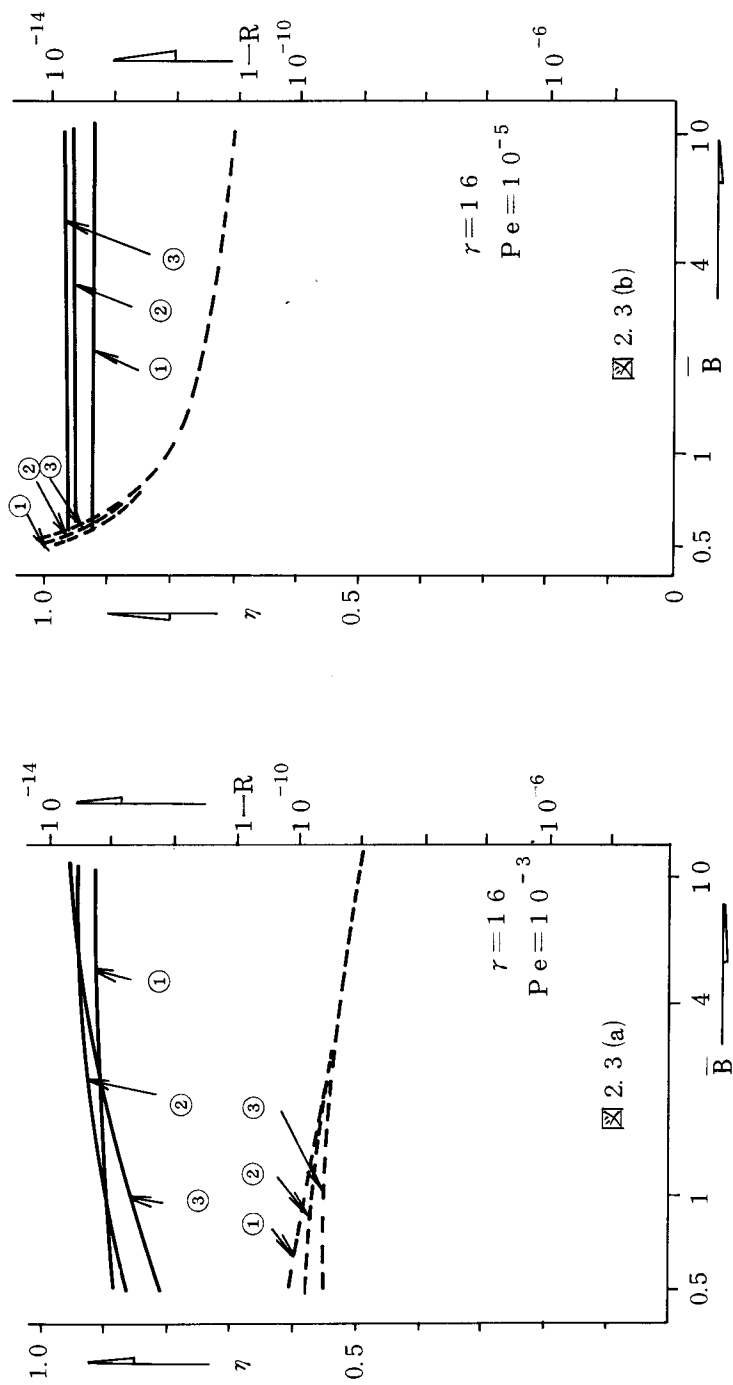


図 2.3 平均バースト長 B 対 R, η

① $n = 260$ の場合

② $n = 500$ "

③ $n = 980$ "

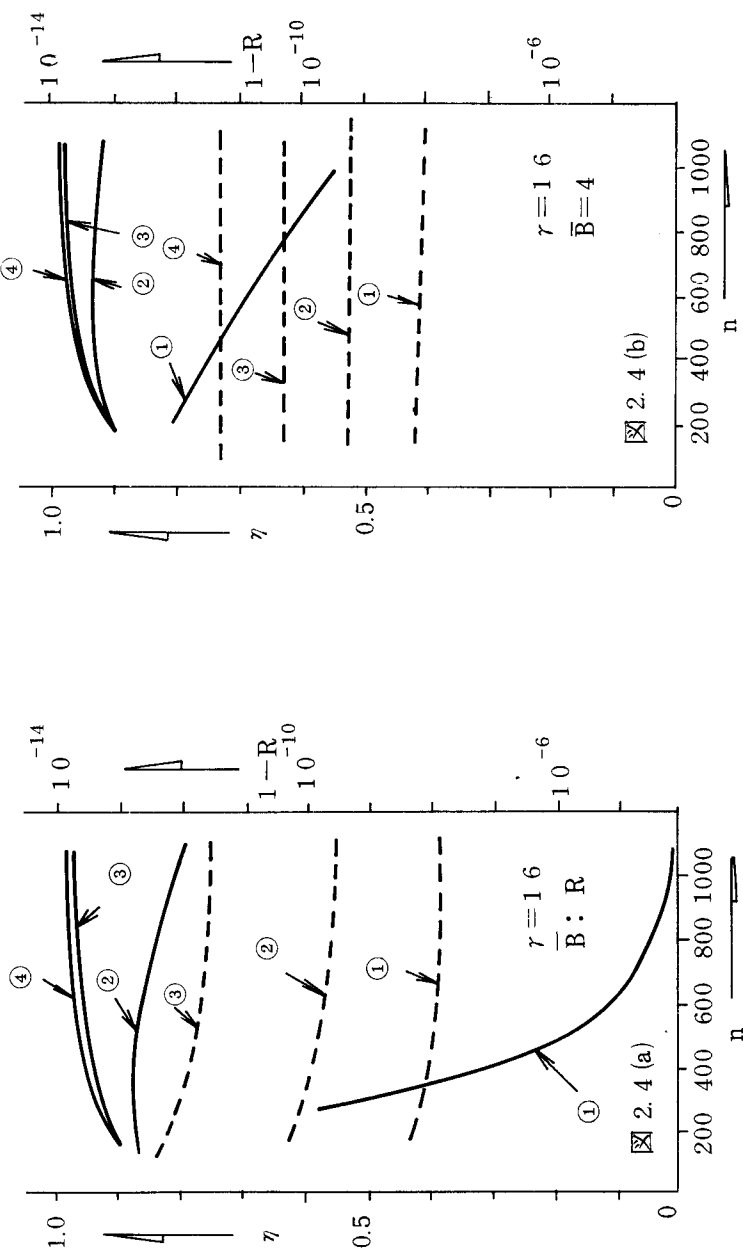


図 2.4 プロック長 n 対 R, η

- ① $Pe=10^{-3}$ ③ $Pe=10^{-5}$
 ② $Pe=10^{-4}$ ④ $Pe=10^{-6}$

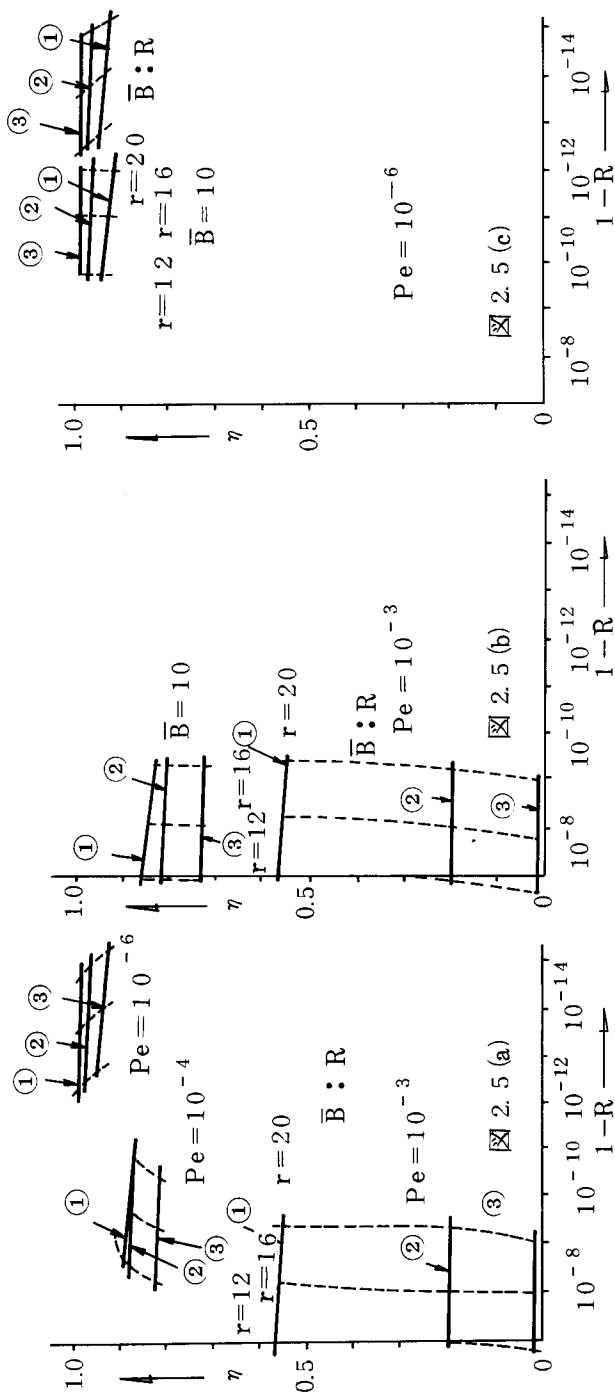


図 2.5 回線状態に対する η と R の関係

図 2.5 (a)~(c) に於いて点線は

① $\eta = 260$ の場合

② $\eta = 500$ "

③ $\eta = 980$ "

$r = 12, r = 16, r = 20$ の場合を示す。

$\bar{B} : R$ はランダム誤りを示す。

計算結果および考察

図 2.2 ～ 2.5 より以下のことがわかる。

信頼度 R について

- (1) 次数 r 一定では n 小なるほど R は大となる。
- (2) P_e 大においてはほぼ r により R が決まる。
- (3) $\bar{B}$ が大になるに従い、また n が大になるに従い信頼度は低下する。
- (4) P_e が小になるとランダム誤り通信路ほど n の影響を受ける。

伝送能率 η について

- (1) $P_e < 10^{-5}$ ではほぼ η が $(n - a - r) / n$ に近づく。
- (2) $P_e > 10^{-4}$ では n が大になるほど影響は大きい。従って通信路誤りに対して最適なブロック長が存在する。
- (3) P_e が大になるほど、 B が大になるほど η は大となる。従って、ランダム誤り通信路が最も不良である。
- (4) P_e が小のところでは n, r の影響は小さい。

2.2.2 逆方向通信路誤り有りの場合

逆方向通信路の誤りを考慮したとき主として伝送能率にどのような影響を与えるかについて考察する。次のような仮定を考慮し実用的な見地から検討を行った。

[仮定] :

- (i) 逆方向通信路の誤りはランダムであるとする。
- (ii) 逆方向通信路の誤りは順方向の誤りとは独立に誤るとする。
- (iii) 同期，生成多項式，伝送制御手順は 2.2.1 と同じとする。

ここでは逆方向通信路の誤りを考慮するため付随的に考えなければならないものにガーブルド冗長誤り (garbled redundancy 誤り) について述べる。

ガブルド冗長誤りとは送信側でRQ信号（再送要求信号）を受信した時，続くアイドルとすべきブロックが受信側で正しく受信されないために故意に誤りを加えて送信したにも拘わらずこのブロックの誤りが検出されない誤りを言う。

ここでは該当ブロックの最終ビットを反転（"1" → "0"，"0" → "1"）させるV. 41のガブルド冗長誤りを考慮する。ガブルド冗長誤りの生起する事象，即ち，故意に誤らせたブロックの誤りを見逃すような通信路誤りについて，生成多項式の次数を r ，通信路上で生起したバースト長を b_0 。とすると

(1) 最終ビットが誤りの時受信側で

(i) 最終ビット（誤り）を除いて他に誤りが無いとき

(ii) 最終ビット（誤り）を除いて $b_0 = r + 1$ のバースト誤りは

2^{-r+1} の確率で見逃す。

(iii) 最終ビット（誤り）を除いて $b_0 > r + 1$ のバースト誤りは 2^{-r} の確率で見逃す。

(2) 最終ビットが誤りでない時受信側で

(i) $n - r$ ビット目が誤り $n - 1$ ビット目の間の誤りは 2^{-r+1} の確率で見逃す。

(ii) $n - r - 1$ ビット目までに誤りがある誤りは 2^{-r} の確率で見逃すと考えることができる。

通信路モデル

順方向はGilbertのモデルによる。逆方向通信路は順方向通信路と独立な平均ビット誤り率 P_{eB} のランダム誤り通信路とする。通常，順方向通信路と逆方向通信路の誤りには統計的な相関がある場合も考えられるがここでは両者の誤り率の比を使用周波数帯域の比に等しいと考えたものを標準とし，特に逆方向通信路の誤り率が著しく大きい場合を考慮した。

伝送制御方式のモデル化

逆方向通信路の誤りを考慮するとこれを用いて伝送する R Q 信号の誤り、即ち、通常 Lost RQ (R Q 信号が " 1 " であるにも拘わらず R Q 信号が " 0 " となる誤り) と False RQ (R Q 信号が " 0 " であるにも拘わらず R Q 信号が " 1 " となる誤り) と呼ばれる事象が生起しこれを正規の状態に戻す伝送制御手順を明確にしなければならない。

これらの異常シーケンスは Lost RQ による脱ブロック (特定のブロックが脱落する) , False RQ による重複ブロック (特定のブロックが 2 度受信される) が生じ信頼度の点からも充分な対策が必要である。

実用システムでは

- (1) Lost RQ に対して伝送能率を犠牲にして信頼度低下に対処するアラームによる手動の復帰操作。
- (2) False RQ に対しては前置符号 (Prefix 部) を監視してブロックの異常サイクルを検知してアイドルプリントする自動復帰操作を行うよう考えられているものが多い。

異常シーケンスを次に図で示す。

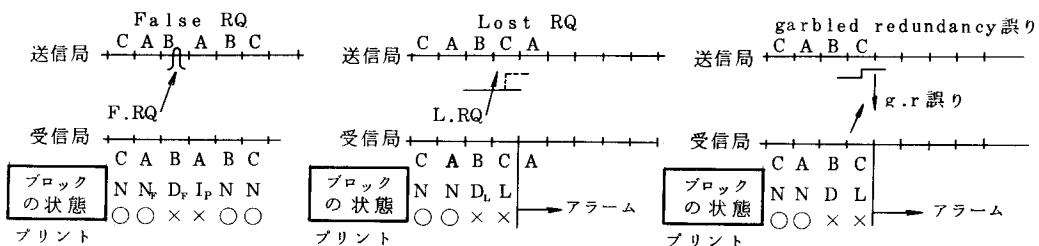


図 2 . 6 異常シーケンスの例

更に情報ブロック，同期ブロックの遷移確率は2.2の P_a, P_r, P_{sa}, P_{sr} と全く同様に与えることができ又，

P_{gr} : n ビットの情報ブロックのガブルド冗長誤りを見逃す確率

P_{eB} : 逆方向通信路の平均ビット誤り率

を新たに加えてやると順方向通信路の誤りと逆方向通信路の誤りが独立であることから両者の積で与えられる確率に従って遷移する。

信頼度 R の計算

逆方向通信路の誤りを考慮した時前述のとおり $Lost\ RQ$ に対しては手動操作により脱ブロックを防ぎ $False\ RQ$ に対しては前置符号の監視により重複ブロックを防ぐため特に前置符号の信頼度が全体の信頼度に影響する。

しかしながら $False\ RQ$ のとき前置符号の監視でアイドルプリントとできないのは逆方向通信路の誤りとガブルド冗長誤りが連続して生起し更に前置符号の誤りが特定のブロックサイクルで受信されるように連続する極めて希なパターンが発生する場合に限られるから近似的にこれを無視すると2.2.1の信頼度の式(2.16)と近似的に一致し

$$R = 1 - \frac{1}{n \cdot 2^r} \{ n \cdot P_e - P(1, n) - W' P_p' E'^r \} \quad (2.22)$$

となる。

伝送能率 η の計算

確率 $P_a, P_r, P_{sa}, P_{sr}, P_{gr}, P_{eB}$ に従って遷移する近似的な受信側状態遷移図を図2.7に示す。

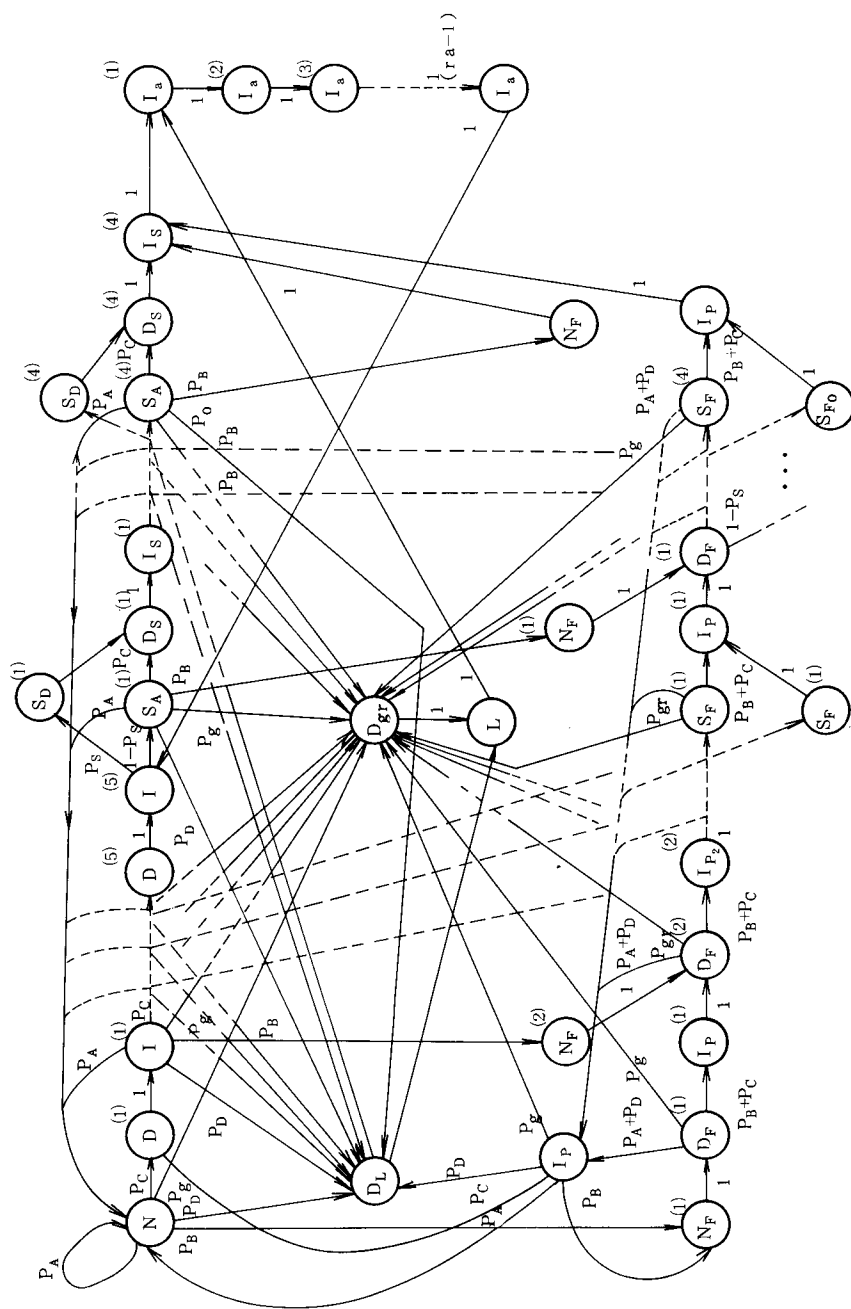


図 2 . 7 システムの受信側の状態遷移図

- $N_F^{(i)}$: 新しいブロックを受信しこれに *False RQ* が起こる状態
 $I_P^{(i)}$: *False RQ* を検出して受信側でアイドルプリントする状態
 $S_F^{(i)}$: *False RQ* に起因して起る再同期サイクルで同期を検出した状態
 $S_{FD}^{(i)}$: *False RQ* に起因して起る再同期サイクルで同期を検出できなかった状態
 D_L : 誤りを検出し次に *Lost RQ* が続いて起る状態
 D_{gr} : 誤りを検出し次のブロックに *garbled redundancy* 誤りが起こる状態

$$\begin{aligned}
 \text{但し } P_A &= P_a (1 - P_{eB}) & P_D &= (1 - P_a) \cdot P_{eB} \\
 P_B &= P_a P_{eB} (1 - P_{gr}) & P_g &= P_{gr} \{ P_a \cdot P_{eB} + (1 - P_a) \cdot (1 - P_{eB}) \} \\
 P_C &= (1 - P_a) (1 - P_{eB}) (1 - P_{gr}) \\
 P_{gr} &= P(0^{n-1} 1) + (1/2^r) \{ 1 - P_{A0} - P_{B0} \} \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

ここで P_{A0} , P_{B0} はガーブルド冗長を付加した条件付きで P_{A0} は

- (1) 受信側で 1 ビット誤り, 2 ビット誤りとして検出される確率
- (2) 2 ビット誤りのうち, 受信側で 3 ビット誤りとして検出される確率
- (3) 受信側で 3 ビット以上の誤りとして検出される確率

P_{B0} は

$$P_{B0} = P_{B1} - P_{B2}$$

として与えられ

- (1) P_{B1} は r ビット以下のバースト誤りとして検出される確率
- (2) P_{B2} は $r + 1$ ビットのバースト誤りの生起する確率

従って図 2.7 の遷移確率行列より $r_1 = 4$, $r_2 = 4$ の場合の伝送能率 η は式は (2.24) で与えられる (付録 E 参照)。

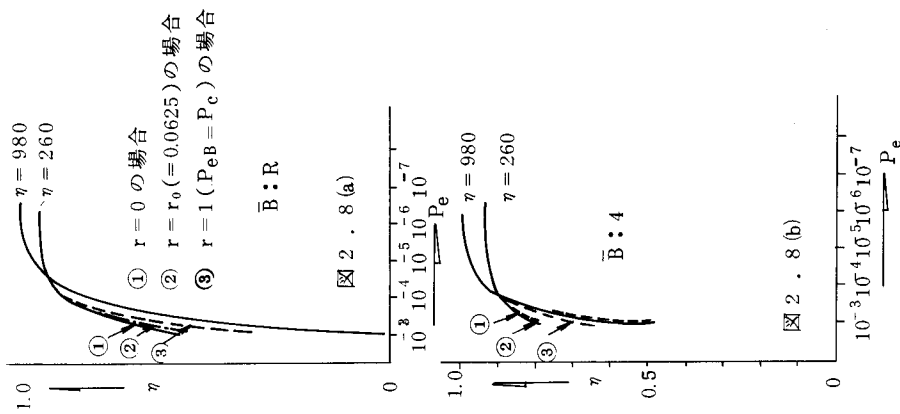


図 2.8 $P_{eB} = r \cdot P_e$ のパラメータ P_e 対 η

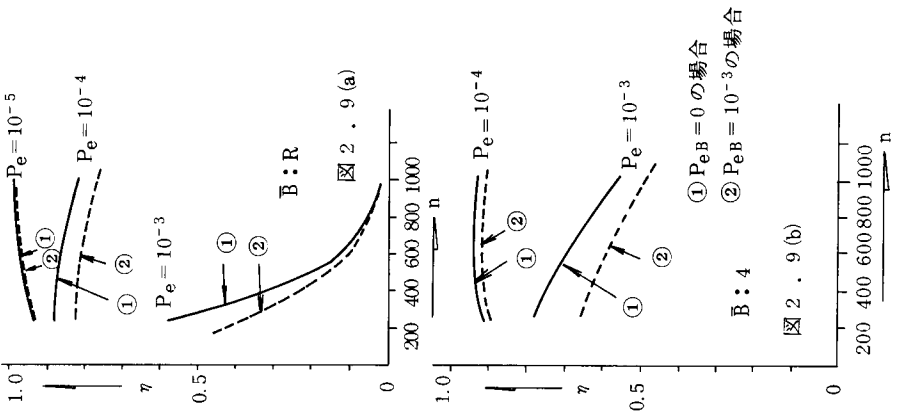


図 2.9 ブロック長 n 対 η

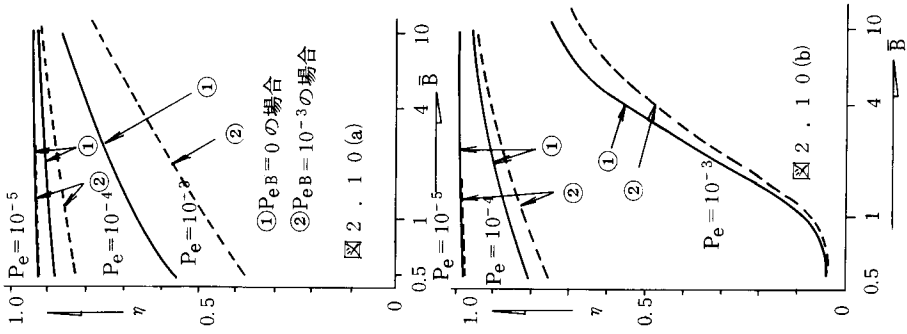


図 2.10 平均バースト長 $\bar{B}$ 対 η

$$\eta = \frac{n-a-r}{n} \frac{1+F_0}{H+F_1} \quad (2.24)$$

但し

$$H = 1 + 2P_c \frac{1-P_c^4}{1-P_c} (1+x) + P_c^5 (1+x) + T \left\{ 1 + 2A_1 \frac{1-A_1^4}{1-A_1} \right\} + Z + u \quad (2.25)$$

$$F_0 = P_B (1+x) + P_B P_c (1+x) \frac{1-P_c^4}{1-P_c} + P_B (1-P_{sr})$$

$$\left\{ P_c^5 (1+x) + W \right\} \frac{1-A_1^4}{1-A_1} \quad (2.26)$$

$$F_1 = 2P_B (1+x) \left[1 + P_B + 2P_c + (1+P_B+P_c) \left\{ P_c^2 + (P_B+P_c) \right. \right.$$

$$\left. \left. (2P_c+P_B) \right\} P_c^3 \right] + P_B (1+x) \left[(P_B+P_c)^2 \left\{ P_c^2 + (P_B+P_c) \right. \right.$$

$$\left. \left. (2P_c+P_B) \right\} + P_c^3 (P_B+P_c) + P_c^4 \right] + A_3 (1+x) \left[2 + 3(P_B+P_c) \right.$$

$$\left. (1-P_{sr}) + P_{sr} \right] + 3P_B (1-P_{sr}) \left[P_c^5 (1+x) + W \right] + 3 \left\{ (1+x) \right.$$

$$A_4 + WA_5 \left. \right\} + 3 \left\{ (1+x) A_6 + WA_7 \right\}$$

$$+ \frac{2}{P_D} (P_D + P_g) \left[1 + (1+x) P_c \frac{1-P_c^4}{1-P_c} + (1-P_{sr}) T \frac{1-A_1^4}{1-A_1} + x \right]$$

$$+ 2P_g \frac{x}{P_A + P_D} + (r_a - 1)W \quad (2.27)$$

計算結果および考察

図 2.8 ~ 2.10 より得られた結果をまとめる。

1. 順方向通信路と逆方向通信路の帯域巾の比を r とすると $P_{eB} = r \cdot P_e$

なる関係のある時

(1) r の値に拘わらず $P_e < 10^{-4}$ においては P_{eB} の影響は無視できる。

(2) r が標準状態 $r_0 \ll 1$ とみなせる時 (例えば順方向通信路 1200 ボー, 75 ボー, $r_0 = 0.0625$ なる時) $P_e < 10^{-4}$ では P_{eB} の影響は

無視して差し支えない。 $P_e \cong 10^{-3}$ にすこし影響が出る程度であるが r が 1 に近づくとつれ ($P_{eB} \cong P_e$ の時) 影響が出てくる。

(3) $\bar{B} = 4$ (一定) でも n が大になるに従い影響は小さくなる。

2. 逆方向通信路が一定して誤る時 (P_{eB} 一定且つ $P_{eB} \gg r \cdot P_e$)

(1) $P_e < 10^{-5}$ においては $P_{eB} = 10^{-3}$ でもほとんど影響無い。

(2) $P_e \cong 10^{-4}$ においては n の値に関係なく逆方向通信路の影響を受ける。

(3) $P_e \cong 10^{-3}$ で n が大になると逆方向通信路を考慮するしないに拘わらず η は極めて小となる。

(4) 順方向通信路の $\bar{B}$ が変わっても $P_e > 10^{-4}$ では P_{eB} の影響は無視できない。

2.3 Go-back-N ARQ の評価⁽²¹⁾⁽²²⁾

ARQ システムにおいて長い伝搬遅延のある通信路では伝送制御の方式に問題がある。特にバースト性の雑音が生起する通信路では充分検討が必要である。一般に長い伝搬遅延を伴う通信路でブロック伝送を行う場合、

(1) Go-back-2 方式で行う場合

ブロック長を長くして伝搬遅延をカバーしなければならない。

その場合ブロック誤り率の増加による再送ブロックの増加を考慮しなければならない。

(2) Go-back-N 方式で行う場合

伝搬遅延、通信路誤り状態に対する最適ブロック長、および最適分割回数が存在する。

なお逆方向通信路は誤りなしとする。

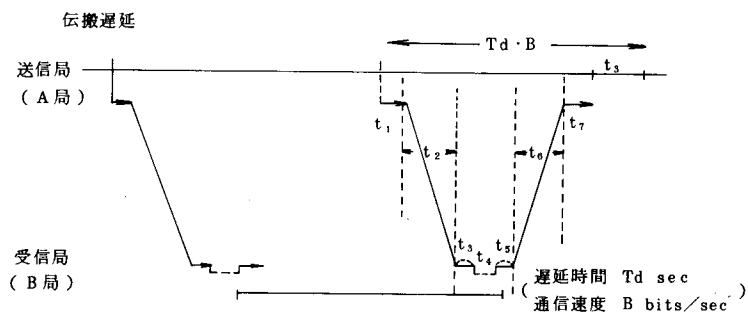


図 2 . 1 1 遅延時間と伝送ブロックとの関係
(Go back 2 方式)

図 2.11 は Go-back-2 方式の場合の通信路の伝搬遅延の様子を示す図である。 t_1, t_2 が純粋に通信路上の伝搬遅延である。 t_1, t_3, t_4, t_5, t_7 は送受信モデム内の遅延で V.41 勧告案では 40 msec 見込まれている。 t_8 は再送要求信号を検出してガブルド冗長を付加するための時間である。 t_8 は V.41 では 50 msec 見込まれている。通信速度 $B \text{ bits/sec}$, ループ伝搬時間 $T_d \text{ 秒}$, N をバッファブロック分割回数とすると $T_d \cdot B$ 一定の時, 図 2.12 に示すように N を増加させるにつれて必要なバッファビット数は少なくてすむという関係がある。

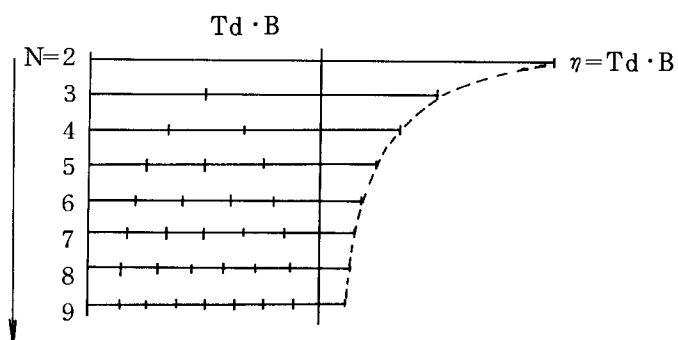


図 2 . 1 2 遅延ビット数一定の時必要最少限の
Buffer ビットの数 (但し N パラメータ)

図 2.1 2 より明らかなように必要なバッファビット数は $n \cdot N$ ビット。ビット換算等価遅延時間は $T_d \cdot B$ ビットとなる。 N と $T_d \cdot B$ との関係式(2.28)が得られる。

$$\frac{B \cdot T_d}{n} + 1 \leq N \leq \frac{B \cdot T_d}{n} + 2 \quad (2.28)$$

(N は正の整数)

Go-back-N ARQ の受信側状態遷移図は図 2.1 3 のようになる。

伝送能率と信頼性

伝送能率 η

2.2.2 と同様に、システムの定常状態における遷移図は図 2.1 3 に示したように示されその遷移確率行列に基づき伝送能率 η は

$$\eta = \frac{n - (a + r)}{n}$$

$$\left[1 + N \cdot P_r \cdot \frac{1 - P_r^{r_1+1}}{1 - P_r} - P_r^{r_1+1} + \frac{P_r^{r_1+1}}{1 - (P_{sr} + P_{sa} P_r)} + \frac{P_r^{r_1+1}}{1 - (P_{sr} + P_{sa} P_r)} + \frac{N \cdot P_r^{r_1+1} (P_{sr} + P_r P_{sa})}{1 - (P_{sr} + P_{sa} P_r)} + \tau_a \frac{P_r^{r_1+1}}{1 - (P_{sr} + P_r P_{sa})^{r_2}} + \tau_a (P_{sr} + P_r P_{sa})^{r_2} \right]^{-1}$$

(2.29)

ここで P_a, P_r は n ビットのブロックを受信 (アクセプト) する確率, 拒絶 (リジェクト) する確率である。

同期ブロックについては

P_{sa} : n ビットの同期ブロックにより正しいブロックを検出する確率。

P_{se} : n ビットの同期ブロックにより正しいブロックを検出する確率。

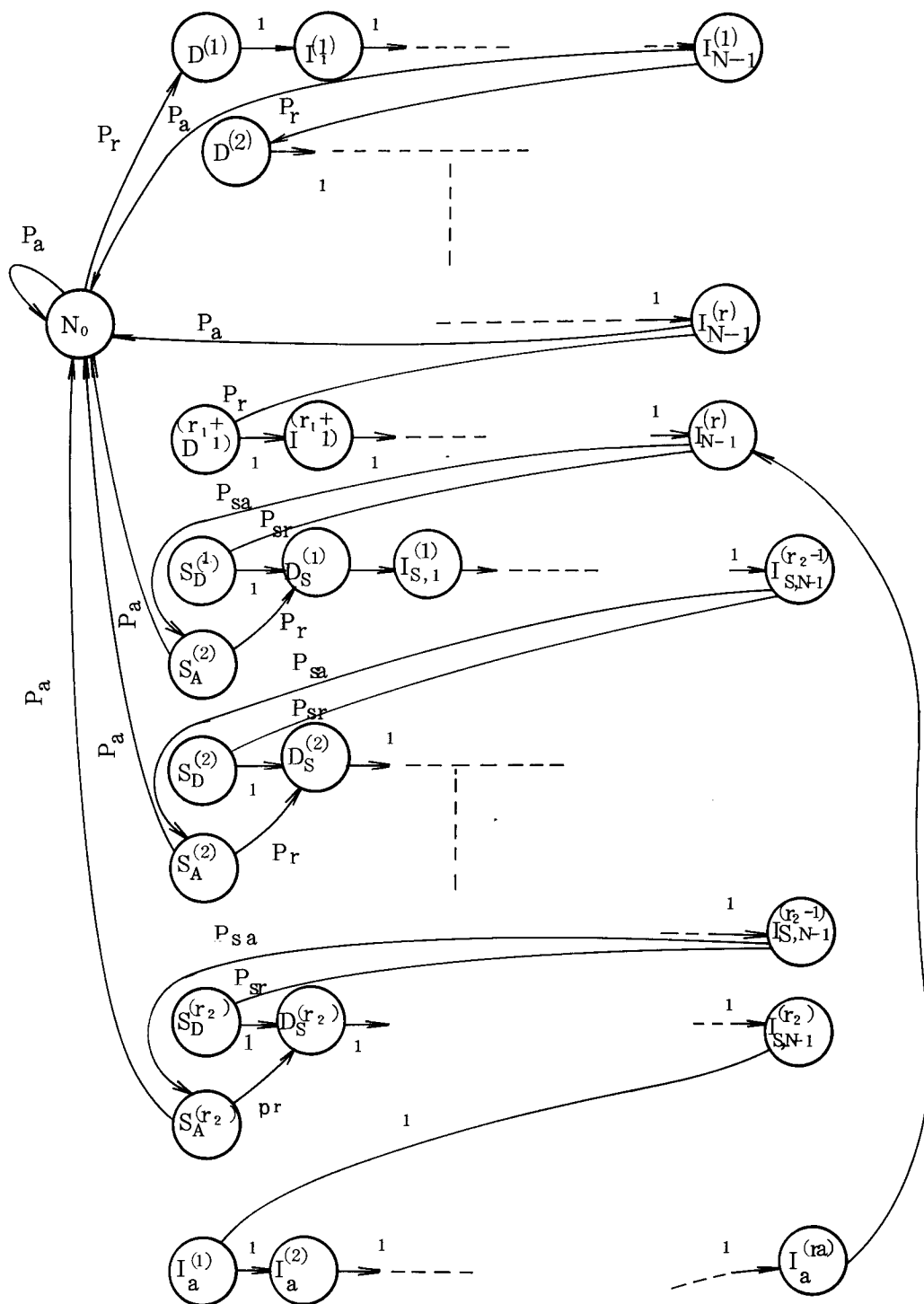


図 2 . 1 3 Go back N方式の受信側伝送制御モデル

P_{sr} : n ビットの同期ブロックによりブロック同期を検出できない確率。

ここで同期について厳しいパターンチェックと通信路誤りチェックを行うことを仮定すると近似的に、

$$P_{se} \ll 1$$

$$P_{sr} \approx 1 - P_a$$

従って

$$P_{sa} \approx P_a$$

$$P_{sr} \approx 1 - P_a$$

と考えると差し支えない。

信頼度 R

信頼度 R はブロックの伝送制御シーケンスに左右されず、符号の多項式的能力だけに依存するから式 (2.16) と同じとなる。

$$R = 1 - \frac{1}{n \cdot 2^r} \{ n \cdot P_e - P(1, n) - W' P_D E'^T \} \quad (2.30)$$

計算結果および考案

(1) Go-back-N方式の一般的な評価

信頼度 R について

図 2.14 は通信路誤り状態、平均バースト長 $\bar{B} = 4$ 、ビット誤り率 $P_e = 5 \times 10^{-4}$ の時におけるブロック長 n に対しての信頼度の変化を示したものである。(但し、生成多項式の次数 r は 16 に固定)

この図からは n の増加に伴って R が減少しているのが分かるが、これは R のスケールを極端に拡大したためで、実際にはほとんど変化なく、有効数字 8 桁までの範囲では 1 とみなしてよい。従って評価の目安として η を用いて検討した。

伝送能率 η について

一定の遅延におけるブロック長の η への影響および最適な N に対するグラフの一例を図 2.15 に示す。

図 2.15 は誤り状態 $\bar{B} = 4$, $P_e = 10^{-4}$ の時の Go-back-N 方式のブロック長 n に対する変化を遅延ビット数 $T_d \cdot \bar{B} = 1000$ の時の値を $n = 50 \sim 1000$ と変化させた時の値である。

- (1) η は N の変わり目で不連続な値となる。

これは式 (2.28) で N が整数値をとるため η を与える式 (2.28) の分母が n を連続的に増加させるにつれて、 N の整数値の変わり目で不連続な値をとる。

- (2) バッファ分割損は $T_d \cdot \bar{B}$ 一定で n を増加させてゆくと N の変わり目の直前で分割損最大となり、直後で最小となる。最適ブロック長を見つけるには $T_d \cdot \bar{B}$ を整数 N で割り、端数を切り上げた値を n とし、これらの n について計算した η の値が最大になるものを選べばよい。

ブロック長 n , および再送ブロック数 N の最適値

図 2.16 ~ 図 2.19 は $T_d \cdot \bar{B} = 500, 1000, 2000, 5000$ に対する η の最大値を表す。又、() 内の数値 n , N は各々 η の最大値を与える最適 n , および最適 N を表す。これらの図より以下のことが明らかである。

- (1) 最大の η の値は、一般に $T_d \cdot \bar{B}$ が増加すれば減少する。
- (2) $T_d \cdot \bar{B}$ が増加するほど再送ブロック数 N は大となる。
- (3) 通信路誤り状態が良くなるほどブロック長 n は大となり、従って一定の遅延に対して再送ブロック数 N は小となる。
- (4) 通信路誤り状態がよくなるほど又、平均バースト長が長くなるほど、 η に対する $T_d \cdot \bar{B}$ の影響は弱くなり、 η の最大値は $1 - (\text{ブロック当りの冗長度})$ に近づく。

$$\text{の冗長度}) \frac{n - (a + r)}{n} \text{ に近づく。}$$

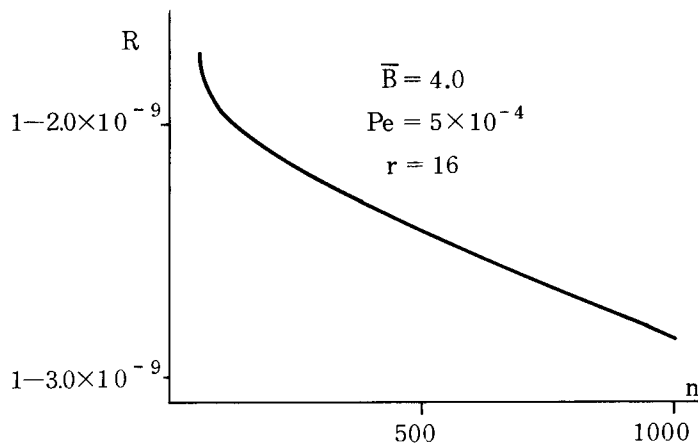
Ⅱ Go-back-2方式と最適なGo-back-N方式との比較

図2.16～図2.19からも明らかなようにビット誤り率が小さいほど又、平均バースト長が長いほどNの値は減少して2に近づく。

又、図2.16～図2.19において、破線で示したものがGo-back-2方式での η を与える。

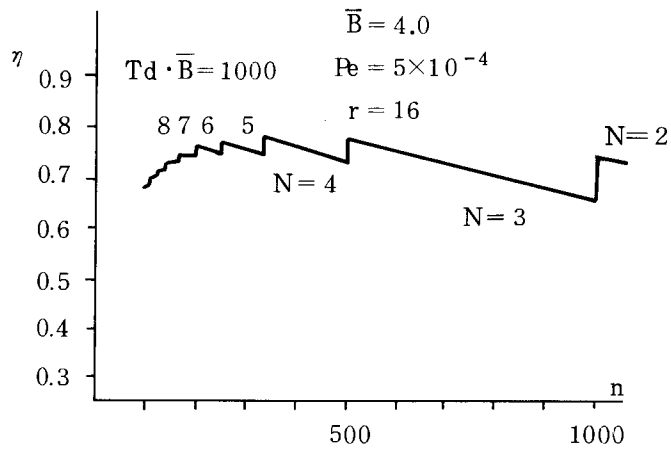
図2.20で $Td \cdot \bar{B}$ をパラメータにして η の値が最大となる時がGo-back-N ($N \geq 3$)方式で実現できる範囲を示す図である。図で与えられた通信路誤り状態に対してGo-back-N ($N \geq 3$)方式が有効な誤り条件は図中の境界線より上の場合である。逆にGo-back-2方式でカバーできる誤り状態は図の境界線より下の通信路誤り条件となる。

図2.21～図2.22は η と $1-R$ （信頼度Rの補数）のグラフである。図から明らかなように誤り状態が悪いほど又、遅延が大きいほど大きなNが有効である。通信路誤り状態が良いときはGo-back-2方式の方がかえって有効となる。

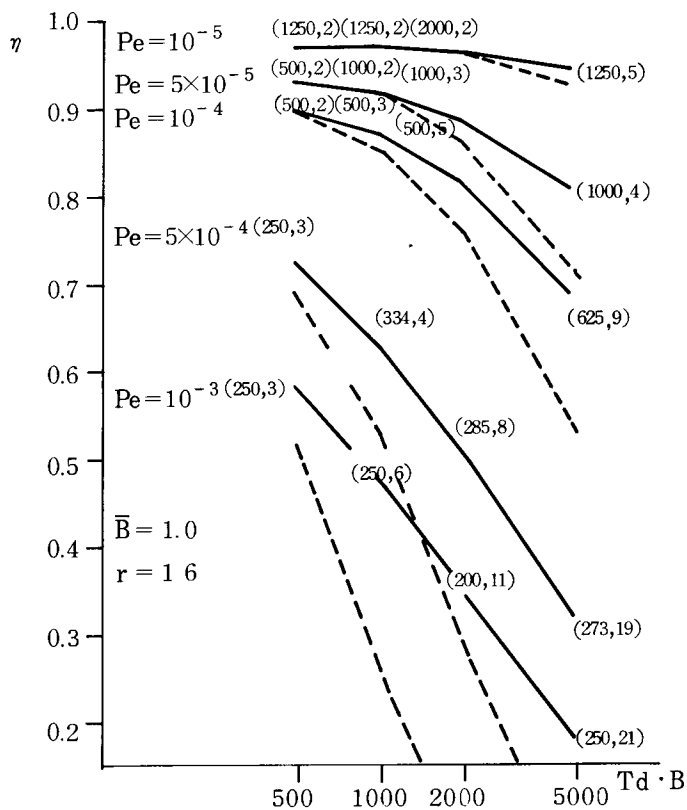


第2.14

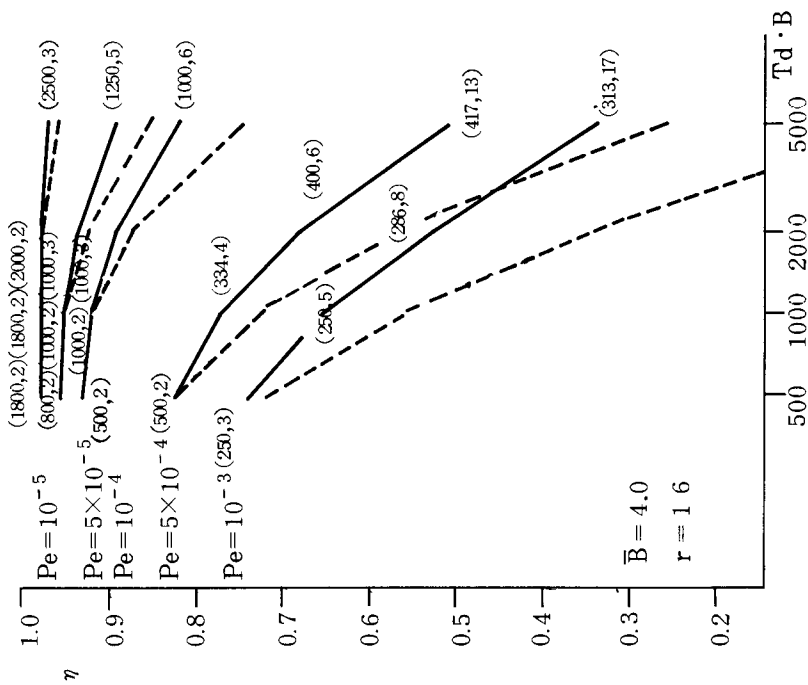
信頼度Rのブロック長に対する変化



第 2 . 1 5 図 ブロック長 η に対する N と η の変化

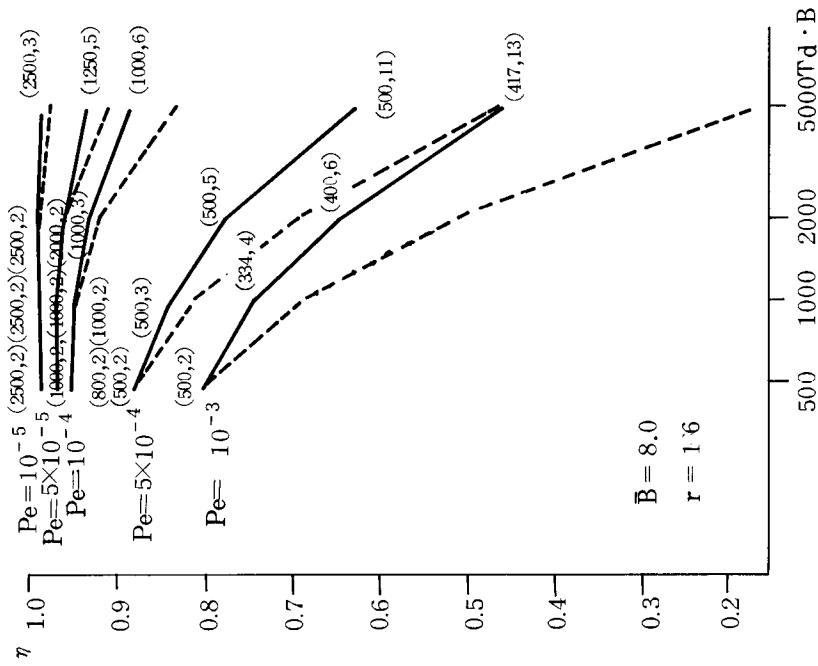


第 2 . 1 6 図 各遅延における取りうる η の最大値
及びその時の n 及び N (n, N)



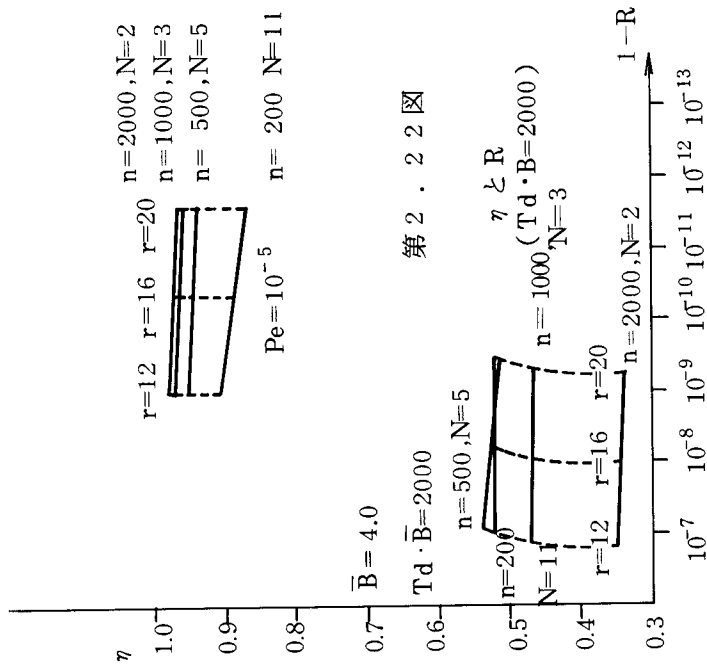
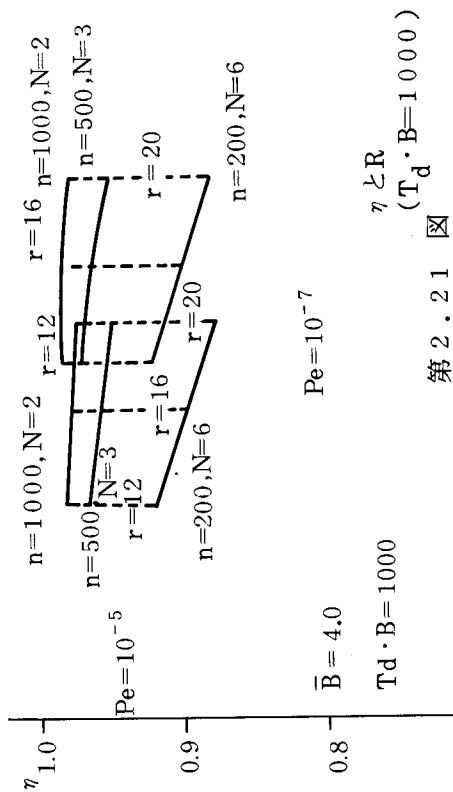
第 2 . 1 7 図

各遅延における取りうる η の最大値
及びその時の n 及び $N(n, N)$



第 2 . 1 8 図

各遅延における取りうる η の最大値
及びその時の n 及び $N(n, N)$



Go back 2方式とGo back N方式でえられる伝送能率

η と信頼度 R の Trade off の関係

2.4 RS符号⁽⁴⁸⁾⁽⁴⁹⁾の誤り検出能力⁽³²⁾

従来誤り検出符号としてCCITT V.4 1 勧告にある生成多項式 $G(x) = x^{16} + x^{12} + x^5 + 1$ のものが広く用いられてきた。一方、現在の状況はこの勧告案が提示された1960年代とは大きく変貌しておりディジタルオーディオ、衛星通信、計算機を中心により劣悪な通信路で能力を発揮する符号が切望されている。符号長 $n = 200 \sim 300$ ビット程度の符号はハード化の容易さ、とり扱うセクターまたはフレームフォーマットの大きさからも手頃であり広く使われている。

一方、 $GF(2^8)$ 上のRS (Reed-Solomon) 符号はCDプレーヤ、ビデオフロッピーへのデータ記録フォーマット、DAT (ディジタルオーディオテープレコーダ) などに用いられている。

RS符号の2元重み分布は重要であるにも拘わらず一般には求まっていない。最近、嵩-Linによる2元重み分布がRS符号のいくつかのタイプについて求められた。しかしこれはまだ一部のタイプであり、一般のRS符号についてはこれから研究が期待される。又重み分布多項式による計算方法は短縮化された場合には適用できない。以上の観点からRS符号の2元重み分布をシミュレーションにより求めた。

記号

$A_{w,b}(n)$: 符号長 n , 2元重み b の符号語の数

$A_{w,*}(n)$: 符号長 n , シンボル重み w の符号語の数

$GF(2^8)$ 上の $(5, 3, 3)$ RS符号の場合

$$A_{3,*}(5) = 2550 \quad (2.3.1)$$

$$A_{3,3}(5) = 18 \quad (2.3.2)$$

であった。

シンボル重み3の符号語数に対し2元重みも3の符号語数の比 $\sigma_3(n)$ を次のように定義する。

$$\sigma_3(n) = \frac{A_{3,3}(n)}{A_{3,*}(n)} \quad (2.33)$$

シミュレーションにより

$$\sigma_3(3) = 0.02745098 \quad (2.34)$$

$$\sigma_3(4) = 0.01274510 \quad (2.35)$$

$$\sigma_3(5) = 7.05882353 \times 10^{-3} \quad (2.36)$$

がえられた。

$n \cong 250$ ビット近辺のデータは計算機シミュレーションでは求められないので次の仮定を置く。

[仮定] : 符号長 $n \cong 250$ ビット, シンボル重み 3 の RS 符号語数に対し
そのうち 2 元重み 3 のものは約 $1/100$ である。

仮定によって BSC (2 元対称通信路) に適用した RS 符号の見逃し誤り確率 P_m は

$$P_m \cong \delta_3(32) \cdot A_{3,*}(32) \times P^3 = 1.26 \times 10^4 P^3 \quad (2.37)$$

となる。計算結果を図 2.23 に示す。

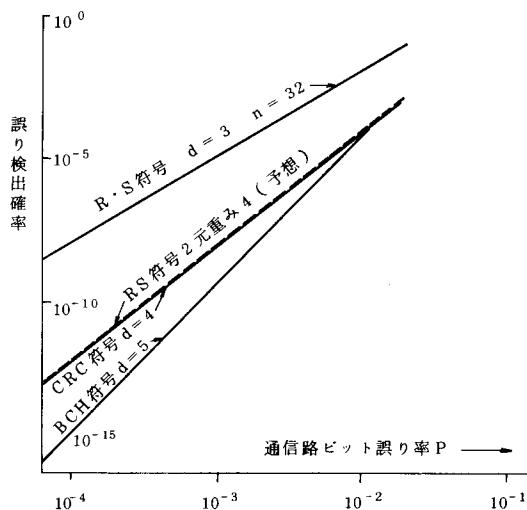


図 2.23 各種符号の誤り検出確率

2.5 結言

- (1) 誤り制御システムの評価基準として伝送能率 η と信頼度 R をギルバートのパラメータ P , p , h と結びつけて定義した。
- (2) CCITT V.41 勧告にある Go-back-2 ARQ を評価した。
- (3) 又, 逆方向通信路の誤りを考慮した場合も検討した。
- (4) 更にその延長上にあると思われる Go-back-N ARQ を伝搬遅延の長い通信路上で Go-back-2 ARQ と比較し Go-back-N ARQ の存在範囲を明らかにした。
- (5) 最後に RS 符号の BSC (2 元対称通信路) における 2 元重み分布をシミュレーションで求めその潜在的な誤り検出能力の推定を行った。これにより $GF(2^8)$ 上の最小距離 3 の RS 符号で 2 元で 4 の重みをもつ, 生成多項式 $(X+1)$ を因数に含むものは誤り検出符号として使用しても充分従来の CRC に匹敵することが明らかになった。又, この RS 符号は 1 シンボルの誤りを訂正できるのでシステムによってはこの方面の要求を満たすこともできる。

第3章 一般化積符号⁽²³⁾⁽³⁷⁾

3.1 序言

2次元配置をもつ符号に積符号⁽¹¹⁾、接続符号⁽¹²⁾がある。この両者の中間的な構造をもつ新しい符号構成法を提案し、こうして構成された符号を一般化積符号Xと称する。

一般化積符号Xは符号語が2次元の配置をもちその一方の方向にバースト誤りが生起するとき、特に有効である。一般化積符号は接続符号とほとんど同じ誤り訂正能力を有するが、はるかに少ないハードウェア量で装置化できる。

PCM録音機に適用した例では従来の積符号タイプの符号と比較がなされ、誤りが訂正できず補正音生起となる確率が従来の符号と比し約 $1/400$ に抑制されることが解析結果より明らかにされる。⁽²³⁾⁽³⁸⁾

3.2 符号構成法

(a) 一般化積符号Xの符号化過程

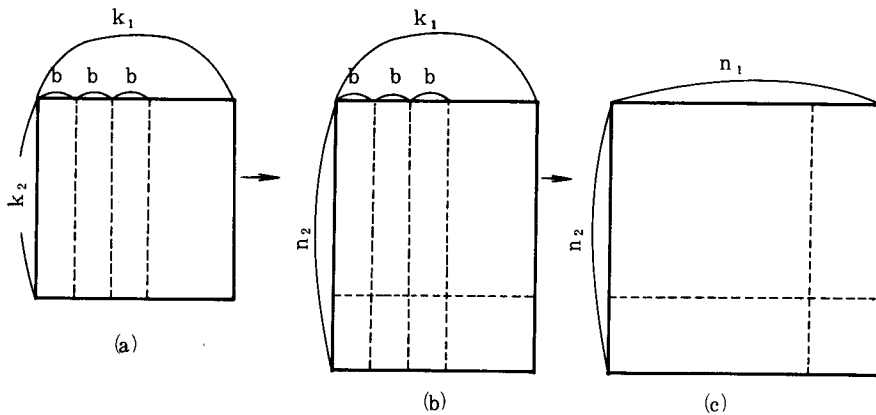


図3.1 一般化積符号Xの符号化過程

- (1) $k_2 \times k_1$ ビットの原情報が $k_2 \times b$ ビット毎に f 個 ($f = k_1 / b$) の矩形

配置に分割される。(図3.1(a))。

(2) $k_2 \times b$ ビットの矩形で $1 \times b$ ビットの矩形が $GF(2^b)$ のシンボルとして取り扱われる。 k_2 個のシンボルが符号 C_2 の符号化アルゴリズムに基づいて n_2 個のシンボルに符号化される。 m_2 個 ($m_2 = n_2 - k_2$) の検査シンボルが $1 \times b$ ビットの m_2 個の矩形として取り扱われる。このようにして $n_2 \times b$ ビットの矩形が得られる。

(3) 符号 C_2 のこの符号化程が f 回繰り返されると $n_2 \times k_1$ の矩形配置が得られる(図3.1(b))。

(4) 次に行方向の k_1 ビット毎に符号化が実行されて行方向の k_1 ビットは符号 C_1 の符号化アルゴリズムに基づいて n_1 ビットに符号化される。

$m_1 = n_1 - k_1$ 個の検査ビットが付加される。

(5) 符号 C_1 のこの符号化過程が n_2 回繰り返され一般化積符号 X の符号語は次の図3.2のように表現される。

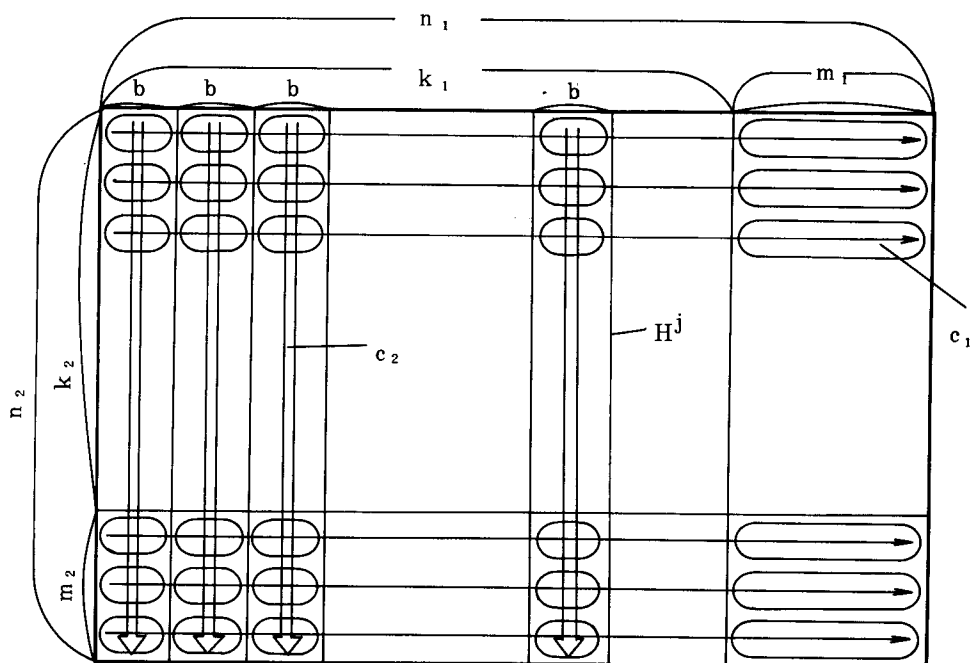


図3.2 一般化積符号 X の符号語

図 3 . 2 に示すように $n_2 \times n_1$ ビットの符号語で左端から右端へ符号 C_2 の各符号語にシーケンス番号 j をつける。 j は $1 \leq j \leq f$ なる整数となる。符号 C_2 は j 番目の符号語を H^j と表現する。

一方 $n_2 \times n_1$ ビットの矩形配置の各行は符号 C_1 の符号語から構成される。 $n_2 \times n_1$ ビットの符号語で上端から下端まで符号 C_1 の各符号語にシーケンス番号 j をつける。符号 C_1 の i 番目の符号語は $I(i)$ と表現される。符号 C_2 の符号語 H^j は次式で与えられる。

$$H^j = (A^j(1), A^j(2), \dots, A^j(k_2), \\ p^j(1), \dots, p^j(m_2))^T \quad (3.1)$$

ここで m_2 は $n_2 - k_2$ に等しく T はベクトルの転置を表す。

$$A^j(1) = (a_{i,1}^j, a_{i,2}^j, \dots, a_{i,b}^j) \quad (3.2)$$

$$a_{i,\ell}^j \in GF(2), 1 \leq \ell \leq b$$

は情報シンボルで

$$p^j(i) = (p_{i,1}^j, p_{i,2}^j, \dots, p_{i,b}^j) \quad (3.3)$$

$$p_{i,\ell}^j \in GF(2), 1 \leq \ell \leq b$$

は検査シンボルである。次のシンボルを定義する。

$$F^j(i) = \sum_{\ell=1}^b a_{i,\ell}^j \alpha^{\ell-1}, 1 \leq i \leq k_2 \quad (3.4)$$

$$F^j(i) = \sum_{\ell=1}^b p_{i-k_2,\ell}^j \alpha^{\ell-1}, k_2+1 \leq i \leq n_2 \quad (3.5)$$

ここで α は $GF(2^b)$ の原始元である。符号 C_2 の符号語 H^j は又、次式で与えられる。

$$H^j = (F^j(1), F^j(2), \dots, F^j(n_2))^T \quad (3.6)$$

$$I(i) = (A^1(i), A^2(i), \dots, A^f(i), Q(i)) \quad (3.7)$$

$A^1(i), A^2(i), \dots, A^f(i)$ は情報ビットを含む。 $A^1(i)$

$A^2(i), \dots, A^f(i)$ は式 (3.2) で使われたと同じベクトルである。

$$Q(i) \text{ は } Q(i) = (q_{i,1}, q_{i,2}, \dots, q_{i,m_1}) \quad (3.8)$$

なる m_1 次元行ベクトルである。ここで $q_{i,\ell} \in GF(2), m_1 = n_1 - k_1$ である。

符号 C_1 の i 番目の符号語の 2 元表現は

$$I(i) = (a_{i,1}^1, a_{i,2}^1, \dots, a_{i,b}^1, a_{i,1}^2, a_{i,2}^2, \dots, a_{i,b}^2, \dots, \\ a_{i,1}^f, a_{i,2}^f, \dots, a_{i,b}^f, q_{i,1}, q_{i,2}, \dots, q_{i,1,m_1}) \quad (3.9)$$

一般化積符号 X の符号語は次式で表現される。

$$\begin{bmatrix} A^1(1), A^2(1), \dots, A^f(1), Q(1) \\ A^1(2), A^2(2), \dots, A^f(2), Q(2) \\ \vdots \\ A^1(k_2), A^2(k_2), \dots, A^f(k_2), Q(k_2) \\ P^1(1), P^2(1), \dots, P^f(1), Q(k_2+1) \\ P^1(2), P^2(2), \dots, P^f(2), Q(k_2+2) \\ \vdots \\ P^1(m_2), P^2(m_2), \dots, P^f(m_2), Q(n_2) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

通信路には一般化積符号 X は線形 $(n_1 \ n_2, k_1 \ k_2)$ 符号として伝送される。

(b) ランダム誤り訂正能力

『定理 3 . 1 : 符号 C_1 が $GF(2)$ 上の線形 (n_1, k_1, d_1) 符号, 符号 C_2 が $GF(2^b)$ 上の線形 (n_2, k_2, d_2) 符号とする。但し線形 (n, k, d) 符号で n は符号長, k は情報記号数, d は最小距離を表す。

符号 C_1 , 符号 C_2 から構成される一般化積符号 X のランダム誤り訂正能力は

$$t = \lfloor (d_1 d_2 - 1) / 2 \rfloor \quad (3.11)$$

である。

(略証) :

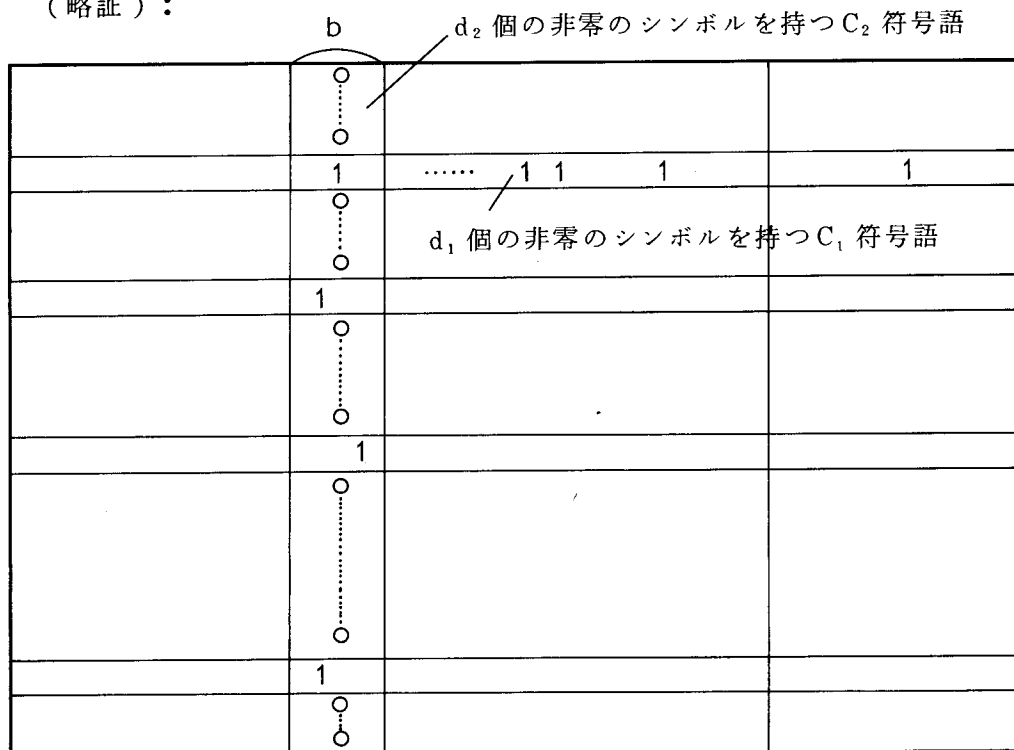


図 3 . 3 一般化積符号 X のランダム誤り訂正能力

一般化積符号 X の最小重みを考える。符号 C_2 の j 番目の符号語 H^j がちょうど符号 C_2 の最小重みと同じ重み d_2 をもつとする。符号語 H^j の非零のシンボルに対応する各行は少なくとも d_1 個の 1 を含んでいる。従って $n_2 \times n_1$ ビット

トの矩形の配置では少なくとも d_1, d_2 個の 1 がある。故に一般化積符号 X の最小重みは d_1, d_2 である。最小重み d_1, d_2 の一般化積符号 X は $t = \lfloor (d_1, d_2 - 1) / 2 \rfloor$ 個までのランダム誤りを訂正することができる。

(c) バースト誤り訂正能力

『 定理 3 . 2 : ℓ_1 を符号 C_1 のバースト誤り訂正能力, ℓ_2 を符号 C_2 のバースト誤り訂正能力とする時, 一般化積符号 X のバースト誤り訂正能力は

$$n_1 (\ell_2 - 1) + 2 \ell_1 + 1 \quad (3.12) \quad \text{』}$$

である。

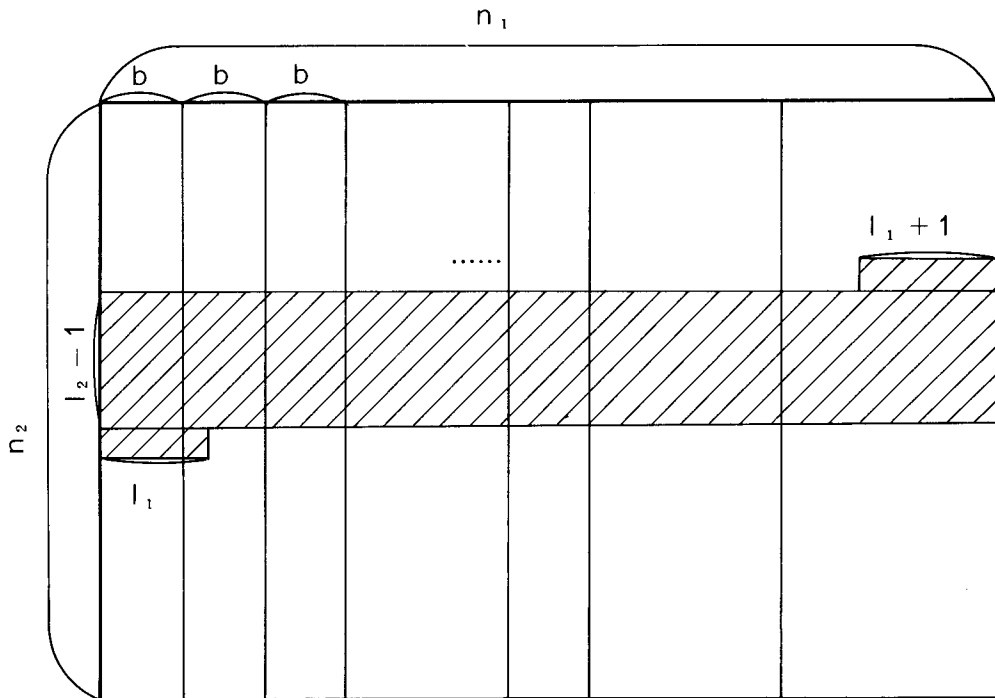


図 3 . 4 一般化積符号 X のバースト誤り訂正能力

(略証) :

一般化積符号 X は n_1 ビットの行単位に図の左から右へ, 上から下へと通信路へ伝送されるとする。

受信側では再び行単位で $n_1 \times n_2$ ビットの矩形の配置に構成される。今,

長さ $n_1 (\ell_2 - 1) + 2 \ell_1 + 1$ のバースト誤りが生起したと仮定する。
バースト誤りは $\ell_2 + 1$ 個の行以上へは影響を及ぼさない。 ℓ_2 個の行では符号 C_1 の復号が正しく行なわれない。しかし一番上または一番下の行ではせいぜいバースト誤りは長さ ℓ_1 であるので残りの一つの行では正しく復号が実行される。従って符号 C_1 の復号が終わったのちはバースト誤りによって ℓ_2 個の行が正しく復号されていない。

ℓ_2 個の行は符号 C_2 の復号によって正しく復号される。以上より一般化積符号 X のバースト誤り訂正能力は $n_1 (\ell_2 - 1) + 2 \ell_2 + 1$ となる。

(d) 他の符号との比較

表 3 . 1 に示す同一のパラメータのもとに一般化積符号 X , 積符号, 連接符号のパフォーマンスを比較する。

表 3 . 1 同じパラメータのもとでの一般化積符号 X , 積符号
連接符号の比較

	一般化 積符号 X	積符号	連接符号
ランダム 誤り 訂正能力	$\left[\frac{d_1 d_2 - 1}{2} \right]$	$\left[\frac{d_1 d_2 - 1}{2} \right]$	$\left[\frac{d_1 d_2 - 1}{2} \right]$
バースト 誤り 訂正能力	$n_1 (\ell_2 - 1) + 2 \ell_1 + 1$	$\max (n_1 \ell_2, n_2 \ell_1)$	$n_1 (\ell_2 - 1) + 2 \ell_1 + 1$
n が充分 大なる時の 符号の 漸近的 距離比	$\max \{ H^{-1}(1-R) \mid r < R < 1 \cdot (1-r/R) \}$	$\max \{ H^{-1}(1-R) \mid r < R < 1 \cdot H^{-1}(1-r/R) \}$	$\max \{ H^{-1}(1-R) \mid r < R < 1 \cdot (1-r/R) \}$ (56)

一般化積符号 X を積符号、連接符号と比較する。表 3.1 で n, d はそれぞれ符号長、最小距離を示すものとする。

積符号は 2 つの 2 元符号を組み合わせて構成される。符号 C_1 と符号 C_2 の符号長が充分大にとられた時、符号 C_1 と符号 C_2 が V G 限界式⁽⁵⁵⁾

(Varshamov-Gilbert Bound) を満足するように選ぶことができる。しかし符号 C_1 、符号 C_2 共に 2 元符号であるので最大距離分離可能符号 (Maximum distance separable codes) を用いることはできない。

連接符号は符号 C_1 、符号 C_2 に最適符号を選ぶようにすると、符号 C_1 は 2 元符号であるので V G 限界式を満足するように選ぶしかないが符号 C_2 は $GF(2^{k_1})$ 上の符号であり又パラメータである k_1 は符号長 n_1, n_2 が大きくなるにつれて大きくとることが可能であるので最大距離分離可能符号を選ぶことができる。

一般化積符号 X もパラメータが $n_2 \leq 2^b + 1$ を満足する限り、又パラメータ b は符号長 n_1, n_2 が大きくなるにつれて b も大きく取ることが可能であるので常に符号 C_2 に最大距離分離可能符号を選ぶことができる。

従って連接符号と一般化積符号 X は積符号より効率的であるといえよう。

次に連接符号と一般化積符号を比較する。連接符号は外部符号が $GF(2^{k_1})$ 上で定義されているので $GF(2^{k_1})$ 上の演算回路が必要である。一般化積符号 X は符号 C_2 は $GF(2^b)$ で定義されているので $GF(2^b)$ 上の演算回路が必要である。しかし $k_1 = f \times b$ から分かりますとおりその演算回路は連接符号の演算回路よりも複雑さの程度が著しくない。

3.3 PCM録音機への応用

3.3.1 誤りの特性

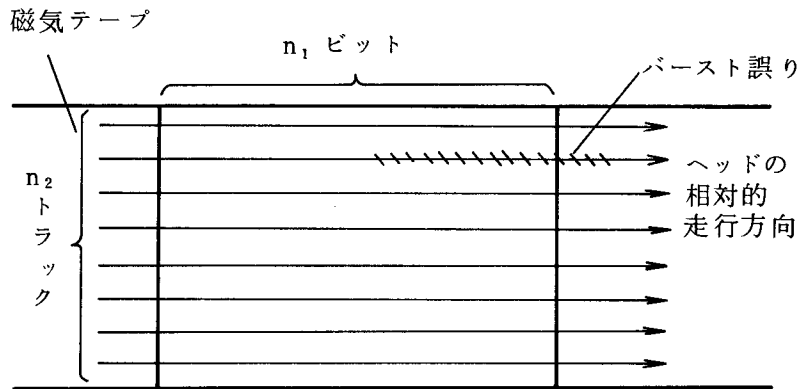


図3.5 テープ走行のバースト誤りと矩形の符号

マルチトラックの磁気テープを用いるPCM録音機には磁気テープ上のゴミ、傷などによりドロップアウトが生じ、これに起因する誤りが生起する。このような誤りに対しては図に示すようにテープのトラック数 n_2 とすると、テープの走行方向に n_1 ビットに区切った $n_2 \times n_1$ ビットの矩形の符号が適していると思われる。

3.3.2 積符号IPCと一般化積符号RSC⁽²³⁾

(a) IPC符号

① 符号構成

$GF(2)$ 上の線形 $(166, 150)$ CRC符号と $GF(2)$ 上の線形 $(4, 3)$ 偶数パリティ検査符号を組み合わせ、 4×166 ビットの積符号を構成する。その積符号の符号語(ブロック)を2個作成し1トラック毎に交錯を施し 8×166 ビットの区画を構成しIPC符号の符号語を図3.6のように得る。

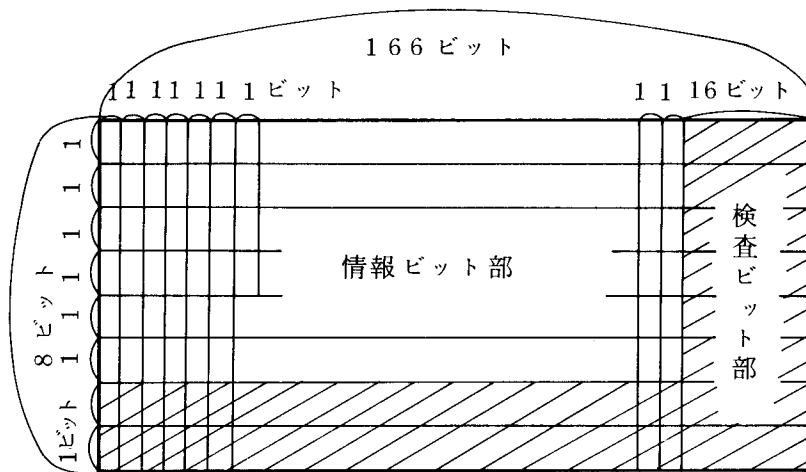


図 3 . 6 I P C 符号の符号パラメータ

② 復号化

復号化の方法としてはCRC符号の復号化によって得られた誤り検出情報を利用して各ブロック毎に1トラックの誤りを訂正する軟判定復号法を用いる。

再生された8x166ビットの区画は奇数番目の4トラックに分けられそれぞれ4x166ビットの矩形に配置される。各ブロックの中でトラック毎にCRCの復号が実行される。もし166ビット1トラック分がCRCで割り切れなかったら、そのトラックは誤りトラックとして扱われる。もしそのトラックがCRCで割り切れたら、そのトラックは正しいトラックは正しいトラックとして扱われる。CRCの復号の結果検出された誤りトラックの位置および数は消失の位置、消失の数として(4, 3)パリティ検査符号の復号の際利用される。消失の数がそのブロックにつき2以上の場合はパリティ検査符号による訂正動作は行わず検出だけにとどめておき前後の情報より内挿補正を行う。

③ 誤り訂正能力

IPC符号は2つの4x166ビットの積符号から構成されている。従って8トラック1区画の復号誤りによる異音が生起する事象を4トラック（ブロック）ごとに分割して考える。

(1) 4トラック1ブロックでの誤り訂正能力

U_B を1ブロック中実際テープ上で誤っているトラックの数とし、 S_B をCRCが誤りを検出したことによる消失の数、 e_B をCRCが誤りを検出なかったことによる誤りを見逃したトラックの数とする。そのときの復号動作結果は表3.2のようになる。

表3.2 IPC符号の1ブロックの
 s_B と e_B の値に対する復号
動作結果

u_B	s_B	e_B	復合動作結果
0	0	0	—
1	1	0	訂正
1	0	1	内挿補正
2	2	0	内挿補正
2	1	1	復号誤り
2	0	2	内挿補正
3	3	0	内挿補正
3	2	1	復号誤り
3	1	2	復号誤り
3	0	3	内挿補正
⋮	⋮	⋮	⋮

$s_B = 0$ ， $e_B \neq 0$ のときは166個の(4, 3)パリティ検査符号のシンドローム全体をみると誤りパターンが残っているにも拘わらず消失情報

が全く得られないので誤り見逃しが生起していることが検出され前後のデータより3トラック分の内挿補正がなされる。これは本来の復号法ではないが(4, 3)パリティ検査符号のシンδροームを1トラック分蓄積することにより可能となる。

(2) 8トラック1区画での誤り訂正能力

デ・インターリーブを施したあと1ブロック中1トラックの消失であれば訂正できるので隣接する2トラックまでの消失が訂正できる。更に隣接する2トラック以外でも2トラックおき、(例えば第1, 第4の2トラック), 4トラックおき(例えば第1, 第6の2トラック)に発生している2トラックの消失は訂正できる。

u , s , e をそれぞれテープ上の8トラック1区画で誤っているトラックの数, 消失の起こっているトラックの数, 見逃した誤りトラックの数とする。8トラック1区画の復号動作結果は表3.3に与えられるようになる。

表3.3 IPC符号の1符号語1区画の
 s と e の値に対する復号動作結果

u	s	e	2つのブロックの組合せ ($u_B \ s_B \ e_B$) ($u_B \ s_B \ e_B$)	復号動作結果
0	0	0	(0, 0, 0), (0, 0, 0)	—
1	1	0	(1, 1, 0), (0, 0, 0)	訂 正
1	0	1	(1, 0, 1), (0, 0, 0)	内 挿 補 正
2	2	0	(1, 1, 0), (1, 1, 0)	訂 正
			(2, 2, 0), (0, 0, 0)	内 挿 補 正
2	1	1	(1, 1, 0), (1, 0, 1)	内 挿 補 正
			(2, 1, 1), (0, 0, 0)	復 号 誤 り
2	0	2	(1, 0, 1), (1, 0, 1)	内 挿 補 正
			(2, 0, 2), (0, 0, 0)	

表 3 . 3 の続き

u	s	e	2つのブロックの組合せ (u_B u_B u_B) (u_B u_B u_B)	復号動作結果
3	3	0	(3 , 3 , 0) , (0 , 0 , 0)	内 挿 補 正
			(2 , 2 , 0) , (1 , 1 , 0)	
3	2	1	(3 , 2 , 1) , (0 , 0 , 0)	復 号 誤 り
			(2 , 1 , 1) , (1 , 1 , 0)	
			(2 , 2 , 0) , (1 , 0 , 1)	内 挿 補 正
3	1	2	(3 , 1 , 2) , (0 , 0 , 0)	復 号 誤 り
			(2 , 1 , 1) , (1 , 0 , 1)	
			(2 , 0 , 2) , (1 , 1 , 0)	内 挿 補 正
3	0	3	(3 , 0 , 3) , (0 , 0 , 0)	内 挿 補 正
			(2 , 0 , 2) , (1 , 0 , 1)	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

多くのトラック（例えば3トラック以上）に内挿補正を行う結果となった場合、無音置換やミューティング⁽⁵³⁾などの手段をとることがある。ここではそのような状態を含め訂正しきれず次善の手段にまかせる場合すべてを広義に内挿補正と呼ぶことにする。

(b) R S C 符号

① 符号構成

テープの走行の166ビット毎にテープの巾方向に区切り8x166ビットの一区画の符号語を構成する。6x150ビットの情報ビットを6x3ビット毎に50個の矩形に区切り、各6x3ビットの矩形をR S 符号化アルゴリズムに従って8x3ビットの矩形に符号化する。この操作を50回繰り返した後8x150ビットの矩形を作る。次にテープの走行方向の150ビットをC R C 符号の符号化アルゴリズムに従い166ビットに符号化する。これを8回繰り返して一般化積符号の符号語を得る。

この符号をR S C (Reed-Solomon and CRC code) 符号と呼ぶ。

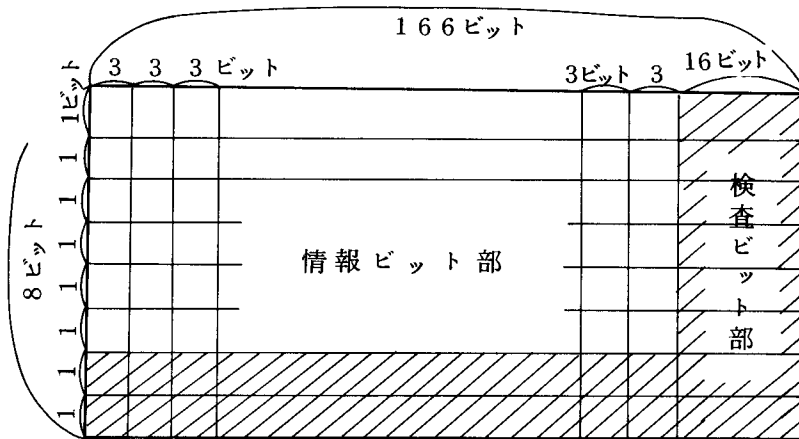


図 3 . 7 R S C 符号の符号パラメータ

② 復号化

復号化の方法としてはCRC符号の復号化によって得られた誤り検出情報をリード・ソロモン符号の復号化に消失として用いる軟判定復号法を用いる。⁽¹²⁾

③ 誤り訂正能力

u , s , e をIPC符号の8トラック1区画の場合と同様に定義する。その時のsとeの各々の値に対するリード・ソロモン符号の復号動作結果は表3.4のようになる。

表 3 . 4 R S C 符号の 1 符号語 1 区画
の s と e の値に対する復号動
作結果

u	s	e	復号動作結果
0	0	0	—
1	1	0	訂 正
1	0	1	訂 正
2	2	0	訂 正
2	1	1	内 挿 補 正
2	0	2	復 号 誤 り
3	3	0	内 挿 補 正
3	2 以下	u-s	復 号 誤 り
⋮			⋮
u	u	0	内 挿 補 正
u	u-1 以下	u-s	復 号 誤 り
⋮	⋮		⋮

3 . 3 . 3 復号パフォーマンス

(a) 1トラックの誤り検出確率および誤り見逃し確率

定量的に I P C 符号, R S C 符号の訂正能力を調べるため数値解析を行
う。

C R C の誤り検出能力は次のとおりである。

- (1) 2 ビットのランダム誤りおよび奇数誤りは確率 1 で検出する。
- (2) 長さ 1 6 以下のバースト誤りは確率 1 で検出する。
- (3) 長さ 1 7 のバースト誤りは確率 $1 - 2^{-15}$ で検出する。
- (4) 長さ 1 8 以上のバースト誤りは確率 $1 - 2^{-16}$ で検出する。

1トラックの誤り見逃し確率 P_m は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 P_m &= 2^{-16} E \sum_{b=18}^{166} \sum_{i=2}^b P_D(i, b, 166) \\
 &\quad + 2^{-15} \sum_{i=2}^{17} P_D(i, 17, 166) \\
 &= 2^{-16} \left[\sum_{b=17}^{166} \sum_{i=2}^b P_D(i, b, 166) + \sum_{i=2}^{17} P_D(i, 17, 166) \right] \\
 &\quad \dots (3.13)
 \end{aligned}$$

$P_D(\ell, m, n)$ は n ビット中長さ m ビットの単一集中形バースト誤りを生じ、誤りビット数が ℓ である確率である ($2 \leq \ell \leq m \leq n$)。

1トラックの誤り検出確率 P_D は次式で与えられる。

$$P_D = 1 - P_c - P_m \quad (3.14)$$

ここで P_c は n ビット中誤りなしの確率で $P(0^n)$ として求められている。

(b) I P C 符号の補正音および異音の生起確率

トラック間に誤りの相関は無いものとする。8トラック1区画(1符号語)の復号誤りによる異音の生起する確率(以後単に異音の生起確率とよぶ)および内挿補正音の生起する確率(以後単に補正音の生起確率とよぶ)は1トラックの誤り検出確率 P_d と誤り見逃し確率 P_m より求められる。8トラック(区画)の事象を4トラックの事象(ブロック)で表現することを考える。なお、2つのブロックに対応するトラックの誤り発生状態は同一とする。

(1) 4トラック1ブロックの確率

s_B と e_B の値に従ってブロックの事象を場合わけした結果が表3.2に示されている。それに基づいてブロックが正しく復号される確率、内挿補正となる確率、復号誤りとなる確率は次のようになる。

- ① 1 ブロックが正しく復号される確率 P_{BC} は

$$P_{BC} = P_C^4 + 4 \cdot P_d \cdot P_C^3 \quad (3.15)$$

- ② 1 ブロック中内挿補正となる確率 P_{BI} は

$$P_{BI} = \sum_{i=2}^4 C_i \cdot P_d^i \cdot P_C^{4-i} + \{ (P_c + P_m)^4 - P_c^4 \} \quad (3.16)$$

- ③ 1 ブロック中誤り見逃しがある。又は復号誤りが生起する確率 P_{BE} は

$$P_{BE} = \sum_{i=1}^3 C_i \cdot P_d^i \{ (P_c + P_m)^{4-i} - P_C^{4-i} \} \quad (3.17)$$

となる。

(2) IPC 符号

表 3.2 を用いて s , e の値に従って場合わけを行った結果が表 3.3 に示されている。8トラック1区画に対する確率が以下に与えられる。

- ① 正しく復号される確率 $P_{C(IPC)}$ は

$$P_{C(IPC)} = P_{BC}^2 \quad (3.18)$$

- ② 補正音の生起確率 $P_{I(IPC)}$ は

$$P_{I(IPC)} = 2 \cdot P_{BI} \cdot P_{BC} + P_{BI}^2 \quad (3.19)$$

- ③ 異音の生起確率 $P_{E(IPC)}$ は

$$P_{E(IPC)} = 2 \cdot P_{BE} - P_{BE}^2 \quad (3.20)$$

となる。

(c) RSC 符号の補正音および異音の生起確率

8トラック1区画(1符号語)の異音の生起確率, 補正音の生起確率は1トラックの誤り検出確率 P_d , 誤り見逃し確率 P_m より求められる。

表 3.4 を用いて s , e の値に従い場合わけを行い1符号語に対する確率が以下に与えられる。

① 正しく復号される確率 $P_{C(RSC)}$ は

$$P_{C(RSC)} = P_C^8 + 8 \cdot P_m \cdot P_C^7 + 8 \cdot P_d \cdot P_C^7 + {}_8C_2 \cdot P_d^2 \cdot P_C^6 \quad (3.21)$$

② 補正音の生起確率 $P_{I(RSC)}$ は

$$P_{I(RSC)} = 8 \cdot P_d \cdot 7 \cdot P_m \cdot P_C + \sum_{i=3}^8 {}_8C_i \cdot P_d \cdot P_C^{8-i} \quad (3.22)$$

③ 異音の生起確率 $P_{E(RSC)}$ は

$$P_{E(RSC)} = \sum_{i=2}^8 {}_8C_i \cdot P_m^i \cdot P_C^{8-i} + 8 \cdot P_d \cdot \left\{ \sum_{i=2}^7 {}_7C_i \cdot P_m^i \cdot P_C^{7-i} \right\} + {}_8C_2 \cdot P_d^2 \cdot \sum_{i=1}^6 {}_6C_i \cdot P_m^i \cdot P_C^{6-i} + \sum_{i=3}^8 {}_8C_i \cdot P_d^i \cdot \{ (P_m + P_C)^{8-i} - P_C^{8-i} \}$$

となる。 (3.23)

(d) シミュレーション

I P C 符号, R S C 符号の能力評価のため数値解析と並行してシミュレーションを行った。即ち誤り発生モデルは共通である。同プログラムはミニコンピュータ PDP-11/20 のアセンブラー言語で作られている。誤りを発生させ、それを入力として復号器の動作を模擬し、統計量を出力する。

① 1トラックの誤り発生モデル

数値解析では誤り発生モデルにギルバートのモデルを仮定した。シミュレーションでは計算機の演算時間の都合上、バーストの連の分布および誤りなしの連の分布を指数分布で近似している。⁽¹⁾バースト誤り事象のなかには P N 系列で埋められている。⁽¹⁾

② 1区画の誤り発生モデル

トラック間の誤りに相関は無いものとする。各トラックのバーストの

連および誤りなしの連を発生させる乱数の初期値は異っており、それによってバースト長および誤りなしの連の発生は他トラックの誤り事象に無関係となる。

③ 結果と考察

図 3 . 9 , 図 3 . 1 0 に平均ビット誤り率 $P_e = 10^{-4}$ のときに, 平均バースト長に対する補正音および異音の生起確率の数値解析結果およびシミュレーション結果を I P C 符号と R S C 符号について図示する。

平均バースト長 1 0 0 ビット, 平均誤り率 10^{-4} の誤り発生状態では I P C 符号の補正音の生起確率の R S C 符号のそれに比する比 $\delta_I = P_{I(IPC)} / P_{I(RSC)}$ は 4 0 0 , I P C 符号の異音の生起確率の R S C 符号のそれに対する比 $\delta_E = P_{E(IPC)} / P_{E(RSC)}$ は 2 7 0 であることが分かる。いずれの誤り発生状態においても R S C 符号の補正音および異音の発生確率は I P C 符号のそれらより少ないことが分かる。

又, 補正音および異音の平均発生時間間隔であらわした数値解析結果およびシミュレーション結果が表 3 . 5 に示される。シミュレーション結果は数値解析結果とよく一致している。

I P C 符号を用いた場合 $P_e = 10^{-4}$, $\bar{B} = 100$ ビットの誤り発生状態で補正音は平均 3 分に一回, 異音は 8 3 日に一回の割合で発生する。第 1 0 世代までのテープのダビングを考えると補正音の発生頻度の限界は 3 0 分に一回, 復号誤りによる異音の発生頻度の限界は 1 0 箇月に一回位である。従って表 3.5 の 1 0 の場合では I P C 符号を用いる時平均バースト長 $\bar{B} = 100$ ビット, 平均ビット誤り率 $P_e = 10^{-5} \sim 10^{-6}$ の時だけ使用可能である。R S C 符号を用いる時は $P_e = 10^{-3}$ の 3 つの場合を除いたすべての場合について使用可能である。

結論として R S C 符号の方が I P C 符号より表 3 . 5 のすべての誤り発生状態に対して優れていることが明らかになった。

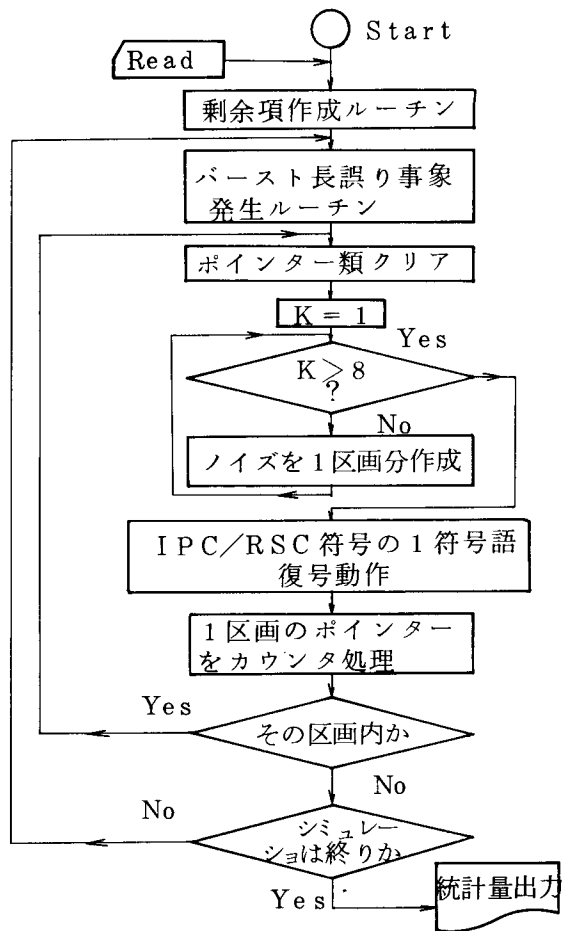


図 3 . 8 シミュレーションプログラムフローチャート

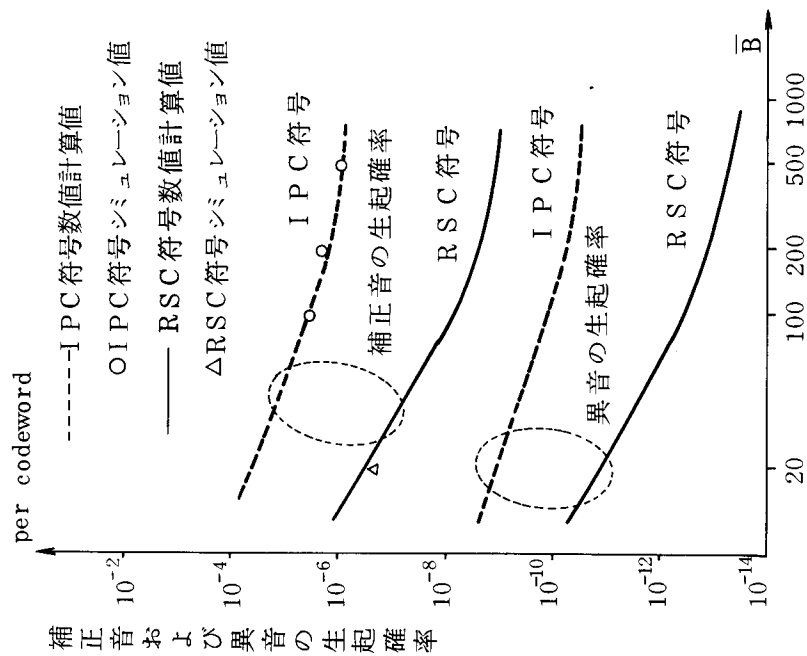


図3.9 平均バースト長 $\bar{B}$ に対する補正音および異音の生起確率

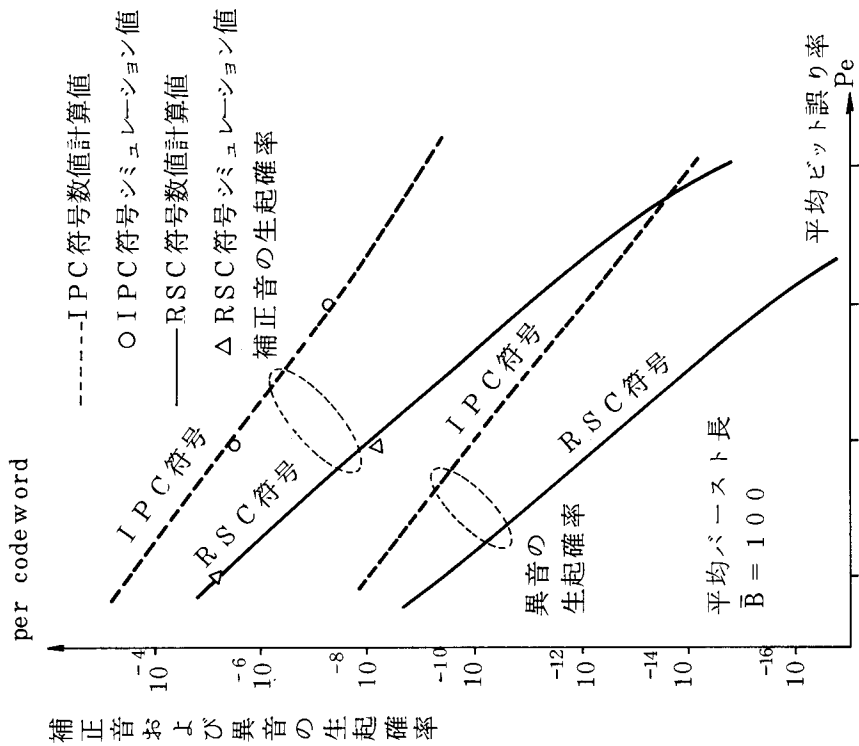


図3.10 平均ビット誤り率 P_e に対する補正音および異音の生起確率

表 3.5 平均バースト長および平均ビット誤り率に

対する補正音および異音の平均発生時間間隔

Case	平均バースト長 B	平均ビット誤り率 Pe	補正音の平均発生時間間隔			異音の平均発生時間間隔		
			IPC符号		RSC符号	IPC符号		RSC符号
			数値計算	シミュレーション		数値計算	シミュレーション	
1	1000	10^{-4}	17分		11日	1.1年		68×10^2 年
2	500	10^{-4}	13分	12分	7.1日	310日		4.5×10^2 年
3	200	10^{-4}	70分	5.2分	28日	170日		1.8×10^2 年
4	100	10^{-4}	34分	2.9分	23時間	83日		62年
5	20	10^{-4}	18秒		38分	1時間**	8.7日	1.9年
6	20	10^{-3}	0.19秒		2.5秒	3.4秒	2.2時間	18時間
7	100	10^{-3}	2.1秒		1.4分	1.5分	20時間	23日
8	200	10^{-3}	4.3秒		4.3分	4.1分	1.7日	67日
9	100	10^{-5}	4.9時間	4.1時間**	2.1年	23年		5.9×10^4 年
10	100	10^{-6}	8.4日		7.2×10^2 年	7.2×10^3 年		4.3×10^7 年

**統計量が少いたため濃密な値でない。

..... 1時間演算に対し、統計量0であった。

今後の問題としては、トラック間に誤りの相関があるモデルも検討していかなければならない。又、ヘッドの目づまりも問題となっている。このヘッドの目づまりの問題もモデル化を検討する必要がある。定量的な比較検討は今後の課題であるが定性的にはR S C符号はこの問題にも対処しうることが予想される。

3.4 結言

2次元構造をもつ新しい符号構成法を示し、この構成法によって構成された符号を一般化積符号と名付け、その特長を明らかにした。

構成された符号は連接符号と積符号のちょうど中間的な符号構造をもち、両者の特長を有しつつ、ハードウェア量が少ない特長がある。

この一般化積符号Xは2次元配置の一方の方向にバースト誤りが生起する場合、特に有効でありマルチチャンネルのPCM録音機に特に良く適合することが明らかになった。

現在、全世界の放送局、レコードスタジオでこのタイプのPCM録音機が2チャンネル用400台、32チャンネル用100台、稼動中である。



写真 一般化積符号を用いたPCM録音機

第4章 重畳符号を応用した多重符号の構成法

4.1 序 言

積符号あるいは接続符号は単純な構造の符号を組み合わせてより能率の良い符号を得るという概念に基づいて構成されているが、符号比率に関しては必ずしも優れていない。符号比率を改善する有力な手法の一つとして重畳符号化法⁽⁴¹⁾⁽⁴²⁾⁽⁵²⁾が知られている。重畳符号の符号化あるいは復号化の順序を適宜修正し更に交錯の手法を応用した"直交化"を施すことにより、積符号のいわゆるチェックオンチェック部分においても重畳符号化を可能にし、より多くの情報シンボルを符号の能力を落とさずに符号化し得る構成法(方法Ⅰ)を提案する。

更に重畳符号を用いて元の符号の検査シンボルをその最小距離を全く減少させることなく除去しうる符号構成法(方法Ⅱ)を提案する。⁽³⁵⁾⁽³⁹⁾ この手法により従来方法と比べ同一数の情報シンボルを同一のパフォーマンスのもとに高い符号比率で符号化することが可能である。又これらの手法によって構成された符号でV G限界式を満足するパラメータが存在することを明らかにする。

最後にこれらの符号構成法を畳み込み符号に応用し従来得られなかった新しいパラメータの畳み込み符号の符号構成法を示す。⁽³⁶⁾

4.2 接続符号⁽¹²⁾に応用した符号構成法

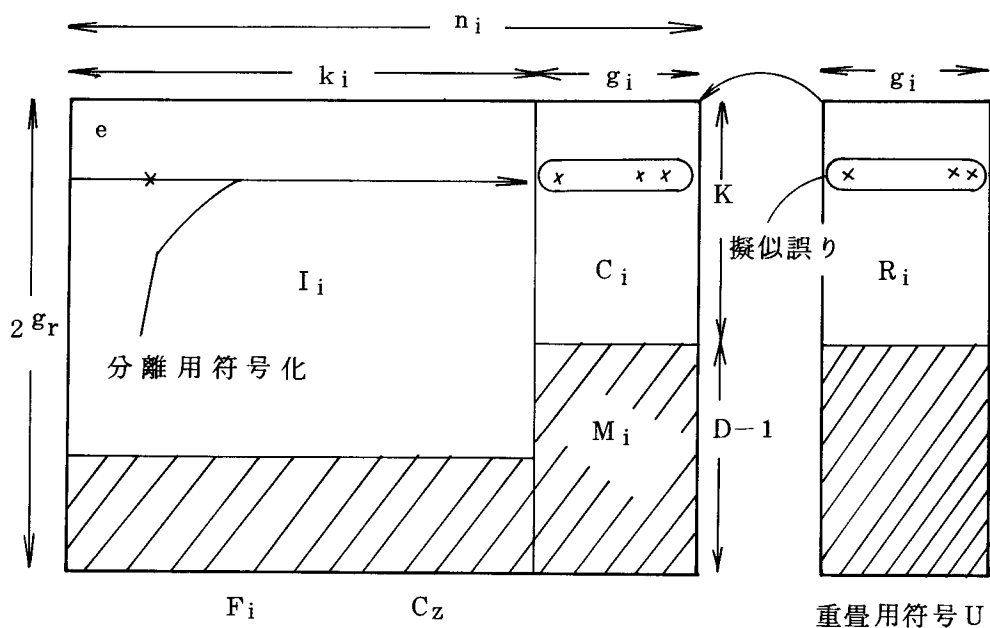


図 4.1 符号 C_Z の符号語

本論文では先に提案された接続符号への適用法⁽⁴¹⁾を改良し、より多くの情報シンボルを符号の能力を落さずに送信し得るような符号構成法(方法Ⅰ)を提案する。

更に重畳符号を適用する際元の符号の検査シンボルの一部を最小距離を全く減少させることなく除去しうる符号構成法(方法Ⅱ)を提案する。この手法により従来方法と比べ同一数の情報シンボルを同一のパフォーマンスのもとにより高い符号比率で符号化することが可能である。又、この手法により符号のフォーマットの中の一部をより高い信頼度で送受信できることを示す。

接続符号 C_0 の内部符号の検査シンボル C_i に $GF(2^{g_i})$ ($g_i = n_i - k_i$) RS 符号 U を重畳化する。但し、通常行なわれているように 2^{g_i} は符号長、 K は情報シンボル数、 D は最小距離を意味するものとする。

行方向の (n_i, k_i, g_i) 符号を内部符号 C_i と呼ぶ。 n_i は内部符号語の符号

長、 k_1 は内部符号語の情報シンボル数、 d_1 は内部符号 C_1 の最小距離である。内部符号化した内部符号語の受信語を内部受信語とよぶ。内部符号語は内部情報シンボル系列と内部検査シンボル系列とからなる。 2^{g_1} 個の内部検査シンボル系列からなる $2^{g_1} \times (n - k)$ の内部検査シンボルを内部検査シンボル部分と呼ぶ。

ここで新たに他の符号が元の符号の上に重畳される場合元の符号を基礎符号と呼び、又、新たに重畳する符号を重畳用符号とよぶ。重畳化とは重畳用符号を基礎符号の検査シンボル部分に法2で加算することをいい、重畳用符号化とは基礎符号以外の情報を符号化して重畳用符号を構成することをいう。

符号 U の i 番目のシンボルを $R_i = (R_{i_1}, R_{i_2}, \dots, R_{i_{g_1}})$ と表す。

M_i を次のように定義する。

$$\begin{aligned} M_i &= C_i + R_i \\ &= (C_{i_1} \oplus R_{i_1}, C_{i_2} \oplus R_{i_2}, \dots, C_{i_{g_1}} \oplus R_{i_{g_1}}) \quad (4.1) \end{aligned}$$

但し $\oplus$ は法2の加算である。 F_i を次のように定義する。

$$F_i = (l_i, M_i) \quad \dots (4.2)$$

このようにして構成された符号語はベクトル $(F_1, F_2, \dots, F_N)$ で表される(但し $N = 2^{g_1}$ である)。

なお構成された符号を以下では符号 C_z と呼ぶことにする。

『定理4.1(笠原, 杉山, 平沢, 滑川)⁽⁴¹⁾ : 連接符号 C_o が t 個までの誤りを訂正する時、そして重畳用符号 U の最小距離 D が

$$t = \lfloor (D - 1) / 2 \rfloor \quad \dots (4.3)$$

を満足する時、符号 C_z は t 重ランダム誤りを訂正しうる。』

(証明略)。

ここで復号化に必要な最小限の説明を図4.1を用いておこなう。即ち、復号側で基礎符号と重畳符号のそれぞれに対応する受信語を分離するため基礎符号の受信情報シンボル系列を再び"符号化"することを分離用符号化と呼ぶ。分離

用符号化して内部検査シンボルを再生することを内部検査再生と呼び、受信語に法 2 加算して重畳受信語を分離することを重畳分離と称する。このようにして重畳分離の際、基礎符号の情報シンボル部分に生起した誤りによって、新たに重畳用受信語に付加される誤り（実はシンδροームに一致する）をここでは擬似誤りと呼ぶ。

〔補題 4.1〕：内部符号語の重みを w_e とすると、情報シンボル系列の重み w_i の誤りは検査シンボル系列では少なくとも $d_i - w_e$ の擬似誤りを生起させる。（証明略）。

4.3 方法 I

4.3.1 擬似誤り I と擬似誤り II

積符号に重畳符号化法を適用する場合、積符号の行符号 C_r ，または列符号 C_c 何れか一方の検査シンボル部分に重畳させる場合は接続符号と全く同様の重畳化が可能である。行符号 C_r ，列符号 C_c を各々 (n_r, k_r, d_r) ， (n_c, k_c, d_c) 線形符号とする。又、各々の受信語を C_r 受信語， C_c 受信語と呼び各々行符号，列符号の復号を C_r 復号， C_c 復号と呼ぶ。

行符号 C_r の検査シンボル部分に重畳用符号 U_y を又符号 C_c の検査シンボル部分に重畳用符号 U_x を重畳化する場合、従来の方法ではチェックオンチェック部分に重畳した情報シンボル（または検査シンボル）を重畳分離する際、行符号および列符号の両者に基づく擬似誤りが生起してしまう。図 4.2 に復号側の U_x 受信語および U_y 受信語の重畳分離過程を示す。

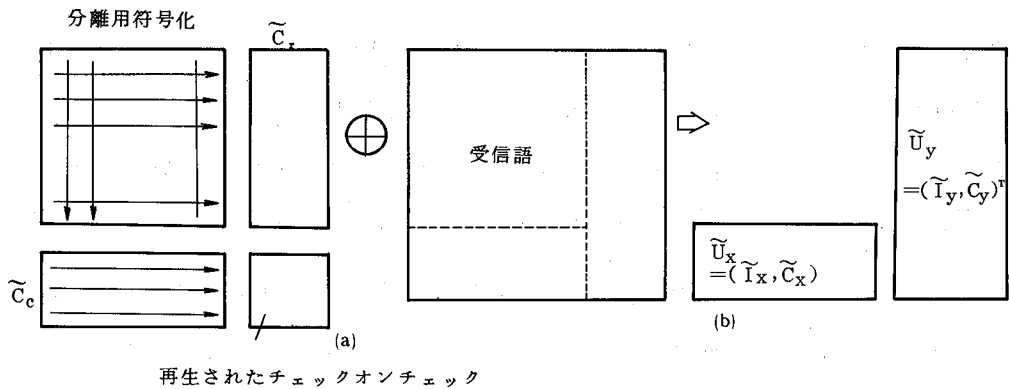


図 4.2 重畳受信語 $\tilde{U}_x$ と $\tilde{U}_y$ の再生

図 4.3 に示す誤り E_i が積符号の符号語 C_p の情報シンボル部分に生起しているとしよう。図の右下のチェックオンチェックの部分には行符号 C_r のチェックシンボル部分 C_i にも列符号 C_c の検査シンボル部分 C_j にも符号を重畳しているの
で元の符号 C_p のチェックオンチェック部分を k_x, k_r シンボルの情報部分より 2 ステップで内部検査再生する。即ち、列符号の分離用符号化による擬似誤り I が生起した場合、更に行符号 C_r により分離用符号化された多数の擬似誤り II がチェックオンチェック部分に生起する可能性がある。このことはチェックオンチェック部分に重畳化を施すことは必ずしも好ましくないことを意味する。⁺

+) 復号側でチェックオンチェック部分を含まない重畳用符号 U_x を先に重畳分離し、 U_x 受信語を復号後、復号した U_x 符号語よりチェックオンチェック部分を内部検査再生すれば、 U_y 受信語に擬似誤りが集中しない。これは提案方式に相当する操作を復号側で行ったことに該当する。

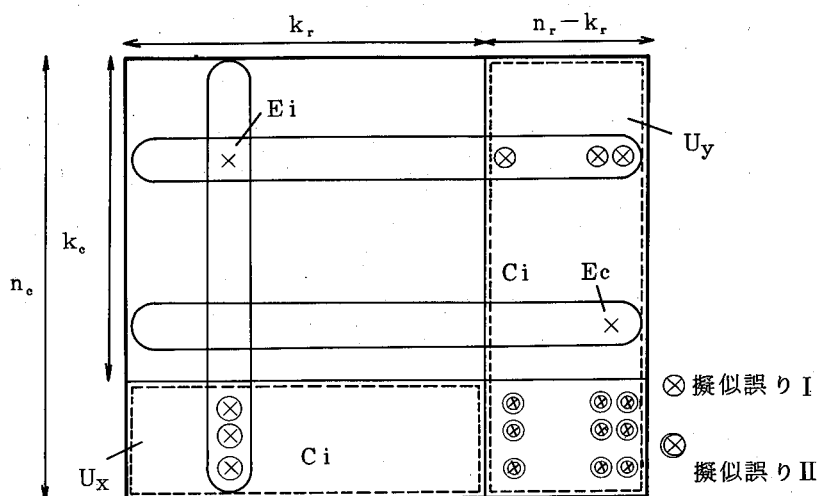


図 4.3 チェックオンチェック部の再生

4.3.2 符号化アルゴリズム

- (ステップ1) : 情報シンボルを $k_c \times k_r$ のアレイに構成する。
- (ステップ2) : k_r 個の列符号 C_c の符号化を行い各列に $n_c - k_c$ 個の検査シンボルを付加し $n_c \times k_r$ のアレイを構成する。
- (ステップ3) : $g_c \times (k_r - d_c \cdot d_r + 1)$ シンボルの情報 I_2 を $GF(2^{g_r})$ 上の $(k_r, k_r - d_c \cdot d_r + 1, d_c \cdot d_r)$ RS 符号に符号化して重畳用符号 U_x を構成する。
- (ステップ4) : 列符号 C_c の検査シンボル部分に重畳用符号 U_x を法 2 で加算する。これにより全体で $n_c \times k_r$ のアレイを構成する。
- (ステップ5) : n_c 個の行符号 c_r の符号化を行い、各行に $n_r - k_r$ 個の検査シンボルを付加し $n_r \times n_r$ のアレイを構成する。
- (ステップ6) : $k_u (= n_c - d_c \cdot d_r + 1) \times g_r (= n_r - k_r)$ シンボルの情報 I_3 を $GF(2^{g_r})$ 上の $(n_c, k_u, d_c \cdot d_r)$ RS 符号に符号化して重畳用符号 U_y を構成する。

(ステップ7)：行符号 C_r の検査シンボル部分に重畳用符号 u_y を法2で加算する。これにより全体で $n_e \times n_r$ の符号語を構成する。

元の積符号 C_p の訂正能力を保つには符号 U_x ，符号 U_y はそれぞれ最小距離 $d_e \cdot d_r$ を持つことが必要である。なお以下の議論では $d = d_e = d_r$ とおく。このようにして構成された符号に $b = 8$ ， $d = 2 \sim 10$ と変化させた時の符号比率の変化を図4.4に示す。

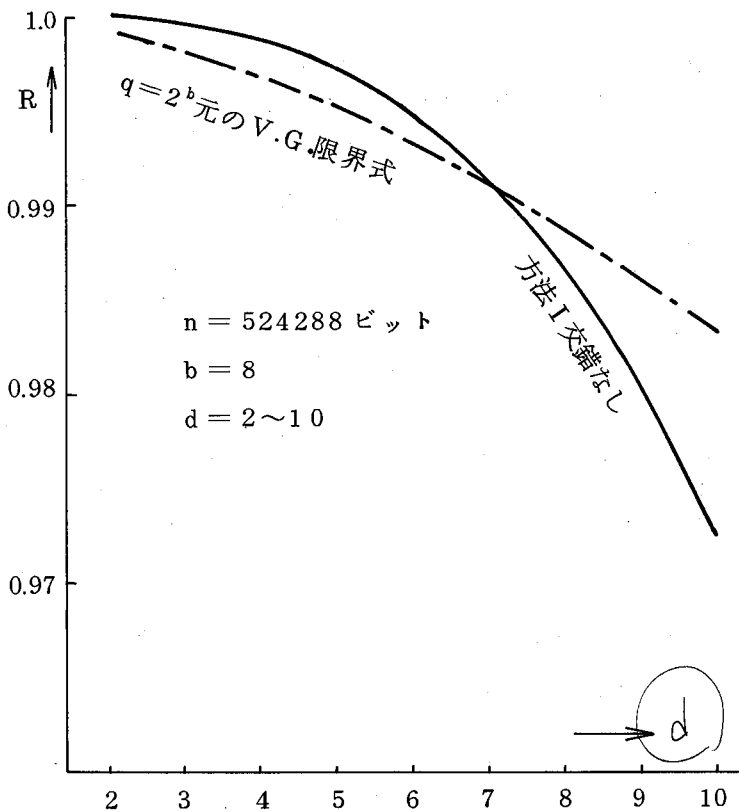


図4.4 方法Iで構成した符号の符号比率とVG境界の比較

$d = 2 \sim 7$ でVG境界式を満足する。なおこの符号を2元の符号とみた時の符号長は $n = 2^{20} \times b$ となり $d = 2$ ， $b \geq 3$ の時，VG境界式を満足する。

符号比率 R は極めて1に近く対応するBCH符号もVG境界式を満足している。

4.3.3 直交化交錯法

符号化アルゴリズム I を用いて符号化を行う場合、ステップ 3 で重畳用符号化している符号 U_x の符号化方向と行符号化を行う C_r 符号化方向が一致しているため、符号 U_x と行符号 C_r を重畳分離する際、 C_r 復号時に復号誤りが生起すると、それに起因する擬似誤りが U_x 受信語に多数生起して訂正不能となる。従って、符号 U_x の最小距離を d にするには C_r 符号語と U_y 受信語が互いに 1 シンボルしか含まないように交錯を施し擬似誤りを分離して訂正を行う必要がある。

符号 U_y と符号 C_c を重畳分離する際も同様に擬似誤りを分離させるため互いに 1 シンボルしか含まないように交錯を施す。更に、符号 U_x にも交錯法を用いて符号 U_x 、 C_r 、 C_c 共に互いに直交⁺させれば最小距離 d の符号のみを用いて元の基礎符号の有する d^2 の最小距離を保つことができる。この条件を満足するよう交錯を施すには 3 つの符号を同時に直交化させねばならないので 2 次元の符号構成では実現できない。従って図 4.5 に示すような符号語を 3 次元アドレスに配置する。この交錯法を直交化交錯法と呼ぶ。

+) 本論文では 2 つの符号語が互いに 1 シンボルしか共有しないとき直交していると称する。

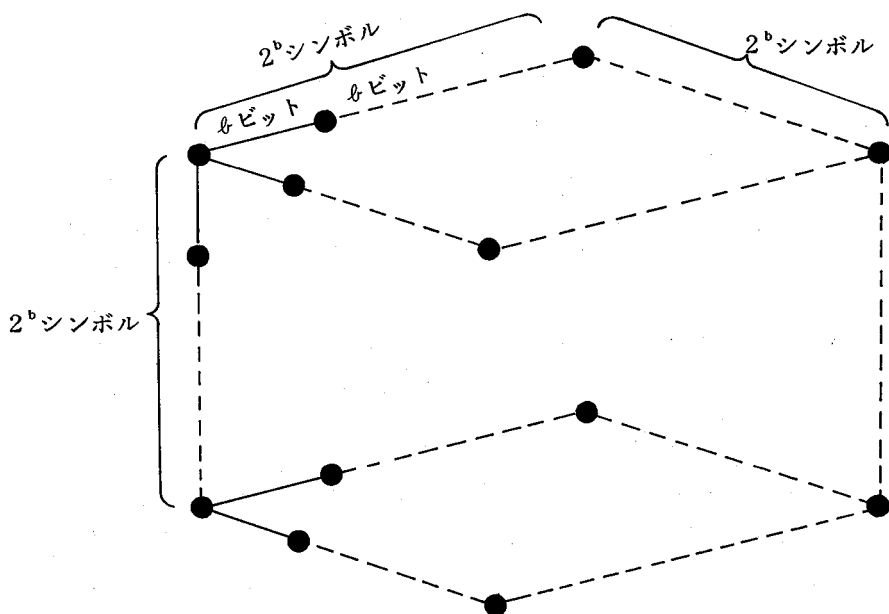


図 4.5 直交化交錯法を施した符号語の構成

以下に符号化アルゴリズム I を用いて符号 C_x, C_y, U_x, U_y のいずれも最小距離 d の符号を用いて全体の最小距離が d^2 であるような符号を構成しよう。なお、符号 C_x, C_y, U_x, U_y は $GF(2^b)$ 上の $(2^b, 2^b-d+1, d)$ RS 符号とする。

<符号化アルゴリズム II>

(ステップ I) : 図 4.6 (a) のように $(2^b-d+1) \times (2^b-d+1) \times 2^b$ シンボルの情報 I_1 を 3 次元アレイに構成する。

(ステップ II) : x 軸方向に C_c 符号化して $2^b \times (2^b-d+1) \times 2^b$ シンボルの 3 次元アレイ を構成する。

(ステップ III) : 一方、同図 (b) に示すように $(d-1) \times (2^b-d+1) \times (2^b-d+1)$ シンボルの情報 I_2 を z 軸方向に U_x 符号化して $(d-1) \times (2^b-d+1) \times 2^b$ シンボルの 3 次元アレイ に構成する。

(ステップⅣ) : 同図(c)に示すように3次元アレイの U_x 符号語をステップⅡで得られた3次元アレイの C_c 符号語の検査シンボル部分に重畳化する。

$2^b \times (2^b - d + 1) \times 2^b$ シンボルの3次元アレイを構成する。

(ステップⅤ) : 同図(d)に示すようにステップⅣで得られた3次元アレイを y 軸方向に C_r 符号化して $2^b \times 2^b \times 2^b$ シンボルの3次元アレイを構成する。

(ステップⅥ) : 同図(e)に示すように $(2^b - d + 1) \times (d - 1) \times (2^b - d + 1)$ シンボルの情報 I_s を x 軸方向に C_c 符号化して $2^b \times (d - 1) \times (2^b - d + 1)$ シンボルの3次元アレイを構成する。

(ステップⅦ) : 同図(e)に示す3次元アレイの C_c 符号語を z 軸方向に U_y 符号化して $2^b \times (d - 1) \times 2^b$ シンボルの3次元アレイを構成する。

(ステップⅧ) : 同図(f)に示す3次元アレイの U_y 符号語を同図(d)に示す符号語の C_r 検査シンボル部分に重畳化して同図(g)に示す $2^b \times 2^b \times 2^b$ シンボルの符号語を完成する。

即ち、符号 U_y は重畳化する前にすでに符号 U_y と直交する方向に C_c 符号化が行なわれ符号 C_c と符号 U_y はこの段階で2次元符号化されている。このようにして部分符号 C_r, C_c, U_y, U_x は最小距離が同一の d であるにもかかわらず全体の最小距離 d^2 の符号語が構成可能である。

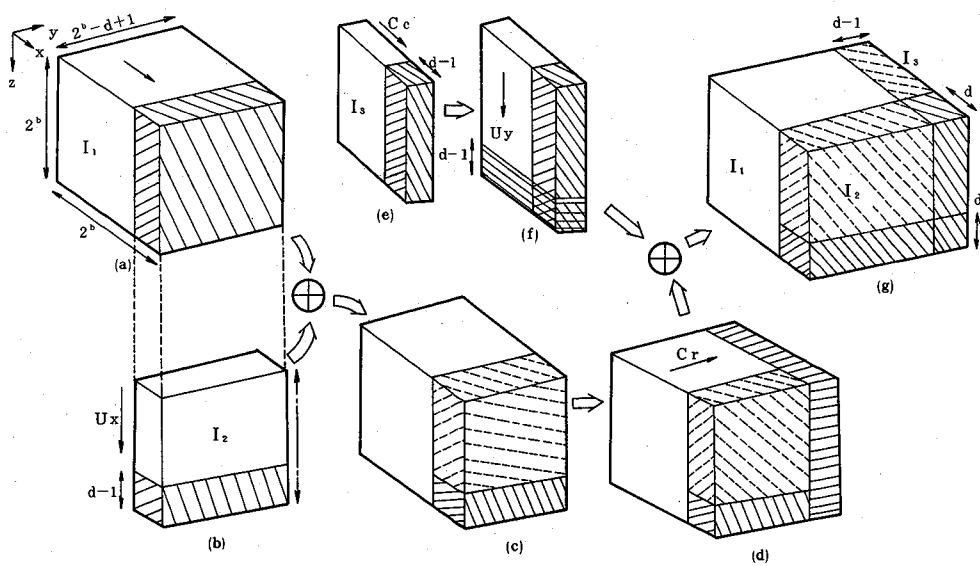
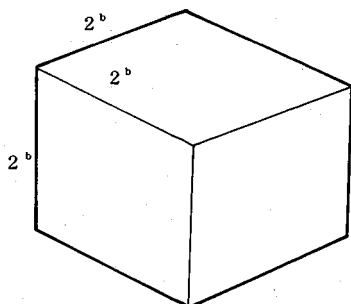


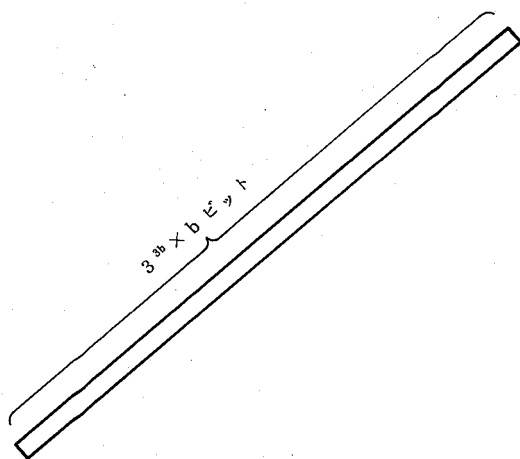
図 4.6 直交化交錯法

4.3.4 他の符号との比較

3次元構造を1次元で等価な長さのBCH符号と比べると直交化交錯法は 2^b 倍符号長が長くなっているため直接比較するとかなり不利となる。



直交化交錯法



長大な1つの符号語

図4.7 長大な符号との比較

しかしこの符号は元来 $2^{3b} \times b$ ビット前後の符号長の特性の良い符号を用いるとすれば結果は良好なのは明らかであるがこのような長大な符号でしかも d^2 の最小距離の復号器を設計することは困難となる。

最小距離 d^2 の符号で非常に符号長の大なる符号を構成する場合，対応するガロア体の元の数は大なるものとなり，演算回路のハードウェア量は膨大なものとなる。
(44)(45)

従ってより実用的な選択の場合としては $2^b \times 2^b \times b$ ビット程度の最小距離 d^2 の符号を繰り返して伝送しよう。その場合の符号と直交化交錯法による符号を比較する。

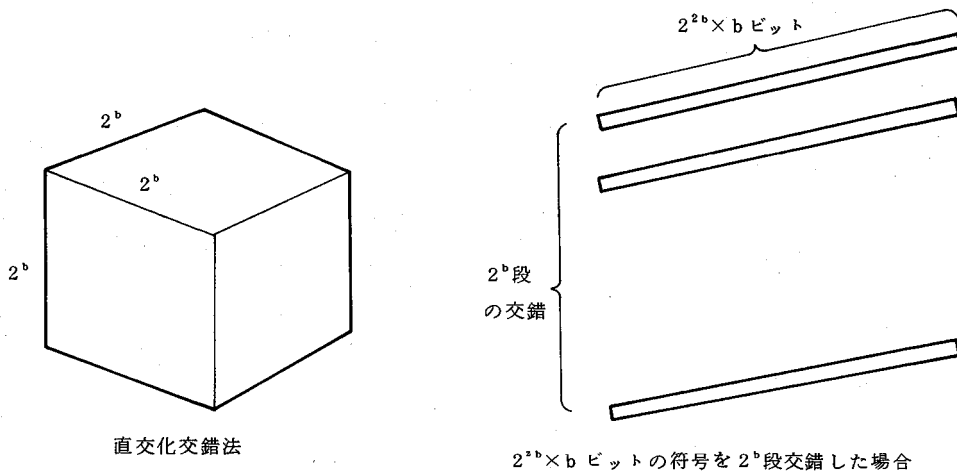


図 4 . 8 2^b 段交錯した符号との比較

この場合では直交化交錯法はすべて最小距離 d の符号の同一の符号器，復号器で実現でき比較する符号は $2^{2b} \times b$ ビットの最小距離 d^2 の BCH 符号または RS 符号が候補になる。

このことは次のことを意味する。即ち直交化交錯法を用いて $b = 4$ で最小距離 16 の符号語を構成すると符号長 $n = 16384$ ビットの符号がガロア体 $GF(2^4)$ 上のプロセッサで復号器を構成できる。ところがこれを長大な一つの BCH 符号で構成すると $GF(2^{14})$ 上の演算回路で BCH 符号を構成する必要がある。又， 2^b 段の交錯を施すとしても $GF(2^{10})$ 上の BCH 符号を構成する必要がある。ガロア体プロセッサで実現するとしても $GF(2^{14})$ 又は $GF(2^{10})$ 上の演算回路のハードウェアは実現不可能に近い。

直交化交錯法の符号比率は次式で与えられる。

$$R_{in} = \{2^{3b} - (d-1)^2 (3 \cdot 2^b - 2d + 2)\} / 2^{3b} \quad \dots (4.4)$$

一方，VG 限界式の符号比率は次式で与えられる。

$$R_{vg} = 1 + h \log h + (1-h) \log (1-h) \quad \dots (4.5)$$

(但し， $h = d^2 / (2^{2^b} \times b)$ で与えられる。)

以上を表 4.1 にまとめる。又， $b = 8$ に対する符号比率の変化を図 4.9 に示す。

表 4.1 VG 限界式を満たす直交化交錯法のパラメータ (2 元符号として)

GF	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
最小	③	③	③	③	③	③
距離 d	④	④	④	④	④	④
	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
	⑥	6	6	6	6	6
		7	7	7	7	7
		8	8	8	8	8
		9	9	9	9	9
		10	10	10	10	10

○印は V. G. 限界式を満足するパラメータ

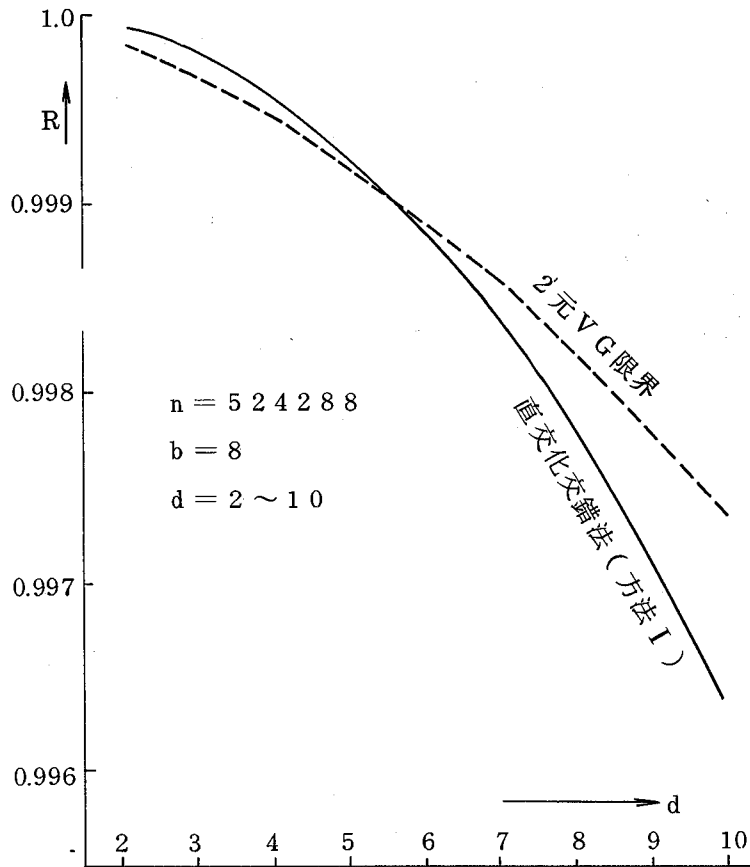


図 4.9 直交化交錯法により構成された符号の符号比率と V G 限界の比較

(1) R S 符号との比較

符号長 2^b シンボルの R S 符号と直交化交錯法による符号とを比較してみよう。最小距離 D は

$$D = d^2 \quad \dots (4.6)$$

とおける。直交化交錯法による符号長 $2^b \times 2^b \times b$ ビットと比較するため便宜上 $B = 2b - 1$ とおく。⁺

⁺) 厳密には $(2b - 1) / 2b$ 倍符号長が異なる。

$$R_{RS} = (2^B - D + 1) / 2^B \quad \dots (4.7)$$

数値計算結果では $b \geq 20$, $d = 2 \sim 5$ で単一の RS 符号を 2^b 段交錯した場合より優れるパラメータの符号が構成できることがわかる。

(2) BCH 符号との比較

同様の手法で BCH 限界式と比較してみよう。 $(2^m - 1, 2^m - mt - 1, t)$ BCH 符号と符号比率を比較する。符号長 n は

$$\begin{aligned} n &= 2^m - 1 \\ &= 2^{2b} \times b \end{aligned} \quad \dots (4.8)$$

とおけるから $m \cong 2 \times b + \log_2 b$ となる。符号比率は

$$R_{BCH} = (2^m - (mt - 1)) / (2^m - 1) \quad \dots (4.9)$$

で与えられる。数値計算結果より $b \geq 22$, $d = 3$ で直交化交錯法が

BCH 符号を 2^b 段交錯した場合よりも優れている。

付録 G に同一の b に対する符号長 n の値を表で与える。

4.4 方法 II

方法 I は積符号の構造を首尾よく利用することにより従来の構成法に比べより多くの情報を符号化できるようにした手法である。これに対し本節ではこの手法を改良して積符号の検査シンボル数を更に減少させる方法について述べる。なお繁雑さを避けるため説明は行符号のみで行う。

4.4.1 原理

<符号化アルゴリズム>

(ステップ 1) : 図 4.10 で情報シンボルは k シンボル毎に C_r 符号器で符号化され n シンボルの符号語に構成される。この操作が N 行にわたって施され、 $N \times n$ シンボルの符号語 C_π が構成される。

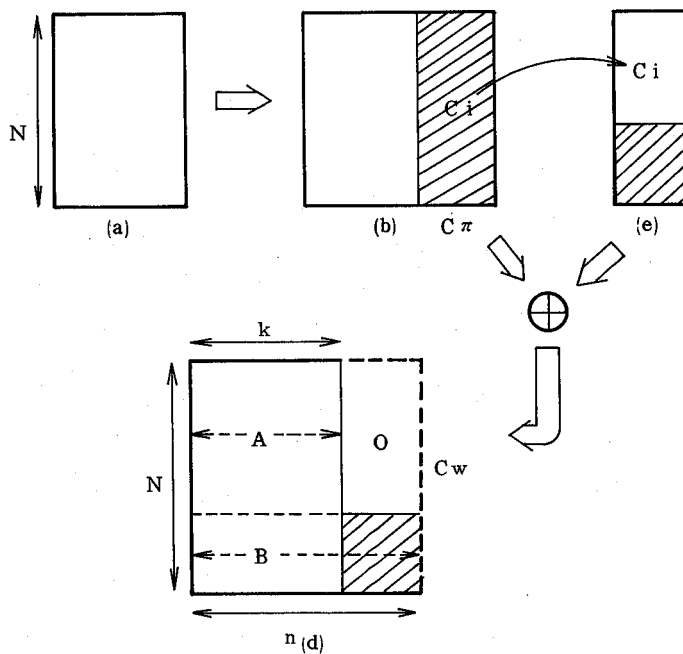


図 4.10 方法Ⅱによる符号化過程

(ステップ2) : 符号語 C_π の検査シンボル部分 $N \times (n - k)$ シンボルの k 個の行符号語 $C_r(i)$ の $n - k$ 検査シンボルからなる検査シンボル部分を符号 U の $GF(2^{n-k})$ 上の K 個の情報シンボル系列とみなして符号化し, $GF(2^{n-k})$ 上の $N - K$ 個の検査シンボルを有する符号語を構成する。

(ステップ3) : 符号語 C_π の検査シンボル系列部分に符号 U のシンボルを法 2 加算し, 図(d)に示す符号語 C_w を構成する。

ステップ1で第 i 行の行符号語 $C_r(i)$ は次式で表される。

$$C_r(i) = (I(i), C(i)) \quad \dots (4.10)$$

ステップ2で第 i 行の重畳符号 U のシンボル Q_i は

① $1 \leq i \leq K$ の場合,

$$Q_i = C(i) \quad \dots (4.11)$$

② $K+1 \leq i \leq N$ の場合,

$$Q_i = V(i)$$

となる。但し、 $V(i)$ は符号 U の検査ベクトルである。

ステップ 3 で符号語 C_w の第 i 行のベクトル表現を ξ_i とすると,

① $1 \leq i \leq K$ の場合,

$$\xi_i = (I(i), 0) \quad \dots (4.12)$$

② $K+1 \leq i \leq N$ の場合,

$$\begin{aligned} \xi_i &= (I(i), \\ &C(i) + V(i)) \end{aligned} \quad \dots (4.13)$$

となる。

以上より図 4.10 の右上の矩形部分のシンボルが 0 ベクトルとなることが理解できよう。この 0 ベクトルは明らかに送信する必要がない。以上行符号のみについて説明したが列符号についても全く同様の結果がえられ積符号としての符号語に適用すると図 4.11 の構成の符号語が得られる。

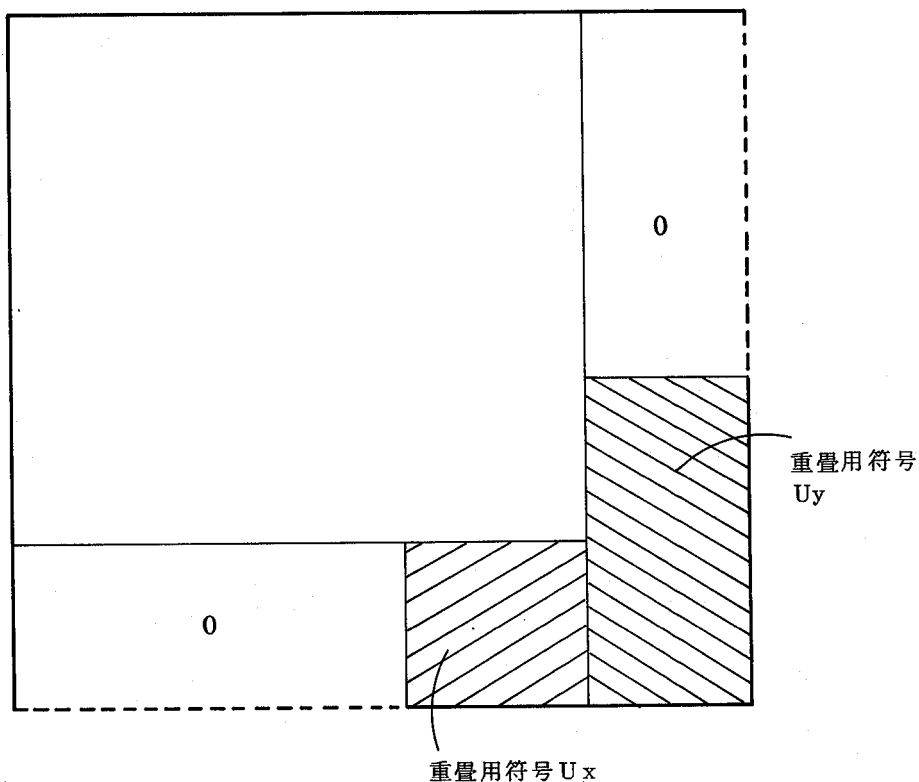


図 4.11 方法Ⅱを積符号に適用し構成した符号語

<方法Ⅱの復号化アルゴリズム>

(ステップ1) : 受信語 $\tilde{C}_w$ の情報部分より分離符号化して受信検査シンボル $\tilde{C}(i)$ を内部検査再生する。

(ステップ2) : 内部検査再生した検査シンボルを対応する部分に法2で加算する。

(ステップ3) : 重畳用受信語 $\tilde{U}$ を重畳分離する。

(ステップ4) : 得られた重畳用符号を復号する。

(ステップ5) : 符号 $C_r(i)$ の受信語を復号してもとの情報を得る。

受信語 C_w は次式で表現できる。

$$C_w = (R_1, R_2, \dots, R_N) \quad \dots (4.14)$$

各要素 R_i は

$$R_i = (r_i(j), 0) \quad (1 \leq j \leq K) \quad \dots (4.15)$$

$$R_i = (r_i(j), r_e(j)) \quad (K+1 \leq j \leq N) \quad \dots (4.16)$$

で与えられる。伝送路上で付加された誤りベクトルを

$$E_j = (e_i(j), e_e(j)) \quad \dots (4.17)$$

とする。但し、 $1 \leq j \leq K$ のとき、 $e_e = 0$ である。

$$r_i(j) = l(j) + e_i(j) \quad (1 \leq j \leq K) \quad \dots (4.18)$$

$$r_i(j) = 0 \quad (1 \leq j \leq K) \quad \dots (4.19)$$

又,

$$r_i(j) = l(j) + e_i(j) \quad (K+1 \leq j \leq N) \quad \dots (4.20)$$

$$r_e(j) = C(j) + V(j) + e_e(j) \quad (K+1 \leq j \leq N) \quad \dots (4.21)$$

である。

ステップ1で受信語の情報シンボル系列より分離用符号化して受信検査シンボル $\tilde{C}(j)$ を内部検査再生する。

$$\tilde{C}(j) = C(j) + S(j) \quad \dots (4.22)$$

$S(j)$ は情報シンボル部の誤りによって引き起こされた擬似誤りである。

ステップ2でこのようにして作成された内部検査再生シンボルを受信語の検査部に法2加算する。符号Uの受信語 $\tilde{U}(j)$ ($j = 1, 2, \dots, N$) を再生する。

$$\tilde{U}(j) = Q_j + S(j) + e_e(j) \quad \dots (4.23)$$

ステップ3で符号Uの誤り $S(j) + e_e(j)$ は符号Uの訂正能力の範囲内であればすべて訂正される。

ステップ4で

$C\pi$ の j 番目の要素は

① $1 \leq j \leq K$ の時,

$$C_r(j) = (l(j) + e_i(j), C(j)) \quad \dots (4.24)$$

② $K+1 \leq j \leq N$ の時

$$C_r(j) = (l(j) + e_i(j), C(j) + e_o(j)) \quad \dots (4.25)$$

となる。

(ステップ VI) : この誤り $e_i(j)$ または $e_i(j) + e_o(j)$ は符号 C_r の復号により訂正される。

以上より次の定理を得る。

『定理 4.2 : 方法 II より構成した符号は元の符号の最小距離は不変のままで検査シンボル数を重畳符号の情報シンボル数だけ節減することが可能である。』
(証明略)。

図 4.10 において情報シンボル部分 A は方法 I では符号長 n シンボルの受信語の t 個の誤りを訂正していたが, 方法 II ではこのように検査シンボル部分を送信しないので, 誤りの生起が情報シンボル部分の k シンボルに限られる。即ち, 重畳用符号 U で擬似誤りを訂正したあと, C_r 符号語は k 個の情報シンボル部分だけの誤りを訂正すればよい。

一方, B の部分は重畳用符号 U が正しく復号されれば明らかに擬似誤りは訂正されて存在しなくなるので伝送路上で生起した誤りだけを基礎符号によって訂正し復号を実行する。

符号 C_r が t 重誤り訂正能力を持つとすると元の C_r 符号語での訂正不能確率⁺ P_f は符号語単位で

+) 復号誤り確率と誤り検出確率を総称して訂正不能確率と呼ぶ。

$$Pf \cong \sum_{k=t+1}^n \binom{n}{k} P^k (1-P_\epsilon)^{n-k} \\ \cong \binom{n}{t+1} P_\epsilon^{t+1} \quad \dots (4.26)$$

(但し P_ϵ は通信路誤り率)。

『定理 4.3

方法Ⅱを用いた行符号語 $Cr(i)$, ($1 \leq i \leq K$) の訂正不能確率は次式で与えられる。

$$Pf \cong \binom{k}{t+1} P_\epsilon^{t+1} \quad \dots (4.27)$$

(但し P_ϵ : 通信路誤り率)

』

(証明略)。

本定理より復号パフォーマンスは

$$\sigma \cong \binom{k}{t+1} / \binom{n}{t+1} \quad \dots (4.28)$$

に改善されることが明らかである。

4.4.2 適用例

$SER^+ = 10^{-4}$ の $22 \times 24 = 528$ バイトの情報を方法Ⅱによって符号化して A の部分を $SER = 10^{-12}$, B の部分を $SER = 10^{-10}$ 以下に誤り制御する。ここで 1 シンボルは 8 ビットである。

符号 $Cr(i)$: $GF(2^8)$ 上の $(28, 22, 7)$ RS 符号

符号 U : $GF(2^8)$ 上の $(24, 10, 15)$ RS 符号

を用いると付録 H より A の部分は $SER = 7.3 \times 10^{-13}$, B の部分は $SER = 2.05 \times 10^{-12}$ の復号パフォーマンスが得られる。

+) SER : Symbol error rate, この例では 1 シンボル = 1 バイト。

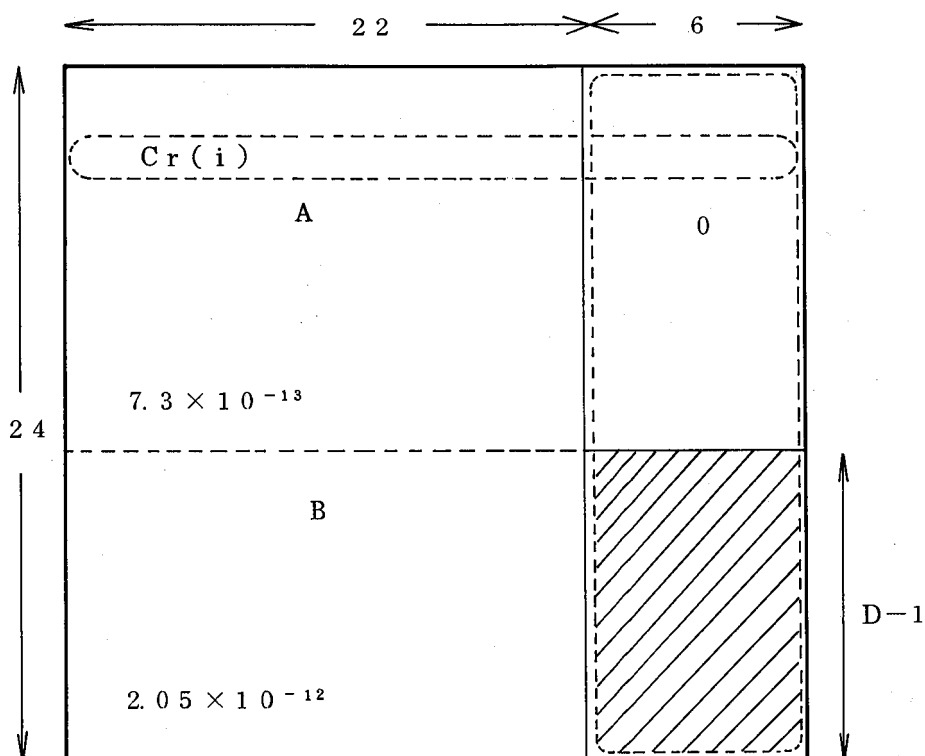


図 4.12 方法Ⅱにおける数値例

4.5 畳み込み符号への適用⁽³⁶⁾

畳み込み符号として良く知られている符号にWyner-Ash符号と、自己直交符号(Convolutional Self-Orthogonal Codes)がある。本論文ではWyner-Ash符号に重畳符号を応用してより自由度に富んだ畳み込み符号の構成法を提供し、設計の自由度が大巾に増大する可能性があることを示す。まず畳み込み符号に方法Ⅰを適用しよう。

〔方法Ⅰ〕：節4.3で積符号に重畳符号を応用し、従来方法を改善してより多くの情報を送受信可能な方法Ⅰを提案したが本節では畳み込み符号に以下のように重畳符号化を行う方法を方法Ⅰと称する。

図4.13に示すように情報 I_1 を符号化する畳み込み符号の C_1 符号器と情報

I_s を重畳符号化する C_s 符号器により送信シンボル系列 T を生成する。
 $((m+1)2^m, (m+1)(2^m-1), 3)$ Wyner-Ash 符号の $m=1$ の場合である $(4, 2, 3)$ 符号を符号 C_1 , 符号 C_s の両方を選んで提案するアルゴリズムを説明しよう。

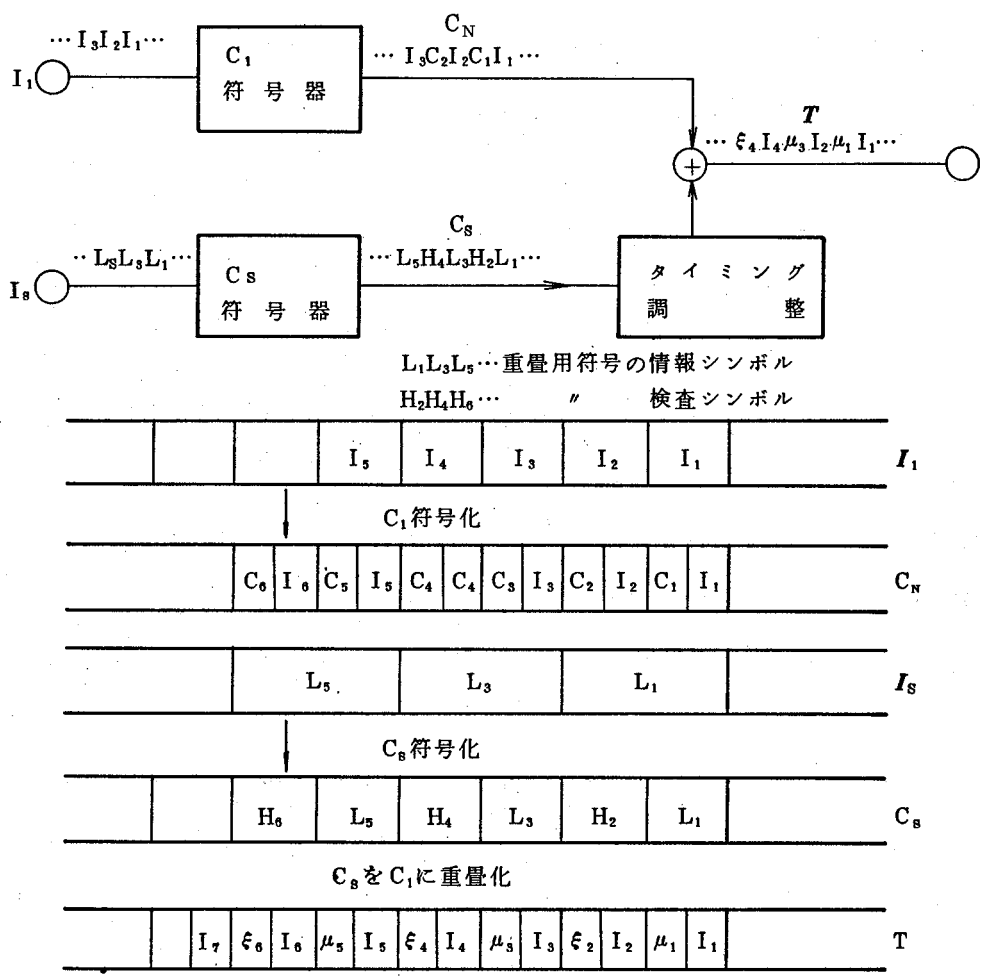


図 4.13 方法 I による符号構成原理図

<符号化アルゴリズム I>

(ステップ1) : 情報シンボル系列 $(\dots I_1, I_2, I_3 \dots) \triangleq I_s$ を C_1 符号器に入力して C_1 符号語系列 $(\dots I_1 C_1 I_2 C_2 I_3 \dots) \triangleq C_N$ を得る。

(ステップ2) : 情報シンボル系列 $(\dots L_1 L_2 L_3 \dots) \triangleq I_s$ を C_s 符号器に入力し、 C_s 符号化を行い、符号語系列 $(\dots L_1 H_2 L_3 H_4 L_5 H_6 \dots) \triangleq C_s$ を得る。

(ステップ3) : 得られた重畳用符号語系列 C_s を C_1 符号語系列 $(\dots I_1 C_1 I_2 C_2 I_3 \dots) \triangleq C_N$ の検査記号部分に法2で加算して重畳化し、系列 $(\dots I_1 \mu_1 I_2 \xi_2 I_3 \dots) \triangleq T$ を得る。

(ステップ4) : 送信シンボル系列 T として送信される。

以下に復号化アルゴリズムを示す。

<復号化アルゴリズム I>

(ステップ1) : 受信語系列 $(\dots \tilde{I}_1 \tilde{\mu}_1 \tilde{I}_2 \tilde{\xi}_2 \tilde{I}_3 \dots) \triangleq R$ より C_N の検査シンボルを内部検査再生させ C_N^* を構成する。

(ステップ2) : 系列 C_N^* を受信語系列 R に法2で加算して C_s の受信語系列 $(\dots \tilde{L}_1 \tilde{H}_2 \tilde{L}_3 \tilde{H}_4 \tilde{L}_5 \dots) \triangleq \tilde{C}_s$ を得る。

(ステップ3) : 系列 $\tilde{C}_s$ を復号して情報シンボル部分 $(\dots L_1 L_2 L_3 \dots) \triangleq I_s$ を出力する。

(ステップ4) : 得られた系列 $(\dots L_1 H_2 L_3 H_4 L_5 \dots) \triangleq \tilde{C}_s$ を受信語系列 R に法2で加算し、受信語系列 $(\dots I_1 C_1 I_2 C_2 I_3 C_3 \dots) \triangleq \tilde{C}_N$ を得る。

(ステップ5) : $\tilde{C}_N$ 受信語系列を復号してもとの情報 $(\dots I_1 I_2 I_3 \dots) \triangleq I_s$ を得る。

このようにして符号比率 $1/2$ の符号を2個用いて符号比率 $3/4$ の畳み込み符号が構成できることが理解できよう。

ここで節4.3と同じく C_s 符号語と C_1 符号語が互いに直交していないと復号側で疑似誤りを生じ訂正不可能となる。従って重畳用符号の各シンボルが基礎符号の拘束長以上離れている必要があることが理解できよう。

〔方法Ⅱ〕：節 4.3 では重畳符号の情報シンボルを基礎符号の検査シンボルの一部を用いて 0 ベクトルとすることにより送信符号長を短くすることを可能にしたが、本節ではその手法を畳み込み符号に応用し方法Ⅱと称する。

図 4.14 に示すように C_1 符号器で符号化したあと情報 I_s の代わりに C_1 符号語の検査シンボルの一部を C_s 符号化する点異なる。

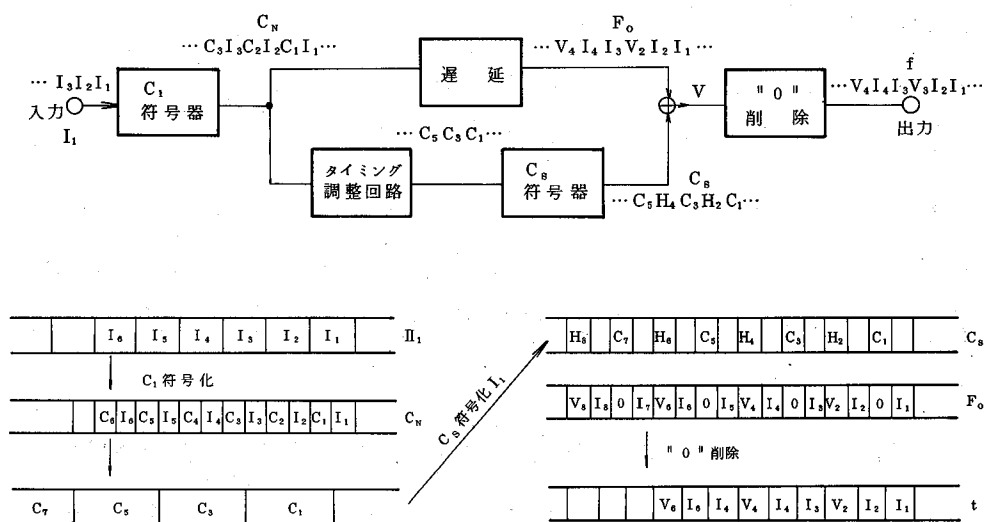


図 4.14 方法Ⅱによる符号構成原理図

符号比率 $1/2$ の (4, 2, 3) Wyner-Ash 符号 2 個用いて各々 C_1 符号, C_2 符号とし $2/3$ の畳み込み符号を構成する例で説明しよう。

<符号化アルゴリズムⅡ>

(ステップ 1)：情報シンボル系列 $(\dots I_1 \ I_2 \ I_3 \ \dots) \triangleq I_1$ を C_1 符号器で符号化して C_1 符号語系列 $(\dots I_1 \ C_1 \ I_2 \ C_2 \ I_3 \ C_3 \ \dots) \triangleq C_N$ を構成する。

(ステップ 2)： C_1 符号語系列の検査シンボル系列を一つ置きに取り出しそ

れを重量用符号の情報シンボルとみなして C_s 符号語へ入力し、 C_s 符号化を行い符号語系列 $(\dots C_1 \ H_2 \ C_3 \ H_4 \ C_5 \ \dots) \triangleq C_s$ を得る。

(ステップ 3) : 得られた重畳用符号語系列 C_s を C_1 符号語系列 $(\dots I_1 \ C_1 \ I_2 \ C_2 \ I_3 \ \dots) \triangleq C_N$ の検査シンボル部分に法 2 で加算して重量化し系列 $(\dots I_1 \ 0 \ I_2 \ V_2 \ I_3 \ 0 \ I_4 \ V_4 \ \dots) \triangleq F_0$ を得る。

(ステップ 4) : 系列 F_0 より検査シンボルの " 0 " を取り除き送信語系列 f を得る。

以上より基礎符号の符号比率 $1/2$ が $2/3$ に改善されて送信されることが理解できよう。

<復号化アルゴリズム II>

(ステップ 1) : 受信語系列 $(\dots \tilde{I}_1 \ \tilde{I}_2 \ \tilde{V}_2 \ \tilde{I}_3 \ \tilde{I}_4 \ \tilde{V} \dots) \triangleq \tilde{r}$ にダミー " 0 " を挿入し、送信側の F_0 に対する $(\dots \tilde{I}_1 \ 0 \ \tilde{I}_2 \ \tilde{V}_2 \ \tilde{I}_3 \ 0 \ \tilde{I}_4 \ \tilde{V}_4 \dots) \triangleq \tilde{r}_0$ を構成する。

(ステップ 2) : 系列 $\tilde{r}_0$ より C_1 の検査シンボルを内部検査再生し、 $\tilde{C}_N$ を構成する。

(ステップ 3) : 系列 $\tilde{C}_N^*$ を系列 $\tilde{r}_0$ に法 2 で加算し、 C_s の受信語系列 $(\dots \tilde{C}_1 \ \tilde{H}_2 \ \tilde{C}_3 \ \tilde{H}_4 \ \tilde{C}_5 \ \dots) \triangleq C_s$ を得る。

(ステップ 4) : 系列 $\tilde{C}_s$ を復号して系列 $(\dots \tilde{C}_1 \ \tilde{H}_2 \ \tilde{C}_3 \ \tilde{H}_4 \ \tilde{C}_5 \ \dots) \triangleq C_s$ を得る。

(ステップ 5) : 得られた C_s 系列を系列 r に法 2 で加算して受信語系列 $(\dots \tilde{I}_1 \ \tilde{C}_1 \ \tilde{I}_2 \ \tilde{C}_2 \ \tilde{I}_3 \ \tilde{C}_3 \ \dots) \triangleq \tilde{C}_N$ を得る。

(ステップ 6) : $\tilde{C}_N$ 受信語系列を復号してもとの情報 $(\dots I_1 \ I_2 \ I_3 \ \dots) \triangleq I_1$ を得る。

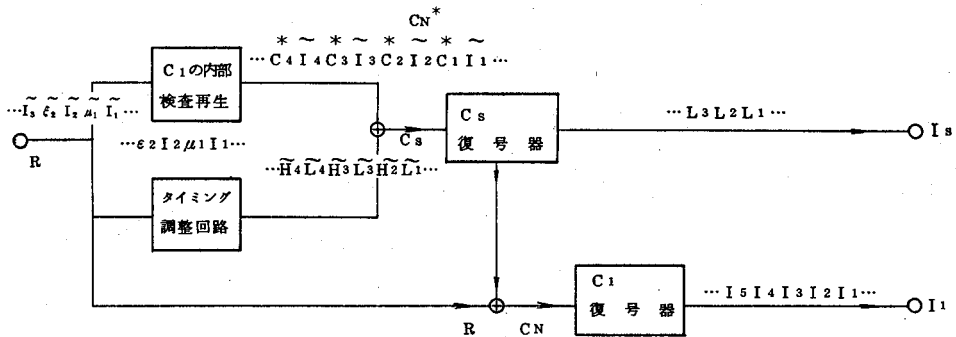
以上、符号化、復号化アルゴリズムについて説明した。このようにして構成される符号のパラメータを表 4.2 に示す。

図 4.15 および 4.16 にそれぞれ方法 I, II に対する復号器の構成原理図を示す。

表 4.2 構成された符号パラメータ

m	Wyner-Ash 符 号	Rw	重畳用符号	Rs	方 法 I	R ₁	方 法 II	R ₂
1	(4, 2, 3)	1/2	(4, 2, 3)	1/2	(16, 12, 3)	3/4	(12, 8, 3)	2/3
2	(8, 6, 3)	3/4	(4, 2, 3)	1/2	(32, 28, 3)	5/6	(28, 24, 3)	4/5
3	(24, 21, 3)	7/8	(4, 2, 3)	1/2	(96, 90, 3)	7/8	(90, 84, 3)	6/7
4	(64, 60, 3)	31/32	(4, 2, 3)	1/2	(256, 248, 3)	9/10	(248, 240, 3)	8/9

C S O C	R _c	重畳用符号	Rs	方 法 I	R ₁	方 法 II	R ₂
(6, 3, 3)	1/2	(4, 2, 3)	1/2	(24, 18, 3)	3/4	(18, 12, 3)	2/3
(9, 6, 3)	2/3	(4, 2, 3)	1/2	(36, 30, 3)	5/6	(30, 24, 3)	4/5
(16, 12, 3)	3/4	(4, 2, 3)	1/2	(64, 56, 3)	7/8	(56, 48, 3)	6/7
(25, 20, 3)	4/5	(4, 2, 3)	1/2	(100, 90, 3)	9/10	(90, 80, 3)	8/9



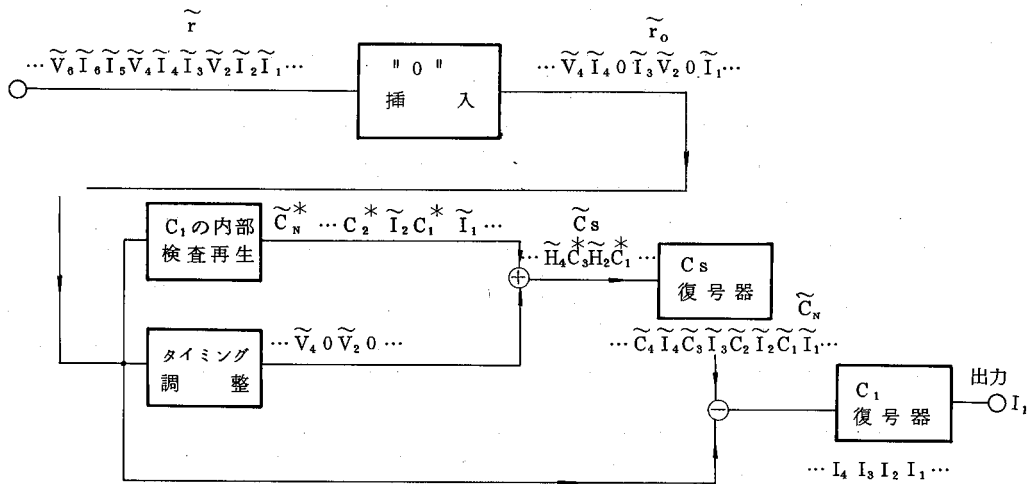


図 4.16 方法Ⅱを用いた符号の復号原理図

4.6 結 言

重畳符号化法を用いた新しい符号構成法を提案した。

〔方法Ⅰ〕：新しい符号構成法は積符号の有する特長を活かしつつ直交化交錯法を適用しうることが明らかになった。

- (1) 積符号の符号語を構成してから重畳化せず列符号化，重畳化，行符号化，重畳化と符号化復号化アルゴリズムを修正し，チェックオンチェック部分も符号シンボルを重畳化させることにより送受信できる情報シンボル数を大巾に増大させることが可能になった。

$b \geq 3$ ， $d = 2$ の時，2元符号としてみた場合，VG限界式を満足することが明らかになった。

- (2) 行符号で符号化し，直交化交錯法を用いて重畳用符号を重畳化し，そののち列符号または行符号で符号化し，残る列符号の検査シンボル部分に重畳用符号を重畳化することによって訂正能力を低下させずに重畳用符号の

最小距離を大巾に減少させることが可能になった。

2^b 段交錯を施した RS 符号と比較すると $b \geq 20$, $d = 2 \sim 5$ で直交化交錯法を施した方法 I が優れる。又, BCH 符号との比較では $b \geq 22$, $d = 3$ で直交化交錯法を施した方法 I が優れる。

〔方法 II〕: 重畳用符号の情報シンボルを基礎符号の検査シンボル部分の一部を符号化することによって送信語の一部を 0 ベクトルとすることにより検査シンボルの一部を首尾よく除去することが可能にした。このようにすることによって, 次の利点を有する符号を構成しうることが明らかになった。

- (1) 同じ情報シンボル数, 同じ最小距離に対し検査シンボル数を大巾に節減することが可能になった。
- (2) 一つの符号フォーマットで同時に異なった信頼度で情報を送ることが可能になった。

畳み込み符号のうち Wyner-Ash 符号に上記方法 II を適用した場合, 従来知られてなかったパラメータの符号が構成できることが明らかになった。

第5章 多重符号の復号法

5.1 序 言

2次元配置の符号の符号化、復号化に関してはすでに多くの報告がなされている。⁽¹⁸⁾⁽⁴⁶⁾⁽⁴⁷⁾ これらのほとんどが2次元配置の2種の符号を一般に独立に1回づつ復号を行っている。このような方法では多くの誤りあるいはイレージャをただ1回の操作で訂正する結果、必然的に復号誤りの増大が避けえない。又、復号のステップを多ステップに繰り返す方法も報告されている⁽⁹⁾が、このような方法では特定のパターンの誤りが残留しステップを増加させてもパフォーマンスはさほど改善されない。本章では比較的単純な誤り専一復号器を繰り返し用いることによりむしろ残留する誤りパターンを積極的に浮き上がらせ、残留する誤りを推定してイレージャとして最終ステップの復号に利用する手法(R E 復号法)を提案する。⁽¹⁴⁾⁽²⁵⁾⁽²⁶⁾⁽²⁷⁾⁽³¹⁾ 更にSEC-DED Hamming 符号を用いた場合についてChaseの復号法と比較し検討する。この結果

- (1) Chase 復号器が一般に低誤り率の通信路で良好な特性を示しているのに対しR E復号法は比較的高誤り率の通信路で優れた特性を示すこと、
- (2) 一般に符号長 n_0 の広範な値に対してR E復号法がChase 復号法より優れており、この傾向は符号長が大となるにつれて顕著になること⁽³⁴⁾等を明らかにする。

更に、復号回数が2～3回で誤り状態を推定する誤り監視計数器を提案し、⁽³³⁾バースト誤りに対する効果を論ずる。

最後に優れた軟判定復号法として知られているChase 復号法を多次元に拡張したR E復号法と優劣を比較して論ずる。⁽²⁸⁾⁽²⁹⁾

なお本論文においては"誤訂正"とは復号器が誤った訂正動作をした結果生

*) Residual erasure estimator decoding.

起する誤り，又，"見逃し誤り"とは誤りパターンが符号語パターンと一致した結果見逃される誤りを意味するものとし，両者の誤りを復号誤りと総称する。ここで次章以降において用いる諸確率を定義しよう。

(i) 正しい訂正確率 P_C

(ii) 誤訂正確率 P_e

(iii) 誤り見逃し確率 P_{UD}

(iv) 誤り検出確率 P_{DT}

復号誤り確率 P_{DE} は明らかに $P_{DE} = P_e + P_{UD}$ で与えられる。なお誤り専一復号とはイレージャ情報を用いずに誤りを訂正する復号，イレージャ専一復号とは復調あるいは復号時のイレージャ情報に基づく誤りだけを訂正する復号，イレージャ・誤り復号とは誤りとイレージャをともに訂正する復号をいう。本論文を通じて通信路は二元対称通信路 (BSC) を仮定する。

5.2 RE 復号法

5.2.1 復号器の構成

〔定義〕RE 復号器はフィルタリング ($D_f(i)$) 復号器，残留イレージャ (RE) 推定器，最終段訂正 (D_o) 復号器からなるものとする。

全体のブロック図を図 5.1 に示す。符号 C_1 ，符号 C_2 は各々 (n_1, k_1, d_1) ， (n_2, k_2, d_2) 線形符号とする。送信側で情報記号はまず C_2 符号化され，次に C_1 符号化されて通信路に送出される。

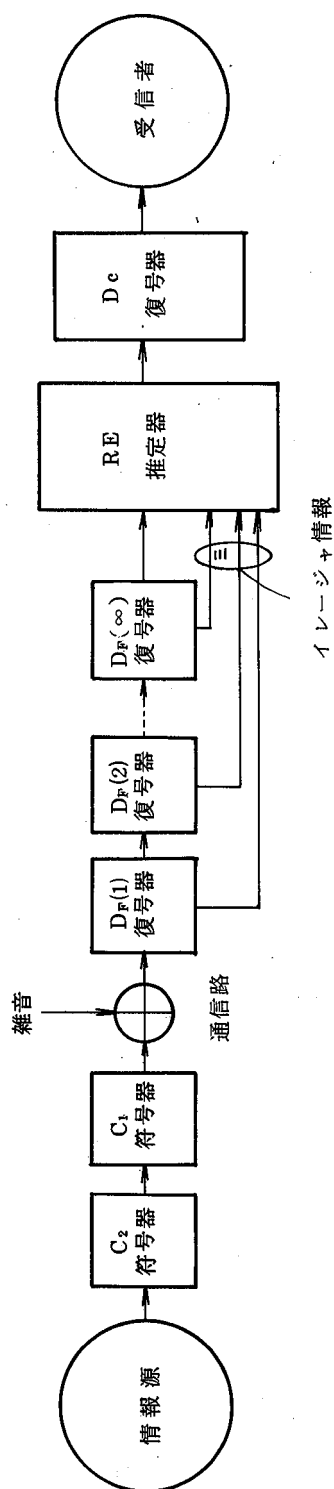


図 5.1 RE (残留イレージャ推定) 復号システムの構成

5.2.2 復号器の動作原理

復号は上述のように $D_F(i)$ 復号 ($i = 1, 2, \dots, \infty$), RE 推定, および D_0 復号からなるが, 以下においてこれらについて詳細に説明しよう。

(a) フィルタリング復号 ($D_F(i)$ 復号)

$D_F(i)$ 復号モードでは比較的単純な "誤り専一復号器" を繰り返し用いて分散する誤りを訂正するとともに, 残留する誤りパターンを積極的に浮き上がらせる。

図 5.2 に符号 C_1 および符号 C_2 を符号長 n^* , 最小距離 4 の符号とした場合の受信語の一例を, 又, 図 5.3 にフィルタリング復号完了後のこの受信語の状態をそれぞれ示す。まず復号ステップ 1, $D_F(1)$ では符号 C_1 の復号により数字 1 で示した誤りが訂正される。復号ステップ 2, $D_F(2)$ では図中数字 2 で示した誤りが訂正される。このように復号ステップを繰り返し実行する段階で誤りの大部分^{**}が訂正される。この結果最終的に図 5.3 に示すように格子状の誤りパターンが残留する。 $D_F(i)$ 復号において, ステップ数を十分に大にした時の最終ステップを ∞ ステップ, $D_F(\infty)$ と称する。

*) $n_1 = n_2$ の場合, 簡単のため n と書く。

**) 大略 $n^2 \cdot P_b - \left(\frac{n}{2}\right)^2 P_b^4$ が訂正される。

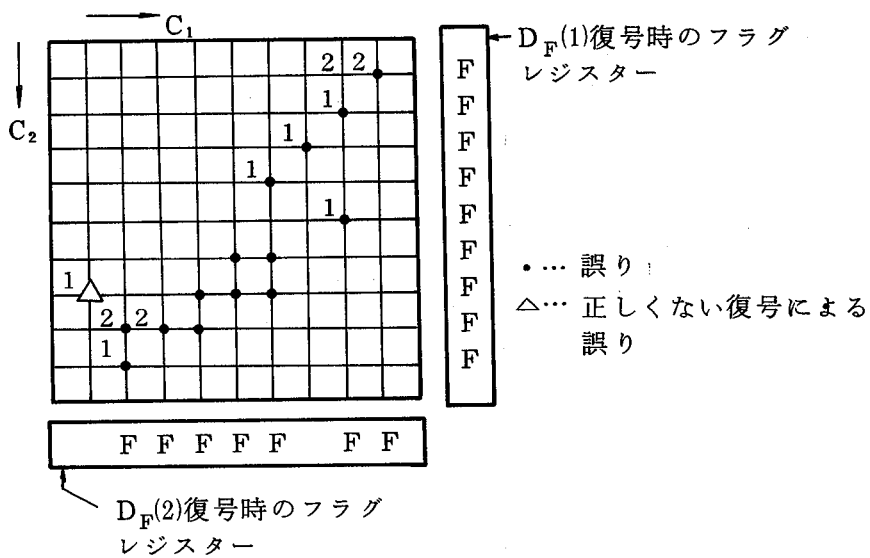


図 5.2 ステップ 1, $D_1(1)$ およびステップ 2, $D_F(2)$ におけるフィルタリング復号

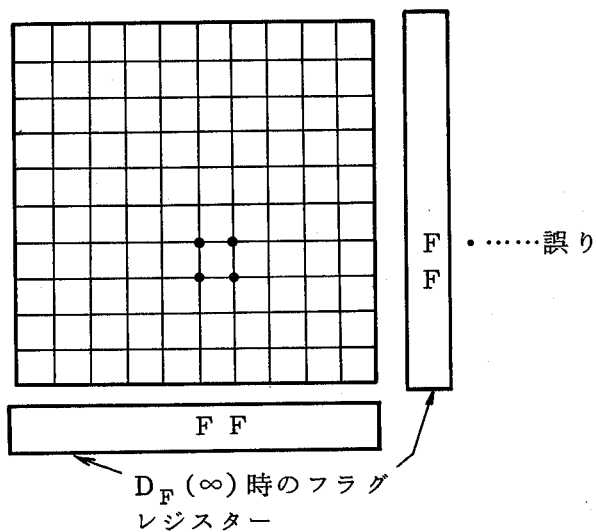


図 5.3 ∞ ステップ, $D_F(\infty)$ のフィルタリング復号

又、 t_1 および t_2 をそれぞれ C_1 復号器、 C_2 復号器が実際に訂正した誤りの個数とする。ここで t_1 は $1 \leq t_1 \leq \lfloor (d_1 - 1) / 2 \rfloor$ 、 t_2 は $1 \leq \lfloor (d_2 - 1) / 2 \rfloor$ なる整数である。

(b) 残留イレージャ推定 (R E 推定)

推定の方法としてはフィルタリング復号の際に誤り訂正または検出のいずれの場合にもフラグをたて、フラグの立っている行と列の交点のシンボルをイレージャとすることによって行う。

『定理 5.1 : フィルタリング復号完了時、 $D_F(\infty)$ に誤りが残留する場合には $t_2 + 1$ 個以上の C_1 受信語および $t_1 + 1$ 個以上の C_2 受信語に誤りパターンが残留する。』

(証明) 誤りが残留しているある C_2 受信語には少なくとも $t_2 + 1$ 個以上の誤りシンボルが含まれている。その各々の誤りシンボルが含まれる C_1 受信語には $t_1 + 1$ 個以上の誤りシンボルが残留していることになる。従って上記の定理を得る。

〔系 5.1〕 C_1 受信語で t_2 個以下のフラグが立っている場合、又は C_2 受信語で t_1 個以下のフラグが立っている場合、イレージャ専一訂正不可能である。

定理 5.1 と系 5.1 によってフラグから推定された格子状のパターンが C_1 受信語で t_1 個以下、 C_2 受信語で t_2 個以下の場合には見逃し誤りが含まれていることが $D_F(\infty)$ 復号時において首尾よく判定され、アラーム、データの再送、あるいは補間などの手段に委ねることができる。符号 C_1 、又は符号 C_2 で誤り訂正した場合には $D_F(\infty)$ 復号時までフラグが常時立っている場合が起こりうる。例えば図 5.4 で△印のシンボルは $D_F(1)$ 復号で誤り訂正されて付加され、 $D_F(2)$ 復号で付加された誤りが訂正される。以後 $D_F(3)$ 復号で再び誤り訂正されるというように誤り訂正と訂正が繰り返されている誤りである。

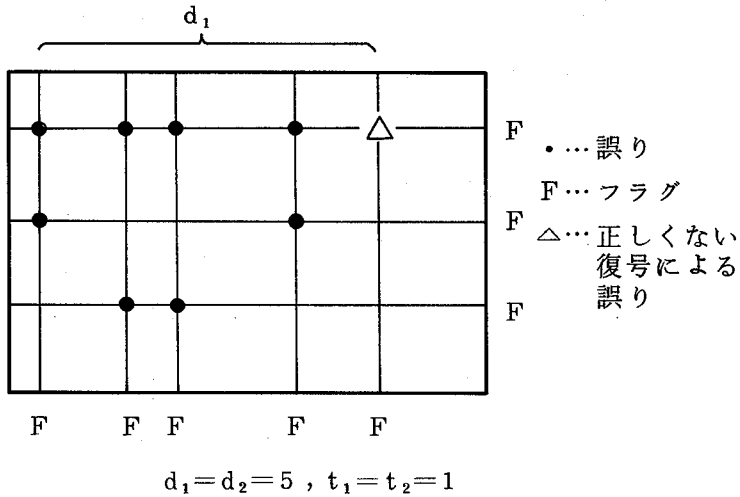


図 5.4 誤訂正の検出

〔補題 5.1〕誤りシンボル数 $(t_1 + 1) \cdot (t_2 + 1)$ の残留誤りパターンの総数を $\rho(t_1 + 1, t_2 + 1)$ とすると $D_F(\infty)$ におけるシンボル単位の残留誤り確率 $P_{d\infty}$ は

$$P_{d\infty} \cong \frac{(t_1 + 1) \cdot (t_2 + 1)}{n_1 n_2} \rho(t_1 + 1, t_2 + 1) \cdot P_b(t_1 + 1)(t_2 + 1) \quad \dots (5.1)$$

で与えられる。但し P_b は通信路誤り率である。

(略証) $D_F(\infty)$ において残留する誤りは定理 5.1 より $t_2 + 1$ 個以上の C_1 受信語および $t_1 + 1$ 個以上の C_2 受信語が存在する。従って誤りシンボルは少なくとも $(t_1 + 1) \cdot (t_2 + 1)$ 個存在する。

(c) 最終段訂正復号 (D_0 復号)

D_0 復号モードでは推定された格子状のパターンの各格子点に存在するシンボルをイレージャ専一復号、又はイレージャ・誤り復号のいずれかによって復号する。

(d) SEC-DED Hamming 符号

ここでは符号 C_1 , 符号 C_2 , 共に $(2^m, 2^m - m - 1, 4)$ SEC-DED Hamming 符号を用いるとして評価を行う。この場合, 縦方向, 横方向共に距離 4 であるので積符号としては最小距離 16 となるが, いわゆる最良符号のような高能率の符号としては異なり, 検査記号数が過大であるため最小距離で保証された以上の多数の誤りを潜在的に訂正しうることが予想される。

(e) RE 復号法によるパフォーマンス

$D_F(i)$ 復号は符号 C_1 , および符号 C_2 共に単一誤り訂正, 2重誤り検出の復号を実行する。 $D_F(i)$ 復号の際, シンドロームが全て 0 となる場合以外には誤り訂正, 又は訂正不能の何れの場合においてもその受信語にフラグをつける。フラグ情報は各ステップ毎に蓄えられ, 最終ステップおよびその直前のステップのフラグ情報が最終的に用いられる。

[I] イレージャ専一復号

イレージャ専一復号では符号 C_1 , 符号 C_2 について共に $d - 1 = 3$ 個以下のイレージャを訂正できる。フィルタリング復号のみを行うとした場合の誤り検出確率と復号誤りの近似公式を求めよう。

(i) $D_F(1)$ 復号時の確率計算:

復号誤り確率 $P_{DE}(1)$ は次式で与えられる。^{(5) (18)}

$$\begin{aligned}
P_{DE}(1) &= \sum_{i=4}^n \frac{i}{n} \sum_{\substack{\ell=i-j \\ j=0,1}}^{\min(i, n-j)} A_i \binom{i}{\ell} P_b^\ell (1-P_b)^{i-\ell} \\
&\quad \cdot \binom{n-i}{\ell-i+j} P_b^{\ell-i+j} \cdot (1-P_b)^{n-\ell-j} \\
&\cong \frac{4}{2^m} \cdot A_4 \cdot \binom{4}{4} \cdot P_b^4 \cdot (1-P_b)^{n-4} \\
&\quad + \frac{4}{2^m} \cdot A_4 \cdot \binom{4}{3} P_b^3 (1-P_b) \cdot (1-P_b)^{n-4} \\
&\quad + \frac{4}{2^m} \cdot A_4 \cdot \binom{4}{4} \cdot P_b^4 \cdot \binom{n-4}{1} P_b (1-P_b)^{n-5} \\
&\cong (2/3) \cdot (2^m - 1) \cdot (2^m - 2) P_b^3 \quad \dots (5.2)
\end{aligned}$$

上式において j は信頼指数であって $j = 0$ が見逃し誤りに対応し、この場合は 4 重誤りが生起している。一方、 $j = 1$ は誤訂正に対応し、この場合は $\ell = 3$ 即ち 3 重誤りあるいは $\ell = 4$ 即ち 5 重誤りが生起している。又、 A_i は重み i の符号語数であり、式 (5.2) においては

$$A_4 = \frac{1}{2^m - 3} \binom{2^m}{4} \quad \dots (5.3)$$

⁽¹³⁾⁽⁴³⁾ である。この数値計算例では、 $P_{UD} \ll P_\epsilon$ 、であるため復号誤り確率は誤訂正確率 P_ϵ にほぼ一致する。一方、誤り検出確率 $P_{DT}(1)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
P_{DT}(1) &\cong \frac{2}{n} \binom{n}{2} P_b^2 (1-P_b)^{n-2} \\
&\cong (2^m - 1) P_b^2 \quad \dots (5.4)
\end{aligned}$$

(ii) $D_F(2)$ 復号時の確率計算：

復号誤り確率 $P_{DE}(2)$ は C_2 受信語に 3 個検出可能誤り又は復号誤りが生起する確率であり、次式で与えられる。

$$P_{DE}(2) \cong \frac{4}{2^m} \frac{1}{2^m-3} \binom{2^m}{4} \binom{4}{3} \{P_{DT}(1) + P_{DE}(1)\}^3$$

$$\cong (2/3) (2^m-1)^4 (2^m-2) P_b^6 \quad \dots (5.5)$$

又、誤り検出確率 $P_{DT}(2)$ は次式で与えられる。

$$P_{DT}(2) \cong \frac{2}{n} \binom{n}{2} \{P_{DT}(1) + P_{DE}(1)\}^3$$

$$\cong (2^m-1)^3 P_b^4 \quad \dots (5.6)$$

(iii) $D_F(\infty)$ 復号時の確率計算：

復号誤り確率 $P_{DE}(\infty)$ ：および誤り検出確率 $P_{DT}(\infty)$ は付録 I で示したようにそれぞれ次式で与えられる。

$$P_{DE}(\infty) = (10/3) \cdot (2^m-1)^2 (2^m-2) P_b^6 \quad \dots (5.7)$$

$$P_{DT}(\infty) = (2^m-1)^2 P_b^4 \quad \dots (5.8)$$

〔補題 5.2〕イレージャ専一復号器において訂正不能となる場合のイレージャフラグ入力の最小数は C_1 受信語で d_2 個、 C_2 受信語で d_1 個が同時に入力された場合に与えられ d_1+d_2 となる。 (証明終)

次に最終段復号 (D_0 復号) における諸確率について述べよう。イレージャ専一復号では誤り検出確率 P_{DT} は復号誤りを含まない残留誤り格子パターン生起確率と 1 個の復号誤りを含む残留誤り格子パターン生起確率の和となる (定理 5.1 参照)*。即ち P_{DT} は次式で与えられる。

*) 前者は付録 J より 4×4 の格子パターンが 90 であることを考慮することにより得られる。又、後者の誤りは付録 I (b) の $\triangle$ 印の誤りの何れかを通信路で生起した誤り (●) 印に置き換えたものに等しいことを考慮すると導かれる。

$$\begin{aligned}
P_{DT} &\cong \frac{4^2}{n^2} \binom{n}{4}^2 \cdot 90 \cdot P_b^8 (1-P_b)^{n^2-8} \\
&\quad + \frac{4}{n} \left[\binom{n}{2} \binom{2}{1} \binom{4}{3} A_4 \cdot P_b^3 \cdot P_b^4 (1-P_b)^{n^2-7} \right] \cdot 2 \\
&\cong (4/3) \cdot 2^m \cdot (2^m-2) \cdot (2^m-1)^2 P_b^7 \\
&\quad + (5/2) \cdot (2^m-1)^2 (2^m-1)^2 (2^m-3)^2 P_b^8 \quad \dots (5.9)
\end{aligned}$$

式(5.9)の誤り検出確率において、フラグが付加されている行、又は列のすべてのビットを含めているのはそれらが $D_F(\infty)$ 復号時までと異なり最終的に復号器が誤り検出と判断し、棄却又は補正とすべき出力となるからである。一方、格子点数をイレージャフラグの立っている C_1 受信語および C_2 受信語の交点のシンボル数とすると復号誤り確率 P_{DE} は

(復号誤りを含む受信語が少なくとも1つ存在し、且つ残留する誤りパターンにより C_1 方向、 C_2 方向、共に2本以上のフラグが立っている確率) $\times$ (格子点数) $/ n^2$

で与えられる。イレージャ専一復号の際のフラグの最小数は $2+4$ であり各2個ずつイレージャが訂正されて12個の格子点数が誤ったまま残留する。従って復号誤り確率 P_{DE} は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
P_{DE} &\cong \frac{12}{n^2} \left[\binom{n}{3} \binom{3}{1} \binom{4}{3} A_4 \cdot P_b^3 \cdot \binom{2}{1} \binom{4}{2} \cdot P_b^2 \right. \\
&\quad \left. \cdot P_b^2 (1-P_b)^{n^2-7} \right] \cdot 2 \\
&\cong 24 \cdot (2^m-1)^2 (2^m-2)^2 \cdot P_b^7 \quad \dots (5.10)
\end{aligned}$$

〔Ⅱ〕 イレージャ・誤り復号

イレージャ・誤り復号器は3イレージャ・0誤り、又は1イレージャ・1誤りを訂正できる。この場合、誤り検出確率 P_{DT} は式(5.9)と同様にして復号誤りを含まない 4×4 の格子パターンによる生起確率と〔Ⅰ〕で復号誤りを与え

ていた格子パターンが首尾よく検出される確率との和で与えられる。

$$\begin{aligned}
 P_{DT} &\cong \frac{4^2}{n^2} \binom{n}{4}^2 \cdot 90 \cdot P_b^8 (1-P_b)^{n^2-8} \\
 &\quad + \frac{4}{n} \left[\binom{n}{3} \binom{3}{1} \binom{4}{3} A_4 \cdot P_b^3 \cdot \binom{2}{1} \binom{4}{2} P_b^2 \right. \\
 &\quad \left. \cdot P_b^2 (1-P_b)^{n^2-7} \right] \cdot 2 \\
 &\cong 8 \cdot 2^m \cdot (2^m - 1)^2 (2^m - 2)^2 P_b^7 \\
 &\quad + (5/2) (2^m - 1)^2 (2^m - 2)^2 (2^m - 3)^2 P_b^8 \quad \dots (5.11)
 \end{aligned}$$

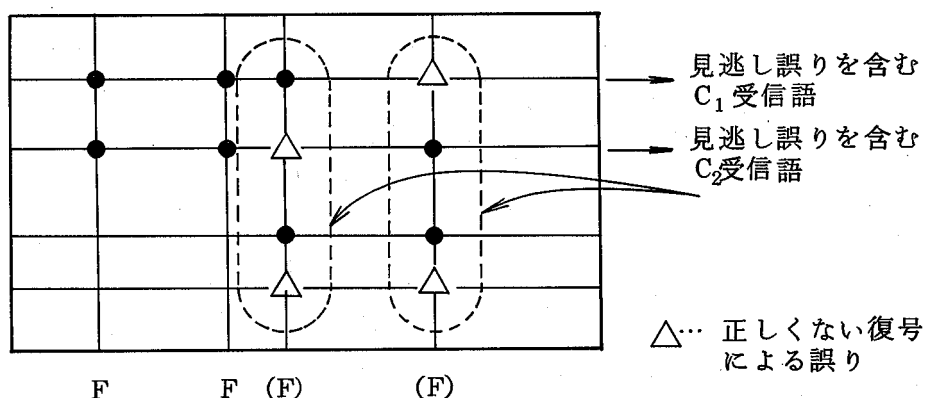


図 5.5 イレージャ・誤り復号における復号誤り確率主要項を与える誤りパターンの一例

復号誤り確率は C_1 符号, C_2 符号の何れで復号しても 3 イレージャ・0 誤り又は 1 イレージャ・1 誤り訂正が不可能な場合であり, 図 5.5 のようなパターンの生起確率の和となる。復号誤り確率 P_{DT} は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 P_{DE} &\cong \frac{4^2}{n^2} \left[\binom{n}{3} \binom{3}{2} A_4 \binom{4}{3} (P_b^3)^2 \binom{4}{2} \cdot P_b^2 \right. \\
 &\quad \left. \cdot (1-P_b)^{n^2-8} \right] + \frac{4^2}{n^2} \left[\binom{n}{3} \binom{3}{2} A_4 \binom{4}{3} \cdot P_b^3 \right. \\
 &\quad \left. \cdot 1 \cdot P_b^3 \cdot 1 \cdot P_b^2 (1-P_b)^{n^2-8} \right] \\
 &\cong (100/3) \cdot (2^m-1)^2 (2^m-2)^2 P_b^8 (1-P_b)^{n^2-8} \quad \dots (5.12)
 \end{aligned}$$

5.2.3 Chase 復号器との比較

(a) 2次元Chase 復号器

Chase 復号器は特定の軟判定復号アルゴリズムを用いず、重み $\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$ (d は最小距離) までのテストパターンと重み $\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$ までの誤りを訂正する硬判定の復号器を用いて、重み $d-1$ までの誤りを軟判定復号している点に大きな特徴がある。

図 5.6 に Chase 復号の概念図を、又図 5.7 に復号フローチャートを示す。

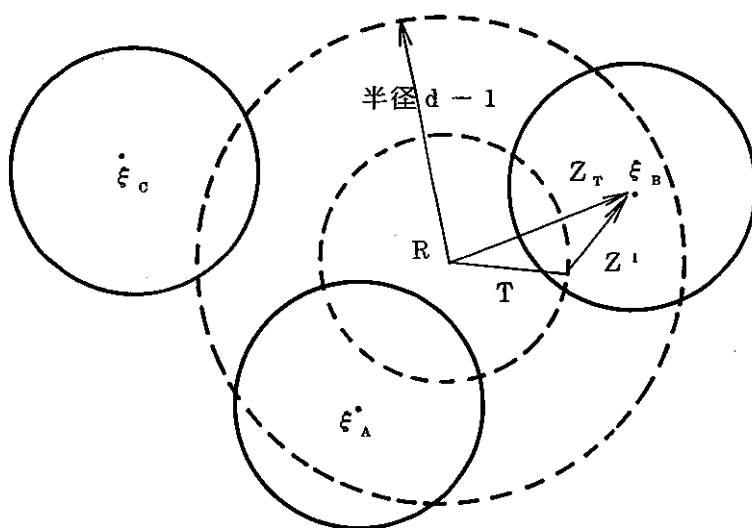


図 5.6 Chase 復号の概念図

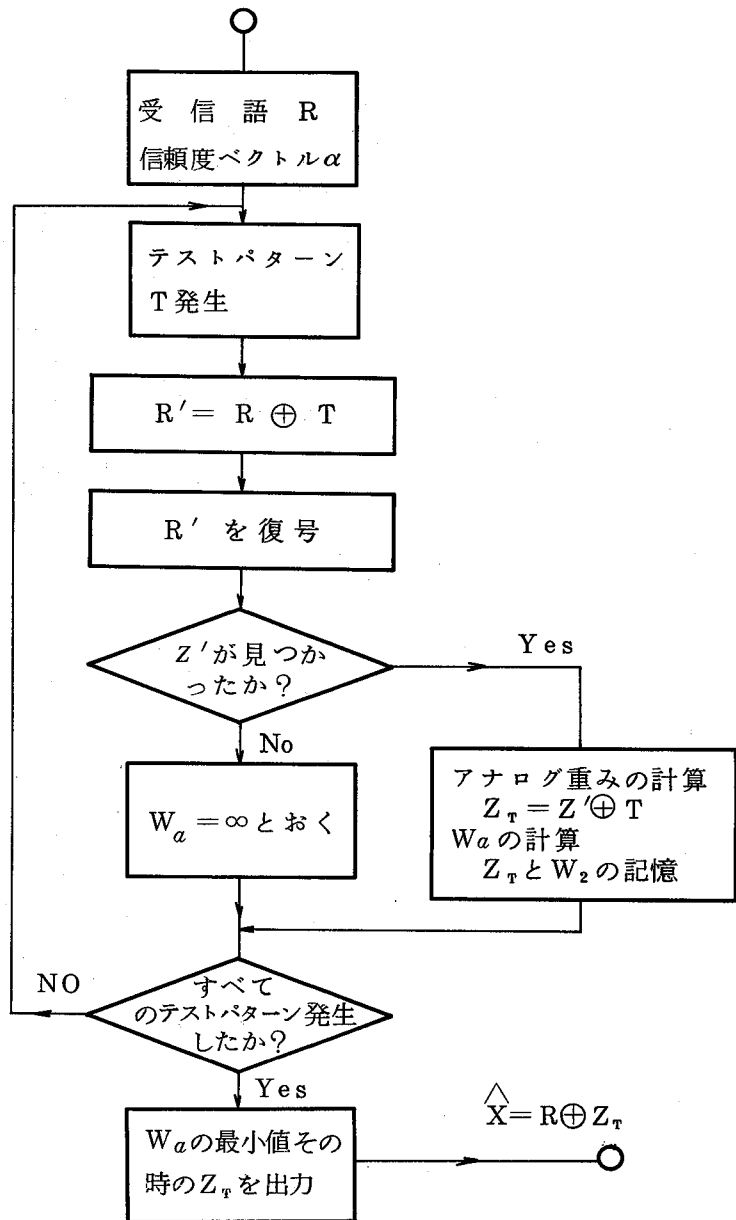


図 5.7 chase 復号フローチャート

C_1 復号器で誤りなしと判定した時には信頼指数 $j = 0$ のフラグを付加し、
又、単一誤りを訂正した時には信頼指数 $j = 1$ のフラグを付加する。さらに 2
重の誤りを検出した時は $j = 2$ のフラグを付加するものとする。一方、 C_2 復

号器では C_1 復号で得られたイレージャ情報を用いて Chase 復号法⁽⁶⁾ (アルゴリズム III⁽⁶⁾, 単一誤り訂正) を適用する。

(a) Chase 復号器

以下においては SEC-DED 符号を対象としてアルゴリズム III⁽⁶⁾ を用いた 2 ステップ復号の Chase 復号器のパフォーマンスを検討する。

(b) 数値計算

アナログ重みを計算する際必要となる信頼指数フラグの付加された誤りビット (1^j で表示) および正しいビット (0^j で表示) の生起確率は表 5.1 のようになる。アナログ重み計算は従来の Chase 復号法におけるアナログ重み計算法とは異なり生起確率に対応づけて計算する⁽²⁷⁾。

誤り検出確率 P_{DET} の主要項は 2 重誤り ($j = 0$ の誤り) 生起確率によって与えられ、

表 5.1 信頼指数フラグ付きの誤りビットおよび正しいビットの生起確率

*j (j は信頼指数)	生 起 確 率
1^2 の生起確率	$P_2 \cong \frac{2}{n} \binom{n}{2} P_b^2 (1-P_b)^{n-2}$ $\cong (2^m - 1) P_b^2$
1^1 "	$P_1 \cong \frac{4}{n} A_4 \binom{4}{3} P_b^3 (1-P_b)^{n-3}$ $\cong \frac{2}{3} (2^m - 1) (2^m - 2) P_b^3$
1^0 "	$P_0 \cong \frac{4}{n} A_4 P_b^4 (1-P_b)^{n-4}$ $\cong \frac{1}{6} (2^m - 1) (2^m - 2) P_b^4$
0^2 "	$Q_2 \cong \frac{n-2}{n} \binom{n}{2} P_b^2 (1-P_b)^{n-2}$ $\cong (2^m - 2) (2^m - 1) P_b^2$
0^1 "	$Q_1 \cong \binom{n}{1} P_b (1-P_b)^{n-1}$ $\cong 2^m P_b$
0^0 "	$Q_0 \cong 1 - \frac{4}{n} A_4 P_b^4 (1-P_b)^{n-4}$ $\cong 1$

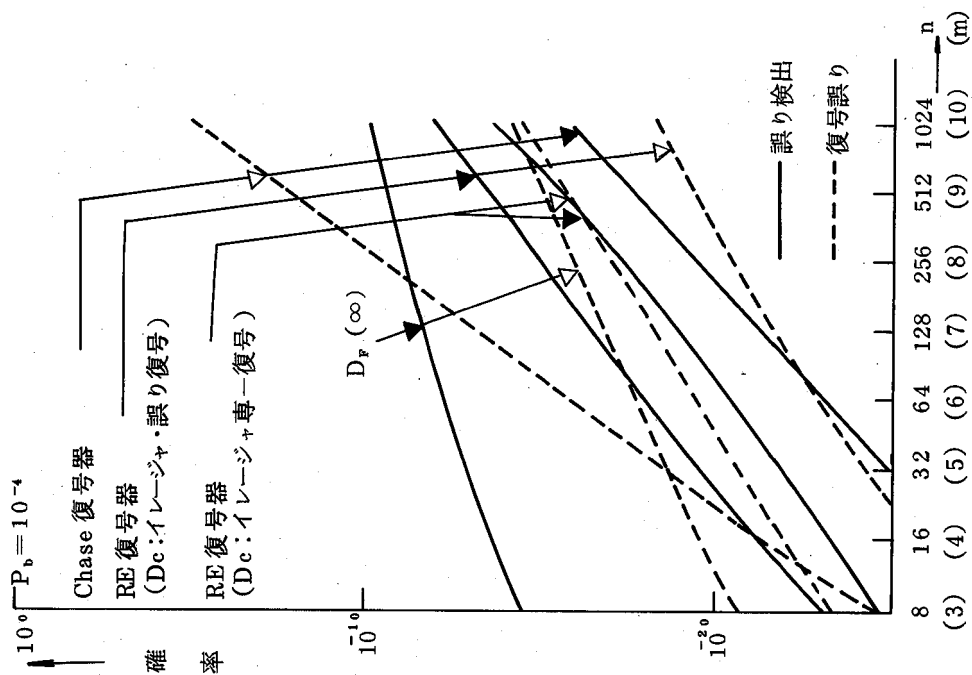
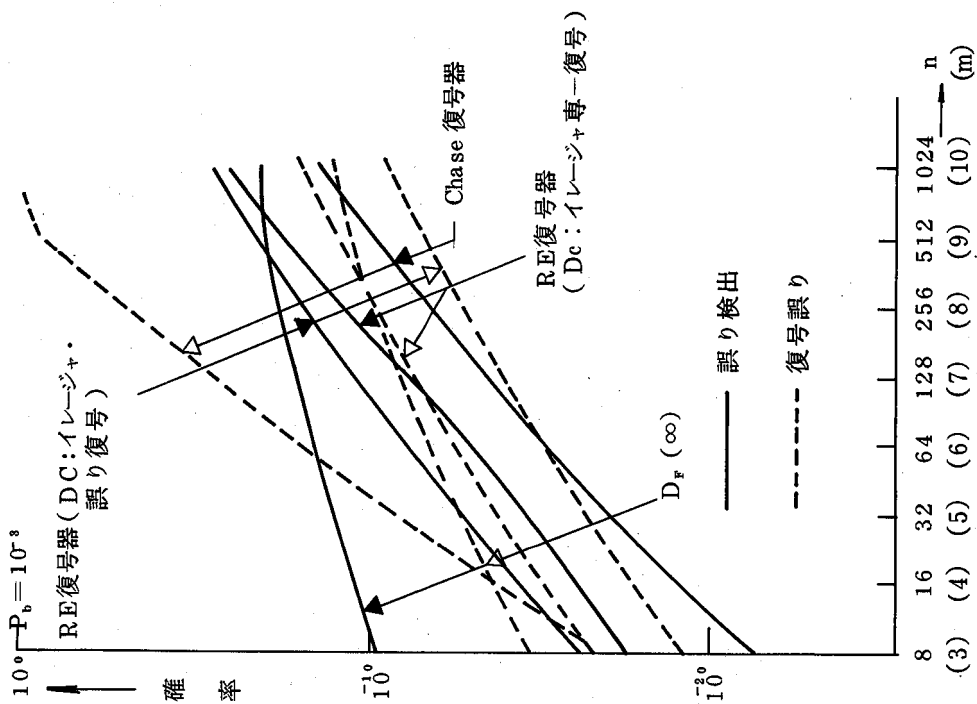
$$P_{DT} \cong \binom{n}{2} P_b^2 Q_0^{2^m-2} \cong \frac{1}{72} \cdot 2^m \cdot (2^m - 1)^3 (2^m - 2)^2 \cdot P_b^8 \quad \dots (5.13)$$

となる。付録 K の手法で誤りパターンを分類すると P_b^8 の項が主要な生起確率を与える誤りパターンであることがわかる。従って復号誤り確率 P_{DE} は付録 K の付表 K.3 の表記に従うと、 $e(1^1, 1^2, 0^1, 0^2)$, $e(1^2, 1^2, 1^2, 0^2)$, $e(1^0, 1^2, 1^2)$, $e(1^0, 1^2, 0^2)$, $e(1^2, 1^2, 1^1, 0^1)$, $e(1^2, 1^2, 0^2, 0^2)$,

$e(1^2, 1^2, 1^2, 1^2)$ の各パターンの生起確率の総和として次式となる。

$$\begin{aligned}
 P_{DE} &\cong \frac{4}{n} \cdot \left\{ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} P_1 P_2 Q_1 Q_2 Q_0^{n-4} \right\} \\
 &+ \frac{1}{12} \{ n(n-1)(n-2)(n-3) P_2^3 Q_2 Q_0^{n-4} \} \\
 &+ \frac{1}{2} \{ n(n-1)(n-2) P_0 P_2^2 Q_0^{n-3} \} \\
 &+ \frac{1}{2} \{ n(n-1)(n-2) P_0 P_2 Q_2 Q_0^{n-3} \} \\
 &+ \frac{1}{4} \{ n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot P_1 P_2^2 Q_1 Q_0^{n-4} \} \\
 &+ \frac{1}{16} \{ n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot P_2^2 Q_2^2 Q_0^{n-4} \} \\
 &+ \frac{1}{24} \{ n(n-1)(n-2) \cdot P_2^4 \cdot Q_0^{n-4} \} \\
 &\cong \frac{1}{12} (2^m - 1)^5 (2^m - 2) \{ 11 \cdot (2^m)^3 - 57 \cdot (2^m)^2 \\
 &\quad + 80 \cdot 2^m - 18 \} \Bigg] P_b^8 \quad \dots (5.14)
 \end{aligned}$$

以上の計算結果を図 5.8, 図 5.9, 図 5.10 および図 5.11 に示す。



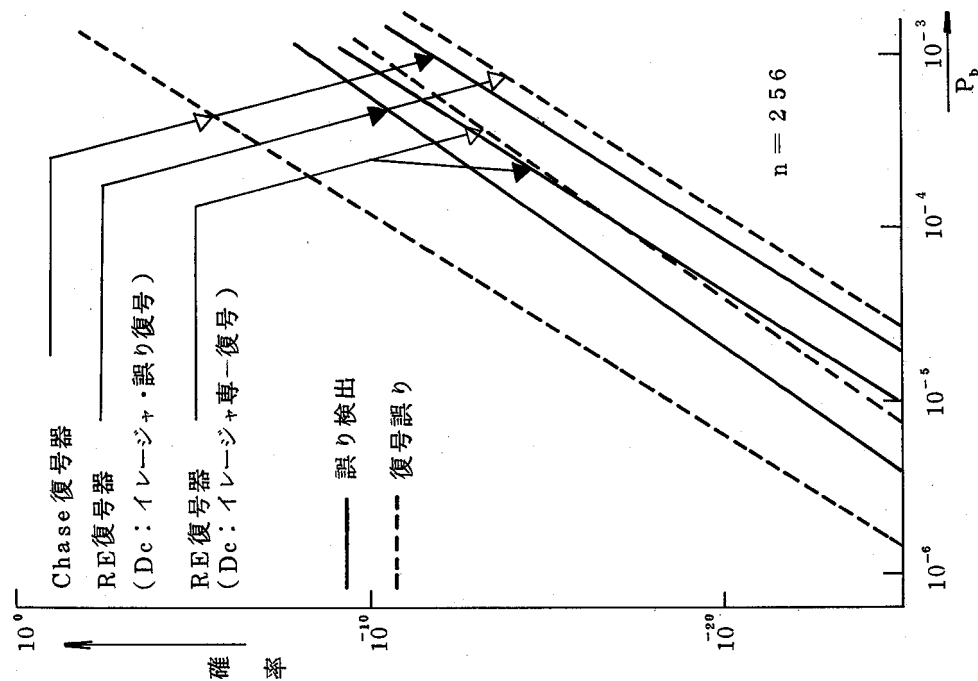


図 5.10 通信路誤り率 P_b に対する
パフォーマンス変化
(符号長 $n = 256$)

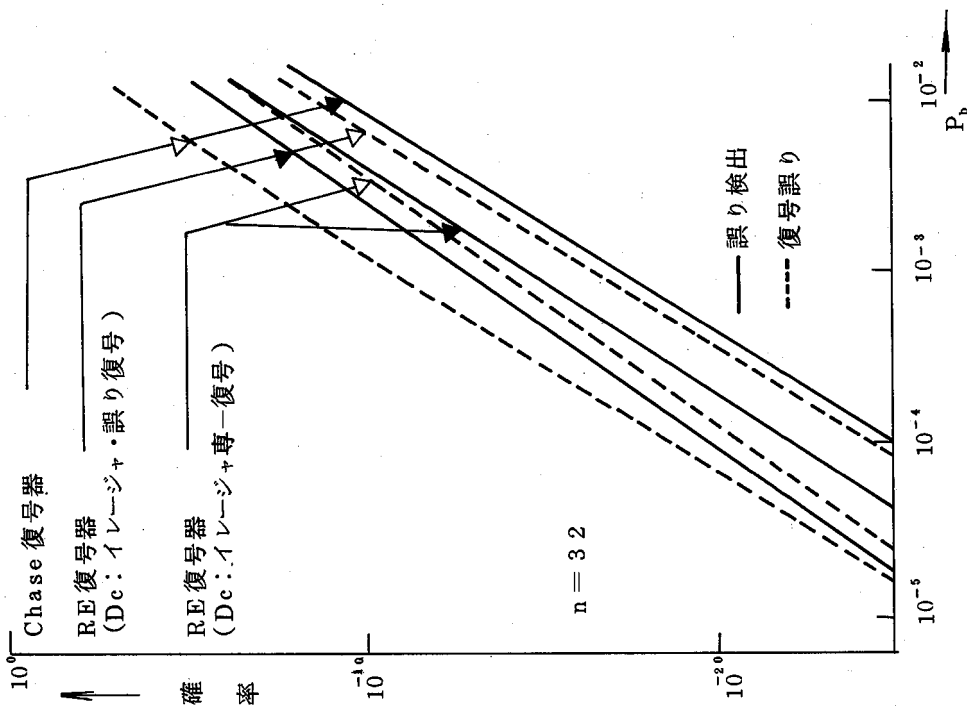


図 5.11 通信路誤り率 P_b に対する
パフォーマンスの変化
(符号長 $n = 32$)

5.2.4 考 察

(1) RE復号法のパフォーマンス

図 5.8 および図 5.9 より明らかとなることを要約しよう。

- (i) $D_F(\infty)$ 復号から D_C 復号した場合の誤り検出確率に関する改善効果が著しく、RE復号法の効果が大きいことが分かる。

一方、復号誤りに関しては、RE推定器により誤った訂正が検出されるため、イレージャ専一復号を D_C 復号に用いても復号誤りの生起が低く抑えられ、その改善が顕著である。

- (ii) RE復号器を用いると符号長 $n_0 (=n^2)$ の増大に従いパフォーマンスは相対的に劣化の傾向にあるものの、その傾向はChase復号法に比べゆるやかである。

- (iii) D_C 復号にイレージャ・誤り復号を用いたRE復号の場合が他の2者（ D_C 復号にイレージャ専一復号を用いたRE復号、および $D_F(\infty)$ ）と比べて誤り検出確率、および復号誤り確率の適切な配分という点で総合的に優れている。

(2) Chase 復号のパフォーマンス

図 5.8, 図 5.9, 図 5.10 および図 5.11 より明らかとなることを要約し、考察を加える。

- (i) Chase 復号は一度に多数の誤りを訂正するために正しい復号確率が大きくなる反面、復号誤り確率も又、大きくなり、結果として誤り検出確率（即ち訂正不能確率）が非常に小さくなる。
- (ii) 通信路誤り率 $P_b = 10^{-3}$ の時はほぼ $n = 64$ で、又、 $P_b = 10^{-4}$ では $n = 256$ で $D_F(\infty)$ 復号と Chase 復号のパフォーマンスが逆転する。即ち符号長 n_0 の増大とともに Chase 復号器は不利となる。

(3) RE復号法と Chase 復号法との比較

- (i) 通信路誤り率 P_b が一定の場合：

図 5.8 および図 5.9 より次のことが明らかになる。Chase 復号は符号長 $n_0 (=n^2)$ が比較的小さい範囲で良好であるが n_0 の増大に伴い急激に劣化し、誤り率の高い通信路では用いることが困難となる。即ち符号長 n_0 が大である符号には必ずしも適していない。一方、RE 復号では符号長の増大とともに誤りの分散効果が大となり n_0 がある程度大きくなってもパフォーマンスはさほど劣化しない。 $P_b = 10^{-3}$ の場合 n が 256 以下ならば D_0 復号にイレージャ・誤り復号、あるいはイレージャ専一復号の何れを用いても誤り検出確率、復号誤り確率は共に 10^{-10} 以下を満足している。

(iii) 符号長 n_0 が一定の場合：

図 5.10 および図 5.11 より通信路誤り率が劣化するに従い Chase 復号の方がパフォーマンスの劣化の程度が大であるが、この差は符号長 n_0 を変化させた時ほど著しくはない。

5.3 誤り監視計数復号

5.3.1 原理

本節においては RE 復号法に誤り監視計数器を導入して各 C_1 復号、 C_2 復号で推定した誤りの総数を計数器で計数する。⁽³³⁾ このようにすることによって

- (1) C_1 復号、 C_2 復号、各々 1 回づつでも訂正すべき誤りであったか誤り状態の推定が可能である。即ちバースト誤りが生起したかどうかの検出が可能となる。
- (2) $D_F(\infty)$ 復号において即ちフィルタリング復号完了状態で C_1 計数器と C_2 計数器の内容が一致しない場合は復号誤りが生起していることが判定できる。
- (3) $D_F(\infty)$ 復号において、計数器の内容が一致しない時は計数器の内容の少ないほうの方向の復号により多くの復号誤りパターンが含まれているこ

とが判定できる。

ことなどを明らかにする。

5.3.2 復号器の構成

全体のブロック図を図 5.12 に示す。符号 C_1 ，符号 C_2 を各々 (n_1, k_1, d_1) ， (n_2, k_2, d_2) 線形符号とする。送信側では情報記号はまず C_2 符号化され、次に C_1 符号化され通信路に送出される。

〔 I 〕 フィルタリング復号 ($D_F(i)$ 復号)

$D_F(i)$ 復号モードでは比較的単純な " 誤り専一復号器 " を繰り返し用いて残留する誤りパターンをいわば積極的に浮き上がらせる。

図 5.13 に符号 C_1 および符号 C_2 を符号長 n ，最小距離 4 の符号としたときの受信語の例を示す。

ステップ 1 のレジスターで○印の数値は誤訂正が生起していることを示している。 $D_F(1)$ の計数器は 11 個の誤りが検出されたことを示しており、 $D_F(2)$ の計数器は 12 個の誤りが検出されたことを示している。以下同様の復号が繰り返され誤りの大部分が訂正される。図 5.13 の中で $D_F(1)$ の C_1 計数器、 $D_F(2)$ の C_2 計数器、…、は各受信語ごとのシンδροームにより推定された誤りの個数を合計し、総数を RE 推定器に転送する。

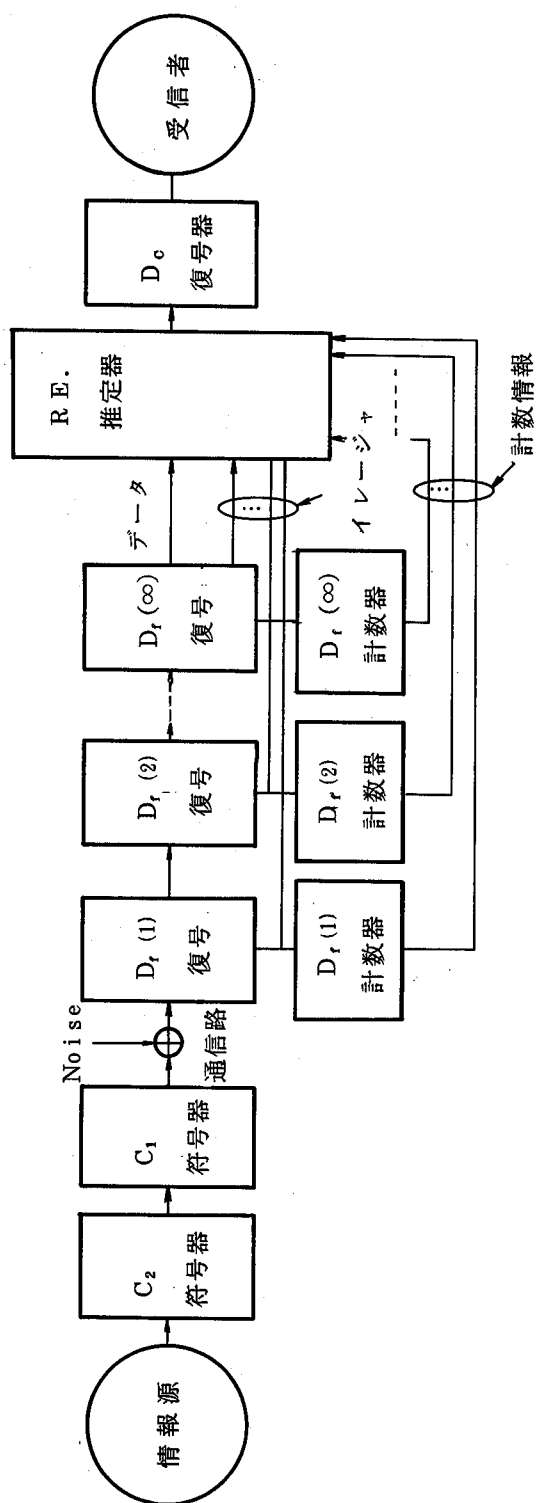


図 5.12 計数型 R E 復号システム

図 5.1 3 でステップ 1, 2, 3, 4, …, と進むに従って計数器の内容が 11, 12, 4, 6, 4, 4, …と漸次変化していくのが理解できよう。

〔Ⅱ〕 残留イレージャ推定 (RE 推定)

各ステップの復号時の情報を RE 推定器に入力し、格子状に残留する誤りパターンを推定する。推定の方法としてはフィルタリング復号の際に誤り訂正又は検出のいずれの場合にもフラグを立て、そのフラグ情報によって推定する。

〔Ⅲ〕 最終段訂正復号 (Dc 復号)

Dc 復号モードでは推定された格子状のパターンの各格子点に存在するシンボルをイレージャ専一復号又はイレージャ・誤り復号によって復号する。

5. 3. 3 最小ステップ誤り推定法

(a) 限界距離復号法との比較

RE 復号法はフィルタリング復号 (繰返し) によって種々の興味ある特徴がでてくるが現実には 2 ~ 3 ステップで復号を完了した方が復号時間の点でより好ましい場合も多い。そこで C_1 復号, C_2 復号一度ずつの復号でも誤りを推定する方法を考えよう。 C_1 符号の最小距離を d_1 , C_2 符号の最小距離を d_2 とした時、積符号全体の最小距離は明らかに $d_1 d_2$ となる。この時、限界距離復号などによって保証された訂正能力は

$\lfloor (d_1 d_2 - 1) / 2 \rfloor$ となる。しかしながら積符号に対する一般の復号では C_1 復号で訂正しきれず誤訂正または見逃し誤りになった誤りを C_2 復号で訂正することができる。従って通常この限界距離 $\lfloor (d_1 d_2 - 1) / 2 \rfloor$ を越えて訂正する場合も有り得る。この場合正しい復号確率は増大するものの復号誤り確率も増大することが十分推定できる。この弊害は 2 つの計数器, C_1 計数器, と C_2 計数器をもちいて首尾よく軽減できる。

C_1 復号で推定された誤りの総数が $N_1(c)$ であったとする。通信路で生じた誤りの個数を $N_1(r)$ とし、又、 C_2 復号で推定された誤りの総数を $N_2(c)$ とする。 C_2 復号を行う直前の誤り総数を $N_2(r)$ とする。付録 L より

$$N_1(c) + N_2(c) > N_1(r) > \max(N_1(c), N_2(c)) \quad \dots (5.15)$$

の関係式が得られる。 $N_1(c)$, $N_2(c)$ は計測可能であるから首尾よくランダム誤り個数の推定が可能である。

一方、通信路がランダム誤りとバースト誤りとの混在するいわゆる複合誤り通信路である場合、推定された $N_1(r)$ の値が $\lfloor (d_1 d_2 - 1) / 2 \rfloor$ を越えていると通信路にランダム誤りではなくバースト誤りが生起していることが考えられる。このことについては次節で詳述する。

(b) バースト誤りに対する考察

バースト誤りが図5.14のように生起している場合を考える。

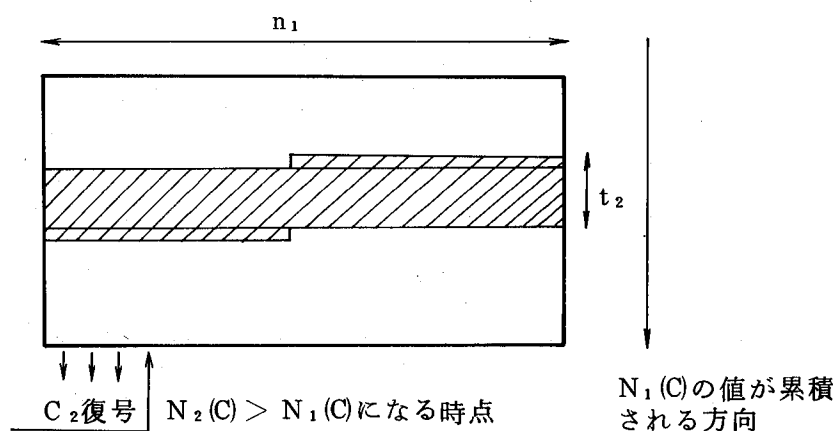


図5.14 バースト誤りに対する計数器の値

C_1 復号において、 $t_1 + 1$ 個以上の誤りが検出されるか又は t_1 個以下の誤りとして誤訂正又は見逃し誤りが生起する。 C_1 計数器によって C_1 復号の際の推定誤り個数が合計されるがその数値を $N_1(c)$ とすると

$$N_1(c) \leq (t_1 + 1)(t_2 + 1) \quad \dots (5.16)$$

となる。 C_2 復号の際推定される誤り個数はバースト長を簡単のためちょうど $n_1 t_2$ であるとする、各受信語の復号の際 t_2 の値が n_1 回加算さ

れる。即ち C_2 復号の推定誤り個数を $N_2(c)$ とすると

$$N_2(c) = t_2 n_1 \quad \cdots (5.17)$$

となる。 $N_1(c)$, $N_2(c)$ の差は

$$N_2(c) - N_1(c) = t_2 \left[n_1 - (t_1 + 1) \left(1 + \frac{1}{t_2} \right) \right] \quad \cdots (5.18)$$

となる。従ってこれらの数値 $N_1(c)$ および $N_2(c)$ が

$$N_2(c) > N_1(c) \quad \cdots (5.19)$$

となり、このようにして逆転した時点で C_2 復号をランダム誤り訂正モードからバースト誤り訂正モードに切り替え C_2 復号から再度やり直すことができる。このようにして、より通信路の誤り状態に適合した誤り制御が可能になる。なおランダム誤りをとバースト誤りを2様に訂正する方式としては文献⁽⁵⁴⁾がある。

5.3.4 シミュレーション

ここでは C_1 復号, C_2 復号共に (8, 4, 4) SEC-DED Hamming 符号でシミュレーションを行った。まず擬似乱数によりランダム誤りを通信路誤り率 $P_e = 0.078 \sim 0.44$ で発生させて実際に復号動作を実行させ、残留誤りパターンが浮き上がっていく様子を観察した。ここで計数器の値の変化を図 5.15 および表 5.2 に示す。

これらの表およびグラフより明らかなように殆どの場合、4～5ステップで残留誤りパターンが定常状態に入っている。 $P_e \leq 0.14$ 以下の場合には推定誤りと実際の誤りが完全に一致している。又 $P_e \leq 0.078$ の場合には3ステップで誤りが訂正され消滅している。誤り率 P_e が 0.4 近辺では推定誤り個数が振動しているように見えるがこれは偶数ステップ、奇数ステップでそれぞれ収斂しているためである。この場合明らかに計数器の数値のより小なる方の復号により多くの復号誤りが含まれていることになる。

表 5.2 SEC-DED 符号を C_1 , C_2 に用いたシミュレーション結果

残留誤り個数と復号ステップ数

r : 実際の誤り数, c : 推定誤り数 → 復号ステップ数

P_e	r/c	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.078	r	5	2	0	0	0	0	0	0	0	0
	c	5	2	0	0	0	0	0	0	0	0
0.094	r	6	4	0	0	0	0	0	0	0	0
	c	6	4	0	0	0	0	0	0	0	0
0.14	r	9	6	6	6	6	6	6	6	6	6
	c	9	6	6	6	6	6	6	6	6	6
0.17	r	11	10	10	12	12	12	12	12	12	12
	c	7	6	6	4	4	4	4	4	4	4
0.30	r	19	16	14	10	12	12	12	12	12	12
	c	13	10	8	6	4	4	4	4	4	4
0.39	r	25	26	26	26	24	26	24	26	24	26
	c	11	12	8	12	6	10	6	12	6	12
0.44	r	28	30	30	30	32	30	32	32	32	32
	c	12	14	8	12	6	10	4	8	2	8

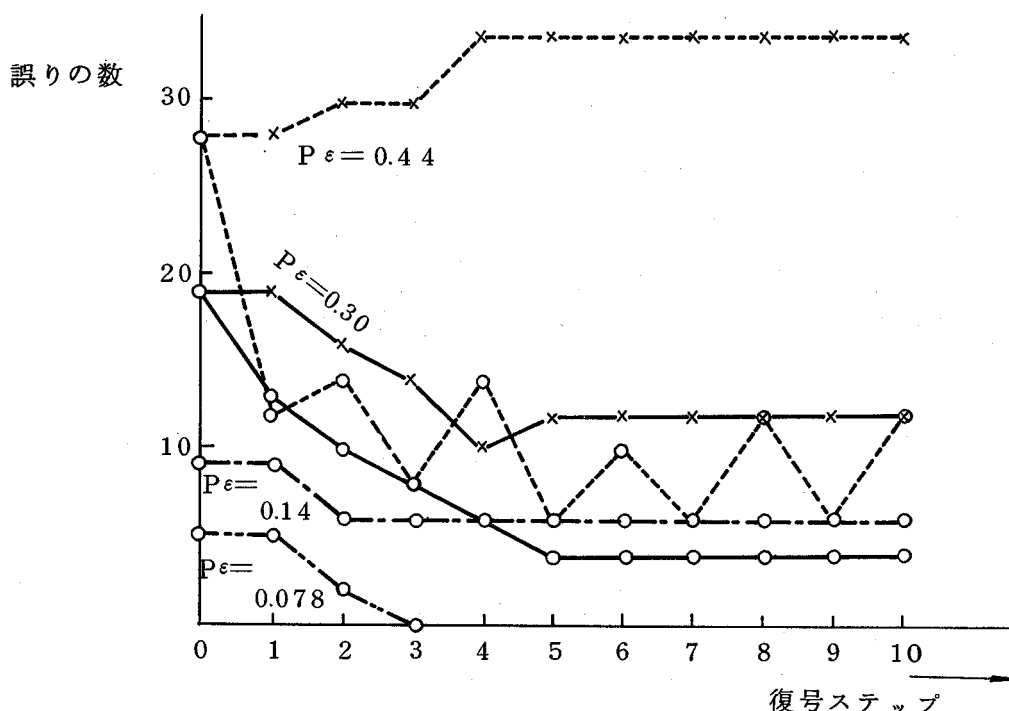


図 5.15 計数器の内容と実際の誤り数の変化

5.4 多次元Chase復号

1次元のChase復号法を多次元に一般化しその性質を明らかにする。⁽²⁸⁾⁽²⁹⁾ 多次元Chase復号器の場合テストパターンは多次元となり、行方向に計算したアナログ重みと列方向に計算したアナログ重みの一致／不一致を調べることによって復号誤りの生起を検出でき、更には正しい復号出力を選択できる。多次元のChase復号器にRE復号法（残留イレージャ推定復号）を適用した場合、確率的にはあるが積符号の本来持っている保証された誤り訂正能力を越えて訂正ができる可能性があることを示す。

5.4.1 信頼指数 α の計算

2次元の符号に2ステップのChase復号を用いた報告がすでになされている。⁽¹⁸⁾ これはテストパターンは行、又は列のままで一次元のテストパターンで

復号している。すなわちこの方法では前ステップの復号情報より信頼度情報を得て Chase 復号を可能にしている。

本論文では信頼度情報を前ステップの復号情報から得るのではなく通信路監視情報 (channel measurement information⁽⁶⁾) を用いることにする。従って信頼指数はシンボルに 1 対 1 対応で与えられ、文献⁽¹⁸⁾の方法 I, II の如く列単位、又は行単位ではない。ところで $\alpha_2(i, j)$ を通信路監視情報から取った場合、次の利点が考えられる。

即ち、 C_i ($i = 1, 2$) 方向に復号誤りが起った場合、ある 2 次元テストパターンに対し、 C_i 方向で復号した場合の復号結果と $C_{i'}$ ($i \neq i'$, $i' = 1, 2$) 方向で復号した場合の復号結果が一致しない時は C_i 又は $C_{i'}$ 方向に復号誤りが含まれていることが首尾よく判定される。すなわち、 C_i (又は $C_{i'}$) 方向に復号誤りが含まれており、復号誤りが含まれている部分のアナログ重みは誤訂正パターンのアナログ重みを計算していることになる。一方 $C_{i'}$ 方向に正しい復号がなされると C_i 方向で復号誤りを起こした各シンボルは $C_{i'}$ 方向では分散されて正しく訂正されアナログ重みも正しく算出される。アナログ重みが大なる方の復号結果を出力することにより、両復号結果パターンのつきあわせを行わなくても復号誤りを検出でき、更には正しく復号できる。これは従来できなかった機能である。

〔例題 5.1 $d = 4$ の Hamming (15, 10, 4) 符号で C_1, C_2 を構成した場合〕

従来の Chase 復号器ではテストパターンが完全に誤りのあるポジションに一致しても多数のテストパターン (零ベクトルパターンを含む) のなかに必ずアナログ重みがより小さい (つまり生起確率のより大きい) ものが存在し、これが選択され誤訂正されてしまう。図 5.16 の C_1 受信語の w' の復号においては多くの場合、零ベクトルのテストパターンと信頼度の低い 4 個のポジションに 1 のあるテストパターンのアナログ重みが比較される。図 5.16 の場合、従

来の Chase 復号器では C_2 先行復号し、 C_2 の復号情報を利用して C_1 を Chase 復号すると C_1 復号で信頼指数 2 の誤りが 4 個存在するためアナログ重みはある正の実数値となる。一方零ベクトルのアナログ重みはほとんど 0 に近いから、これは常に零ベクトルの誤りパターンとして図 5.16 の w' 行の部分に復号誤りが生起する。

しかるにこれを 2 次元のテストパターンで復号した場合に C_1 方向の復号では w' 行の復号が正しく行われず、誤りが見逃される。そのアナログ重みは零ベクトルのテストパターンに対する数値およびパターンが記憶される。そして C_1 方向（行方向）のアナログ重みの合計が

$$w_u = w_1 + w_2 + \cdots + w' + \cdots + w_n \quad \cdots (5.20)$$

で求められる。

一方、列方向の復号では各列 2 個ずつ誤りが存在するが信頼度情報が正確であれば各列ごとに訂正されて首尾よく復号されることは明らかである。この場合の復号は列方向に正しく実行される。なおアナログ重みは

$$W_z = W_1 + W_2 + \cdots + W_N \quad \cdots (5.21)$$

で与えられる。この場合は w' 行の 4 個の誤りは各列に誤ったシンボルの重みとして全て計上されているので、この列では行方向のアナログ重みより 4 個分大きくなっている。即ち

$$W_z > w_u \quad \cdots (5.22)$$

が成り立つ。このようにして正しい出力を選ぶことができる。（付録 M 参照）。

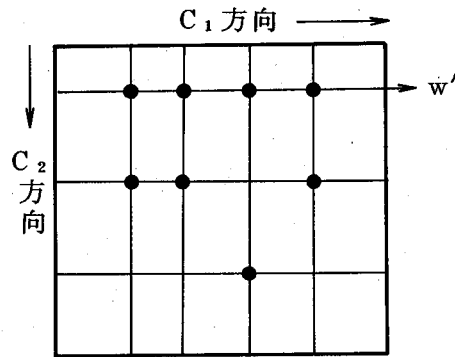


図 5.16 復号誤りを含んだ Z_{UT} パターン

5.4.2 多次元 Chase 復号

積符号 C は符号 C_1 , 符号 C_2 , ..., 符号 C_u から構成されるとする。符号 C_1 , C_2 , ..., C_u の符号長をそれぞれ n_1 , n_2 , ..., n_u 最小距離を同様に d_1 , d_2 , ..., d_u とする。以下に Chase 復号器を多次元に拡張しよう。明らかにテストパターンは多次元パターンになる。復号器の出力 $\hat{X}_u$ は

$$\begin{aligned}\hat{X}_u &= R'_u + Z'_u \\ &= R_u + T_u + Z'_u\end{aligned}\quad \cdots (5.23)$$

となる。ここで R_u は受信ベクトル, Z'_u は復号器が訂正した誤りベクトル, R'_u は受信ベクトルとテストパターン T_u の合成受信ベクトルで各復号器への入力となる。受信語 R_u に対する誤りパターン Z_{uT} は

$$Z_{uT} = T_u + Z'_u\quad \cdots (5.24)$$

次に Z_{uT} に対するアナログ重み $W_{u\alpha}(Z_{uT})$ を計算する。これをすべてのテストパターンについて行う。アナログ重み最小の u 次元誤りパターン Z_{uT} を真の誤りパターンとして選び訂正を実行する。 u 次元の符号の合成最小距離 D を

$$D = d_1 d_2 \cdots d_u\quad \cdots (5.25)$$

と定義する。

D-1 以下の重みの誤りは訂正可能である。

5.4.3 信頼指数とアナログ重み

誤りパターン Z_{uT} のアナログ重み $W_{u\alpha}(Z_{uT})$ は

$$W_{u\alpha}(Z_{uT}) = \sum_{\ell=1}^{n_u} \cdots \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_u(i, j, \dots, \ell) \quad \cdots (5.26)$$

で与えられる。アナログ重みの計算は一つのテストパターンにつきその次元数 u に等しい回数の計算をする。アナログ重み最大の u 次元誤りパターン Z_{uT} を真の誤りパターンとして復号する点が従来の Chase 復号法と異なる。

$$\alpha_u(i, j, \dots, \ell) = p_{i, j, \dots, \ell}^{\theta(i, j, \dots, \ell)} \cdot q_{i, j, \dots, \ell}^{1-\theta(i, j, \dots, \ell)} \quad \cdots (5.27)$$

$$\theta(i, j, \dots, \ell) = \begin{cases} 0 & \cdots (i, j, \dots, \ell) \text{要素が誤っていない。} \\ 1 & \cdots (i, j, \dots, \ell) \text{要素が誤っている。} \end{cases} \quad \cdots (5.28)$$

$$\theta(i, j, \dots, \ell) = 0 \quad \cdots (5.29)$$

の生起確率を $Q(i, j, \dots, \ell)$ とし、

$$\theta(i, j, \dots, \ell) = 1 \quad \cdots (5.30)$$

の生起確率を $P(i, j, \dots, \ell)$ とする。

又、次のアナログ重みを定義する。

$$p_{i, j, \dots, \ell} = -\log P(i, j, \dots, \ell) \quad \cdots (5.31)$$

$$q_{i, j, \dots, \ell} = -\log Q(i, j, \dots, \ell) \quad \cdots (5.32)$$

アナログ重みは u 回計算されるがその値が全て一致していない時は復号誤りが明らかに含まれている。この場合アナログ重みの最大の次元の誤りパターン Z_{uT} に対する出力を復号結果として出力する。

5.4.4 多次元 Chase 復号器の種類

(i) 1次元のテストパターンを用いる方法

従来知られている方法として、2次元符号に Chase のアルゴリズムを用いるものに前ステップの復号の際のシンδροーム情報より信頼度情報を得て次ステップの Chase 復号に用いる方法がある。⁽¹⁸⁾この場合テストパターンは1次元のパターンを用いて全体の復号を行うので後述するような方法で復号誤りを検出することはできない。又、次元数が多くなると復号が複雑になる。

(ii) 多次元のテストパターンを用いて与えられた次元の復号を完了させ、その結果を次の次元の復号の入力とし、順次復号を実行する。この方法も次元数が多くなると復号が複雑になり、又、後述するような復号誤り検出の機能はない。

(iii) 一つのテストパターンについて各次元毎（2次元の場合は行方向、および列方向となる）に次元数に等しい u 通りアナログ重みを計算し、受信ベクトル R_u に対する合成誤り Z_{uT} を求める。各次元毎のアナログ重みが完全に一致しない場合に復号誤りが生起していることを検出できる。

本報告では新しい方式としての(iii)について検討する。⁽²⁷⁾

例

最小距離4のSEC-DED符号による3次元の積符号をChase復号することを考えよう。 C_x 符号を $(n_x, k_x, 4)$ SEC-DED符号, C_y 符号を $(n_y, k_y, 4)$ SEC-DED符号, C_z 符号を $(n_z, k_z, 4)$ SEC-DED符号とする。信頼指数はシンボルに1対1対応で与えられるとする。今、X軸方向とY軸方向に図5.17に示すように復号誤りが生起しているとする。

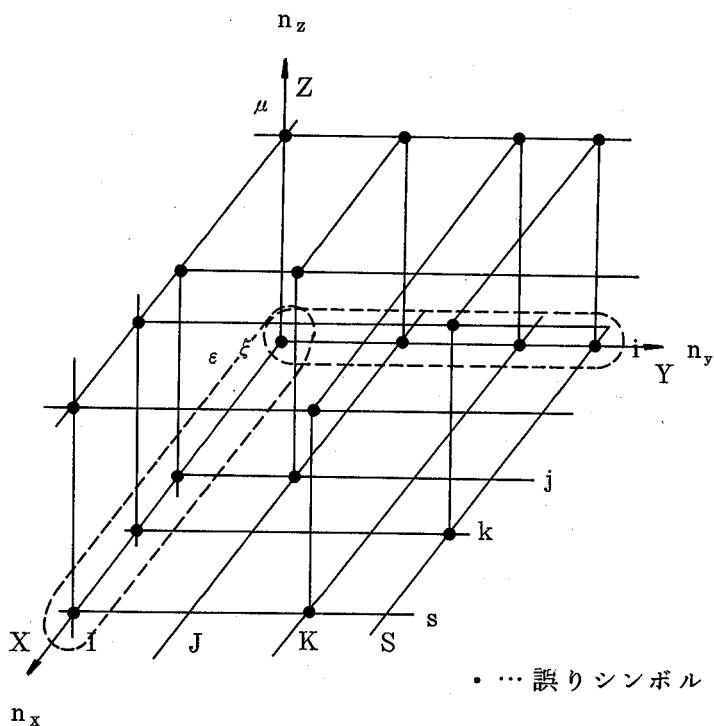


図5.17 3次元の誤りパターン

(X軸とY軸方向に復号
誤りが生起している)

X軸方向で求めたアナログ重みは

$$w_x(I, \xi) = q_{I,1,\xi} + \dots + q_{I,i,\xi} + \dots + q_{I,j,\xi} + \dots + q_{I,k,\xi} + \dots + q_{I,s,\xi} + \dots + q_{I,n_x,\xi}$$

$$w_x(J, \xi) = q_{J,1,\xi} + \dots + p_{J,i,\xi} + \dots + p_{J,j,\xi} + \dots + q_{J,k,\xi} + \dots + q_{J,s,\xi} + \dots + q_{J,n_x,\xi}$$

$$w_x(K, \xi) = q_{k,1,\xi} + \dots + p_{k,i,\xi} + \dots + q_{k,j,\xi} + \dots + q_{k,k,\xi} + \dots + q_{k,s,\xi} + \dots + q_{k,n_x,\xi}$$

$$w_x(S, \xi) = q_{S,1,\xi} + \dots + p_{S,i,\xi} + \dots + q_{S,j,\xi} + \dots + p_{S,k,\xi} + \dots + q_{S,s,\xi} + \dots + q_{S,n_x,\xi}$$

$$w_x(I, \mu) = q_{I,1,\mu} + \dots + p_{I,i,\mu} + \dots + p_{I,j,\mu} + \dots + p_{I,k,\mu} + \dots \\ + p_{I,s,\mu} + \dots + q_{I,n_x,\mu}$$

$$w_x(J, \mu) = q_{J,1,\mu} + \dots + p_{J,i,\mu} + \dots + p_{J,j,\mu} + \dots + q_{J,k,\mu} + \dots \\ + q_{J,s,\mu} + \dots + q_{J,n_x,\mu}$$

$$w_x(K, \mu) = q_{K,1,\mu} + \dots + p_{K,i,\mu} + \dots + q_{K,j,\mu} + \dots + q_{K,k,\mu} + \dots \\ + p_{K,s,\mu} + \dots + q_{K,n_x,\mu}$$

$$w_x(S, \mu) = q_{S,1,\mu} + \dots + p_{S,i,\mu} + \dots + q_{S,j,\mu} + \dots + p_{S,k,\mu} + \dots \\ + q_{S,s,\mu} + \dots + q_{S,n_x,\mu}$$

Y 軸方向で求めたアナログ重みは

$$w_y(i, \xi) = q_{1,i,\xi} + \dots + q_{I,i,\xi} + \dots + q_{J,i,\xi} + \dots + q_{K,i,\xi} + \dots \\ + q_{S,i,\xi} + \dots + q_{n_y,i,\xi}$$

$$w_y(j, \xi) = q_{1,j,\xi} + \dots + p_{I,j,\xi} + \dots + p_{J,j,\xi} + \dots + q_{K,j,\xi} + \dots \\ + q_{S,j,\xi} + \dots + q_{n_y,j,\xi}$$

$$w_y(k, \xi) = q_{1,k,\xi} + \dots + p_{I,k,\xi} + \dots + q_{J,k,\xi} + \dots + q_{K,k,\xi} + \dots \\ + p_{S,k,\xi} + \dots + q_{n_y,k,\xi}$$

$$w_y(s, \xi) = q_{1,s,\xi} + \dots + p_{I,s,\xi} + \dots + q_{J,s,\xi} + \dots + p_{K,s,\xi} + \dots \\ + q_{S,s,\xi} + \dots + q_{n_y,s,\xi}$$

$$w_y(i, \mu) = q_{1,i,\mu} + \dots + p_{I,i,\mu} + \dots + p_{J,i,\mu} + \dots + p_{K,i,\mu} + \dots \\ + p_{S,i,\mu} + \dots + q_{n_y,i,\mu}$$

$$w_y(j, \mu) = q_{1,j,\mu} + \dots + p_{I,j,\mu} + \dots + p_{J,j,\mu} + \dots + q_{K,j,\mu} + \dots \\ + q_{S,j,\mu} + \dots + q_{n_y,j,\mu}$$

$$w_y(k, \mu) = q_{1,k,\mu} + \dots + p_{I,k,\mu} + \dots + q_{J,k,\mu} + \dots + q_{K,k,\mu} + \dots \\ + p_{S,k,\mu} + \dots + q_{n_y,k,\mu}$$

$$w_y(s, \mu) = q_{1,s,\mu} + \dots + p_{I,s,\mu} + \dots + q_{J,s,\mu} + \dots + p_{K,s,\mu} + \dots \\ + q_{S,k,\mu} + \dots + q_{n_y,k,\mu}$$

となる。Z 軸方向で求めたアナログ重みは

$$\begin{aligned}
w_z(I, i) &= q_{I,i,1} + \cdots + p_{I,i,\xi} + \cdots + p_{I,i,\mu} + \cdots + q_{I,i,n_z} \\
w_z(J, i) &= q_{J,i,1} + \cdots + p_{J,i,\xi} + \cdots + p_{J,i,\mu} + \cdots + q_{J,i,n_z} \\
w_z(K, i) &= q_{K,i,1} + \cdots + p_{K,i,\xi} + \cdots + p_{K,i,\mu} + \cdots + q_{K,i,n_z} \\
w_z(S, i) &= q_{S,i,1} + \cdots + p_{S,i,\xi} + \cdots + p_{S,i,\mu} + \cdots + q_{S,i,n_z} \\
w_z(I, j) &= q_{I,j,1} + \cdots + p_{I,j,\xi} + \cdots + p_{I,j,\mu} + \cdots + q_{I,j,n_z} \\
w_z(J, j) &= q_{J,j,1} + \cdots + p_{J,j,\xi} + \cdots + p_{J,j,\mu} + \cdots + q_{J,j,n_z} \\
w_z(K, j) &= q_{K,j,1} + \cdots + q_{K,j,\xi} + \cdots + q_{K,j,\mu} + \cdots + q_{K,j,n_z} \\
w_z(S, j) &= q_{S,j,1} + \cdots + q_{S,j,\xi} + \cdots + q_{S,j,\mu} + \cdots + q_{S,j,n_z} \\
w_z(I, k) &= q_{I,k,1} + \cdots + p_{I,k,\xi} + \cdots + p_{I,k,\mu} + \cdots + q_{I,k,n_z} \\
w_z(J, k) &= q_{J,k,1} + \cdots + q_{J,k,\xi} + \cdots + q_{J,k,\mu} + \cdots + q_{J,k,n_z} \\
w_z(K, k) &= q_{K,k,1} + \cdots + q_{K,k,\xi} + \cdots + q_{K,k,\mu} + \cdots + q_{K,k,n_z} \\
w_z(S, k) &= q_{S,k,1} + \cdots + p_{S,k,\xi} + \cdots + p_{S,k,\mu} + \cdots + q_{S,k,n_z} \\
w_z(I, s) &= q_{I,s,1} + \cdots + p_{I,s,\xi} + \cdots + p_{I,s,\mu} + \cdots + q_{I,s,n_z} \\
w_z(J, s) &= q_{J,s,1} + \cdots + q_{J,s,\xi} + \cdots + q_{J,s,\mu} + \cdots + q_{J,s,n_z} \\
w_z(K, s) &= q_{K,s,1} + \cdots + p_{K,s,\xi} + \cdots + p_{K,s,\mu} + \cdots + q_{K,s,n_z} \\
w_z(S, s) &= q_{S,s,1} + \cdots + q_{S,s,\xi} + \cdots + q_{S,s,\mu} + \cdots + q_{S,s,n_z}
\end{aligned}$$

となる。

Z軸方向のアナログ重みの合計よりY軸方向のアナログ重みの差を計算する。

$$W_x = \sum_{\rho=1}^{n_z} \sum_{\eta=1}^{n_x} w_x(\eta, \rho) \quad \cdots (5.33)$$

$$W_y = \sum_{\sigma=1}^{n_x} \sum_{\rho=1}^{n_z} w_y(\sigma, \rho) \quad \cdots (5.34)$$

$$W_z = \sum_{\sigma=1}^{n_y} \sum_{\eta=1}^{n_x} w_z(\sigma, \eta) \quad \cdots (5.35)$$

$$W_z - W_y = (p_{I,i,\xi} - q_{I,i,\xi}) + (p_{I,i,\xi} - q_{J,i,\xi}) + (p_{K,i,\xi} - q_{K,i,\xi}) \\ + (p_{S,i,\xi} - q_{S,i,\xi}) > 0 \quad \cdots (5.36)$$

次にZ軸方向のアナログ重みの合計よりX軸方向のアナログ重みの差を計算する。 $W_z - W_x$ は

$$W_z - W_x = (p_{I,i,\xi} - q_{I,i,\xi}) + (p_{I,j,\xi} - q_{I,j,\xi}) + (p_{I,k,\xi} - q_{I,k,\xi}) \\ + (p_{I,s,\xi} - q_{I,s,\xi}) > 0 \quad \cdots (5.37)$$

$$\therefore W_z > W_y \text{ 且 } W_z > W_x \quad \cdots (5.38)$$

となり、X軸、Y軸の両方向に復号誤りが含まれていることが検出される。アナログ重み最大である W_z に対応する合成誤りパターン W_{zt} を選び訂正を行うことによって正しい出力を得ることができる。

5.4.5 RE復号を適用した多次元Chase復号器

残留イレージャ推定復号はフィルタリング復号によって符号内に適当に分散されている多数の誤り（この誤りを以後分散誤りと称する）を予め訂正し、より信頼度の低い格子状の誤りパターンを浮き上らせイレージャとして最終的に訂正するところに特徴がある。

フィルタリング復号の終了した段階でChaseのアルゴリズムを用い信頼度情報を利用して、 $D-1$ 個までの誤りを訂正することが可能である。従ってフィルタリング復号の過程で訂正された分散誤り（ここでフィルタリング復号で K_r 個訂正されるとする）だけ多く訂正できることになる。すなわち訂正された誤り総数は $D + K_r - 1$ となり明らかに $K_r > 0$ の時、保証された訂正能力以上の誤りが訂正できる。

一方、 u 次元テストパターンとしてフィルタリング復号後の残留誤りパターンを選べば能力の高い復号器が設計できる。以下にこのことについて詳述する。

修正Chaseアルゴリズム

RE復号を用いて多次元のChaseアルゴリズムを修正する。

〔ステップ1〕 $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_u$ の受信語のなかでまず予めフィルタリング復号を行い、 K_f 個の分散誤りを訂正する。

〔ステップ2〕 ∞ ステップ（フィルタリング復号終了時）で

$\ell_1 \times \ell_2 \times \cdots \times \ell_u$ の格子状の誤りパターンが残留する。

〔ステップ3〕 $\ell_1 \times \ell_2 \times \cdots \times \ell_u$ の格子状の格子点のシンボルのなかで $\left\lfloor \frac{D}{2} \right\rfloor$ なる重みのパターンすべてをテストパターンとする。

ステップ3よりパターンの数は

$$\binom{\ell_1 \ell_2 \times \cdots \times \ell_u}{\left\lfloor \frac{D}{2} \right\rfloor}$$

となる。上記アルゴリズムは文献(6)のなかではアルゴリズムIに相当する。

Chaseは文献(6)のなかでテストパターン数を減少させるため更に2つのアルゴリズム(Ⅱ, Ⅲ)を提案しているが、そのいずれもRE復号が適用可能である。⁽²⁷⁾

表5.3にRE復号を適用した多次元Chase復号と適用しない多次元Chase復号のテストパターン数の比較を示す。

総数 $D-1+K_f$ 個の誤りが訂正可能である。復号時間はテストパターン数に正比例するから大巾な復号時間の改善になる。

表5.3 テストパターン数の比較(アルゴリズムI)

方 式	多 次 元 Chase I	修正アルゴリズム I
テ ス ト パ タ ー ン 数	$\binom{n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_u}{\left\lfloor \frac{D}{2} \right\rfloor}$	$\binom{\ell_1 \times \ell_2 \times \cdots \times \ell_u}{\left\lfloor \frac{D}{2} \right\rfloor}$

5.5 結 言

多重符号の復号法について得られた結果をまとめる。

- (1) 積符号の復号としてR E復号法を提案し，Chase 復号法と比較し，
R E復号法の有意性を明らかにした。即ちR E復号法はChase 復号法に
比べ
 - (a) 比較的誤り率の高い通信路で効力を発揮すること
 - (b) 符号長の大なる符号で積符号を構成してもパフォーマンスの劣化が比
較的少いことなどを明らかにした。
- (2) 復号回数を2～3回にしても充分誤り状態の推定ができる誤り監視計数
復号法を提案し，そのバースト誤りに対する効果を明らかにした。
- (3) 多次元に拡張したChase 復号法にR E復号法を導入すると，演算回数
が大巾に減少すること
などを明らかにした。

第6章 結 論

多重符号の符号構成法，復号法，および評価方法に関する研究結果を述べた。
本研究で得られた結論を以下に述べる。

- (1) 逆方向通信路の誤りを考慮した時のARQの解析方法を確立した。
- (2) 長い伝搬遅延のある通信路にGo-back-N ARQを適用する場合，その通信路の誤り状態により送信側バッファメモリの最適分割回数Nが存在することを明らかにした。
- (3) 2次元配置をもつ一般化積符号の構成法を与えたこと，およびその復号法，評価方法を与え，PCM録音機への応用を示した。
- (4) 積符号に重畳符号を応用して新しい符号を得る構成法を2種提案した。
新しい構成法は直交化交錯法を併用することにより更に特性が改善されることが明らかになった。
- (5) 新しい構成法のうち方法Ⅱで構成した符号は同一フォーマットの特定部分を異なった信頼度で情報を伝送することが可能であることが明らかになった。
- (6) 畳み込み符号に上記符号構成法を適用した場合，より自由度に富んだ畳み込み符号の構成法を提供し設計の自由度が大巾に増大する可能性があることを示した。
- (7) 多重符号の復号法としてRE復号法を提案し，従来方法と比較した。その結果RE復号法が特に誤り率不良の通信路で能力を発揮することを明らかにした。
- (8) 多次元に拡張したChase復号器にRE復号法を適用しその効果を明らかにした。

これらの研究成果は序論において述べた多重符号の符号構成法，復号法および評価方法に関する研究課題に対して，新しく貢献していると思われる。

今後に残された研究課題として次のような問題が残されていると思われる。

- (1) 誤り訂正符号，誤り検出符号の統一的な評価方法の研究，例えば q 元で確立された RS 符号の重み分布を BSC (2 元対称通信路) に適用できるよう 2 元の重み分布で求めること，又，訂正と検出を同時に行った時の 2 元の誤り率評価方法
- (2) 一般化積符号に重畳符号を用いた時の評価，および新しい復号法の研究
- (3) 重畳符号を応用した，既存の BCH 符号，RS 符号と比較してそれより優れたパラメータを持つ多重符号の研究
- (4) 重畳符号を用いた畳み込み符号の符号構成法の研究
- (5) RE 復号法の多方面への応用，例えば残留誤りパターンの一方向性関数の特性に注目した暗号化システムの研究
- (6) ガロア体プロセッサによる上記各種のシステムの実用化研究

などがあげられる。今後，半導体素子の発展と，情報処理技術の高度化により，これらの符号化，復号化の実用化研究が進展し，本研究のささやかな成果が少しでも符号理論の研究およびその実用化に寄与することができれば筆者の望外の喜びとするものである。

謝 辞

本研究の全過程を通じて、卓越した御指導と親身なる御鞭撻を賜った大阪大学工学部通信工学教室、滑川敏彦教授、笠原正雄助教授に心より御礼申し上げます。又、本研究を完成させる過程で種々の御指導、御鞭撻を載いた同大学工学部通信工学教室、手塚慶一教授、中西義郎教授、倉蘭貞夫教授に対して心から深謝致します。

本研究の全過程を通じて、御指導、御鞭撻頂いた、京都大学原子エネルギー研究所、服部嘉雄教授、京都大学工学部情報工学教室、矢島脩三教授、同電子工学教室吉田 進助教授にこころから感謝します。

また第4章に関して貴重な御指摘、御激励を賜ったCyclotomics社のBerlekamp博士、ベル電話研究所のSloane博士、南カルフォルニア大学のReed教授に感謝致します。

又、第5章に関して熱心な討論を載いたハワイ大学のLin教授に感謝致します。更に同じ研究者として御激励を賜ったIntelsatのWu博士、Comsat研究所のFang博士に感謝致します。

本研究の機会を与えて下さり、かつその遂行過程において御鞭撻、御激励下さった三菱電機株式会社情報電子研究所所長 中原昭次郎博士、同副所長藤原謙一氏、同情報処理開発部部長 曾我正和氏、同情報システム開発部長 山崎英蔵博士、ならびに制御製作所伝送システム部部長山内才胤氏に感謝致します。

本研究遂行過程において早稲田大学理工学部 平沢茂一教授、摂南大学 杉山康夫助教授ならびに三菱電機株式会社情報電子研究所藤野 忠博士、中島邦男氏、村上篤道氏、河原林成行氏（現在、堀場製作所）、飯塚育生博士、山岸篤弘氏、吉田英夫氏、西島利尚氏、ならびにComsat研究所P.Chang博士には友人として世話になった。

特に平沢教授には種々の御指導を賜った。ここに記して感謝する次第であります。

又，大阪大学工学部通信工学科滑川研究室の関係各位，三菱電機株式会社応用機器研究所，電子商品研究所の各位に御礼申し上げます。

最後に本研究を遂行するにあたりタイプ，清書などを手伝ってくれた妻に感謝します。

文 献

- (1) 足立, 曾根, 宮崎, 宮田, "サイクリックリダンダンシチェック (CRC) 方式の誤り検出能力シミュレーション", FUJITSU, 21, no. 2, pp. 117~127 (昭45)。
- (2) Bacher, W., "Dasi 3 protects data transmitted...", Siemens Review XXXV, no. 9., p339-, 1968.
- (3) Benice, R. J. and Frey, A. Jr., "An analysis of retransmission systems", IEEE Trans., COM-12, p135-Dec., 1964.
- (4) Benice, R. J. and Frey, A. H. Jr., "Comparison of error control techniques", IEEE Trans., COM-12, p146-, Dec., 1964.
- (5) Berlekamp, E. R., Algebraic coding theory, New York; McGraw-Hill, 1968.
- (6) Chase, D., "A class of algorithms for decoding block codes with channel measurement information", IEEE Trans., Inform. Theory, IT-18, pp170-182 (Jan., 1972).
- (7) Crips, D. M., "The GH210 data communication systems", Electrical Communications, vol. 43, no. 4, p355-, 1968.
- (8) Cuperman, V., "An upper bounds for the error probability on the Gilbert channel", IEEE Trans., COM-17, no. 5, pp532-535, Oct., 1969.
- (9) Doi, T., et al.; "Cross interleave for error correction of digital audio system", AES, 64th Conv., 1559, New York, (Nov., 1979).

- (10) Elliot, E.O. "Estimates of error rates for codes on burst-noise channels", B.S.T.J., vol. 42, p1977-, 1963.
- (11) Elias, P. "Error-free coding", IEEE Trans., IT-14, pp29-37(1954).
- (12) Forney, G.D., Concatenated codes, Cambridge, MA, MIT (1966).
- (13) Funk, G., "Comparison of data reliability and efficiency in various standard protocols for information exchange in computer telecontrol networks", EUROCON 77, pp1.1.7, 1-1.1.7.7.
- (14) 藤原, 中西, 笠原, 手塚, 笠原, "バースト誤りを生ずる通信路とその信頼度の改善に関する考察, 信学論(A), vol. 51-A, no. 8, p. 311- (昭43-165(A-53))。
- (15) Gilbert, E.N. "Capacity of a burst noisy channel" B.S.T.J. vol. 39, p1253-, Sept., 1960.
- (16) Hamming, R.W. "Error detecting and error correcting codes", B.S.T.J., vol. 29, pp147-160, Apr., 1950.
- (17) Horstein, M., "Efficient communication through burst-error channels by means of error detection", IEEE Trans., COM-14, p117-, 1966.
- (18) 今井, 長坂, "2重符号化方式の復号法について", 信学技報, CS81-167(1982-02)。
- (19) 平沢, 井上, 杉山, 藤原, "巡回符号による誤り制御方式の評価(その1)", 信学技報, CS71-91(1971-12)。
- (20) 井上, 平沢, 杉山, 山内, "巡回符号による誤り制御方式の評価(その2)",

信学技法, CS71-95(1971-12)。

- (21) 井上, 平沢, 永田, 'バースト雑音の起こる通信路における Go-back-N 誤り制御方式の一検討', 信学技報, CS72-25(1972-06)。
- (22) 井上, 平沢, 藤原, 大野, 'バースト雑音の起こる通信路における go-back-N 誤り制御方式の一検討', 信学論(A), (技術談話室) vol.57-A no.1, pp61-62 (昭和49-01)。
- (23) 井上, 杉山, 大西, 'PCM 録音機用誤り訂正符号の一検討', 信学会, 昭和53年度電子通信学会総合全国大会 S13-13(1973-03)。
- (24) 井上, 杉山, 田中, 佐藤, '固定ヘッド方式PCM 録音器における誤り制御方式の評価', 信学技報, EA79-36.(1079-09)。
- (25) 井上, 笠原, 河原林, 滑川, '残留イレージャの推定による2次元符号の復号', 情報理論とその応用研究会, 第5回シンポジウム資料 pp96-102, (1982-10)
- (26) 井上, 笠原, 滑川, '残留イレージャの推定による2次元符号の復号', 信学技報, IT82-13, 1983。
- (27) 井上, 笠原, 滑川, '2次元符号の復号法に関する一考察', 信学技報, IT83-27, 1983。
- (28) 井上, 笠原, 滑川, '多次元Chase 復号法における一考察', 信学技報, CS83-138(1983)。
- (29) 井上, 笠原, 滑川, '多次元Chase 復号法に関する一考察(2)', 信学技報, IT83-156, pp39-43.(1984-01)。
- (30) 井上, 大西, 笠原, 滑川, '残留イレージャ推定復号における誤り検出確率の一計算法', 昭和58年度電子通信学会総合全国大会, no.1316。
- (31) 井上, 笠原, 滑川, '2次元符号の復号法に関する一考察', 情報理論とその応用研究会, 第6回シンポジウム資料, pp292-297(1983-11)。

- (32) 井上, 石田, 石田, 遠藤, '誤り検出符号に関する一考察', 昭和59年度電子通信学会総合全国大会, S12-7, pp245-246。
- (33) 井上, 笠原, 滑川, '誤り監視計数器を用いた2次元符号の復号', 情報理論とその応用研究会, 第7回シンポジウム資料, pp90-95, 昭和59年11月5日。
- (34) 井上, 笠原, 滑川, '2次元符号の復号法に関する一考察', 信学論(A), 168-A, 9., pp903-911 (昭和60-09)。
- (35) 井上, 笠原, 滑川, '多次元重畳符号に関する一考察(1)', 信学技報, IT85-32, pp.1-6 (1985-09)。
- (36) 井上, 笠原, 滑川, '重畳符号化を用いた畳み込み符号の一構成法', 情報理論とその応用研究会, 第8回シンポジウム資料, pp126-129, 昭和60年12月5日。
- (37) Inoue, T., Sugiyama, Y., Ohnishi, K., Kanai, T. and Tanaka, K., 'A new class of burst-error-correcting codes and its application to PCM tape recording systems', IEEE NTC '78 Conf., session. 20.6.1-20.6.5, AL, U.S.A.
- (38) Inoue, T., Tanaka, K., Sugiyama, Y., Kunii, S., Nakahara, S. and Satoh T. 'Comparison of Performance between IPC code and RSC code when applied to PCM tape recording', AES, 64th Conv., New York, 1541(H-5), Nov. 2-5, 1979.
- (39) Inoue, T., Kasahara, M. and Namekawa, T., 'New encoding and decoding methods for generalized product codes', IEEE, ISIT'85 Brighton England, June 23-28, 1985.
- (40) Justesen, J., 'A Class of constructive asymptotically good algebraic codes', IEEE Trans Inform. Theory, vol. IT-18, pp.652-656, Sept., 1972.

- (41) Kasahara, M., Sugiyama, Y., Hirasawa, S. and Namekawa, T.,
 'A new class of binary codes constructed on the basis
 of BCH codes', IEEE Trans., Inform. Theory (Corresp.),
 vol. IT-21, pp. 582-585, Sept., 1975.
- (42) Kasahara, M., Sugiyama, Y., Hirasawa, S. and Namekawa, T.,
 'New classes of binary codes constructed on the basis of
 concatenated codes and product codes', IEEE Trans.,
 Inform. Theory, vol. IT-22, no. 4, pp. 462- , 1976.
- (43) MacWilliams, F. J. and Sloane, N. J. A., The Theory of
 error-correcting codes, North Holland (1977).
- (44) Massey, J. L. 'Step-by-step decoding of the
 Bose-Chaudhuri-Hocquenghem codes', IEEE Trans., Inform.
 Theory, vol. IT-11, pp. 580-585, Oct., 1965.
- (45) Massey, J. L. 'Shift-register synthesis and BCH
 decoding', IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-15,
 pp. 122-127, Jan. 1969.
- (46) Peterson, W. W., Error correcting codes, M. I. T. Press,
 Cambridge, Mass., 1961.
- (47) Peterson, W. W. and Weldon E. J. Jr., Error Correcting
 codes, 2nd Ed., M. I. T. press, Cambridge, Mass, 1972.
- (48) Reed, I. S. 'A class of multi-error-correcting codes
 and the decoding scheme', IRE Trans., Inform. Theory,
 vol. IT-4, pp. 38-49, Sept., 1954.
- (49) Reed, I. S. and Solomon G., 'Polynomial codes over
 certain finite fields', J. Soc. Ind. Appl. Math., vol. 8,
 pp. 300-304. June 1960.

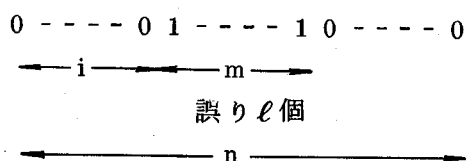
- (50) Reifen, B., Schmidt, W. and Yudkin, H. 'The design of an error-free data transmission system for telephone circuits', Trans. AIEE. Comm. and Electronics, 80, pp. 224 - , July 1961.
- (51) Shannon, C.E. 'A mathematical theory of communication', B.S.T.J., vol. 27, pp. 379-423, 623-656, July, Oct. 1948.
- (52) Sloane, N.J.A., Reddy, S.M. and Chen, C.L. 'New binary codes', IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-18, pp. 503-510, July 1972.
- (53) Tanaka, K., Furukawa, T., Ohnishi, K., Inoue, T. and Satoh, T., '2-channel PCM tape recording for professional use', AES, 61st Conv., New York, Nov. 3-6, 1978.
- (54) 常盤, 笠原, 滑川, '巡回符号のバースト誤り訂正能力', 信学論(A), J66-A 10, pp. 993-999 (昭58-10)。
- (55) Varshamov, R.R. 'Estimate of the number of signals in error correcting codes', Dokl. Akad. Nauk SSSR, vol. 117, pp. 739-741, 1957,
- (56) Zyablov, V.V., 'An estimate of the constructing binary linear cascade codes.', Problems of Info. Trans, 7(1), pp. 3-10., 1971.

[付録 A] : $P + p = 1$ がランダム誤り状態を示すこと。

ランダム誤り通信路の性質より, 明らかに時刻 r の如何に拘らず, 状態 i の条件付で状態 k になる確率 P_{ik} について $P_{ik} \equiv P_{jk} (i \neq j)$ となることから, Gilbert のモデルの遷移確率行列 P' の各行ベクトルが互いに等しく $\text{rank } P' = 1$ より $P - 1 \equiv 0$ の自明でない解として $p + P \equiv 1$ が得られる。

[付録 B] : R_1 と V

"0" : 誤りなし "1" : 誤り, と表わすと $P_D(\ell, m, n)$ は



の誤りパターンより明らかに,

$$P_D(\ell, m, n) = \sum_{i=0}^{n-m} P(0^i 1) P'_D(\ell-1, m-1 : B) P(0^{n-m-i} | 1) \\ = P'_D(\ell-1, m-1 : B) P_0(1, n-m+1) \quad \dots (B-1)$$

ここで $P'_D(\ell-1, m-1 : B) \triangleq r_{\ell-1, m-1}$ は誤りビットの条件付で続く $m-1$ ビット中に $\ell-1$ ビットの誤りがあり且つ $m-1$ ビット目が誤る確率であり, 漸化的に式 (B-2) で与えられる。

$$r_{\ell-1, m-1} = \sum_{i=\ell}^m r_{i-2, i-2} \cdot v(m-i) \quad \dots (B-2)$$

ここで $v(i)$ は本文で述べた通り Gilbert により与えられている。

$$r_{1, i-1} = v(i-2) \text{ より}$$

$$R_v = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1, n-1} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2, n-2} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & r_{n-1, n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_{n-1} \end{bmatrix} \quad \cdots (B-3)$$

とすると式 (B-3) より直ちに

$$R_{i-1} V = R_i \quad \therefore R_i = R_1 V^{i-1} \quad (i \geq 2) \quad \cdots (B-4)$$

但し

$$V = \begin{bmatrix} 0, v(0), v(1) \cdots v(n-3) \\ 0 \quad 0 \quad v(0) \cdots v(n-4) \\ \vdots \\ 0 \cdots \cdots \quad 0 \end{bmatrix} \quad \cdots (B-5)$$

$$R_1 = (v(0), v(1), v(2) \cdots v(n-2))$$

[付録 C] : W', R'_1, V' の導出

W', W', R'_1, V' の導出

$$W = W_1 - W_2 \quad W_1 = (2, 3, 4, 5 \cdots n), W_2 = (2, 3, 0, 0, \cdots, 0, \cdots)$$

$$E = E_1 - E_2 \quad E_1 = (1 \cdots \cdots 1), E_2 = (\underbrace{1, 1 \cdots 1}_{r-1}, -1, 0 \cdots 0)$$

とおくと

$$W P_D E^T = W_1 P_D E_1^T - W_2 P_D E_1^T - W P_D E_2^T \quad \cdots (C-1)$$

ここで明らかに

$$P_D E_1^T = \begin{bmatrix} P_C(2, n) \\ \vdots \\ P_C(n, n) \end{bmatrix} \quad \cdots (C-2)$$

であり, P_D が左下部 0 の三角行列, E_2 が $r+2$ 以上の項 0 であることから

$$W P_D E_2^T \equiv W' P'_D E_2'^T \quad \cdots (C-3)$$

但し, $W', P'_D, E_2'^T$ は式 (2, 16) の通りであり

$$R' = v(0), v(1), \dots, v(r-1)$$

$$V' = \begin{bmatrix} 0, v(0), v(1) \dots v(r-1) \\ \vdots \\ 0 \quad 0 \quad v(0) \quad v(0) \\ 0 \quad \quad \quad 0 \end{bmatrix} \quad \dots (C-4)$$

〔付録D〕： η の計算

エルゴード的な次数 a の遷移確率行列 p において，その固有方程式は

$\lambda_1 = 1$ なる唯一つの根を持ち $|\lambda_i| < 1$ ($i=2, \dots, a$) である。従って，

状態 S_i の定常状態に於ける確率 $p(S_i)$ は

$$Y(P - I) = 0 \quad \dots (D-1)$$

但し， $Y = \alpha(P(S_1), P(S_2), \dots, P(S_a))$ α ：任意の定数

$$\sum_i P(S_i) = 1$$

より，左固有ベクトル Y に，スカラー倍 $\alpha = 1$ なる条件を入れると

$$(P^T - I + J)Y^T = (1)$$

但し， J はすべての要素が 1 の $a \times a$ の行列

が得られ， $P(S_i)$ は Y^T の連立方程式を解いて得られる。

尚，手計算を容易にするためには $\alpha = 1/P(S_0)$ とおいて漸化的に解けばよい。(以上，証明略)

〔付録E〕：式(2.23)の導出

ガブルド冗長を付加したブロックが受信側で誤り検知されずに見逃す確率 P_{gr} は誤りの発生する確率から検知できる確率(受信側で奇数誤り 2 ビット誤り， r ビット以下の偶数誤りバーストとみなされる確率)を引き算した残りの 2^{-r} 倍， $r+1$ ビットバーストについては 2^{-r+1} 倍で見逃すから $r+1$ ビットバーストのおこる確率の 2^{-r} 倍したものをひいて求めればよい。

$$\begin{aligned} P_{A_0} &= \{ P(0^n) + P_c(1, n-1) - P_c(1, n) + P(0^{n-1}1) \} \\ &+ \{ P_c(1, n) - P(0^{n-1}1) + P_c(2, n-1) - P_c(2, n) + P_c(1, n-1) \\ &\quad - P_c(1, n) + P(0^{n-1}1) \} \\ &+ \{ P_c(2, n) - P_c(1, n-1) + P_c(1, n) - P(0^{n-1}1) + \sum_{i=2}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} P_c(2i, n) \} \\ &= P(0^n) + P(1, n-1) + P_c(2, n-1) + \sum_{i=2}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} P_c(2i, n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{B0} &= I_1 \cdot R_v \cdot P_{x_1} \cdot E_1^T + I_2 \cdot R_v \cdot P_{x_2} \cdot E_2^T \\
 I_1 &= (0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1) \\
 E_1 &= (\underbrace{1 \ 1 \ 1 \ \cdots \ -1}_{r \text{ 個}}) \\
 I_2 &= (\underbrace{0 \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0}_{r \text{ 個}}) \\
 E_2 &= (\underbrace{1 \ 1 \ \cdots \ 1}_{n-2 \text{ 個}})
 \end{aligned}$$

R_v については (B - 3) と同じ

$$P_{x1} = \begin{pmatrix} 0, P(0^{n-3} 1 0), P(0^{n-4} 1 0^2) \dots\dots P(0^{n-17} 1 0^{15}) \\ 0 & 0 & P(0^{n-4} 1 0) \dots\dots P(0^{n-17} 1 0^{14}) \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & P(0^{n-17} 1 0) \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{x2} E_2^T = \begin{pmatrix} P_c(1, n-2) - P_c(1, n-1) + P(0^{n-2} 1) \\ P_c(1, n-3) - P_c(1, n-3) + P(0^{n-3} 1) \\ \vdots \\ -P_c(1, n-17) + P_c(1, n-16) - P(0^{n-17} 1) \end{pmatrix}$$

より本文中(2.23)式が与えられる。

〔付録F〕式(2.24)の導出

伝送能率 η は図 3.1 の遷移確率行列より求められ、本文中 (2.25) 式の定

数は,

$$Z = A_2 \cdot A_6 (1+x) \quad u = P_B (1-P_{sr}) A_1^3 T$$

$$x = \left\{ \frac{1}{P_A + P_D} - A_8 \right\} [A_8 + WP_B (1-P_{sr})^2 + W (1-P_{sr}) A_5 \\ + W (1-P_{sr}) A_7], \quad T = P_c^5 (1+x) + W$$

$$W = \left[\frac{A_9}{P_A + P_D} - \frac{P_g}{P_A + P_D} \left(\frac{1}{P_A + P_D} - A_8 \right) \right]$$

$$X \left[\left\{ 1 - A_0 - A_2 A_7 (1-P_{sr}) - (P_D + P_g)(1-P_{sr}) \frac{1-A_1^4}{1-A_1} \right\} \left(\frac{1}{P_A + P_D} - A_8 \right) \right. \\ \left. - \left\{ P_B (1-P_{sr})^2 + (1-P_{sr}) A_5 + A_7 (1-P_{sr}) \right\} A_9 \right]^{-1}$$

$$A_0 = A_1^4 + P_B (1-P_{sr}) A_1^3$$

$$A_1 = P_c - P_c P_{sr} + P_{sr}$$

$$A_2 = P_B + P_c - P_c P_{sr} - P_B P_{sr} + P_{sr}$$

$$A_3 = P_B P_c^4 + (P_B + P_c) \{ (P_B + 2P_c) P_B P_c^2 \\ + (P_B + P_c)^3 (P_B + 2P_c) P_B \}$$

$$A_4 = P_c^5 P_B (1-P_{sr}) A_1 + A_2 \{ P_B (1-P_{sr}) P_c^5 \\ + (P_B + P_c) (1-P_{sr}) A_3 + P_{sr} A_3 \}$$

$$A_5 = P_B (1-P_{sr}) A_1 + P_B (1-P_{sr}) (P_B + P_c - P_B P_{sr} - P_c P_{sr} + P_{sr})$$

$$A_6 = P_c^5 P_B (1-P_{sr}) A_1^2 + \{ (P_B + P_c) (1-P_{sr}) + P_{sr} \} A_4$$

$$A_7 = P_B (1-P_{sr}) A_1^2 + \{ (P_B + P_c) (1-P_{sr}) + P_{sr} \} A_5$$

$$A_8 = P_B \{ 1 + P_B + 2P_c + P_c^2 + (P_B + P_c) (2P_c + P_B) + P_c^3 + (P_B + P_c) P_c^2 \\ + (P_B + P_c)^2 (2P_c + P_B) \} + (1-P_{sr}) \{ A_3 + P_B (1-P_{sr}) P_c^5 \\ + (P_B + P_c) (1-P_{sr}) A_3 + P_{sr} A_3 + A_4 \} + A_6 (1-P_{sr})$$

$$A_9 = A_0 P_c^5 + A_2 A_6 + (P_D + P_g) \left\{ P_c \frac{1-P_c^4}{1-P_c} + (1-P_{sr}) P_c^5 \frac{1-A_1^4}{1-A_1} + 1 \right\} \frac{P_g}{P_A + P_D}$$

より

$$\eta = \frac{n-a-r}{n} \frac{1+F_0}{H+F_1} = \frac{y_0+y_{27}+y_{30}+y_{33}+\cdots+y_{59}}{y_0+y_1+\cdots+y_{26}+y_{27}+\cdots+y_{62+ra}}$$

($y_0 y_1 \cdots y_{62+ra}$ は遷移行列の左固有ベクトルの各 element)

〔付録 G〕：符号長 n とガロア体の標数 b の関係

本文中で比較した符号の符号長が実際何ビットなのかを示すため符号長 n と b の関係を表で示す。なお、BCH 符号のデータは本文中では直交化交錯法と正規化するため全く同じ符号長を取りうると仮定して計算している。

	INT 符号 (Method I) BCH 符号 (2^b 段交錯)	RS 符号 (2^b 段交錯)	長い一つの符号 (交錯なし)
b	$2^{2b} \times b$	$2^{2b-1} \times (2b-1)$	$2^{2b} \times b$
3	1 9 2	1 6 0	1 5 3 6
4	1 0 2 4	8 9 6	1 6 3 8 4
5	5 1 2 0	4 6 0 8	1 6 3 8 4 0
6	2 4 5 7 6	2 2 5 2 8	1 5 7 2 8 6 4
7	1 1 4 6 8 8	1 0 6 4 9 6	1 4 6 8 0 0 6 4
8	5 2 4 2 8 8	4 9 1 5 2 0	1 3 4 2 1 7 7 2 8
9	2.359×10^6	2.228×10^6	1.208×10^9
10	1.049×10^7	9.961×10^6	1.074×10^{10}
12	2.013×10^8	1.929×10^8	8.246×10^{11}
14	3.758×10^9	3.624×10^9	6.157×10^{13}
16	6.872×10^{10}	6.657×10^{10}	4.504×10^{15}
20	2.199×10^{13}	2.144×10^{13}	2.306×10^{19}
30	3.459×10^{19}	3.401×10^{19}	3.714×10^{28}
40	4.836×10^{25}	4.775×10^{25}	5.317×10^{37}
50	6.338×10^{31}	6.275×10^{31}	7.136×10^{46}
100	1.607×10^{62}	1.599×10^{62}	2.037×10^{92}

INT 符号は交錯 (インタリーブ) した方法 I の構成法による符号の意味である。

〔付録H〕：方法Ⅱにおける数値例

図4.12のようなSER（シンボル誤り率）＝ 10^{-4} の528バイトの情報を方法ⅡによってAの部分をSER＝ 10^{-10} 以下、Bの部分を 10^{-10} 以下に誤り制御しよう。行符号CrはGF(2^8)上の(28, 22, 7)RS符号とし、重畳用符号を6符号語重畳化する。重畳用符号はGF(2^8)上の(24, 25-D, D)RS符号とする。

最小距離Dの決定

分離用符号化による重畳用符号の訂正前のシンボル誤り率 P_s は次式で与えられる。

$$P_s = \sum_{i=1}^{28} \binom{28}{i} P_\epsilon^i (1 - P_\epsilon)^{28-i}$$

$$\cong 28 \cdot P_\epsilon$$

t個（ $t = \lfloor D/2 \rfloor$ ）の誤りを訂正すると仮定すると訂正不能確率 P_F は次式で与えられる。

$$P_F = \sum_{i=t+1}^{24} \binom{24}{i} P_\epsilon^i (1 - P_\epsilon)^{24-i}$$

$$\cong \binom{24}{t+1} P_\epsilon^{t+1}$$

$$\leq 10^{-12}$$

上式より、 $t=7$ を得る。従って、 $D=15$ が得られる。Bの部分の訂正不能確率 P_{f_B} は次式で与えられる。

$$P_{f_B} \cong \binom{28}{4} P_\epsilon^4$$

$$= 2.05 \times 10^{-12}$$

Aの部分の訂正不能確率 P_{f_A} は次式で与えられる。

$$P_{f_A} \cong \binom{22}{4} P_\epsilon^4$$

$$= 7.32 \times 10^{-13}$$

[付録 I] : $D_F(\infty)$ 復号時の確率計算

- (i) 復号誤り確率は以下に述べるように復号誤りを含む残留誤り生起確率の総和で与えられる。

∞ ステップにおいて一般性を失うことなく C_1 先行復号を仮定できる。符号 C_1 から先に復号すると付図 I・1 (a), (b) に示す誤り格子パターンが確率主要項を与える。図(a)において復号が C_1 復号で終った場合は 8 シンボルの復号誤りが生起し C_1 復号で終った場合は 4 個の C_1 受信語が誤り検出される。従って $P_{DE}(\infty)$ は次式で与えられる。

$$P_{DE}(\infty) \cong \frac{8}{n^2} \binom{n}{2} A_4 \binom{4}{3} (P_b^3)^2 + \frac{8}{n^2} \binom{n}{2} A_4 \binom{4}{3}^2 (P_b^3)^2$$

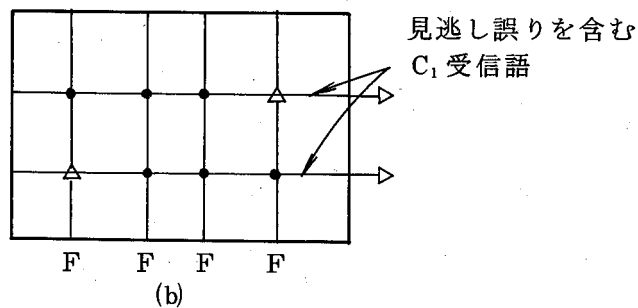
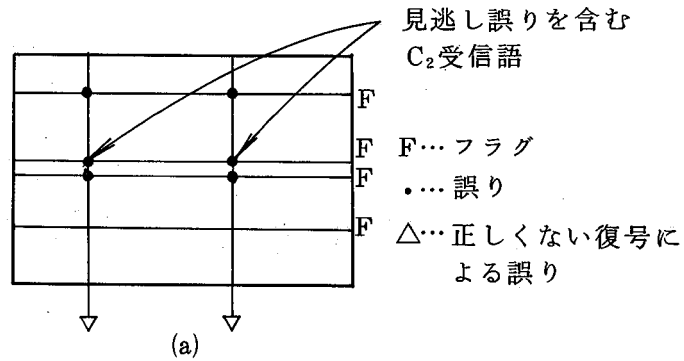
$$= (10/3) \cdot (2^m - 1)^2 (2^m - 2) P_b^8 \quad \dots (I-1)$$

なおレージャ専一復号を D_c 復号に用いた RE 復号においては図(a)および(b)の誤りは一方のイレージャフラグが 4 本立っているにもかかわらず、他方のイレージャフラグ数が 0 となるため、RE 推定器によってフラグ数 0 になる以前のフラグをイレージャフラグとしてイレージャ・誤り訂正を実行する。

- (ii) 誤り検出確率は残留誤りパターン生起確率から復号誤りを含む残留誤りパターン生起確率を引くことにより与えられるが、後者は前者に比し、十分に小さく無視できる。従って C_1 受信語, C_2 受信語共に 2 個ずつ誤りが存在する格子パターンが主要生起確率を与える。

$$P_{DT}(\infty) \cong \frac{4}{n^2} \binom{n}{2}^2 P_b^4 (1 - P_b)^{n^2 - 4} = (2^m - 1)^2 P_b^4$$

$$\dots (I-2)$$



付図 I・1 $D_F(\infty)$ 復号時の復号誤り主要項を与える誤りパターン

〔付録 J〕： $d \times d$ の配列から縦横 2 個ずつ取り出す組合せの数

残留イレージャ推定復号のパフォーマンス計算を行うには最終段訂正復号器が訂正できなくなる通信路誤り率 P_0 の最低次数の誤りパターン数を求める必要がある。ここでは実用上必要と思われる $d \times d$ の配列から縦横 2 個ずつ誤りを含むパターン数を計算する手法をのべ設計の指標を示す。

パフォーマンス評価：

残留イレージャ推定復号を適用した場合、訂正できなくなり、誤りが検出される確率 Pr は

$$Pr = \frac{d_1 \times d_2}{n_1 \times n_2} \binom{n_1}{d_1} \binom{n_2}{d_2} \rho_j P_0^{\max[(t_1+1)d_2, (t_2+1)d_1]} \dots (J \cdot 1)$$

で与えられる。⁽³⁰⁾ 但し n_1, n_2 ; d_1, d_2 ; t_1, t_2 はそれぞれ 2 つの符号の符号長, 最小距離, 訂正能力である。フィルタリング復号に用いる復号器は残留誤りパ

ーンを浮き上らせるのが目的であるから、訂正能力限度いっぱいの復号は必ずしも適当ではない。むしろ繰り返して復号するため復号時間からみると訂正する誤りの数は少い方が好ましい。訂正能力 t が $t=0, 1$ の場合の誤りパターン数を求めることは容易である。 $t=3$ 以上も必要ではあるが最小距離 d が 10 以下の場合では $t=2$ の場合だけでもかなりの設計の指標になる。

Position 指数の定義：

パターン数を計算するため一行づつ上よりカーソルを下方へずらしパターンを作成するものとし、各列方向のポジションでカーソルの下方に "1" が何個出現可能かによって付表 1 のようにポジション指数を定義する。一旦 r になったポジションは考察よりはずしてよい。一行の列方向のポジションの数を d とする。

記号の定義 ($\binom{d \times d}{2 \times 2}$)：

$d \times d$ の格子パターンより行、列共に 2 個づつ "1" が含まれるパターンの総数とする。

付表 J・1 ポジション指数

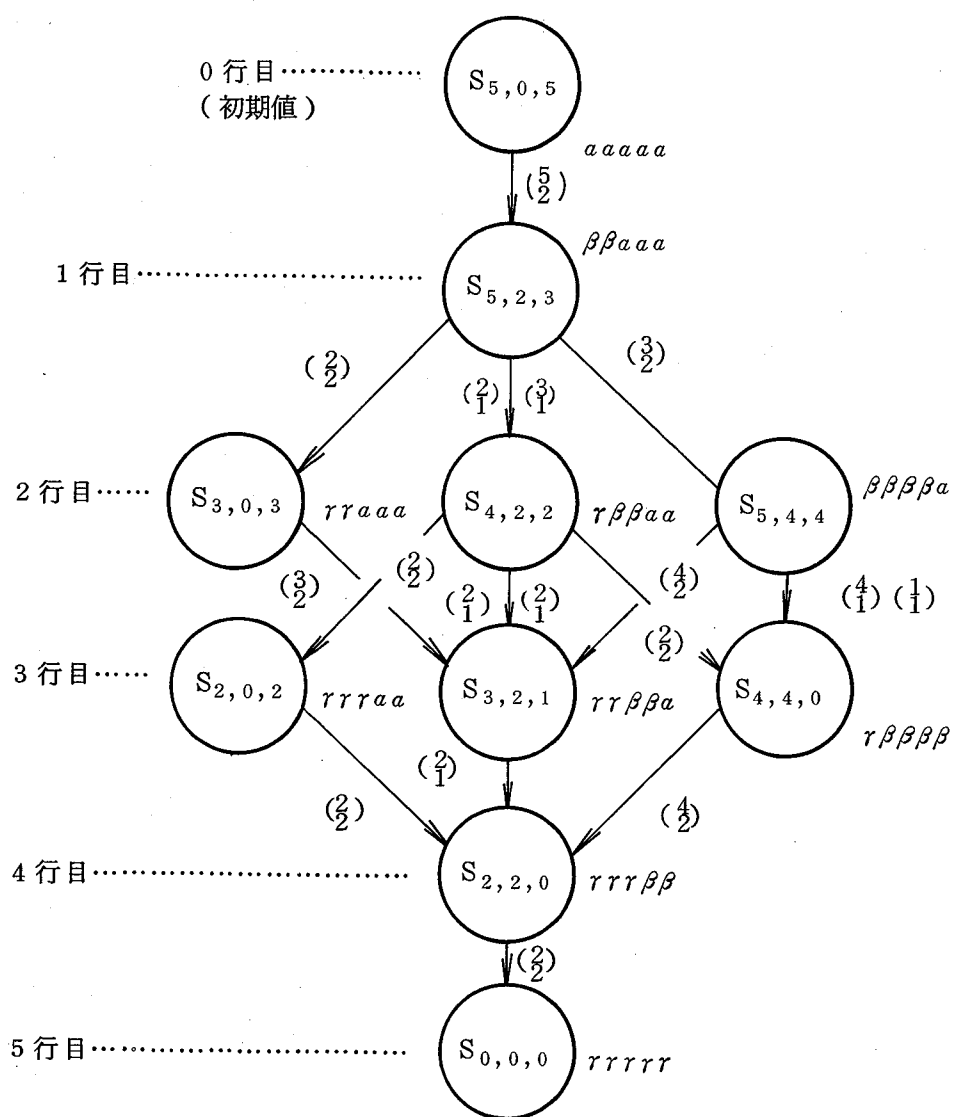
S_d, B, A ：全ポジション数 d ，
ポジション指数 α, β となるポジ
ション数 A, B の状態。

ポジション 指 数	そのポジションより 下方の行に出現可能 は "1" の数
α	2
β	1
r	0

$N(S_d, B, A)$ ：

r を除く全 Position 数 d で β の数を B ， α の数 A の状態より遷移する全ての状態の数，なお ($\binom{d \times d}{2 \times 2}$) = $N(S_d, o, d)$ 。

具体例を付図 J・1 に示す。



付図 J・1 $\left(\binom{5 \times 5}{2 \times 2}\right)$ を求めるための状態図

各状態間の遷移可能な組合せの数よりパターン数を計算できる。

以上をまとめて次の漸化式を得る。

漸化式

[1] d 偶数の場合

(i) $A \geq 2, B \geq 2$ の時

$$N(S_{d,B,A}) = \binom{B}{2} N(S_{d-2,B-2,A}) + \binom{B}{1} \binom{A}{1} N(S_{d-1,B,A-1}) \\ + \binom{d-B}{2} N(S_{d,B+2,A-2}) \quad \dots (J-2)$$

(ii) $A = 0$ の時 $N(S_{d,d,0}) = \binom{d}{2} N(S_{d-2,d-2,0})$

$\dots (J-3)$

(iii) $B = 0$ の時 $N(S_{d,0,d}) = \binom{d}{2} N(S_{d,2,d-2}) \quad \dots (J-4)$

[II] d 奇数の場合

(i) $A \geq 3$ の時式 (J - 2) に同じ

(ii) $A = 1, B \geq 4$ の時

$$N(S_{d,B,1}) = \binom{B}{1} \binom{1}{1} N(S_{d-1,B,0}) + \binom{B}{2} N(S_{d-2,B-2,1})$$

(iii) $A = 1, B = 2$ の時 $N(S_{d,2,1}) = \binom{2}{1} \binom{1}{1} N(S_{d-1,2,0})$

$\dots (J-5)$

(iv) $A = 0$ の時式 (J - 2) と同じ

表 2 に示す計算結果が得られる。

表 2 係数 ρ_j の値

j	2	3	4	5	6	7	8
ρ_j	1	6	90	2040	67950	3.111×10^6	1.647×10^8

〔付録 K〕：2 ステップの Chase 復号器

受信系列 Y に対して重みが $\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$ 以下のテストパターン T を発生して、新しい系列 Y' を以下のように構成する。

$$Y' = Y \oplus T \quad \cdots (K-1)$$

Y' を限界距離復号器 (bounded distance decoder) によって復号しその時の誤りパターン Z' を求める。Z' の重みは $\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$ 以下である。

復号出力 $\hat{X}$ は

$$\hat{X} = Y' \oplus Z' = Y \oplus T \oplus Z' \quad \cdots (K-2)$$

となり、Y に対する誤りパターン Z_T は

$$Z_T = T \oplus Z' \quad \cdots (K-3)$$

となる。次に Z_T に対するアナログ重み $W_\alpha(Z_T)$ を計算する。これをすべてのテストパターンについて実行する。アナログ重み最小の誤りパターン Z_T を真の誤りパターンとして選び復号する。d-1 個以下の誤りの場合正しく復号できる。Chase はテストパターンを発生させ、硬判定の復号器を用いて、通信路の信頼度情報を利用することにより軟判定復号を行っている。Chase は文献⁽⁶⁾の中でテストパターンの発生法として次の 3 種のアルゴリズムを提案している。

アルゴリズム I :

$\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$ なる重みのパターンすべてをテストパターンとする。よって 2 元 (n, k, d) 線形符号に対してはテストパターン数は $\binom{n}{\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor}$ となる。

アルゴリズム II :

最も信頼度の低いディジットからなる重み $\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$ のパターンをテストパターンとする。テストパターンの個数は 2 元符号の場合 $2^{\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor}$ である。

アルゴリズム III :

最も信頼度の低い i 個の位置に 1 をもつパターンをテストパターンとする。

i は $i = 0, 1, 3, \dots, d-1$ (d が偶数の時)

$i = 0, 2, 4, \dots, d-1$ (d が奇数の時)

となる。従ってテストパターンの数は $\frac{d}{2} + 1$ 個となる。以下、SEC-DED符号を用いた例でアルゴリズムⅢの2ステップ信号のChase復号器で検討する。ここでは具体例として C_1, C_2 のパラメータを符号長 $n = 15$, 情報記号数 $k = 10$, 最小距離 $d = 4$ とする。(これを符号 A_1 と呼ぶ)。アナログ重みを計算する際必要となる信頼指数フラグの付加された誤りビット (1^j で表示) および、正しいビット (j^0 で表示の) の生起確率は付表K・2のようになる。(j は信頼指数)。アナログ重み計算は生起確率に対応づけて行う。

以上より各誤りパターンについてアルゴリズムⅢで復号した場合の復号結果が付表K・3のように求まる。

付表K・1 信頼指数 j と実際の誤り個数

(C_1, C_2 共に $(15, 10, 4)$ SEC-DED Hamming 信号)

信頼指数 j	誤り個数 n_e
0	0, 4
1	1, 3, 5
2	2, 4, ……

付表K・2 信頼指数フラグ付きの誤りおよび正しいビット
の生起確率(符号 A_1 , $n=15$)

*j 信頼指数	生 起 確 率	P_b の巾 表 現
1^2 の生起確率	$P_2 \cong \frac{2}{15} \binom{15}{2} P_b^2 (1-P_b)^{13} \cong 1.4 P_b^2$	2
1^1 の生起確率	$P_1 \cong \frac{4}{15} A_{H,4} \binom{4}{3} P_b^3 (1-P_b)^{12} \cong 1.12 P_b^3$	3
1^0 の生起確率	$P_0 \cong \frac{4}{15} A_{H,4} P_b^4 (1-P_b)^{11} \cong 2.8 P_b^4$	4
0^2 の生起確率	$Q_2 \cong \frac{13}{15} \binom{15}{2} P_b^2 (1-P_b)^{13} \cong 9.1 P_b^2$	2
0^1 の生起確率	$Q_1 \cong \binom{15}{1} P_b \cong 1.5 P_b$	1
0^0 の生起確率	$Q_0 \cong 1 - \frac{4}{15} A_{H,4} P_b^4 (1-P_b)^{11} \cong 1$	0

付表 K・3 符号 A₁ を Chase のアルゴリズム ■ で復号した結果

j 0 級の個数→

総 数	j 1 級 2 級	誤 り パターンの	P _b 0 の 巾	P _b 1 の 巾	P _b 2 の 巾	P _b 3 の 巾	P _b 4 の 巾
0	0 0		C	C	D	M/D	M/D
1	0 1	e(0 ²) e(1 ²)	C C	C C	M/D 10 M/D 10	M/D M/D	M/D M/D
	1 0	e(0 ¹) e(1 ¹)	C C	C C	M/D 9 M/D 16	M/D M/D	M/D M/D
2	0 2	e(0 ² 0 ²) e(0 ² 1 ²) e(1 ² 1 ²)	C C C	C M/C 8 M/C 8	M/D M/D M/D	M/D M/D M/D	M/D M/D M/D
		e(0 ¹ 0 ²) e(0 ¹ 1 ²) e(0 ² 1 ¹) e(1 ¹ 1 ₁)	C C C C	C C M/D 8 M/D 9	M/D M/D M/D M/D	M/D M/D M/D M/D	M/D M/D M/D M/D
		e(0 ² 0 ²) e(0 ² 1 ²) e(1 ² 1 ²)	C C C	C M/C 8 M/C 10	M/D M/D M/D	M/D M/D M/D	M/D M/D M/D
	1 1	e(0 ² 0 ² 0 ²) e(0 ² 0 ² 1 ²) e(0 ² 1 ² 1 ²) e(1 ² 1 ² 1 ²)	C C C C	M/C 10 M/C M/C M/C	M/D M/D M/D M/D	M/D M/D M/D M/D	M/D M/D M/D M/D
		e(0 ¹ 0 ² 0 ²) e(0 ¹ 0 ² 1 ²) e(0 ² 0 ² 1 ¹) e(0 ¹ 1 ² 1 ²) e(0 ² 1 ¹ 1 ²) e(1 ¹ 1 ² 1 ²)	C C C C C C	M/C M/C M/C M/C M/C M/C	M/D M/D M/D M/D M/D M/D	M/D M/D M/D M/D M/D M/D	M/D M/D M/D M/D M/D M/D
		e(0 ¹ 0 ¹ 0 ²) e(0 ¹ 0 ¹ 1 ²) e(0 ¹ 0 ² 1 ¹) e(0 ¹ 1 ¹ 1 ²) e(0 ² 1 ¹ 1 ¹) e(1 ² 1 ¹ 1 ¹)	C C C C C C	M/C M/C M/C M/C M/C M/C	M/D M/D M/D M/D M/D M/D	M/D M/D M/D M/D M/D M/D	M/D M/D M/D M/D M/D M/D
	2 0						

(次ページへ続く)

(表K・3の続き)

総 数	j		誤 り パター ン	P _b 0 の 巾		P _b 1 の 巾		P _b 2 の 巾		P _b 3 の 巾		P _b 4 の 巾	
	1 級	2 級											
3	3	0	e(0 ¹ 0 ¹ 0 ¹)	C		M/D		M/D		M/D		M/D	
			e(0 ¹ 0 ¹ 0 ¹)	C		M/D		M/D		M/D		M/D	
			e(0 ¹ 1 ¹ 1 ¹)	C		M/D		M/D		M/D		M/D	
			e(1 ¹ 1 ¹ 1 ¹)	C		M/D		M/D		M/D		M/D	
4	0	4	e(0 ² 0 ² 0 ² 0 ²)	C		M/D		M/D		M/D		M/D	
			e(0 ² 0 ² 0 ² 1 ²)	C		M/D		M/D		M/D		M/D	
			e(0 ² 0 ² 1 ² 1 ²)	C		M/D		M/D		M/D		M/D	
			e(0 ² 1 ² 1 ² 1 ²)	M/D/C		8		M/D		M/D		M/D	
			e(1 ² 1 ² 1 ² 1 ²)	M/D		8		M/D		M/D		M/D	
	1	3	e(0 ¹ 0 ² 0 ² 0 ²)	C		M/D		M/D		M/D		M/D	
			e(0 ¹ 0 ² 0 ² 1 ²)	C		M/D		M/D		M/D		M/D	
			e(0 ² 0 ² 0 ² 1 ¹)	M		9		M/D		M/D		M/D	
			e(0 ¹ 0 ² 1 ² 1 ²)	C		M/D		M/D		M/D		M/D	
			e(0 ² 0 ² 1 ² 1 ²)	C		M/D		M/D		M/D		M/D	
			e(0 ¹ 1 ² 1 ² 1 ²)	C		7		M/D		M/D		M/D	
			e(0 ² 1 ² 1 ² 1 ²)	M/D		9		M/D		M/D		M/D	
			e(1 ² 1 ² 1 ² 1 ²)	M/D		9		M/D		M/D		M/D	
	2	2	e(0 0 0 0)	C		M/D		M/D		M/D		M/D	
			e(0 0 0 1 ²)	C		M/D		M/D		M/D		M/D	
			e(0 0 0 1 ¹)	C		M/D		M/D		M/D		M/D	
			e(0 0 1 ² 1 ²)	C		M/D		M/D		M/D		M/D	
			e(0 0 1 ¹ 1 ²)	C		M/D		M/D		M/D		M/D	
			e(0 0 1 ¹ 1 ¹)	C		M/D		M/D		M/D		M/D	
			e(0 1 ¹ 1 ² 1 ²)	M/D/C		M/D		M/D		M/D		M/D	

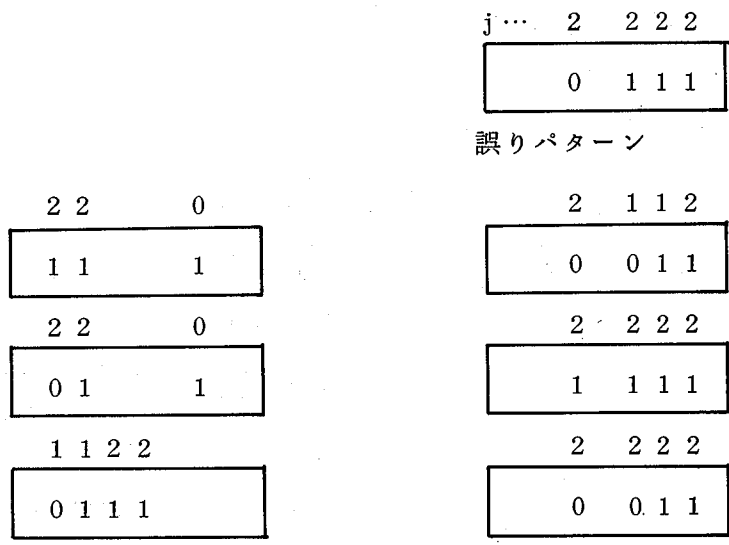
以下略

⋮

但しM……復号誤り, D……誤り検出, C……正しい復号

e(*^{j₁}, *^{j₂}…) : * = 1 or 0; j₁, j₂……信頼指数

誤り検出確率 P_r ，復号誤り確率 P_E は付図 K・1 に示す復号誤り確率，誤り検出確率の主要項を与えるパターンより計算される。



付図 K・1 誤りパターンの例

よって次式で与えられる。

$$P_r \cong 5.10 \times 10^8 P_b^8$$

$$P_E \cong 6.34 \times 10^9 P_b^8$$

残留イレージャ推定復号との比較を表 K・4 に示す。

付表 K・4 残留イレージャ推定復号と Chase 復号の比較
(符号 A_1, C_1, C_2 共に $(15, 10, 4)$ SEC-DED 符号)

確率	Chase III	残留イレージャ	
		イレージャ専一	イレージャ・誤り
P_r	$5.10 \times 10^8 P_b^8$	$1.13 \times 10^7 P_b^7$	$2.94 \times 10^6 P_b^7$
P_E	$6.34 \times 10^9 P_b^8$	$9.78 \times 10^5 P_b^7$	$7.83 \times 10^4 P_b^8$

但しアナログ重み計算は $P_b = 10^{-3}$ で行った。

〔付録 L〕：式（ 5 . 1 5 ）の導出

誤りが生起するとき、最小距離の隣接符号語に誤ると仮定する。

まず k 行目の 1 回の C_1 復号で t_1 個までの誤りを訂正する C_1 受信語に生起している $N_{10}(k)$ 個の誤りが

(1) $N_{10}(k) \leq t_1$ の場合

生起した $N_{10}(k)$ 個の誤りが訂正される。

(2) $t_1 < N_{10}(k) < d_1 - t_1$ の場合

生起した N_{10} 個の誤りが検出され $N_{10}(k)$ 個の誤りとしてそのまま残留する。

(3) $N_{10}(k) \geq d_1 - t_1$ の場合

誤訂正が生起する場合があります、 ℓ 重誤り ($\ell \leq t_1$) として誤訂正され
ると $N_{10}(k) + \ell (= d_1)$ 個の誤りが残留する。

C_1 復号で推定された誤りの総数 $N_1(c)$ であったとする。

$$\begin{aligned} N_1(c) &= \sum_{k=1}^{n_2} N_{10}(k) \\ &= X_1 + S_1 + \sum_{\ell=0}^{t_1} K_{\ell} \cdot \ell \end{aligned} \quad \cdots (L-1)$$

となる。但し、 K_{ℓ} : ℓ 重誤りとみて誤訂正した C_1 符号語の数とする。

X_1 : C_1 復号で正しく復号し、訂正した誤りの数とする。

S_1 : C_1 復号で誤り検出された誤りの数とする。

通信路で生起した誤りの総数を $N_1(r)$ とする。 $N_1(r)$ は C_1 復号器のパラメータから表現可能である。すなわち、

$$N_1(r) = X_1 + S_1 + \sum_{\ell=0}^{t_1} K_{\ell} \cdot (d_1 - \ell) \quad \cdots (L-2)$$

$N_2(r)$ を C_1 復号で復号誤り又は誤り検出になった誤りの数、 $N_2(c)$ を C_2 復号で推定した誤りの数とする。 $N_2(r)$ は

$$\begin{aligned} N_2(r) &= S_1 + \sum_{\ell=0}^{t_1} K_{\ell} \cdot (d_1 - \ell) + \sum_{\ell=0}^{t_1} K_{\ell} \cdot \ell \\ &= S_1 + \sum_{\ell=0}^{t_1} K_{\ell} \cdot d_1 \end{aligned} \quad \cdots (L-3)$$

となる。

I C₂ 復号で復号誤りがない場合

C₁ 復号後残留している誤りはすべて訂正されているか誤り検出される。従って次式が成立する。

$$N_2(r) = N_2(c) \\ = S_1 + \sum_{\ell=0}^{t_1} K_{\ell} \cdot d_1 \quad \cdots (L-4)$$

$\sum_{\ell=0}^{t_1} K_{\ell} \cdot d_1$ は C₁ 復号で復号誤りであったものが C₂ 復号で訂正、又は再び検出された誤りである。ところで

$$N_1(c) + N_2(c) = X_1 + 2S_1 + \sum_{\ell=0}^{t_1} K_{\ell} \cdot (\ell + d_1) > N_1(r) \quad \cdots (L-5)$$

である。

一方 (L-1) (L-2) と $d_1 - \ell > \ell$ より

$$N_1(r) > N_1(c) \quad \cdots (L-6)$$

$$\text{又, } N_1(r) - N_2(c) = X_1 + S_1 + \sum_{\ell=0}^{t_1} K_{\ell} \cdot (d_1 - \ell) - \left[S_1 + \sum_{\ell=0}^{t_1} K_{\ell} \cdot d_1 \right]$$

$$= X_1 - \sum_{\ell=0}^{t_1} K_{\ell} \cdot \ell \quad \cdots (L-7)$$

である。

X_1 は C₁ 復号で正しく訂正した誤りの数で $\sum_{\ell=0}^{t_1} K_{\ell} \cdot \ell$ は C₁ 復号で新たに付加された誤りの数である。しかるに通常のガウス分布通信路では、

$$X_1 \gg \sum_{\ell=0}^{t_1} K_{\ell} \cdot \ell \quad \text{であるから}$$

$$N_1(r) > N_2(c)$$

とみてよい。

$$\therefore N_1(c) + N_2(c) > N_1(r) > \max(N_1(c), N_2(c)) \quad \cdots (L-8)$$

が成立つ。

II C₂ 復号で復号誤りがある場合

$$N_2(r) = X_2 + S_2 + \sum_{i=0}^{t_2} L_i \cdot (d_2 - i) \quad \cdots (L-9)$$

ここで X_2 は C₂ 復号で正しく復号した誤りの数、 S_2 は検出された誤り数、 L_i は C₂ 復号で i 重誤りとみなされて誤訂正した C₂ 符号の語の数である。

一方 $N_2(r)$ は又

$$N_2(r) = S_1 + \sum_{\ell=0}^{t_1} K_{\ell} \cdot d_1 + \sum_{i=0}^{t_2} L_i \cdot (d_2 - i) \quad \cdots (L-10)$$

でもある。従って

$$N_2(c) = S_1 + \sum_{\ell=0}^{t_2} K_{\ell} \cdot d_1 + \sum_{i=0}^{t_2} L_i \cdot i \quad \cdots (L-11)$$

$$\begin{aligned} \therefore N_1(c) + N_2(c) &= X_1 + 2S_1 + K_{\ell} \cdot (d_1 + \ell) + \sum_{\ell=0}^{t_2} L_i \cdot i \\ &> X_1 + S_1 + \sum_{i=0}^{t_1} K_{\ell} \cdot (d_1 - \ell) \\ &= N_1(r) \quad \cdots (L-12) \end{aligned}$$

となる。又、明らかに $N_1(r) > N_1(c)$ である。

$$\begin{aligned} \text{一方 } N_1(r) - N_2(c) &= X_1 + S_1 + \sum_{\ell=0}^{t_1} K_{\ell} \cdot (d_1 - \ell) \\ &\quad - \left[S_1 + \sum_{\ell=0}^{t_1} K_{\ell} \cdot d_1 + \sum_{i=0}^{t_2} L_i \cdot i \right] \\ &= X_1 - \sum_{\ell=0}^{t_1} K_{\ell} \cdot \ell - \sum_{\ell=0}^{t_2} L_i \cdot i \quad \cdots (L-13) \end{aligned}$$

である。

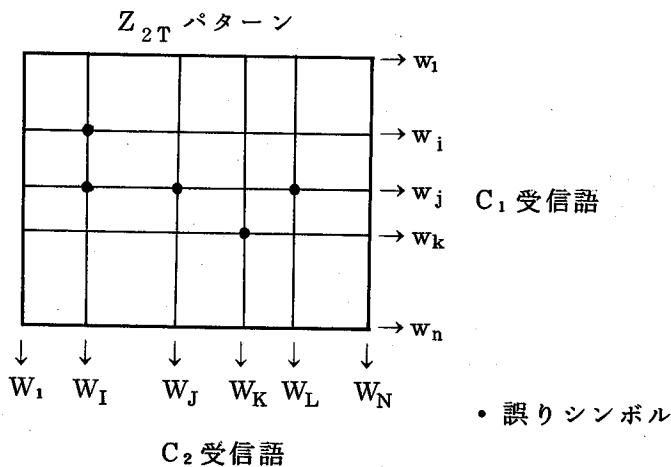
これも通常の通信路では $X_1 \gg \sum K_{\ell} \cdot \ell + \sum L_i \cdot i$ であるから

$$N_1(r) > N_2(c) \quad \cdots (L-14)$$

$$\therefore N_1(c) + N_2(c) > N_1(r) > \max(N_1(c), N_2(c)) \quad \cdots (L-15)$$

〔付録M〕：行方向と列方向のアナログ重みの導出

(i) 復号誤りが生起していない場合



付図M・1 Z_{2T} パターン（復号誤りなし）

一つのテストパターン Z_{AT} (重みは5) に対し以下のように行方向のアナログ重みを算出する。

$$\begin{aligned}
 w_1 &= q_{1,1} + \dots + q_{I,1} + \dots + q_{J,1} + \dots + q_{K,1} + \dots + q_{L,1} + \dots + q_{N,1} \\
 &\vdots \\
 w_i &= q_{1,i} + \dots + p_{I,i} + \dots + q_{J,i} + \dots + q_{K,i} + \dots + q_{L,i} + \dots + q_{N,i} \\
 &\vdots \\
 w_j &= q_{1,j} + \dots + p_{I,j} + \dots + p_{J,j} + \dots + q_{K,j} + \dots + p_{L,j} + \dots + q_{N,j} \\
 &\vdots \\
 w_k &= q_{1,k} + \dots + q_{I,k} + \dots + q_{J,k} + \dots + p_{K,k} + \dots + q_{L,k} + \dots + q_{N,k} \\
 &\vdots \\
 w_n &= q_{1,n} + \dots + q_{I,n} + \dots + q_{J,n} + \dots + q_{K,n} + \dots + q_{L,n} + \dots + q_{N,n} \\
 &\dots (M-1)
 \end{aligned}$$

一方、列方向のアナログ重みを以下のように算出する。

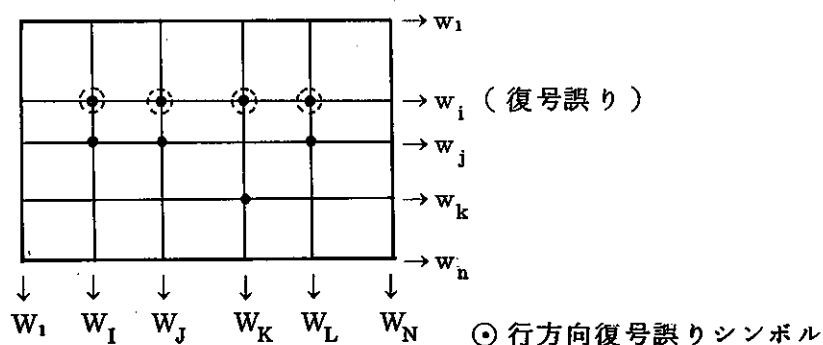
$$\begin{aligned}
 W_1 &= q_{1,1} + \dots + q_{1,i} + \dots + q_{1,j} + \dots + q_{1,k} + \dots + q_{1,n} \\
 &\vdots \\
 W_I &= q_{I,1} + \dots + p_{I,i} + \dots + p_{I,j} + \dots + q_{I,k} + \dots + q_{I,n} \\
 &\vdots \\
 W_J &= q_{J,1} + \dots + q_{J,i} + \dots + p_{J,j} + \dots + q_{J,k} + \dots + q_{J,n} \\
 &\vdots \\
 W_K &= q_{K,1} + \dots + q_{K,i} + \dots + q_{K,j} + \dots + p_{K,k} + \dots + q_{K,n} \\
 &\vdots \\
 W_L &= q_{L,1} + \dots + q_{L,i} + \dots + p_{L,j} + \dots + q_{L,k} + \dots + q_{L,n} \\
 &\vdots \\
 W_n &= q_{N,1} + \dots + q_{N,i} + \dots + q_{N,j} + \dots + q_{N,k} + \dots + q_{N,n} \quad \dots (M-2)
 \end{aligned}$$

ここで明らかに

$$\sum_{Z=1}^n w_Z = \sum_{u=1}^N W_u \quad \dots (M-3)$$

が成立つ。即ち復号誤りを含まない場合アナログ重みは行方向で計算しても、列方向で計算しても等しくなる。

(ii) 復号誤りが生起している場合



付図M・2 Z_{2T} パターン(復号誤りあり)

行又は列方向に復号誤りを含む場合は一つのテストパターンTに対し行方向で求めた誤りパターン $Z_{T, row}$ と列方向で求めた $Z_{T, column}$ が異なる。行方向のアナログ重みは

$$\begin{aligned}
 w_1 &= q_{1,1} + \cdots + q_{I,1} + \cdots + q_{J,1} + \cdots + q_{K,1} + \cdots + q_{L,1} + \cdots + q_{N,1} \\
 &\vdots \\
 w_i &= q_{1,i} + \cdots + q_{I,i} + \cdots + q_{J,i} + \cdots + q_{K,i} + \cdots + q_{L,i} + \cdots + q_{N,i} \\
 &\vdots \\
 w_j &= q_{1,j} + \cdots + p_{I,j} + \cdots + p_{J,j} + \cdots + q_{K,j} + \cdots + p_{L,j} + \cdots + q_{N,j} \\
 &\vdots \\
 w_k &= q_{1,k} + \cdots + q_{I,k} + \cdots + q_{J,k} + \cdots + p_{K,k} + \cdots + q_{L,k} + \cdots + q_{N,k} \\
 &\vdots \\
 w_n &= q_{1,n} + \cdots + q_{I,n} + \cdots + q_{J,n} + \cdots + q_{K,n} + \cdots + q_{L,n} + \cdots + q_{N,n} \\
 &\quad \cdots (M-4)
 \end{aligned}$$

となる。

一方列方向では

$$W_1 = q_{1,1} + \cdots + q_{1,i} + \cdots + q_{1,j} + \cdots + q_{1,k} + \cdots + q_{1,n}$$

⋮

$$W_I = q_{I,1} + \cdots + p_{I,i} + \cdots + p_{I,j} + \cdots + q_{I,k} + \cdots + q_{I,n}$$

⋮

$$W_J = q_{J,1} + \cdots + p_{J,i} + \cdots + p_{J,j} + \cdots + q_{J,k} + \cdots + q_{J,n}$$

⋮

$$W_K = q_{K,1} + \cdots + p_{K,i} + \cdots + q_{K,j} + \cdots + p_{K,k} + \cdots + q_{K,n}$$

⋮

$$W_L = q_{L,1} + \cdots + p_{L,i} + \cdots + p_{L,j} + \cdots + q_{L,k} + \cdots + q_{L,n}$$

⋮

$$W_N = q_{N,1} + \cdots + q_{N,i} + \cdots + q_{N,j} + \cdots + q_{N,k} + \cdots + q_{N,n} \cdots (M-5)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^N W_u - \sum_{Z=1}^n w_Z &= (p_{I,i} - q_{I,i}) + (p_{J,i} - q_{J,i}) \\ &\quad + (p_{K,i} - q_{K,i}) + (p_{L,i} - q_{L,i}) > 0 \end{aligned}$$

⋯ (M-6)

であり、したがって

$$\sum_{u=1}^N W_u \neq \sum_{Z=1}^n w_Z$$

となる。

⋯ (M-7)