The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	多重符号の符号構成法，復号法，および評価方法に関する研究
Author(s)	井上，徹
Citation	大阪大学，1986，博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/791
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

多重符号の符号構成法、復号法、および評価方法に関する研究

1985年12月

井　上　　徹

内 容 梗 概

本論文は筆者の誤り制御方式に関する研究の成果をまとめたものであり本文は6章より構成されている。

本研究の目的は理論的，実用的に数多い特長を有する多重符号の符号構成法，復号法ならびに評価方法の提案および解析を行い，実用的な通信システムの応用を図ることにある。以下に各章の内容を簡単に述べる。

第1章は本研究全編にわたる序論であり，従来行なわれてきたこの種の研究の概要を系統的に概説し，本研究の動機，意義，関連研究分野との位置づけを明らかにならしめようとするものである。

第2章は本研究の全般にわたって用いられる誤り検出確率，復号誤り確率，または伝送制御を変えることにより復号のパフォーマンスがどう変化するかを明らかにし実用的に重要な伝送方式，よく用いられるブロック符号の復号パフォーマンスを論じる。

第3章は重要な多重符号である一般化積符号につき，その特性を連接符号，積符号と比較して明らかにする。更にこの符号をＰＣＭ録音機に用いた場合の効果を他の符号と比較してその有意性を明らかにする。

第4章は重畳符号を応用した多重符号の符号構成法を従来行なわれてきた方法と関連づけて論じ，新しい符号構成法を2種提案する。更に提案された2種の構成法により構成された重畳符号がもとの符号の最小距離を減少することなく冗長度を大巾に節減せしめうる直交化交錯法を導入し，従来のＢＣＨ符号，ＲＳ符号，ＶＧ限界式との比較を行う。更に畳み込み符号に重畳符号を応用し

た場合の効果を論ずる。

第5章は多重符号の復号法として新しい復号法を提案し，従来方法と比較し，その特長を明らかにする。更に提案方式を従来，優れた復号法の一つと考えられてきたChaseの復号法に適用した場合，新しい復号方法が実現できることを明らかにし，その有意性を明らかにする。

第6章は本論文全般に記述されている研究成果を総括する結論であり，あわせて今後に残された問題についても論じている。

多重符号の符号構成法，復号法および評価方法に関する研究

目　次

第１章　序論 …… 1

１．１　多重符号および重畳符号を用いた符号構成法 …… 1

１．２　ＡＲＱと多重符号 …… 1

１．３　一般化積符号 …… 2

１．４　多重符号の研究の歴史 …… 3

１．５　多重符号の復号法の研究 …… 3

１．６　本研究の位置付けと目的 …… 4

第２章　基礎的考察 …… 5

２．１　序言 …… 5

２．２　Ｇｏ－ｂａｃｋ－２　ARQの評価 …… 5

２．２．１　逆方向通信路誤り無しの場合 …… 7

２．２．２　逆方向通信路誤り有りの場合 …… １６

２．３　Ｇｏ－Ｂａｃｋ－Ｎ　ARQの評価 …… ２４

２．４　ＲＳ符号の誤り検出能力 …… ３５

２．５　結言 …… ３７

第３章　一般化積符号 …… ３８

３．１　序言 …… ３８

３．２　符号構成法 …… ３８

３．３　ＰＣＭ録音機への応用 …… ４６

３．３．１　誤りの特性 …… ４６

３．３．２　積符号ＩＰＣと一般化積符号ＲＳＣ …… ４６

３．３．３　復号パフォーマンス …… ５２
３．４　結言 …… ６０

第４章　重畳符号を応用した多重符号の構成法 …… ６２
４．１　序言 …… ６２
４．２　連接符号に応用した符号構成法 …… ６２
４．３　方法Ｉ …… ６５
４．３．１　擬似誤りＩと擬似誤りⅡ …… ６５
４．３．２　符号化アルゴリズム …… ６７
４．３．３　直交化交錯法 …… ６９
４．３．４　他の符号との比較 …… ７２
４．４　方法Ⅱ …… ７７
４．４．１　原理 …… ７７
４．４．２　適用例 …… ８３
４．５　畳み込み符号への適用 …… ８４
４．６　結言 …… ９０

第５章　多重符号の復号法 …… ９２
５．１　序言 …… ９２
５．２　ＲＥ（残留イレージャ）復号法 …… ９３
５．２．１　復号器の構成 …… ９３
５．２．２　復号器の動作原理 …… ９５
５．２．３　Ｃｈａｓｅ復号器との比較 …… １０４
５．２．４　考察 …… １１１
５．３　誤り監視計数復号 …… １１２
５．３．１　原理 …… １１２

5．3．2　復号器の構成 …… 113
5．3．3　最小ステップ誤り推定法 …… 116
5．3．4　シミュレーション …… 118
5．4　多次元Chase復号 …… 120
5．4．1　信頼指数αの計算 …… 120
5．4．2　多次元Chase復号 …… 123
5．4．3　信頼指数とアナログ重み …… 124
5．4．4　多次元Chase復号器の種類 …… 125
5．4．5　RE復号を適用した多次元Chase復号器 …… 129
5．5　結言 …… 131

第6章　結論 …… 132
謝　辞 …… 134
文　献 …… 136
付　録　A …… 142
B …… 142
C …… 143
D …… 144
E …… 144
F …… 145
G …… 147
H …… 148
I …… 149
J …… 150
K …… 154
L …… 160
M …… 162

第1章　序　論

誤り制御符号は近年ディジタル通信システム，各種メモリ，ディジタルオーディオなどの信頼性向上のために盛んに実用化されるようになってきており，今後もますます発展することが予想される。

本章は本論文に関係する誤り訂正符号に関する研究のあらましを述べ，本研究の位置づけと目的を明確にする。

１．１　多重符号および重畳符号を用いた符号構成法

本論文では多重に符号化された符号語によって情報を送受するデータ伝送系に用いられる符号を多重符号と総称する。多重符号とは積符号，連接符号，はじめそれらを基礎とした重畳符号および２次元の符号を基礎に構成された多次元の符号を含むこととする。

１．２　ＡＲＱと多重符号

本論文では判定帰還形誤り制御方式を便宜上実用機の呼称でもあるＡＲＱ（Ａｕｔｏｍａｔｉｃ　Ｒｅｐｅａｔ　Ｒｅｑｕｅｓｔ）と呼ぶ。

ブロック伝送を行うＡＲＱは通常単純な構成の巡回符号を誤り検出符号あるいは軽微の誤りを訂正する誤り訂正符号が用いられている。しかし，一旦，誤りが検出されると再送要求信号を送信局へ返送し，誤りの検出されたブロックを再送する。この意味でＡＲＱも同一情報を広義の多重符号化を行うデータ伝送を行っていると言えよう。

本論文ではＣＣＩＴＴ　Ｖ．４１勧告にあるＧｏ－ｂａｃｋ－２　ＡＲＱの解析を行い，この方式を長い伝搬遅延のある通信路に適用した場合の問題点とこの点を改良したＧｏ－ｂａｃｋ－Ｎ　ＡＲＱとの比較検討結果について報告する。

ＡＲＱの研究は古くはＲｅｉｆｅｎ[50]，Ｂｅｎｉｃｅ　＆　Ｆｒｅｙ[3][4]などがありＡＲＱの実用機としての報告としてはＣｒｉｐｓ[7]やＢａｃｈｅｒ[2]の報告がある。一方，Ｃｕｐｅｒｍａｎ[8]はバースト誤りを模擬するギルバートの通信路のパラメータを符号語の誤り検出確率と結びつけた式を導いた。Ｅｌｌｉｏｔ[10]Ｈｏｒｓｔｅｉｎら[17]はギルバートのモデルを用いて各種の通信方式の研究を行った。又，藤原，中西，笠原らは有限長の符号の中に現れる単一バースト誤りの確率密度関数および分布関数を導いた。[14]

本報告ではこれらの研究成果をふまえ更に発展させて，逆方向通信路を考慮した場合，[20]更にはＧｏ－ｂａｃｋ－Ｎ　ARQとＧｏ－ｂａｃｋ－２　ARQとの比較検討を行う。[21]更に最近特に注目を浴びているＲＳ（Ｒｅｅｄ－Ｓｏｌｏｍｏｎ）符号の誤り検出能力についても触れる。[32]

１．３　一般化積符号

積符号[11]，連接符号[12]はこれまで理論的観点から研究が先行してきた。特にＳｈａｎｎｏｎ，Ｃ．Ｅ.[51]の第２定理（即ち，通信路容量Ｃより小なる任意の情報伝送速度Ｒに対して符号長Ｎを大とし，通信路符号器，復号器を適当に設計すれば復号誤り確率をいくらでも小さくすることができる）を満足する符号としてＥｌｉａｓ，Ｐ．はＨａｍｍｉｎｇ符号[16]をもとに積符号を無限に繰り返して拡張することによって初めて漸近的距離比（Ａｓｙｍｐｔｏｔｉｃ　ｄｉｓｔａｎｃｅ　ｒａｔｉｏ）

$$\delta(R) = \ell im \sup_{N \to \infty} Dm/N > 0$$

を満足する符号を構成した。[11]

又，Ｆｏｒｎｅｙ，Ｇ．Ｄ．によって導入された連接符号はＪｕｓｔｅｓｅｎ，Ｊ．によってその内部符号を適当に選ぶことにより漸近的距離比$\delta(R) > 0$を満足する符号を構成した。[40]

この積符号，連接符号を実用化した報告は比較的少なく又，通信路，ハードウェア量などの点から適宜修正を加えた符号構成法が望まれていた。筆者はいわば積符号，連接符号の中間的な符号構成をもつ符号を提案する。[23][24]

同時にこの符号がＰＣＭ録音機への応用に適していることを従来の符号例と比較して述べる。[37][38][53]

１．４　多重符号の研究の歴史

２種以上の符号を結合して符号比率を改善する方法に重畳符号がある。主として一次元の符号に重畳符号を用いてその符号比率を改善する研究にはすでにかなり多くの報告がある。[41][43][52]

筆者は積符号の符号語を構成する過程に重畳化の手法を取り入れ従来方法に比し，生起する擬似誤りが効果的に分散される符号構成法(方法Ｉ)を提案する。又，２次元の符号に重畳符号を用いる符号構成法の研究は笠原，杉山，平沢，滑川の論文[42]に端を発するがそのほとんどがすでに構成された積符号，連接符号の符号語に更に新たな情報を付加して伝送するタイプのものであった。これに対し筆者は重畳符号を応用して検査シンボルを削減する符号構成法（方法Ⅱ）を提案する。[35][39]本論文第４章では新しい符号構成法によって構成された符号と従来の符号との優劣が比較される。最後に畳み込み符号にこの構成法を適用した時の効果について論ずる。[36]

１．５　多重符号の復号法の研究

多重符号の復号法に関しては従来ただ一度の復号で所定の復号パフォーマンスを行う復号がほとんどであったが，このような能力限度いっぱいの復号を行うと訂正能力は向上するもののそれに伴う復号誤りも又，増大するという問題があった。筆者は誤り訂正個数を少なくして復号回数を繰り返す方法を提案する。このようにして復号した復号パフォーマンスが従来の優れた復号法として

知られたＣｈａｓｅの方法[6]と比較してどのような特長を有するか明らかにする。

１．６　本研究の位置付けと目的

本研究は多重符号の構成法について提案し，詳細な検討を加える。特に重畳符号化を用いる符号構成法に関してその復号過程で生成する擬似誤りを首尾よく分散させ小さな最小距離の重畳符号を重畳させても充分効果を発揮する符号構成法を提案する。

更に従来の重畳符号化法が新たな情報を付加する方法であったのに対しもとの符号の検査記号数を重畳符号を応用して大巾に節減することによって同一フォーマットで異なった信頼度で伝送することを可能にする。

更に多重符号の復号法を考察し従来方法と比較検討し考察する。新しい復号法が通信路誤り率不良のところで特に効力を発揮することを示す。

新しい復号法が誤り監視計数器を導入することにより繰り返し回数の減少，又，バースト誤りの検出などより高度なシステムを構築できることを示す。

最後に新しい復号法が多次元に拡張したChaseの復号法[6]に容易に適用でき，その演算回数が大巾に減少せしめうることを示す。

第2章　基礎的考察

2．1　序言

本章ではデータ伝送系においてよく用いられる二．三の符号を例にとりその評価方法を確立，整理し，以下の章の評価計算の準備とする。

従来ＡＲＱでは逆方向通信路の誤りを考慮した解析報告は少なく，又，Ｇｏ－ｂａｃｋ－Ｎ方式の実用的な解析報告もあまりなされていない。

本章では単体の符号を伝送制御手段と組み合わせたＡＲＱをとりあげ従来あまり解析されなかった逆方向通信路を考慮した解析，およびＧｏ－ｂａｃｋ－ＮＡＲＱの解析を行う。(19)(20)(21)

2．2　Ｇｏ－ｂａｃｋ－２　ＡＲＱの評価

本章ではＣＣＩＴＴ　Ｖ．４１　勧告のＧｏ－ｂａｃｋ－2 ARQ を実用的観点からモデル化し解析を行う。ＡＲＱシステムの解析は既に多くの文献が見られ，各種のタイプについて検討されているが，以下のような仮定のもとに，実用的な見地からモデル化し解析する。

〔仮定〕：

(1)　ビット同期は充分安定であるとし同期獲得条件に厳しいパターンチェックを行う方式とする

(2)　　生成多項式Ｇ（ｘ）＝（Ｘ＋１）Ｐ（ｘ）　　（2.1）

但し，Ｐ（ｘ）は次数３次以上の原始多項式とする。従って最小距離４である。

符号系のもつ統計能力

次数ｒの生成多項式Ｇ（ｘ）＝（Ｘ＋１）Ｐ（ｘ）の統計的能力

(a)　符号語の誤り検出としては

(i)　ｒビット以下のバースト誤りのすべて

(ii)　奇数のランダム誤り

を検出する。

(b) 符号語の誤り見逃しとしては

(i) $b = r + 1$ ビットのバースト誤りは 2^{-r+1} の確率で見逃す

(ii) $b > r + 1$ ビットのバースト誤りは 2^{-r} の確率で見逃す。

通信路モデル

バースト誤りを良く模擬するGilbertのモデル[15]を用いる。

平均ビット誤り率Pe，バースト誤りの平均長を $\bar{B}$ とすると次式で与えられる。[14]

$$Pe = \frac{(1-h)P}{p+P} \qquad (2.2)$$

$$\bar{B} = \frac{(1-h)p}{(1-hq)^2}\left(h + \frac{1-h}{p^2}\right) \qquad (2.3)$$

但し $q = 1 - p$，$Q = 1 - P$

又，hはバースト誤り状態において誤らないビットの生起確率で"0"と"1"が等確率に生起するとするとh = 0.5となる。なおh = 0.5としてデータpe，$\bar{B}$ が与えられた時のギルバートのパラメータP，pを逆算すると次の様に与えられる。

$$p = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{1 + \frac{21}{\bar{B}} - \frac{6}{\bar{B}^2} + \frac{1}{\bar{B}^3} + \sqrt{\frac{54}{\bar{B}} + \frac{378}{\bar{B}^2} - \frac{162}{\bar{B}^3} + \frac{27}{\bar{B}^4}}} + \sqrt[3]{1 + \frac{21}{\bar{B}} - \frac{6}{\bar{B}^2} + \frac{1}{\bar{B}^3} - \sqrt{\frac{54}{\bar{B}} + \frac{378}{\bar{B}^2} - \frac{162}{\bar{B}^3} + \frac{27}{\bar{B}^4}}} - 2 + \frac{1}{\bar{B}}\right) \qquad (2.4)$$

$$P = \frac{2Pe}{1-2Pe}\,p \qquad (2.5)$$

又，$p + P = 1$ の時，ランダム誤り状態を表す。（付録A参照）。

システムの評価基準

信頼度Rと伝送能率ηを次の様に定義する。[19][22]

$$R = \frac{\text{正しい全受信情報ビット数}}{\text{全送信情報ビット数}} \qquad (2.6)$$

$$\eta = \frac{\text{全送信情報ビット数}}{\text{通信路に送信された全ビット数}} \qquad (2.7)$$

2．2．1　逆方向通信路誤り無しの場合

逆方向通信路誤り無しのシステムの状態遷移図は図2.1に示すようになる。

ブロック単位の誤り検出について

通信路の各事象の生起確率および誤りビット数の期待値を求めるために

$P_D(\ell, m, n)$；nビット中，長さmビットのバースト誤りを生じ，

誤りビット数がℓである確率（$2 \leqq \ell \leqq m \leqq n$）

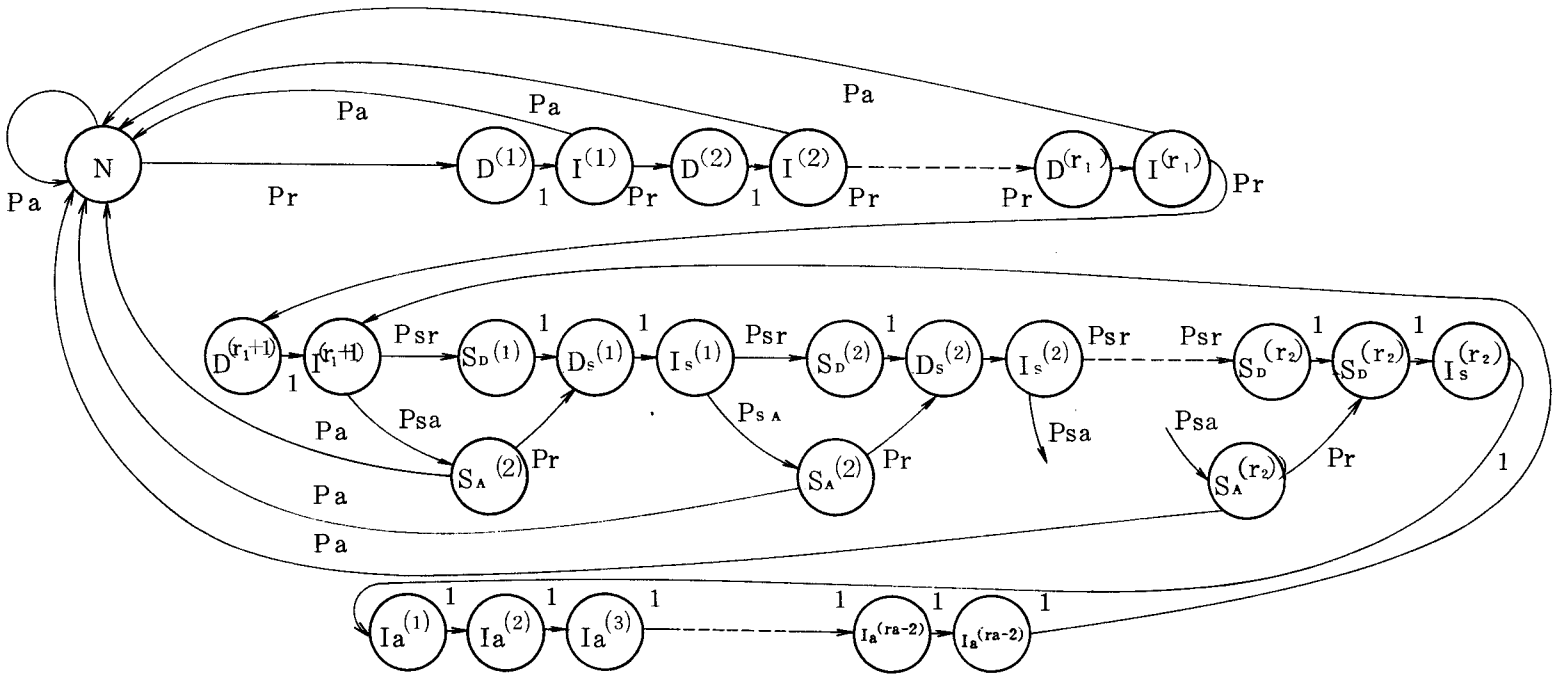


図２．１　システムの受信側の状態遷移図

N　：新しいブロックを受信する状態

$D^{(i)}$：第 i 番目の再送サイクルで誤りを含むブロックを受信し，これを検出し棄脚する状態

$I^{(i)}$：第 i 番目の再送サイクルで誤りを含むブロックに続くブロックを受信し，これをアイドルとする状態

$S_a^{(i)}$：第 i 番目の再同期サイクルで同期ブロックをアクセプトする状態

$S_D^{(i)}$：　〃　　〃　　同期ブロックを拒絶する状態

$Ds^{(i)}$：　〃　　〃　　同期ブロックに続く棄脚すべきブロックを受信する状態

$Is^{(i)}$：第 i 番目の再同期サイクルで同期ブロック，棄却するブロックに続くアイドルとすべきブロックを受信する状態

$Ia^{(i)}$：アラームに入り，アイドルブロックで等価的に与えられる第 i 番目のブロックを受信する状態

とし，$P_D(\ell, m, n)$ を ℓ, m 要素とする $(n-1) \times (n-1)$ の行列 P_D を

$$P_D = \begin{bmatrix} P_D(2,2,n), & P_D(2,3,n) \cdots\cdots & P_D(2,n,n) \\ 0 & P_D(3,3,n) \cdots\cdots & P_D(3,n,n) \\ \vdots & & \vdots \\ 0 \cdots\cdots\cdots\cdots & 0 & P_D(n,n,n) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

とすると，付録Bのようにして

$$P_D = Rv \cdot Pc = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_1 \\ \boldsymbol{R}_1 \boldsymbol{V} \\ \vdots \\ \boldsymbol{R}_1 \boldsymbol{V}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Pc(1,n-1) & & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & Pc(1,1) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

が得られる。ここで $\boldsymbol{R}_1$ および $\boldsymbol{V}$ は付録Bに述べた通りGilbertにより与

えられているV(i)=P(0^{i-1}1|1)を要素としPc(i,n)はnビット中iビット誤りの生起確率でCuperman[8]により

$$Pc(i,n)=(1-h)^i \sum_{m=i}^{n} {}_mC_i\, h^{m-i} P_0(m,n) \qquad (2.10)$$

但し

$$Po(m,n)=\frac{P}{p+P}\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(n-j-2)!\,q^{m-j-1}}{m\,j!\,(m-j-1)!\,(n-m-j)!}(P-q)^i Q^{n-m-j-2}$$

$$\times[A^2(j)-pA(j)-m(q-P)Q] \qquad (2.11)$$

$$A(j)=(n-m-j)P+mQ \qquad (2.12)$$

で与えられる。

信頼度の計算

信頼度Rは式(2.6)の定義より

$$R=(n-e)/n=1-e/n \qquad (2.13)$$

ここでeは1ブロック当たりの誤って受信したビット数の期待値である。2.2で述べた誤り見逃し事象より式(2.8)のP_Dを用いて次式で与えられる。

$$e=2^{-r}(W\cdot P_D\cdot E^T) \qquad (2.14)$$

但し，$W=\{W_2, W_3, \cdots, W_n)$，$E=(e_2, e_3, \cdots, e_n)$

とし，誤りビットの重みWおよび見逃しバースト誤りの重みEは

$$W_2=W_3=0 \quad W_i=i \quad i=4,\cdots,n$$

$$e_2=e_3= \quad =e_r=0,\ e_r+1=2,\ e_i=1,\ i\geqq r+2 \qquad (2.15)$$

である。式(2.14)は付録Cのようにしてr次の行列演算に変換し計算する。

$$\boldsymbol{R}=1-\frac{1}{n\,.\,2^r}\{n\cdot Pe-p(1,n)-W'P_D{}'E'^T\}$$

$$W'=(2,3,4,5,\cdots,r,0)$$

$$E'=(1,1,1,\cdots,1,-1) \qquad (2.16)$$

$$P_D' = \begin{bmatrix} R_1' \\ R_1' V' \\ \vdots \\ R_1' V'^{r-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Pc(1, n-1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Pc(1, n-r) \end{bmatrix}$$

(2.17)

伝送能率ηの計算

(2.16)と同様にして1ブロック受信される確率Paは

$$Pa = P(0^n) + 2^{-r}\{1 - P(0^n) - P(1, n) - P_D' E'^T\} \quad (2.18)$$

但し

$$P(0^n) = \frac{1}{(p+P)(J-L)}\{(J+p-Q)(1-L)J^n - (L+p-Q)(1-J)L^n\} \quad \cdots\cdots(2.19)$$

$$Pr = 1 - Pa \quad \cdots\cdots(2.20)$$

である。以上によりPa，Pr，Psa，Psrに従って遷移する受信側の状態 遷移図は図2.1に与えられる。従って定義(2.7)より図2.1の遷移確率行列より定常状態の伝送能率ηは付録Dの方法より

$$\eta = \frac{n-a-r}{n} \cdot \left[1 + 2Pr\frac{1-Pr^{r_1}}{1-Pr} - Pr^{r_1+1} + \frac{Pr^{r_1+1}}{1-(Psr+PrPsa)^{r_2}} \{1 + (1+2(Psr+PrPsa))\frac{1-(Psr+PrPsa)^{r_2}}{1-(Psr+PrPsa)} + (ra-1)(Psr+PrPsa)^{r_2}\right]^{-1} \quad (2.21)$$

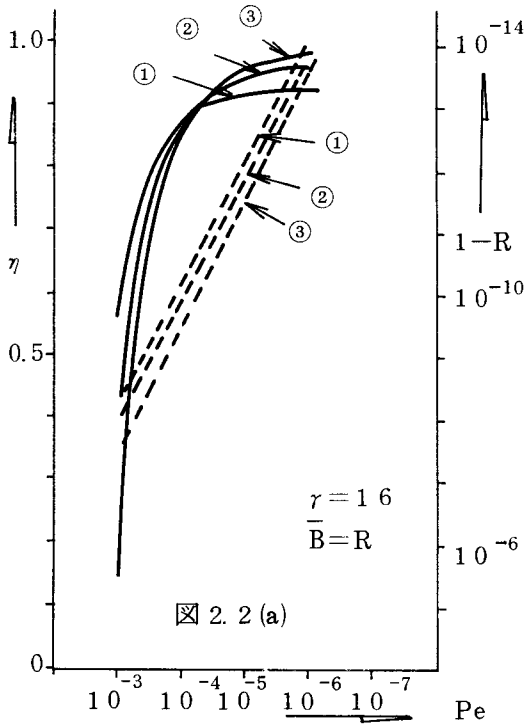
但し，a　：サービスビット数

r_1　：再送サイクルの繰返し回数

r_2　：再同期サイクルの繰返し回数

ra　：アラーム時間等価ブロック数

で与えられる。



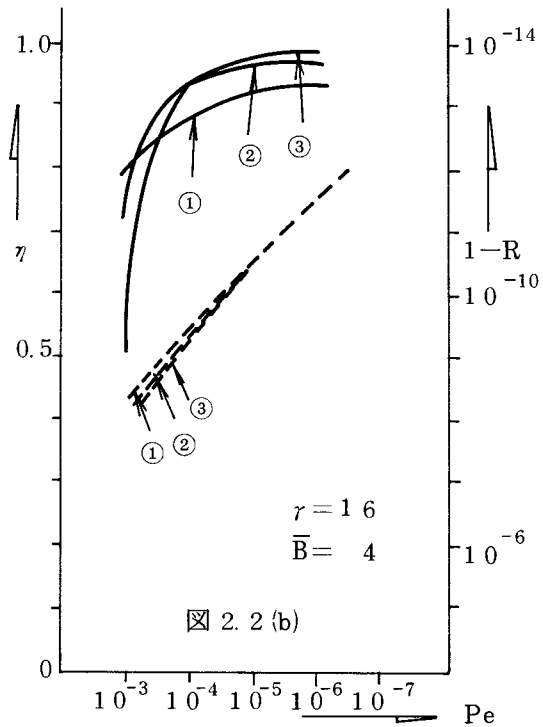


図 2.2 平均ビット誤り率 Pe 対 R，η

① n＝260.0 の場合

② n＝500 〃

③ n＝980 〃

R ・・・ランダム通信路

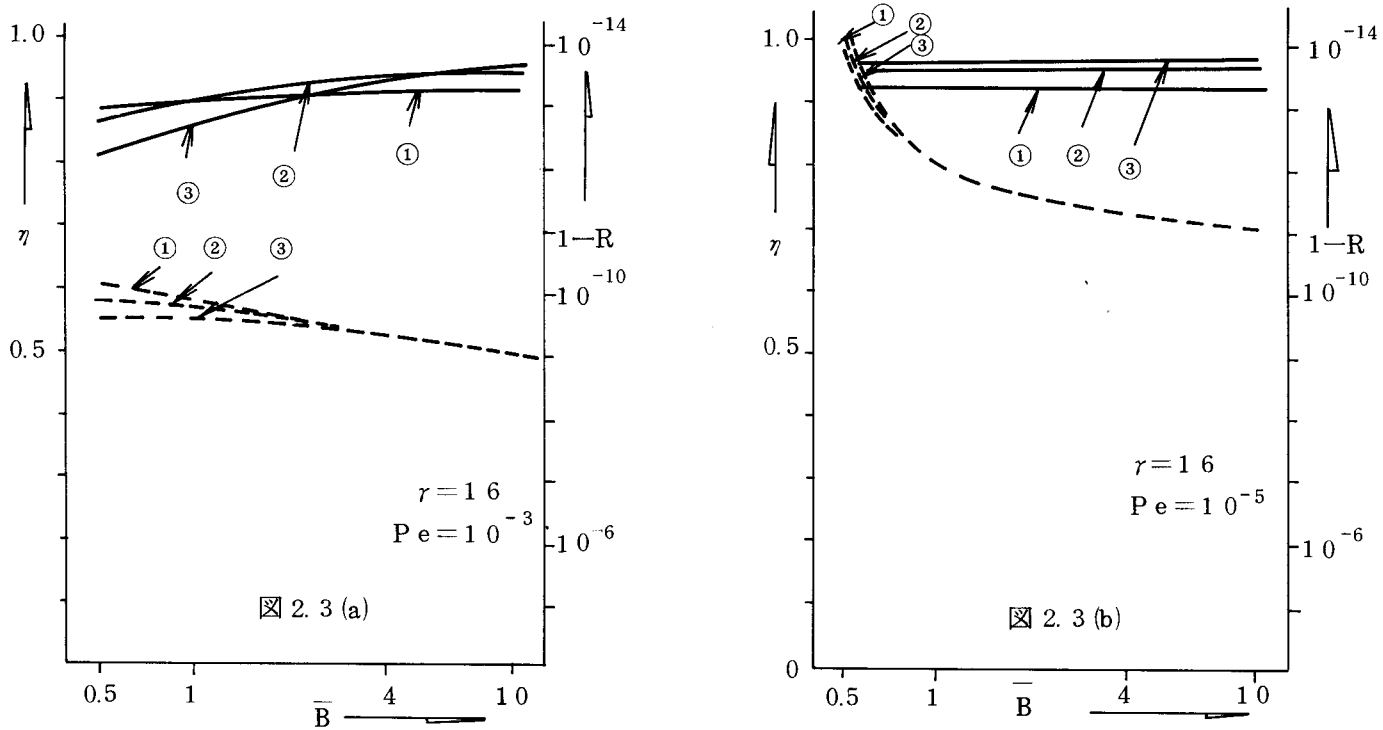


図 2.3 平均バースト長 B 対 R，η

① n＝260 の場合

② n＝500 〃

③ n＝980 〃

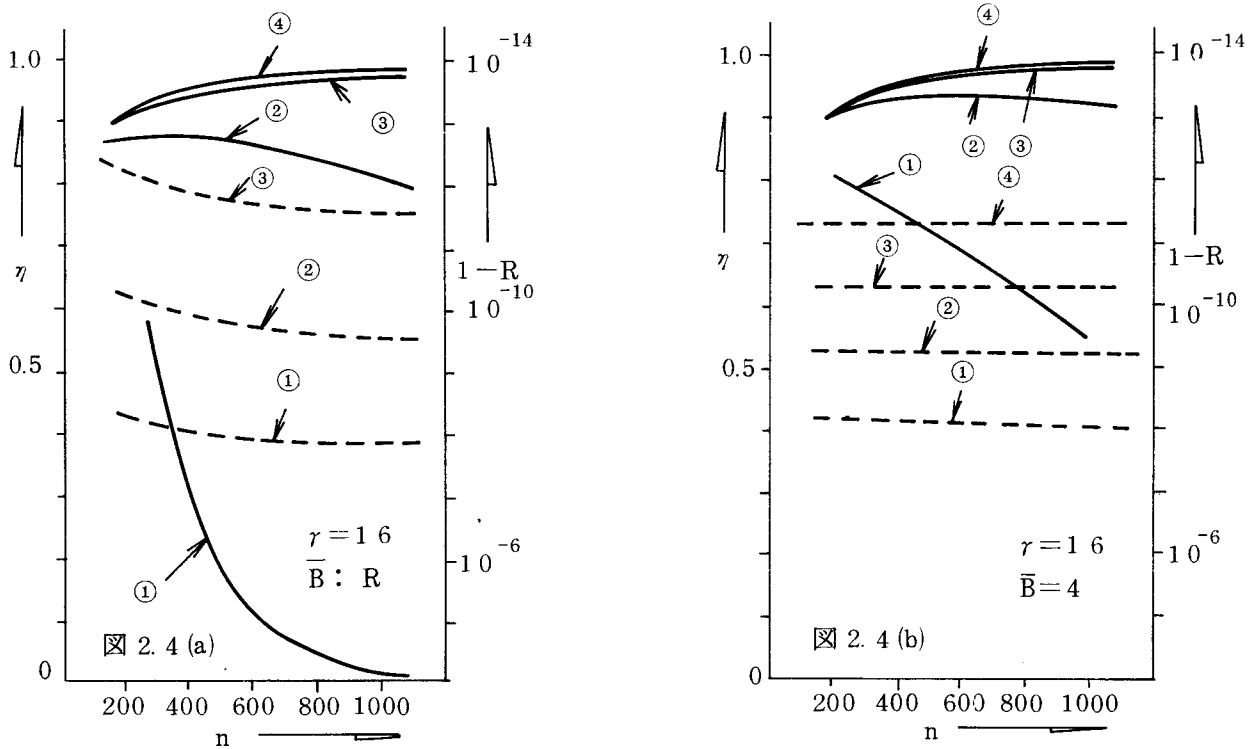


図 2. 4 ブロック長 n 対 R，η

① Pe＝10^{-3}　③Pe＝10^{-5}
② Pe＝10^{-4}　④Pe＝10^{-6}

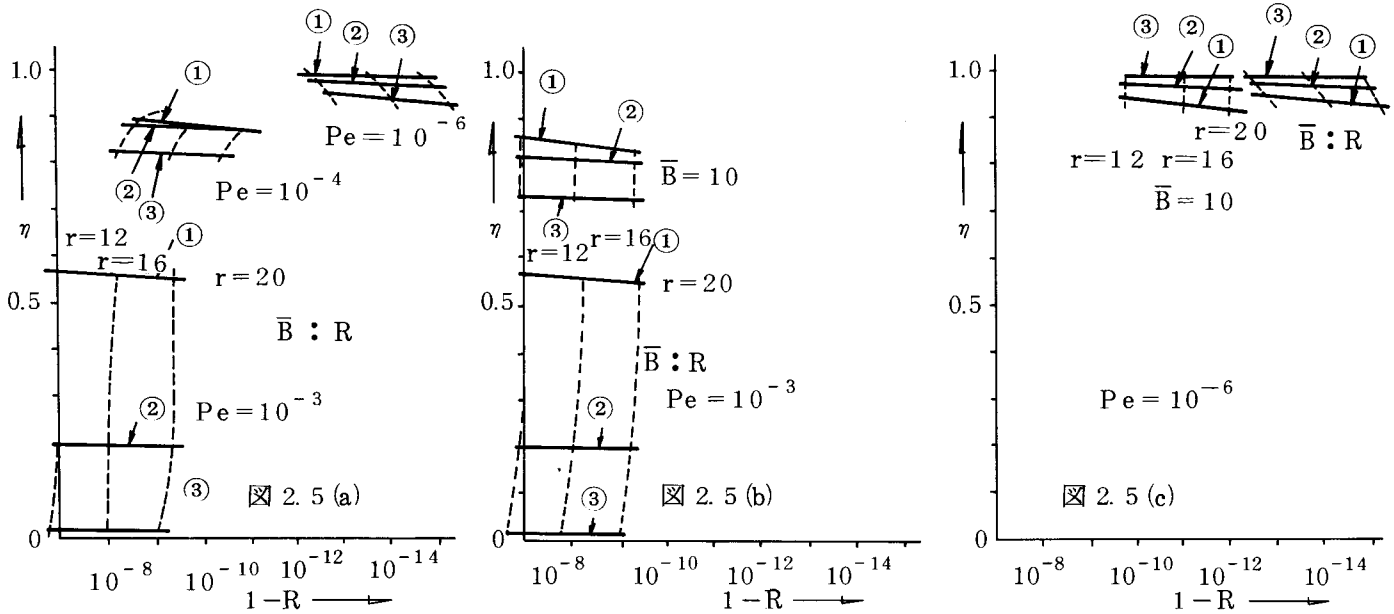


図２．５　回線状態に対する η とＲの関係

①η ＝ 260 の場合

②η ＝ 500　〃

③η ＝ 980　〃

図２．５(a)～(c)に於いて点線は

ｒ＝１２，ｒ＝１６，ｒ＝２０の場合を示す。

$\bar{B}$：Ｒはランダム誤りを示す。

計算結果および考察

図2.2～2.5より以下のことがわかる。

信頼度Rについて

(1) 次数r一定ではn小なるほどRは大となる。

(2) Pe大においてはほぼrによりRが決まる。

(3) $\bar{B}$が大になるに従い，またnが大になるに従い信頼度は低下する。

(4) Peが小になるとランダム誤り通信路ほどnの影響を受ける。

伝送能率ηについて

(1) $Pe < 10^{-5}$ではほぼηが$(n-a-r)/n$に近づく。

(2) $Pe > 10^{-4}$ではnが大になるほど影響は大きい。従って通信路誤りに対して最適なブロック長が存在する。

(3) Peが大になるほど，Bが大になるほどηは大となる。従って，ランダム誤り通信路が最も不良である。

(4) Peが小のところではn，rの影響は小さい。

2．2．2 逆方向通信路誤り有りの場合

逆方向通信路の誤りを考慮したとき主として伝送能率にどのような影響を与えるかについて考察する。次のような仮定を考慮し実用的な見地から検討を行った。

〔仮定〕：

(i) 逆方向通信路の誤りはランダムであるとする。

(ii) 逆方向通信路の誤りは順方向の誤りとは独立に誤るとする。

(iii) 同期，生成多項式，伝送制御手順は2．2．1と同じとする。

ここでは逆方向通信路の誤りを考慮するため付随的に考えなければならないものにガーブルド冗長誤り（garbled redundancy誤り）について述べる。

ガーブルド冗長誤りとは送信側でＲＱ信号（再送要求信号）を受信した時，続くアイドルとすべきブロックが受信側で正しく受信されないために故意に誤りを加えて送信したにも拘わらずこのブロックの誤りが検出されない誤りを言う。

ここでは該当ブロックの最終ビットを反転（"１"→"０"，"０"→"１"）させるＶ．４１のガーブルド冗長誤りを考慮する。ガーブルド冗長誤りの生起する事象，即ち，故意に誤らせたブロックの誤りを見逃すような通信路誤りについて，生成多項式の次数をｒ，通信路上で生起したバースト長をb_0とすると

(1) 最終ビットが誤りの時受信側で

(i) 最終ビット（誤り）を除いて他に誤りが無いとき

(ii) 最終ビット（誤り）を除いて$b_0 = r + 1$のバースト誤りは2^{-r+1}の確率で見逃す。

(iii) 最終ビット（誤り）を除いて$b_0 > r + 1$のバースト誤りは2^{-r}の確率で見逃す。

(2) 最終ビットが誤りでない時受信側で

(i) ｎ－ｒビット目が誤りｎ－１ビット目の間の誤りは2^{-r+1}の確率で見逃す。

(ii) ｎ－ｒ－１ビット目までに誤りがある誤りは2^{-r}の確率で見逃すと考えることができる。

通信路モデル

順方向はＧｉｌｂｅｒｔのモデルによる。逆方向通信路は順方向通信路と独立な平均ビット誤り率P_{eB}のランダム誤り通信路とする。通常，順方向通信路と逆方向通信路の誤りには統計的な相関がある場合も考えられるがここでは両者の誤り率の比を使用周波数帯域の比に等しいと考えたものを標準とし，特に逆方向通信路の誤り率が著しく大きい場合を考慮した。

伝送制御方式のモデル化

逆方向通信路の誤りを考慮するとこれを用いて伝送するＲＱ信号の誤り，即ち，通常Ｌｏｓｔ　ＲＱ（ＲＱ信号が"１"であるにも拘わらずＲＱ信号が"０"となる誤り）とＦａｌｓｅ　ＲＱ（ＲＱ信号が"０"であるにも拘わらずＲＱ信号が"１"となる誤り）と呼ばれる事象が生起しこれを正規の状態に戻す伝送制御手順を明確にしなければならない。

これらの異常シーケンスはＬｏｓｔ　ＲＱによる脱ブロック（特定のブロックが脱落する），Ｆａｌｓｅ　ＲＱ　による重複ブロック（特定のブロックが２度受信される）が生じ信頼度の点からも充分な対策が必要である。

実用システムでは

(1)　Ｌｏｓｔ　ＲＱに対して伝送能率を犠牲にして信頼度低下に対処するアラームによる手動の復帰操作。

(2)　Ｆａｌｓｅ　ＲＱに対しては前置符号（Ｐｒｅｆｉｘ部）を監視してブロックの異常サイクルを検知してアイドルプリントする自動復帰操作を行うよう考えられているものが多い。

異常シーケンスを次に図で示す。

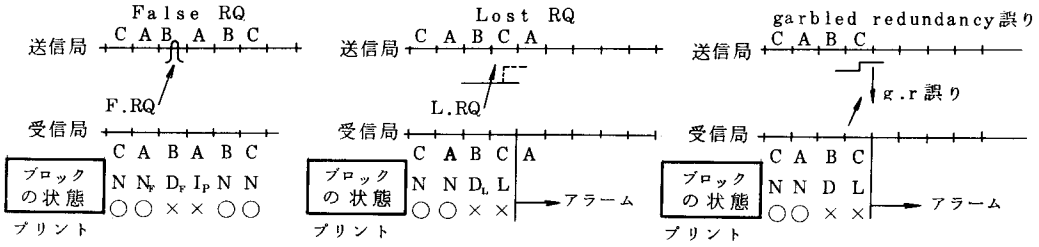


図２．６　異常シーケンスの例

更に情報ブロック，同期ブロックの遷移確率は２．２のＰａ，Ｐｒ，Ｐｓａ，Ｐｓｒと全く同様に与えることができ又，

Ｐｇｒ　：ｎビットの情報ブロックのガーブルド冗長誤りを見逃す確率

P_{eB}　：逆方向通信路の平均ビット誤り率

を新たに加えてやると順方向通信路の誤りと逆方向通信路の誤りが独立であることから両者の積で与えられる確率に従って遷移する。

信頼度Ｒの計算

逆方向通信路の誤りを考慮した時前述のとおりＬｏｓｔ　ＲＱに対しては手動操作により脱ブロックを防ぎＦａｌｓｅ　ＲＱに対しては前置符号の監視により重複ブロックを防ぐため特に前置符号の信頼度が全体の信頼度に影響する。

しかしながらＦａｌｓｅ　ＲＱのとき前置符号の監視でアイドルプリントとできないのは逆方向通信路の誤りとガーブルド冗長誤りが連続して生起し更に前置符号の誤りが特定のブロックサイクルで受信されるように連続する極めて希なパターンが発生する場合に限られるから近似的にこれを無視すると２．２．１の信頼度の式（２.１６）と近似的に一致し

$$R = 1 - \frac{1}{n.2^{r}} \{ n.Pe - P(1,n) - W'P_{p}'E'^{T} \} \qquad (2.22)$$

となる。

伝送能率ηの計算

確率Ｐａ，Ｐｒ，Ｐｓａ，Ｐｓｒ，Ｐｇｒ，P_{eB}に従って遷移する近似的な受信側状態遷移図を図2.7に示す。

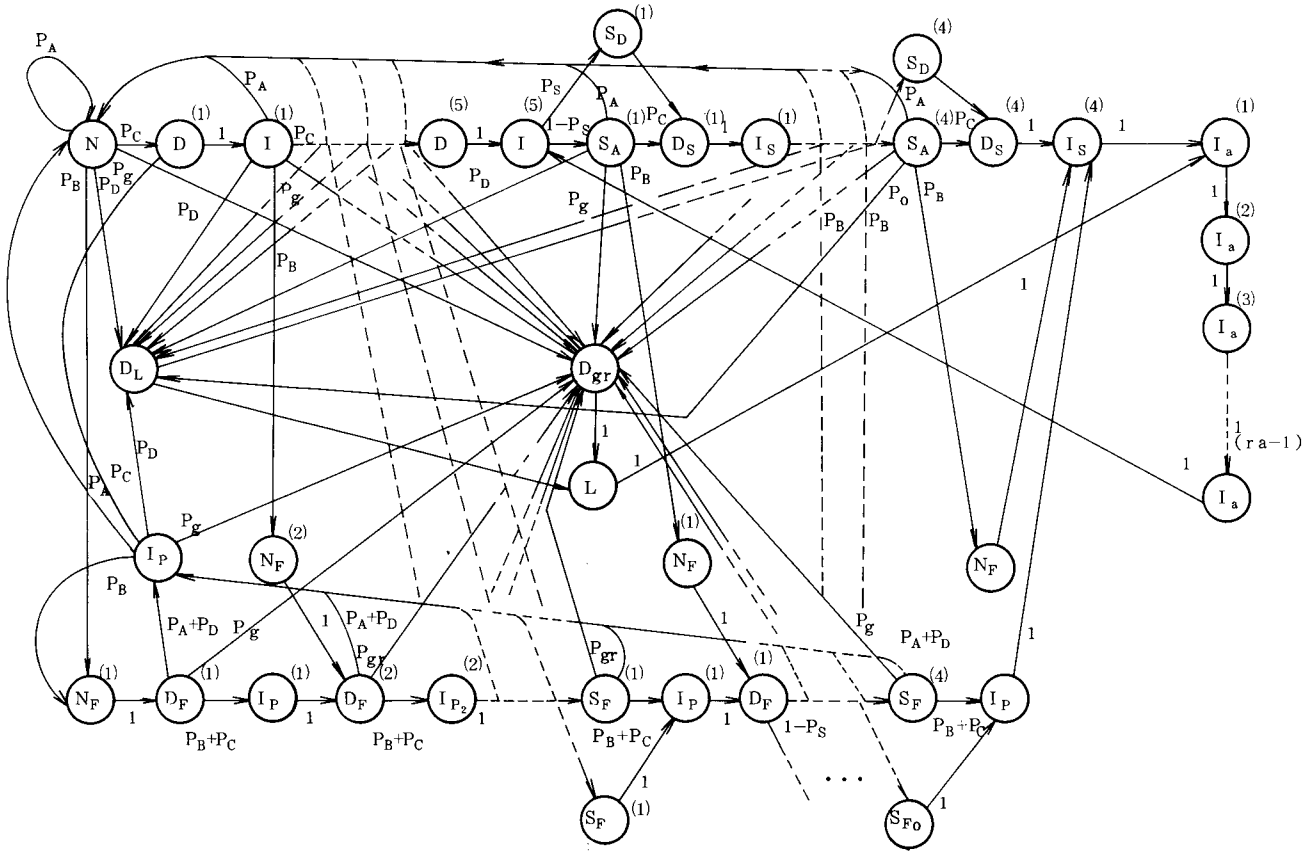


図２．７　システムの受信側の状態遷移図

$N_F^{(i)}$ ：新しいブロックを受信しこれにFalse RQが起こる状態

$I_P^{(i)}$ ：False RQを検出して受信側でアイドルプリントする状態

$S_F^{(i)}$ ：False RQに起因して起る再同期サイクルで同期を検出した状態

$S_{FD}^{(i)}$ ：False RQに起因して起る再同期サイクルで同期を検出できなかった状態

D_L ：誤りを検出し次にLost RQが続いて起る状態

D_{gr} ：誤りを検出し次のブロックにgarbled redundancy誤りが起こる状態

但し $P_A = P_a(1-P_{eB})$ $P_D = (1-P_a)\cdot P_{eB}$

$P_B = P_a P_{eB}(1-P_{gr})$ $P_g = P_{gr}\{P_a\cdot P_{eB}+(1-P_a)\cdot(1-P_{eB})\}$

$P_C = (1-P_a)(1-P_{eB})(1-P_{gr})$

$$P_{gr} = P(0^{n-1}\ 1)+(1/2^r)\{1-P_{Ao}-P_{Bo}\} \qquad (2.23)$$

ここで P_{Ao}，P_{Bo} はガーブルド冗長を付加した条件付きで P_{Ao} は

(1) 受信側で1ビット誤り，2ビット誤りとして検出される確率

(2) 2ビット誤りのうち，受信側で3ビット誤りとして検出される確率

(3) 受信側で3ビット以上の誤りとして検出される確率

P_{B0} は

$P_{B0} = P_{B1} - P_{B2}$

として与えられ

(1) P_{B1} はrビット以下のバースト誤りとして検出される確率

(2) P_{B2} はr＋1ビットのバースト誤りの生起する確率

従って図2.7の遷移確率行列より $r_1 = 4$，$r_2 = 4$ の場合の伝送能率 η は式は（2.24）で与えられる（付録E 参照）。

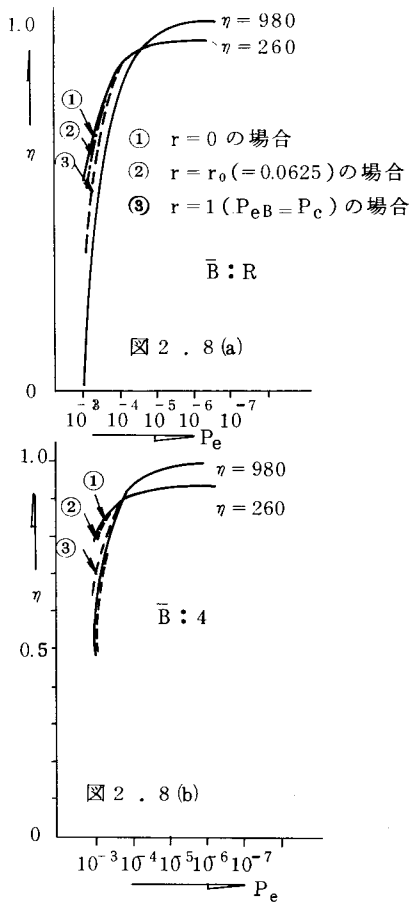


図２．８　$P_{eB} = r \cdot P_e$ のパラメータ P_e 対 η

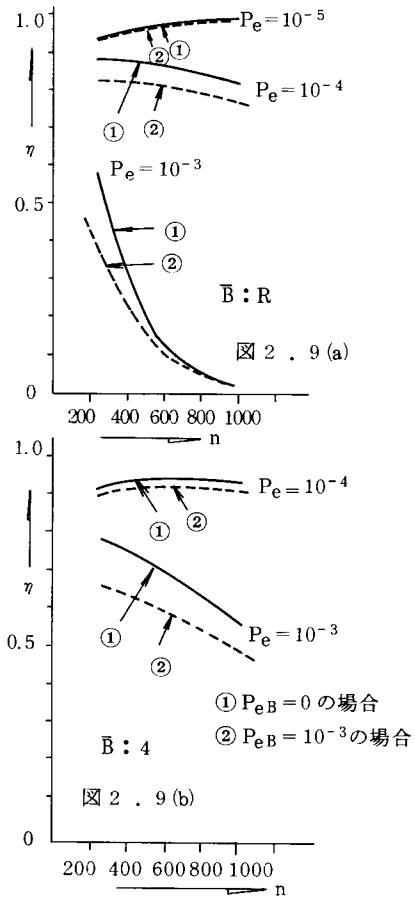


図２．９　ブロック長 n 対 η

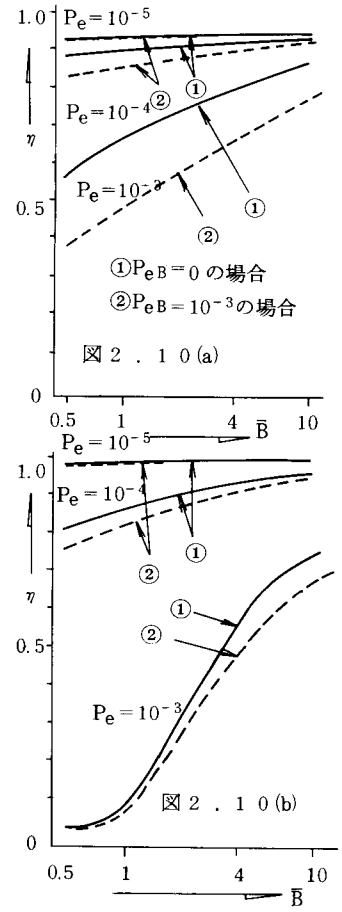


図２．１０　平均バースト長 $\bar{B}$ 対 η

$$\eta = \frac{n-a-r}{n} \frac{1+F_0}{H+F_1} \qquad (2.24)$$

但し

$$H = 1 + 2P_c \frac{1-P_c^4}{1-P_c}(1+x) + P_c^5(1+x) + T\left\{1 + 2A_1 \frac{1-A_1^4}{1-A_1}\right\} + Z + u \qquad (2.25)$$

$$F_0 = P_B(1+x) + P_B P_c(1+x)\frac{1-P_c^4}{1-P_c} + P_B(1-P_{sr})$$

$$\left\{P_c^5(1+x) + W\right\}\frac{1-A_1^4}{1-A_1} \qquad (2.26)$$

$$F_1 = 2P_B(1+x)\left[1 + P_B + 2P_c + (1+P_B+P_c)\left\{P_c^2 + (P_B+P_c)(2P_c+P_B)\right\}P_c^3\right] + P_B(1+x)\left[(P_B+P_c)^2\left\{P_c^2 + (P_B+P_c)(2P_c+P_B)\right\} + P_c^3(P_B+P_c) + P_c^4\right] + A_3(1+x)\left[2 + 3(P_B+P_c)(1-P_{sr}) + P_{sr}\right] + 3P_B(1-P_{sr})\left[P_c^5(1+x) + W\right] + 3\left\{(1+x)A_4 + WA_5\right\} + 3\left\{(1+x).A_6 + WA_7\right\}$$

$$+ \frac{2}{P_D}(P_D+P_g)\left[1 + (1+x)P_c\frac{1-P_c^4}{1-P_c} + (1-P_{sr})T\frac{1-A_1^4}{1-A_1} + x\right]$$

$$+ 2P_g\frac{x}{P_A+P_D} + (r_a - 1)W \qquad (2.27)$$

計算結果および考察

図2.8～2.10より得られた結果をまとめる。

1. 順方向通信路と逆方向通信路の帯域巾の比をγとすると$P_{eB} = \gamma \cdot P_e$なる関係のある時

(1) γの値に拘わらず$P_e < 10^{-4}$においてはP_{eB}の影響は無視できる。

(2) γが標準状態$\gamma_0 << 1$とみなせる時（例えば順方向通信路1200ボー，75ボー，$\gamma_0 = 0.0625$なる時）$P_e < 10^{-4}$ではP_{eB}の影響は

無視して差し支えない。$P_e \cong 10^{-3}$ にすこし影響が出る程度であるが γ が1に近づくにつれ（$P_{eB} \cong P_e$ の時）影響が出てくる。

(3) $\overline{B} = 4$（一定）でもnが大になるに従い影響は小さくなる。

2. 逆方向通信路が一定して誤る時（P_{eB} 一定且つ $P_{eB} >> \gamma \cdot P_e$）

(1) $P_e < 10^{-5}$ においては $P_{eB} = 10^{-3}$ でもほとんど影響無い。

(2) $P_e \cong 10^{-4}$ においてはnの値に関係なく逆方向通信路の影響を受ける。

(3) $P_e \cong 10^{-3}$ でnが大になると逆方向通信路を考慮するしないに拘わらず η は極めて小となる。

(4) 順方向通信路の $\overline{B}$ が変っても $P_e > 10^{-4}$ では P_{eB} の影響は無視できない。

2．3 Go−back−N ARQの評価[21][22]

ARQシステムにおいて長い伝搬遅延のある通信路では伝送制御の方式に問題がある。特にバースト性の雑音が生起する通信路では充分検討が必要である。一般に長い伝搬遅延を伴う通信路でブロック伝送を行う場合，

(1) Go−back−2方式で行う場合

ブロック長を長くして伝搬遅延をカバーしなければならない。

その場合ブロック誤り率の増加による再送ブロックの増加を考慮しなければならない。

(2) Go−back−N方式で行う場合

伝搬遅延，通信路誤り状態に対する最適ブロック長，および最適分割回数が存在する。

なお逆方向通信路は誤りなしとする。

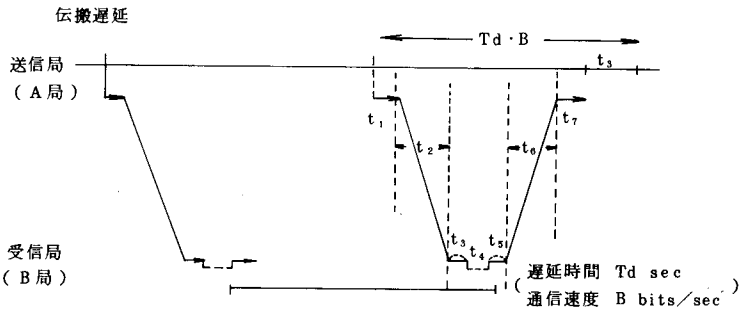


図２．１１　遅延時間と伝送ブロックとの関係

（Ｇｏ　ｂａｃｋ　２方式）

図2.１１はＧｏ－ｂａｃｋ－２方式の場合の通信路の伝搬遅延の様子を示す図である。t_1，t_2が純粋に通信路上の伝搬遅延である。t_1，t_3，t_4，t_5，t_7は送，受信モデム内の遅延でＶ．４１勧告案では４０ｍｓｅｃ見込まれている。t_8 は再送要求信号を検出してガーブルド冗長を付加するための時間である。t_8はＶ．４１では５０ ｍｓｅｃ見込まれている。通信速度Ｂ　ｂｉｔｓ／ｓｅｃ，ループ伝搬時間Ｔｄ秒，Ｎをバッファーブロック分割回数とするとＴｄ・Ｂ　一定の時，図2.１２に示すようにＮを増加させるにつれて必要なバッファービット数は少なくてすむという関係がある。

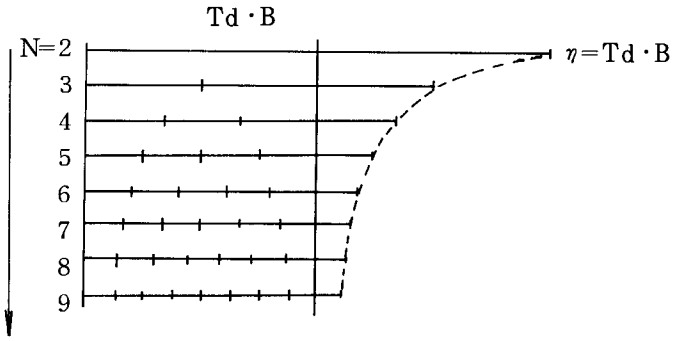


図２．１２　遅延ビット数一定の時必要最少限の

Ｂｕｆｆｅｒビットの数（但し　Ｎパラメータ）

図2.12より明らかなように必要なバッファービット数はn・Nビット。ビット換算等価遅延時間はTd・Bビットとなる。NとTd・Bとの関係式(2.28)が得られる。

$$\frac{B\cdot Td}{n}+1\leq N\leq\frac{B\cdot Td}{n}+2 \qquad (Nは正の整数) \qquad (2.28)$$

Go−back−N ARQの受信側状態遷移図は図2.13のようになる。

伝送能率と信頼性

伝送能率η

2.2.2と同様に，システムの定常状態における遷移図は図2.13に示したように示されその遷移確率行列に基づき伝送能率ηは

$$\eta=\frac{n-(a+r)}{n}$$

$$\left[1+N\cdot P_r\cdot\frac{1-P_r^{r_1+1}}{1-P_r}-P_r^{r_1+1}+\frac{P_r^{r_1+1}}{1-(P_{sr}+P_{sa}P_r)}+\frac{P_r^{r_1+1}}{1-(P_{sr}+P_{sa}P_r)}+\frac{N\cdot P_r^{r_1+1}(P_{sr}+P_rP_{sa})}{1-(P_{sr}+P_{sa}P_r)}+r_a\frac{P_r^{r_1+1}}{1-(P_{sr}+P_rP_{sa})^{r_2}}+r_a(P_{sr}+P_rP_{sa})^{r_2}\right]^{-1} \qquad (2.29)$$

ここでPa，Prはnビットのブロックを受信(アクセプト)する確率，拒絶(リジェクト)する確率である。

同期ブロックについては

Psa：nビットの同期ブロックにより正しいブロックを検出する確率。

Pse：nビットの同期ブロックにより正しいブロックを検出する確率。

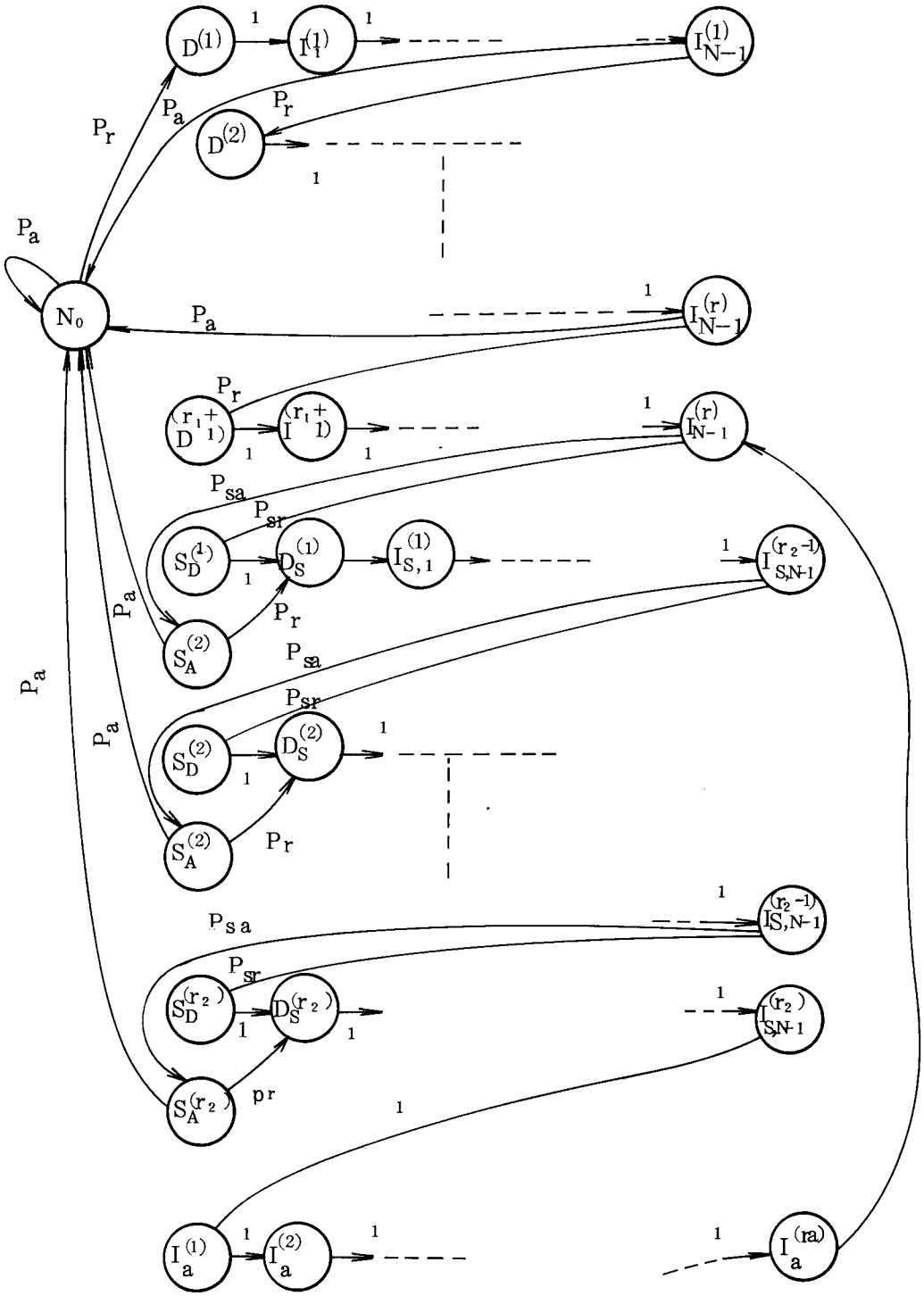


図２．１３　Ｇｏ　ｂａｃｋ　Ｎ方式の受信側伝送制御モデル

Psr ：nビットの同期ブロックによりブロック同期を検出できない確率。

ここで同期について厳しいパターンチェックと通信路誤りチェックを行うことを仮定すると近似的に，

$$Pse \ll 1$$

$$Psr \cong 1 - Pa$$

従って

$$Psa \cong Pa$$

$$Psr \cong 1 - Pa$$

と考えて差し支えない。

信頼度R

信頼度Rはブロックの伝送制御シーケンスに左右されず，符号の多項式の能力だけに依存するから式（2.16）と同じとなる。

$$R = 1 - \frac{1}{n \cdot 2^r} \{ n \cdot Pe - P(1,n) - W' P_D E'^T \} \qquad (2.30)$$

計算結果および考案

(1) Go－back－N方式の一般的な評価

信頼度Rについて

図2.14は通信路誤り状態，平均バースト長$\overline{B} = 4$，ビット誤り率$Pe = 5 \times 10^{-4}$の時におけるブロック長nに対しての信頼度の変化を示したものである。（但し，生成多項式の次数rは16に固定）

この図からはnの増加に伴ってRが減少しているのが分かるが，これはRのスケールを極端に拡大したためで，実際にはほとんど変化なく，有効数字8桁までの範囲では1とみなしてよい。従って評価の目安としてηを用いて検討した。

伝送能率ηについて

一定の遅延におけるブロック長のηへの影響および最適なNに対するグラフの一例を図2.15に示す。

図2.15は誤り状態$\overline{B}=4$，$Pe=10^{-4}$の時のGo-back-N方式のブロック長nに対する変化を遅延ビット数$Td\cdot\overline{B}=1000$の時の値を$n=50\sim1000$と変化させた時の値である。

(1) ηはNの変わり目で不連続な値となる。

これは式（2.28）でNが整数値をとるためηを与える式（2.28）の分母がnを連続的に増加させるにつれて，Nの整数値の変わり目で不連続な値をとる。

(2) バッファー分割損は$Td\cdot\overline{B}$ 一定でnを増加させてゆくとNの変わり目の直前で分割損最大となり，直後で最小となる。最適ブロック長を見つけるには$Td\cdot\overline{B}$を整数Nで割り，端数を切り上げした値をnとし，これらのnについて計算したηの値が最大になるものを選べばよい。

ブロック長n，および再送ブロック数Nの最適値

図2.16～図2.19は$Td\cdot\overline{B}=500$，1000，2000，5000に対するηの最大値を表す。又，（　）内の数値n，Nは各々ηの最大値を与える最適n，および最適Nを表す。これらの図より以下のことが明らかである。

(1) 最大のηの値は，一般に$Td\cdot\overline{B}$が増加すれば減少する。

(2) $Td\cdot\overline{B}$が増加するほど再送ブロック数Nは大となる。

(3) 通信路誤り状態が良くなるほどブロック長nは大となり，従って一定の遅延に対して再送ブロック数Nは小となる。

(4) 通信路誤り状態がよくなるほど又，平均バースト長が長くなるほど，ηに対する$Td\cdot\overline{B}$の影響は弱くなり，ηの最大値は1－（ブロック当りの冗長度）$\dfrac{n-(a+r)}{n}$に近づく。

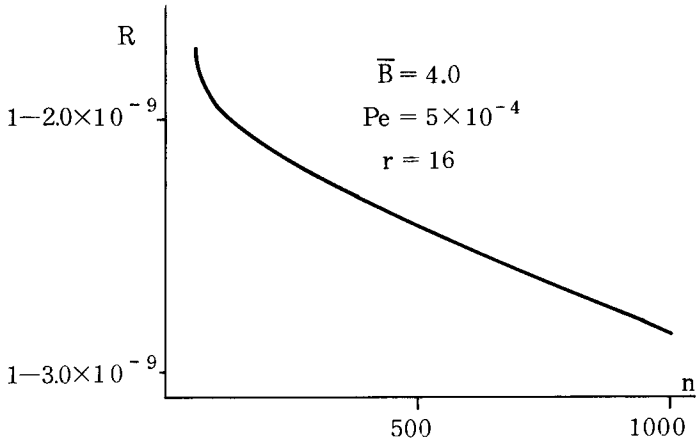
(II) Go−back−2方式と最適なGo−back−N方式との比較

図2.16〜図2.19からも明らかなようにビット誤り率が小さいほど又，平均バースト長が長いほどNの値は減少して2に近づく。

又，図2.16〜図2.19において，破線で示したものがGo−back−2方式でのηを与える。

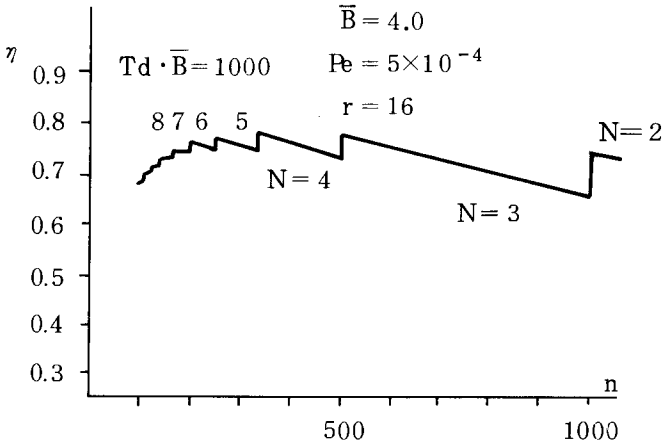
図2.20でTd・$\overline{B}$をパラメータにしてηの値が最大となる時がGo−back−N（N≧3）方式で実現できる範囲を示す図である。図で与えられた通信路誤り状態に対してGo−back−N（N≧3）方式が有効な誤り条件は図中の境界線より上の場合である。逆にGo−back−2方式でカバーできる誤り状態は図の境界線より下の通信路誤り条件となる。

図2.21〜図2.22はηと1−R（信頼度Rの補数）のグラフである。図から明らかなように誤り状態が悪いほど又，遅延が大きいほど大きなNが有効である。通信路誤り状態が良いときはGo−back−2方式の方がかえって有効となる。

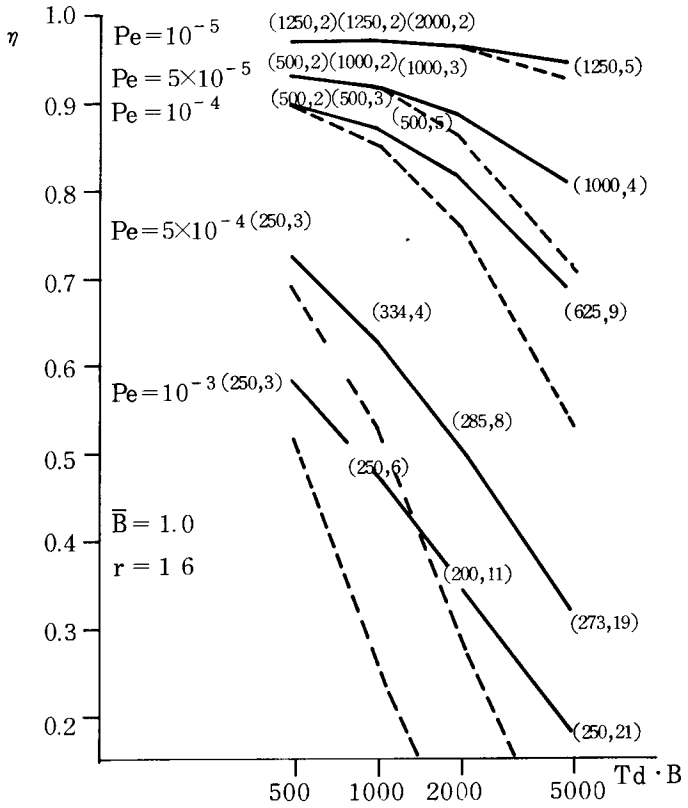


第2.14

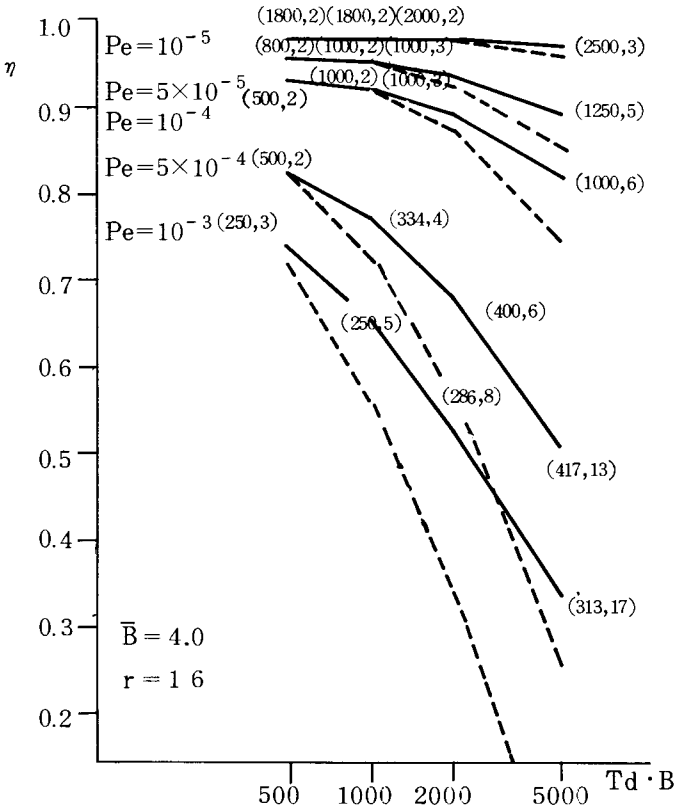
信頼度Rのブロック長に対する変化



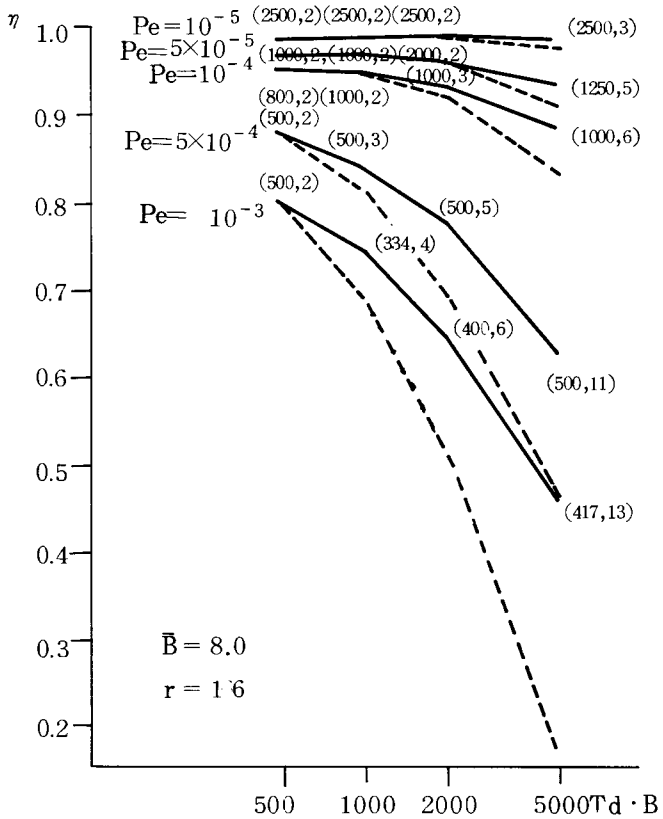
第２．１５図　ブロック長ηに対するＮとηの変化



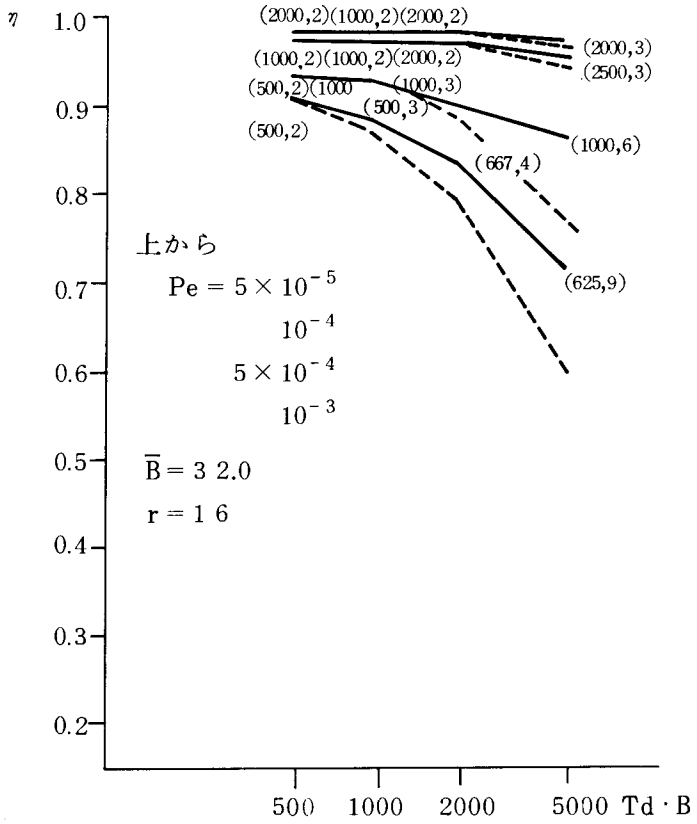
第2．．１６図　各遅延における取りうるηの最大値
及びその時のｎ及びＮ（ｎ，Ｎ）



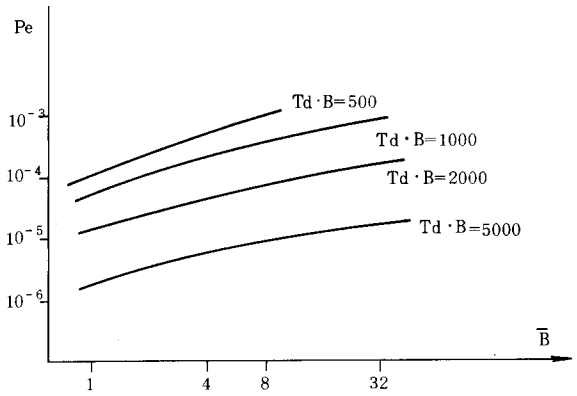
第２．１７図
各遅延における取りうるηの最大値
及びその時のｎ及びＮ（ｎ，Ｎ）



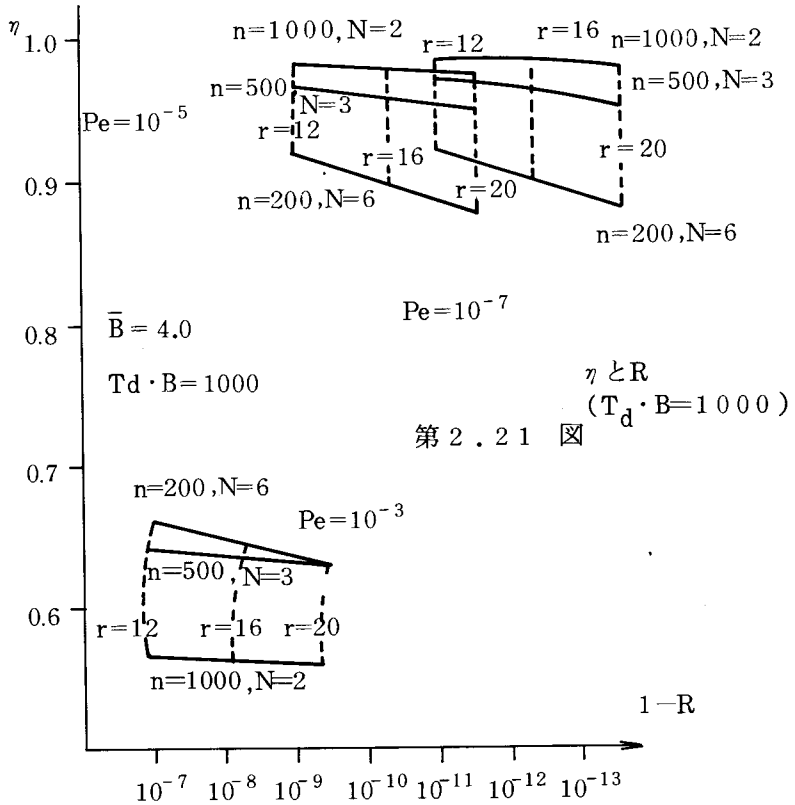
第２．１８図
各遅延における取りうるηの最大
値及びその時のｎ及びＮ,（ｎ，Ｎ）



第２．１９　各遅延における取りうるηの最大値及びその時のｎ及びN,（ｎ，Ｎ）

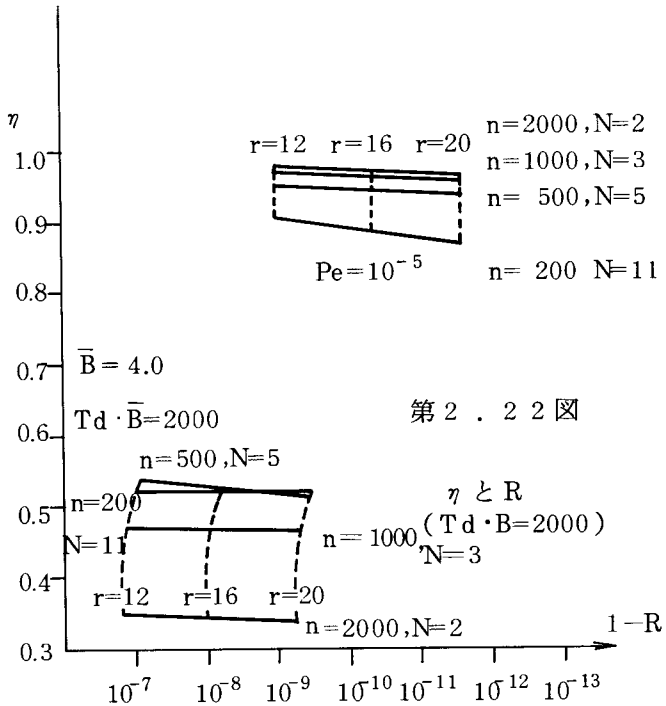


第２．２０図　GO back N方式が有効な回線状態。境界線より上の領域の状態ではN≧３においてηの値が最大値をとる。



ηとR
(T_d・B=1000)

第２．２１　図



第２．２２図

ηとR
(Td・B=2000)

Ｇｏ　ｂａｃｋ　２方式とＧｏ　ｂａｃｋ　Ｎ方式でえられる伝送能率

ηと信頼度ＲのＴｒａｄｅ　ｏｆｆの関係

２．４　ＲＳ符号[48][49] の誤り検出能力[32]

従来誤り検出符号としてＣＣＩＴＴ　V.4１勧告にある生成多項式 $G(x)=X^{16}+X^{12}+X^{5}+1$ のものが広く用いられてきた。一方，現在の情況はこの勧告案が提示された１９６０年代とは大きく変貌しておりディジタルオーディオ，衛星通信，計算機を中心により劣悪な通信路で能力を発揮する符号が切望されている。符号長ｎ＝２００～３００ビット程度の符号はハード化の容易さ，とり扱うセクターまたはフレームフォーマットの大きさからも手頃であり広く使われている。

一方，GF（2^8）上のRS（Reed－Solomon）符号はＣＤプレーヤ，ビデオフロッピーへのデータ記録フォーマット，ＤＡＴ（ディジタルオーディオテープレコーダ）などに用いられている。

ＲＳ符号の２元重み分布は重要であるにも拘わらず一般には求まっていない。最近，嵩－Ｌｉｎによる２元重み分布がRS符号のいくつかのタイプについて求められた。しかしこれはまだ一部のタイプであり，一般のＲＳ符号についてはこれから研究が期待される。又重み分布多項式による計算方法は短縮化された場合には適用できない。以上の観点からＲＳ符号の２元重み分布をシミュレーションにより求めた。

記号

$A_{w,b}(n)$ ：符号長ｎ，２元重みｂの符号語の数

$A_{w,*}(n)$ ：符号長ｎ，シンボル重みｗの符号語の数

GF（2^8）上の（５，３，３）RS符号の場合

$$A_{3,*}(5)=2550 \tag{2.31}$$

$$A_{3,3}(5)=18 \tag{2.32}$$

であった。

シンボル重み３の符号語数に対し２元重みも３の符号語数の比 $\sigma_3(n)$ を次のように定義する。

$$\sigma_3(n) = \frac{A_{3,3}(n)}{A_{3,*}(n)} \qquad (2.33)$$

シミュレーションにより

$$\sigma_3(3) = 0.02745098 \qquad (2.34)$$

$$\sigma_3(4) = 0.01274510 \qquad (2.35)$$

$$\sigma_3(5) = 7.05882353 \times 10^{-3} \qquad (2.36)$$

がえられた。

n ≅ 250ビット近辺のデータは計算機シミュレーションでは求められないので次の仮定を置く。

〔仮定〕：符号長n ≅ 250ビット，シンボル重み3のRS符号語数に対しそのうち2元重み3のものは約1／100である。

仮定によってBSC（2元対称通信路）に適用したRS符号の見逃し誤り確率Pmは

$$Pm \cong \delta_3(32) \cdot A_{3,*}(32) \times P^3 = 1.26 \times 10^4 P^3 \qquad (2.37)$$

となる。計算結果を図2.23に示す。

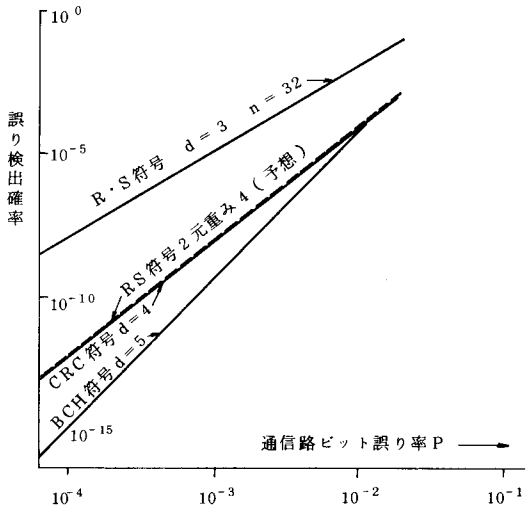


図2．23　各種符号の誤り検出確率

２．５　結言

(1)　誤り制御システムの評価基準として伝送能率ηと信頼度ＲをギルバートのパラメータP，p，hと結びつけて定義した。

(2)　ＣＣＩＴＴ　Ｖ．４１勧告にあるGo−back−2　ＡＲＱを評価した。

(3)　又，逆方向通信路の誤りを考慮した場合も検討した。

(4)　更にその延長上にあると思われるGo−back−N ARQ を伝搬遅延の長い通信路上でGo−back−2　ARQと比較しGo−bacK−N　ARQの存在範囲を明らかにした。

(5)　最後にＲＳ符号のＢＳＣ（２元対称通信路）における２元重み分布をシミュレーションで求めその潜在的な誤り検出能力の推定を行った。これによりＧＦ（2^8）上の最小距離３のＲＳ符号で２元で４の重みをもつ，生成多項式（Ｘ＋１）を因数に含むものは誤り検出符号として使用しても充分従来のＣＲＣに匹敵することが明らかになった。又，このＲＳ符号は１シンボルの誤りを訂正できるのでシステムによってはこの方面の要求を満たすこともできる。

第3章　一般化積符号[23][37]

3．1　序言

2次元配置をもつ符号に積符号[11]，連接符号[12]がある。この両者の中間的な構造をもつ新しい符号構成法を提案しこうして構成された符号を一般化積符号Xと称する。

一般化積符号Xは符号語が2次元の配置をもちその一方の方向にバースト誤りが生起するとき，特に有効である。一般化積符号は連接符号とほとんど同じ誤り訂正能力を有するが，はるかに少ないハードウェア量で装置化できる。

ＰＣＭ録音機に適用した例では従来の積符号タイプの符号と比較がなされ，誤りが訂正できず補正音生起となる確率が従来の符号と比し約１／４００に抑制されることが解析結果より明らかにされる。[23][38]

3．2　符号構成法

(a)　一般化積符号Xの符号化過程

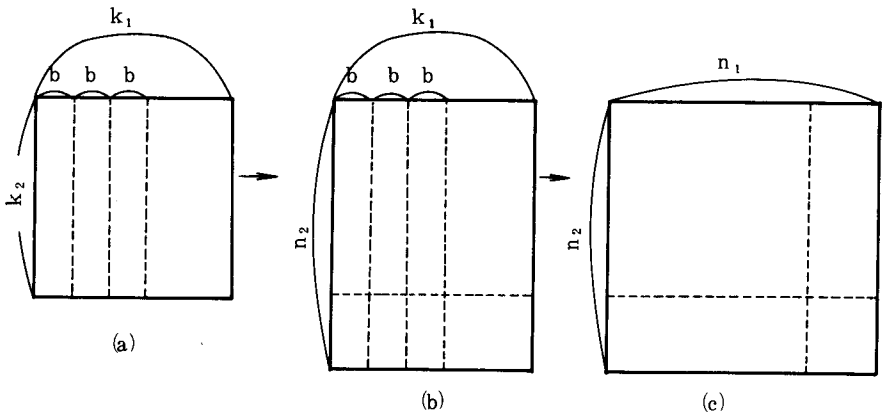


図３．１　一般化積符号Xの符号化過程

(1)　$k_2 \times k_1$ ビットの原情報が $k_2 \times b$ ビット毎にｆ個（$f = k_1 / b$）の矩形

配置に分割される。（図３．１(a)）。

(2) k_2 x b ビットの矩形で１x b ビットの矩形がＧＦ（2^b）のシンボルとして取り扱われる。k_2個のシンボルが符号C_2の符号化アルゴリズムに基づいてn_2個のシンボルに符号化される。m_2個（$m_2 = n_2 - k_2$）の検査シンボルが１x b ビットのm_2個の矩形として取り扱われる。このようにしてn_2 x b ビットの矩形が得られる。

(3) 符号C_2のこの符号化程がｆ回繰り返されるとn_2 x k_1の矩形配置が得られる（図 3.1 (b)）。

(4) 次に行方向のk_1ビット毎に符号化が実行されて行方向のk_1ビットは符号C_1の符号化アルゴリズムに基づいてn_1ビットに符号化される。
$m_1 = n_1 - k_1$個の検査ビットが付加される。

(5) 符号C_1のこの符号化過程がn_2回繰り返され一般化積符号Ｘの符号語は次の図 3.2 のように表現される。

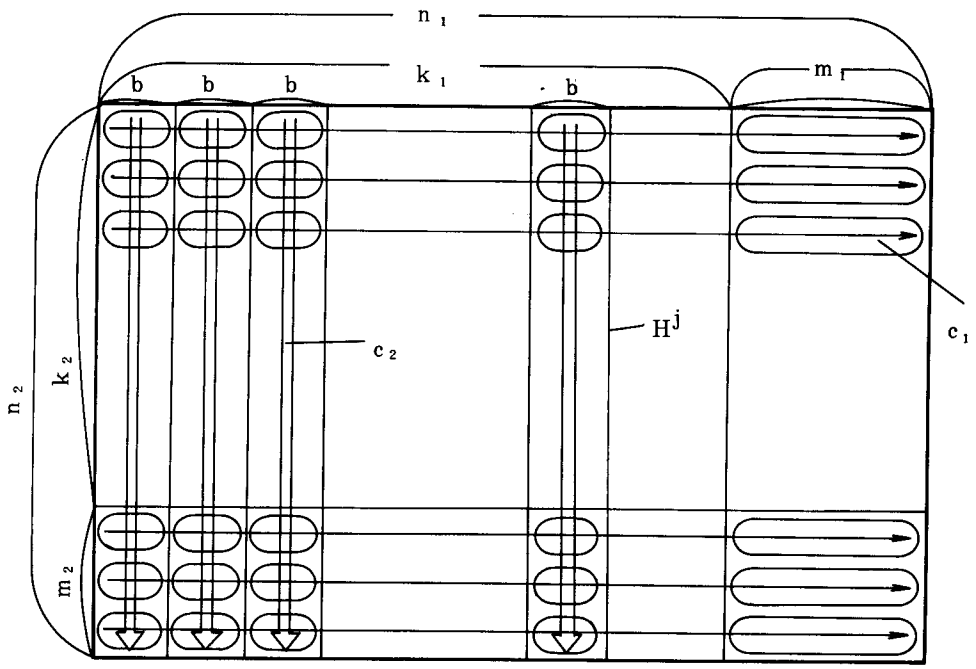


図３．２　一般化積符号Ｘの符号語

図３．２に示すように$n_2 \times n_1$ビットの符号語で左端から右端へ符号C_2の各符号語にシーケンス番号jをつける。jは$1 \leqq j \leqq f$なる整数となる。符号C_2はj番目の符号語をH^jと表現する。

一方$n_2 \times n_1$ビットの矩形配置の各行は符号C_1の符号語から構成される。$n_2 \times n_1$ビットの符号語で上端から下端まで符号C_1の各符号語にシーケンス番号jをつける。符号C_1のi番目の符号語はI(i)と表現される。符号C_2の符号語H^jは次式で与えられる。

$$H^j = (A^j(1), A^j(2), \cdots, A^j(k_2), P^j(1), \cdots, P^j(m_2))^T \qquad (3.1)$$

ここでm_2は$n_2 - k_2$に等しくTはベクトルの転置を表す。

$$A^j(1) = (a^j_{i,1}, a^j_{i,2}, \cdots, a^j_{i,b}) \qquad (3.2)$$

$$a^j_{i,\ell} \in GF(2), \ 1 \leqq \ell \leqq b$$

は情報シンボルで

$$P^j(i) = (p^j_{i,1}, p^j_{i,2}, \cdots, p^j_{i,b}) \qquad (3.3)$$

$$p^j_{i,\ell} \in GF(2), \ 1 \leqq \ell \leqq b$$

は検査シンボルである。次のシンボルを定義する。

$$F^j(i) = \sum_{\ell=1}^{b} a^j_{i,\ell} \alpha^{\ell-1}, \ 1 \leqq i \leqq k_2 \qquad (3.4)$$

$$F^j(i) = \sum_{\ell=1}^{b} p^j_{i-k_2,\ell} \alpha^{\ell-1}, \ k_2+1 \leqq i \leqq n_2 \qquad (3.5)$$

ここでαは$GF(2^b)$の原始元である。符号C_2の符号語H^jは又，次式で与えられる。

$$H^j = (F^j(1), F^j(2), \cdots, F^j(n_2))^T \qquad (3.6)$$

$$I(i) = (A^1(i), A^2(i), \cdots, A^f(i), Q(i)) \qquad (3.7)$$

$A^1(i), A^2(i), \cdots, A^f(i)$は情報ビットを含む。$A^1(i)$

$A^2(i), \cdots, A^f(i)$は式（3.2）で使われたと同じベクトルである。

$Q(i)$は$Q(i) = (q_{i,1}, q_{i,2}, \cdots, q_{i,m_1})$　　（3.8）

なるm_1次元行ベクトルである。ここで$q_{i,\ell} \in GF(2)$, $m_1 = n_1 - k_1$である。

符号C_1のi番目の符号語の2元表現は

$$I(i) = (a^1_{i,1}, a^1_{i,2}, \cdots, a^1_{i,b}, a^2_{i,1}, a^2_{i,2}, \cdots, a^2_{i,b}, \cdots, a^f_{i,1}, a^f_{i,2}, \cdots, a^f_{i,b}, q_{i,1}, q_{i,2}, \cdots q_{i,1,m_1}) \quad (3.9)$$

一般化積符号Xの符号語は次式で表現される。

$$\begin{bmatrix} A^1(1), A^2(1), \cdots\cdots A^f(1), Q(1) \\ A^1(2), A^2(2), \cdots\cdots A^f(2), Q(2) \\ \vdots \\ A^1(k_2), A^2(k_2), \cdots\cdots A^f(k_2), Q(k_2) \\ P^1(1), P^2(1), \cdots\cdots P^f(1), Q(k_2+1) \\ P^1(2), P^2(2), \cdots\cdots P^f(2), Q(k_2+2) \\ \vdots \\ P^1(m_2), P^2(m_2), \cdots\cdots P^f(m_2), Q(n_2) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

通信路には一般化積符号Xは線形（$n_1 n_2$, $k_1 k_2$）符号として伝送される。

(b)　ランダム誤り訂正能力

『定理３．１：符号C_1がGF(２)上の線形(n_1，k_1，d_1)符号，符号C_2がGF(2^b)上の線形(n_2，k_2，d_2)符号とする。但し線形(n，k，d)符号でnは符号長，kは情報記号数，dは最小距離を表す。

符号C_1，符号C_2から構成される一般化積符号Xのランダム誤り訂正能力は

$$t = \lfloor (d_1 d_2 - 1)/2 \rfloor \qquad (3.11)$$

』

である。

（略証）：

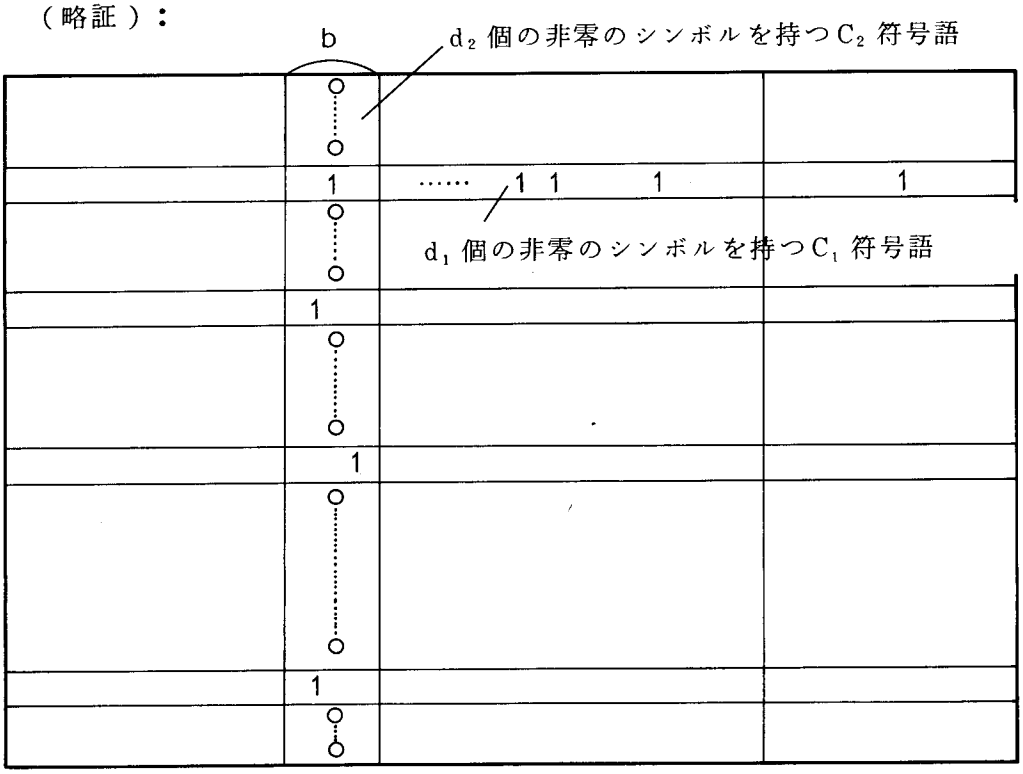


図３．３　一般化積符号Xのランダム誤り訂正能力

一般化積符号Xの最小重みを考える。符号C_2のｊ番目の符号語H^jがちょうど符号C_2の最小重みと同じ重みd_2をもつとする。符号語H^jの非零のシンボルに対応する各行は少なくともd_1個の１を含んでいる。従って$n_2 \times n_1$ビッ

トの矩形の配置では少なくとも$d_1 d_2$個の1がある。故に一般化積符号Xの最小重みは$d_1 d_2$である。最小重み$d_1 d_2$の一般化積符号Xは$t = \lfloor (d_1 d_2 - 1)/2 \rfloor$個までのランダム誤りを訂正することができる。

(c) バースト誤り訂正能力

『 定理3．2：ℓ_1を符号C_1のバースト誤り訂正能力，ℓ_2を符号C_2のバースト誤り訂正能力とする時，一般化積符号Xのバースト誤り訂正能力は

$$n_1 (\ell_2 - 1) + 2\ell_1 + 1 \qquad (3.12)$$ 』

である。

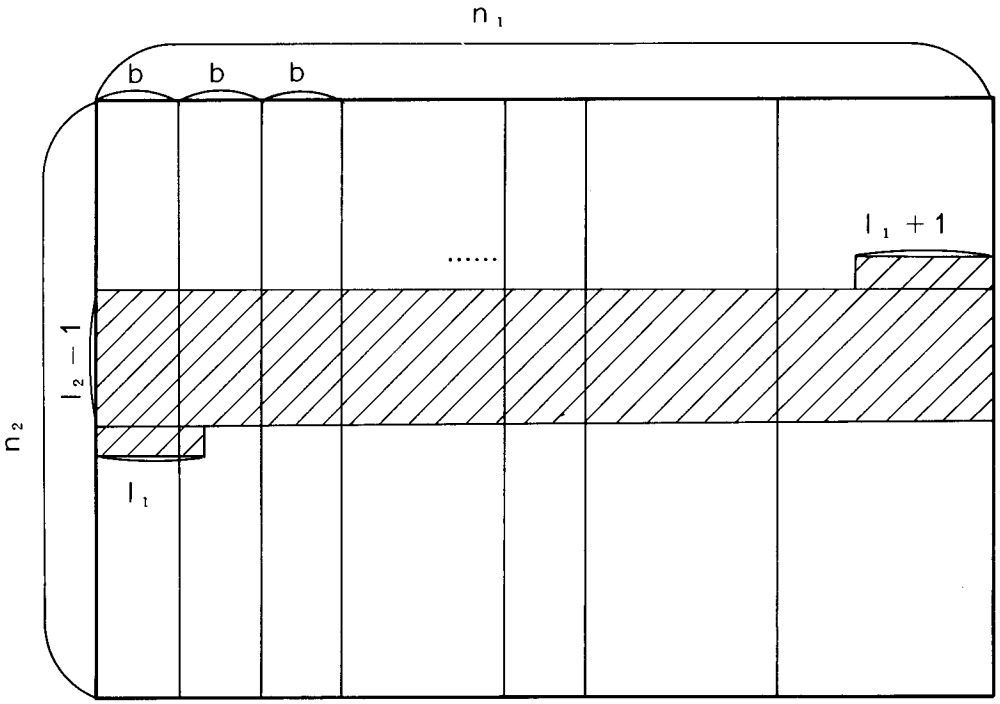


図3．4 一般化積符号Xのバースト誤り訂正能力

（略証）：

一般化積符号Xはn_1ビットの行単位に図の左から右へ，上から下へと通信路へ伝送されるとする。

受信側では再び行単位で$n_1 \times n_2$ビットの矩形の配置に構成される。今，

長さ$n_1(\ell_2-1)+2\ell_1+1$のバースト誤りが生起したと仮定する。バースト誤りはℓ_2+1個の行以上へは影響を及ぼさない。ℓ_2個の行では符号C_1の復号が正しく行なわれない。しかし一番上または一番下の行ではせいぜいバースト誤りは長さℓ_1であるので残りの一つの行では正しく復号が実行される。従って符号C_1の復号が終わったのちはバースト誤りによってℓ_2個の行が正しく復号されていない。

ℓ_2個の行は符号C_2の復号によって正しく復号される。以上より一般化積符号Xのバースト誤り訂正能力は$n_1(\ell_2-1)+2\ell_2+1$となる。

(d) 他の符号との比較

表３．１に示す同一のパラメータのもとに一般化積符号X，積符号，連接符号のパフォーマンスを比較する。

表３．１　同じパラメータのもとでの一般化積符号X，積符号連接符号の比較

	一般化積符号X	積符号	連接符号
ランダム誤り訂正能力	$\left[\frac{d_1 d_2-1}{2}\right]$	$\left[\frac{d_1 d_2-1}{2}\right]$	$\left[\frac{d_1 d_2-1}{2}\right]$
バースト誤り訂正能力	$n_1(\ell_2-1)+2\ell_1+1$	$\max(n_1\ell_2, n_2\ell_1)$	$n_1(\ell_2-1)+2\ell_1+1$
nが充分大なる時の符号の漸近的距離比	$\max\{H^{-1}(1-R)$ $r<R<1$ $\cdot(1-r/R)\}$	$\max\{H^{-1}(1-R)$ $r<R<1$ $\cdot H^{-1}(1-r/R)\}$	$\max\{H^{-1}(1-R)$ $r<R<1$ $\cdot(1-r/R)\}$ (56)

一般化積符号Xを積符号，連接符号と比較する。表３．１でｎ，ｄはそれぞれ符号長，最小距離を示すものとする。

積符号は２つの２元符号を組み合わせて構成される。符号C_1と符号C_2の符号長が充分大にとられた時，符号C_1，と符号C_2がＶＧ限界式[55]（Ｖａｒｓｈａｍｏｖ−Ｇｉｌｂｅｒｔ　Ｂｏｕｎｄ）を満足するように選ぶことができる。しかし符号C_1，符号C_2共に２元符号であるので最大距離分離可能符号（Ｍａｘｉｍｕｍ　ｄｉｓｔａｎｃｅ　ｓｅｐａｒａｂｌｅ　ｃｏｄｅｓ）を用いることはできない。

連接符号は符号C_1，符号C_2に最適符号を選ぶようにすると，符号C_1は２元符号であるのでＶＧ限界式を満足するように選ぶしかないが符号C_2はＧＦ（2^{k_1}）上の符号であり又パラメータであるk_1は符号長$n_1 n_2$が大きくなるにつれて大きくとることが可能であるので最大距離分離可能符号を選ぶことができる。

一般化積符号Xもパラメータが$n_2 \leqq 2^b + 1$を満足する限り，又パラメータｂは符号長$n_1 n_2$が大きくなるにつれてｂも大きく取ることが可能であるので常に符号C_2に最大距離分離可能符号を選ぶことができる。

従って連接符号と一般化積符号Xは積符号より効率的であるといえよう。

次に連接符号と一般化積符号を比較する。連接符号は外部符号がＧＦ（2^{k_1}）上で定義されているのでＧＦ（2^{k_1}）上の演算回路が必要である。一般化積符号Xは符号C_2はＧＦ（2^b）で定義されているのでＧＦ（2^b）上の演算回路が必要である。しかし$k_1 = f \times b$からも分かるとおりその演算回路は連接符号の演算回路よりも複雑さの程度が著しくない。

3．3　PCM録音機への応用

3．3．1　誤りの特性

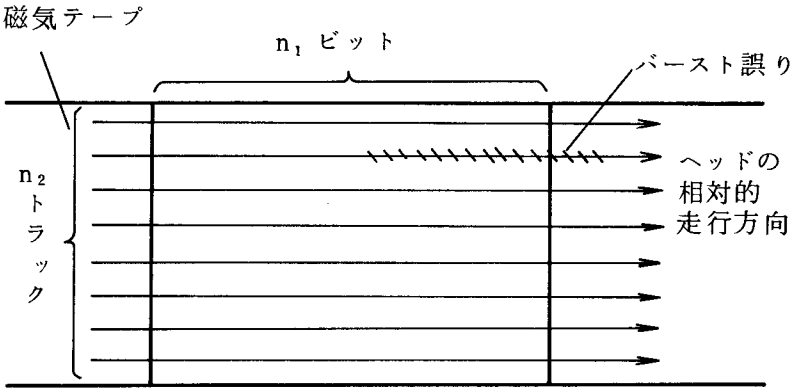


図3．5　テープ走行のバースト誤りと矩形の符号

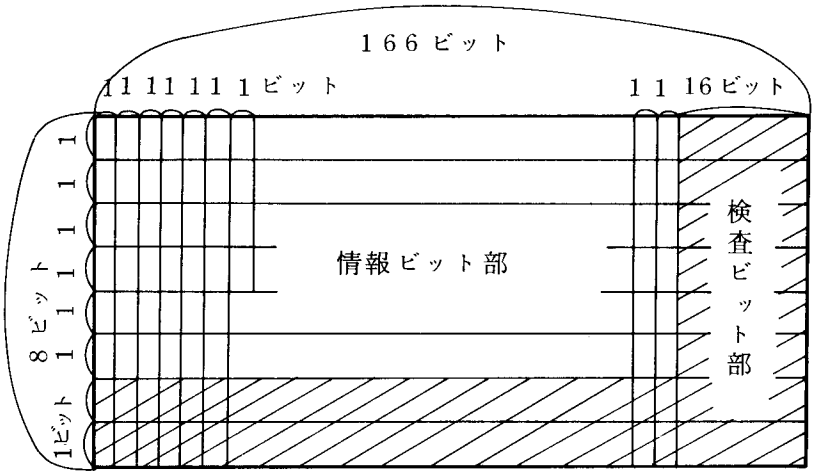
マルチトラックの磁気テープを用いるPCM録音機には磁気テープ上のゴミ，傷などによりドロップアウトが生じ，これに起因する誤りが生起する。このような誤りに対しては図に示すようにテープのトラック数n_2とするとき，テープの走行方向にn_1ビットに区切った$n_2 \times n_1$ビットの矩形の符号が適していると思われる。

3．3．2　積符号IPCと一般化積符号RSC [23]

(a)　IPC符号

①　符号構成

GF(2)上の線形(166，150)CRC符号とGF(2)上の線形(4，3)偶数パリティ検査符号を組み合わせて4x166ビットの積符号を構成する。その積符号の符号語(ブロック)を2個作成し1トラック毎に交錯を施し8x166ビットの区画を構成しIPC符号の符号語を図3．6のように得る。


166ビット
1 1 1

③　誤り訂正能力

ＩＰＣ符号は２つの４x１６６ビットの積符号から構成されている。従って８トラック１区画の復号誤りによる異音が生起する事象を４トラック（ブロック）ごとに分割して考える。

(1)　４トラック１ブロックでの誤り訂正能力

U_Bを１ブロック中実際テープ上で誤っているトラックの数とし，S_BをＣＲＣが誤りを検出したことによる消失の数，e_BをＣＲＣが誤りを検出しなかったことによる誤りを見逃したトラックの数とする。そのときの復号動作結果は表３．２のようになる。

表３．２　ＩＰＣ符号の１ブロックのs_Bとe_Bの値に対する復号動作結果

u_B	s_B	e_B	復合動作結果
0	0	0	－
1	1	0	訂　正
1	0	1	内　挿　補　正
2	2	0	内　挿　補　正
2	1	1	復　号　誤　り
2	0	2	内　挿　補　正
3	3	0	内　挿　補　正
3	2	1	復　号　誤　り
3	1	2	復　号　誤　り
3	0	3	内　挿　補　正
⋮	⋮	⋮	⋮

$s_B = 0$，$e_B \neq 0$のときは１６６個の（４，３）パリティ検査符号のシンドローム全体をみると誤りパターンが残っているにも拘わらず消失情報

が全く得られないので誤り見逃しが生起していることが検出され前後のデータより3トラック分の内挿補正がなされる。これは本来の復号法ではないが（4，3）パリティ検査符号のシンドロームを1トラック分蓄積することにより可能となる。

(2) 8トラック1区画での誤り訂正能力

デ・インターリーブを施したあと1ブロック中1トラックの消失であれば訂正できるので隣接する2トラックまでの消失が訂正できる。更に隣接する2トラック以外でも2トラックおき，（例えば第1，第4の2トラック），4トラックおき（例えば第1，第6の2トラック）に発生している2トラックの消失は訂正できる。

u，s，eをそれぞれテープ上の8トラック1区画で誤っているトラックの数，消失の起こっているトラックの数，見逃した誤りトラックの数とする。8トラック1区画の復号動作結果は表3．3に与えられるようになる。

表3．3　IPC符号の1符号語1区画の
sとeの値に対する復号動作結果

u	s	e	2つのブロックの組合せ (u_B s_B e_B)(u_B s_B e_B)	復号動作結果
0	0	0	(0，0，0)，(0，0，0)	−
1	1	0	(1，1，0)，(0，0，0)	訂　正
1	0	1	(1，0，1)，(0，0，0)	内挿補正
2	2	0	(1，1，0)，(1，1，0)	訂　正
			(2，2，0)，(0，0，0)	内挿補正
2	1	1	(1，1，0)，(1，0，1)	内挿補正
			(2，1，1)，(0，0，0)	復号誤り
2	0	2	(1，0，1)，(1，0，1)	内挿補正
			(2，0，2)，(0，0，0)	

表３．３の続き

u	s	e	2つのブロックの組合せ (u_B u_B u_B) (u_B u_B u_B)	復号動作結果
3	3	0	(3,3,0),(0,0,0)	内挿補正
			(2,2,0),(1,1,0)	
3	2	1	(3,2,1),(0,0,0)	復号誤り
			(2,1,1),(1,1,0)	
			(2,2,0),(1,0,1)	内挿補正
3	1	2	(3,1,2),(0,0,0)	復号誤り
			(2,1,1),(1,0,1)	
			(2,0,2),(1,1,0)	内挿補正
3	0	3	(3,0,3),(0,0,0)	内挿補正
			(2,0,2),(1,0,1)	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

多くのトラック（例えば３トラック以上）に内挿補正を行う結果となった場合，無音置換やミューティング[53]などの手段をとることがある。ここではそのような状態を含め訂正しきれず次善の手段にまかせる場合すべてを広義に内挿補正と呼ぶことにする。

(b) ＲＳＣ符号

① 符号構成

テープの走行の１６６ビット毎にテープの巾方向に区切り８x１６６ビットの一区画の符号語を構成する。６x１５０ビットの情報ビットを６x３ビット毎に５０個の矩形に区切り，各６x３ビットの矩形をＲＳ符号化アルゴリズムに従って８x３ビットの矩形に符号化する。この操作を５０回繰り返した後８x１５０ビットの矩形を作る。次にテープの走行方向の１５０ビットをＣＲＣ符号の符号化アルゴリズムに従い１６６ビットに符号化する。これを８回繰り返して一般化積符号の符号語を得る。

この符号をＲＳＣ（Reed−Solomon and CRC code）符号と呼ぶ。

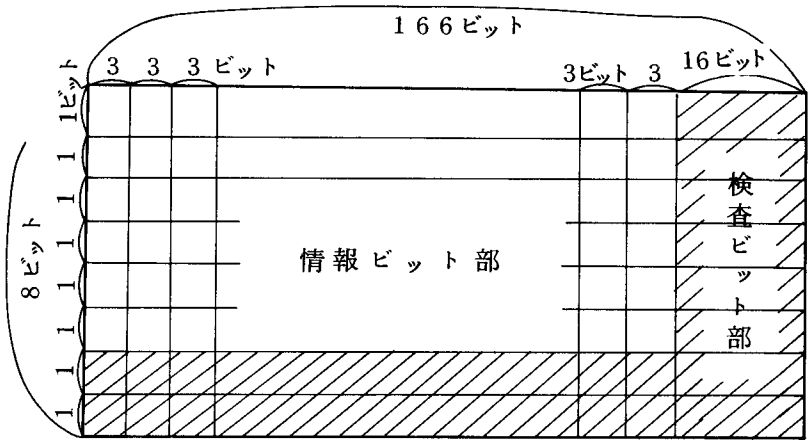


図３．７　ＲＳＣ符号の符号パラメータ

② 復号化

復号化の方法としてはＣＲＣ符号の復号化によって得られた誤り検出情報をリード・ソロモン符号の復号化に消失として用いる軟判定復号法を用いる。[12]

③ 誤り訂正能力

ｕ，ｓ，ｅをＩＰＣ符号の８トラック１区画の場合と同様に定義する。その時のｓとｅの各々の値に対するリード・ソロモン符号の復号動作結果は表３．４のようになる。

表３．４　ＲＳＣ符号の１符号語１区画のｓとｅの値に対する復号動作結果

u	s	e	復号動作結果
0	0	0	－
1	1	0	訂　正
1	0	1	訂　正
2	2	0	訂　正
2	1	1	内挿補正
2	0	2	復号誤り
3	3	0	内挿補正
3	２以下	u－s	復号誤り
⋮			⋮
u	u	0	内挿補正
u	u−1 以下	u－s	復号誤り
⋮	⋮		⋮

３．３．３　復号パフォーマンス

(a)　１トラックの誤り検出確率および誤り見逃し確率

定量的にＩＰＣ符号，ＲＳＣ符号の訂正能力を調べるため数値解析を行う。

ＣＲＣの誤り検出能力は次のとおりである。

(1)　２ビットのランダム誤りおよび奇数誤りは確率１で検出する。

(2)　長さ１６以下のバースト誤りは確率１で検出する。

(3)　長さ１７のバースト誤りは確率 $1-2^{-15}$ で検出する。

(4)　長さ１８以上のバースト誤りは確率 $1-2^{-16}$ で検出する。

1トラックの誤り見逃し確率Pmは次式で与えられる。

$$Pm = 2^{-16} \mathop{E}_{b=18}^{166} \sum_{i=2}^{b} P_D(i, b, 166)$$

$$+ 2^{-15} \sum_{i=2}^{17} P_D(i, 17, 166)$$

$$= 2^{-16} \left[\sum_{b=17}^{166} \sum_{i=2}^{b} P_D(i, b, 166) + \sum_{i=2}^{17} P_D(i, 17, 166) \right]$$

・・・(3.13)

$P_D(\ell, m, n)$はnビット中長さmビットの単一集中形バースト誤りを生じ，誤りビット数がℓである確率である（$2 \leqq \ell \leqq m \leqq n$）。

1トラックの誤り検出確率P_Dは次式で与えられる。

$$P_D = 1 - Pc - Pm \qquad (3.14)$$

ここでPcはnビット中誤りなしの確率で$P(0^n)$として求められている。

(b) ＩＰＣ符号の補正音および異音の生起確率

トラック間に誤りの相関は無いものとする。8トラック1区画（1符号語）の復号誤りによる異音の生起する確率（以後単に異音の生起確率とよぶ）および内挿補正音の生起する確率（以後単に補正音の生起確率とよぶ）は1トラックの誤り検出確率Ｐｄと誤り見逃し確率Ｐｍより求められる。8トラック（区画）の事象を4トラックの事象（ブロック）で表現することを考える。なお，2つのブロックに対応するトラックの誤り発生状態は同一とする。

(1) 4トラック1ブロックの確率

s_Bとe_Bの値に従ってブロックの事象を場合わけした結果が表3．2に示されている。それに基づいてブロックが正しく復号される確率，内挿補正となる確率，復号誤りとなる確率は次のようになる。

① 1ブロックが正しく復号される確率P_{BC}は

$$P_{BC} = P_C^4 + 4 \cdot Pd \cdot P_C^3 \qquad (3.15)$$

② 1ブロック中内挿補正となる確率P_{BI}は

$$P_{BI} = \sum_{i=2}^{4} {}_4C_i \cdot Pd^i \cdot P_C^{4-i} + \{ (Pc + Pm)^4 - Pc^4 \} \qquad (3.16)$$

③ 1ブロック中誤り見逃しがある。又は復号誤りが生起する確率P_{BE}は

$$P_{BE} = \sum_{i=1}^{3} {}_4C_i \cdot Pd^i \{ (Pc + Pm)^{4-i} - P_C^{4-i} \} \qquad (3.17)$$

となる。

(2) ＩＰＣ符号

表３．２を用いてｓ，ｅの値に従って場合わけを行った結果が表３．３に示されている。８トラック１区画に対する確率が以下に与えられる。

① 正しく復号される確率$P_{C(IPC)}$は

$$P_{C(IPC)} = P_{BC}^2 \qquad (3.18)$$

② 補正音の生起確率$P_{I(IPC)}$は

$$P_{I(IPC)} = 2 \cdot P_{BI} \cdot P_{BC} + P_{BI}^2 \qquad (3.19)$$

③ 異音の生起確率$P_{E(IPC)}$は

$$P_{E(IPC)} = 2 \cdot P_{BE} - P_{BE}^2 \qquad (3.20)$$

となる。

(c) ＲＳＣ符号の補正音および異音の生起確率

８トラック１区画（１符号語）の異音の生起確率，補正音の生起確率は１トラックの誤り検出確率Ｐｄ，誤り見逃し確率Ｐｍより求められる。表３．４を用いてｓ，ｅの値に従い場合わけを行い１符号語に対する確率が以下に与えられる。

① 正しく復号される確率$P_{C(RSC)}$は

$$P_{C(RSC)} = P_C^8 + 8 \cdot Pm \cdot P_C^7 + 8 \cdot Pd \cdot P_C^7 + {}_8C_2 \cdot P_d^2 \cdot P_C^6 \quad (3.21)$$

② 補正音の生起確率$P_{I(RSC)}$は

$$P_{I(RSC)} = 8 \cdot Pd \cdot 7 \cdot Pm \cdot P_C + \sum_{i=3}^{8} {}_8C_i \cdot Pd \cdot Pc^{8-i} \quad (3.22)$$

③ 異音の生起確率$P_{E(RSC)}$は

$$P_{E(RSC)} = \sum_{i=2}^{8} {}_8C_i \cdot Pm^i \cdot P_C^{8-i} + 8 \cdot Pd \cdot \left\{ \sum_{i=2}^{7} {}_7C_i \cdot Pm^i \cdot P_C^{7-i} \right\} + {}_8C_2 \cdot Pd^2 \cdot \sum_{i=1}^{6} {}_6C_i \cdot Pm^i \cdot P_C^{6-i} + \sum_{i=3}^{8} {}_8C_i \cdot Pd^i \left\{ (Pm+Pc)^{8-i} - P_C^{8-i} \right\}$$

となる。 (3.23)

(d) シミュレーション

ＩＰＣ符号，ＲＳＣ符号の能力評価のため数値解析と並行してシミュレーションを行った。即ち誤り発生モデルは共通である。同プログラムはミニコンピュータＰＤＰ－１１／２０のアセンブラー言語で作られている。誤りを発生させ，それを入力として復号器の動作を模擬し，統計量を出力する。

① １トラックの誤り発生モデル

数値解析では誤り発生のモデルにギルバートのモデルを仮定した。シミュレーションでは計算機の演算時間の都合上，バーストの連の分布および誤りなしの連の分布を指数分布で近似している。(1)バースト誤り事象のなかはＰＮ系列で埋められている。(1)

② １区画の誤り発生モデル

トラック間の誤りに相関は無いものとする。各トラックのバーストの

連および誤りなしの連を発生させる乱数の初期値は異なっており，それによってバースト長および誤りなしの連の発生は他トラックの誤り事象に無関係となる。

③　結果と考察

図３．９，図３．１０に平均ビット誤り率$Pe=10^{-4}$のときに，平均バースト長に対する補正音および異音の生起確率の数値解析結果およびシミュレーション結果をＩＰＣ符号とＲＳＣ符号について図示する。

平均バースト長１００ビット，平均誤り率10^{-4}の誤り発生状態ではＩＰＣ符号の補正音の生起確率のＲＳＣ符号のそれに比する比$\delta_I=P_{I(IPC)}/P_{I(RSC)}$は４００，ＩＰＣ符号の異音の生起確率のＲＳＣ符号のそれに対する比$\delta_E=P_{E(IPC)}/P_{I(RSC)}$は２７０であることが分かる。いずれの誤り発生状態においてもＲＳＣ符号の補正音および異音の発生確率はＩＰＣ符号のそれらより少ないことが分かる。

又，補正音および異音の平均発生時間間隔であらわした数値解析結果およびシミュレーション結果が表３．５に示される。シミュレーション結果は数値解析結果とよく一致している。

ＩＰＣ符号を用いた場合$Pe=10^{-4}$，$\overline{B}=100$ビットの誤り発生状態で補正音は平均３分に一回，異音は８３日に一回の割合で発生する。第１０世代までのテープのダビングを考えると補正音の発生頻度の限界は３０分に一回，復号誤りによる異音の発生頻度の限界は１０箇月に一回位である。従って表3.5の１０の場合ではＩＰＣ符号を用いる時平均バースト長$\overline{B}=100$ビット，平均ビット誤り率$Pe=10^{-5}\sim10^{-6}$の時だけ使用可能である。ＲＳＣ符号を用いる時は$Pe=10^{-3}$の３つの場合を除いたすべての場合について使用可能である。

結論としてＲＳＣ符号の方がＩＰＣ符号より表３．５のすべての誤り発生状態に対して優れていることが明らかになった。

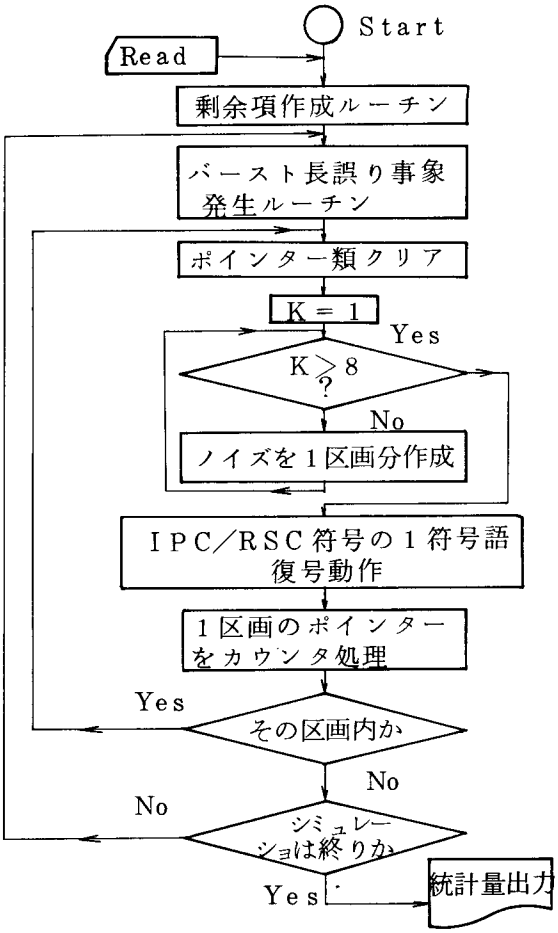


図3．8　シミュレーションプログラムフローチャート

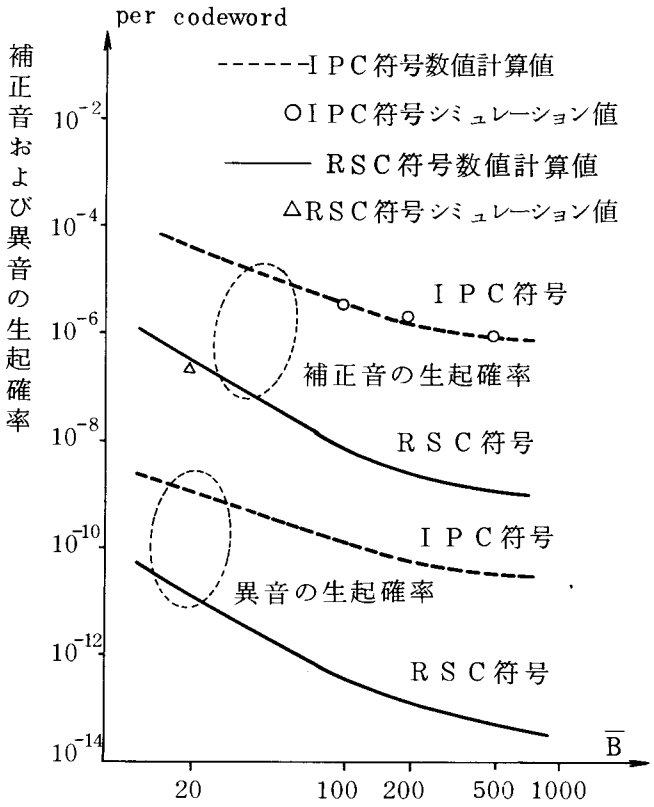


図３．９　平均バースト長$\bar{B}$に対する補正音および異音の生起確率

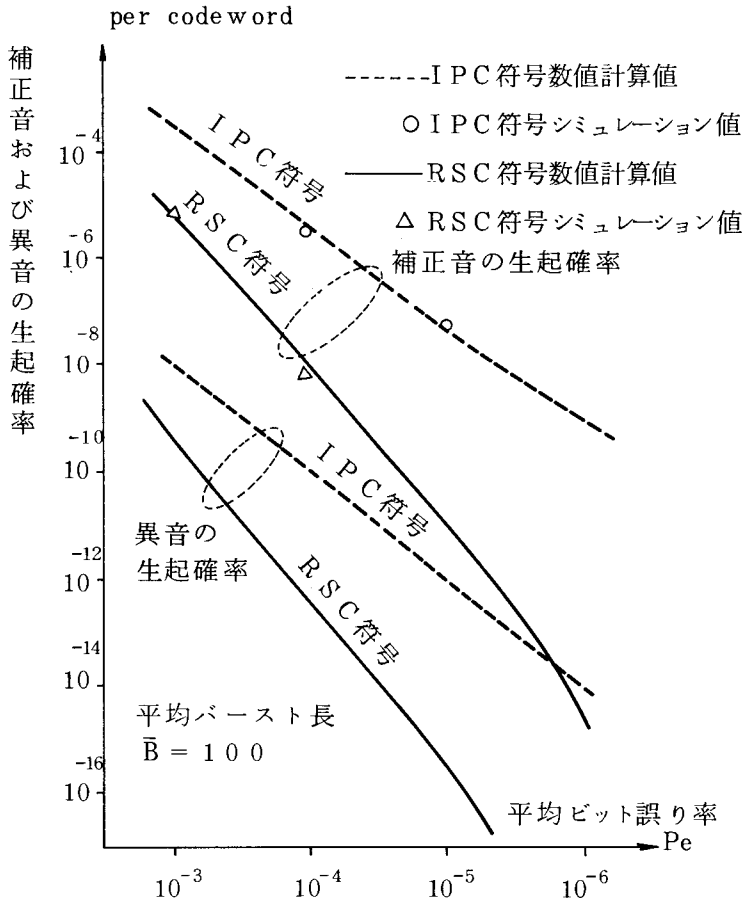


図３．１０　平均ビット誤り率Peに対する補正音および異音の生起確率

表３．５　平均バースト長および平均ビット誤り率に

対する補正音および異音の平均発生時間間隔

Case	平均バースト長 $\overline{B}$	平均ビット誤り率 Pe	補正音の平均発生時間間隔				異音の平均発生時間間隔			
			ＩＰＣ符号		ＲＳＣ符号		ＩＰＣ符号		ＲＳＣ符号	
			数値計算	シミュレーション	数値計算	シミュレーション	数値計算	シミュレーション	数値計算	シミュレーション
1	1000	10^{-4}	17分		11日		1.1年		6.8×10^{2}年	
2	500	10^{-4}	13分	12分	7.1日	———	310日	———	4.5×10^{2}年	———
3	200	10^{-4}	7.0分	5.2分	2.8日	———	170日	———	1.8×10^{2}年	———
4	100	10^{-4}	3.4分	2.9分	23時間	———	83日	———	62年	———
5	20	10^{-4}	18秒		38分	1時間**	8.7日		1.9年	———
6	20	10^{-3}	0.19秒		2.5秒	3.4秒	2.2時間		18時間	———
7	100	10^{-3}	2.1秒		1.4分	1.5分	20時間		23日	———
8	200	10^{-3}	4.3秒		4.3分	4.1分	1.7日	———	67日	———
9	100	10^{-5}	4.9時間	4.1時間**	2.1年		23年	———	5.9×10^{4}年	———
10	100	10^{-6}	8.4日		7.2×10^{2}年		7.2×10^{3}年		4.3×10^{7}年	

＊＊……統計量が少いため激密な値でない。

……１時間演奏に対し，統計量０であった。

今後の問題としては，トラック間に誤りの相関があるモデルも検討していかなければならない。又，ヘッドの目づまりも問題となっている。このヘッドの目づまりの問題もモデル化を検討する必要がある。定量的な比較検討は今後の課題であるが定性的にはＲＳＣ符号はこの問題にも対処しうることが予想される。

３．４　結言

２次元構造をもつ新しい符号構成法を示し，この構成法によって構成された符号を一般化積符号と名付け，その特長を明らかにした。

構成された符号は連接符号と積符号のちょうど中間的な符号構造をもち，両者の特長を有しつつ，ハードウェア量が少ない特長がある。

この一般化積符号Ｘは２次元配置の一方の方向にバースト誤りが生起する場合，特に有効でありマルチチャンネルのＰＣＭ録音機に特に良く適合することが明らかになった。

現在，全世界の放送局，レコードスタジオでこのタイプのＰＣＭ録音機が２チャンネル用４００台，３２チャンネル用１００台，稼動中である。

写真　一般化積符号を用いたＰＣＭ録音機

第４章　重畳符号を応用した多重符号の構成法

４．１　序　　言

積符号あるいは連接符号は単純な構造の符号を組み合わせてより能率の良い符号を得るという概念に基づいて構成されているが，符号比率に関しては必ずしも優れていない。符号比率を改善する有力な手法の一つとして重畳符号化法[(41)(42)(52)]が知られている。重畳符号の符号化あるいは復号化の順序を適宜修正し更に交錯の手法を応用した"直交化"を施すことにより，積符号のいわゆるチェックオンチェック部分においても重畳符号化を可能にし，より多くの情報シンボルを符号の能力を落とさずに符号化し得る構成法（方法Ｉ）を提案する。

更に重畳符号を用いて元の符号の検査シンボルをその最小距離を全く減少させることなく除去しうる符号構成法（方法Ⅱ）を提案する。[(35)(39)] この手法により従来方法と比べ同一数の情報シンボルを同一のパフォーマンスのもとに高い符号比率で符号化することが可能である。又これらの手法によって構成された符号でＶＧ限界式を満足するパラメータが存在することを明らかにする。

最後にこれらの符号構成法を畳み込み符号に応用し従来得られなかった新しいパラメータの畳み込み符号の符号構成法を示す。[(36)]

４．２　連接符号[(12)]に応用した符号構成法

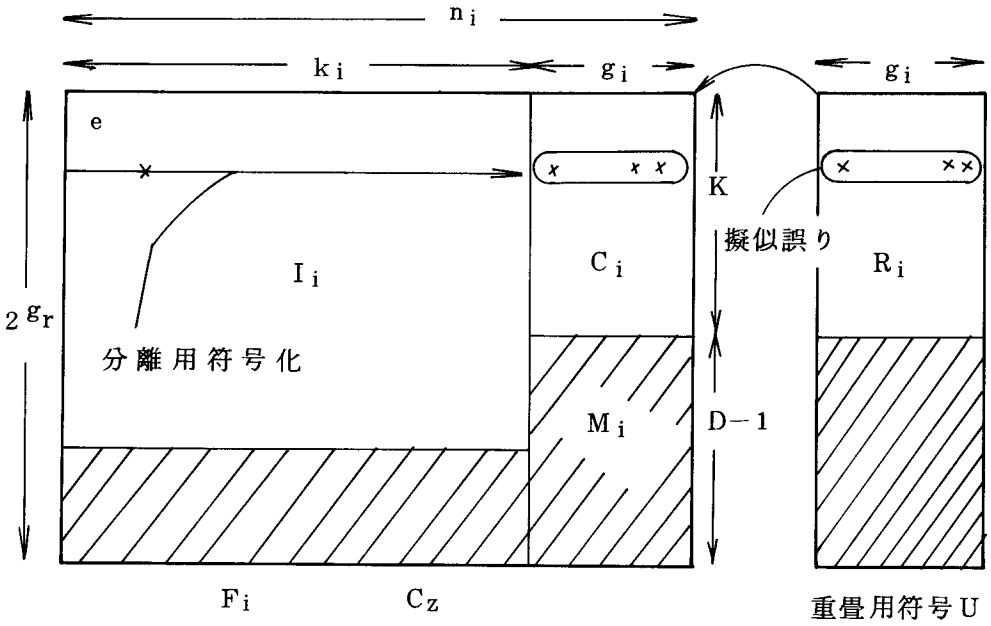


図４．１　符号 C_z の符号語

本論文では先に提案された連接符号への適用法(41)を改良し，より多くの情報シンボルを符号の能力を落さずに送信し得るような符号構成法（方法Ｉ）を提案する。

更に重畳符号を適用する際元の符号の検査シンボルの一部を最小距離を全く減少させることなく除去しうる符号構成法（方法II）を提案する。この手法により従来方法と比べ同一数の情報シンボルを同一のパフォーマンスのもとにより高い符号比率で符号化することが可能である。又，この手法により符号のフォーマットの中の一部分をより高い信頼度で送受信できることを示す。

連接符号Ｃｏの内部符号の検査シンボルＣｉにＧＦ（2^{g_I}）（$g_I = n_I - k_I$）ＲＳ符号Ｕを重畳化する。但し，通常行なわれているように 2^{g_I} は符号長，Ｋは情報シンボル数，Ｄは最小距離を意味するものとする。

行方向の（n_I，k_I，k_I）符号を内部符号 C_I と呼ぶ。n_I は内部符号語の符号

長，k_Iは内部符号語の情報シンボル数，d_Iは内部符号C_Iの最小距離である。内部符号化した内部符号語の受信語を内部受信語とよぶ。内部符号語は内部情報シンボル系列と内部検査シンボル系列とからなる。2^{g_I}個の内部検査シンボル系列からなる$2^{g_I} \times (n-k)$の内部検査シンボルを内部検査シンボル部分と呼ぶ。

ここで新たに他の符号が元の符号の上に重畳される場合元の符号を基礎符号と呼び，又，新たに重畳する符号を重畳用符号とよぶ。重畳化とは重畳用符号を基礎符号の検査シンボル部分に法2で加算することをいい，重畳用符号化とは基礎符号以外の情報を符号化して重畳用符号を構成することをいう。

符号Uのi番目のシンボルを$R_i = (R_{i_1}, R_{i_2}, \cdots, R_{ig_I})$と表す。$M_i$を次のように定義する。

$$M_i = C_i + R_i$$
$$= (C_{i_1} \oplus R_{i_1}, C_{i_2} \oplus R_{i_2}, \cdots, C_{ig_I} \oplus R_{ig_I}) \quad (4.1)$$

但し⊕は法2の加算である。$\boldsymbol{F}_i$を次のように定義する。

$$\boldsymbol{F}_i = (I_i, M_i) \quad \cdots (4.2)$$

このようにして構成された符号語はベクトル$(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_N)$で表される（但し$N = 2^{g_I}$である）。

なお構成された符号を以下では符号C_zと呼ぶことにする。

『定理4.1（笠原，杉山，平沢，滑川）[41]：連接符号C_oがt個までの誤りを訂正する時，そして重畳用符号Uの最小距離Dが

$$t = \lfloor (D-1)/2 \rfloor \quad \cdots (4.3)$$

を満足する時，符号C_zはt重ランダム誤りを訂正しうる。』

（証明略）。

ここで復号化に必要な最小限の説明を図4.1を用いておこなう。即ち，復号側で基礎符号と重畳符号のそれぞれに対応する受信語を分離するため基礎符号の受信情報シンボル系列を再び"符号化"することを分離用符号化と呼ぶ。分離

用符号化して内部検査シンボルを再生することを内部検査再生と呼び，受信語に法２加算して重畳受信語を分離することを重畳分離と称する。このようにして重畳分離の際，基礎符号の情報シンボル部分に生起した誤りによって，新たに重畳用受信語に付加される誤り（実はシンドロームに一致する）をここでは擬似誤りと呼ぶ。

〔補題4.1〕：内部符号語の重みをw_eとすると，情報シンボル系列の重みw_eの誤りは検査シンボル系列では少なくとも$d_I - w_e$の擬似誤りを生起させる。（証明略）。

4.3 方法 I

4.3.1 擬似誤りIと擬似誤りII

積符号に重畳符号化法を適用する場合，積符号の行符号Ｃｒ，または列符号Ｃｃ何れか一方の検査シンボル部分に重畳させる場合は連接符号と全く同様の重畳化が可能である。行符号Ｃｒ，列符号Ｃｃを各々（n_r，k_r，d_r），（n_c，k_c，d_c）線形符号とする。又，各々の受信語をＣｒ受信語，Ｃｃ受信語と呼び各々行符号，列符号の復号をＣｒ復号，Ｃｃ復号と呼ぶ。

行符号Ｃｒの検査シンボル部分に重畳用符号Ｕｙを又符号Ｃｃの検査シンボル部分に重畳用符号Ｕｘを重畳化する場合，従来の方法ではチェックオンチェック部分に重畳した情報シンボル（または検査シンボル）を重畳分離する際，行符号および列符号の両者に基づく擬似誤りが生起してしまう。図4.2に復号側のＵｘ受信語およびＵｙ受信語の重畳分離過程を示す。

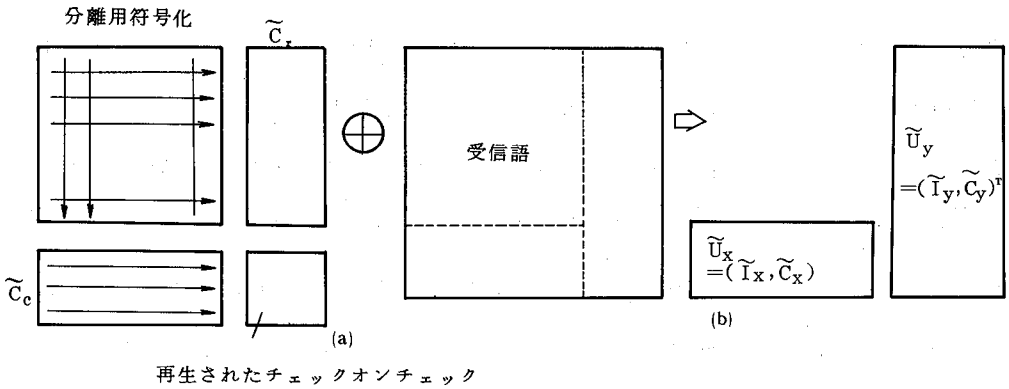


図４．２　重畳受信語$\tilde{U}$xと$\tilde{U}$yの再生

図4.3に示す誤りＥｉが積符号の符号語Ｃｐの情報シンボル部分に生起しているとしよう。図の右下のチェクオンチェックの部分は行符号Ｃｒのチェックシンボル部分Ｃｉにも列符号Ｃｃの検査シンボル部分Ｃｊにも符号を重畳しているので元の符号Ｃｐのチェックオンチェック部分をk_c x k_r シンボルの情報部分より２ステップで内部検査再生する。即ち，列符号の分離用符号化による擬似誤りⅠが生起した場合，更に行符号Ｃｒにより分離用符号化された多数の擬似誤りⅡがチェックオンチェック部分に生起する可能性がある。このことはチェックオンチェック部分に重畳化を施すことは必ずしも好ましくないことを意味する。+

＋）復号側でチェックオンチェック部分を含まない重畳用符号Ｕｘを先に重畳分離し，Ｕｘ受信語を復号後，復号したＵｘ符号語よりチェックオンチェック部分を内部検査再生すれば，Ｕｙ受信語に擬似誤りが集中しない。これは提案方式に相当する操作を復号側で行ったことに該当する。

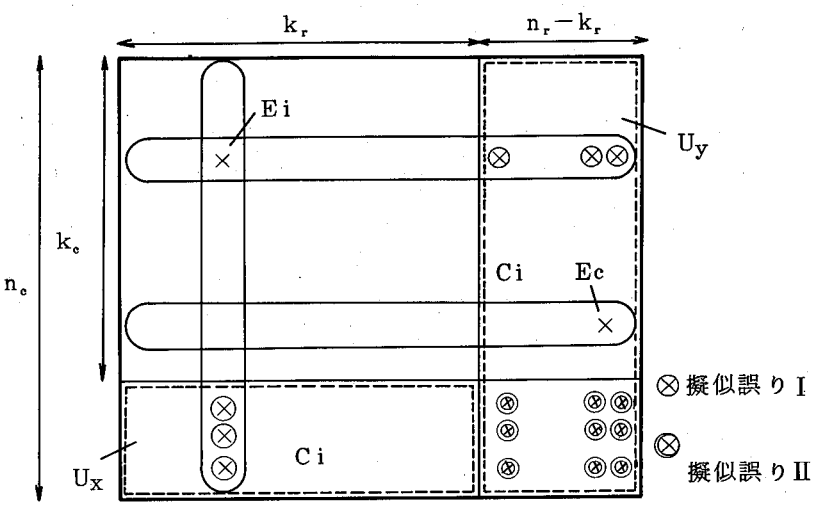


図４．３　チェックオンチェック部の再生

４．３．２　符号化アルゴリズム

（ステップ１）：情報シンボルを$k_c \times k_r$のアレイに構成する。

（ステップ２）：k_r個の列符号Ｃｃの符号化を行い各列にn_c-k_c個の検査シンボルを付加し$n_c \times k_r$のアレイを構成する。

（ステップ３）：$g_c \times (k_r-d_c \cdot d_r+1)$シンボルの情報$I_2$をGF$(2^{g_r})$上の$(k_r, k_r-d_c \cdot d_r+1, d_c \cdot d_r)$RS符号に符号化して重畳用符号Ｕｘを構成する。

（ステップ４）：列符号Ｃｃの検査シンボル部分に重畳用符号Ｕｘを法２で加算する。これにより全体で$n_c \times k_r$のアレイを構成する。

（ステップ５）：n_c個の行符号c_rの符号化を行い，各行にn_r-k_r個の検査シンボルを付加し$n_r \times n_r$のアレイを構成する。

（ステップ６）：$k_u\ (=n_c-d_c \cdot d_r+1) \times g_r\ (=n_r-k_r)$シンボルの情報$I_3$をGF$(2^{g_r})$上の$(n_c, k_u, d_c \cdot d_r)$RS符号に符号化して重畳用符号$U_y$を構成する。

（ステップ７）：行符号Ｃｒの検査シンボル部分に重畳用符号 u_y を法２で加算する。これにより全体で $n_c \times n_r$ の符号語を構成する。

元の積符号Ｃｐの訂正能力を保つには符号Ｕｘ，符号Ｕｙはそれぞれ最小距離 $d_c \cdot d_r$ を持つことが必要である。なお以下の議論では $d = d_c = d_r$ とおく。このようにして構成された符号にｂ＝８，ｄ＝２～１０と変化させた時の符号比率の変化を図4.4に示す。

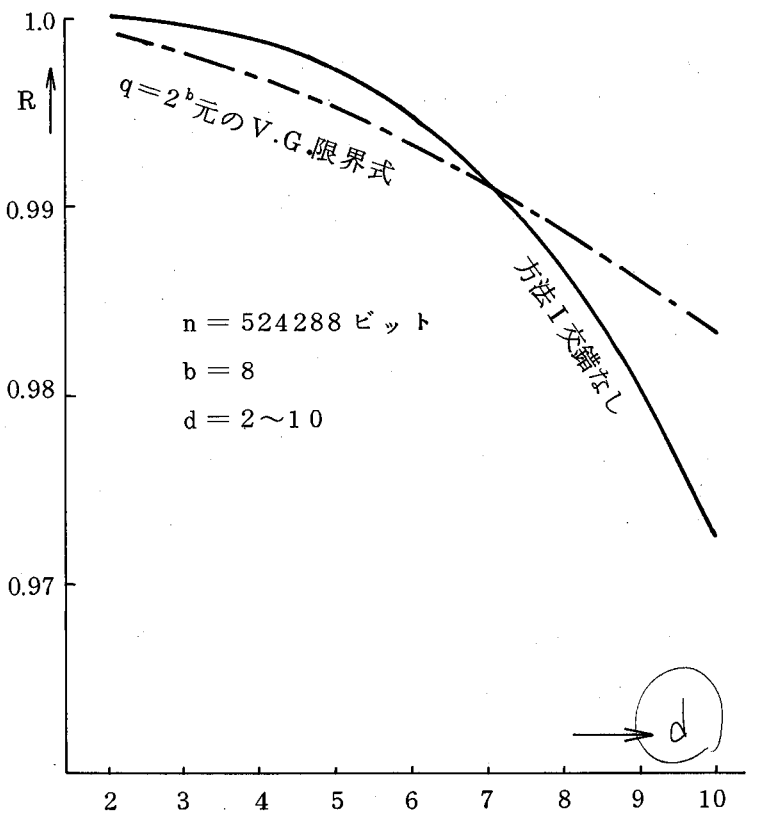


図４．４　方法Ｉで構成した符号の符号比率とＶＧ限界の比較

ｄ＝２～７でＶＧ限界式を満足する。なおこの符号を２元の符号とみた時の符号長は $n = 2^{zb} \times b$ となりｄ＝２，ｂ≧３の時，ＶＧ限界式を満足する。

符号比率Ｒは極めて１に近く対応するＢＣＨ符号もＶＧ限界式を満足している。

4．3．3　直交化交錯法

符号化アルゴリズムＩを用いて符号化を行う場合，ステップ３で重畳用符号化している符号Ｕｘの符号化方向と行符号化を行うＣｒ符号化方向が一致しているため，符号Ｕｘと行符号Ｃｒを重畳分離する際，Ｃｒ復号時に復号誤りが生起すると，それに起因する擬似誤りがＵｘ受信語に多数生起して訂正不能となる。従って，符号Ｕｘの最小距離をｄにするにはＣｒ符号語とＵｙ受信語が互いに１シンボルしか含まないよう交錯を施し擬似誤りを分離して訂正を行う必要がある。

符号Ｕｙと符号Ｃｃを重畳分離する際も同様に擬似誤りを分離させるため互いに１シンボルしか含まないよう交錯を施す。更に，符号Ｕｘにも交錯法を用いて符号Ｕｘ，Ｃｒ，Ｃｃ共に互いに直交[+]させれば最小距離ｄの符号のみを用いて元の基礎符号の有するd^2の最小距離を保つことができる。この条件を満足するよう交錯を施すには３つの符号を同時に直交化させねばならないので２次元の符号構成では実現できない。従って図4.5に示すような符号語を３次元アドレスに配置する。この交錯法を直交化交錯法と呼ぶ。

＋）本論文では２つの符号語が互いに１シンボルしか共有しないとき直交していると称する。

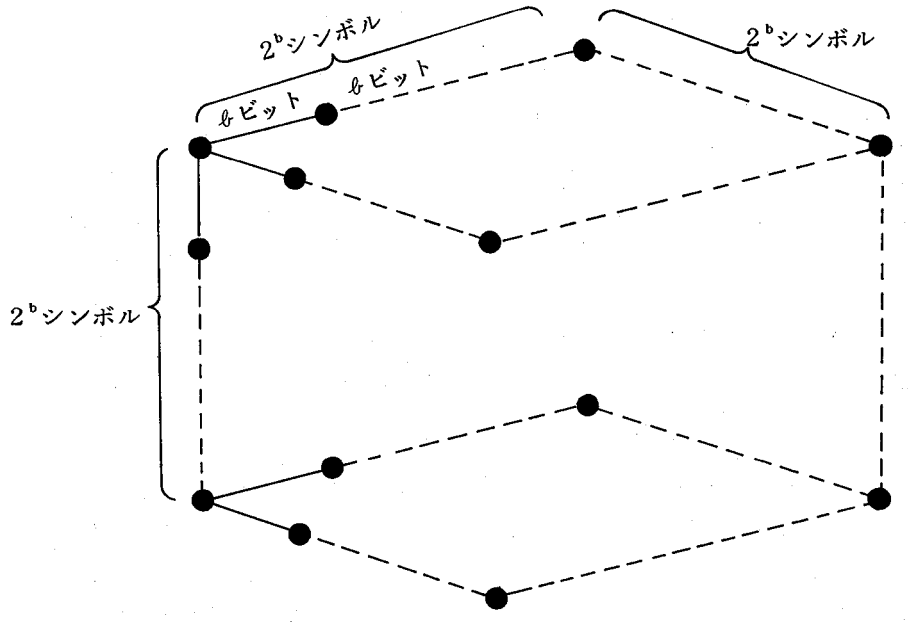


図４．５　直交化交錯法を施した符号語の構成

以下に符号化アルゴリズムＩを用いて符号Ｃｘ，Ｃｙ，Ｕｘ，Ｕｙのいずれも最少距離ｄの符号を用いて全体の最小距離が d^2 であるような符号を構成しよう。なお，符号Ｃｘ，Ｃｙ，Ｕｘ，ＵｙはＧＦ（2^b）上の（2^b，2^b-d+1，ｄ）ＲＳ符号とする。

＜符号化アルゴリズムⅡ＞

（ステップⅰ）：図 4.6 (a)のように（2^b-d+1）x（2^b-d+1）x 2^b シンボルの情報 I_1 を３次元アレイに構成する。

（ステップⅱ）：ｘ軸方向にＣｃ符号化して 2^bx（2^b-d+1）x　2^bシンボルの3次元アレイ を構成する。

（ステップⅲ）：一方，同図(b)に示すように（ｄ－１）x（2^b-d+1）x（2^b-d+1）シンボルの情報 I_2 をｚ軸方向にＵｘ符号化して（ｄ－１）x（2^b-d+1）×2^b シンボルの３次元アレイに構成する。

（ステップⅣ）：同図(c)に示すように３次元アレイのＵｘ符号語をステップⅡで得られた３次元アレイのＣｃ符号語の検査シンボル部分に重畳化する。$2^b \times (2^b - d + 1) \times 2^b$ シンボルの３次元アレイを構成する。

（ステップⅤ）：同図(d)に示すようにステップⅣで得られた３次元アレイをｙ軸方向にＣｒ符号化して $2^b \times 2^b \times 2^b$ シンボルの３次元アレイを構成する。

（ステップⅥ）：同図(e)に示すように $(2^b - d + 1) \times (d - 1) \times (2^b - d + 1)$ シンボルの情報 I_3 をｘ軸方向にＣｃ符号化して $2^b \times (d - 1) \times (2^b - d + 1)$ シンボルの３次元アレイを構成する。

（ステップⅦ）：同図(e)に示す３次元アレイのＣｃ符号語をｚ軸方向にＵｙ符号化して $2^b \times (d - 1) \times 2^b$ シンボルの３次元アレイを構成する。

（ステップⅧ）：同図(f)に示す３次元アレイのＵｙ符号語を同図(d)に示す符号語のＣｒ検査シンボル部分に重畳化して同図(g)に示す $2^b \times 2^b \times 2^b$ シンボルの符号語を完成する。

即ち，符号Ｕｙは重畳化する前にすでに符号Ｕｙと直交する方向にＣｃ符号化が行なわれ符号Ｃｃと符号Ｕｙはこの段階で２次元符号化されている。このようにして部分符号Ｃｒ，Ｃｃ，Ｕｙ，Ｕｘは最小距離が同一のｄであるにもかかわらず全体の最小距離 d^z の符号語が構成可能である。

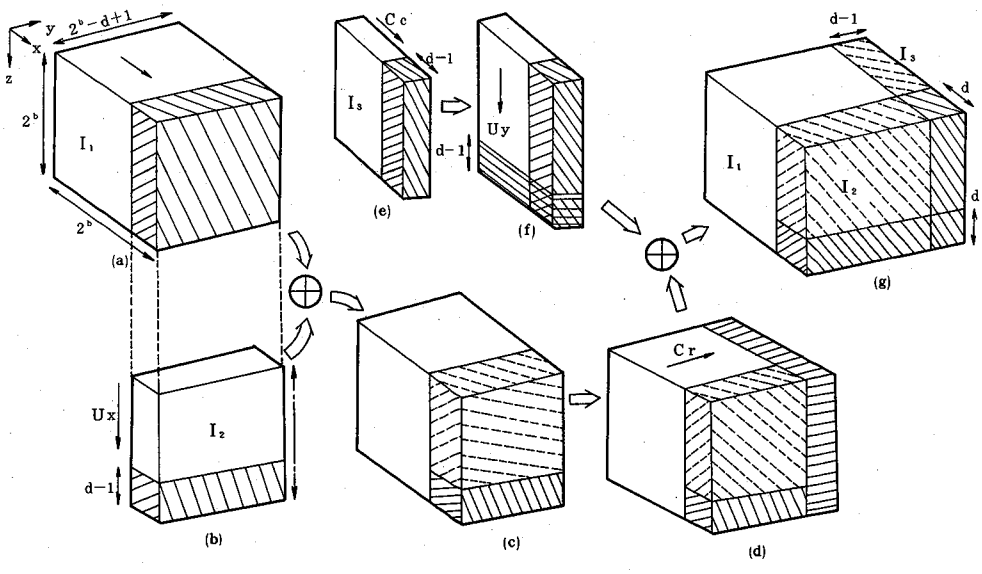


図４．６　直交化交錯法

４．３．４　他の符号との比較

３次元構造を１次元で等価な長さのＢＣＨ符号と比べると直交化交錯法は 2^b 倍符号長が長くなっているため直接比較するとかなり不利となる。

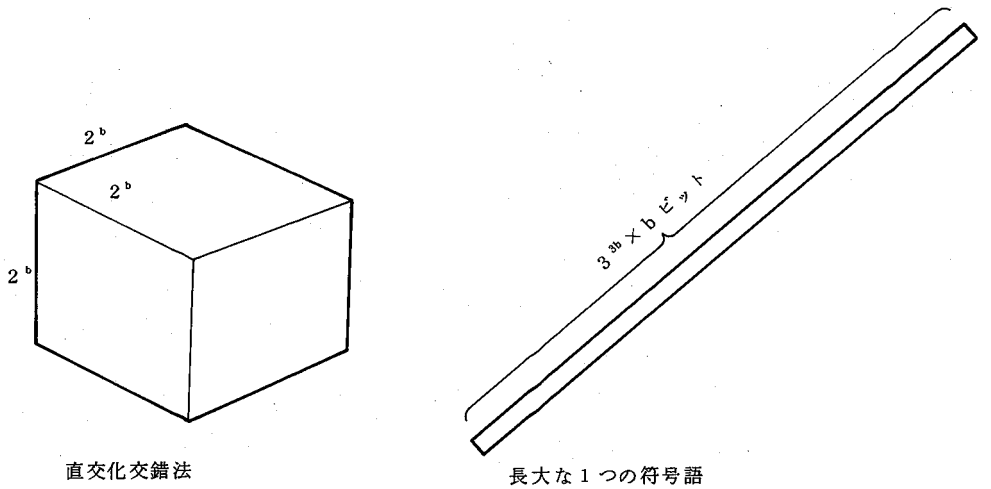


図４．７　長大な符号との比較

しかしこの符号は元来2^{2b}xｂビット前後の符号長の特性の良い符号を用いるとすれば結果は良好なのは明らかであるがこのような長大な符号でしかも d^z の最小距離の復号器を設計することは困難となる。

最小距離 d^z の符号で非常に符号長の大なる符号を構成する場合，対応するガロア体の元の数は厖大なものとなり，演算回路のハードウェア量は厖大なものとなる。(44)(45)

従ってより実用的な選択の場合としては $2^b \times 2^b \times b$ ビット程度の最小距離 d^z の符号を繰り返して伝送しよう。その場合の符号と直交化交錯法による符号を比較する。

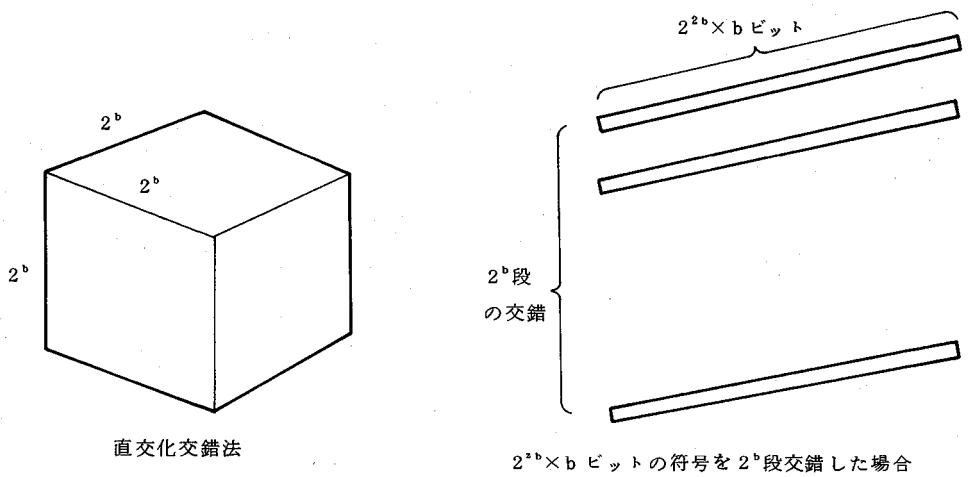


図４．８　2^b段交錯した符号との比較

この場合では直交化交錯法はすべて最小距離ｄの符号の同一の符号器，復号器で実現でき比較する符号は$2^{2b}\times b$ビットの最小距離d^2のＢＣＨ符号またはＲＳ符号が候補になる。

このことは次のことを意味する。即ち直交化交錯法を用いてｂ＝４で最小距離１６の符号語を構成すると符号長ｎ＝１６３８４ビットの符号がガロア体ＧＦ（2^4）上のプロセッサーで復号器を構成できる。ところがこれを長大な一つのＢＣＨ符号で構成するとＧＦ（2^{14}）上の演算回路でBCH符号を構成する必要がある。又，2^b段の交錯を施すとしてもGF（2^{10}）上のＢCH符号を構成する必要がある。ガロア体プロセッサーで実現するとしてもGF（2^{14}）又はGF（2^{10}）上の演算回路のハードウェアは実現不可能に近い。

直交化交錯法の符号比率は次式で与えられる。

$$Rin=\{2^{3b}-(d-1)^2(3\cdot 2^b-2d+2)\}/2^{3b} \qquad \cdots(4.4)$$

一方，ＶＧ限界式の符号比率は次式で与えられる。

$$R_{VG} = 1 + h\log h + (1-h)\log(1-h) \qquad \cdots(4.5)$$

（但し，$h = d^2 / (2^{2b} \times b)$ で与えられる。）

以上を表 4.1 にまとめる。又，b＝8に対する符号比率の変化を図 4.9 に示す。

表 4.1　ＶＧ限界式を満たす直交化交錯法のパラメータ（2元符号として）

ＧＦ	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
最小	③	③	③	③	③	③
距離 d	④	④	④	④	④	④
	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
	⑥	6	6	6	6	6
		7	7	7	7	7
		8	8	8	8	8
		9	9	9	9	9
		10	10	10	10	10

○印はＶ．Ｇ．限界式を満足するパラメータ

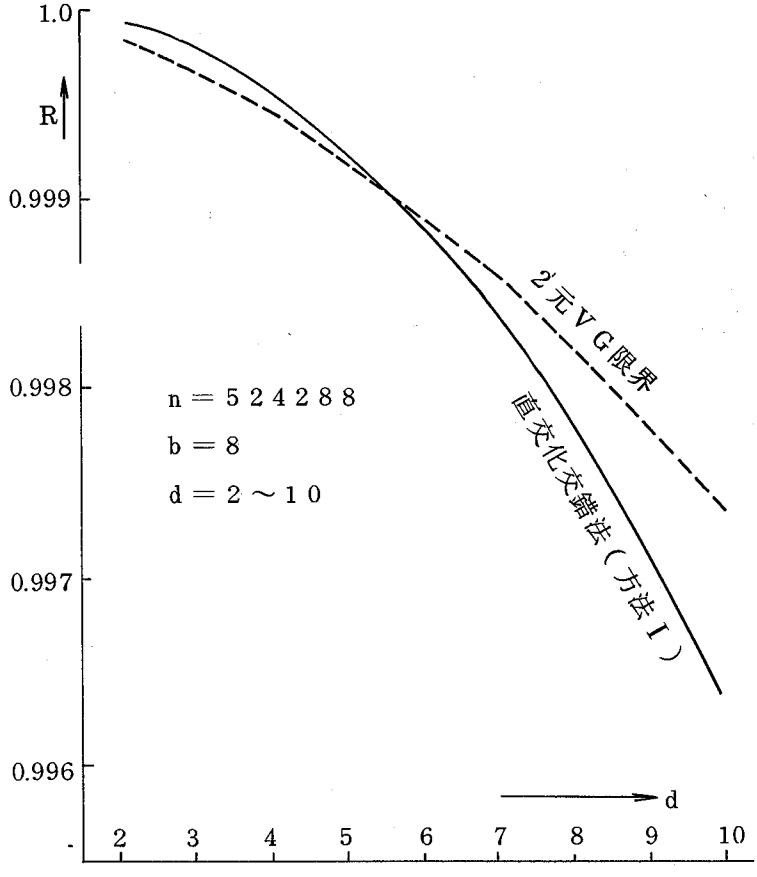


図４．９　直交化交錯法により構成された符号の符号比率とＶＧ限界の比較

(1)　ＲＳ符号との比較

符号長 2^B シンボルのＲＳ符号と直交化交錯法による符号とを比較してみよう。最小距離Ｄは

$$D = d^2 \qquad \cdots (4.6)$$

とおける。直交化交錯法による符号長 $2^b \times 2^b \times b$ ビットと比較するため便宜上Ｂ＝２ｂ－１とおく。＋

＋）厳密には（２ｂ－１）／２ｂ倍符号長が異なる。

$$R_{RS} = (2^B - D + 1) / 2^B \qquad \cdots (4.7)$$

数値計算結果では $b \geqq 20$，$d = 2 \sim 5$ で単一のＲＳ符号を 2^b 段交錯した場合より優れるパラメータの符号が構成できることがわかる。

(2) ＢＣＨ符号との比較

同様の手法でＢＣＨ限界式と比較してみよう。$(2^m - 1, 2^m - mt - 1, t)$ ＢＣＨ符号と符号比率を比較する。符号長ｎは

$$n = 2^m - 1$$
$$= 2^{2b} \times b \qquad \cdots (4.8)$$

とおけるから $m \cong 2 \times b + \log_2 b$ となる。符号比率は

$$R_{BCH} = (2^m - (mt - 1)) / (2^m - 1) \qquad \cdots (4.9)$$

で与えられる。数値計算結果より $b \geqq 22$，$d = 3$ で直交化交錯法がＢＣＨ符号を 2^b 段交錯した場合よりも優れている。

付録Ｇに同一のｂに対する符号長ｎの値を表で与える。

4．4 方 法 II

方法Ｉは積符号の構造を首尾よく利用することにより従来の構成法に比べより多くの情報を符号化できるようにした手法である。これに対し本節ではこの手法を改良して積符号の検査シンボル数を更に減少させる方法について述べる。なお繁雑さを避けるため説明は行符号のみで行う。

4．4．1 原　　理

＜符号化アルゴリズム＞

（ステップ１）：図 4.10 で情報シンボルはｋシンボル毎にＣｒ符号器で符号化されｎシンボルの符号語に構成される。この操作がＮ行にわたって施され，Ｎ×ｎシンボルの符号語 $C\pi$ が構成される。

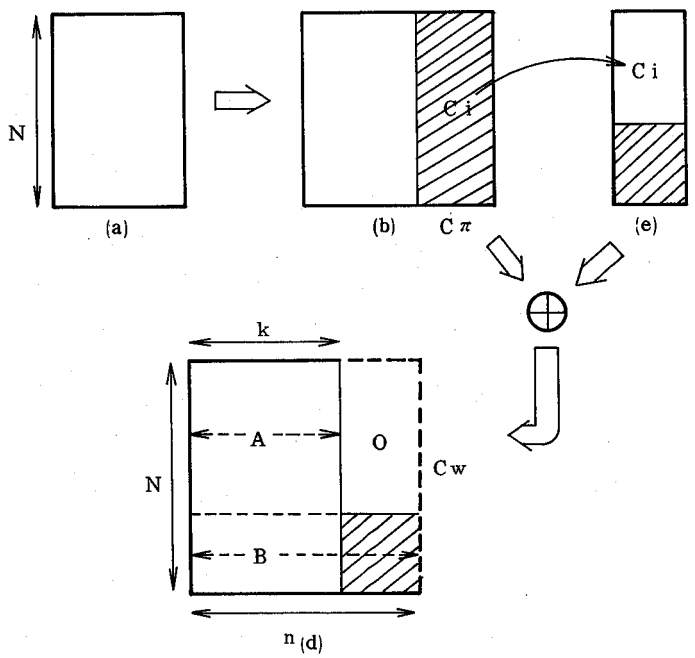


図４．１０　方法Ⅱによる符号化過程

（ステップ２）：符号語Ｃπの検査シンボル部分Ｎ×（ｎ－ｋ）シンボルのｋ個の行符号語Ｃｒ（ｉ）のｎ－ｋ検査シンボルからなる検査シンボル部分を符号ＵのＧＦ（2^{n-k}）上のＫ個の情報シンボル系列とみなして符号化し，ＧＦ（2^{n-k}）上のＮ－Ｋ個の検査シンボルを有する符号語を構成する。

（ステップ３）：符号語Ｃπの検査シンボル系列部分に符号Ｕのシンボルを法２加算し，図(d)に示す符号語Ｃｗを構成する。

ステップ１で第ｉ行の行符号語Ｃｒ（ｉ）は次式で表される。

$$Cr(i)=(I(i),C(i)) \qquad \cdots(4.10)$$

ステップ２で第ｉ行の重畳符号ＵのシンボルQ_iは

①$1 \leqq i \leqq K$の場合，

$$Q_i = C(i) \qquad \cdots(4.11)$$

②$K+1 \leqq i \leqq N$の場合，

$$Q_i = V(i)$$

となる。但し，$V(i)$は符号Uの検査ベクトルである。

ステップ3で符号語C_wの第i行のベクトル表現をξ_iとすると，

①$1 \leqq i \leqq K$の場合，

$$\xi_i = (I(i), 0) \qquad \cdots(4.12)$$

②$K+1 \leqq i \leqq N$の場合，

$$\xi_i = (I(i), C(i)+V(i)) \qquad \cdots(4.13)$$

となる。

以上より図4.10の右上の矩形部分のシンボルが0ベクトルとなることが理解できよう。この0ベクトルは明らかに送信する必要がない。以上行符号のみについて説明したが列符号についても全く同様の結果がえられ積符号としての符号語に適用すると図4.11の構成の符号語が得られる。

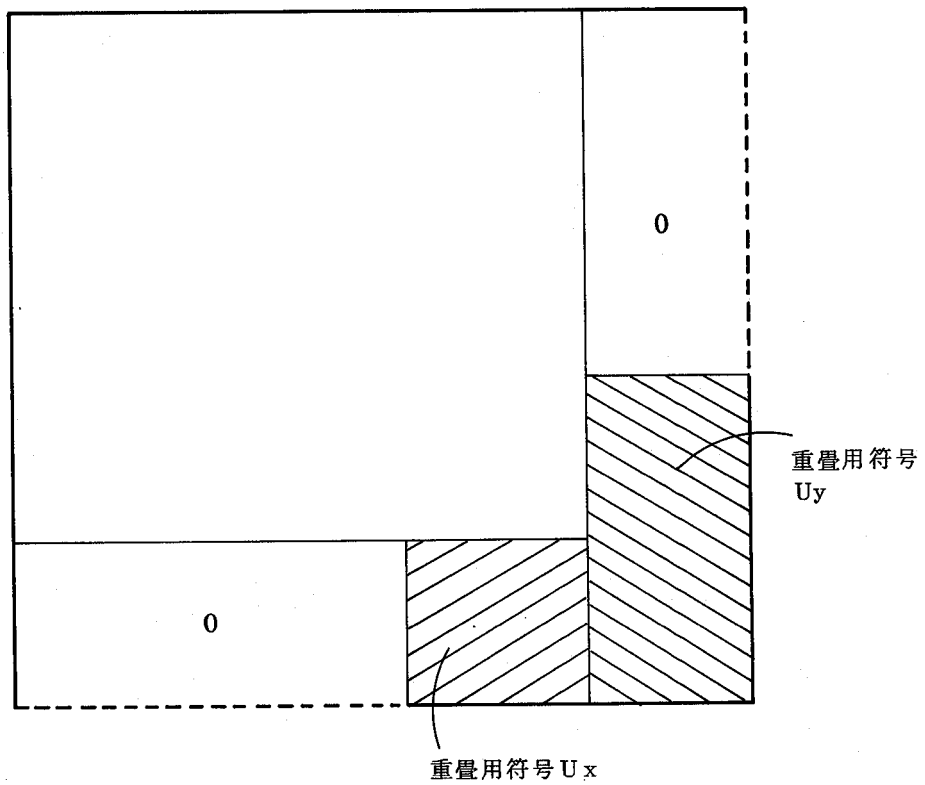


図４．１１　方法Ⅱを積符号に適用し構成した符号語

＜方法Ⅱの復号化アルゴリズム＞

（ステップ１）：受信語$\tilde{C}$ｗの情報部分より分離符号化して受信検査シンボル$\tilde{C}$（ｉ）を内部検査再生する。

（ステップ２）：内部検査再生した検査シンボルを対応する部分に法２で加算する。

（ステップ３）：重畳用受信語$\tilde{U}$を重畳分離する。

（ステップ４）：得られた重畳用符号を復号する。

（ステップ５）：符号Ｃｒ（ｉ）の受信語を復号してもとの情報を得る。

受信語Ｃｗは次式で表現できる。

$$Cw=(R_1, R_2, \cdots, R_N) \quad \cdots(4.14)$$

各要素R_iは

$$R_i=(r_i(j), 0)(1 \leqq j \leqq K) \quad \cdots(4.15)$$

$$R_i=(r_i(j), r_c(j))(K+1 \leqq j \leqq N) \quad \cdots(4.16)$$

で与えられる。伝送路上で付加された誤りベクトルを

$$Ej=(e_i(j), e_c(j)) \quad \cdots(4.17)$$

とする。但し，$1 \leqq j \leqq K$のとき，$e_c=0$である。

$$r_i(j)=I(j)+e_i(j)(1 \leqq j \leqq K) \quad \cdots(4.18)$$

$$r_i(j)=0 \quad (1 \leqq j \leqq K) \quad \cdots(4.19)$$

又，

$$r_i(j)=I(j)+e_i(j)(K+1 \leqq j \leqq N) \quad \cdots(4.20)$$

$$r_c(j)=C(j)+V(j)+e_c(j)(K+1 \leqq j \leqq N) \quad \cdots(4.21)$$

である。

ステップ１で受信語の情報シンボル系列より分離用符号化して受信検査シンボル$\tilde{C}(j)$を内部検査再生する。

$$\tilde{C}(j)=C(j)+S(j) \quad \cdots(4.22)$$

$S(j)$は情報シンボル部の誤りによって引き起こされた擬似誤りである。

ステップ２でこのようにして作成された内部検査再生シンボルを受信語の検査部に法２加算する。符号Ｕの受信語$\tilde{U}(j)$（$j=1, 2, \cdots, N$）を再生する。

$$\tilde{U}(j)=Qj+S(j)+e_c(j) \quad \cdots(4.23)$$

ステップ３で符号Ｕの誤り$S(j)+e_c(j)$は符号Ｕの訂正能力の範囲内であればすべて訂正される。

ステップ４で

$C\pi$のj番目の要素は

①$1 \leqq j \leqq K$の時,

$$Cr(j) = (I(j) + e_i(j), C(j)) \quad \cdots(4.24)$$

②$K+1 \leqq j \leqq N$の時

$$Cr(j) = (I(j) + e_i(j), C(j) + e_c(j)) \quad \cdots(4.25)$$

となる。

(ステップⅥ):この誤り$e_i(j)$または$e_i(j)+e_c(j)$は符号Crの復号により訂正される。

以上より次の定理を得る。

『定理4.2:方法Ⅱより構成した符号は元の符号の最小距離は不変のままで検査シンボル数を重畳符号の情報シンボル数だけ節減することが可能である。』(証明略)。

図4.10において情報シンボル部分Aは方法Ⅰでは符号長nシンボルの受信語のt個の誤りを訂正していたが,方法Ⅱではこのように検査シンボル部分を送信しないので,誤りの生起が情報シンボル部分のkシンボルに限られる。即ち,重畳用符号Uで擬似誤りを訂正したあと,Cr符号語はk個の情報シンボル部分だけの誤りを訂正すればよい。

一方,Bの部分は重畳用符号Uが正しく復号されれば明らかに擬似誤りは訂正されて存在しなくなるので伝送路上で生起した誤りだけを基礎符号によって訂正し復号を実行する。

符号Crがt重誤り訂正能力を持つとすると元のCr符号語での訂正不能確率+Pfは符号語単位で

+)復号誤り確率と誤り検出確率を総称して訂正不能確率と呼ぶ。

$$Pf \cong \sum_{k=t+1}^{n} \binom{n}{k} P^{k} (1-P_{\varepsilon})^{n-k}$$

$$\cong \binom{n}{t+1} P_{\varepsilon}^{t+1} \qquad \cdots (4.26)$$

（但しP_{ε} は通信路誤り率）。

『定理4.3

方法Ⅱを用いた行符号語Cr（i），（1≦i≦K）の訂正不能確率は次式で与えられる。

$$Pf \cong \binom{k}{t+1} P_{\varepsilon}^{t+1} \qquad \cdots (4.27)$$

（但しP_{ε} ：通信路誤り率）　』

（証明略）。

本定理より復号パフォーマンスは

$$\sigma \cong \binom{k}{t+1} / \binom{n}{t+1} \qquad \cdots (4.28)$$

に改善されることが明らかである。

4．4．2　適　用　例

SER+＝10^{-4}の22×24＝528バイトの情報を方法Ⅱによって符号化してAの部分をSER＝10^{-12}，Bの部分をSER＝10^{-10}以下に誤り制御する。ここで1シンボルは8ビットである。

符号Cr（i）：GF（2^8）上の（28，22，7）RS符号

符号　　U　：GF（2^8）上の（24，10，15）RS符号

を用いると付録HよりAの部分はSER＝7.3×10^{-13}，Bの部分はSER＝2.05×10^{-12}の復号パフォーマンスが得られる。

+）SER：Symbol error rate，この例では1シンボル＝1バイト。

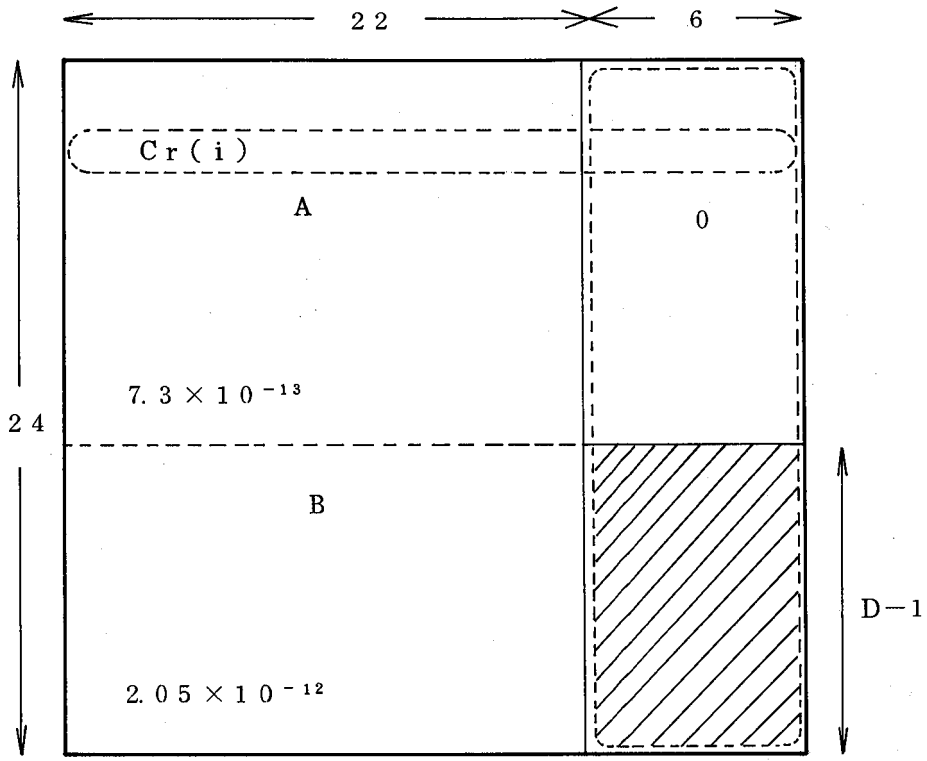


図4.12　方法Ⅱにおける数値例

4.5　畳み込み符号への適用 (36)

畳み込み符号として良く知られている符号にWyner−Ash符号と，自己直交符号（Convolutional Self−Orthogonal Codes）がある。本論文ではWyner−Ash 符号に重畳符号を応用してより自由度に富んだ畳み込み符号の構成法を提供し，設計の自由度が大巾に増大する可能性があることを示す。まず畳み込み符号に方法Ⅰを適用しよう。

〔方法Ⅰ〕：節4.3で積符号に重畳符号を応用し，従来方法を改善してより多くの情報を送受信可能な方法Ⅰを提案したが本節では畳み込み符号に以下のように重畳符号化を行う方法を方法Ⅰと称する。

図4.13に示すように情報I_1を符号化する畳み込み符号のC_1符号器と情報

Ｉｓを重畳符号化するＣｓ符号器により送信シンボル系列Ｔを生成する。（（ｍ＋１）2^m，（ｍ＋１）（2^m －１），３）Wyner－Ash符号のｍ＝１の場合である（４，２，３）符号を符号C_1，符号Ｃｓの両方に選んで提案するアルゴリズムを説明しよう。

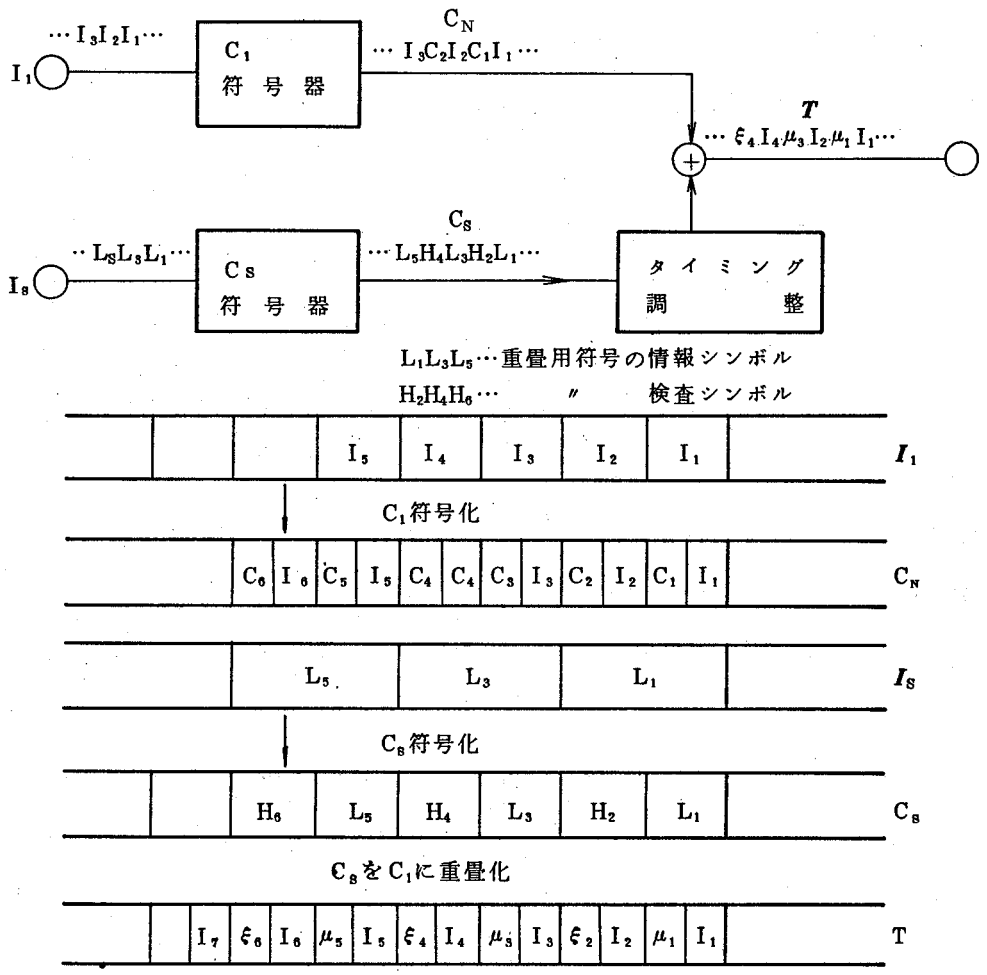


図４．１３　方法Ｉによる符号構成原理図

＜符号化アルゴリズムＩ＞

（ステップ１）：情報シンボル系列（$\cdots I_1, I_2, I_3 \cdots$）$\triangleq I_1$を$C_1$符号器に入力して$C_1$符号語系列（$\cdots I_1\ C_1\ I_2\ C_2\ I_3 \cdots$）$\triangleq C_N$を得る。

（ステップ２）：情報シンボル系列（$\cdots L_1\ L_2\ L_3 \cdots$）$\triangleq I_S$を$C_S$符号器に入力し，$C_S$符号化を行い，符号語系列（$\cdots L_1\ H_2\ L_3\ H_4\ L_5\ H_6 \cdots$）$\triangleq C_S$を得る。

（ステップ３）：得られた重畳用符号語系列C_SをC_1符号語系列（$\cdots I_1\ C_1\ I_2\ C_2\ I_3 \cdots$）$\triangleq C_N$の検査記号部分に法２で加算して重畳化し，系列（$\cdots I_1\ \mu_1\ I_2\ \xi_2\ I_3 \cdots$）$\triangleq T$を得る。

（ステップ４）：送信シンボル系列Ｔとして送信される。

以下に復号化アリゴリズムを示す。

＜復号化アルゴリズムＩ＞

（ステップ１）：受信語系列（$\cdots \tilde{I}_1\ \tilde{\mu}_1\ \tilde{I}_2\ \tilde{\xi}_2\ \tilde{I}_3 \cdots$）$\triangleq R$より$C_N$の検査シンボルを内部検査再生させ$C_N^*$を構成する。

（ステップ２）：系列C_N^*を受信語系列Ｒに法２で加算してC_Sの受信語系列（$\cdots \tilde{L}_1\ \tilde{H}_2\ \tilde{L}_3\ \tilde{H}_4\ \tilde{L}_5 \cdots$）$\triangleq \tilde{C}_S$を得る。

（ステップ３）：系列$\tilde{C}_S$を復号して情報シンボル部分（$\cdots L_1\ L_2\ L_3 \cdots$）$\triangleq I_S$を出力する。

（ステップ４）：得られた系列（$\cdots L_1\ H_2\ L_3\ H_4\ L_5 \cdots$）$\triangleq \tilde{C}_S$を受信語系列Ｒに法２で加算し，受信語系列（$\cdots I_1\ C_1\ I_2\ C_2\ I_3\ C_3 \cdots$）$\triangleq \tilde{C}_N$を得る。

（ステップ５）：$\tilde{C}_N$受信語系列を復号してもとの情報（$\cdots I_1\ I_2\ I_3 \cdots$）$\triangleq I_1$を得る。

このようにして符号比率１／２の符号を２個用いて符号比率３／４の畳み込み符号が構成できることが理解できよう。

ここで節4.3と同じくC_S符号語とC_1符号語が互いに直交していないと復号側で擬似誤りを生じ訂正不可能となる。従って重畳用符号の各シンボルが基礎符号の拘束長以上離れている必要があることが理解できよう。

〔方法Ⅱ〕：節4.3では重畳符号の情報シンボルを基礎符号の検査シンボルの一部を用いて0ベクトルとすることにより送信符号長を短くすることを可能にしたが，本節ではその手法を畳み込み符号に応用し方法Ⅱと称する。

図4.14に示すようにC_1符号器で符号化したあと情報I_sの代わりにC_1符号語の検査シンボルの一部をC_S符号化する点が異なる。

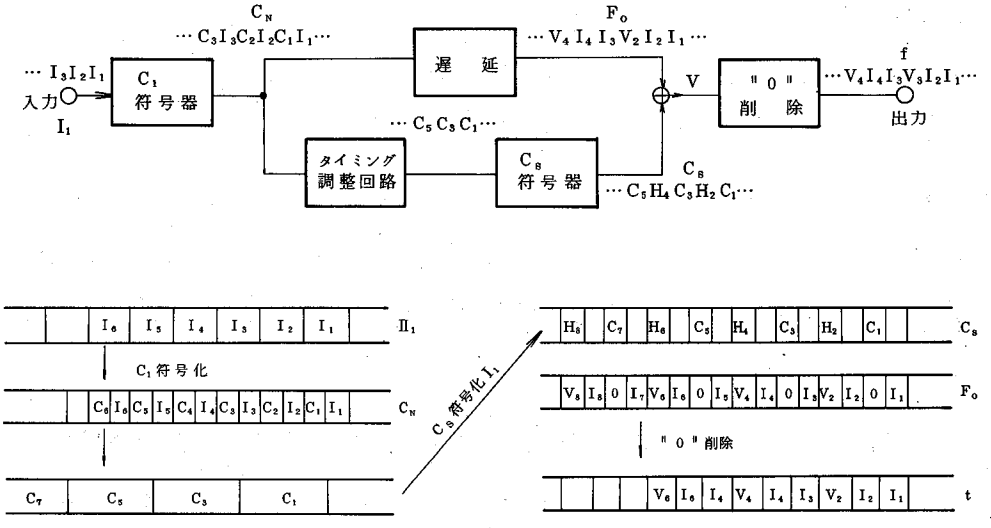


図4.14　方法Ⅱによる符号構成原理図

符号比率1／2の（4，2，3）Wyner－Ash符号2個用いて各々C_1符号，C_2符号とし2／3の畳み込み符号を構成する例で説明しよう。

＜符号化アルゴリズムⅡ＞

（ステップ1）：情報シンボル系列（… I_1　I_2　I_3 …）$\triangleq I_1$をC_1符号器で符号化してC_1符号語系列（… I_1　C_1　I_2　C_2　I_3　C_3 …）$\triangleq C_N$を構成する。

（ステップ2）：C_1符号語系列の検査シンボル系列を一つ置きに取り出しそ

れを重量用符号の情報シンボルとみなしてC_S符号語へ入力し，C_S符号化を行い符号語系列（$\cdots C_1\ H_2\ C_3\ H_4\ C_5\ \cdots$）$\triangleq C_S$を得る。

（ステップ３）：得られた重畳用符号語系列C_SをC_1符号語系列（$\cdots I_1\ C_1\ I_2\ C_2\ I_3\ \cdots$）$\triangleq C_N$の検査シンボル部分に法２で加算して重量化し系列（$\cdots I_1\ 0\ I_2\ V_2\ I_3\ 0\ I_4\ V_4\ \cdots$）$\triangleq F_0$ を得る。

（ステップ４）：系列F_0 より検査シンボルの"０"を取り除き送信語系列ｆを得る。

以上より基礎符号の符号比率１／２が２／３に改善されて送信されることが理解できよう。

＜復号化アルゴリズムⅡ＞

（ステップ１）：受信語系列（$\cdots \tilde{I}_1\ \tilde{I}_2\ \tilde{V}_2\ \tilde{I}_3\ \tilde{I}_4\ \tilde{V}\cdots$）$\triangleq \tilde{r}$にダミー"０"を挿入し，送信側の$F_0$に対する（$\cdots \tilde{I}_1\ 0\ \tilde{I}_2\ \tilde{V}_2\ \tilde{I}_3\ 0\ \tilde{I}_4\ \tilde{V}_4\cdots$）$\triangleq \tilde{r}_0$を構成する。

（ステップ２）：系列$\tilde{r}_0$よりC_1 の検査シンボルを内部検査再生し，$\tilde{C}_N$ を構成する。

（ステップ３）：系列$\tilde{C}_N^*$ を系列$\tilde{r}_0$に法２で加算し，C_Sの受信語系列（$\cdots \tilde{C}_1\ \tilde{H}_2\ \tilde{C}_3\ \tilde{H}_4\ \tilde{C}_5\cdots$）$\triangleq C_S$を得る。

（ステップ４）：系列$\tilde{C}_S$を復号して系列（$\cdots \tilde{C}_1\ \tilde{H}_2\ \tilde{C}_3\ \tilde{H}_4\ \tilde{C}_5\cdots$）$\triangleq C_S$を得る。

（ステップ５）：得られたC_S系列を系列ｒに法２で加算して受信語系列（$\cdots \tilde{I}_1\ \tilde{C}_1\ \tilde{I}_2\ \tilde{C}_2\ \tilde{I}_3\ \tilde{C}_3\cdots$）$\triangleq \tilde{C}_N$を得る。

（ステップ６）：$\tilde{C}_N$受信語系列を復号してもとの情報（$\cdots I_1\ I_2\ I_3\cdots$）$\triangleq I_1$を得る。

以上，符号化，復号化アルゴリズムについて説明した。このようにして構成される符号のパラメータを表4.2に示す。

図4,15および4.16にそれぞれ方法Ⅰ，Ⅱに対する復号器の構成原理図を示す。

表 4. 2　構成された符号パラメータ

m	Wyner−Ash 符号	Rw	重畳用符号	Rs	方法 I	R_1	方法 II	R_2
1	(4, 2,3)	1/2	(4,2,3)	1/2	(16, 12,3)	3/4	(12, 8,3)	2/3
2	(8, 6,3)	3/4	(4,2,3)	1/2	(32, 28,3)	5/6	(28, 24,3)	4/5
3	(24,21,3)	7/8	(4,2,3)	1/2	(96, 90,3)	7/8	(90, 84,3)	6/7
4	(64,60,3)	31/32	(4,2,3)	1/2	(256,248,3)	9/10	(248,240,3)	8/9

CSOC	Rc	重畳用符号	Rs	方法 I	R_1	方法 II	R_2
(6, 3,3)	1/2	(4,2,3)	1/2	(24,18,3)	3/4	(18,12,3)	2/3
(9, 6,3)	2/3	(4,2,3)	1/2	(36,30,3)	5/6	(30,24,3)	4/5
(16,12,3)	3/4	(4,2,3)	1/2	(64,56,3)	7/8	(56,48,3)	6/7
(25,20,3)	4/5	(4,2,3)	1/2	(100,90,3)	9/10	(90,80,3)	8/9

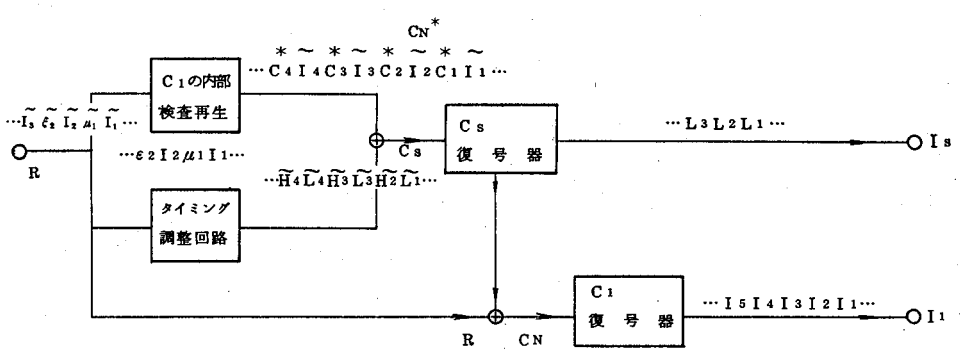


図 4．15　方法 I を用いた符号の復号原理図

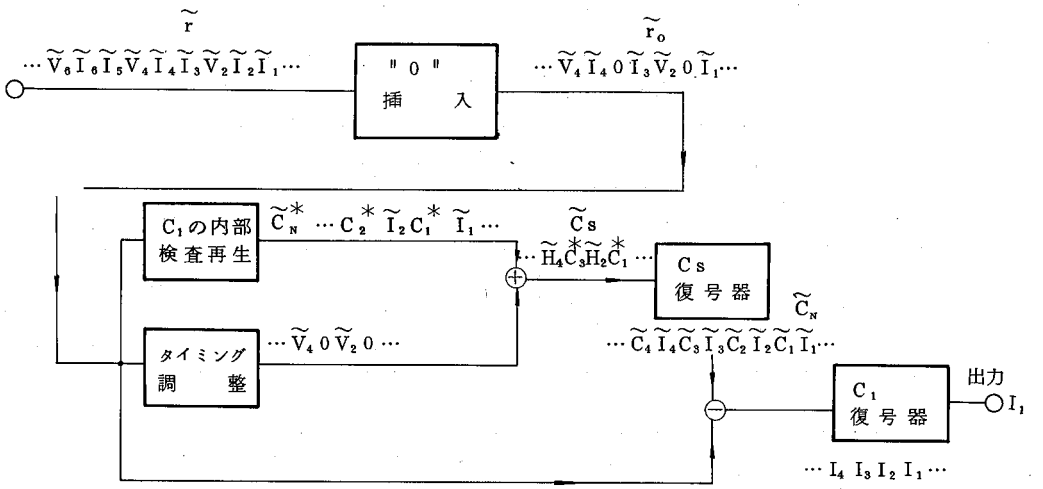


図４．１６　方法Ⅱを用いた符号の復号原理図

４．６　結　　言

重畳符号化法を用いた新しい符号構成法を提案した。

〔方法Ⅰ〕：新しい符号構成法は積符号の有する特長を活かしつつ直交化交錯法を適用しうることが明らかになった。

(1)　積符号の符号語を構成してから重畳化せず列符号化，重畳化，行符号化，重畳化と符号化復号化アルゴリズムを修正し，チェックオンチェック部分も符号シンボルを重畳化させることにより送受信できる情報シンボル数を大巾に増大させることが可能になった。

$b \geqq 3$，$d = 2$の時，２元符号としてみた場合，ＶＧ限界式を満足することが明らかになった。

(2)　行符号で符号化し，直交化交錯法を用いて重畳用符号を重畳化し，そののち列符号または行符号で符号化し，残る列符号の検査シンボル部分に重畳用符号を重畳化することによって訂正能力を低下させずに重畳用符号の

最小距離を大巾に減少させることが可能になった。

2^b 段交錯を施したＲＳ符号と比較すると $b \geqq 20$，$d = 2 \sim 5$ で直交化交錯法を施した方法Ｉが優れる。又，ＢＣＨ符号との比較では $b \geqq 22$，$d = 3$ で直交化交錯法を施した方法Ｉが優れる。

〔方法Ⅱ〕：重畳用符号の情報シンボルを基礎符号の検査シンボル部分の一部分を符号化することによって送信語の一部を０ベクトルとすることにより検査シンボルの一部を首尾よく除去することが可能にした。このようにすることによって，次の利点を有する符号を構成しうることが明らかになった。

(1) 同じ情報シンボル数，同じ最小距離に対し検査シンボル数を大巾に節減することが可能になった。

(2) 一つの符号フォーマットで同時に異なった信頼度で情報を送ることが可能になった。

畳み込み符号のうちWyner－Ａsh 符号に上記方法Ⅱを適用した場合，従来知られてなかったパラメータの符号が構成できることが明らかになった。

第5章　多重符号の復号法

5．1　序　　言

2次元配置の符号の符号化，復号化に関してはすでに多くの報告がなされている。[18][46][47] これらのほとんどが2次元配置の2種の符号を一般に独立に1回づつ復号を行っている。このような方法では多くの誤りあるいはイレージャをただ1回の操作で訂正する結果，必然的に復号誤りの増大が避けえない。又，復号のステップを多ステップに繰り返す方法も報告されている[9]が，このような方法では特定のパターンの誤りが残留しステップを増加させてもパフォーマンスはさほど改善されない。本章では比較的単純な誤り専一復号器を繰り返し用いることによりむしろ残留する誤りパターンを積極的に浮き上がらせ，残留する誤りを推定してイレージャとして最終ステップの復号に利用する手法（ＲＥ　復号法）を提案する。[14][25][26][27][31] 更にＳＥＣ−ＤＥＤ Hamming 符号を用いた場合についてChaseの復号法と比較し検討する。この結果

(1)　Chase 復号器が一般に低誤り率の通信路で良好な特性を示しているのに対しＲＥ復号法は比較的高誤り率の通信路で優れた特性を示すこと，

(2)　一般に符号長n_0の広範な値に対してＲＥ復号法がChase 復号法より優れており，この傾向は符号長が大となるにつれて顕著になること

等を明らかにする。[34]

更に，復号回数が2〜3回で誤り状態を推定する誤り監視計数器を提案し，バースト誤りに対する効果を論ずる。[33]

最後に優れた軟判定復号法として知られているChase 復号法を多次元に拡張したＲＥ復号法と優劣を比較して論ずる。[28][29]

なお本論文においては〃誤訂正〃とは復号器が誤った訂正動作をした結果生

＊）Residual erasure estimator decoding.

起する誤り，又，"見逃し誤り"とは誤りパターンが符号語パターンと一致した結果見逃される誤りを意味するものとし，両者の誤りを復号誤りと総称する。ここで次章以降において用いる諸確率を定義しよう。

(i) 正しい訂正確率 P_C

(ii) 誤訂正確率 P_ε

(iii) 誤り見逃し確率 P_{UD}

(iv) 誤り検出確率 P_{DT}

復号誤り確率 P_{DE} は明らかに $P_{DE}=P_\varepsilon+P_{UD}$ で与えられる。なお誤り専一復号とはイレージャ情報を用いずに誤りを訂正する復号，イレージャ専一復号とは復調あるいは復号時のイレージャ情報に基づく誤りだけを訂正する復号，イレージャ・誤り復号とは誤りとイレージャをともに訂正する復号をいう。本論文を通じて通信路は二元対称通信路（BSC）を仮定する。

5．2 RE復号法

5．2．1 復号器の構成

〔定義〕RE復号器はフィルタリング（D_F（i））復号器，残留イレージャ（RE）推定器，最終段訂正（D_C）復号器からなるものとする。

全体のブロック図を図5.1に示す。符号C_1，符号C_2は各々（n_1，k_1，d_1），（n_2，k_2，d_2）線形符号とする。送信側で情報記号はまずC_2符号化され，次にC_1符号化されて通信路に送出される。

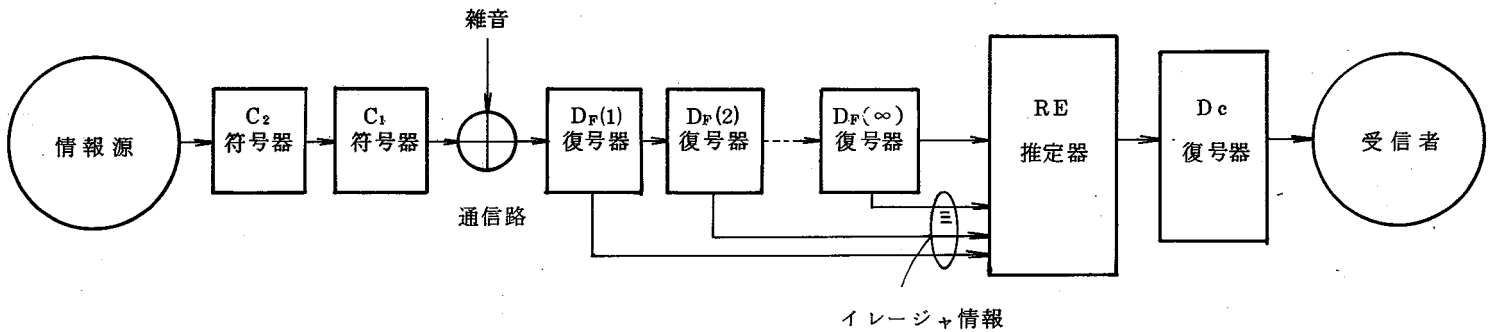


図５．１　ＲＥ（残留イレージャ推定）復号システムの構成

5．2．2　復号器の動作原理

復号は上述のようにD_F（i）復号（i＝1，2，…，∞），RE推定，およびD_C復号からなるが，以下においてこれらについて詳細に説明しよう。

(a)　フィルタリング復号（D_F（i）復号）

D_F（i）復号モードでは比較的単純な〃誤り専一復号器〃を繰り返し用いて分散する誤を訂正するとともに，残留する誤りパターンを積極的に浮き上がらせる。

図5.2に符号C_1および符号C_2を符号長n＊，最小距離4の符号とした場合の受信語の一例を，又，図5.3にフィルタリング復号完了後のこの受信語の状態をそれぞれ示す。まず復号ステップ1，$D_F(1)$では符号C_1の復号により数字1で示した誤りが訂正される。復号ステップ2，D_F (2)では図中数字2で示した誤りが訂正される。このように復号ステップを繰り返し実行する段階で誤りの大部分＊＊が訂正される。この結果最終的に図5.3に示すように格子状の誤りパターンが残留する。D_F（i）復号において，ステップ数を十分に大にした時の最終ステップを∞ステップ，D_F（∞）と称する。

＊）$n_1 = n_2$の場合，簡単のためnと書く。

＊＊）大略$n^2 \cdot P_b - \binom{n}{2}^2 P_b^4$が訂正される。

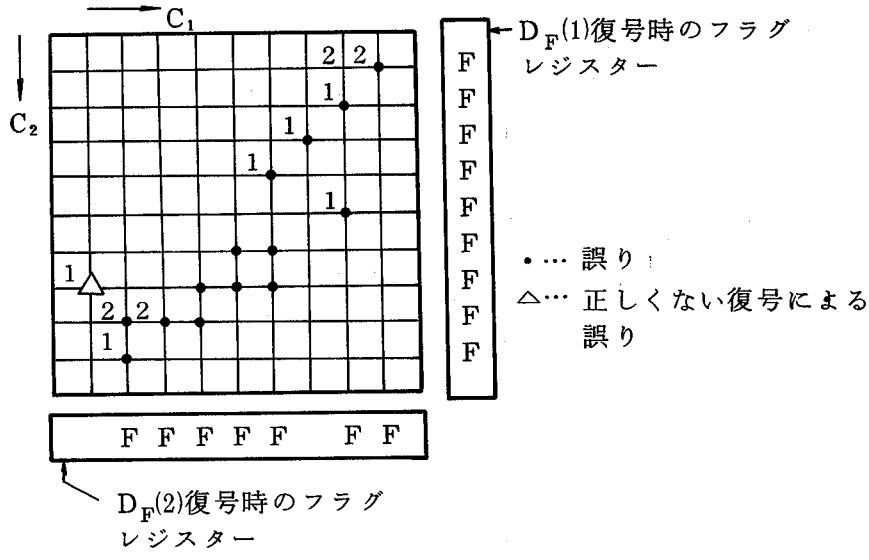


図５．２　ステップ１，$D_1(1)$およびステップ２，

$D_F(2)$におけるフィルタリング復号

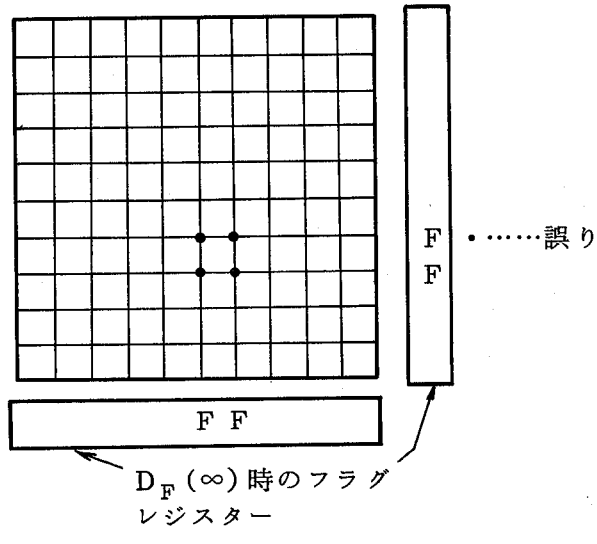


図５．３　∞ステップ，$D_F(\infty)$の

フィルタリング復号

又，t_1およびt_2をそれぞれC_1復号器，C_2復号器が実際に訂正した誤りの個数とする。ここでt_1は$1 \leqq t_1 \leqq \lfloor (d_1-1)/2 \rfloor$，$t_2$は$1 \leqq \lfloor (d_2-1)/2 \rfloor$なる整数である。

(b) 残留イレージャ推定（ＲＥ推定）

推定の方法としてはフィルタリング復号の際に誤り訂正または検出のいずれの場合にもフラグをたて，フラグの立っている行と列の交点のシンボルをイレージャとすることによって行う。

『定理5.1：フィルタリング復号完了時，$D_F(\infty)$に誤りが残留する場合にはt_2+1個以上のC_1受信語およびt_1+1個以上のC_2受信語に誤りパターンが残留する。』

（証明）誤りが残留しているあるC_2受信語には少なくともt_2+1個以上の誤りシンボルが含まれている。その各々の誤りシンボルが含まれるC_1受信語にはt_1+1個以上の誤りシンボルが残留していることになる。従って上記の定理を得る。

〔系5.1〕C_1受信語でt_2個以下のフラグが立っている場合，又はC_2受信語でt_1個以下のフラグが立っている場合，イレージャ専一訂正不可能である。

定理5.1と系5.1によってフラグから推定された格子状のパターンがC_1受信語でt_1個以下，C_2受信語でt_2個以下の場合には見逃し誤りが含まれていることが$D_F(\infty)$復号時において首尾よく判定され，アラーム，データの再送，あるいは補間などの手段に委ねることができる。符号C_1，又は符号C_2で誤訂正した場合には$D_F(\infty)$復号時までフラグが常時立っている場合が起こりうる。例えば図5.4で△印のシンボルはD_F(1)復号で誤訂正されて付加され，D_F(2)復号で付加された誤りが訂正される。以後D_F(3)復号で再び誤訂正されるというように誤訂正と訂正が繰り返されている誤りである。

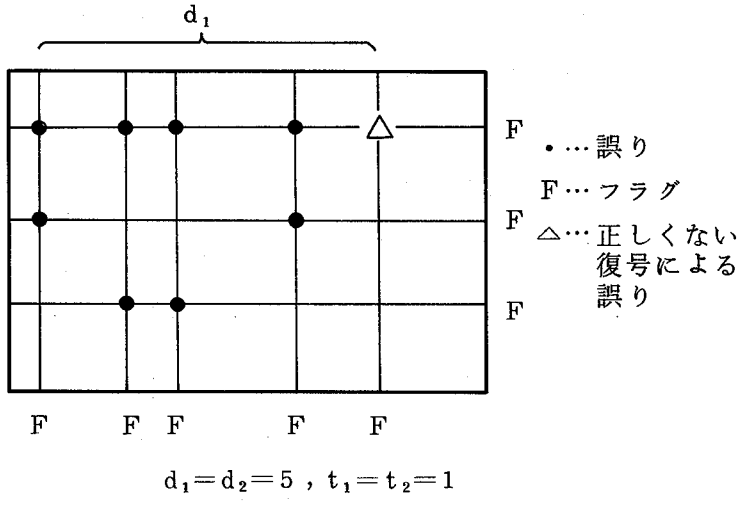


図５．４　誤訂正の検出

〔補題 5.1 〕誤りシンボル数（ t_1+1 ）・（ t_2+1 ）の残留誤りパターンの総数を ρ（ t_1+1 ，t_2+1 ）とすると $D_F(\infty)$ におけるシンボル単位の残留誤り確率 $P_{d\infty}$ は

$$P_{d\infty} \cong \frac{(t_1+1)\cdot(t_2+1)}{n_1 n_2}\rho(t_1+1,\ t_2+1)\cdot P_b{}^{(t_1+1)(t_2+1)} \qquad \cdots(5.1)$$

で与えられる。但し P_b は通信路誤り率である。

（略証）$D_F(\infty)$ において残留する誤りは定理 5.1 より t_2+1 個以上の C_1 受信語および t_1+1 個以上の C_2 受信語が存在する。従って誤りシンボルは少なくとも（ t_1+1 ）・（ t_2+1 ）個存在する。

(c)　最終段訂正復号（ D_C 復号）

D_C 復号モードでは推定された格子状のパターンの各格子点に存在するシンボルをイレージャ専一復号，又はイレージャ・誤り復号のいずれかによって復号する。

(d) SEC−DED Hamming符号

ここでは符号C_1，符号C_2，共に（2^m，2^m-m-1，4）SEC−DED Hamming符号を用いるとして評価を行う。この場合，縦方向，横方向共に距離4であるので積符号としては最小距離16となるが，いわゆる最良符号のような高能率の符号としては異なり，検査記号数が過大であるため最小距離で保証された以上の多数の誤りを潜在的に訂正しうることが予想される。

(e) RE復号法によるパーフォーマンス

D_F（i）復号は符号C_1，および符号C_2共に単一誤り訂正，2重誤り検出の復号を実行する。D_F（i）復号の際，シンドロームが全て0となる場合以外には誤り訂正，又は訂正不能の何れの場合においてもその受信語にフラグをつける。フラグ情報は各ステップ毎に蓄えられ，最終ステップおよびその直前のステップのフラグ情報が最終的に用いられる。

〔I〕 イレージャ専一復号

イレージャ専一復号では符号C_1，符号C_2について共に$d-1=3$個以下のイレージャを訂正できる。フィルタリング復号のみを行うとした場合の誤り検出確率と復号誤りの近似公式を求めよう。

(i) D_F (1)復号時の確率計算：

復号誤り確率$P_{DE}(1)$は次式で与えられる。[5] [18]

$$P_{DE}(1)=\sum_{i=4}^{n}\frac{i}{n}\sum_{\substack{l=i-j\\ j=0,1}}^{\min(i,n-j)}A_i\binom{i}{l}P_b^l(1-P_b)^{i-l}$$

$$\cdot\binom{n-i}{l-i+j}P_b^{l-i+j}\cdot(1-P_b)^{n-l-j}$$

$$\cong\frac{4}{2^m}\cdot A_4\cdot\binom{4}{4}\cdot P_b^4\cdot(1-P_b)^{n-4}$$

$$+\frac{4}{2^m}\cdot A_4\binom{4}{3}P_b^3(1-P_b)\cdot(1-P_b)^{n-4}$$

$$+\frac{4}{2^m}\cdot A_4\cdot\binom{4}{4}\cdot P_b^4\cdot\binom{n-4}{1}P_b(1-P_b)^{n-5}$$

$$\cong(2/3)\cdot(2^m-1)\cdot(2^m-2)P_b^3 \qquad \cdots(5.2)$$

上式においてｊは信頼指数であってｊ＝０が見逃し誤りに対応し，この場合は４重誤りが生起している。一方，ｊ＝１は誤訂正に対応し，この場合はℓ＝３即ち３重誤りあるいはℓ＝４即ち５重誤りが生起している。又，A_iは重みｉの符号語数であり，式（５.２）においては

$$A_4=\frac{1}{2^m-3}\binom{2^m}{4} \qquad \cdots(5.3)$$

である。[13][43] この数値計算例では，$P_{UD}\ll P_\varepsilon$，であるため復号誤り確率は誤訂正確率P_εにほぼ一致する。一方，誤り検出確率$P_{DT}(1)$は次式で与えられる。

$$P_{DT}(1)\cong\frac{2}{n}\binom{n}{2}P_b^2(1-P_b)^{n-2}$$

$$\cong(2^m-1)P_b^2 \qquad \cdots(5.4)$$

(ii)　D_F (2)復号時の確率計算：

復号誤り確率$P_{DE}(2)$はC_2受信語に３個検出可能誤り又は復号誤りが生起する確率であり，次式で与えられる。

$$P_{DE}(2) \cong \frac{4}{2^m} \frac{1}{2^m-3} \binom{2^m}{4} \binom{4}{3} \left\{ P_{DT}(1) + P_{DE}(1) \right\}^3$$

$$\cong (2/3)(2^m-1)^4(2^m-2)P_b^6 \qquad \cdots (5.5)$$

又，誤り検出確率 $P_{DT}(2)$ は次式で与えられる。

$$P_{DT}(2) \cong \frac{2}{n} \binom{n}{2} \left\{ P_{DT}(1) + P_{DE}(1) \right\}^3$$

$$\cong (2^m-1)^3 P_b^4 \qquad \cdots (5.6)$$

(iii) $D_F(\infty)$ 復号時の確率計算：

復号誤り確率 $P_{DE}(\infty)$ ：および誤り検出確率 $P_{DT}(\infty)$ は付録Ｉで示したようにそれぞれ次式で与えられる。

$$P_{DE}(\infty) = (10/3) \cdot (2^m-1)^2(2^m-2)P_b^6 \qquad \cdots (5.7)$$

$$P_{DT}(\infty) = (2^m-1)^2 P_b^4 \qquad \cdots (5.8)$$

〔補題5.2〕イレージャ専一復号器において訂正不能となる場合のイレージャフラグ入力の最小数は C_1 受信語で d_2 個，C_2 受信語で d_1 個が同時に入力された場合に与えられ d_1+d_2 となる。（証明終）

次に最終段復号（D_C 復号）における諸確率について述べよう。イレージャ専一復号では誤り検出確率 P_{DT} は復号誤りを含まない残留誤り格子パターン生起確率と１個の復号誤りを含む残留誤り格子パターン生起確率の和となる（定理5.1参照）*。即ち P_{DT} は次式で与えられる。

＊）前者は付録Ｊより４×４の格子パターンが９０であることを考慮することにより得られる。又，後者の誤りは付録Ｉ(b)の△印の誤りの何れかを通信路で生起した誤り（●）印に置き換えたものに等しいことを考慮すると導かれる。

$$P_{DT} \cong \frac{4^2}{n^2}\binom{n}{4}^2 \cdot 90 \cdot P_b^8 (1-P_b)^{n^2-8}$$

$$+\frac{4}{n}\left[\binom{n}{2}\binom{2}{1}\binom{4}{3} A_4 \cdot P_b^3 \cdot P_b^4 (1-P_b)^{n^2-7}\right] \cdot 2$$

$$\cong (4/3) \cdot 2^m \cdot (2^m-2) \cdot (2^m-1)^2 P_b^7$$

$$+(5/2) \cdot (2^m-1)^2 (2^m-1)^2 (2^m-3)^2 P_b^8 \qquad \cdots (5.9)$$

式（5.9）の誤り検出確率において，フラグが付加されている行，又は列のすべてのビットを含めているのはそれらが$D_F(\infty)$復号時までと異なり最終的に復号器が誤り検出と判断し，棄却又は補正とすべき出力となるからである。一方，格子点数をイレージャフラグの立っているC_1受信語およびC_2受信語の交点のシンボル数とすると復号誤り確率P_{DE}は

（復号誤りを含む受信語が少なくとも1つ存在し，且つ残留する誤りパターンによりC_1方向，C_2方向，共に2本以上のフラグが立っている確率）×（格子点数）／n^2

で与えられる。イレージャ専一復号の際のフラグの最小数は2＋4であり各2個ずつイレージャが訂正されて12個の格子点数が誤ったまま残留する。従って復号誤り確率P_{DE}は次式で与えられる。

$$P_{DE} \cong \frac{12}{n^2}\left[\binom{n}{3}\binom{3}{1}\binom{4}{3} A_4 \cdot P_b^3 \cdot \binom{2}{1}\binom{4}{2} \cdot P_b^2\right.$$

$$\left. \cdot P_b^2 (1-P_b)^{n^2-7}\right] \cdot 2$$

$$\cong 24 \cdot (2^m-1)^2 (2^m-2)^2 \cdot P_b^7 \qquad \cdots (5.10)$$

〔Ⅱ〕 イレージャ・誤り復号

イレージ・誤り復号器は3イレージャ・0誤り，又は1イレージャ・1誤りを訂正できる。この場合，誤り検出確率P_{DT}は式（5.9）と同様にして復号誤りを含まない4×4の格子パターンによる生起確率と〔Ⅰ〕で復号誤りを与え

ていた格子パターンが首尾よく検出される確率との和で与えられる。

$$
\begin{aligned}
P_{DT} &\cong \frac{4^2}{n^2}\binom{n}{4}^2 \cdot 90 \cdot P_b^8 (1-P_b)^{n^2-8} \\
&\quad + \frac{4}{n}\left[\binom{n}{3}\binom{3}{1}\binom{4}{3} A_4 \cdot P_b^3 \cdot \binom{2}{1}\binom{4}{2} P_b^2 \right. \\
&\quad \left. \cdot P_b^2 (1-P_b)^{n^2-7}\right] \cdot 2 \\
&\cong 8 \cdot 2^m \cdot (2^m-1)^2 (2^m-2)^2 P_b^7 \\
&\quad + (5/2)(2^m-1)^2(2^m-2)^2(2^m-3)^2 P_b^8
\end{aligned}
\qquad \cdots (5.11)
$$

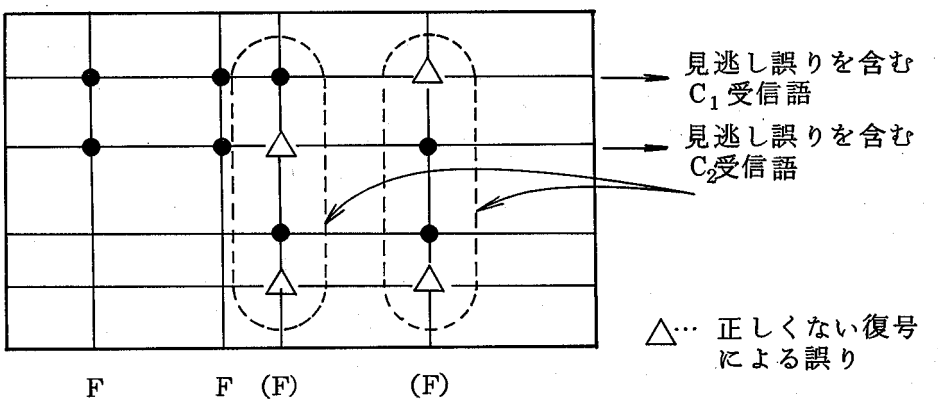


図５．５　イレージャ・誤り復号における復号誤り確率主要項を与える誤りパターンの一例

復号誤り確率はC_1符号，C_2符号の何れで復号しても３イレージャ・０誤り又は１イレージャ・１誤り訂正が不可能な場合であり，図5.5のようなパターンの生起確率の和となる。復号誤り確率P_{DT}は次式で与えられる。

$$P_{DE} \cong \frac{4^2}{n^2}\left[\binom{n}{3}\binom{3}{2}A_4\binom{4}{3}^2(P_b^3)^2\binom{4}{2}\cdot P_b^2\right.$$

$$\left.\cdot(1-P_b)^{n^2-8}\right]+\frac{4^2}{n^2}\left[\binom{n}{3}\binom{3}{2}A_4\binom{4}{3}\cdot P_b^3\right.$$

$$\left.\cdot 1\cdot P_b^3\cdot 1\cdot P_b^2(1-P_b)^{n^2-8}\right]$$

$$\cong(100/3)\cdot(2^m-1)^2(2^m-2)^2P_b^8(1-P_b)^{n^2-8} \quad \cdots(5.12)$$

5．2．3　Chase復号器との比較

(a)　2次元Chase復号器

Chase復号器は特定の軟判定復号アルゴリズムを用いずに，重み$\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor$（dは最小距離）までのテストパターンと重み$\left\lfloor\frac{d-1}{2}\right\rfloor$までの誤りを訂正する硬判定の復号器を用いて，重みd－1までの誤りを軟判定復号している点に大きな特徴がある。

図5.6にChase復号の概念図を，又図5.7に復号フローチャートを示す。

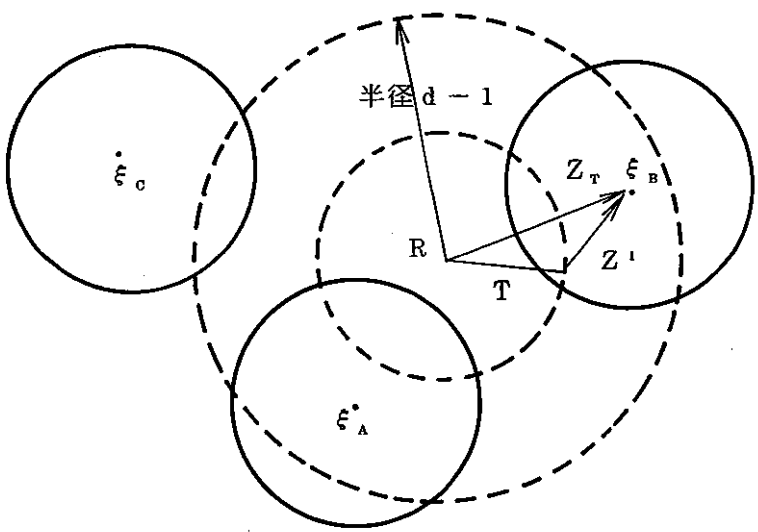


図5．6　Chase復号の概念図

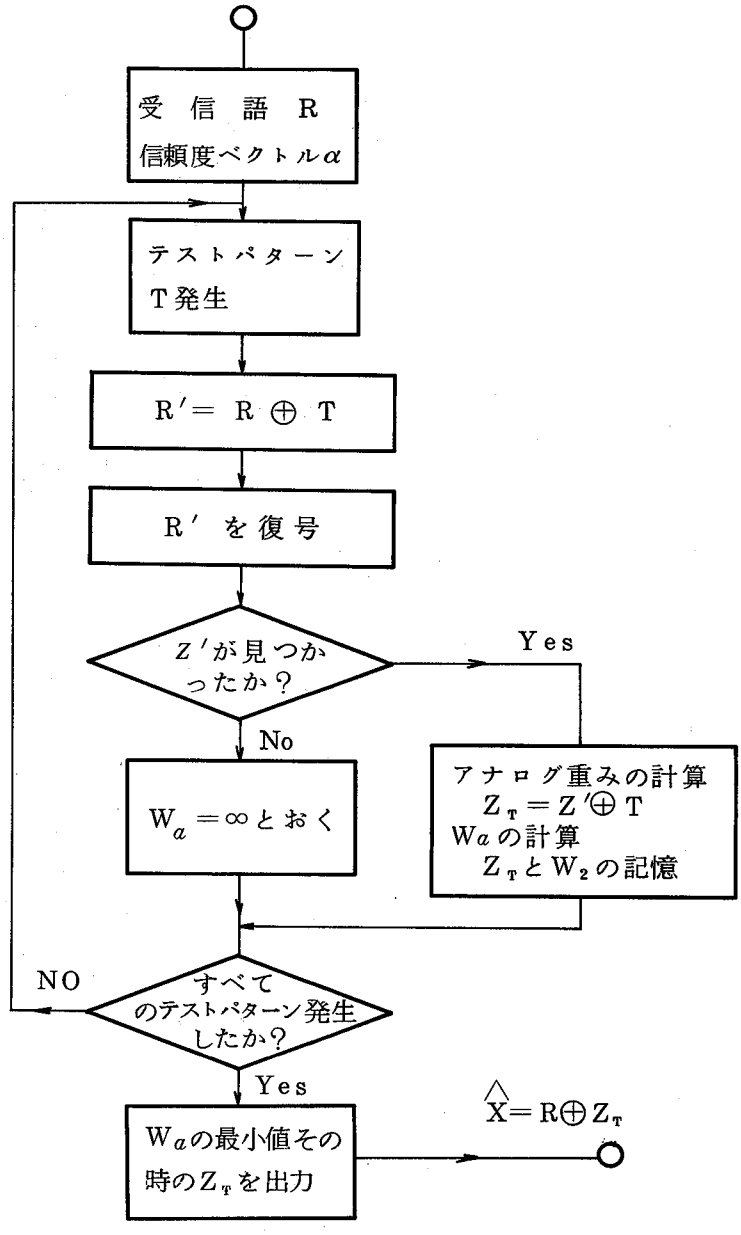


図5.7　chase復号フローチャート

C_1復号器で誤りなしと判定した時には信頼指数 j＝0のフラグを付加し，又，単一誤りを訂正した時には信頼指数 j＝1のフラグを付加する。さらに2重の誤りを検出した時は j＝2のフラグを付加するものとする。一方，C_2 復

号器ではC_1復号で得られたイレージャ情報を用いてChase復号法[6]（アルゴリズムⅢ[6]，単一誤り訂正）を適用する。

(a) Chase復号器

以下においてはSEC−DED符号を対象としてアルゴリズムⅢ[6]を用いた2ステップ復号のChase復号器のパフォーマンスを検討する。

(b) 数値計算

アナログ重みを計算する際必要となる信頼指数フラグの付加された誤りビット（1^jで表示）および正しいビット（0^jで表示）の生起確率は表5.1のようになる。アナログ重み計算は従来のChase復号法におけるアナログ重み計算法とは異なり生起確率に対応づけて計算する[27]。

誤り検出確率P_{DT}の主要項は2重誤り（$j=0$の誤り）生起確率によって与えられ，

表５．１　信頼指数フラグ付きの誤りビットおよび正しいビットの生起確率

$*^j$（jは信頼指数）	生　起　確　率
1^2の生起確率	$P_2 \cong \frac{2}{n}\binom{n}{2}P_b^2(1-P_b)^{n-2}$ $\cong (2^m-1)P_b^2$
1^1　〃	$P_1 \cong \frac{4}{n}A_4\binom{4}{3}P_b^3(1-P_b)^{n-3}$ $\cong \frac{2}{3}(2^m-1)(2^m-2)P_b^3$
1^0　〃	$P_0 \cong \frac{4}{n}A_4P_b^4(1-P_b)^{n-4}$ $\cong \frac{1}{6}(2^m-1)(2^m-2)P_b^4$
0^2　〃	$Q_2 \cong \frac{n-2}{n}\binom{n}{2}P_b^2(1-P_b)^{n-2}$ $\cong (2^m-2)(2^m-1)P_b^2$
0^1　〃	$Q_1 \cong \binom{n}{1}P_b(1-P_b)^{n-1}$ $\cong 2^mP_b$
0^0　〃	$Q_0 \cong 1-\frac{4}{n}A_4P_b^4(1-P_b)^{n-4}$ $\cong 1$

$$P_{DT} \cong \binom{n}{2} P_0^2 Q_0^{2^m-2} \cong \frac{1}{72} \cdot 2^m \cdot (2^m-1)^3 (2^m-2)^2 \cdot P_b^8 \quad \cdots (5.13)$$

となる。付録Ｋの手法で誤りパターンを分類するとP_b^8の項が主要な生起確率を与える誤りパターンであることがわかる。従って復号誤り確率P_{DE}は付録Ｋの付表K.３の表記に従うと，e（1^1，1^2，0^1，0^2），e（1^2，1^2，1^2，0^2），e（1^0，1^2，1^2），e（1^0，1^2，0^2），e（1^2，1^2，1^1，0^1）e（1^2，1^2，0^2，0^2），

e（1^2，1^2，1^2，1^2）の各パターンの生起確率の総和として次式となる。

$$
\begin{aligned}
P_{DE} \cong \frac{4}{n} \cdot \Bigg[& \left\{ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} P_1 P_2 Q_1 Q_2 Q_0^{n-4} \right\} \\
& + \frac{1}{12} \{ n(n-1)(n-2)(n-3) P_2^3 Q_2 Q_0^{n-4} \} \\
& + \frac{1}{2} \{ n(n-1)(n-2) P_0 P_2^2 Q_0^{n-3} \} \\
& + \frac{1}{2} \{ n(n-1)(n-2) P_0 P_2 Q_2 Q_0^{n-3} \} \\
& + \frac{1}{4} \{ n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot P_1 P_2^2 Q_1 Q_0^{n-4} \} \\
& + \frac{1}{16} \{ n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot P_2^2 Q_2^2 Q_0^{n-4} \} \\
& + \frac{1}{24} \{ n(n-1)(n-2) \cdot P_2^4 \cdot Q_0^{n-4} \} \\
\cong \frac{1}{12} & (2^m-1)^5 (2^m-2) \{ 11 \cdot (2^m)^3 - 57 \cdot (2^m)^2 \\
& + 80 \cdot 2^m - 18 \} \Bigg] P_b^8 \qquad \cdots (5.14)
\end{aligned}
$$

以上の計算結果を図5.8，図5.9，図5.10および図5.11に示す。

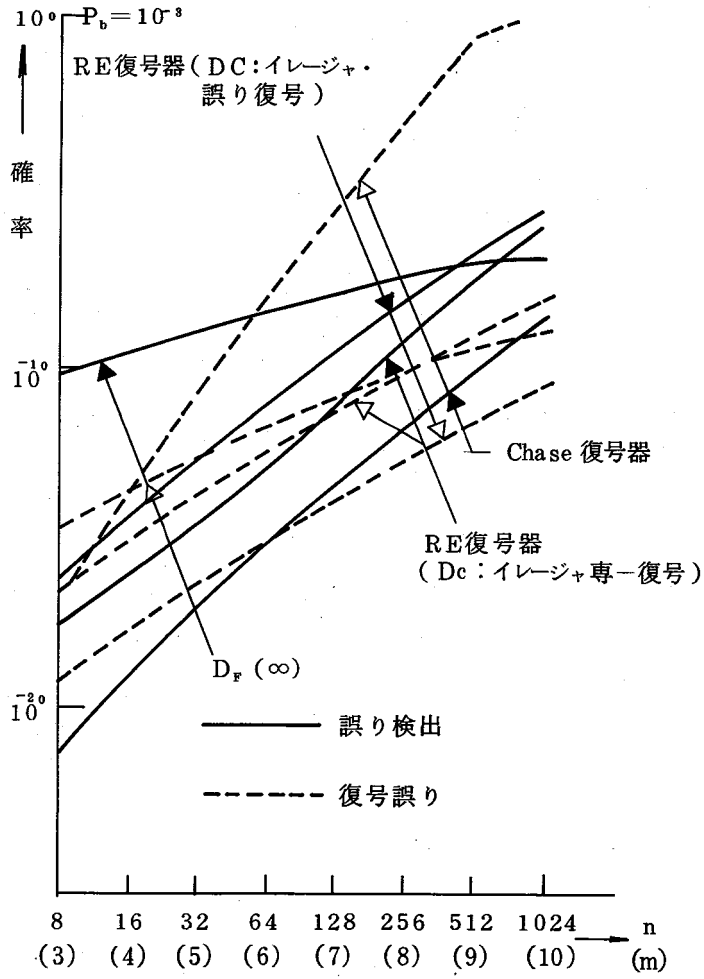


図５．８　符号長ｎに対するパフォーマンスの変化
（通信路誤り率 $P_b = 10^{-3}$）

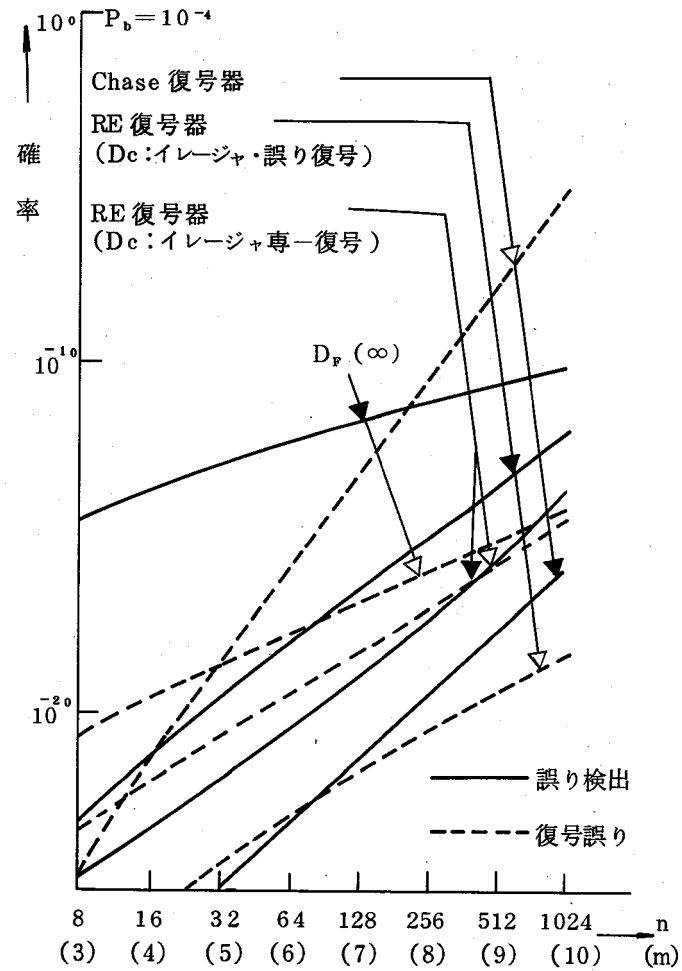


図５．９　符号長ｎに対するパフォーマンスの変化
（通信路誤り率 $P_b = 10^{-4}$）

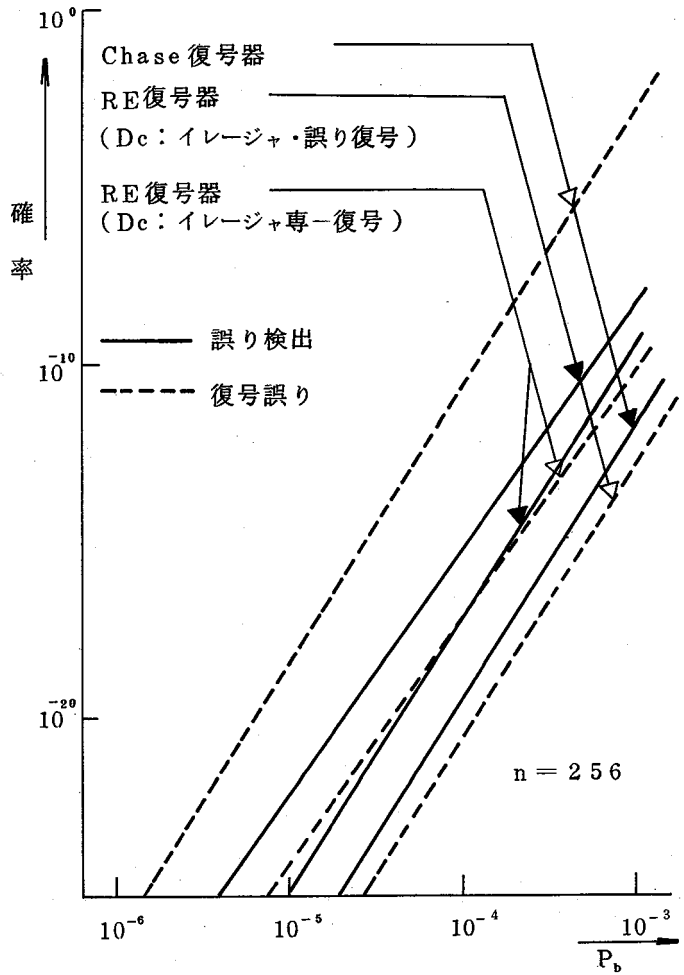


図５．１０　通信路誤り率P_bに対する
パフォーマンス変化
（符号長n＝256）

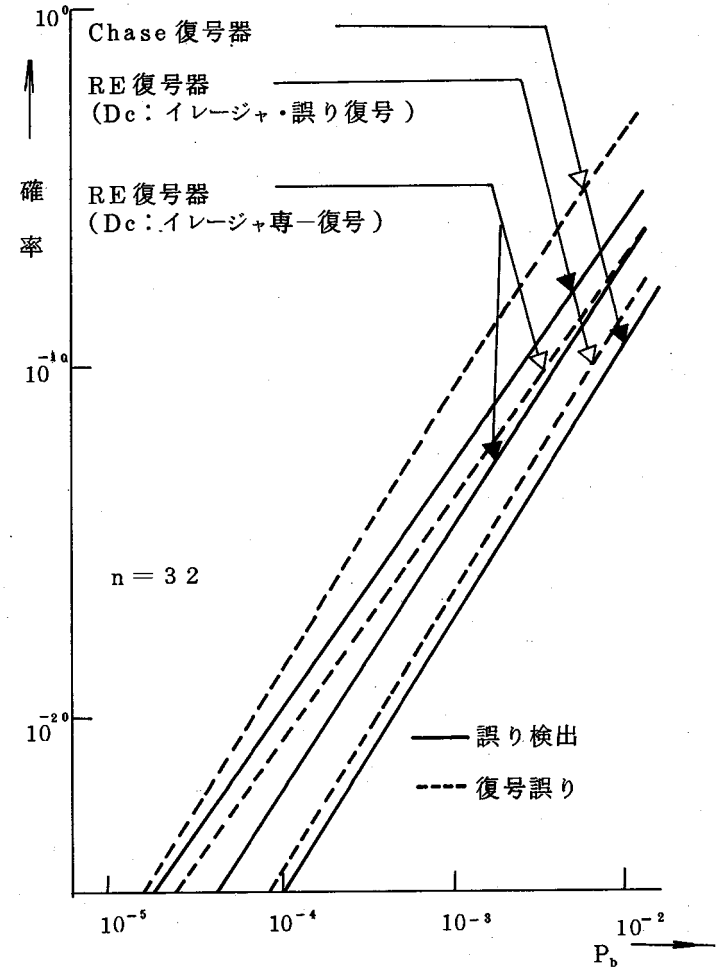


図５．１１　通信路誤り率P_bに対する
パフォーマンスの変化
（符号長n＝32）

5．2．4 考　察

(1) ＲＥ復号法のパフォーマンス

図5.8および図5.9より明らかとなることを要約しよう。

(i) $D_F(\infty)$ 復号から D_C 復号した場合の誤り検出確率に関する改善効果が著しく，ＲＥ復号法の効果が大であることが分かる。

一方，復号誤りに関しては，ＲＥ推定器により誤った訂正が検出されるため，イレージャ専一復号を D_C 復号に用いても復号誤りの生起が低く抑えられ，その改善が顕著である。

(ii) ＲＥ復号器を用いると符号長 n_0（$=n^2$）の増大に従いパフォーマンスは相対的に劣化の傾向にあるものの，その傾向はChase復号法に比べゆるやかである。

(iii) D_C復号にイレージャ・誤り復号を用いたＲＥ復号の場合が他の２者（D_C復号にイレージャ専一復号を用いたＲＥ復号，および$D_F(\infty)$と比べて誤り検出確率，および復号誤り確率の適切な配分という点で総合的に優れている。

(2) Chase復号のパフォーマンス

図5.8，図5.9，図5.10および図5.11より明らかとなることを要約し，考察を加える。

(i) Chase復号は一度に多数の誤りを訂正するために正しい復号確率が大きくなる反面，復号誤り確率も又，大きくなり，結果として誤り検出確率（即ち訂正不能確率）が非常に小さくなる。

(ii) 通信路誤り率 $P_b=10^{-3}$ の時はほぼ $n=64$ で，又，$P_b=10^{-4}$ では $n=256$ で $D_F(\infty)$ 復号とChase復号のパフォーマンスが逆転する。即ち符号長 n_0 の増大とともにChase復号器は不利となる。

(3) ＲＥ復号法とChase復号法との比較

(i) 通信路誤り率 P_b が一定の場合：

図5.8および図5.9より次のことが明らかになる。Chase復号は符号長n_0(＝n^2)が比較的小さい範囲で良好であるがn_0の増大に伴い急激に劣化し，誤り率の高い通信路では用いることが困難となる。即ち符号長n_0が大である符号には必ずしも適していない。一方，RE復号では符号長の増大とともに誤りの分散効果が大となりn_0がある程度大きくなってもパフォーマンスはさほど劣化しない。$P_b=10^{-3}$の場合nが256以下ならばD_C復号にイレージャ・誤り復号，あるいはイレージャ専一復号の何れを用いても誤り検出確率，復号誤り確率は共に10^{-10}以下を満足している。

(ii) 符号長n_0が一定の場合：

図5.10および図5.11より通信路誤り率が劣化するに従いChase復号の方がパフォーマンスの劣化の程度が大であるが，この差は符号長n_0を変化させた時ほど著しくはない。

5.3 誤り監視計数復号

5.3.1 原　理

本節においてはRE復号法に誤り監視計数器を導入して各C_1復号，C_2復号で推定した誤りの総数を計数器で計数する。[33] このようにすることによって

(1) C_1復号，C_2復号，各々1回づつでも訂正すべき誤りであったか誤り状態の推定が可能である。即ちバースト誤りが生起したかどうかの検出が可能となる。

(2) $D_F(\infty)$復号において即ちフィルタリング復号完了状態でC_1計数器とC_2計数器の内容が一致しない場合は復号誤りが生起していることが判定できる。

(3) $D_F(\infty)$復号において，計数器の内容が一致しない時は計数器の内容の少ないほうの方向の復号により多くの復号誤りパターンが含まれているこ

とが判定できる。

ことなどを明らかにする。

5．3．2　復号器の構成

全体のブロック図を図5.12に示す。符号C_1，符号C_2を各々（n_1，k_1，d_1），（n_2，k_2，d_2）線形符号とする。送信側では情報記号はまずC_2符号化され，次にC_1符号化され通信路に送出される。

〔Ⅰ〕　フィルタリング復号（D_F（i）復号）

D_F（i）復号モードでは比較的単純な"誤り専一復号器"を繰り返し用いて残留する誤りパターンをいわば積極的に浮き上がらせる。

図5.13に符号C_1および符号C_2を符号長n，最小距離4の符号としたときの受信語の例を示す。

ステップ1のレジスターで○印の数値は誤訂正が生起していることを示している。D_F(1)の計数器は11個の誤りが検出されたことを示しており，D_F(2)の計数器は12個の誤りが検出されたことを示している。以下同様の復号が繰り返され誤りの大部分が訂正される。図5.13の中でD_F(1)のC_1計数器，D_F(2)のC_2計数器，…，は各受信語ごとのシンドロームにより推定された誤りの個数を合計し，総数をRE推定器に転送する。

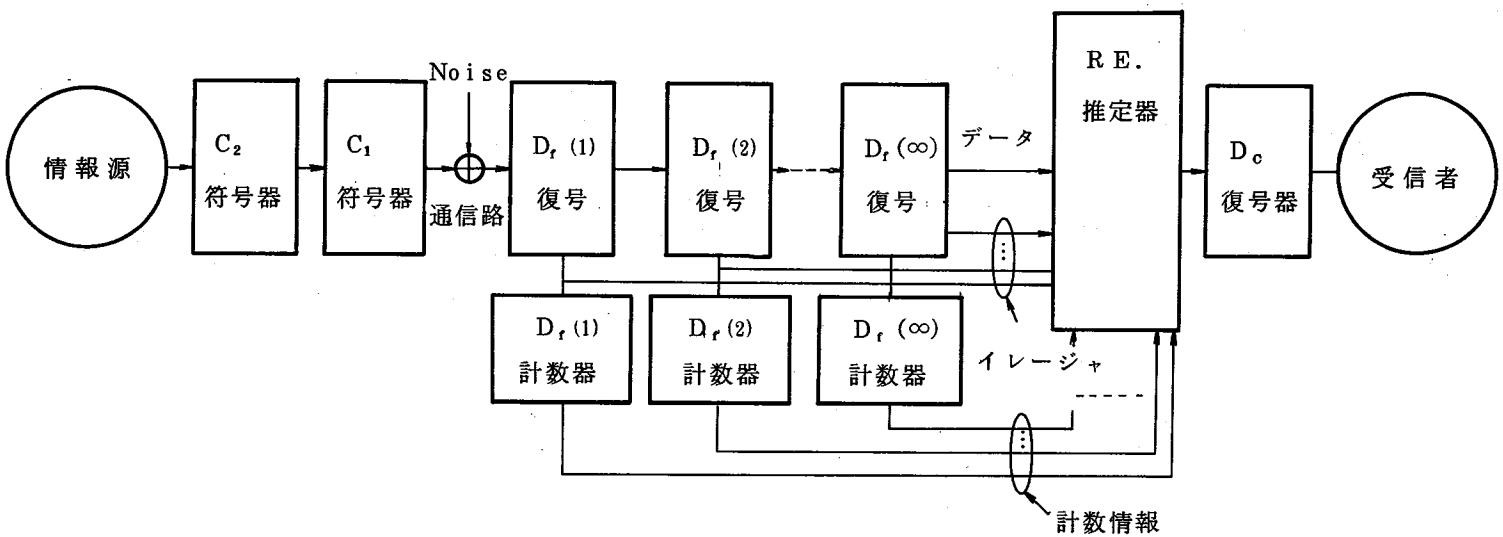


図5．12　計数型RE復号システム

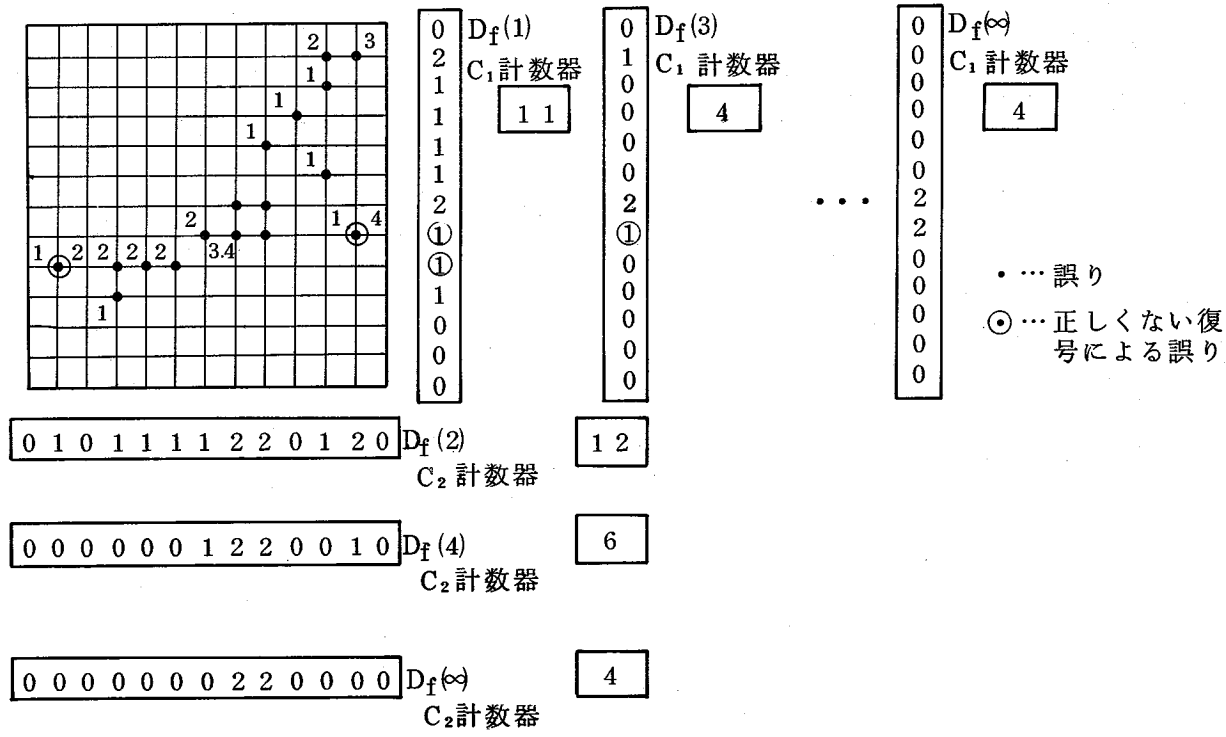


図5．13　計数型RE復号原理図

図5.13でステップ1，2，3，4，…，と進むに従って計数器の内容が11，12，4，6，4，4，…と漸次変化していくのが理解できよう。

〔Ⅱ〕 残留イレージャ推定（RE推定）

各ステップの復号時の情報をRE推定器に入力し，格子状に残留する誤りパターンを推定する。推定の方法としてはフィルタリング復号の際に誤り訂正又は検出のいずれの場合にもフラグを立て，そのフラグ情報によって推定する。

〔Ⅲ〕 最終段訂正復号（Dc 復号）

Dc 復号モードでは推定された格子状のパターンの各格子点に存在するシンボルをイレージャ専一復号又はイレージャ・誤り復号によって復号する。

5．3．3 最小ステップ誤り推定法

(a) 限界距離復号法との比較

RE 復号法はフィルタリング復号（繰り返し）によって種々の興味ある特徴がでてくるが現実には2～3ステップで復号を完了した方が復号時間の点でより好ましい場合も多い。そこでC_1復号，C_2復号一度づつの復号でも誤りを推定する方法を考えよう。C_1符号の最小距離をd_1，C_2符号の最小距離をd_2とした時，積符号全体の最小距離は明らかに$d_1 d_2$となる。この時，限界距離復号などによって保証された訂正能力は$\lfloor (d_1 d_2 - 1)/2 \rfloor$となる。しかしながら積符号に対する一般の復号では$C_1$復号で訂正しきれず誤訂正または見逃し誤りになった誤りをC_2復号で訂正することができる。従って通常この限界距離$\lfloor (d_1 d_2 - 1)/2 \rfloor$を越えて訂正する場合も有り得る。この場合正しい復号確率は増大するものの復号誤り確率も増大することが十分推定できる。この弊害は2つの計数器，C_1計数器，とC_2計数器をもちいて首尾よく軽減できる。

C_1復号で推定された誤りの総数が$N_1(c)$であったとする。通信路で生起した誤りの個数を$N_1(r)$とし，又，C_2復号で推定された誤りの総数を$N_2(c)$とする。C_2復号を行う直前の誤り総数を$N_2(r)$とする。付録Lより

$$N_1(c)+N_2(c)>N_1(r)>\max(N_1(c),N_2(c)) \quad \cdots(5.15)$$

の関係式が得られる。$N_1(c)$，$N_2(c)$は計測可能であるから首尾よくランダム誤り個数の推定が可能である。

一方，通信路がランダム誤りとバースト誤りとの混在するいわゆる複合誤り通信路である場合，推定された$N_1(r)$の値が$\lfloor(d_1 d_2-1)/2\rfloor$を越えていると通信路にランダム誤りではなくバースト誤りが生起していることが考えられる。このことについては次節で詳述する。

(b) バースト誤りに対する考察

バースト誤りが図5.14のように生起している場合を考える。

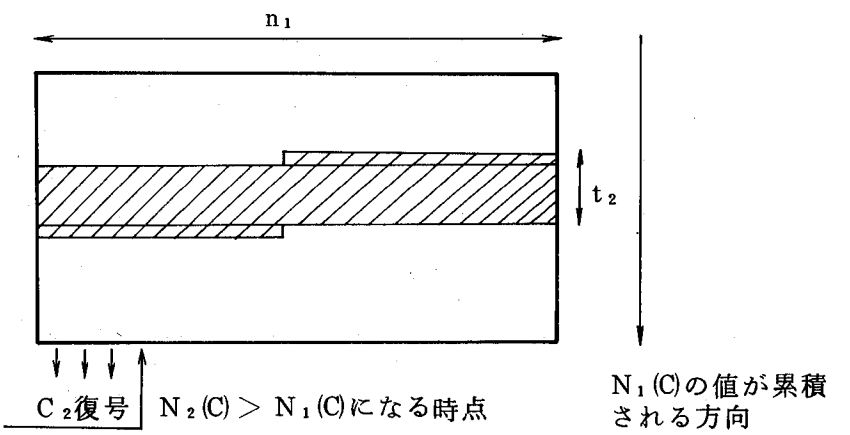


図5.14　バースト誤りに対する計数器の値

C_1復号において，t_1+1個以上の誤りが検出されるか又はt_1個以下の誤りとして誤訂正又は見逃し誤りが生起する。C_1計数器によってC_1復号の際の推定誤り個数が合計されるがその数値を$N_1(c)$とすると

$$N_1(c)\leqq(t_1+1)(t_2+1) \quad \cdots(5.16)$$

となる。C_2復号の際推定される誤り個数はバースト長を簡単のためちょうど$n_1 t_2$であるとすると，各受信語の復号の際t_2の値がn_1回加算さ

れる。即ちC_2復号の推定誤り個数を$N_2(c)$とすると

$$N_2(c) = t_2 n_1 \qquad \cdots (5.17)$$

となる。$N_1(c)$, $N_2(c)$の差は

$$N_2(c) - N_1(c) = t_2 \left[n_1 - (t_1 + 1)\left(1 + \frac{1}{t_2}\right) \right] \qquad \cdots (5.18)$$

となる。従ってこれらの数値$N_1(c)$および$N_2(c)$が

$$N_2(c) > N_1(c) \qquad \cdots (5.19)$$

となり，このようにして逆転した時点でC_2復号をランダム誤り訂正モードからバースト誤り訂正モードに切り替えC_2復号から再度やり直すことができる。このようにして，より通信路の誤り状態に適合した誤り制御が可能になる。なおランダム誤りをとバースト誤りを2様に訂正する方式としては文献[54]がある。

5．3．4　シミュレーション

ここではC_1復号，C_2復号共に（8，4，4）SEC－DED Hamming符号でシミュレーションを行った。まず擬似乱数によりランダム誤りを通信路誤り率$P_\varepsilon = 0.078 \sim 0.44$で発生させて実際に復号動作を実行させ，残留誤りパターンが浮き上がっていく様子を観察した。ここで計数器の値の変化を図5.15および表5.2に示す。

これらの表およびグラフより明らかなように殆どの場合，4～5ステップで残留誤りパターンが定常状態に入っている。$P_\varepsilon \leqq 0.14$以下の場合には推定誤りと実際の誤りが完全に一致している。又$P_\varepsilon \leqq 0.078$の場合には3ステップで誤りが訂正され消滅している。誤り率P_εが0.4近辺では推定誤り個数が振動しているようにみえるがこれは偶数ステップ，奇数ステップでそれぞれ収斂しているためである。この場合明らかに計数器の数値のより小なる方の復号により多くの復号誤りが含まれていることになる。

表５．２　SEC−DED符号をC_1，C_2に用いたシミュレーション結果

残留誤り個数と復号ステップ数

r：実際の誤り数，c：推定誤り数　→復号ステップ数

P_ε	r／c	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.078	r	5	2	0	0	0	0	0	0	0	0
	c	5	2	0	0	0	0	0	0	0	0
0.094	r	6	4	0	0	0	0	0	0	0	0
	c	6	4	0	0	0	0	0	0	0	0
0.14	r	9	6	6	6	6	6	6	6	6	6
	c	9	6	6	6	6	6	6	6	6	6
0.17	r	11	10	10	12	12	12	12	12	12	12
	c	7	6	6	4	4	4	4	4	4	4
0.30	r	19	16	14	10	12	12	12	12	12	12
	c	13	10	8	6	4	4	4	4	4	4
0.39	r	25	26	26	26	24	26	24	26	24	26
	c	11	12	8	12	6	10	6	12	6	12
0.44	r	28	30	30	30	32	30	32	32	32	32
	c	12	14	8	12	6	10	4	8	2	8

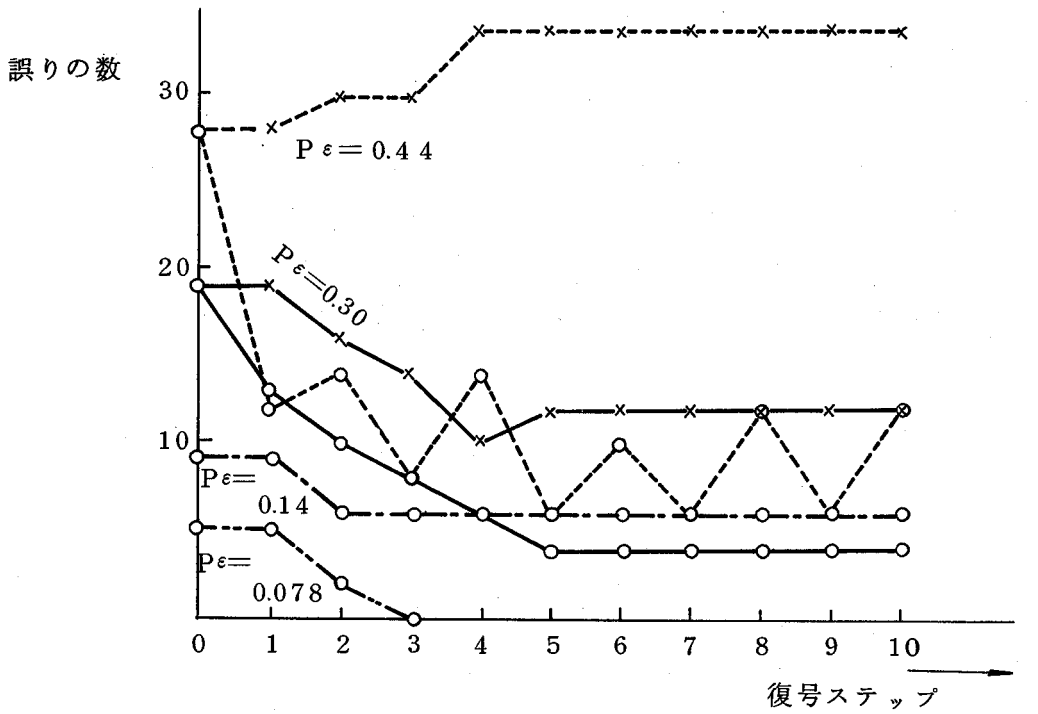


図５．１５　計数器の内容と実際の誤り数の変化

５．４　多次元Chase復号

１次元のＣｈａｓｅ復号法を多次元に一般化しその性質を明らかにする。[28][29] 多次元Chase復号器の場合テストパターンは多次元となり，行方向に計算したアナログ重みと列方向に計算したアナログ重みの一致／不一致を調べることによって復号誤りの生起を検出でき，更には正しい復号出力を選択できる。多次元のＣhese復号器にRE復号法（残留イレージャ推定復号）を適用した場合，確率的にではあるが積符号の本来持っている保証された誤り訂正能力を越えて訂正ができる可能性があることを示す。

５．４．１　信頼指数αの計算

２次元の符号に２ステップのＣhase復号を用いた報告がすでになされている。[18] これはテストパターンは行，又は列のままで一次元のテストパターンで

復号している。すなわちこの方法では前ステップの復号情報より信頼度情報を得てChase復号を可能にしている。

本論文では信頼度情報を前ステップの復号情報から得るのではなく通信路監視情報（channel measurement information[6]）を用いることにする。従って信頼指数はシンボルに1対1対応で与えられ，文献[18]の方法Ⅰ，Ⅱの如く列単位，又は行単位ではない。ところでα_2（i，j）を通信路監視情報から取った場合，次の利点が考えられる。

即ち，C_i（i＝1，2）方向に復号誤りが起った場合，ある2次元テストパターンに対し，C_1方向で復号した場合の復号結果とCi′（i≠i′，i′＝1，2）方向で復号した場合の復号結果が一致しない時はC_1又はC_1′方向に復号誤りが含まれていることが首尾よく判定される。すなわち，C_1（又はC_1′）方向に復号誤りが含まれており，復号誤りが含まれている部分のアナログ重みは誤訂正パターンのアナログ重みを計算していることになる。一方Ci′方向に正しい復号がなされるとC_1方向で復号誤りを起こした各シンボルはC_1′方向では分散されて正しく訂正されアナログ重みも正しく算出される。アナログ重みが大なる方の復号結果を出力することにより，両復号結果パターンのつきあわせを行わなくても復号誤りを検出でき，更には正しく復号できる。これは従来できなかった機能である。

〔例題5.1　d＝4のHamming（15，10，4）符号でC_1，C_2を構成した場合〕

従来のChase復号器ではテストパターンが完全に誤りのあるポジションに一致しても多数のテストパターン（零ベクトルパターンを含む）のなかに必ずアナログ重みがより小さい（つまり生起確率のより大きい）ものが存在し，これが選択され誤訂正されてしまう。図5.16のC_1受信語のw′の復号においては多くの場合，零ベクトルのテストパターンと信頼度の低い4個のポジションに1のあるテストパターンのアナログ重みが比較される。図5.16の場合，従

来のChase復号器ではC_2先行復号し，C_2の復号情報を利用してC_1をChase復号するとC_1復号で信頼指数2の誤りが4個存在するためアナログ重みはある正の実数値となる。一方零ベクトルのアナログ重みはほとんど0に近いから，これは常に零ベクトルの誤りパターンとして図5.16のw′行の部分に復号誤りが生起する。

しかるにこれを2次元のテストパターンで復号した場合にC_1方向の復号ではw′行の復号が正しく行われず，誤りが見逃される。そのアナログ重みは零ベクトルのテストパターンに対する数値およびパターンが記憶される。そしてC_1方向（行方向）のアナログ重みの合計が

$$w_u = w_1 + w_2 + \cdots + w' + \cdots + w_n \qquad \cdots (5.20)$$

で求められる。

一方，列方向の復号では各列2個づつ誤りが存在するが信頼度情報が正確であれば各列ごとに訂正されて首尾よく復号されることは明らかである。この場合の復号は列方向に正しく実行される。なおアナログ重みは

$$W_z = W_1 + W_2 + \cdots \quad + W_N \qquad \cdots (5.21)$$

で与えられる。この場合はw′行の4個の誤りは各列に誤ったシンボルの重みとして全て計上されているので，この列では行方向のアナログ重みより4個分大きくなっている。即ち

$$W_z > w_u \qquad \cdots (5.22)$$

が成り立つ。このようにして正しい出力を選ぶことができる。（付録M参照）。

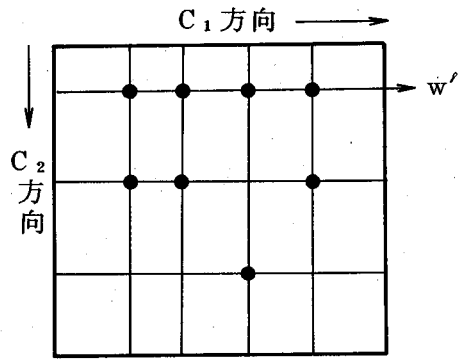


図5．16　復号誤りを含んだZ_{UT}パターン

5．4．2　多次元Chase 復号

積符号Cは符号C_1，符号C_2，…，符号C_uから構成されるとする。符号C_1，C_2…，C_uの符号長をそれぞれn_1，n_2，…，n_u最小距離を同様にd_1，d_2，…，d_uとする。以下にChase 復号器を多次元に拡張しよう。明らかにテストパターンは多次元パターンになる。復号器の出力$\hat{X}_u$は

$$\hat{X}_u = R'_u + Z'_u$$

$$= R_u + T_u + Z'_u \qquad \cdots(5.23)$$

となる。ここでR_uは受信ベクトル，Z'_uは復号器が訂正した誤りベクトル，R'_uは受信ベクトルとテストパターンT_uの合成受信ベクトルで各復号器への入力となる。受信語R_uに対する誤りパターンZ_{uT}は

$$Z_{uT} = \dot{T}_u + Z'_u \qquad \cdots(5.24)$$

次にZ_{uT}に対するアナログ重み$W_{u\alpha}(Z_{uT})$を計算する。これをすべてのテストパターンについて行う。アナログ重み最小のu次元誤りパターンZ_{uT}を真の誤りパターンとして選び訂正を実行する。u次元の符号の合成最小距離Dを

$$D = d_1\, d_2 \cdots d_u \qquad \cdots(5.25)$$

と定義する。

D－1以下の重みの誤りは訂正可能である。

5・4・3　信頼指数とアナログ重み

誤りパターンZ_{uT}のアナログ重み$W_{u\alpha}(Z_{uT})$は

$$W_{u\alpha}(Z_{uT})=\sum_{\ell=1}^{n_u}\cdots\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=1}^{n_1}\alpha_u(i,\ j,\ \cdots,\ \ell) \qquad \cdots(5.26)$$

で与えられる。アナログ重みの計算は一つのテストパターンにつきその次元数uに等しい回数の計算をする。アナログ重み最大のu次元誤りパターンZ_{uT}を真の誤りパターンとして復号する点が従来のChase復号法と異なる。

$$\alpha_u(i,\ j,\ \cdots,\ \ell)=p_{i,j,\cdots,\ell}^{\theta(i,j,\cdots,\ell)}\cdot q_{i,j,\cdots,\ell}^{1-\theta(i,j,\cdots,\ell)} \qquad \cdots(5.27)$$

$$\theta(i,\ j,\ \cdots,\ \ell)=\begin{cases}0\cdots\cdots(i,\ j,\ \cdots,\ \ell)\text{要素が誤っていない。}\\1\cdots\cdots(i,\ j,\ \cdots,\ \ell)\text{要素が誤っている。}\end{cases} \qquad \cdots(5.28)$$

$$\theta(i,\ j,\ \cdots,\ \ell)=0 \qquad \cdots(5.29)$$

の生起確率をQ(i, j, …, ℓ)とし,

$$\theta(i,\ j,\ \cdots,\ \ell)=1 \qquad \cdots(5.30)$$

の生起確率をP(i, j, …, ℓ)とする。

又，次のアナログ重みを定義する。

$$p_{i,j,\cdots,\ell}=-\log P(i,\ j,\ \cdots,\ \ell) \qquad \cdots(5.31)$$

$$q_{i,j,\cdots,\ell}=-\log Q(i,\ j,\ \cdots,\ \ell) \qquad \cdots(5.32)$$

アナログ重みはu回計算されるがその値が全て一致していない時は復号誤りが明らかに含まれている。この場合アナログ重みの最大の次元の誤りパターンZ_{uT}に対する出力を復号結果として出力する。

5・4・4　多次元Chase復号器の種類

(i)　1次元のテストパターンを用いる方法

従来知られている方法として，2次元符号にChaseのアルゴリズムを用いるものに前ステップの復号の際のシンドローム情報より信頼度情報を得て次ステップのChase復号に用いる方法がある。[18]この場合テストパターンは一次元のパターンを用いて全体の復号を行うので後述するような方法で復号誤りを検出することはできない。又，次元数が多くなると復号が複雑になる。

(ii)　多次元のテストパターンを用いて与えられた次元の復号を完了させ，その結果を次の次元の復号の入力とし，順次復号を実行する。この方法も次元数が多くなると復号が複雑になり，又，後述するような復号誤り検出の機能はない。

(iii)　一つのテストパターンについて各次元毎（2次元の場合は行方向，および列方向となる）に次元数に等しいu通りアナログ重みを計算し，受信ベクトルR_uに対する合成誤りZ_{uT}を求める。各次元毎のアナログ重みが完全に一致しない場合に復号誤りが生起していることを検出できる。

本報告では新しい方式としての(iii)について検討する。[27]

例

最小距離4のSEC－DED符号による3次元の積符号をChase復号することを考えよう。C_x符号を（n_x，k_x，4）SEC－DED符号，C_y符号を（n_y，k_y，4）SEC－DED符号，C_z符号を（n_z，k_z，4）SEC－DED符号とする。信頼指数はシンボルに1対1対応で与えられるとする。今，X軸方向とY軸方向に図5.17に示すように復号誤りが生起しているとする。

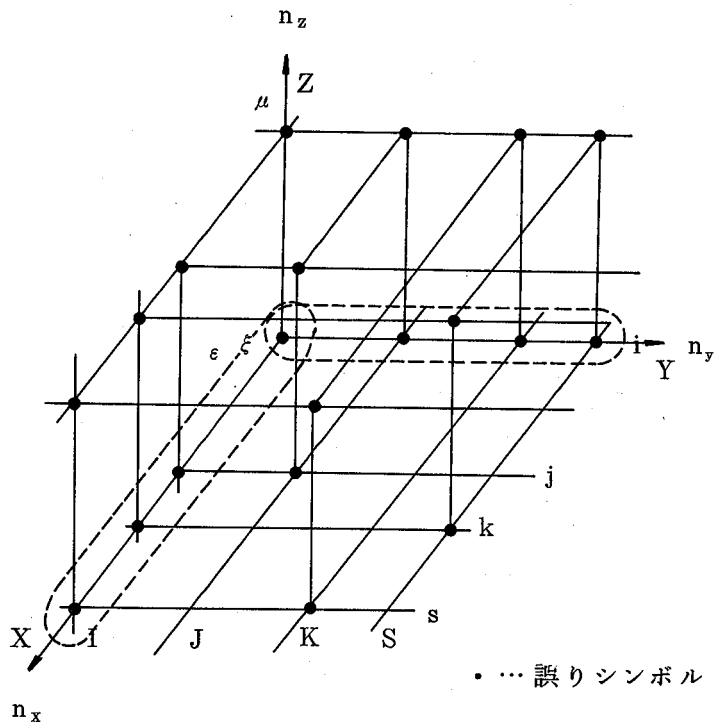


図5．17　3次元の誤りパターン
（X軸とY軸方向に復号誤りが生起している）

X軸方向で求めたアナログ重みは

$$w_x(I,\xi)=q_{I,1,\xi}+\cdots+q_{I,i,\xi}+\cdots+q_{I,j,\xi}+\cdots+q_{I,k,\xi}+\cdots+q_{I,s,\xi}+\cdots+q_{I,n_x,\xi}$$

$$w_x(J,\xi)=q_{J,1,\xi}+\cdots+p_{J,i,\xi}+\cdots+p_{J,j,\xi}+\cdots+q_{J,k,\xi}+\cdots+q_{J,s,\xi}+\cdots+q_{J,n_x,\xi}$$

$$w_x(K,\xi)=q_{k,1,\xi}+\cdots+p_{k,i,\xi}+\cdots+q_{k,j,\xi}+\cdots+q_{k,k,\xi}+\cdots+q_{k,s,\xi}+\cdots+q_{k,n_x,\xi}$$

$$w_x(S,\xi)=q_{S,1,\xi}+\cdots+p_{S,i,\xi}+\cdots+q_{S,j,\xi}+\cdots+p_{S,k,\xi}+\cdots+q_{S,s,\xi}+\cdots+q_{S,n_x,\xi}$$

$$w_x(I,\mu)=q_{I,1,\mu}+\cdots+p_{I,i,\mu}+\cdots+p_{I,j,\mu}+\cdots+p_{I,k,\mu}+\cdots$$
$$+p_{I,s,\mu}+\cdots+q_{I,n_x,\mu}$$
$$w_x(J,\mu)=q_{J,1,\mu}+\cdots+p_{J,i,\mu}+\cdots+p_{J,j,\mu}+\cdots+q_{J,k,\mu}+\cdots$$
$$+q_{J,s,\mu}+\cdots+q_{J,n_x,\mu}$$
$$w_x(K,\mu)=q_{K,1,\mu}+\cdots+p_{K,i,\mu}+\cdots+q_{K,j,\mu}+\cdots+q_{K,k,\mu}+\cdots$$
$$+p_{K,s,\mu}+\cdots+q_{K,n_x,\mu}$$
$$w_x(S,\mu)=q_{S,1,\mu}+\cdots+p_{S,i,\mu}+\cdots+q_{S,j,\mu}+\cdots+p_{S,k,\mu}+\cdots$$
$$+q_{S,s,\mu}+\cdots+q_{S,n_x,\mu}$$

Y軸方向で求めたアナログ重みは

$$w_y(i,\xi)=q_{1,i,\xi}+\cdots+q_{I,i,\xi}+\cdots+q_{J,i,\xi}+\cdots+q_{K,i,\xi}+\cdots$$
$$+q_{S,i,\xi}+\cdots+q_{n_y,i,\xi}$$
$$w_y(j,\xi)=q_{1,j,\xi}+\cdots+p_{I,j,\xi}+\cdots+p_{J,j,\xi}+\cdots+q_{K,j,\xi}+\cdots$$
$$+q_{S,j,\xi}+\cdots+q_{n_y,j,\xi}$$
$$w_y(k,\xi)=q_{1,k,\xi}+\cdots+p_{I,k,\xi}+\cdots+q_{J,k,\xi}+\cdots+q_{K,k,\xi}+\cdots$$
$$+p_{S,k,\xi}+\cdots+q_{n_y,k,\xi}$$
$$w_y(s,\xi)=q_{1,s,\xi}+\cdots+p_{I,s,\xi}+\cdots+q_{J,s,\xi}+\cdots+p_{K,s,\xi}+\cdots$$
$$+q_{S,s,\xi}+\cdots+q_{n_y,s,\xi}$$
$$w_y(i,\mu)=q_{1,i,\mu}+\cdots+p_{I,i,\mu}+\cdots+p_{J,i,\mu}+\cdots+p_{K,i,\mu}+\cdots$$
$$+p_{S,i,\mu}+\cdots q_{n_y,i,\mu}$$
$$w_y(j,\mu)=q_{1,j,\mu}+\cdots+p_{I,j,\mu}+\cdots+p_{J,j,\mu}+\cdots+q_{K,j,\mu}+\cdots$$
$$+q_{S,j,\mu}+\cdots+_{n_y,j,\mu}$$
$$w_y(k,\xi)=q_{1,k,\mu}+\cdots+p_{I,k,\mu}+\cdots+q_{J,k,\mu}+\cdots+q_{K,k,\mu}+\cdots$$
$$+p_{S,k,\mu}+\cdots+q_{n_y,k,\mu}$$
$$w_y(s,\mu)=q_{1,s,\mu}+\cdots+p_{I,s,\mu}+\cdots+q_{J,s,\mu}+\cdots+p_{k,s,\mu}+\cdots$$
$$+q_{S,k,\mu}+\cdots+q_{n_y,k,\mu}$$

となる。Z軸方向で求めたアナログ重みは

$$w_z(I,i)=q_{I,i,1}+\cdots+p_{I,i,\xi}+\cdots+p_{I,i,\mu}+\cdots+q_{I,i,n_z}$$

$$w_z(J,i)=q_{J,i,1}+\cdots+p_{J,i,\xi}+\cdots+p_{J,i,\mu}+\cdots+q_{J,i,n_z}$$

$$w_z(K,i)=q_{K,i,1}+\cdots+p_{K,i,\xi}+\cdots+p_{K,i,\mu}+\cdots+q_{K,i,n_z}$$

$$w_z(S,i)=q_{S,i,1}+\cdots+p_{S,i,\xi}+\cdots+p_{S,i,\mu}+\cdots+q_{S,i,n_z}$$

$$w_z(I,j)=q_{I,j,1}+\cdots+p_{I,j,\xi}+\cdots+p_{I,j,\mu}+\cdots+q_{I,j,n_z}$$

$$w_z(J,j)=q_{J,j,1}+\cdots+p_{J,j,\xi}+\cdots+p_{J,j,\mu}+\cdots+q_{J,j,n_z}$$

$$w_z(K,j)=q_{K,j,1}+\cdots+q_{K,j,\xi}+\cdots+q_{K,j,\mu}+\cdots+q_{K,j,n_z}$$

$$w_z(S,j)=q_{S,j,1}+\cdots+q_{S,j,\xi}+\cdots+q_{S,j,\mu}+\cdots+q_{S,j,n_z}$$

$$w_z(I,k)=q_{I,k,1}+\cdots+p_{I,k,\xi}+\cdots+p_{I,k,\mu}+\cdots+q_{I,k,n_z}$$

$$w_z(J,k)=q_{J,k,1}+\cdots+q_{J,k,\xi}+\cdots+q_{J,k,\mu}+\cdots+q_{J,k,n_z}$$

$$w_z(K,k)=q_{K,k,1}+\cdots+q_{K,k,\xi}+\cdots+q_{K,k,\mu}+\cdots+q_{K,k,n_z}$$

$$w_z(S,k)=q_{S,k,1}+\cdots+p_{S,k,\xi}+\cdots+p_{S,k,\mu}+\cdots+q_{S,k,n_z}$$

$$w_z(I,s)=q_{I,s,1}+\cdots+p_{I,s,\xi}+\cdots+p_{I,s,\mu}+\cdots+q_{I,s,n_z}$$

$$w_z(J,s)=q_{J,s,1}+\cdots+q_{J,s,\xi}+\cdots+q_{J,s,\mu}+\cdots+q_{J,s,n_z}$$

$$w_z(K,s)=q_{K,s,1}+\cdots+p_{K,s,\xi}+\cdots+p_{K,s,\mu}+\cdots+q_{K,s,n_z}$$

$$w_z(S,s)=q_{S,s,1}+\cdots+q_{S,s,\xi}+\cdots+q_{S,s,\mu}+\cdots+q_{S,s,n_z}$$

となる。

Z軸方向のアナログ重みの合計よりY軸方向のアナログ重みの差を計算する。

$$W_x=\sum_{\rho=1}^{n_z}\sum_{\eta=1}^{n_x} w_x(\eta,\rho) \qquad \cdots(5.33)$$

$$W_y=\sum_{\sigma=1}^{n_x}\sum_{\rho=1}^{n_z} w_y(\sigma,\rho) \qquad \cdots(5.34)$$

$$W_z=\sum_{\sigma=1}^{n_y}\sum_{\eta=1}^{n_x} w_z(\sigma,\eta) \qquad \cdots(5.35)$$

$$W_z - W_y = (p_{I,i,\xi} - q_{I,i,\xi}) + (p_{I,i,\xi} - q_{J,i,\xi}) + (p_{K,i,\xi} - q_{K,i,\xi}) + (p_{S,i,\xi} - q_{S,i,\xi}) > 0 \quad \cdots (5.36)$$

次にZ軸方向のアナログ重みの合計よりX軸方向のアナログ重みの差を計算する。$W_z - W_x$は

$$W_z - W_x = (p_{I,i,\xi} - q_{I,i,\xi}) + (p_{I,j,\xi} - q_{I,j,\xi}) + (p_{I,k,\xi} - q_{I,k,\xi}) + (p_{I,s,\xi} - q_{I,s,\xi}) > 0 \quad \cdots (5.37)$$

$$\therefore W_z > W_y \text{ 且 } W_z > W_x \quad \cdots (5.38)$$

となり，X軸，Y軸の両方向に復号誤りが含まれていることが検出される。アナログ重み最大であるW_zに対応する合成誤りパターンW_{zT}を選び訂正を行うことによって正しい出力を得ることができる。

5．4．5　RE復号を適用した多次元Chasc復号器

残留イレージャ推定復号はフィルタリング復号によって符号内に適当に分散されている多数の誤り（この誤りを以後分散誤りと称する）を予め訂正し，より信頼度の低い格子状の誤りパターンを浮き上らせイレージャとして最終的に訂正するところに特徴がある。

フィルタリング復号の終了した段階でChaseのアルゴリズムを用い信頼度情報を利用して，D－1個までの誤りを訂正することが可能である。従ってフィルタリング復号の過程で訂正された分散誤り（ここでフィルタリング復号でK_f個訂正されるとする）だけ多く訂正できることになる。すなわち訂正された誤り総数は$D + K_f - 1$となり明らかに$K_f > 0$の時，保証された訂正能力以上の誤りが訂正できる。

一方，u次元テストパターンとしてフィルタリング復号後の残留誤りパターンを選べば能力の高い復号器が設計できる。以下にこのことについて詳述する。

修正Chaseアルゴリズム

RE復号を用いて多次元のChaseアルゴリズムを修正する。

〔ステップ１〕$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_u$の受信語のなかでまず予めフィルタリング復号を行い，K_f個の分散誤りを訂正する。

〔ステップ２〕∞ステップ（フィルタリング復号終了時）で

$\ell_1 \times \ell_2 \times \cdots \times \ell_u$の格子状の誤りパターンが残留する。

〔ステップ３〕$\ell_1 \times \ell_2 \times \cdots \times \ell_u$の格子状の格子点のシンボルのなかで$\left\lfloor \frac{D}{2} \right\rfloor$なる重みのパターンすべてをテストパターンとする。

ステップ３よりパターンの数は

$$\binom{\ell_1 \ell_2 \times \cdots \times \ell_u}{\left\lfloor \frac{D}{2} \right\rfloor}$$

となる。上記アルゴリズムは文献(6)のなかではアルゴリズムＩに相当する。Chase は文献(6)のなかでテストパターン数を減少させるため更に２つのアルゴリズム（Ⅱ，Ⅲ）を提案しているが，そのいずれもＲＥ復号が適用可能である。[27]

表５．３にＲＥ復号を適用した多次元Chase 復号と適用しない多次元Chase 復号のテストパターン数の比較を示す。

総数$D-1+K_f$個の誤りが訂正可能である。復号時間はテストパターン数に正比例するから大巾な復号時間の改善になる。

表５．３　テストパターン数の比較（アルゴリズムＩ）

方　式	多次元 Chase Ⅰ	修正アルゴリズムⅠ
テスト パターン数	$\binom{n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_u}{\left\lfloor \frac{D}{2} \right\rfloor}$	$\binom{\ell_1 \times \ell_2 \times \cdots \times \ell_u}{\left\lfloor \frac{D}{2} \right\rfloor}$

5．5 結　言

多重符号の復号法について得られた結果をまとめる。

(1) 積符号の復号としてＲＥ復号法を提案し，Ｃhase 復号法と比較し，ＲＥ復号法の有意性を明らかにした。即ちＲＥ復号法はＣhase 復号法に比べ

(a) 比較的誤り率の高い通信路で効力を発揮すること

(b) 符号長の大なる符号で積符号を構成してもパフォーマンスの劣化が比較的少いこと

などを明らかにした。

(2) 復号回数を２～３回にしても充分誤り状態の推定ができる誤り監視計数復号法を提案し，そのバースト誤りに対する効果を明らかにした。

(3) 多次元に拡張したＣhase 復号法にＲＥ復号法を導入すると，演算回数が大巾に減少すること

などを明らかにした。

第6章　結　　論

多重符号の符号構成法，復号法，および評価方法に関する研究結果を述べた。本研究で得られた結論を以下に述べる。

(1)　逆方向通信路の誤りを考慮した時のARQの解析方法を確立した。

(2)　長い伝搬遅延のある通信路にGo－back－N　ARQを適用する場合，その通信路の誤り状態により送信側バッファメモリーの最適分割回数Nが存在することを明らかにした。

(3)　2次元配置をもつ一般化積符号の構成法を与えたこと，およびその復号法，評価方法を与え，PCM録音機への応用を示した。

(4)　積符号に重畳符号を応用して新しい符号を得る構成法を2種提案した。新しい構成法は直交化交錯法を併用することにより更に特性が改善されることが明らかになった。

(5)　新しい構成法のうち方法Ⅱで構成した符号は同一フォーマットの特定部分を異なった信頼度で情報を伝送することが可能であることが明らかになった。

(6)　畳み込み符号に上記符号構成法を適用した場合，より自由度に富んだ畳み込み符号の構成法を提供し設計の自由度が大巾に増大する可能性があることを示した。

(7)　多重符号の復号法としてRE復号法を提案し，従来方法と比較した。その結果RE復号法が特に誤り率不良の通信路で能力を発揮することを明らかにした。

(8)　多次元に拡張したChase復号器にRE復号法を適用しその効果を明らかにした。

これらの研究成果は序論において述べた多重符号の符号構成法，復号法および評価方法に関する研究課題に対して，新しく貢献していると思われる。

今後に残された研究課題として次のような問題が残されていると思われる。

(1) 誤り訂正符号，誤り検出符号の統一的な評価方法の研究，例えばq元で確立されたＲＳ符号の重み分布をＢＳＣ（２元対称通信路）に適用できるよう２元の重み分布で求めること，又，訂正と検出を同時に行った時の２元の誤り率評価方法

(2) 一般化積符号に重畳符号を用いた時の評価，および新しい復号法の研究

(3) 重畳符号を応用した，既存のＢＣＨ符号，ＲＳ符号と比較してそれより優れたパラメータを持つ多重符号の研究

(4) 重畳符号を用いた畳み込み符号の符号構成法の研究

(5) ＲＥ復号法の多方面への応用，例えば残留誤りパターンの一方向性関数の特性に注目した暗号化システムの研究

(6) ガロア体プロセッサーによる上記各種のシステムの実用化研究

などがあげられる。今後，半導体素子の発展と，情報処理技術の高度化により，これらの符号化，復号化の実用化研究が進展し，本研究のささやかな成果が少しでも符号理論の研究およびその実用化に寄与することができれば筆者の望外の喜びとするものである。

謝　　辞

本研究の全過程を通じて，卓越した御指導と親身なる御鞭撻を賜った大阪大学工学部通信工学教室，滑川敏彦教授，笠原正雄助教授に心より御礼申し上げます。又，本研究を完成させる過程で種々の御指導，御鞭撻を載いた同大学工学部通信工学教室，手塚慶一教授，中西義郎教授，倉薗貞夫教授に対して心から深謝致します。

本研究の全過程を通じて，御指導，御鞭達頂いた，京都大学原子エネルギー研究所，服部嘉雄教授，京都大学工学部情報工学教室，矢島脩三教授，同電子工学教室吉田　進助教授にこころから感謝します。

また第4章に関して貴重な御指摘，御激励を賜ったCyclotomics社のBerlekamp博士，ベル電話研究所のSloane博士，南カルフォルニア大学のReed教授に感謝致します。

又，第5章に関して熱心な討論を載いたハワイ大学のLin教授に感謝致します。更に同じ研究者として御激励を賜ったIntelsatのWu博士，Comsat研究所のFang博士に感謝致します。

本研究の機会を与えて下さり，かつその遂行過程において御鞭撻，御激励下さった三菱電機株式会社情報電子研究所所長　中原昭次郎博士，同副所長藤原謙一氏，同情報処理開発部部長　曽我正和氏，同情報システム開発部長　山崎英蔵博士，ならびに制御製作所伝送システム部部長山内才胤氏に感謝致します。

本研究遂行過程において早稲田大学理工学部　平沢茂一教授，摂南大学　杉山康夫助教授ならびに三菱電機株式会社情報電子研究所藤野　忠博士，中島邦男氏，村上篤道氏，河原林成行氏（現在，堀場製作所），飯塚育生博士，山岸篤弘氏，吉田英夫氏，西島利尚氏，ならびにComsat研究所P.Chang博士には友人として世話になった。

特に平沢教授には種々の御指導を賜った。ここに記して感謝する次第であります。

又，大阪大学工学部通信工学科滑川研究室の関係各位，三菱電機株式会社応用機器研究所，電子商品研究所の各位に御礼申し上げます。

最後に本研究を遂行するにあたりタイプ，清書などを手伝ってくれた妻に感謝します。

文　　献

(1) 足立，曽根，宮崎，宮田，"サイクリックリダンダンシチェック（CRC）方式の誤り検出能力シミュレーション"，FUJITSU，21，no. 2，pp. 117～127（昭45）。

(2) Bacher, W., "Dasi3 protects data transmitted…", Siemens Review XXXV, no.9., p339-, 1968.

(3) Benice, R.J. and Frey, A.Jr., "An analysis of retransmission systems", IEEE Trans., COM-12, p135- Dec., 1964.

(4) Benice, R.J. and Frey, A.H.Jr., "Comparison of error control techniques", IEEE Trans., COM-12, p146-, Dec., 1964.

(5) Berlekamp, E.R., Algebaic coding theory, New York; McGraw-Hill, 1968.

(6) Chase, D,, "A class of algorithms for decoding block codes with channel measurement information", IEEE Trans., Inform.Theory, IT-18, pp170-182(Jan., 1972).

(7) Crips, D.M., "The GH210 data communication systems", Electrical Communications, vol.43, no.4, p355-, 1968.

(8) Cuperman, V., "An upper bounds for the error probability on the Gilbert channel", IEEE Trans., COM-17, no.5, pp532-535, Oct., 1969.

(9) Doi, T., et al.; "Cross interleave for error correction of digital audio system", AES, 64th Conv., 1559, New York, (Nov., 1979).

(10) Elliot,E.O."Estimates of error rates for codes on burst-noise channels",B.S.T.J.,vol.142,p1977-, 1963.

(11) Elias,P."Error-free coding",IEEE Trans.,IT-14, pp29-37(1954).

(12) Forney,G.D.,Concatenated codes,Cambridge,MA,MIT (1966).

(13) Funk,G.,"Comparison of data reliability and efficiency in various standard protocols for information exchange in computer telecontrol networks",EUROCON 77,pp1.1.7,1-1.1.7.7.

(14) 藤原，中西，笠原，手塚，笠原，"バースト誤りを生ずる通信路とその信頼度の改善に関する考察，信学論(A)，vol.51-A,no,8,p.311-.(昭43-165(A-53))。

(15) Gilbert,E.N."Capacity of a burst noisy channel"B.S.T.J. vol.39,p1253-,Sept.,1960.

(16) Hamming,R.W."Error detecting and error correcting codes",B.S.T.J.,vol.29,pp147-160,Apr.,1950.

(17) Horstein,M.,"Efficient communication through burst-error channels by means of error detection",IEEE Trans.,COM-14,p117-,1966.

(18) 今井，長坂，"2重符号化方式の復号法について"，信学技報，CS81-167(1982-02)。

(19) 平沢，井上，杉山，藤原，"巡回符号による誤り制御方式の評価(その1)"，信学技報，CS71-91(1971-12)。

(20) 井上，平沢，杉山，山内，"巡回符号による誤り制御方式の評価(その2)"，

信学技法，CS71−95(1971−12)。

(21) 井上，平沢，永田，"バースト雑音の起こる通信路におけるGo−back−N誤り制御方式の一検討"，信学技報，CS72−25(1972−06)。

(22) 井上，平沢，藤原，大野，"バースト雑音の起こる通信路におけるgo−back−N誤り制御方式の一検討"，信学論(A)，(技術談話室) vol.57−A no.1，pp61−62(昭和49−01)。

(23) 井上，杉山，大西，"PCM録音機用誤り訂正符号の一検討"，信学会，昭和53年度電子通信学会総合全国大会S13−13(1973−03)。

(24) 井上，杉山，田中，佐藤，"固定ヘッド方式PCM録音器における誤り制御方式の評価"，信学技報，EA79−36.(1079−09)。

(25) 井上，笠原，河原林，滑川，"残留イレージャの推定による2次元符号の復号"，情報理論とその応用研究会，第5回シンポジウム資料 pp96−102，(1982−10)

(26) 井上，笠原，滑川，"残留イレージャの推定による2次元符号の復号"，信学技報，IT82−13，1983.

(27) 井上，笠原，滑川，"2次元符号の復号法に関する一考察"，信学技報，IT83−27，1983。

(28) 井上，笠原，滑川，"多次元Chase復号法における一考察"，信学技報，CS83−138(1983)。

(29) 井上，笠原，滑川，"多次元Chase復号法に関する一考察(2)"，信学技報，IT83−156，pp39−43.(1984−01)。

(30) 井上，大西，笠原，滑川"残留イレージャ推定復号における誤り検出確率の一計算法"，昭和58年度電子通信学会総合全国大会，no.1316。

(31) 井上，笠原，滑川，"2次元符号の復号法に関する一考察"，情報理論とその応用研究会，第6回シンポジウム資料，pp292−297(1983−11)。

(32) 井上，石田，石田，遠藤，'誤り検出符号に関する一考察'，昭和59年度電子通信学会総合全国大会，S12−7，pp245−246。

(33) 井上，笠原，滑川，'誤り監視計数器を用いた2次元符号の復号'，情報理論とその応用研究会，第7回シンポジウム資料，pp90−95，昭和59年11月5日。

(34) 井上，笠原，滑川，'2次元符号の復号法に関する一考察'，信学論(A)，168−A，9．，pp903−911（昭和60−09）。

(35) 井上，笠原，滑川，'多次元重畳符号に関する一考察(1)'，信学技報，IT85−32，pp．1−6（1985−09）。

(36) 井上，笠原，滑川，'重畳符号化を用いた畳み込み符号の一構成法'，情報理論とその応用研究会，第8回シンポジウム資料，pp126−129，昭和60年12月5日。

(37) Inoue，T.，Sugiyama，Y.，Ohnishi，K.，Kanai，T. and Tanaka，K.，'A new class of burst−error−correcting codes and its application to PCM tape recording systems'，IEEE NTC '78 Conf.，session. 20.6.1−20.6.5，AL，U.S.A.

(38) Inoue，T.，Tanaka，K.，Sugiyama，Y.，Kunii，S，Nakahara，S and Satoh T.'Comparison of Performance between IPC code and RSC code when applied to PCM tape recording'，AES，64th Conv.，New York，1541（H−5），Nov.2− 5，1979.

(39) Inoue，T.，Kasahara，M. and Namekawa，T.，'New encoding and decoding methods for generalized product codes'，IEEE，ISIT'85 Brighton England，June23−28，1985.

(40) Justesen，J.，'A Class of constructive asymtotically good algebraic codes'，IEEE Trans Inform. Theory，vol. IT−18，pp.652−656，Sept.，1972.

(41) Kasahara, M., Sugiyama, Y., Hirasawa, S. and Namekawa, T., 'A new class of binary codes constructed on the basis of BCH codes', IEEE Trans., Inform. Theory(Corresp.), vol. IT-21, pp. 582-585, Sept., 1975.

(42) Kasahara, M., Sugiyama, Y., Hirasawa, S. and Namekawa, T., 'New classes of binary codes constructed on the basis of concatenated codes and product codes', IEEE Trans., Inform. Theory, vol. IT-22, no. 4, pp. 462- , 1976.

(43) MacWilliams, F. J. and Sloane, N. J. A., The Theory of error-correcting codes, North Holland(1977).

(44) Massey, J. L. 'Step-by-step decoding of the Bose-Chaudhuri-Hocquenghem codes', IEEE Trans., Inform. Theory, vol. IT-11, pp. 580-585, Oct., 1965.

(45) Massey, J. L. 'Shift-register synthesis and BCH decoding', IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-15, pp. 122-127, Jan. 1969.

(46) Peterson. W. W., Error correcting codes, M. I. T. Press, Cambridge, Mass., 1961.

(47) Peterson, W. W. and Weldon E. J. Jr., Error Correcting codes, 2nd Ed., M. I. T. press, Campridge, Mass, 1972.

(48) Reed, I. S. 'A class of multi-error-correcting codes and the decoding scheme', IRE Trans., Inform. Theory, vol. IT-4, pp. 38-49, Sept., 1954.

(49) Reed, I. S. and Solomon G., 'Polynomial codes over certain finite fields', J. Soc. Ind. Appl. Math., vol. 8, pp. 300-304. June 1960.

(50) Reifen,B.,Schmidt,W. and Yudkin,H.'The design of an error-free data transmission system for telephone circuits',Trans.AIEE.Comm.and Electronics,80,pp.224-,July 1961.

(51) Shannon,C.E.'A mathematical theory of communication', B.S.T.J.,vol.27,pp.379-423,623-656,July,Oct.1948.

(52) Sloane,N.J.A.,Reddy,S.M. and Chen,C.L.'New binary codes',IEEE Trans. Inform.Theory,vol.IT-18,pp503-510,July 1972.

(53) Tanaka,K.,Furukawa,T.,Ohnishi,K.,Inoue,T. and Satoh,T.,'2-channel PCM tape recording for professional use',AES,61st Conv.,New York,Nov.3-6,1978.

(54) 常盤, 笠原, 滑川, '巡回符号のバースト誤り訂正能力', 信学論(A), J66-A 10,pp993-999(昭58-10)。

(55) Varshamov,R.R. 'Estimate of the number of signals in error correcting codes',Dokl. Akad. Nauk SSSR,vol.117, pp739-741,1957,

(56) Zyablov,V.V.,'An estimate of the constracting binary linear cascade codes.",Problems of Info,Trans,7(1), pp.3-10.,1971.

〔付録A〕：$P+p=1$ がランダム誤り状態を示すこと。

ランダム誤り通信路の性質より，明らかに時刻 r の如何に拘らず，状態 i の条件付で状態 k になる確率 $\boldsymbol{P}ik$ について $\boldsymbol{P}ik \equiv \boldsymbol{P}jk\ (i \neq j)$ となることから，Gilbert のモデルの遷移確率行列 P' の各行ベクトルが互いに等しく $\mathrm{rank}\,P' = 1$ より $P-1 \neq 0$ の自明でない解として $p+P \equiv 1$ が得られる。

〔付録B〕：R_1 と V

"0"：誤りなし　"1"：誤り，と表わすと $P_D(\ell, m, n)$ は

$$\underbrace{0\text{----}0\ \underbrace{1\text{----}1}_{m}\ 0\text{----}0}_{n}$$

誤り ℓ 個

の誤りパターンより明らかに，

$$P_D(\ell, m, n) = \sum_{i=0}^{n-m} P(0^i 1)\, P'_D(\ell-1,\ m-1 : B)\, P(0^{n-m-i} \mid 1)$$

$$= P'_D(\ell-1, m-1 : B)\, P_c(1, n-m+1) \qquad \cdots (B-1)$$

ここで $P'_D(\ell-1,\ m-1 : B) \triangleq r_{1-1,m-1}$ は誤りビットの条件付で続く m－1 ビット中に $\ell-1$ ビットの誤りがあり且つ m－1 ビット目が誤る確率であり，漸化的に式（B－2）で与えられる。

$$r_{\ell-1,m-1} = \sum_{i=\ell}^{m} r_{i-2,i-2} \cdot v(m-i) \qquad \cdots (B-2)$$

ここで v(i) は本文で述べた通り Gilbert により与えられている。

$r_{1,i-1} = v(i-2)$ より

$$R_v = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots\cdots & r_{1,n-1} \\ 0 & r_{22} & \cdots\cdots & r_{2,n-2} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & r_{n-1,n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_1 \\ \boldsymbol{R}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{R}_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \cdots(\mathrm{B}-3)$$

とすると式（Ｂ－３）より直ちに

$$\boldsymbol{R}_{i-1}\,V = \boldsymbol{R}_i \qquad \therefore \boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{R}_1\,V^{i-1} \quad (i \geq 2) \qquad \cdots(\mathrm{B}-4)$$

但し

$$V = \begin{bmatrix} 0, & v(0), & v(1) \cdots\cdots & v(n-3) \\ 0 & 0 & v(0) \cdots\cdots & v(n-4) \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & v(0) \\ 0 \cdots\cdots & & & 0 \end{bmatrix} \qquad \cdots(\mathrm{B}-5)$$

$\boldsymbol{R}_1 = (v(0),\ v(1),\ v(2) \cdots\cdots v(n-2))$

〔付録Ｃ〕：W', $\boldsymbol{R}_1'$, V'の導出

W', W', $\boldsymbol{R}_1'$, V'の導出

$W = W_1 - W_2 \qquad W_1 = (2, 3, 4, 5 \cdots n),\ W_2 = (2, 3, 0, 0, \cdots, 0, \cdots)$

$E = E_1 - E_2 \qquad E_1 = (1 \cdots\cdots 1),\ E_2 = (\underbrace{1, 1 \cdots\cdots 1, 1}_{r-1\text{コ}}, 0 \cdots 0)$

とおくと

$$WP_D E^T = W_1 P_D E_1^T - W_2 P_D E_1^T - WP_D E_2^T \qquad \cdots(\mathrm{C}-1)$$

ここで明らかに

$$P_D E_1^T = \begin{bmatrix} P_C(2, n) \\ \vdots \\ P_C(n, n) \end{bmatrix} \qquad \cdots(\mathrm{C}-2)$$

であり，P_Dが左下部０の三角行列，E_2がｒ＋２以上の項０であることから

$$WP_D E_2^T \equiv W' P_D' E_2'^T \qquad \cdots(\mathrm{C}-3)$$

但し，W'，P_D'，$E_2'^T$は式（２，１６）の通りであり

$R_i' = v(0), v(1), \cdots\cdots, v(r-1)$

$$V' = \begin{pmatrix} 0, & v(0), & v(1) \cdots\cdots & v(r-1) \\ & & & \vdots \\ 0 & 0 & v(0) & \\ & & & v(0) \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots(C-4)$$

〔付録D〕：ηの計算

エルゴート的な次数aの遷移確率行列pにおいて，その固有方程式は$\lambda_1 = 1$なる唯一つの根を持ち$|\lambda_1| < 1$（$i = 2, \cdots, a$）である。従って，状態S_iの定常状態に於ける確率$p(S_i)$は

$$Y(P - I) = 0 \qquad \cdots(D-1)$$

但し，$Y = \alpha(P(S_1), P(S_2), \cdots\cdots P(S_a))$　　α：任意の定数

$$\sum_i P(S_i) = 1$$

より，左固有ベクトルYに，スカラー倍$\alpha = 1$なる条件を入れると

$$(P^T - I + J)Y^T = (1)$$

但し，Jはすべての要素が1のa×aの行列

が得られ，$P(S_i)$はY^Tの連立方程式を解いて得られる。

尚，手計算を容易にするためには$\alpha = 1 / P(S_0)$とおいて漸化的に解けばよい。（以上，証明略）

〔付録E〕：式（2．23）の導出

ガーブルド冗長を付加したブロックが受信側で誤り検知されずに見逃す確率Pgrは誤りの発生する確率から検知できる確率（受信側で奇数誤り2ビット誤り，rビット以下の偶数誤りバーストとみなされる確率）を引き算した残りの2^{-r}倍，r＋1ビットバースについては2^{-r+1}倍で見逃すからr＋1ビットバーストのおこる確率の－2^{-r}倍したものをひいて求めればよい。

$$
\begin{aligned}
P_{A0} &= \{P(0^n)+P_c(1,n-1)-P_c(1,n)+P(0^{n-1}1)\} \\
&\quad + \{P_c(1,n)-P(0^{n-1}1)+P_c(2,n-1)-P_c(2,n)+P_c(1,n-1) \\
&\qquad\qquad -P_c(1,n)+P(0^{n-1}1)\} \\
&\quad + \{P_c(2,n)-P_c(1,n-1)+P_c(1,n)-P(0^{n-1}1)+\sum_{i=2}^{[\frac{n}{2}]} P_c(2i,n)\} \\
&= P(0^n)+P(1,n-1)+P_c(2,n-1)+\sum_{i=2}^{[\frac{n}{2}]} P_c(2i,n)
\end{aligned}
$$

$$
P_{B0} = I_1 \cdot R_V \cdot P_{X_1} \cdot E_1^T + I_2 \cdot R_V \cdot P_{X2} \cdot E_2^T
$$

$$
I_1 = (0\,1\,0 \cdots\cdots 0\,1) \qquad I_2 = \overbrace{(0\,0\,1\,0 \cdots\cdots\cdots 0)}^{r\text{個}}
$$

$$
E_1 = \underbrace{(1\,1\,1 \cdots\cdots -1)}_{r\text{個}} \qquad E_2 = \underbrace{(1\,1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1)}_{n-2\text{個}}
$$

Rvについては（B－3）と同じ

$$
P_{X1} = \begin{pmatrix}
0, & P(0^{n-3}10), & P(0^{n-4}10^2) \cdots\cdots & P(0^{n-17}10^{15}) \\
0 & 0 & P(0^{n-4}10\ ) \cdots\cdots & P(0^{n-17}10^{14}) \\
\vdots & & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & P(0^{n-17}10) \\
0 & & & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
P_{X2}E_2^T = \begin{pmatrix}
P_c(1,n-2)-P_c(1,n-1)+P(0^{n-2}1) \\
P_c(1,n-3)-P_c(1,n-3)+P(0^{n-3}1) \\
\vdots \\
-P_c(1,n-17)+P_c(1,n-16)-P(0^{n-17}1)
\end{pmatrix}
$$

より本文中（2.23）式が与えられる。

〔付録F〕式（2．24）の導出

伝送能率ηは図3.1の遷移確率行列より求められ，本文中（2.25）式の定

数は,

$$Z = A_2 \cdot A_6 (1+x) \quad u = P_B (1-Psr) A_1^3 T$$

$$x = \left\{ \frac{1}{P_A+P_D} - A_8 \right\} [A_8 + WP_B (1-Psr)^2 + W(1-Psr) A_5$$

$$+ W(1-Psr) A_7], \quad T = P_c^5 (1+x) + W$$

$$W = \left[\frac{A_9}{P_A+P_D} - \frac{P_g}{P_A+P_D} \left(\frac{1}{P_A+P_D} - A_8 \right) \right]$$

$$X \left[\left\{ 1 - A_0 - A_2 A_7 (1-Psr) - (P_D+P_g)(1-Psr) \frac{1-A_1^4}{1-A_1} \right\} \left(\frac{1}{P_A+P_D} - A_8 \right) \right.$$

$$\left. - \{ P_B (1-Psr)^2 + (1-Psr) A_5 + A_7 (1-Psr) \} A_9 \right]^{-1}$$

$$A_0 = A_1^4 + P_B (1-Psr) A_1^3$$

$$A_1 = P_c - P_c P_{sr} + P_{sr}$$

$$A_2 = P_B + P_c - P_c P_{sr} - P_B P_{sr} + P_{sr}$$

$$A_3 = P_B P_c^4 + (P_B + P_c) \{ (P_B + 2P_c) P_B P_c^2$$

$$+ (P_B + P_c)^3 (P_B + 2P_c) P_B \}$$

$$A_4 = P_c^5 P_B (1-P_{sr}) A_1 + A_2 \{ P_B (1-P_{sr}) P_c^5$$

$$+ (P_B + P_c)(1-P_{sr}) A_3 + P_{sr} A_3 \}$$

$$A_5 = P_B (1-P_{sr}) A_1 + P_B (1-P_{sr})(P_B + P_c - P_B P_{sr} - P_c P_{sr} + P_{sr})$$

$$A_6 = P_c^5 P_B (1-P_{sr}) A_1^2 + \{ (P_B + P_c)(1-P_{sr}) + P_{sr} \} A_4$$

$$A_7 = P_B (1-P_{sr}) A_1^2 + \{ (P_B + P_c)(1-P_{sr}) + P_{sr} \} A_5$$

$$A_8 = P_B \{ 1 + P_B + 2P_c + P_c^2 + (P_B + P_c)(2P_c + P_B) + P_c^3 + (P_B + P_c) P_c^2$$

$$+ (P_B + P_c)^2 (2P_c + P_B) \} + (1-P_{sr}) \{ A_3 + P_B (1-P_{sr}) P_c^5$$

$$+ (P_B + P_c)(1-P_{sr}) A_3 + P_{sr} A_3 + A_4 \} + A_6 (1-P_{sr})$$

$$A_9 = A_0 P_c^5 + A_2 A_6 + (P_D + P_g) \left\{ P_c \frac{1-P_c^4}{1-P_c} + (1-P_{sr}) P_c^5 \frac{1-A_1^4}{1-A_1} + 1 \right\} \frac{P_g}{P_A+P_D}$$

より

$$\eta=\frac{n-a-r}{n}\ \frac{1+F_0}{H+F_1}=\frac{y_0+y_{27}+y_{30}+y_{33}+\cdots\cdots+y_{59}}{y_0+y_1+\cdots\cdots+y_{26}+y_{27}\cdots\cdots+y_{62+ra}}$$

（$y_0\ y_1\cdots\cdots y_{62+ra}$ は遷移行列の左固有ベクトルの各 element）

〔付録G〕：符号長nとガロア体の標数bの関係

本文中で比較した符号の符号長が実際何ビットなのかを示すため符号長nとbの関係を表で示す。なお，BCH符号のデータは本文中では直交化交錯法と正規化するため全く同じ符号長を取りうると仮定して計算している。

	INT符号（Method I）BCH符号（2^b段交錯）	RS符号（2^b段交錯）	長い一つの符号（交錯なし）
b	$2^{2b}\times b$	$2^{2b-1}\times(2b-1)$	$2^{3b}\times b$
3	192	160	1536
4	1024	896	16384
5	5120	4608	163840
6	24576	22528	1572864
7	114688	106496	14680064
8	524288	491520	134217728
9	2.359×10^{6}	2.228×10^{6}	1.208×10^{9}
10	1.049×10^{7}	9.961×10^{6}	1.074×10^{10}
12	2.013×10^{8}	1.929×10^{8}	8.246×10^{11}
14	3.758×10^{9}	3.624×10^{9}	6.157×10^{13}
16	6.872×10^{10}	6.657×10^{10}	4.504×10^{15}
20	2.199×10^{13}	2.144×10^{13}	2.306×10^{19}
30	3.459×10^{19}	3.401×10^{19}	3.714×10^{28}
40	4.836×10^{25}	4.775×10^{25}	5.317×10^{37}
50	6.338×10^{31}	6.275×10^{31}	7.136×10^{46}
100	1.607×10^{62}	1.599×10^{62}	2.037×10^{92}

INT符号は交錯（インタリーブ）した方法Iの構成法による符号の意味である。

〔付録H〕：方法Ⅱにおける数値例

図4.12のようなSER（シンボル誤り率）＝10^{-4}の528バイトの情報を方法ⅡによってAの部分をSER＝10^{-10}以下，Bの部分を10^{-10}以下に誤り制御しよう。行符号CrはGF（2^8）上の（28，22，7）RS符号とし，重畳用符号を6符号語重畳化する。重畳用符号はGF（2^8）上の（24，25－D，D）RS符号とする。

最小距離Dの決定

分離用符号化による重畳用符号の訂正前のシンボル誤り率Psは次式で与えられる。

$$Ps = \sum_{i=1}^{28} \binom{28}{i} P\varepsilon^{i} \quad (1 - P\varepsilon)^{28-i}$$

$$\cong 28 \cdot P\varepsilon$$

t個（t＝⌊D／2⌋）の誤りを訂正すると仮定すると訂正不能確率P_Fは次式で与えられる。

$$P_F = \sum_{i=t+1}^{24} \binom{24}{i} P\varepsilon^{i} (1 - P\varepsilon)^{24-i}$$

$$\cong \binom{24}{t+1} P\varepsilon^{t+1}$$

$$\leqq 10^{-12}$$

上式より，t＝7を得る。従って，D＝15が得られる。Bの部分の訂正不能確率Pf_Bは次式で与えられる。

$$Pf_B \cong \binom{28}{4} P\varepsilon^{4}$$

$$= 2.05 \times 10^{-12}$$

Aの部分の訂正不能確率Pf_Aは次式で与えられる。

$$Pf_A \cong \binom{22}{4} P\varepsilon^{4}$$

$$= 7.32 \times 10^{-13}$$

〔付録Ⅰ〕：$D_F(\infty)$ 復号時の確率計算

(i) 復号誤り確率は以下に述べるように復号誤りを含む残留誤り生起確率の総和で与えられる。

∞ステップにおいて一般性を失うことなく C_1 先行復号を仮定できる。符号 C_1 から先に復号すると付図Ⅰ・1(a)，(b)に示す誤り格子パターンが確率主要項を与える。図(a)において復号が C_1 復号で終った場合は8シンボルの復号誤りが生起し C_1 復号で終った場合は4個の C_1 受信語が誤り検出される。従って $P_{DE}(\infty)$ は次式で与えられる。

$$P_{DE}(\infty) \cong \frac{8}{n^2}\binom{n}{2}A_4\binom{4}{3}(P_b^3)^2 + \frac{8}{n^2}\binom{n}{2}A_4\binom{4}{3}^2(P_b^3)^2$$

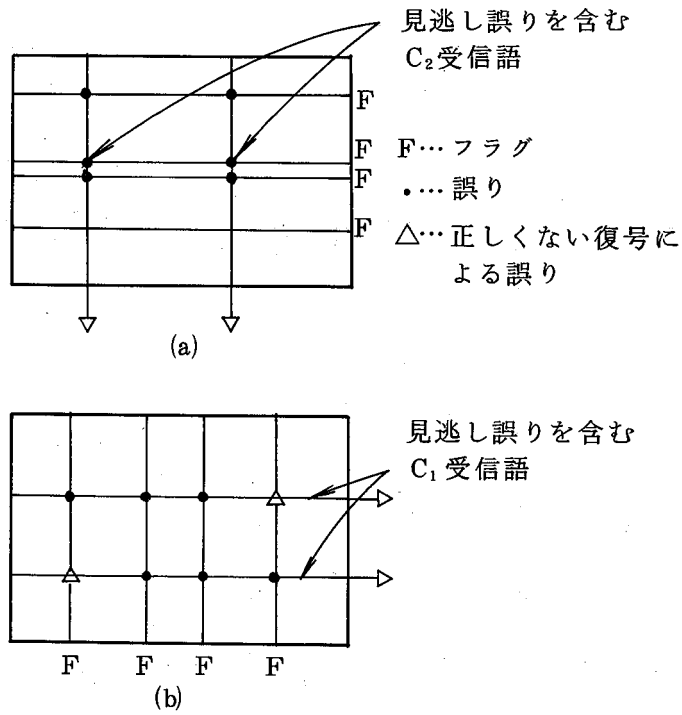
$$= (10/3)\cdot(2^m-1)^2(2^m-2)P_b^6 \qquad \cdots(\text{Ⅰ}-1)$$

なおレイージャ専一復号を D_c 復号に用いたRE復号においては図(a)および(b)の誤りは一方のイレージャフラグが4本立っているにもかかわらず，他方のイレージャフラグ数が0となるため，RE推定器によってフラグ数0になる以前のフラグをイレージャフラグとしてイレージャ・誤り訂正を実行する。

(ii) 誤り検出確率は残留誤りパターン生起確率から復号誤りを含む残留誤りパターン生起確率を引くことにより与えられるが，後者は前者に比し，十分に小さく無視できる。従って C_1 受信語，C_2 受信語共に2個ずつ誤りが存在する格子パターンが主要生起確率を与える。

$$P_{DT}(\infty) \cong \frac{4}{n^2}\binom{n}{2}^2 P_b^4(1-P_b)^{n^2-4} = (2^m-1)^2 P_b^4$$

$$\cdots(\text{Ⅰ}\cdot 2)$$



付図Ｉ・1　$D_F(\infty)$ 復号時の復号誤り主要項を与える誤りパターン

〔付録Ｊ〕：ｄ×ｄの配列から縦横２個づつ取り出す組合せの数

残留イレージャ推定復号のパフォーマンス計算を行うには最終段訂正復号器が訂正できなくなる通信路誤り率P_0の最低次数の誤りパターン数を求める必要がある。ここでは実用上必要と思われるｄ×ｄの配列から縦横２個づつ誤りを含むパターン数を計算する手法をのべ設計の指標を示す。

パフォーマンス評価：

残留イレージャ推定復号を適用した場合，訂正できなくなり，誤りが検出される確率Prは

$$Pr=\frac{d_1\times d_2}{n_1\times n_2}\binom{n_1}{d_1}\binom{n_2}{d_2}\rho_j P_0^{\max[(t_1+1)d_2,(t_2+1)d_1]} \quad \cdots(J\cdot 1)$$

で与えられる。[30] 但しn_1，n_2；d_1，d_2；t_1，t_2はそれぞれ２つの符号の符号長，最小距離，訂正能力である。フィルタリング復号に用いる復号器は残留誤りパタ

ーンを浮き上らせるのが目的であるから，訂正能力限度いっぱいの復号は必ずしも適当ではない。むしろ繰り返して復号するため復号時間からみると訂正する誤りの数は少い方が好ましい。訂正能力ｔがｔ＝０，１の場合の誤りパターン数を求めることは容易である。ｔ＝３以上も必要ではあるが最小距離ｄが１０以下の場合ではｔ＝２の場合だけでもかなりの設計の指標になる。

Ｐｏｓｉｔｉｏｎ指数の定義：

パターン数を計算するため一行づつ上よりカーソルを下方へずらしパターンを作成するものとし，各列方向のポジションでカーソルの下方に"１"が何個出現可能かによって付表１のようにポジション指数を定義する。一旦γになったポジションは考察よりはずしてよい。一行の列方向のポジションの数をｄとする。

記号の定義$\left(\left(\begin{matrix} d\times d \\ 2\times 2 \end{matrix}\right)\right)$：

ｄ×ｄの格子パターンより行，列共に２個づつ"１"が含まれるパターンの総数とする。

Ｓｄ，Ｂ，Ａ：全ポジション数ｄ，ポジション指数α，βとなるポジション数Ａ，Ｂの状態。

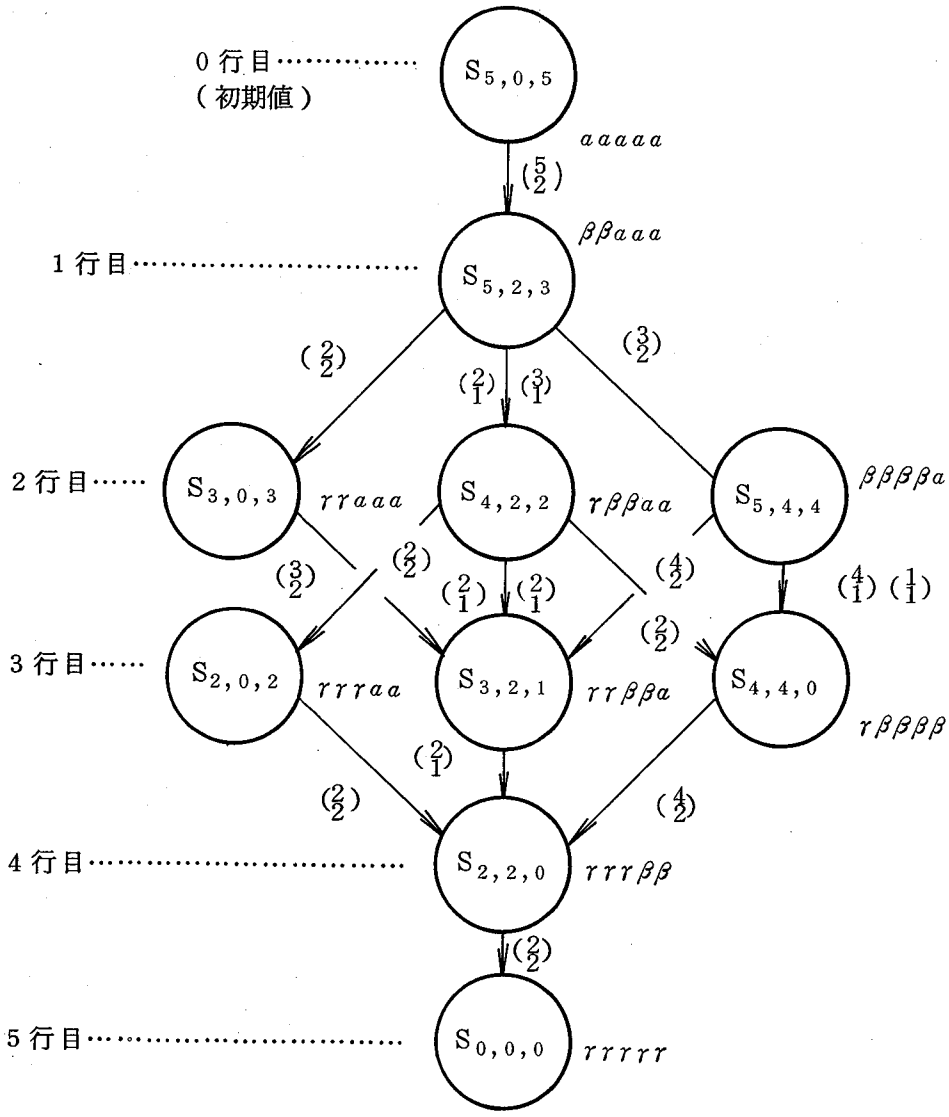
付表Ｊ・１　ポジション指数

ポジション指数	そのポジションより下方の行に出現可能は"１"の数
α	2
β	1
γ	0

Ｎ（Ｓｄ，Ｂ，Ａ）：

γを除く全Ｐｏｓｉｔｉｏｎ数ｄでβの数をＢ，αの数Ａの状態より遷移する全ての状態の数，なお$\left(\left(\begin{matrix} d\times d \\ 2\times 2 \end{matrix}\right)\right)=N(S_{d,0,d})$。

具体例を付図Ｊ・１に示す。



付図J・1　$\left(\binom{5\times5}{2\times2}\right)$を求めるための状態図

各状態間の遷移可能な組合せの数よりパターン数を計算できる。

以上をまとめて次の漸化式を得る。

漸化式

〔 1 〕　d偶数の場合

(i)　A≧2 B≧2の時

$$N(S_{d,B,A})=\binom{B}{2}N(S_{d-2,B-2,A})+\binom{B}{1}\binom{A}{1}N(S_{d-1,B,A-1})+\binom{d-B}{2}N(S_{d,B+2,A-2}) \quad \cdots(J-2)$$

(ii)　A＝0の時$N(S_{d,d,0})=\binom{d}{2}N(S_{d-2,d-2,0})$

$\cdots(J-3)$

(iii)　B＝0の時$N(S_{d,0,d})=\binom{d}{2}N(S_{d,2,d-2})$　$\cdots(J-4)$

〔 II 〕　d奇数の場合

(i)　A≧3の時式（J－2）に同じ

(ii)　A＝1，B≧4の時

$$N(S_{d,B,1})=\binom{B}{1}\binom{1}{1}N(S_{d-1,B,0})+\binom{B}{2}N(S_{d-2,B-2,1})$$

(iii)　A＝1，B＝2の時$N(S_{d,2,1})=\binom{2}{1}\binom{1}{1}N(S_{d-1,2,0})$

$\cdots(J-5)$

(iv)　A＝0の時式（J－2）と同じ

表2に示す計算結果が得られる。

表2　係数ρ_jの値

j	2	3	4	5	6	7	8
ρ_j	1	6	90	2040	67950	3.111×10^{6}	1.647×10^{8}

〔付録K〕：2ステップのChase復号器

受信系列Yに対して重みが$\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$以下のテストパターンTを発生して，新しい系列Y′を以下のように構成する。

$$Y' = Y \oplus T \qquad \cdots (K-1)$$

Y′を限界距離復号器（bounded distance decoder）によって復号しその時の誤りパターンZ′を求める。Z′の重みは$\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$以下である。

復号出力$\hat{X}$は

$$\hat{X} = Y' \oplus Z' = Y \oplus T \oplus Z' \qquad \cdots (K-2)$$

となり，Yに対する誤りパターンZ_Tは

$$Z_T = T \oplus Z' \qquad \cdots (K-3)$$

となる。次にZ_Tに対するアナログ重み$W_\alpha(Z_T)$を計算する。これをすべてのテストパターンについて実行する。アナログ重み最小の誤りパターンZ_Tを真の誤りパターンとして選び復号する。d－1個以下の誤りの場合正しく復号できる。Chaseはテストパターンを発生させ，硬判定の復号器を用いて，通信路の信頼度情報を利用することにより軟判定復号を行っている。Chaseは文献[6]の中でテストパターンの発生法として次の3種のアルゴリズムを提案している。

アルゴリズムⅠ：

$\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$なる重みのパターンすべてをテストパターンとする。よって2元（n，k，d）線形符号に対してはテストパターン数は$\binom{n}{\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor}$となる。

アルゴリズムⅡ：

最も信頼度の低いディジットからなる重み$\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$のパターンをテストパターンとする。テストパターンの個数は2元符号の場合$2^{\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor}$である。

アルゴリズムⅢ：

最も信頼度の低いi個の位置に1をもつパターンをテストパターンとする。

iは　i＝0，1，3，…，d−1（dが偶数の時）

　　i＝0，2，4，…，d−1（dが奇数の時）

となる。従ってテストパターンの数は$\frac{d}{\lfloor 2 \rfloor}$＋1個となる。以下，SEC−DED符号を用いた例でアルゴリズムⅢの2ステップ信号のChase 復号器で検討する。ここでは具体例としてC_1，C_2のパラメータを符号長n＝15，情報記号数k＝10，最小距離d＝4とする。（これを符号A_Iと呼ぶ）。アナログ重みを計算する際必要となる信頼指数フラグの付加された誤りビット（1^jで表示）および，正しいビット（j^0で表示の）の生起確率は付表K・2のようになる。（jは信頼指数）。アナログ重み計算は生起確率に対応づけて行う。

以上より各誤りパターンについてアルゴリズムⅠで復号した場合の復号結果が付表K・3のように求まる。

付表K・1　信頼指数jと実際の誤り個数

（C_1，C_2共に（15，10，4）SEC−DED Hamming信号）

信頼指数j	誤り個数n_e
0	0，4
1	1，3，5
2	2，4，……

付表K・2　信頼指数フラグ付きの誤りおよび正しいビットの生起確率（符号A_1，n＝15）

＊j 信頼指数	生　起　確　率	P_bの巾表現
1^2 の生起確率	$P_2 \cong \frac{2}{15}\binom{15}{2}P_b^2(1-P_b)^{13} \cong 14P_b^2$	2
1^1 の生起確率	$P_1 \cong \frac{4}{15}A_{H,4}\binom{4}{3}P_b^3\cdot(1-P_b)^{12} \cong 112P_b^3$	3
1^0 の生起確率	$P_0 \cong \frac{4}{15}A_{H,4}P_b^4(1-P_b)^{11} \cong 28P_b^4$	4
0^2 の生起確率	$Q_2 \cong \frac{13}{15}\binom{15}{2}P_b^2(1-P_b)^{13} \cong 91P_b^2$	2
0^1 の生起確率	$Q_1 \cong \binom{15}{1}P_b \cong 15P_b$	1
0^0 の生起確率	$Q_0 \cong 1-\frac{4}{15}A_{H,4}P_b^4(1-P_b)^{11} \cong 1$	0

付表K・3　符号A_1をChaseのアルゴリズムⅡで復号した結果

j 0級の個数→

総数	j 1級	j 2級	誤りパターン	P_bの0の巾	P_bの1の巾	P_bの2の巾	P_bの3の巾	P_bの4の巾
0	0	0		C	C	D	M/D	M/D
1	0	1	$e(0^2)$	C	C	M/D 10	M/D	M/D
			$e(1^2)$	C	C	M/D 10	M/D	M/D
	1	0	$e(0^1)$	C	C	M/D 9	M/D	M/D
			$e(1^1)$	C	C	M/D 16	M/D	M/D
2	0	2	$e(0^2 0^2)$	C	C	M/D	M/D	M/D
			$e(0^2 1^2)$	C	M/C 8	M/D	M/D	M/D
			$e(1^2 1^2)$	C	M/C 8	M/D	M/D	M/D
	1	1	$e(0^1 0^2)$	C	C	M/D	M/D	M/D
			$e(0^1 1^2)$	C	C	M/D	M/D	M/D
			$e(0^2 1^1)$	C	M/D 8	M/D	M/D	M/D
			$e(1^1 1_1)$	C	M/D 9	M/D	M/D	M/D
	2	0	$e(0^2 0^2)$	C	C	M/D	M/D	M/D
			$e(0^2 1^2)$	C	M/C 8	M/D	M/D	M/D
			$e(1^2 1^2)$	C	M/C 10	M/D	M/D	M/D
3	0	3	$e(0^2 0^2 0^2)$	C	M/C 10	M/D	M/D	M/D
			$e(0^2 0^2 1^2)$	C	M/C	M/D	M/D	M/D
			$e(0^2 1^2 1^2)$	C	M/C	M/D	M/D	M/D
			$e(1^2 1^2 1^2)$	C	M/C	M/D	M/D	M/D
	1	2	$e(0^1 0^2 0^2)$	C	M/C	M/D	M/D	M/D
			$e(0^1 0^2 1^2)$	C	M/C	M/D	M/D	M/D
			$e(0^2 0^2 1^1)$	C	M/C	M/D	M/D	M/D
			$e(0^1 1^2 1^2)$	C	M/C	M/D	M/D	M/D
			$e(0^2 1^1 1^2)$	C	M/C	M/D	M/D	M/D
			$e(1^1 1^2 1^2)$	C	M/C	M/D	M/D	M/D
	2	1	$e(0^1 0^1 0^2)$	C	M/C	M/D	M/D	M/D
			$e(0^1 0^1 1^2)$	C	M/C	M/D	M/D	M/D
			$e(0^1 0^2 1^1)$	C	M/C	M/D	M/D	M/D
			$e(0^1 1^1 1^2)$	C	M/C	M/D	M/D	M/D
			$e(0^2 1^1 1^1)$	C	M/C	M/D	M/D	M/D
			$e(1^2 1^1 1^1)$	C	M/C	M/D	M/D	M/D

（次ページへ続く）

（表K・3の続き）

総数	j 1級	j 2級	誤りパターン	P_b の巾 0	P_b の巾 1	P_b の巾 2	P_b の巾 3	P_b の巾 4
3	3	0	$e(0^1 0^1 0^1)$	C	M/D	M/D	M/D	M/D
			$e(0^1 0^1 0^1)$	C	M/D	M/D	M/D	M/D
			$e(0^1 1^1 1^1)$	C	M/D	M/D	M/D	M/D
			$e(1^1 1^1 1^1)$	C	M/D	M/D	M/D	M/D
4	0	4	$e(0^2 0^2 0^2 0^2)$	C	M/D	M/D	M/D	M/D
			$e(0^2 0^2 0^2 1^2)$	C	M/D	M/D	M/D	M/D
			$e(0^2 0^2 1^2 1^2)$	C	M/D	M/D	M/D	M/D
			$e(0^2 1^2 1^2 1^2)$	M/D/C 8	M/D	M/D	M/D	M/D
			$e(1^2 1^2 1^2 1^2)$	M/D 8	M/D	M/D	M/D	M/D
	1	3	$e(0^1 0^2 0^2 0^2)$	C	M/D	M/D	M/D	M/D
			$e(0^1 0^2 0^2 1^2)$	C	M/D	M/D	M/D	M/D
			$e(0^2 0^2 0^2 1^1)$	M 9	M/D	M/D	M/D	M/D
			$e(0^1 0^2 1^2 1^2)$	C	M/D	M/D	M/D	M/D
			$e(0^2 0^2 1^1 1^2)$	C	M/D	M/D	M/D	M/D
			$e(0^1 1^2 1^2 1^2)$	C 7	M/D	M/D	M/D	M/D
			$e(0^2 1^1 1^2 1^2)$	M/D 9	M/D	M/D	M/D	M/D
			$e(1^1 1^2 1^2 1^2)$	M/D 9	M/D	M/D	M/D	M/D
	2	2	$e(0\ 0\ 0\ 0)$	C	M/D	M/D	M/D	M/D
			$e(0\ 0\ 0\ 1^2)$	C	M/D	M/D	M/D	M/D
			$e(0\ 0\ 0\ 1^1)$	C	M/D	M/D	M/D	M/D
			$e(0\ 0\ 1^2 1^2)$	C	M/D	M/D	M/D	M/D
			$e(0\ 0\ 1^1 1^2)$	C	M/D	M/D	M/D	M/D
			$e(0\ 0\ 1^1 1^1)$	C	M/D	M/D	M/D	M/D
			$e(0\ 1^1 1^2 1^2)$	M/D/C	M/D	M/D	M/D	M/D

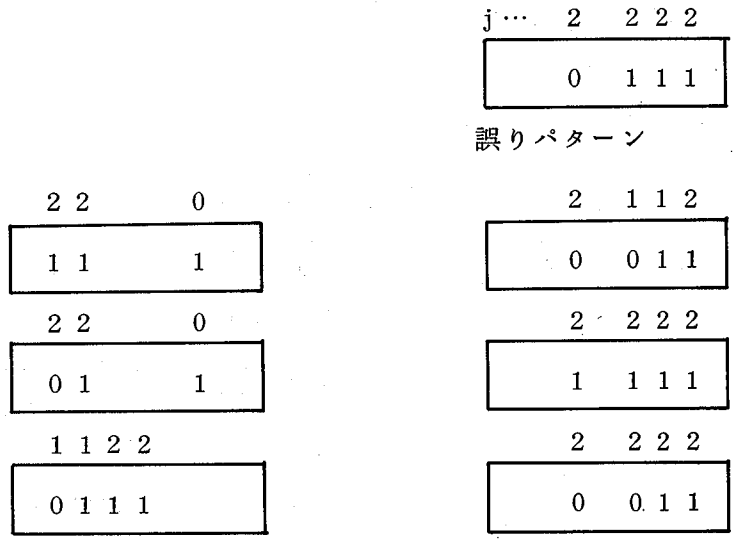
以下略

⋮

但しM……復号誤り，D……誤り検出，C……正しい復号

$e(*^{j_1}, *^{j_2} \cdots)$：$* = 1$ or 0；j_1，j_2……信頼指数

誤り検出確率Pr，復号誤り確率PEは付図K・1に示す復号誤り確率，誤り検出確率の主要項を与えるパターンより計算される。



付図K・1　誤りパターンの例

よって次式で与えられる。

$$Pr \cong 5.10 \times 10^{8}\ P_b^{8}$$

$$PE \cong 6.34 \times 10^{9}\ P_b^{8}$$

残留イレージャ推定復号との比較を表K・4に示す。

付表K・4　残留イレージャ推定復号とChase復号の比較
（符号A_1，C_1，C_2共に(15，10，4) SEC−DED符号）

確率	ChaseⅢ	残留イレージャ	
		イレージャ専一	イレージャ・誤り
Pr	$5.10 \times 10^{8}\ P_b^{8}$	$1.13 \times 10\ P_b^{7}$	$2.94 \times 10^{6}\ P_b^{7}$
PE	$6.34 \times 10^{9}\ P_b^{8}$	$9.78 \times 10^{5}\ P_b^{7}$	$7.83 \times 10\ P_b^{8}$

但しアナログ重み計算は$P_b = 10^{-3}$で行った。

〔付録L〕：式（５．１５）の導出

誤りが生起するとき，最小距離の隣接符号語に誤ると仮定する。

まずk行目の１回のC_1復号でt_1個までの誤りを訂正するC_1受信語に生起している$N_{10}(k)$個の誤りが

(1)　$N_{10}(k) \leqq t_1$の場合

生起した$N_{10}(k)$個の誤りが訂正される。

(2)　$t_1 < N_{10}(k) < d_1 - t_1$の場合

生起したN_{10}個の誤りが検出され$N_{10}(k)$個の誤りとしてそのまま残留する。

(3)　$N_{10}(k) \geqq d_1 - t_1$の場合

誤訂正が生起する場合があり，ℓ重誤り（$\ell \leqq t_1$）として誤訂正されると$N_{10}(k)+\ell$（$=d_1$）個の誤りが残留する。

C_1復号で推定された誤りの総数$N_1(c)$であったとする。

$$N_1(c) = \sum_{k=1}^{n_2} N_{10}(k)$$
$$= X_1 + S_1 + \sum_{\ell=0}^{t_1} K_\ell \cdot \ell \qquad \cdots (L-1)$$

となる。但し，K_ℓ：ℓ重誤りとみて誤訂正したC_1符号語の数とする。

X_1：C_1復号で正しく復号し，訂正した誤りの数とする。

S_1：C_1復号で誤り検出された誤りの数とする。

通信路で生起した誤りの総数を$N_1(r)$とする。$N_1(r)$はC_1復号器のパラメータから表現可能である。すなわち，

$$N_1(r) = X_1 + S_1 + \sum_{\ell=0}^{t_1} K_\ell \cdot (d_1 - \ell) \qquad \cdots (L-2)$$

$N_2(r)$をC_1復号で復号誤り又は誤り検出になった誤りの数，$N_2(c)$をC_2復号で推定した誤りの数とする。$N_2(r)$は

$$N_2(r) = S_1 + \sum_{\ell=0}^{t_1} K_\ell \cdot (d_1 - \ell) + \sum_{\ell=0}^{t_1} K_\ell \cdot \ell$$
$$= S_1 + \sum_{\ell=0}^{t_1} \cdot K_\ell \cdot d_1 \qquad \cdots (L-3)$$

となる。

I　　C_2復号で復号誤りがない場合

C_1復号後残留している誤りはすべて訂正されているか誤り検出される。従って次式が成立する。

$$N_2(r)=N_2(c)$$
$$=S_1+\sum_{\ell=0}^{t_1}K_\ell\cdot d_1 \qquad \cdots(L-4)$$

$\sum_{\ell=0}^{t_1}K_\ell\cdot d_1$は$C_1$復号で復号誤りであったものが$C_2$復号で訂正，又は再び検出された誤りである。ところで

$$N_1(c)+N_2(c)=X_1+2S_1+\sum_{\ell=0}^{t_1}K_\ell\cdot(\ell+d_1)>N_1(r) \qquad \cdots(L-5)$$

である。

一方（L－1）（L－2）と$d_1-\ell>\ell$より

$$N_1(r)>N_1(c) \qquad \cdots(L-6)$$

又，$N_1(r)-N_2(c)=X_1+S_1+\sum_{\ell=0}^{t_1}K_\ell\cdot(d_1-\ell)-[S_1+\sum_{\ell=0}^{t_1}K_\ell\cdot d_1]$

$$=X_1-\sum_{\ell=0}^{t_1}K_\ell\cdot\ell \qquad \cdots(L-7)$$

である。

X_1はC_1復号で正しく訂正した誤りの数で$\sum_{\ell=0}^{t_1}K_\ell\cdot\ell$は$C_1$復号で新たに付加された誤りの数である。しかるに通常のガウス分布通信路では，

$X_1\gg\sum_{\ell=0}^{t_1}K_\ell\cdot\ell$であるから

$$N_1(r)>N_2(c)$$

とみてよい。

$$\therefore N_1(c)+N_2(c)>N_1(r)>\max(N_1(c),\ N_2(c)) \qquad \cdots(L-8)$$

が成立つ。

II　　C_2復号で復号誤りがある場合

$$N_2(r)=X_2+S_2+\sum_{i=0}^{t_2}L_i\cdot(d_2-i) \qquad \cdots(L-9)$$

ここでX_2はC_2復号で正しく復号した誤りの数，S_2は検出された誤り数，L_iはC_2復号でi重誤りとみなされて誤訂正したC_2符号の語の数である。

一方$N_2(r)$は又

$$N_2(r) = S_1 + \sum_{\ell=0}^{t_1} K_\ell \cdot d_1 + \sum_{i=0}^{t_2} L_i \cdot (d_2 - i) \qquad \cdots (L-10)$$

でもある。従って

$$N_2(c) = S_1 + \sum_{\ell=0}^{t_2} K_\ell \cdot d_1 + \sum_{i=0}^{t_2} L_i \cdot i \qquad \cdots (L-11)$$

$$\therefore N_1(c) + N_2(c) = X_1 + 2S_1 + K_\ell \cdot (d_1 + \ell) + \sum_{\ell=0}^{t_2} L_i \cdot i$$

$$> X_1 + S_1 + \sum_{i=0}^{t_1} K_\ell \cdot (d_1 - \ell)$$

$$= N_1(r) \qquad \cdots (L-12)$$

となる。又，明らかに$N_1(r) > N_1(c)$である。

$$一方 N_1(r) - N_2(c) = X_1 + S_1 + \sum_{\ell=0}^{t_1} K_\ell \cdot (d_1 - \ell)$$

$$- \left[S_1 + \sum_{\ell=0}^{t_1} K_\ell \cdot d_1 + \sum_{i=0}^{t_2} L_i \cdot i \right]$$

$$= X_1 - \sum_{\ell=0}^{t_1} K_\ell \cdot \ell - \sum_{\ell=0}^{t_2} L_i \cdot i \qquad \cdots (L-13)$$

である。

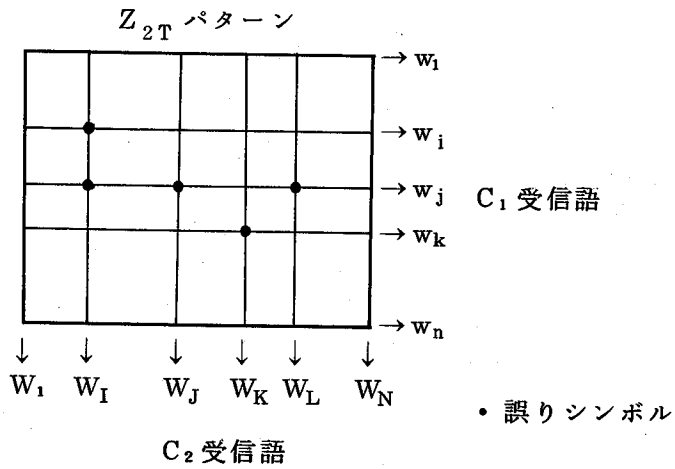
これも通常の通信路では$X_1 \gg \Sigma K_\ell \cdot \ell + \Sigma L_i \cdot i$であるから

$$N_1(r) > N_2(c) \qquad \cdots (L-14)$$

$$\therefore N_1(c) + N_2(c) > N_1(r) > \max(N_1(c),\ N_2(c)) \qquad \cdots (L-15)$$

〔付録M〕：行方向と列方向のアナログ重みの導出

(i) 復号誤りが生起していない場合



付図M・1　Z_{2T} パターン（復号誤りなし）

一つのテストパターンZ_{AT}（重みは５）に対し以下のように行方向のアナログ重みを算出する。

$$w_1 = q_{1,1} + \cdots + q_{I,1} + \cdots + q_{J,1} + \cdots + q_{K,1} + \cdots + q_{L,1} + \cdots + q_{N,1}$$

$$\vdots$$

$$w_i = q_{1,i} + \cdots + p_{I,i} + \cdots + q_{J,i} + \cdots + q_{K,i} + \cdots + q_{L,i} + \cdots + q_{N,i}$$

$$\vdots$$

$$w_j = q_{1,j} + \cdots + p_{I,j} + \cdots + p_{J,j} + \cdots + q_{K,j} + \cdots + p_{L,j} + \cdots + q_{N,j}$$

$$\vdots$$

$$w_k = q_{1,k} + \cdots + q_{I,k} + \cdots + q_{J,k} + \cdots + p_{K,k} + \cdots + q_{L,k} + \cdots + q_{N,k}$$

$$\vdots$$

$$w_n = q_{1,n} + \cdots + q_{I,n} + \cdots + q_{J,n} + \cdots + q_{K,n} + \cdots + q_{L,n} + \cdots + q_{N,n} \qquad \cdots (M-1)$$

一方，列方向のアナログ重みを以下のように算出する。

$$W_1 = q_{1,1} + \cdots + q_{1,i} + \cdots + q_{1,j} + \cdots + q_{1,k} + \cdots + q_{1,n}$$

$$\vdots$$

$$W_I = q_{I,1} + \cdots + p_{I,i} + \cdots + p_{I,j} + \cdots + q_{I,k} + \cdots + q_{I,n}$$

$$\vdots$$

$$W_J = q_{J,1} + \cdots + q_{J,i} + \cdots + p_{J,j} + \cdots + q_{J,K} + \cdots + q_{J,n}$$

$$\vdots$$

$$W_K = q_{K,1} + \cdots + q_{K,i} + \cdots + q_{K,j} + \cdots + p_{K,k} + \cdots + q_{K,n}$$

$$\vdots$$

$$W_L = q_{L,1} + \cdots + q_{L,i} + \cdots + p_{L,j} + \cdots + q_{L,k} + \cdots + q_{L,n}$$

$$\vdots$$

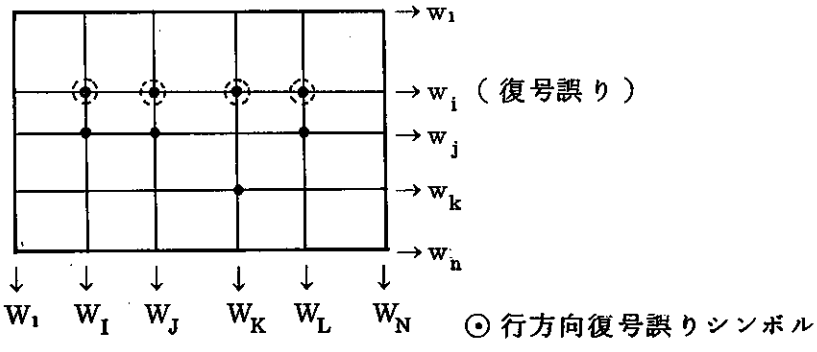
$$W_n = q_{N,1} + \cdots + q_{N,i} + \cdots + q_{N,j} + \cdots + q_{N,k} + \cdots + q_{N,n} \qquad \cdots (M-2)$$

ここで明らかに

$$\sum_{Z=1}^{n} w_Z = \sum_{u=1}^{N} W_u \qquad \cdots (M-3)$$

が成立つ。即ち復号誤りを含まない場合アナログ重みは行方向で計算しても，列方向で計算しても等しくなる。

(ii) 復号誤りが生起している場合



付図M・2　Z_{2T} パターン（復号誤りあり）

行又は列方向に復号誤りを含む場合は一つのテストパターンTに対し行方向で求めた誤りパターン $Z_{T,row}$ と列方向で求めた $Z_{T,column}$ が異なる。行方向のアナログ重みは

$$w_1 = q_{1,1} + \cdots + q_{I,1} + \cdots + q_{J,I} + \cdots + q_{K,1} + \cdots + q_{L,1} + \cdots + q_{N,1}$$

$$\vdots$$

$$w_i = q_{1,i} + \cdots + q_{I,i} + \cdots + q_{J,i} + \cdots + q_{K,i} + \cdots + q_{L,i} + \cdots + q_{N,i}$$

$$\vdots$$

$$w_j = q_{1,j} + \cdots + p_{I,j} + \cdots + p_{J,j} + \cdots + q_{K,j} + \cdots + p_{L,j} + \cdots + q_{N,j}$$

$$\vdots$$

$$w_k = q_{1,k} + \cdots + q_{I,k} + \cdots + q_{J,k} + \cdots + p_{K,k} + \cdots + q_{L,k} + \cdots + q_{N,k}$$

$$\vdots$$

$$w_n = q_{1,n} + \cdots + q_{I,n} + \cdots + q_{J,n} + \cdots + q_{K,n} + \cdots + q_{L,n} + \cdots + q_{N,n} \quad \cdots (M-4)$$

となる。

一方列方向では

$$W_1 = q_{1,1} + \cdots + q_{1,i} + \cdots + q_{1,j} + \cdots + q_{1,k} + \cdots + q_{1,n}$$

$$\vdots$$

$$W_I = q_{I,1} + \cdots + p_{I,i} + \cdots + p_{I,j} + \cdots + q_{I,k} + \cdots + q_{I,n}$$

$$\vdots$$

$$W_J = q_{J,1} + \cdots + p_{J,i} + \cdots + p_{J,j} + \cdots + q_{J,k} + \cdots + q_{J,n}$$

$$\vdots$$

$$W_K = q_{K,1} + \cdots + p_{K,i} + \cdots + q_{K,j} + \cdots + p_{K,k} + \cdots + q_{K,n}$$

$$\vdots$$

$$W_L = q_{L,1} + \cdots + p_{L,i} + \cdots + p_{L,j} + \cdots + q_{L,k} + \cdots + q_{L,n}$$

$$\vdots$$

$$W_N = q_{N,1} + \cdots + q_{N,i} + \cdots + q_{N,j} + \cdots + q_{N,k} + \cdots + q_{N,n} \quad \cdots (M-5)$$

となる。ここで

$$\sum_{u=1}^{N} W_u - \sum_{Z=1}^{n} w_Z = (p_{I,i} - q_{I,i}) + (p_{J,i} - q_{J,i}) + (p_{K,i} - q_{K,i}) + (p_{L,i} - q_{L,i}) > 0 \quad \cdots (M-6)$$

であり，したがって

$$\sum_{u=1}^{N} W_u \neq \sum_{Z=1}^{n} w_Z$$

となる。 $\cdots (M-7)$