Title	A characterization of the Fuchsian locus of PSLnℝ-Hitchin components
Author(s)	稲垣，友介
Citation	大阪大学，2021，博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/81992
rights	
Note	

様式3

論　文　内　容　の　要　旨

氏　名	（　稲垣　友介　）
論文題名	A characterization of the Fuchsian locus of $PSL_n\mathbb{R}$-Hitchin components ($PSL_n\mathbb{R}$-Hitchin成分のFuchs跡の特徴付け)

論文内容の要旨

Hitchin成分は曲面の双曲構造の変形空間であるTeichmüller空間の表現の意味での高次元化であり，幾何学的トポロジーの分野における比較的新しい研究対象である．Sを向き付け可能なコンパクト曲面でEuler数が負のものとする．Teichmüller空間とはS上の双曲構造，即ち至る所曲率が-1のRiemann計量の等長類の空間である．この空間はFuchs表現と呼ばれるSの基本群の忠実離散的な$PSL_2\mathbb{R}$ -表現の共役同値類の空間としても定義することができる．$PSL_n\mathbb{R}$の場合に対してTeichmüller空間の類似として定義されたのがHitchin成分である．Sの基本群の$PSL_n\mathbb{R}$ -表現の共役同値類の成す空間を指標多様体という．Hitchin成分とはFuchs表現に$PSL_2\mathbb{R}$の$PSL_n\mathbb{R}$ -既約表現を左から結合して得られる$PSL_n\mathbb{R}$ -表現を含む指標多様体の連結成分である．

Teichmüller空間の研究はとても長い研究の歴史を持ち，共形構造，複素構造，そして特に幾何学的トポロジーの分野では双曲構造の変形空間として広く研究されてきた．さらに双曲3次元多様体の研究で用いられるKlein群との関係も深く，20世紀後半でこの2分野はともに目覚ましい発展を遂げてきた．Teichmüller空間とKlein群はそれぞれ，基本群の$PSL_2\mathbb{R}$，$PSL_2\mathbb{C}$への忠実な離散表現を用いて定義することができる．$PSL_2\mathbb{R}$，$PSL_2\mathbb{C}$は線形Lie群の中でランク1と呼ばれるものである．近年それらの20世紀後半で行われた研究をランク1のLie群の研究と捉え，その高次元化として高ランクLie群($PSL_n\mathbb{R}, SP(2n)$など)に対しても基本群の離散表現やその作用について研究が行われるようになってきた．本論文の主題であるHitchin成分はまさにTeichmüller空間の高ランクLie群に対する類似になっており，歴史的にも関心の集まる研究対象である．

Sの基本群のFuchs表現の空間であることからTeichmüller空間は定義よりHitchin成分に埋め込まれる．埋め込まれたTeichmüller空間，つまりFuchs表現から得られる表現の成すHitchin成分の部分集合をFuchs跡と呼ぶ．本論文はこのFuchs跡に焦点を当てる．筆者は学位申請論文においてFuchs跡の研究としてその特徴付けを行った．

Hitchin成分にはBonahonとDreyerにより与えられた座標系が存在する．その座標系はBonahon-Dreyer座標系と呼ばれ，Teichmüller空間のシェア座標の高次元化に相当している．ここでTeichmüller空間のシェア座標とはラミネーションの横断コサイクルを用いたパラメタ付けである．ラミネーションの葉に横断的に交わる弧に対して実数を与える写像で加法性・ホモトピー不変性をもつものを横断コサイクルと呼び，BonahonはTeichmüller空間から横断コサイクルの空間への埋め込みを構成した．Bonahon-Dreyer座標はシェア座標の高次元化であり，S上の極大ラミネーションとそれが与える理想三角形分割構造に沿って定まる2種類の実数値不変量により定義される．一つ目は理想三角形に対して定まる三角不変量で高次元の場合にしか定義されない不変量である．二つ目はラミネーションの葉に対して定まるシェア不変量で，横断コサイクルを$\mathbb{R}^{n-1}$値にした捩じれ横断コサイクルで与えられる．BonahonとDreyerはこれらの不変量によりHitchin成分があるEuclid空間内の凸胞でパラメタ付けされることを示した．

これらの不変量は一般に計算が困難である．筆者は本論文においてSがパンツ曲面の場合の考察を通して，代数的な計算に帰着させることで，Fuchs跡上のBonahon-Dreyer座標の特徴を決定した．

主結果は次の通りである．向き付けられた連結，コンパクトな任意の曲面SとS上の任意の極大ラミネーションに対してHitchin成分の元がFuchs跡に含まれることは，Bonahon-Dreyer座標について三角不変量は0であり，シェア型の不変量はラミネーションの横断コサイクルにある種一致することと必要十分である．この系としてFuchs跡はHitchin成分のパラメタ空間の凸胞において，いくつかの単純な方程式で定義されるアフィン切断に等しいことが示される．

様式 7

論文審査の結果の要旨及び担当者

<table>
<tr><td colspan="3">氏　名　（　　　稲垣　友介　　　）</td></tr>
<tr><td rowspan="5">論文審査担当者</td><td>（職）</td><td>氏　名</td></tr>
<tr><td>主 査　　教　授</td><td>鎌田　聖一</td></tr>
<tr><td>副 査　　教　授</td><td>後藤　竜司</td></tr>
<tr><td>副 査　　准教授</td><td>糟谷　久矢</td></tr>
<tr><td>副 査　　准教授</td><td>馬場　伸平</td></tr>
</table>

論文審査の結果の要旨

曲面の基本群からリー群 PSL(2, R)への離散で忠実な表現は Fuchs 表現と呼ばれ、それらは曲面上の（標識付き）リーマン面の構造の空間である Teichmüller 空間と同一視されて、今日まで深く研究されてきた。さらに、高階リー群 PSL(n, R)への表現空間の特別な連結成分である Hitchin 成分は、PSL(2, R)の場合における Teichmüller 空間の一般化として近年研究が活発に行われている。PSL(2, R)から PSL(n, R)への既約表現を合成することにより Fuchs 表現は Hitchin 成分の表現とみなせ、それを PSL(n, R)-Fuchs 表現という。

本論文では、Hitchin 成分における PSL(n, R)-Fuchs 表現の特徴付けを、Hitchin 成分の Bonahon-Dreyer 座標系を用いて明快な条件式で与えている。

Thurston や Bonahon によって与えたれた Teichmüller 空間の shear 座標は、特に双曲曲面の大域的な性質を理解するのに重要な座標である。shear 座標は、曲面の理想三角形分割ごとに定まる。その一般化が、Bonahon-Dreyer によって Hitchin 成分にも与られ、これにより Hitchin 成分も Euclid 空間内の錐として実現されている。本論文で与えられた特徴づけは、この Bonahon-Dreyer により Hitchin 成分に与えられた座標が、Teichmüller 空間の拡張という観点から自然であること示している。特に、PSL(n, R)-Fuchs 表現空間がこの座標について affine な断面となることが導かれている。

本論文で与えられた特徴づけは、閉曲面およびコンパクトな境界付き曲面の任意の理想三角形分割について成り立つ一般性を持っていることから，今後の応用上でも有用である。

以上のようなことから、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。