論　文　内　容　の　要　旨

氏　　名　（　　　青井　　顕宏　　　）	
論文題名	Constant scalar curvature Kähler metrics on noncompact complex manifolds (コンパクトでない複素多様体上の定スカラー曲率ケーラー計量について)

論文内容の要旨

本論文の目的は,非線形偏微分方程式の解析を行うことで複素多様体上にスカラー曲率が定数関数となるようなKähler計量を構成することである.

背景は以下に述べる4つの結果である. CalabiはFano多様体がKähler Einstein計量を持つという仮定の下で,その標準直線束の全空間上に完備Kähler計量でリッチ平坦となるものが存在することを証明した.これは常微分方程式を解くことによって示される.この結果の一般化として,Bando-KobayashiはFano多様体上にリッチ曲率が正となるKähler Einstein計量を持つ滑らかな超曲面が存在するという仮定の下で,その超曲面の補集合上に完備リッチ平坦Kähler計量が存在することを証明した.さらにTian-YauはFano多様体上にリッチ平坦なKähler Einstein計量を持つ滑らかな超曲面が存在するという仮定の下で,その超曲面の補集合上に完備リッチ平坦Kähler計量が存在することを証明した.これら二つの結果は,複素Monge-Ampère方程式と呼ばれる二階の非線形偏微分方程式を解くことで示される.一方でHwang-Singerは偏極多様体(コンパクトな複素多様体とその上の豊富な直線束の組)を考え,その直線束の偏極類が非負の値を取る定スカラー曲率Kähler計量を持つという仮定の下で,その直線束の双対直線束の全空間上には完備Kähler計量でスカラー平坦となるものが存在することを証明した.この結果はCalabiの結果と同様に,常微分方程式を解くことで示される.以上のCalabi,Bando-Kobayashi,Tian-Yau,Hwang-Singerの4つの結果から,偏極多様体上に定スカラー曲率Kähler計量を許容する滑らかな超曲面が存在すれば,その補集合には完備スカラー平坦Kähler計量が存在するか?という問題が浮かび上がる.この問題は常微分方程式や複素Monge-Ampère方程式ではなく4階の非線形偏微分方程式を扱うという困難を持つ.

得られた最も主要な結果(Theorem 1.8)について述べる. n次元偏極多様体$(\mathrm{X},\mathrm{L_X})$上に滑らかな超曲面$\mathrm{D}\in|\mathrm{L_X}|$が存在すると仮定し,$\mathrm{L_D}$を$\mathrm{L_X}$をDへ制限した直線束として定める.本論文では,偏極多様体$(\mathrm{D},\mathrm{L_D})$がその偏極類に$\hat{S}_{\mathrm{D}}$の値を取る定スカラー曲率Kähler計量を持つとき,次の3つの条件を満たせば,補集合$\mathrm{X}\setminus\mathrm{D}$上は完備スカラー平坦Kähler計量を許容することを証明した:(i)$\mathrm{n}\geq 6$であり,D上で0となるX上の正則ベクトル場は自明なもの以外存在しない,(ii)$0<3\hat{S}_{\mathrm{D}}<n(n-1)$が成り立つ,(iii)直線束$\mathrm{K_X^{-\mathit{l}}}\otimes\mathrm{L_x^{\mathit{m}}}$が非常に豊富となる正の整数$l,m$が存在し,その比$m/l$は十分小さい.

本論文の構成と上で述べた主要な結果の証明の概略は以下の通りである.第2章ではKähler計量の曲率に関する計算と,先述のCalabi,Bando-Kobayashi,Tian-Yauの結果について振り返る.3章ではHwang-Singerの結果とその計量に関する測地球の体積増大度について振り返る.これらの計量の構成から,4章では補集合$\mathrm{X}\setminus\mathrm{D}$上に背景計量を定義し,偏極多様体$(\mathrm{D},\mathrm{L_D})$がその偏極類に定スカラー曲率Kähler計量を持てば先に定義した背景計量のスカラー曲率が非常に早く減衰することを証明する.5章では漸近錐的幾何と重み付き関数空間の定義について振り返り,6章ではその関数空間上の4階の楕円型線形作用素について調べる.7章では4章の結果を用いスカラー曲率が十分小さい漸近錐的幾何なKähler計量が存在すれば,それをスカラー平坦となるように変形できることを証明する.ここでは完備スカラー平坦Kähler計量の存在を重み付き関数空間の不動点として特徴づけることがポイントとなる.8,9,10章では退化型複素Monge-Ampère方程式と多重劣調和関数の張り合わせを用いることでスカラー曲率をいくらでも小さくできる完備Kähler計量を構成する.こうして得られたKähler計量は漸近錐的幾何でないので,11章では射影空間内の十分小さい閉集合上で平均を取り,スカラー曲率をいくらでも小さくできるようパラメトライズされた漸近錐的幾何なKähler計量を得る.12章では8章から11章までで構成したKähler計量を7章で得られた定理に適応させる.ここでは不動点定理が成り立つことを示すために,スカラー曲率を線形化した作用素の逆作用素を考え,その作用素ノルムに関する一様な評価を示すことが重要となる.

様式 7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏　名	（青井顕宏　）	
論文審査担当者	（職）	氏　名
	主 査　教授	石田 政司
	副 査　教授	太田 慎一
	副 査　教授	後藤 竜司
	副 査　教授	山ノ井 克俊
	副 査　准教授	榎 一郎
	副 査　准教授	糟谷 久夫

論文審査の結果の要旨

複素多様体上の計量と複素構造から，エルミート形式と呼ばれる微分 2-形式が定まる．これが外微分で閉じているとき，これから定まる計量をケーラー計量という．ケーラー計量をもつ複素多様体をケーラー多様体という．複素射影代数多様体など，重要で多くの複素多様体が，ケーラーである．

計量をもつ多様体の接空間の実 2 次元部分空間に対し，その方向への空間の曲がり具合，断面曲率，が定まる．一点の接空間の全ての実 2 次元部分空間に関して平均を取ったものをスカラー曲率（各点で考えることにより，多様体上の関数となる）という．

ケーラー多様体は，例外的なものを除き，すくなくともコンパクトであれば，その複素構造を反映した標準的な良いケーラー計量を持つであろうと期待されている．標準的な計量の有力な候補は，スカラー曲率が一定となる，定スカラー曲率をもつケーラー（以下 cscK と略する）計量，である．コンパクトケーラー多様体に関しては，cscK 計量をもつための必要条件，K-安定性，が知られている（必要十分であろうと予想されている）

本論文の著者は，コンパクトではない場合，複素射影代数多様体 X に含まれる複素超曲面 D の余集合 X－D，を考え，複素超曲面 D が正のスカラー曲率を持つ cscK 計量を許容するとき，さらにいくつかの仮定のもとに，X－D がスカラー曲率が 0 となる完備な cscK 計量を持つことを証明した．また，仮定のなかには，コンパクトのときの必要条件，K-安定性，に対応するものは，含まれない．この結果は，アインシュタイン・ケーラー計量に関する小林-板東によるよく知られた定理の，cscK 版になっている．ただし，証明の方法は大変異なる．

cscK 計量の存在は，4 階の非線形偏微分方程式の解の存在と同値になる．偏微分方程式の一般論のみからでは，示せない．本論文の著者は，1）cscK 計量に十分近い計量を構成し，2）関数空間における不動点定理に持ち込む（逐次近似と同等）．1)のために，まず，3 種のケーラー計量を特異性を許して構成し，それらを張り合わせる．さらに特異性を持つ部分を動かして，平均を取って，2）の段階の議論が適用できる計量を構成した．

この論文の結果は，それ自体，コンパクトではない多様体上で本格的に cscK 計量を考えた興味深いものであると同時に，コンパクトの場合に関しても示唆的なものになっている．また，上述のように，用いた手法も他に類を見ない部分を含む．よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。