様式3

論　文　内　容　の　要　旨

氏　名　（太田　力斗　）	
論文題名	Studies on the geometry of line bundles (直線束の幾何学に関する諸研究)

代数多様体に関する研究の大部分はその上の直線束に関する研究と大きく結びついている。実際、直線束は多様体の幾何的性質に関する様々な情報を持っていて、例えば任意の射影多様体間の射は定義域の多様体の直線束の線形系から構成されることがよく知られている。本論文はピカール群（直線束のなす群）が良い性質を持つような多様体のクラスに関する話題と、多様体上の直線束の一点での局所的な正値性に関する話題の二つの内容からなりそれぞれ第一章、第二章で述べられる。以下にそれぞれの章の内容について詳しく述べる。

まず第一章の内容に関して述べる。2000年にHuとKeelによってMori dream space（以下、MDSと略記）と呼ばれるピカール群が良い性質を持つような代数多様体のクラスが導入された。MDS上では Cox環という直線束のsectionから構成される環が有限生成であることや、双有理幾何学において基本的な手法である極小モデルプログラムが強い形で機能することなどが知られている。二つの正規な代数多様体間の射として定義されるMDSの相対版が2014年にAndreatta, Wiśnewskiらにより定義されたが、この相対版MDSに関してはまだまだ研究されるべき課題を残していた。

そこで、本論文では上述のMDSの相対版Mori dream morphism(以下 MDM と略記)の定義を少し広い場合に拡張して、それに関する次の二つの問題 について述べる。

(1)元の森夢空間で成り立つ性質の相対版への一般化。

(2)相対版ならではの関手的性質に関する研究。

上記の(1)に関しては期待通りに、MDM上では任意の因子に関する相対版極小モデルプログラムが強い形で機能すること及び、algebraic fibre spaceがMDMであることとその相対版Cox環（Cox sheaf）が有限生成であることが同値であるということを証明できた。

(2)に関しては次の二つの結果を得た。

・二つのMDMの合成がMDMとはならないが、その逆に二つのalgebraic fibre spaceを合成してMDMであれば合成された二つの射は両方ともMDMである。

・MDMは一般のbase changeでは保たれないが、一方でbase changeによる直線束の引き戻しに関していくつかの条件を仮定した場合にはbase change後もMDMとなる。

次に第二章の内容に関して述べる。第二章では偏極アーベル多様体のSeshadri定数に関する話題を取り扱う。Seshadri定数とは直線束の多様体上の一点での局所的な正値性を計るような実数であるが、アーベル多様体上ではその対称性により点の取り方に依らず値が決まることが知られている。以下、n次元偏極アーベル多様体(A,L)に対してそのSeshadri定数を$\varepsilon(\mathrm{A},\mathrm{L})$と書くこととする。

本論文では以下の二つのことを証明した。

・$\varepsilon(\mathrm{A},\mathrm{L}) < \sqrt[3]{L^3}$　であれば、ある部分アーベル多様体Bがあって、$\varepsilon(\mathrm{A},\mathrm{L}) = \varepsilon(\mathrm{B},\mathrm{L}|_B)$となる。

・codimensionが1の部分アーベル多様体Dがあって$\sqrt[n]{L^n/n} > \sqrt[n-1]{L|_D{}^n}$を満たすなら、$\varepsilon(\mathrm{A},\mathrm{L}) = \varepsilon(\mathrm{D},\mathrm{L}|_D)$となる。

一つ目の結果は1995年のNakamayeによる結果から着想を得ており、その結果を補足するような主張となっている。

上記の二つの結果はどちらも一般には難しいとされているSeshadri定数の計算を低次元のアーベル多様体でSeshadri定数の計算に押しつけられる場合があることを示している。さらにこれらの結果の応用として、アーベル曲面のSeshadri定数についてすでに知られて結果を用いて3次元偏極アーベル多様体が自己交点数と比べて十分小さいSeshadri定数を持つと仮定した場合のSeshadri定数の値の決定とその時の多様体の構造に関する考察を行なった。

様式 7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏　名　（　太田力斗　）		
論文審査担当者	（職）	氏　名
	主　査　教授	安田健彦
	副　査　教授	髙橋篤史
	副　査　教授	藤野修
	副　査　准教授	大川新之介
	副　査　准教授	藤田健人

論文審査の結果の要旨

本論文は 2 部構成になっている。第 1 部と第 2 部のどちらも、直線束の諸性質に注目した射影代数多様体（より一般に射影的射）の幾何学の研究に関する内容からなる。題目にある「直線束の幾何学」という言葉はこれを指すものであり、代数幾何学における中心的な視点の 1 つである。

第 1 部： Hu と Keel によって 2000 年に導入された、Mori dream space(MDS)と呼ばれる射影代数多様体のクラスがある。Toric 多様体および Fano 多様体を含む重要なクラスであり、これまでに大変多くの研究が行われてきた。一方、代数多様体の射影的射であって MDS 的な特徴を持つものが知られており、Andreatta と Wiśniewski によって 2014 年に定義と具体例が与えられた。第 1 部ではこれを Mori dream morphism(MDM)と呼び、先行研究では行われていなかった体系的な研究が初めて行われている。なお、1 点への MDM が MDS に他ならない。

第 1 部の前半では、以下に述べる MDS の基本性質を全て MDM に対して証明込みで一般化している：まず、MDS の上では、極小モデルプログラム(MMP)が任意の因子に対して強い意味で機能する。また、MDS は、斉次座標環の一般化である Cox 環の有限生成性によって特徴づけられる。さらに、MDS の双有理幾何学は、Cox 環のスペクトラムの Variation of Geometric Invariant Theory Quotients(VGIT)と同一視される。

後半では、射の基本操作において MDM 性が保存されるか否かという問題について組織的な研究を行っている。具体的には、射の合成が MDM ならば各々の射も MDM であることを証明し、また、その逆が正しくないことを指摘している。さらに、自然な仮定のもとで MDM の base change が MDM であることを証明し、一方で全く一般の base change は MDM 性を保たないことを具体例によって示している。

これらの結果は MDM 研究の基礎を確立したものであり、今後の発展の礎となることが見込まれるものである。

第 2 部：Seshadri 定数は Demailly によって 1992 年に導入された不変量であり、射影代数多様体上の直線束の各点における局所的な正値性を測るものである。偏極 Abel 多様体の場合には Seshadri 定数は点の選び方に依存しないが、その値が abel 多様体の分解と深く関わるということが Nakamaye(1996)等によって知られていた。第 2 部はこれらの先行研究の流れを汲むものである。具体的には、Seshadri 定数が十分小さい偏極 abel 多様体に対し、部分 abel 多様体であって(制限して得られる偏極に関する) Seshadri 定数が元の abel 多様体の Seshadri 定数に一致するものが存在する、というタイプの一般的な定理を 2 つ証明している。その応用として、3 次元以下のある種の偏極 abel 多様体に対して、Seshadri 定数を決定すると共に Nakamaye の結果に類する分解定理を与えている。これらは偏極 abel 多様体の Seshadri 定数と大域的幾何学の関係に関する新しく興味深い結果である。

以上述べてきたように、本論文は当該分野への十分な貢献を含んでおり、博士（理学）の学位論文として十分価値があるものと認める。