OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Pathological phenomena in the wild McKay correspondence
Author(s)	山本, 貴大
Citation	大阪大学, 2021, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/81997
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

様式３

論　文　内　容　の　要　旨

氏　　名　（　　　　　山本　　貴大　　　　　　　）	
論文題名	Pathological phenomena in the wild McKay correspondence (野性マッカイ対応における病的現象)

論文内容の要旨

標数０における商特異点は良い振る舞いをすることが知られている。例えば、標数０では商特異点は log terminal になることが知られている。特に３次元以下のゴレンシュタイン特異点はクレパント特異点解消と呼ばれる特別な特異点解消が存在することが知られている。しかし、正標数における商特異点は一般には log terminal ではなく、３次元以下のゴレンシュタイン特異点でもクレパント特異点解消を持たないようなものが存在することも知られている。

正標数の商特異点がいつ log terminal になるかというのは重要な問題である。標数０における商特異点がいつ canonical や terminal になるかの判定については Reid―Shepherd-Barron―Tai 判定法が知られており、これを用いれば各元の作用の様子を調べることにより商特異点の singularity が判定できる。しかし、この判定法は正標数では機能しないことをすでに示していた。この論文の結果の一つとして標数３における３次元商特異点に対して log terminal になる特異点の必要十分条件を与えた。

また商特異点にいつクレパント特異点解消が存在するかという問題は標数０でも高次元の場合には未解決な問題であり、正標数でも興味深い問題である。また標数０ではクレパント特異点解消が存在するときにはそのオイラー標数と群の共役類の個数が一致するという Batyrev の定理があり、これは McKay 対応の一種である。Batyrev の定理の等式は正標数では対称群がアフィン空間に標準的に作用している場合や巡回群の場合などで成り立つことが知られていたが、標数が３で３次元の場合において成り立たない例をすでに構成していた。この論文ではその結果を拡張して直接クレパント特異点解消を構成することにより、クレパント特異点解消を持つ商特異点の系列を２つ得た。またその１つについては Batyrev の定理の等式が成り立たないことを示した。。

さらに安田氏によって証明された野性的 McKay 対応を使うことにより上述のオイラー標数に関する結果の別証明を与えることができた。野性的 McKay 対応は弦モチーフと呼ばれる商特異点の多くの情報をもつ不変量を群の情報から計算できるモチーフ積分を用いて計算できるというものである。その実現化の一つとして弦点数が存在する。野性的 McKay 対応を用いると弦点数は局所体のガロア拡大の重みつき数え上げを使って計算できることがわかる。対称群がアフィン空間に標準的に作用している場合を考えると野性 McKay 対応から整数論で使われる Serre-Bhargava の量公式の別証明が与えられる。よってこの局所体のガロア拡大の重みつき数え上げは別の形の量公式を計算しているとみなすことができる。弦点数はクレパント特異点解消が存在すればその有理点の個数と一致することが知られておりこの事実と Weil 予想を用いることによりオイラー標数を計算し前述の結果を再現することができた。

野性 McKay 対応の計算においては v-関数と呼ばれる関数の計算が重要となる。これまで計算されてきた例では v-関数はすべて局所体の拡大に対して定まる ramification filtration から計算することができていた。しかし今回 ramification filtration のみからでは計算できない例を構成することができた。このことから v-関数の計算に ramification filtration より多くの情報がなければ計算できないことがわかった。

様式 7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏　名　（　山本貴大　）		
	(職)	氏　名
論文審査担当者	主 査　教授	安田健彦
	副 査　教授	髙橋篤史
	副 査　教授	藤野修
	副 査　准教授	大川新之介
	副 査　准教授	藤田健人

論文審査の結果の要旨

本論文は正標数の商特異点や McKay 対応に関する複数の病的現象を明らかにした。非特異代数多様体への有限群作用から生ずる商特異点は、代数多様体の特異点の中で重要なクラスを成す。標数零の体上では、商特異点はよく調べられており、数々の良い性質を持っている。特に、商特異点の幾何学的性質と有限群やその表現の代数的性質を結びつける McKay 対応と呼ばれる種々の現象は近年注目を集める重要な分野を形成している。一方、整数論との関連で重要となる正標数の体上では、商特異点の振る舞いはそれほど良くないことは古くから認識されていた。特に、標数が群の位数を割り切る状況は野性的と呼ばれ、一般に解析が著しく困難になることが知られている。

本論文で得られた主要結果の一つは、標数３の３次元商特異点が対数端末特異点となるための必要十分条件として、考える有限群の位数が９で割り切れないという条件を導いたものである。対数端末特異点は極少モデル理論に登場する重要な特異点のクラスであり、標数零の商特異点は常に対数端末となる。しかし、正標数では対数端末になる場合とならない場合があり、いつ対数端末になるかという問題が重要となる。山本氏は標数３の３次元において、この問題に完全な解答を与えた。

二つ目の主要結果は、３次元野性的商特異点の二つの無限系列に対しクレパント特異点解消を構成し、そのうち一つの系列においては Batyrev の定理の正標数における反例となることを示した。Batyrev 氏は標数零で、クレパント特異点解消のオイラー標数と群の共役類の個数が等しいという McKay 対応の一種とみなせる結果を証明したが、山本氏は修士論文で正標数における反例を３つ構成していた。博士論文では、この反例を拡張し無限系列を構成することに成功した。オイラー標数の計算には具体的なクレパント特異点解消の構造を用いたが、無限系列の一部のものについては弦理論的点数、野性的 McKay 対応、Weil 予想を組み合わせた別の方法でも検証しており、結果の信頼性を高めている。また、この検証の中で冪級数体の拡大の重み付き数え上げに対する公式を得ており、これは Serre-Bhargava の量公式の類似とみなせるものである。

最後の主要結果は野性的 McKay 対応において重要な役割を果たす v 関数の性質に関するものである。v 関数は有限群の表現に対して定まる関数であり、局所体拡大の分岐を測るものだと解釈される。一方で、局所体拡大の分岐を測るものとしてガロア群の分岐フィルトレーションは古典的である。従来計算されていた全ての例において、v 関数は分岐フィルトレーションから決定されていた。そこで、これが常に成り立つのかどうかが問題となっていたが、本論文で v 関数が分岐フィルトレーションから決まらない例が初めて構成された。

この様に、本論文は多くの病的な現象を明らかにすることで、野性的商特異点や野性的 McKay 対応の研究分野の発展に大きく貢献した。得られた結果はいずれも、巧妙で複雑な計算を注意深く組み合わせることで初めて可能となるものであり、ここに山本氏の独創性が発揮されている。よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値のあるものと認める。