The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Studies on the Conditional Stationary Distribution in Markov Chains via Systems of Linear Inequalities
Author(s)	木村, 雅俊
Citation	大阪大学, 2021, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/82236
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

様式３

論　文　内　容　の　要　旨

氏　名　（　　木村　雅俊　　）	
論文題名	Studies on the Conditional Stationary Distribution in Markov Chains via Systems of Linear Inequalities （線形不等式系を介したマルコフ連鎖の条件付き定常分布に関する研究）

論文内容の要旨

第 1 章では，可算無限な状態空間上で定義されたマルコフ連鎖における定常分布の求解に関する既知の結果を紹介し，それを踏まえて本研究で考察する線形不等式系を介した解析の特徴を述べた．すなわち，本論文では条件付き定常分布が満たす線形不等式系を導出し，その不等式系が示す凸多面体（すなわち，条件付き定常分布を含む凸領域）の頂点を与えた．さらに，線形不等式系を介した先行研究についても述べ，本研究の占める位置を明らかにした．

第 2 章では，2 変数マルコフ連鎖における，レベルが N 以下であるという条件付きの定常分布について，線形不等式系を介して特徴づけた．はじめに，レベル依存 M/G/1 型マルコフ連鎖の特別な場合において，条件付き定常分布が逆向き R 行列によって与えられるという既知の結果を紹介した．続いて，その結果を 2 変数マルコフ連鎖全体にまで一般化した．すなわち，条件付き定常分布を逆向き R 行列の正規化された各行で与えられる行ベクトルを頂点とする凸多面体を用いて特徴づけた．この結果から条件付き定常分布の数値計算は逆向き R 行列の数値計算に帰着されることを示した．

第 3 章では，第 2 章の結果に基づいて，レベル依存 M/G/1 型マルコフ連鎖における条件付き定常分布の数値計算法を確立した．この数値計算法は，特別なレベル依存 M/G/1 型マルコフ連鎖に対して提案されていた既知の数値計算法と大部分が等しい．第 3 章の貢献は（i）確立した数値計算手法が任意のレベル依存 M/G/1 型マルコフ連鎖に対して適用できる点，すなわち先行研究中で設けられていた仮定を取り除いた点，ならびに（ii）計算結果である条件付き定常分布に対する許容誤差上界を予め与えられる点にある．

第 4 章では，非負整数値全体からなる状態空間上で定義されたエルゴード的なマルコフ連鎖において，特別な構造を仮定することなく,状態が N 以下であるという条件付きの定常分布を考察した.推移律行列の $(K+1)$ 次元北西角（正方）部分行列（$K \geq N$）を用いて，条件付き定常分布が満たす線形不等式系を導出した．さらに，その線形不等式系が表す凸多面体，すなわち条件付き定常分布を含む凸領域の頂点ベクトルも明らかにした．続いて北西角部分行列に加えて，K 以下の状態のうち，$K+1$ 以上のいずれかの状態から直接遷移可能な状態の集合が与えられたという条件の下で，条件付き定常分布が満たす線形不等式系を導出し，（北西角部分行列のみが与えられた場合と比較して）より小さな凸多面体を示した．さらに，(K,N)-skip-free 集合という新たな遷移構造を導入し，その性質を用いることで，上記の北西角部分行列と K 以下の状態の部分集合が与えられたという条件の下での，条件付き定常分布を含む最小の凸多面体を導出した．

第 5 章では，第 4 章の結果に基づいて，条件付き定常分布の数値計算について考察した．初めに，第 4 章の結果から切断増補近似手法に対して実践的な含意を与えた．続いて，崩壊（disaster）のある単一サーバ待ち行列モデルに対して定常系内客数分布の数値計算法を構築した．特に，系内客数に依存して到着ならびに崩壊が発生し，サービス時間長が独立かつ同一な一般分布に従う，非常に一般のモデルを対象に議論した．第 4 章の結果ならびにモデルの性質を議論することによって，定常分布を誤差上界と共に計算する手順を確立した．数値例を通して，切断増補近似手法の数値的な特徴についても議論した．

最後に，第 6 章において本研究の結論を述べた．

様式 7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏　名　（　木村　雅俊　）			
論文審査担当者		（職）	氏　名
	主 査	教授	滝根　哲哉
	副 査	教授	駒谷　和範
	副 査	講師	木村　達明
	副 査	教授	丸田　章博
	副 査	教授	馬場口　登
	副 査	教授	三瓶　政一
	副 査	教授	宮地　充子
	副 査	教授	井上　恭
	副 査	教授	鷲尾　隆

論文審査の結果の要旨

マルコフ連鎖は可算な状態空間をもつ確率過程の一種であり，確率的な要素を含むシステムのモデル化と解析を行うための基本的な数学的道具の一つである．例えば，情報通信ネットワークの性能評価で用いられる大多数の待ち行列モデルの挙動はマルコフ連鎖を用いて表現される．マルコフ連鎖において最も重要な指標は定常分布である．エルゴード的なマルコフ連鎖の定常分布は大域平衡方程式と呼ばれる連立線形方程式の唯一解として与えられる．しかし，状態数が膨大あるいは無限である場合，連立線形方程式の解を直接，数値計算することは困難である．このような場合の対処法として，主に二つの接近法が知られている．一つはマルコフ連鎖の状態遷移構造を利用することによって，有限次元行列多項式の最小非負解を用いて定常分布の数値計算アルゴリズムを構築する行列解析法と呼ばれるものである．もう一つは元のマルコフ連鎖を数値計算可能な規模をもつ他の有限状態マルコフ連鎖で近似する切断手法と呼ばれるものである．

本論文は，非負の整数を状態空間にもつエルゴード的な連続時間マルコフ連鎖において状態が N 以下であるという条件下での条件付き定常分布を議論している．議論の出発点は，条件付き定常分布が満たす連立線形不等式（以下，不等式系）であり，これは条件付き定常分布が存在しえる第一象限に位置する凸領域を定める．本論文では，条件付き定常分布を相対的内部に含む凸領域に関する研究，ならびに，このような凸領域の性質を利用した条件付き定常分布の数値計算アルゴリズムの開発に関する研究をまとめたものであり，その成果の概要は以下の通りである．

（1）従来の研究では，マルコフ連鎖がレベル依存 M/G/1 型と呼ばれる状態遷移構造に関する性質をもち，かつ，特別な条件を満たす場合についてのみ，逆向き R 行列と呼ばれる行列を用いて条件付き定常分布が満たす不等式系を与えることができること，ならびに，この結果に基づく条件付き定常分布の数値計算アルゴリズムが知られていた．本研究では，任意のエルゴード的な連続時間マルコフ連鎖においても，逆向き R 行列を用いて条件付き定常分布が満たす不等式系を与えることができることを証明している．この結果，従来の研究で提案されたレベル依存 M/G/1 型マルコフ連鎖の特別な場合に対する条件付き定常分布の数値計算アルゴリズムが，任意のレベル依存 M/G/1 型マルコフ連鎖に対しても適用可能であることが直ちに示される．さらに，本研究では条件付き定常分布の数値計算結果が内包する誤差の上界をアルゴリズムの入力として与えることができるように，従来の数値計算アルゴリズムを改良している．レベル依存 M/G/1 型マルコフ連鎖は確率的な要素を含むシステムのモデル化において頻出するため，これらの成果は応用上も重要である．

（2）任意のエルゴード的な連続時間マルコフ連鎖に対して，推移律行列の北西角に位置する部分行列のみを用いて条件付き定常分布が満たす不等式系を与えるとともに，南西角に位置する部分行列に関する情報の一部を利用

することにより，条件付き定常分布を相対的内部に含む凸領域を同定している．さらに，注目する推移律行列の北西角を拡大した場合において，条件付き定常分布が存在し得る最小の凸領域を同定するアルゴリズムを与えている．

（３）推移律行列の北西角に位置する部分行列から得られる凸領域に関する（２）の結果は，従来から広く用いられてきた前述の切断手法と様々な関連があることを指摘している．特に線形増補法と呼ばれる簡便な切断近似法が一般性を失わないこと，ならびに，線形増補法を用いた際の増補ベクトルの合理的な選択法を示すなど，実用上，非常に重要な成果を得ている．さらに，崩壊と呼ばれる特殊な事象によって系内の客が全て消え去る可能性がある待ち行列モデルを取り上げ，線形増補法を用いた切断近似を適用する際の問題点を明らかにすると共に，その解決策を与えている．

従来，マルコフ連鎖の定常分布は大域平衡方程式そのものを対象に議論されてきており，不等式系による特徴づけは，前述のレベル依存 M/G/1 型マルコフ連鎖における特殊例に対する研究を除いて行われていなかった．本論文は不等式系を介して，連続時間マルコフ連鎖の条件付き定常分布の特徴づけとそれに基づく数値計算アルゴリズムを開発しており，極めて新規性が高い．加えて，本研究で開発された条件付き定常分布に対する数値計算アルゴリズムは，離散時間マルコフ連鎖にも直接適用可能であるため，その適用範囲も非常に広い．

このように，新しい接近法を取ることで，理論面，実用面の両方において，大きな成果を挙げている．マルコフ連鎖は応用面においても非常に重要な確率過程であり，本研究で得られた知見は，さらなる理論の発展，ならびに，より効率的な数値計算アルゴリズムの開発に対しても非常に有益である．よって，本論文を博士論文として価値あるものと認める．