Péraire, Y.
Osaka J. Math.
29 (1992), 267-297

THEORIE RELATIVE DES ENSEMBLES INTERNES

YVES PÉRAIRE

(Reçu le 20 mai, 1991)

Introduction

L'un des intérêts de l'analyse non standard est la production de critères externes pour des concepts classiques. Par exemple, le critère de continuité pour une fonction f en un point x:

$$h \approx 0 \Rightarrow f(x+h) \approx f(x)\,.$$

Cependant, ces caractérisations ne s'appliquent qu'à une classe d'objets, ceux qui sont standard [14]. Dans cet article, nous nous proposons de dévlopper une version relative de la théorie IST de E. Nelson qui permet d'appliquer les critères externes à tout objet, quel qu'il soit. On espère justifier ainsi le calcul infinitésimal relatif qui pourrait se révéler utile dans la modélisation des phénomènes présentant plus de deux ordres de grandeur. Notre point de vue, conceptuellement proche de celui de Gordon exposé dans [3], est le suivant: plutôt que de considérer que l'univers est constitué de deux classes d'ensembles, celle des ensembles standard et celle des ensemble non standard, nous considèrerons que la collection des ensembles peut être totalement ordonnée relativement à la standardicité au moyen d'un prédicat binaire. L'idée d'utiliser un prédicat à deux places a été énoncée pour la première fois clairement en 1985, à notre connaissance, et sous cette forme, par Guy Wallet co-auteur de [14].

1. Présentation de la théorie

Comme annoncé dans l'introduction, le langage de cette nouvelle théorie des ensembles, que nous appellerons RIST, comporte un prédicat non défini à deux places en plus du classique prédicat d'appartenance de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel, ce prédicat sera noté $\mathcal{SR}$.

Si x et y sont deux ensembles de notre théorie, l'expression $x\mathcal{SR}y$ se lira: "x est standard relativement à y".

Nous appellerons formule *interne* toute formule bien formée du langage de RIST dans laquelle n'intervient pas le prédicat $\mathcal{SR}$.

Si α est un ensemble et si F est une formule quelconque du langage de RIST nour écrirons:

$\forall^{\alpha} xF$ pour $\forall x\,(x\,\mathcal{SR}\,\alpha \Rightarrow F)$, $\forall^{\neg\alpha} xF$ pour $\forall x((\neg(x\,\mathcal{SR}\,\alpha)) \Rightarrow F)$,
$\forall^{\alpha\text{fin}} xF$ pour $\forall^{\alpha} x(x \text{ fini} \Rightarrow F)$,
$\exists^{\alpha} xF$ pour $\exists x(x\,\mathcal{SR}\,\alpha \wedge F)$,
$\exists^{\alpha\text{fin}} xF$ pour $\exists^{\alpha} x(x \text{ fini} \wedge F)$.

Nous dirons que les expressions $\forall^{\alpha}$, $\exists^{\alpha}$, $\forall^{\neg\alpha}$, $\exists^{\neg\alpha}$ sont des quantificateurs externes. Si $x\mathcal{SR}y$, nous dirons aussi que *x est y-standard.*

Les axiomes de RIST contiennent tous les axiomes de Z.F.C. relativisés aux formules internes. Cette dernière précision est importante, elle implique par exemple que l'on ne peut pas utiliser le schéma de compréhension pour définir un ensemble dont les éléments sont les entiers $\mathbf{N}$-standard. Toutefois, il nous arrivera par abus de langage de parler de tels "ensembles" bien qu'ils ne soient pas des ensembles de RIST. Nous dirons que ce sont des *ensembles externes.*

A ces axiomes nous ajouterons les suivants:

$\mathcal{SR}_1$: $\forall x\; x\mathcal{SR}x$
$\mathcal{SR}_2$: $\forall x\,\forall y\,(x\mathcal{SR}y \vee y\mathcal{SR}x)$.
$\mathcal{SR}_3$: $\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x\mathcal{SR}y \wedge y\mathcal{SR}z \Rightarrow x\mathcal{SR}z)$.

On peut résumer les axiomes $\mathcal{SR}_1$, $\mathcal{SR}_2$ et $\mathcal{SR}_3$ en disant que la "collection" des ensembles est totalement "pré-ordonnée" par $\mathcal{SR}$.

Les trois schémas d'axiomes qui suivent sont analogues aux schémas (I), (S) et (T) de E. Nelson dans [12].

Schéma d'axiomes de transfert: (T)

Si $F(x, t_1, t_2, \cdots, t)$ est une formule interne avec $x, t_1, \cdots, t_k$ comme seules variables libres et si α un ensemble fixé alors on a le principe de transfert (T_{α}):

$$T(\alpha, F):\quad \forall^{\alpha} t_1\,\forall^{\alpha} t_2 \cdots \forall^{\alpha} t_k(\forall^{\alpha} xF(x, t_1, t_2, \cdots, t_k) \Rightarrow \forall\, xF(x, t_1, t_2, \cdots, t_k))\,.$$

Il découle du schéma d'axiome ci-dessus qu'un ensemble X défini d'une manière unique par une formule close interne sans paramètres est α-standard pour tout α. On dire plus simplement qu'il est *standard* et on écrira st(X).

Schéma d'axiomes d'idéalisation: (I)

Si $F(x, y)$ est une formule interne ayant x, y, comme variables libres et peut-être d'autres variables libres si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k, \beta$ sont des ensembles fixés tels que β n'est pas $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_k)$-standard, alors on a les principes d'idealisation sur plusieurs niveaux suivants:

Idéalisation contrôlée:

$I(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k; \beta; F)$:

$$[\forall^{\alpha_1,\text{fin}} z_1 \cdots \forall^{\alpha_k,\text{fin}} z_k\, \exists^{\beta} y\, \forall x_1 \in z_1 \cdots \forall x_k \in z_k\, F(x_1, \cdots, x_k, y)]$$
$$\Leftrightarrow \exists^{\beta} y\, \forall^{\alpha_1} x_1 \cdots \forall^{\alpha_k} x_k\, F(x_1, \cdots, x_k, y)\,.$$

Idéalisation non contrôlée:
$I(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_k; \cdot; F)$:

$$[\forall^{\alpha_1,\mathrm{fin}} z_1 \cdots \forall^{\alpha_k,\mathrm{fin}} z_k \, \exists y \, \forall x_1 \in z_1 \cdots \forall x_k \in z_k \, F(x_1, \cdots, x_k, y)]$$
$$\Leftrightarrow \exists y \, \forall^{\alpha_1} x_1 \cdots \forall^{\alpha_k} x_k \, F(x_1, \cdots, x_k, y) .$$

REMARQUES: Si ϕ désigne l'ensemble vide, et si F est une formule interne $I(\phi; \cdot; F)$ n'est autre que l'axiome d'idéalisation de IST, formulé autrement.

Si la nécessite du "contrôle de l'idéalisation" nous est apparue assez tôt, au fur et à mesure de nos tentatives d'appliquer à l'analyse une version relative de IST, la nécessité de principes d'idéalisation sur plusieurs niveaux ne s'est dégagée qu'au moment où nous nous sommes intéressés à la syntaxe de RIST. Par exemple, si $F(x, y, z)$ est une formule interne avec trois variables libres, n'ayant pas de constantes, et si $G \equiv \exists^{\gamma} z \, \forall^{\alpha} x \, \forall^{\beta} y \, F(x, y, z)$, avec γ non (α, β)-standard, alors le principe d'idéalisation contrôlée sur deux niveaux $I(\alpha, \beta; \gamma; F)$ permet de commuter le groupe de quantificateurs externes "$\forall^{\alpha} \forall^{\beta}$" et le quantificateur externe "$\exists^{\gamma}$": plus précisément on a: $G \Leftrightarrow \forall^{\alpha,\mathrm{fin}} x' \, \forall^{\beta,\mathrm{fin}} y' \, \exists^{\gamma} z \, \forall x \in x' \forall y \in y' \, F(x, y, z)$.

On voit maintenant qu'en appliquant trois transferts successifs, après avoir préalablement, si nécessaire, permuté "$\forall^{\alpha,\mathrm{fin}} x'$" et "$\forall^{\beta,\mathrm{fin}} y'$", G est équivalent à la formule interne:

$$\forall^{\mathrm{fin}} x' \, \forall^{\mathrm{fin}} y' \, \exists^{\gamma} z \, \forall x \in x' \forall y \in y' \, F(x, y, z) .$$

Nous allons maintenant donner une version relative du principe de standardisation de I.S.T. Le schéma d'axiome de standardisation de I.S.T. affirme que pour tout référentiel standard et *toute formule* bien formée du langage de I.S.T., il existe un ensemble standard dont les éléments standard sont exactement ceux du référentiel qui satisfont la formule.

Pour énoncer un principe relatif de même nature, il faut prendre quelques précautions.

En effet, soit $\boldsymbol{N}$ l'ensemble des entiers naturels, et n_0 un entier fixé qui ne soit pas standard. L'existence d'un tel entier découle facilement de $I(\phi; \cdot; F)$ appliqué à la formule $F(x, y) \equiv (x \in \boldsymbol{N} \wedge y \in \boldsymbol{N} \wedge x \neq y)$. On voit facilement qu'il n'existe aucun ensemble E n_0-standard tel que pour tout p n_0-standard, $p \in E$ si et seulement si p n'est pas standard. En effet, si un tel ensemble E existait, il serait non vide puisqu'il contiendrait n_0, il contiendrait donc un plus petit élément m_0. Par (T), on obtient que m_0 est n_0-standard. D'autre part, il est non standard (c'est la propriété caractéristique des éléments n_0-standard de E), on a donc m_0 différent de O. Par (T), on obtient que que $m_0 - 1$ est n_0-standard et non standard. Ces deux dernières propriétés de $m_0 - 1$ impliquent qu'il est dans E et cela contredit la minimalité de m_0.

On voit donc qu'un principe relatif de standardisation ne saurait s'appliquer à toutes les formules de langage de R.I.S.T..

En fait, pour chaque ensemble fixé α, nous aurons un principe de standardisation au niveau α. Celui-ci s'appliquera à une classe particulière de formules externes, les formules *α-externes*. Si nous notons $\mathcal{F}$ la collection des formules du langage de RIST, $\mathcal{F}_\alpha$ la famille des formules α-externes, alors $\mathcal{F}_\alpha$ sera la plus petite sous-collection de $\mathcal{F}$ telle que:

i) les formules élémentaires: $(x \in y)$, où x et y sont soit des variables soit des constantes, sont dans $\mathcal{F}_\alpha$,

ii) si F et G sont dand $\mathcal{F}_\alpha$, il en est de même de $\neg F$ et de $F \Rightarrow G$,

iii) si $F(x, y)$ est une formule de $\mathcal{F}_\alpha$ alors $\exists\, y\, F(x, y)$ est une formule de $\mathcal{F}_\alpha$,

iv) si $F(x, y)$ est une formule de $\mathcal{F}_\alpha$ et si β est un ensemble tel que α soit β-standard, alors $\exists^\beta y\, F(x, y)$ est dans $\mathcal{F}_\alpha$.

Nous particulariserons dans $\mathcal{F}_\alpha$ une sous famille $\mathcal{F}'_\alpha$, dont les éléments seront appelés des formules *strictement α-externes*.

$\mathcal{F}'_\alpha$ est la plus petite sous-collection de $\mathcal{F}$ contenant les formules élémentaires décrites dans i), qui vérifie les conditions de fermeture ii) iii) et à la place de iv) la condition suivante:

v) si $F(x, y)$ est une formule de $\mathcal{F}'_\alpha$, alors $\exists^\alpha y\, F(x, y)$ est une formule de $\mathcal{F}'_\alpha$,

Nous pouvons énoncer maintenant:

Schéma d'axiome de standardisation: (S)

Si α est un ensemble, et si $F(v, \cdots)$ est une formule α-externe, alors:

$$(S(\alpha, F)): \quad \forall^\alpha y\, \exists^\alpha z\, \forall^\alpha t\, (t \in z \Leftrightarrow (t \in y \wedge F(t, \cdots))\,.$$

2. Quelques conséquences directes des axiomes

Un référentiel Y et une formule quelconque F étant donnés, on ne peut pas en général parler de l'ensemble des éléments de Y qui satisfont à F car le schéma de compréhension ne peut être appliqué qu'à des formules internes; toutefois nous permettrons d'ecrire une expression de la forme $E = \{t \in Y / F(t)\}$. L'expression entre accolades ne définit pas, en général, un ensemble de la théorie des ensembles RIST; cependant nous dirons, par un abus de langage contrôlé, que E est un ensemble externe.

Pour chaque référentiel α-standard fixé y, et chaque formule α-externe F, l'ensemble α-standard z dont l'existence est affirmée par $S(\alpha, F)$ est unique car deux parties α-standard de y définies au moyen de $S(\alpha, F)$, ont les mêmes points α-standard et il suffit d'appliquer (T_α) pour voir quelles sont égales. Nous noterons set ensemble $z = \mathrm{st}_\alpha \{t \in y / F(t)\}$ ou $z = \mathrm{st}\{t \in y / F(t)\}$ dans le cas où α est standard. On dira que z est le α-standardisé, ou le standardisé (dans le

second cas), de l'ensemble externe $E=\{t\in y/F(x;t)\}$.

La demonstration des théorèmes 1,2 et 3 qui suivent est la quasi-copie de la démonstration des théorèmes 1.2, 1.1 et 1.3 de [12].

Théorème 1. *Pour tous β et α tels que β n'est pas α-standard il existe un ensemble fini β-standard contenant tous les ensembles α-standard.*

Démonstration. Soient α et β tels que $\neg(\beta\ \alpha\text{-standard})$ et soit la formule interne: $F(x,y)\equiv(x\in y\wedge y \text{ fini})$. On a: $\forall^{\alpha,\text{fin}}\, x'\ \exists^{\beta} y\ \forall x\in x'(x\in y\wedge y \text{ fini})$. En effet, pour chaque x'fini et α-standard, il suffit de prendre $y=x'$, comme par hypothèse β n'est pas α-standard, il découle de $\mathcal{SR}_2$ que α est β-standard; donc, par $\mathcal{SR}_3$, on a que y est β-standard. On applique ensuite $I(\alpha;\beta;F)$, on obtient: $\exists^{\beta} y\ \forall^{\alpha} x(x\in y\wedge y \text{ fini})$, qui s'écrit aussi, $\exists^{\beta} y\ [y \text{ fini}\wedge\forall^{\alpha} x(x\in y)]$.

Corollaire. *Pour tous α et β avec β non α-standard, et tout ensemble* X, *il existe un ensemble fini β-standard ayant exactement les mêmes éléments α-standard que X.*

Démonstration. Soient α et β tels que β non α-standard, et soit X un ensemble quelconque. Si F est un ensemble fini contenant tous les ensembles α-standard, il est clair que l'ensemble $F_X=F\cap X$, est fini et contient les éléments α-standard de X et seulement ceux de X.

Théorème 2. *Soit X un ensemble. Alors, X est fini et α-standard si et seulement si tous ses éléments sont α-standard.*

Démonstration. Soit formule $F(x,y)\equiv(x\neq y\wedge y\in X)$. Le membre de droite de l'équivalence $I(\alpha;\cdot;F)$ est équivalent à:
$\exists y\in X(\neg(y\ \alpha\text{-standard}))$. En prenant la négation des membres extrêmes de $I(\alpha;\cdot;F)$ on obtient: $\forall y\in X\ (y\ \alpha\text{-standard})\Leftrightarrow\exists^{\alpha,\text{fin}} z\ \forall y\ \exists x\in z(y\notin X\vee x=y)$
$\Leftrightarrow\exists^{\alpha,\text{fin}} z\ (X\subset z)$.
Si X est α-standard et fini, il suffit de prendre $z=X$ pour voir que tous les éléments de X sont α-standard. Réciproquement, si tout élément de X est α-standard alors $X\in\mathcal{P}(z)$ pour un certain z α-standard et fini; mais si z est fini et α-standard, alors il en est de même pour $\mathcal{P}(z)$ donc, d'après ce qui vient d'être démontré, cela implique que tout élément de $\mathcal{P}(z)$ est α-standard. En particulier, X est α-standard comme de plus il est contenu dans un ensemble fini, il est également fini.

REMARQUES. 1. Il découle du théorème 2 que pour tout ensemble x, il existe un y qui n'est pas x-standard, il suffit de prendre un ensemble infini E contenant x, cet ensemble contiendra un élément non x-standard.
2. On obtient une théorie (RIST)' équivalente à RIST en remplaçant le principe d'idéalisation non contrôlée par l'axiome $\mathcal{SR}_4$; $\forall x\exists y\neg(y\mathcal{SR}x)$. En effet, la

remarque précédente exprime que $\mathcal{SR}_4$ est un théorème de RIST. Montrons que, réciproquement, si $F(x, y)$ est une formule interne ayant x, y, comme variables libres et peut-être d'autres variables libres, et si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$, β sont des ensembles fixes tels que β n'est pas $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$-standard, alors l'énoncé (1):

$$[\forall^{\alpha_1,\mathrm{fin}} z_1 \cdots \forall^{\alpha_k,\mathrm{fin}} z_k \, \exists y \, \forall z_1 \in z_1 \cdots \forall x_k \in z_k \, F(x_1, \cdots, x_k, y)]$$
$$\Leftrightarrow \exists y \, \forall^{\alpha_1} x_1 \cdots \forall^{\alpha_k} x_k \, F(x_1, \cdots, x_k, y) \,,$$

est un théorème de (RIST)'.

Supposons vérifié le premier membre de l'équivalence. Pour toute valeur des paramètres de F, il découle des axiomes $\mathcal{SR}_2$ et $\mathcal{SR}_3$ qu'il existe un γ tel que $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ et tous les paramètres de F soient γ-standard. Par $\mathcal{SR}_4$, on obtient un β tel que β ne soit pas γ-standard. On a $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ et tous les paramètres de F β-standard donc, par (T_β) on a:

$$[\forall^{\alpha_1,\mathrm{fin}} z_1 \cdots \forall^{\alpha_k,\mathrm{fin}} z_k \, \exists y \, \forall x_1 \in z_1 \cdots \forall x_k \in z_k \, F(x_1, \cdots, x_k, y)]$$
$$\Leftrightarrow [\forall^{\alpha_1,\mathrm{fin}} z_1 \cdots \forall^{\alpha_k,\mathrm{fin}} z_k \, \exists^{\beta} y \, \forall x_1 \in z_1 \cdots \forall x_k \in z_k \, F(x_1, \cdots, x_k, y)] \,.$$

Il suffit d'apliquer $I(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k; \beta; F)$ pour voir que le second membre de (1) est vérifié. Pour montrer l'mplication converse, partons de l'énoncé: $\exists y \, \forall^{\alpha_1} x_1 \cdots \forall^{\alpha_k} x_k \, F(x_1, \cdots, x_k, y)$. Donnons nous un y tel que $\forall^{\alpha_1} x_1 \cdots \forall^{\alpha_k} x_k \, F(x_1, \cdots, x_k, y)$. Il existe un ensemble β tel que y soit β-standard et que β ne soit pas $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$-standard (c'est une conséquence de $\mathcal{SR}_2$ et $\mathcal{SR}_4$), on a donc $\exists^{\beta} y \, \forall^{\alpha_1} x_1 \cdots \forall^{\alpha_k} x_k \, F(x_1, \cdots, x_k, y)$ d'où l'on tire, en appliquant $I(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k; \beta; F)$ de droite à gauche,

$$\forall^{\alpha_1,\mathrm{fin}} z_1 \cdots \forall^{\alpha_k,\mathrm{fin}} z_k \, \exists^{\beta} y \, \forall x_1 \in z_1 \cdots \forall x_k \in z_k \, F(x_1, \cdots, x_k, y) \,, \quad \text{qui implique}$$
$$\forall^{\alpha_1,\mathrm{fin}} z_1 \cdots \forall^{\alpha_k,\mathrm{fin}} z_k \, \exists y \, \forall x_1 \in z_1 \cdots \forall x_k \in z_k \, F(x_1, \cdots, x_k, y) \,.$$

Théorème 3. (Théorème relatif de construction) *Si $A(v, w, \cdots)$ est une formule α-externe alors*:

$$(C_\alpha) \; \forall^{\alpha} X \, \forall^{\alpha} Y [(\forall^{\alpha} x \in X \, \exists^{\alpha} y \in Y \, A(x, y, \cdots)$$
$$\Leftrightarrow \exists^{\alpha} f \in Y^X \, \forall^{\alpha} x \in X \, A(x, f(x), \cdots)] \,.$$

Démonstration. Soit α un ensemble X et Y des ensembles α-standard et $A(v, w)$ une formule α-externe. Si pour tout x dans X il existe un unique y α-standard dans Y tel que $A(x, y)$ alors il suffit de prendre $f = \mathrm{st}_\alpha \{(x, y) \in X \times Y / A(x, y)\}$. Dans le cas général, considérons la formule: $B(x, E) \equiv \forall^{\alpha} y \in E \, (y \in E \Leftrightarrow (y \in Y \wedge A(x, y)))$ puisque $A(x, y)$ est une formule α-externe, il est clair qu'il en est de même de $B(x, E)$. A tout x α-standard dans X on peut associer une partie α-standard, E_x, de Y telle que $B(x, E_x)$. L'ensemble E_x est nécessairement égal à $\mathrm{st}_\alpha \{y \in Y / A(x, y)\}$ il est donc unique aussi, d'après la première

partie de cette démonstration il existe une application α-standard F de X dans $\mathcal{P}(Y)$ tells que pour tout x t-standard, $F(x)=E_x$. Par hypothèse E_x est non vide donc, l'axiome du choix relativisé aux ensembles α-standard nous permet d'affirmer qu'il existe une application f, α-standard, de X dans Y telle que pour tout x α-standard de X $f(x)\in E_x$ et donc, telle que $A(x, f(x))$.

Le théorème précédent affirme que l'on a défini complètement une application α-standard dès que l'on a choisi l'image des éléments α-standard, cependant, la "procédure de choix" ne doit pas être trop externe.

EXEMPLE. Prenons pour X une partie finie de $\boldsymbol{N}$ contenant tous les entiers standard et prenons $Y=\boldsymbol{N}$. Alors, il n'existe aucune application f de X dans Y telle que $f(n)=O$ si n est standard et $f(n)=1$ si non. En effet, soit f une telle application et soit $E=\{n\in X/f(n)=O\}$. E contient tous les entiers standard or, ceux-si ne constituent pas un ensemble (Ceci se démontre comme l'énoncé analogue de IST) donc E contient un n_0 non standard. On a donc $f(n_0)=1$ ce qui contredit le fait que $n_0\in E$.

REMARQUES. 1. Si X est α-standard et si F est un ensemble fini contenant tous les éléments α-standard de X alors $X=\mathrm{st}_\alpha F\cap X$.
2. Si X est infini, l'ensemble F ci-dessus n'est pas α-standard car s'il en était ainsi on pourrait, en utilisant l'axiome de transfert, montrer que $X\subset F$ ce qui contredit le fait que X est infini.
3. Il découle du théorème 2 que si n et p sont deux entiers tels que $p<n$ alors, p est n-standard. Cela implique que si n n'est pas α-standard alors, les entiers α-standard sont tous inférieurs a n.

On voit en lisant les théorèmes 1 et 2 à quel point la définition mathématique dans ZFC du mot fini lui donne un sens différent de son sens intuitif.

On peut traduire la remarque 3 précédente en disant que l'ordre usuel dans $\boldsymbol{N}$ est compatible avec la standardicité. Nous allons montrer que la propriété d'existence d'un ordre compatible avec la standaridicité est liée à la dénombrabilité de X. Plus précisément, nous dirons qu'un ordre $\leqslant$ sur un ensemble X α-standard est *compatible avec la standardicité*, si, pour tout x tel que α x-standard, $y\leqslant x$ implique y x-standard (Dans le cas où X est standard, il est clair que la condition α x-standard set superflue).
Nous enoncerons alors:

Théorème 4. *Si X est un ensemble α-standard, alors X est dénombrable si et seulement si il existe sur X un ordre total α-standard compatible avec la standardicité.*

Demonstration. Supposons X α-standard et dénombrable. Il existe alors une bijection α-standard φ de X sur $\boldsymbol{N}$. Soit l'ordre $\leqslant$ sur X défini par $y\leq x$ si

et seulement si $\varphi(y) \leqslant \varphi(x)$. On a bien une relation α-standard, et l'ordre est total. Soient x et y deux éléments de X tels que α soit x-standard et $y \leqslant x$; les conditions φ α-standard et α x-standard impliquent φ x-standard donc $\varphi(x)$ est x-standard; comme $\varphi(y) \leq \varphi(x)$ la remarque 3 nous dit que $\varphi(y)$ est $\varphi(x)$-standard, il est donc x-standard, l'application φ^{-1} étant x-standard (comme φ), on obtient que $y = \varphi^{-1}[\varphi(y)]$ est x-standard.

Réciproquement, supposons donné sur un ensemble X α-standard, un ordre total $\leqslant$ α-standard compatible avec la standardicité. Soit F une partie finie de X telle que $X = \mathrm{st}_\alpha F$. Pour tout $x \in X$, posons $X_x = \{y \in X / y \leqslant x\}$, n_x = cardinal de X_x. Dans le cas où x est α-standard, tous les éléments de X_x sont α-standard donc, $X_x \subset F$. Puisque F est fini, il en est de même de X_x; n_x est donc un entier α-standard. On peut donc utiliser le théorème de constuction pour définir une application φ: $X \to \boldsymbol{N}$, en associant à tout élément x α-standard l'entier n_x; on vérifie que φ est injective, X est donc denombrable.

3. L'analyse dans RIST (Quelques éléments)

On utilise le predicat $\mathcal{SR}$ pour définir des relations d'equivalence infinitesimale de tous niveaux. Soient x, y et t des nombres réels, nous dirons que x est t-(infinitesimalement équivalent) à y, et nous écrirons $x \overset{t}{\approx} y$, si pour tout réel $\varepsilon > 0$, t-standard, on a $|y - x| < \varepsilon$.

Voici sans preuves quelques propriétés immédiates des relations $\overset{t}{\approx}$.

- Chaque $\overset{t}{\approx}$ est une relation d'équivalence.
- Si s est t-standard, alors $x \overset{t}{\approx} y$ implique $x \overset{s}{\approx} y$.

En calquant nos démonstrations sur la preuve des caractérisations dans I.S.T. quand les constantes sont standard, on obtient sans difficulté.

Théorème 5. *Si E est une parite t-standard de $\boldsymbol{R}$, et si x est un point t-standard alors, $x \in$ int E (Intérieur de$E$) si et seulement si*: $\forall y \in \boldsymbol{R}\ (y \overset{t}{\approx} x \Rightarrow y \in E)$.

Théorème 6. (Critère externe de continuité) *Si f est une application t-standard de $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$ et si t est s-standard alors f est continue au point x t-standard si et seulement si*: $\forall y \in \boldsymbol{R}\ (y \overset{s}{\approx} x \Rightarrow f(y) \overset{t}{\approx} f(x))$.

Théorème 7. *Si f est une application t-standard de $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$ alors, si t est s-standard, f est uniformément continue si et seulement si*: $\forall x, y \in \boldsymbol{R}\ (y \overset{s}{\approx} x \Rightarrow f(y) \overset{t}{\approx} f(x))$.

Théorème 8. *Soient (f_n) une suite t-standard d'applications de $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$, et f une applications t-standard de $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$. Supposons que t soit s-standard. Alors on a*:

(f_n) converge uniformément vers f si et seulement si: $\forall n \in \boldsymbol{N}\ \forall x \in X\ (n \overset{s}{\approx} +\infty \Rightarrow f_n(x) \overset{t}{\approx} f(x))$,

Ici, $n^s \approx +\infty$ *signifie* $1/n^s \approx 0$.

Utilisons les caractérisations ci-dessus pour établir que la limite uniforme d'une suite de fonctions continues, est une fonction continue.

Soit (f_n) une suite de fonctions continues de X dans $\boldsymbol{R}$ qui converge uniformément vers une fonction f de $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$.

Soient $x \in \boldsymbol{R}$ et fixons un ensemble t tels que x et (f_n) soient t-standard. Le principe de transfert implique que f est aussi t-standard. Soit m un entier tel que $m^t \approx +\infty$, on a alors f_m m-standard et t m-standard.

Pour tout $y \in \boldsymbol{R}$ tel que $y^m \approx x$ on a d'aprés les théorèmes 8 et 7:

$$f(y)^t \approx f_m(y)^m \approx f_m(x)^t \approx f(x) .$$

On a donc: $y^m \approx x \Rightarrow f(y)^t \approx f(x)$. Il suffit d'appliquer le théorème 6 pour conclure.

Il existe une démonstration analogue à celle-ci dans I.S.T., cependant elle ne s'applique qu'à des objets standard. D'autre part, du fait que l'on ne dispose pas de plusieurs niveau de standardicité dans I.S.T., il est nécessaire de faire appel au principe de permanence.

Il est également possible de donner une caractérisation directe, dans R.I.S.T., de l'ensemble des points de continuité de la *limite simple* d'une suite de fonctions continue. Nous aurons:

Théorème 9. *Soient* (f_n) *une suite d'applications continues de* $\boldsymbol{R}$ *dans* $\boldsymbol{R}$, *qui converge ponctuellement vers une applications* f. *Soient* t *un ensemble tel que* $((f_n), f)$ *est* t*-standard,* $\varepsilon^t \approx 0$ *un réel strictement positif, et un entier* $n^\varepsilon \approx +\infty$. *Si on note* $E(n, \varepsilon) = \{x \in \boldsymbol{R} / |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}$, *alors on a, pour tout* $x \in \boldsymbol{R}$ *tel que* x t*-standard:* f *continue au point* $x \Leftrightarrow x \in \operatorname{int} E(n, \varepsilon)$.

Démonstration abrégée. Soit x t-standard tel que f soit continue au point x et soit $y^n \approx x$ on a:

$f_n(y)^n \approx f_n(x)^\varepsilon \approx f(x)^n \approx f(y)$ d'où l'on tire $f_n(y)^\varepsilon \approx f(y)$ puis $y \in E(n, \varepsilon)$ et enfin, $x \in$ int $E(n, \varepsilon)$.

(f_n cont. ; $\lim f_n = f$; f cont. en x)

Réciproquement, soit x t-standard, $x \in \operatorname{int} E(n, \varepsilon)$. Pour tout $y^n \approx x$, on a:

$f(y)^t \approx f_n(y)^n \approx f_n(x)^\varepsilon \approx f(x)$. Donc $f(y)^t \approx f(x)$, et f est continue au point x.

($y \in E(n, \varepsilon)$; f_n cont. ; $\lim f_n = f$)

On démontre facilement, en s'inspirant de la preuve du théoréme analogue dans I.S.T.

Théorème 10. *Si* K *est une partie de* $\boldsymbol{R}$, *alors pour tout* s *tel que* s *n'est pas*

K-standard, on a:

$$K \text{ compact} \Leftrightarrow [\forall x \in K\ \exists^K a \in K(x^K \approx a)] \Leftrightarrow [\forall^s x \in K\ \exists^K a \in K(x^K \approx a)].$$

4. Consistance relative de RIST

A. Extensions successives ajustées d'une superstructure

Pour établir la consistance relative de RIST, nous avons besoin de construire une suite intuitivement finie d'extensions $\boldsymbol{S} \to {}^2\boldsymbol{S} \to \cdots {}^p\boldsymbol{S} \to \cdots {}^w\boldsymbol{S}$, d'un ensemble $\boldsymbol{S}$ convenablement choisi, qui satisfont à de bonnes propriétés. Nous anticiperons en annonçant déjà que ${}^2\boldsymbol{S}$ sera la $\boldsymbol{U}$-ultrapuissance de $\boldsymbol{S}$ selon un ultrafiltre $\boldsymbol{U}$ correctemment choisi, que ${}^3\boldsymbol{S}$ sera la $*\boldsymbol{U}$-*ultrapuissance de ${}^2\boldsymbol{S}$, ${}^4\boldsymbol{S}$ sera la $**\boldsymbol{U}$-**ultrapuissance de ${}^3\boldsymbol{S}$ etc$\cdots$. Les notions que nous venons d'évoquer, ultrapuissances et *ultrapuissances d'un ensemble, saturation etc.. sont précisées ci-dessous.

Nations et definitions

Dans ce qui suit, $\boldsymbol{S}$ sera une *superstructure complète bâtie sur un ensemble* E. Rappelons ce qu'est la superstructure complète bâtie sur un ensemble E.

L'ensemble E étant donné on définit inductivement les ensembles:

$$E_0 = E,\ E_1 = E_0 \cup \mathcal{P}(E_0),\ \cdots,\ E_n = E_{n-1} \cup \mathcal{P}(E_{n-1}) \cdots$$

On pose $\boldsymbol{S} = \cup_{i \in N} E_n$, $\boldsymbol{S}$ est la superstructure complète bâtie sur E on a:

$$E_0 \subset E_1 \subset \cdots E_n \subset E_{n+1} \cdots \subset \boldsymbol{S}\ .$$

On a aussi la propriété:

Si $x \in E_n$, avec $n > 0$, si $x \notin E_0$ et si $t \in x$, alors $t \in E_{n-1}$.

Démonstration. Supposons $x \in E_n - E_0$. Soit n_0 le plus petit entier tel que $x \in E_{n_0}$; on a: $x \in E_{n_0} \wedge x \notin E_{n_0-1}$ donc, $x \in \mathcal{P}(E_{n_0-1})$. On en déduit que, si $t \in x$ alors $t \in E_{n_0-1}$. Comme $E_{n_0-1} \subset E_{n-1}$, on a $t \in E_{n-1}$.

Avant de poursuivre, remarquons qu'il n'était pas strictement indispensable, pour notre preuve de consistance d'étendre une superstructure complète cependant, outre que nous avons trouvé plus confortable de procéder ainsi, nous pensons que ces extensions présenterons une utilité pour des applications ultérieures, non abordées dans ce travail. Nous pensons, en particulier, à une éventuelle généralisation des méthodes de complétions (hull methods) qui ont été appliquées dans [6, 10].

Nous noterons $\mathcal{F}$ l'ensemble intuitif des formules du langage de ZFC ayant tous leurs quantificateurs bornés (toutes leurs variables liées sont astreintes à évoluer dans un ensemble fixé). Si $A(x_1, \cdots, x_n)$ est une formule de $\mathcal{F}$ ayant au plus n variables libres $x_1, \cdots, x_n$, si $a_1, \cdots, a_n$ sont des ensembles et R une rela-

tion binaire nous noterons $A_R(a_1, \cdots, a_n)$ la formule obtenue en remplaçant chaque occurence des x_i par a_i et chaque occurence de $\in$ par la relation R.

Soient $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{M}^*$ deux ensembles, R et R' deux relations binaires sur $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{M}^*$ respectivement, nous poserons:

DÉFINITION 1. Nous dirons que $(\boldsymbol{M}^*, R')$ est une *i-extension* de $(\boldsymbol{M}, R)$ ou, plus simplement, une *extension* de $(\boldsymbol{M}, R)$ si il existe une injection, i, de $\boldsymbol{M}$ dans $\boldsymbol{M}^*$ tell que, pour toute formule $A(x_1, \cdots, x_n)$ de $\mathcal{F}$, avec n variables libres et tous $a_1, \cdots, a_n$ dans $\boldsymbol{M}$: $A_R(a_1, \cdots, a_n) \Leftrightarrow A_{R'}(i(a_1), \cdots, i(a_n))$.

Dans ce cas, nous ecrirons: $(\boldsymbol{M}, R) \rightarrow_i (\boldsymbol{M}', R')$ ou, $(\boldsymbol{M}, R) \rightarrow (\boldsymbol{M}', R')$ si aucune ambiguité n'est à craindre. Si R et R' sont les relations d'appartenance sur $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{M}'$ respectivement, on écrira plus simplement $\boldsymbol{M} \rightarrow_i \boldsymbol{M}'$ ou, $\boldsymbol{M} \rightarrow \boldsymbol{M}'$. Si on a une extension $(\boldsymbol{M}, R) \rightarrow_i (\boldsymbol{M}', R')$, si $A(x_1, \cdots, x_n)$ est une formule de $\mathcal{F}$, et si $a_1, \cdots, a_n \in \boldsymbol{M}$, on dire que l'énoncé $A_{R'}(i(a_1), \cdots, i(a_n))$ est le *transféré dans* $(\boldsymbol{M}', R')$ de $A_R(a_1, \cdots, a_n)$ ou que $A_{R'}(i(a_1), \cdots, i(a_n))$ a été obtenu en appliquant à $A_R(a_1, \cdots, a_n)$ la *propriété de transfert*.

Nous prendrons la liberté, tout au long de ce chapitre, de désigner par le même symbole "$\in$", le prédicat d'appartenance de la théorie des ensembles, et les relations d'appartenance sur $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{M}'$. Supposons construite une suite ${}^2\boldsymbol{S}, {}^3\boldsymbol{S}, \cdots, {}^p\boldsymbol{S}, \cdots, {}^w\boldsymbol{S} \cdots$ d'ensembles, telle que:

$$ {}^1\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S} \rightarrow {}^2\boldsymbol{S} \rightarrow {}^3\boldsymbol{S} \cdots \rightarrow {}^w\boldsymbol{S} \rightarrow \cdots $$

Si i et j sont tels que $i \leq j \leq w$, nous noterons, pour tout $x \in {}^i\boldsymbol{S}$, ${}^j x$ l'image de x dans ${}^j\boldsymbol{S}$ si $i<j$, et nous poserons ${}^i x = x$. On aura donc, si $i \leq j \leq k \leq w$, pour tout $x \in {}^i\boldsymbol{S}$, ${}^k({}^j x) = {}^k x$.

DÉFINITION 2. Si A et B sont des éléments de ${}^j\boldsymbol{S}$, et si f: $A \rightarrow B$ est une application, nous dirons que f est une *application ^{j}interne* de A dans B si $f \in {}^j\boldsymbol{S}$.

Si Y et Z sont deux elements de ${}^i\boldsymbol{S}$ on montre, en transférant dans ${}^i\boldsymbol{S}$ l'énoncé correspondant sur $\boldsymbol{S}$, qu'il existe un ensemble, élément de ${}^i\boldsymbol{S}$ que nous noterons $(Y^Z)_{i\text{-int}}$ et tel que:

(1) $\forall f \in {}^j\boldsymbol{S}\ (f \in (Y^Z)_{i\text{-int}} \Leftrightarrow (f$ est une application ^{i}interne de Z dans $Y))$.

On démontre par transfert également que:

(2) Si A et B sont des éléments de ${}^i\boldsymbol{S}$ et si $i<j$ on a alors: $({}^jA^{jB})_{j\text{-int}} = {}^j(A^B)$

(3) $\forall n \in {}^i\boldsymbol{N}\ \exists!\ \boldsymbol{F}_n \in {}^i\boldsymbol{S}\ \forall t \in {}^j\boldsymbol{S}\ (t \in \boldsymbol{F}_n \Leftrightarrow (t \in {}^i\boldsymbol{N}$ et $t^i \leq n)$.

On peut alors poser les définitions suivantes:

DÉFINITION 3. Si $F \in {}^i\boldsymbol{S}$, nous dirons que F est ^{i}*fini* si: $\exists n \in {}^i\boldsymbol{N}\ \exists f \in (\boldsymbol{F}_n^F)_{i\text{-int}}$ (f est une bijection).

On démontre par transfert, que si $i<j$ alors on a:

(4) $\forall F \in {}^i\boldsymbol{S}\ (F$ ^{i}fini $\Leftrightarrow {}^jF$ ^{j}fini).

- Nous noterons par $\boldsymbol{P}$ l'ensemble des poly-indices entiers non nuls, strictement croissants,

$$\boldsymbol{P} = \{(p^1, p^2, \cdots p^k) \in \boldsymbol{N}^* \times \boldsymbol{N}^* \times \cdots \boldsymbol{N}^* : k \in \boldsymbol{N}^*, p_1 < p_2 < \cdots < p_k\}$$

- Si $P=(p_1, p_2, \cdots p_k) \in \boldsymbol{P}$, si $A \in \boldsymbol{S}$, ${}^P\boldsymbol{S}$ et A sont des écritures abrégées pour les produits cartésiens: ${}^{p_1}\boldsymbol{S} \times {}^{p_2}\boldsymbol{S} \times \cdots {}^{p_k}\boldsymbol{S}$) et ${}^{p_1}A \times {}^{p_2}A \times \cdots {}^{p_k}A$ respectivement. On aura donc, en particulier, pour tout $p \in \boldsymbol{N}^*$, ${}^{(p)}\boldsymbol{S} = {}^p\boldsymbol{S}$ et ${}^{(p)}A = {}^pA$.
- Si $P=(p_1, p_2, \cdots p_k) \in \boldsymbol{P}$, nous poserons $s(P) = \text{Sup } \{p_1, p_2, \cdots p_k\} = p_k$.
- Si $P=(p_1, p_2, \cdots p_k) \in \boldsymbol{P}$, si $A=(A_1, A_2, \cdots, A_k)$ et $B=(B_1, B_2, \cdots, B_k)$ sont deux éléments de ${}^p\boldsymbol{S}$, nous écrirons $A| \subset B$ pour $(A_1 \subset B_1)$ et $(A_2 \subset B_2)$ et $\cdots (A_k \subset B_k)$, si $x=(x_1, x_2, \cdots, x_k)$, nous écrirons $x| \in B$ pour $(x_1 \in B_1)$ et $(x_2 \in B_2)$ et $\cdots (x_k \in B_k)$.
- Si $P=(p_1, p_2, \cdots p_k) \in \boldsymbol{P}$, si $x=(x_1, x_2, \cdots, x_k) \in {}^p\boldsymbol{S}$ et si $j > s(P)$, nous poserons ${}^jx = ({}^jx_1, {}^jx_2, \cdots, {}^jx_k)$.

REMARQUE. Dans ce qui précède, x n'est pas en général élément d'un ${}^i\boldsymbol{S}$ (avec $i \leq j$), ${}^jx$ n'est donc pas l'image de x dans ${}^j\boldsymbol{S}$, pour une extension ${}^j\boldsymbol{S} \to {}^j\boldsymbol{S}$ toutefois, dans le cas où les coordonnées de x sont dans un même ${}^j\boldsymbol{S}$ avec $i \leq j$, nous savons démontrer que $({}^jx_1, {}^jx_2, \cdots, {}^jx_k)$ est l'image de $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ dans l'extension ${}^j\boldsymbol{S} \to {}^j\boldsymbol{S}$. La notation est donc cohérente.

DÉFINITION 4. Si $P=(p_1, p_2, \cdots p_k) \in \boldsymbol{P}$ et si $F=(F_1, F_2, \cdots F_k) \in {}^P\boldsymbol{S}$, nous dirons que F est *^{P}fini* si chaque coordonnée F_i de F est ^{p_i}finie.

DÉFINITION 5. Soient $P=(p_1, p_2, \cdots p_k) \in \boldsymbol{P}$, si s et j sont des entiers tels que $s(P) \leq s \leq j$, $B \in {}^P\boldsymbol{S}$ et $b \in {}^j\boldsymbol{S}$. Si $A \in {}^j\boldsymbol{S}$ et $b \subset (A)^{k+1}$, (on dira que b est une relation $(k+1)$-aire ^{j}interne sur A) nous dirons que b est *^{P}concourante sur B dans ${}^s\boldsymbol{S}$* si,

$$\forall F \in {}^P\boldsymbol{S}\ ((F| \subset B \text{ et } F\ {}^P\text{fini}) \Rightarrow \exists y \in {}^s\boldsymbol{S}\ \forall x| \in F\ ({}^jx, {}^jy) \in b)\ .$$

Pour $P=(1)$ et $s=j$, nous dirons plus simplement que b est concourante sur B.

Avec b, B et A comme dans la définition précédente et $i < s \leq j$ nous poserons:

DÉFINITION 6. Nous dirons que b est *B-idéalisable* dans ${}^s\boldsymbol{S}$ si, $\exists y \in {}^s\boldsymbol{S}$ $\forall x| \in B({}^jx, {}^jy) \in b$.

Soient des ensembles ${}^2\boldsymbol{M}, {}^3\boldsymbol{M}, \cdots, {}^p\boldsymbol{M} \cdots, {}^w\boldsymbol{M}$, tels que ${}^1\boldsymbol{M} \to {}^2\boldsymbol{M} \to {}^3\boldsymbol{M} \cdots \to {}^w\boldsymbol{M}$. On notera $\mathcal{F}(p)$ la famille de formules telle que:

si x et y sont des variables ou des éléments de ${}^w\boldsymbol{M}$, $(x \in y)$ est dans $\mathcal{F}(p)$,

si F et F' sont dans $\mathcal{F}(p)$ alors, $F \wedge F'$ et $\neg F$ sont dans $\mathcal{F}(p)$,

si $X \in {}^q\boldsymbol{M}$, avec $p \leq q \leq w$, et si la formule $F(x)$, où x est une variable libre, est dans $\mathcal{F}(p)$, alors $\exists x \in X\ F({}^wx)$ est dans $\mathcal{F}(p)$. Nous dirons que les formules de $\mathcal{F}(p)$ sont des *p-formules sur ${}^w\boldsymbol{M}$*.

Le résultat principal est le suivant:

Théorème *Pour tout ensemble* $\boldsymbol{S}$, *il existe une suite d'ensembles,* ${}^2\boldsymbol{S}, \cdots, {}^p\boldsymbol{S}\cdots, {}^w\boldsymbol{S}, \cdots$ *telle que*:

i) $\boldsymbol{S}={}^1\boldsymbol{S}\to{}^2\boldsymbol{S}\to{}^3\boldsymbol{S}\cdots\to{}^w\boldsymbol{S}\cdots$

ii) *Si* $P=(p^1, p^2, \cdots p^k)\in\boldsymbol{P}$ *et si* $1\leq s(P)<s\leq j$, *alors pour tout* $B\in{}^p\boldsymbol{S}$ *et toute relation* $(k+1)$*-aire* $b\in{}^j\boldsymbol{S}$:
b est ^{p}*concourante sur B dans* ${}^s\boldsymbol{S}$ *si et seulement si b est B-idéalisable dans* ${}^s\boldsymbol{S}$.

iii) *Si* $p\leq w$ *et si* $E(y)$ *est une p-formule sur* ${}^w\boldsymbol{S}$ *avec y comme seule variable libre, alors*:

$$\forall Z\in{}^p\boldsymbol{S}\ \exists Y\in{}^p\boldsymbol{S}\ \forall x\in{}^p\boldsymbol{S}\ (x\in Y\Leftrightarrow t\in Z\wedge E({}^w x))$$

Nous dirons que ${}^2\boldsymbol{S}, \cdots, {}^p\boldsymbol{S}, \cdots {}^w\boldsymbol{S}, \cdots$ est une suite *d'extensions successives ajustées* de $\boldsymbol{S}$.

On pourra trouver démontrée, sous différentes formes dans [1, 2, 7, 10], et avec des notations différentes des nôtres, l'existence pour tout $\boldsymbol{S}$ d'un ensemble ${}^2\boldsymbol{S}$ tel que:

i) $\boldsymbol{S}\to{}^2\boldsymbol{S}$,

iii) pour tout $B\in\boldsymbol{S}$ et toute relation binaire $b\in{}^2\boldsymbol{S}$: b est concourante sur B dans ${}^2\boldsymbol{S}$ si et seulement si b est B-idéalisable dans ${}^2\boldsymbol{S}$.

En réalité on a même un résultat plus général (voir [10]): B peut être une partie quelconque de ${}^2\boldsymbol{S}$, B n'est pas forcément interne (élément de ${}^2\boldsymbol{S}$). Bien sûr, pour énoncer dans notre langage une proposition correspondant à celle qui figure dans [10], il nous faudrait généraliser les définitions 5 et 6 au cas où B n'est plus interne.

Chez les auteurs cités précédemment, ${}^2\boldsymbol{S}$ est une ultrapuissance bornée de E selon un $\mathcal{K}$*-bon ultrafiltre*, $\mathcal{K}$ étant un cardinal supérieur à card($\boldsymbol{S}$). La notion de $\mathcal{K}$-bon ultrafiltre et ses liens avec la saturation des ultraupissances ont été étudiés par H.J. Keisler, [7, 8], en particulier il a établi l'existence de $\mathcal{K}$-bon ultrafiltres pour tout cardinal infini. Un énoncé plus précis de son théorème d'existence est donné dans [7, 10] et démontré dans [7]. Rappelons la définition des $\mathcal{K}$-bon ultrafiltres.

Si I est un ensemble infini, et si $\mathcal{K}$ *est un cardinal, nous dirons qu'un ultrafiltre* $\boldsymbol{U}$ *sur I est* $\mathcal{K}$*-bon si*:

a) il est δ*-incomplet,*

b) *si* card$(X)<\mathcal{K}$ *et si f set une application croissante du filtre de Fréchet* $\mathcal{F}_\delta(X)$ *sur X dans* $\boldsymbol{U}$ *alors, il existe une application h de* $\mathcal{F}_\delta(X)$ *dand* $\boldsymbol{U}$ *telle que pour tous F et G dans* $\mathcal{F}_\delta(X)$, $h(F)\subset f(F)$ *et* $h(F\cap G)=h(F)\cap h(G)$.

Démonstration du théorème

$\boldsymbol{S}$ étant donné comme précédemmement, on se donne un $\mathcal{K}$-bon ultrafiltre $\boldsymbol{U}$

sur un ensemble I, avec $\mathcal{K}>\mathrm{card}(\boldsymbol{S})$. Pour construire les extensions successives de $\boldsymbol{S}$ vérifiant les trois propriétés du théorème principal, nous avons choisi de travailler dans un univers suffisamment riche pour contenir $\boldsymbol{S}$ et I, qui soit un ensemble, et qui soit fermé pour les opérations ensemblistes usuelles, intersection, réunions passage à l'ensemble des parties. Cela impliquera qu'il sera stable pour les produits cartésiens, qu'il contiendra $\boldsymbol{U}$ etc··· La superstructure complète $\boldsymbol{X}$ bâtie sur un ensemble T contenant $\boldsymbol{S}$ et I fera l'affaire.

L'univers $\boldsymbol{X}$ étant choisi une fois pour toutes, nous construirons suite $\boldsymbol{X}$, ${}^2\boldsymbol{X}$, ···, ${}^p\boldsymbol{X}$, ···${}^w\boldsymbol{X}$, ···, tels que $\boldsymbol{X}\to{}^2\boldsymbol{X}\to\cdots{}^p\boldsymbol{X}\cdots\to{}^w\boldsymbol{X}\to\cdots$, et vérifiant de plus, pour tout $p\in\boldsymbol{N}$, ${}^p\boldsymbol{X}=\bigcup_{n\in N}{}^pT_n({}^pT_n$ est une écriture simplifiee pour ${}^p(T_n)$, qu'il ne faut surtout pas confondre avec $({}^pT_n)$!. Les ensembles ${}^2\boldsymbol{S}$, ···${}^p\boldsymbol{S}$, ···${}^w\boldsymbol{S}$···, seront les images de $\boldsymbol{S}$ respectivement dans ${}^2\boldsymbol{X}$, ···${}^p\boldsymbol{X}$, ···${}^w\boldsymbol{X}$···. Il nous faut donc:

a) construire ${}^2\boldsymbol{X}$, ···${}^p\boldsymbol{X}$, ···${}^w\boldsymbol{X}$···,

b) vérifier les conditions i), ii) et iii) pour la suite ${}^2\boldsymbol{S}$, ···${}^p\boldsymbol{S}$, ···${}^w\boldsymbol{S}$···.

a) Construction de la suite ${}^2\boldsymbol{X}$, ···${}^p\boldsymbol{X}$, ···${}^w\boldsymbol{X}$···

Soit $p\geq 1$, si $p>1$, supposons que nous ayons construit ${}^2\boldsymbol{X}$, ···${}^p\boldsymbol{X}$ tels que $\boldsymbol{X}\to{}^2\boldsymbol{X}\to\cdots{}^p\boldsymbol{X}$ et pour tout $k\leq p$, ${}^k\boldsymbol{X}=\bigcap_{n\in N}{}^kT_n$ construisons ${}^{p+1}\boldsymbol{X}$ à partir de ${}^p\boldsymbol{X}$.

Si $x\in{}^i\boldsymbol{X}$ avec $i<p$, notons ${}^px$ l'image de x dans l'extension ${}^i\boldsymbol{X}\to{}^p\boldsymbol{X}$. Nous conviendrons de poser ${}^ix=x$

Construisons d'abord un ensemble ${}^{p+1}\boldsymbol{X}'$, et une relation binaire $\in_{q+1}$ sur ${}^{p+1}\boldsymbol{X}'$; tels que $({}^p\boldsymbol{X},\in)\to({}^{p+1}\boldsymbol{X}',\in_{q+1})$.

Pour cela, nous définirons sur $\bigcup_{n\in N}{}^p[(T_n)^I]$, deux relations binaires notées respectivement "ρ_p" et "$\approx_p$" en posant, pour tous $f,g\in\bigcup_{n\in N}{}^p[(T_n)^I]$:

$$f\,\rho_p\,g \Leftrightarrow \{i\in{}^pI;\ f(i)\in g(i)\}\in{}^p\boldsymbol{U}\,,$$
$$f\approx{}_pg \Leftrightarrow \{i\in{}^pI;\ f(i)=g(i)\}\in{}^p\boldsymbol{U}\,.$$

On démontre sans aucune difficulté que la relation $\approx_p$ est une relation d'équivalence, grâce aux propriétés suivantes, qui sont des propriétés des filtres si $p=1$, et puis s'obtiennent en transférant ces propriétés dans ${}^p\boldsymbol{X}$ si $p>1$:

a) ${}^pI\in{}^p\boldsymbol{U}$,

b) $(u\in{}^p\boldsymbol{U}$ et $v\in{}^p\boldsymbol{U})\Rightarrow u\cap v\in{}^p\boldsymbol{U})$,

c) $\forall w\in{}^p\boldsymbol{X}\ [(\exists u\in{}^p\boldsymbol{U}\ (u\subset w\subset{}^pI))\Rightarrow w\in{}^p\boldsymbol{U}]$.

Si $f\in\bigcup_{n\in N}{}^p[(T_n)^I]$, nous noterons $\mathrm{cl}_p(f)$ la classe d'équivalence de f pour $\approx_p$ nous noterons ${}^{p+1}\boldsymbol{X}'$ l'ensemble des classes d'équivalences. La relation ρ_p étant compatible avec la relation $\approx_{p'}$ vérification immediate, nous définirons ensuite une relation binaire ε_{p+1} sur ${}^{p+1}\boldsymbol{X}'$ en posant: Pour tous f et g dans $\bigcup_{n\in N}{}^p[(T_n)^I]$, $\mathrm{cl}_p(f)\in_{p+1}\mathrm{cl}_p(g)\Leftrightarrow f\,\rho_p\,g$.

Si $x\in{}^p\boldsymbol{X}$, alors l'application constante x: ${}^pI\to{}^p\boldsymbol{X}$, telle que $x(i)=x$ pour tout $i\in_p{}^pI$ est dans ${}^p\boldsymbol{X}$ (utiliser pour le démontrer, le transfert dans l'extension $\boldsymbol{X}\to{}^p\boldsymbol{X}$ de l'énoncé dans $\boldsymbol{X}$:

$$\forall x \in T_n \; \exists f \in (T_n)^I \; \forall i \in I((i, x) \in f)) .$$

On peut donc définir une injection i_p: ${}^p\boldsymbol{X} \to {}^{p+1}\boldsymbol{X}'$ en posant, pour tout $x \in {}^p\boldsymbol{X}$, $i_p(x) = \mathrm{cl}_p(x)$.

Nous noterons: Red ${}^p(\boldsymbol{X}^I) = \cup_{n \in N} {}^p[(T_n)^I]$. On a alors,

Proposition 1.

$$({}^p\boldsymbol{X}, \in) \to {}_{i_p}({}^{p+1}\boldsymbol{X}', \in_{p+1}) .$$

La démonstration est une conséquence immédiate du lemme suivant:

Lemme 1. *Si $A(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est une formule de $\mathfrak{F}$ ayant exactement n variables libres si $f_1, f_2, \cdots, f_n$ sont des éléments de* Red$^p(\boldsymbol{X}^I)$, *alors on a*:

$$A_{\in_{p+1}}(cl_p(f_1), cl_p(f_2), \cdots cl_p(f_n)) \Leftrightarrow A\rho_p(f_1, f_2, \cdots, f_n)$$
$$\Leftrightarrow \{i \in {}^pI / A(f_1(i), f_2(i), \cdots, f_n(i))\} \in {}^p\boldsymbol{U} .$$

Démonstration. La première équivalence, qui est clairement vraie pour les formules élémentaires, de la forme $x_1 \in x_2$, par définition de de la relation $\in_{p+1}$, se démontre sans la moindre difficulté par induction sur la complexité de A.

Demontrons la seconde équivalence. Dans le cas ou $p=1$, le lemme est une propriété bien connue, que l'on peut démontrer en reprenant par exemple, la démonstration de L. Haddad dans [5], bien que celle-ci concerne des ultrapuissances non réduites. Ou en adaptant la démonstration du théoréme de LOS donnée dans [1]. Sa preuve, par induction sur la complexité de la formulé $A(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, ne présente pas de difficulté majeure. Pour le cas ou $p>1$, on utilise le transfert dans l'extension $\boldsymbol{X} \to {}^p\boldsymbol{X}$. Soient $f_1, f_2, \cdots, f_n$ des éléments de Red ${}^p(\boldsymbol{X}^I)$; a cause de l'inclusion des T_m, on peut supposer que tous les f_i sont dans un même ${}^p[(T_m)^I]$ or, le lemme étant vrai pour $p=1$, on peut ecrire: (1)

$$\forall f_1 \in (T_m)^I \; \forall f_2 \in (T_m)^I \cdots \forall f_n \in (T_m)^I$$
$$[A_{\rho_1}(f_1, f_2, \cdots, f_m) \Leftrightarrow \exists u \in \boldsymbol{U} \; \forall i \in I \, (A \, (f_1(i), f_2(i), \cdots, f_n(i)) \Leftrightarrow i \in u)] .$$

Bien que ρ_1 ne soit pas un élément de $\boldsymbol{X}$, son domaine est $\boldsymbol{X}$ tout entier, on voit en remplacant dans $A_{\rho_1}(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ chaque occurence d'une sous formule de la forme $f \, \rho_1 \, g$ par la formule $\exists v \in \boldsymbol{U} \; \forall i \in \boldsymbol{I} \, (f(i) \in g(i) \Leftrightarrow i \in v)$, en transférant dans ${}^p\boldsymbol{X}$ l'énoncé obtenu et en remplaçant ensuite les sous formules de la forme $\exists v \in {}^p\boldsymbol{U} \; \forall i \in {}^pI \, (f(i) \in g(i) \Leftrightarrow i \in v)$ par $f \, \rho_p \, g$, que (1) équivaut à:

$$\forall f_1 \in {}^p(T_m)^I \; \forall f_2 \in {}^p(T_m)^I \cdots \forall f_n \in {}^p(T_m)^I$$
$$[A_{\rho_p}(f_1, f_2, \cdots, f_n) \Leftrightarrow \exists u \in {}^p\boldsymbol{U} \; \forall i \in {}^pI \, (A(f_1(i), f_2(i), \cdots, f_n(i)) \Leftrightarrow i \in u) .$$

Ceci achéve notre preuve.

Démonstration de la Proposition 1. Soient $A(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une formule de $\mathcal{F}$ et $a_1, a_2, \cdots, a_n$ des éléments de ${}^p\boldsymbol{X}$. On a alors $A_{\in_{p+1}}(i_p(a_1), i_p(a_2), \cdots, i_p(a_n)) \Leftrightarrow A_{\rho_p}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, les a_k désignant chacune, dans le membre de droite, l'application constante $i \to a_k$.

D'après le lemme 1, $A\rho_p(a_1, a_2, \cdots, a_n) \Leftrightarrow \{i \in {}_p{}^pI / A(a_1(i), a_2(i), \cdots, a_n(i))\} \in {}^p\boldsymbol{U}$. Comme les a_k sont constantes, $\{i \in {}_p{}^pI / A(a_1(i), a_2(i), \cdots, a_n(i))\}$ est égal à ϕ si $A(a_1, \cdots, a_n)$ est faux et ${}^pI$ tout entier si $A(a_1, \cdots, a_n)$ est vrai. Comme, des deux ensembles ϕ et ${}^pI$, seul le second est élément de ${}^p\boldsymbol{U}$, $A\rho_p(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ est vrai si et seulement si $A(a_1, \cdots, a_n)$ est vrai. Donc $A_{\in_{p+1}}(i_p(a_1), i_p(a_2), \cdots, i_p(a_n))$ est vrai si et seulement si $A(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ est vrai. La proposition 1 est donc établie.

Propriétés de ${}^{p+1}\boldsymbol{X}'$

1. *Pour $x \in {}^{p+1}\boldsymbol{X}'$ il existe $n \in \boldsymbol{N}$ tel que $x \in_{p+1} i_p(T_n)$.*
2. *Si $x \in_{p+1} i_p(T_n)$, avec $n > 0$, si $x \notin_{p+1} i_p(T_0)$ et si $t \in_{p+1} x$, alors $t \in_{p+1} i_p(T_{n-1})$.*

Démonstration. 1. Soit x un élément de ${}^{p+1}\boldsymbol{X}'$, par définition, il existe $n \in \boldsymbol{N}$ et $\varphi \in {}^p(T_n^I)$ tels que $x = \mathrm{cl}_p(\varphi)$. $\{i \in {}^pI / \varphi(i) \in {}^pT_n\} = {}^pI \in {}^p\boldsymbol{U}$ donc, $\mathrm{cl}_p(\varphi) \in_{p+1} \mathrm{cl}_p({}^pT_n)$ par définition de $\in_{p+1}$. On a donc $x \in_{p+1} i_p(T_n)$, ce qu'il fallait démontrer.
2. Si $t \in_{p+1} x$, il découle de la propriété 1 que $t \in_{p+1} i_p(T_m)$ pour un certain entier m. La propriété 2 s'obtient par transfert dans $({}^{p+1}\boldsymbol{X}', \in_{p+1})$ au moyen de i_p, pour $n > 0$ de l'énoncé:

$$\forall t \in T_m \, \forall x \in T_n - T_0((t \in x) \Rightarrow t \in T_{n-1}) .$$

On identifie ensuite ${}^{p+1}\boldsymbol{X}'$ à une partie ${}^{p+1}\boldsymbol{X}$ de la superstructure complète $\boldsymbol{X}_{p+1}$ bâtie sur ${}^{p+1}T$, et la relation $\in_{p+1}$ sur ${}^{p+1}\boldsymbol{X}'$ a la relation d'appartenance sur ${}^{t+1}\boldsymbol{X}$.

On procède de la manière suivante, en construisant une injection,

$$\begin{aligned} &j_p : {}^{p+1}\boldsymbol{X}' \to \boldsymbol{X}_{p+1} \text{ en posant:} \\ &j_p(x) = x \text{ si } x \in_{p+1} i_p(T) \\ &j_p(x) = \{j_p(t) : t \in_{p+1} x\}, \text{ si } x \notin_{p+1} i_p(T) . \end{aligned}$$

Il découle des propriétés 1 et 2 précédentes que j_p est bien définie. Il est clair, d'autre part, que pour tous x et y dans ${}^{p+1}\boldsymbol{X}'$: $j_p(x) \in j_p(y) \Leftrightarrow x \in_{p+1} y$.

Posons ${}^{p+1}\boldsymbol{X} = j_p({}^{p+1}\boldsymbol{X}')$. Si on définit ensuite une application injective:

$$\begin{aligned} &h_p : {}^p\boldsymbol{X} \to {}^{p+1}\boldsymbol{X} , \\ &x \to {}^{p+1}x = j_p \circ i_p(x) . \end{aligned}$$

On a alors: a) ${}^{p+1}\boldsymbol{X} = \bigcup_{n \in N} {}^{p+1}T_n$,
b) ${}^p\boldsymbol{X} \to_{h_p} {}^{p+1}\boldsymbol{X}$.

Démonstration de a). Si $t \in {}^{p+1}\boldsymbol{X}$ alors, par définition, il existe $x \in {}^{p+1}\boldsymbol{X}'$ tel que $t = j_p(x)$. D'après la propriété 1 de ${}^{p+1}\boldsymbol{X}$, $x = i_p(s)$, avec s dans un T_n. Donc

$t=j_p\circ i_p(s)=^{p+1}s$.

Comme $s\in T_n$ implique $^{p+1}s\in{}^{p+1}T_n$, on a $t\in{}^{p+1}T_n$.

Démonstration de b). Pour toute formule $A(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de $\mathcal{F}$ ayant ses variables libres parmi $x_1, x_2, \cdots, x_n$, et tous $a_1, a_2, \cdots, a_n$ éléments de $^p\boldsymbol{X}$ on sait, d'après la proposition 1, que l'énoncé $A(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ est équivalent à $A_{\in_{p+1}}(i_p(a_1), i_p(a_2), \cdots, i_p(a_n))$. Il reste donc à établie l'équivalence:

$$A_{\in_{p+1}}(i_p(a_1), i_p(a_2), \cdots, i_p(a_n)) \Leftrightarrow A(^{p+1}a_1, {}^{p+1}a_2, \cdots, {}^{p+1}a_n)\,.$$

Pour établir cette dernière équivalence, pour tous $a_1, a_2, \cdots, a_n$ dans $^p\boldsymbol{X}$ il suffira d'établir que, pour tous $b_1, b_2, \cdots, b_n$ dans $^{p+1}\boldsymbol{X}'$, on a:
$A_{\in_{p+1}}(b_1, b_2, \cdots, b_n)\Leftrightarrow A(j_p(b_1), j_p(b_2), \cdots, j_p(b_n))$ et de voir que, pour $b_k=i_p(a_k)$, on a par définition $j_p(b_k)=^{p+1}a_k$. C'est cette dernière propriété que nous allons établir maintenant.

Cette propriété est vraie pour les formules élémentaires de la forme $A(x_1, x_2)\equiv(x_1\in x_2)$. En effet, si b_1, b_2 sont deux éléments de $^{p+1}\boldsymbol{X}'$, alors on a: $A_{\in_{p+1}}(b_1, b_2)\equiv(b_1\in_{p+1} b_2)$, or $(b_1\in_{p+1} b_2)\Leftrightarrow(j_p(b_1)\in j_p(b_2))\equiv A(j_p(b_1), j_p(b_2))$ (Par definition). Si $A(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ et $B(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ sont deux formule de $\mathcal{F}$ ayant leur variables libres parmi $x_1, x_2, \cdots, x_n$, si pour tous $b_1, b_2, \cdots, b_n$ dans $^{p+1}\boldsymbol{X}'$, l'équivalence est vraie pour chacune d'elle, alors il est immediat qu'elle sera vraie également pour $\neg A$ et pour $A\wedge B$. Supposons maintenant $A(x_1, x_2, \cdots, x_n)\equiv \exists x\in x_1\, B(x, x_2, \cdots, x_n)$ et que la propriété est vraie pour la formule B. Donnons nous $b_1, b_2, \cdots, b_n$ dans $^{p+1}\boldsymbol{X}^*$, alors on a:

$A_{\in_{p+1}}(b_1, b_2, \cdots, b_n) \equiv \exists\, x\in_{p+1} b_1\, B_{\in_{p+1}}(x, b_2, \cdots, b_n)$.
$\exists\, x\in_{p+1} b_1\, B_{\in_{p+1}}(x, b_2, \cdots, b_\in)\Leftrightarrow \exists\, x\in{}^{p+1}\boldsymbol{X}^*((x\in_{p+1} b_1)\wedge B_{\in_{p+1}}(x, b_2, \cdots, b_n))$.

En utilisant, la surjectivité de j_p, et les équivalences, $(x\in_{p+1} b_1)\Leftrightarrow(j_p(x)\in j_p(b_1))$ et $B_{\in_{p+1}}(x, b_2, \cdots, b_n)\Leftrightarrow B(j_p(x), j_p(b_2), \cdots, j_p(b_n))$, on voit que
$\exists\, x\in^{p+1}\boldsymbol{X}^*((x\in_{p+1} b_1)\wedge B_{\in_{p+1}}(x, b_2, \cdots, b_n))\Leftrightarrow \exists\, x\in j_p(b_1)\, B(x, j_p(b_2), \cdots, j_p(b_n))$.
Le membre de droite étant identique á $A(j_p(b_1), j_p(b_2), \cdots, j_p(b_n))$, ceci termine notre preuve.

Avant de passer à l'étape suivante, il nous faut établir une propriété des ensembles ^{P}finis, dont nous nous servirons par la suite.

Propriété *Si $F\in{}^P\boldsymbol{X}$ est ^{P}fini alors: pour tout $m>s(P), x|\in{}^mF$ si et seulement si il existe un $t|\in F$ tel que $x=^mt$.*

Démonstration. Nous allons d'abord établir la propriété pour $k=1$. Soit $P=(p)$, et soit, pour F ^{P}fini l'énoncé, $\forall\, x\in{}^mF\,\exists t\in F(^mt=x)$. Montrons que sa négation conduit à la une contradiction, cette contradiction s'écrivant:
$\forall^{p\text{fin}}\, F((\exists\, x\in{}^mF\,\forall t\in F(^mt\neq x))\Rightarrow \exists x\in F\,\forall t\in F(t\neq x))$. $(E(p, m))$

Il est tout a fait clair que ceci est une contradiction car, $x \in F$ et $\forall t | \in F(t \neq x)$ impliquent $x \neq x$!!

Montrons par récurrence que l'on a $E(p, m)$ pour tous p et m tels que $1 \leq p < m$.

α) $E(1, 2)$ est vrai: Soit F un ensemble ^{1}fini de $^1\boldsymbol{S}$, autrement dit, une partie finie de $\boldsymbol{S}$. L'énoncé $\exists x \in {}^2F\ \forall t \in F({}^2t \neq x)$ équivaut à:

$$\exists \xi \in F^I\ \forall t \in F\ \exists u(t) \in \boldsymbol{U}\ \forall i \in I\ ((t \neq \xi(i)) \Leftrightarrow i \in u(t)).$$

Soit $v = \bigcap_{t \in F} u(t)$; F étant fini, on a $v \in \boldsymbol{U}$ donc, $v \neq \phi$. Prenons un i dans v et posons $\xi(i) = x$. On a alors $t \neq x$ pour tout $t \in F$. $E(1, 2)$ est donc démontré.

β) Pour tout, p, $E(p+1, p)$ est vrai:

$E(1, 2)$ équivaut à:

$$\forall^{\text{fin}} F((\exists \xi \in F^I\ \forall t \in F\ \exists u(t) \in \boldsymbol{U}\ \forall i \in I((t \neq \xi(i)) \Leftrightarrow i \in u(t))) \Rightarrow \exists x \in F\ \forall t \in F(t \neq x)).$$

Transférons dans $^p\boldsymbol{X}$ ce dernier énoncé, on obtient:

$$\forall^{p\text{fin}} F((\exists \xi \in {}^p(F^I)\ \forall t \in F\ \exists u(t) \in {}^p\boldsymbol{U}\ \forall i \in {}^pI((t \neq \xi(i) \Leftrightarrow i \in u(t))) \Rightarrow \exists\, x \in F\ \forall t \in F(t \neq x)).$$

Cet énoncé équivaut à:

$$\forall^{p\text{fin}} F((\exists x \in {}^{p+1}F\ \forall t \in F({}^{p+1}t \neq x)) \Rightarrow \exists x \in F\ \forall t \in F(t \neq x)).$$

On a donc $E(p+1, p)$.

γ) Si $E(m, p)$ est vrai, alors $E(m+1, p)$ est vrai.

$E(m+1, p)$ s'écrit:

$\forall^{p\text{fin}} F((\exists x \in {}^{m+1}F\ \forall t \in F({}^{m+1}t \neq x)) \Rightarrow \exists x \in F\ \forall t \in F(t \neq x))$, ou

$\forall^{p\text{fin}} F((\exists x \in {}^{m+1}F\ \forall t \in F({}^{m+1}({}^m t) \neq x)) \Rightarrow \exists x \in F\ \forall t \in F(t \neq x))$. Mais l'hypothése de récurrence implique que $^m t$ parcourt tout $^m F$ quant t parcourt F donc, $E(m+1, m)$ équivaut à:

$\forall^{p\text{fin}} F((\exists x \in {}^{m+1}F\ \forall t \in {}^mF({}^{m+1}t \neq x)) \Rightarrow \exists x \in F\ \forall t \in F(t \neq x))$. cet énoncé est vrai, il decoule de $E(m+1, m)$ appliqué à l'ensemble ^{m}fini, $^m F$. Ceci achève notre récurrence.

Si $k > 1$, soient $P = (p_1, \cdots, p_k)$, $F = (F_1, F_2, \cdots, F_k)$ une partie ^{P}finie de $^P\boldsymbol{X}$, $m > s(P)$, donnons nous $x = (x_1, x_2, \cdots, x_k) | \in {}^mF = ({}^mF_1, {}^mF_2, \cdots, {}^mF_k)$. Chaque F_i étant p ^{i}fini, d'aprés ce qui précède il existe, pour chaque indice i, un $t_i \in F_i$ tel que $x_i = {}^m t_i$. On voit que, si on pose $t = (t_1, t_2, \cdots, t_k)$, on a bien $x = {}^m t$.

b) vérification des trois conditions du théorème principal

α) vérification de la condition i)

Si on définit les $^i\boldsymbol{S}$, comme plus haut alors, si on note pour tout p, h'_p la restriction à $^p\boldsymbol{S}$ de h_p, alors, $h'_p({}^p\boldsymbol{S}) \subset {}^{p+1}\boldsymbol{S}$ car, pour tout $t \in {}^p\boldsymbol{X}$, comme ${}^p\boldsymbol{S} \in {}^p\boldsymbol{X}$, si $t \in {}^p\boldsymbol{S}$ on a ${}^{p+1}t \in {}^{p+1}\boldsymbol{S}$ donc: si $x = h'_p(t)$ avec $t \in {}^p\boldsymbol{S}$ on a, $x = h_p(t) = {}^{p+1}t \in {}^{p+1}\boldsymbol{S}$. On voit immédiatement que h'_p: ${}^p\boldsymbol{S} \to {}^{p+1}\boldsymbol{S}$ est une extension.

β) vérification de la condition ii)

On sait que, si $\boldsymbol{U}$ est un $\mathcal{K}$-bon ultrafiltre sur I, avec $\mathcal{K}>\mathrm{card}(\boldsymbol{S})$, alors si on pose, pour $p\leq\omega$, ${}^{p}\boldsymbol{S}=\cup_{n\in N}{}^{p}\boldsymbol{E}_{n}$, on a une extension $\boldsymbol{S}\to{}^{2}\boldsymbol{S}$, avec idéalisation et saturation. Cela implique que, "pour toute relation binaire $b\in{}^{2}\boldsymbol{S}$ et tout $B\in\boldsymbol{S}$, b est concourante sur B dans ${}^{2}\boldsymbol{S}$ si et seulement si elle est B-idéalisable dans ${}^{2}\boldsymbol{S}$". L'idée de départ est la suivante: si on remplace l'énoncé entre guillemets par un énoncé équivalent dans $\boldsymbol{X}$, puis on transfère ce dernier dans ${}^{p}\boldsymbol{X}$, l'énoncé ainsi transféré équivaut à "pour toute relation binaire $b\in{}^{p+1}\boldsymbol{S}$ et tout $B\in{}^{p}\boldsymbol{S}$, b est concourante sur B dans ${}^{p+1}\boldsymbol{S}$ si et seulement si elle est B-idéalisable dans ${}^{p+1}\boldsymbol{S}$". On a donc immédiatement ii), dans le cas $P=(p)$ et $q=p+1$. C'est un peut peu plus compliqué pour le cas général mais les principes de base restent les mêmes.

La suite de notre démonstration nécessite deux lemmes.

Le lemma 3 est un corollaire d'un résultat plus général que l'on peut trouver énoncé et démontré dans [10], théorème 1.6.3. Sa démonstration n'etant pas évidente, et afin d'avoir un texte auto-contenu, nous en donnerons quand même une preuve.

Lemma 2. *Soit $\boldsymbol{U}$ un ultrafiltre sur un ensemble I et $\mathcal{K}$ un cardinal infini; si $\boldsymbol{U}$ est un $\mathcal{K}$-bon ultrafiltre alors, pour tous ensembles Y et Z et toute application $\beta\in(\mathcal{P}(Y\times Z))^{I}$ et toute partie A de Y^{I} telle que card $(A)<\mathcal{K}$ on a:*

$$(\forall^{\mathrm{fin}}F\subset A\ \exists g\in Z^{I}\ \forall f\in F\ \{i\in I/(f(i),g(i))\in\beta(i)\}\in\boldsymbol{U})\Leftrightarrow$$
$$\exists f_{0}\in Z^{I}\ \forall f\in A\{i\in I/(f(i),f_{0}(i))\in\beta(i)\}\in\boldsymbol{U}\,.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{K}$ un cardinal infini, $\boldsymbol{U}$ un $\mathcal{K}$-bon ultrafiltre sur un ensemble I et A une partie de Y^{I} telle que card $(A)<\mathcal{K}$. Introduisons quelques notations.

Si $f\in A$, $g\in Z^{I}$ et si F est une partie finie de A nous définirons les parties de I suivantes:

$$u(f)=\{i\in I/\exists y\in Z(f(i),y)\in\beta(i)\}\,,$$
$$u(F)=\cap_{f\in F}u(f)\,,$$
$$u(f,g)=\{i\in I/(f(i),g(i)\in\beta(i)\}\,,$$
$$u(F,g)=\cap_{f\in F}u(f,g)\,.$$

Il nous faut donc démontrer que,

$$(\forall^{\mathrm{fin}}F\subset A\ \exists g\in Z^{I}(u(F,g)\in\boldsymbol{U}))\Leftrightarrow\exists f_{0}\in Z^{I}\ \forall f\in A\,(u(f,g)\in\boldsymbol{U}).$$

Supposons donc vérifié le premier membre de l'équivalence. $\boldsymbol{U}$ $\mathcal{K}$-bon implique que $\boldsymbol{U}$ est δ-incomplet donc, il existe une suite $(I(n))$ d'éléments de $\boldsymbol{U}$ tell que $\cap_{n\in N}I(n)=\phi$. Si F est une partie finie de A nous poserons $v(F)=A-F$. Avec ces notations, nous pouvons définir une application,

$$p\colon \mathcal{F}_\aleph(A) \to \boldsymbol{U} \qquad \text{en posant, pour tout } v(F)\in\mathcal{F}_\aleph(A),$$
$$p(v(F)) = u(F)\cap I(\operatorname{card}(F)).$$

Comme $u(F,g)\subset u(F)$ et $u(F,g)\in\boldsymbol{U}$ on a bien $u(F)\in\boldsymbol{U}$ et donc $h(v(F))\in\boldsymbol{U}$.

Il est immediat que p est croissante aussi, d'aprés la définition des $\mathcal{K}^+$-bons ultrafiltres, il existe une application multiplicative, $h\colon \mathcal{F}_\aleph(A)\to\boldsymbol{U}$ dominée par p.

Pour chaque i fixé dans I posons $B_i=\{f\in A/i\in h(v(\{f\}))\}$. Montrons que si on pose $n(i)=\operatorname{Max}\{k\in\boldsymbol{N}/i\in I(k)\}$ alors, card $B_i\leq n(i)$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi il y aurait alors une partie finie F de A telle que card $(F)=n(i)+1$ et $F\subset B_i$. Pour toute fonction $f\in F$, $i\in h(v\{f\})$ donc en tenant compte de la multiplicativité de h;

$$i\in\cap_{f\in F} h(v(\{f\})) = h(\cap_{f\in F} v(\{f\})) = h(v(F)).$$

Comme $h(v(F))\subset p(v(F))\subset I(\operatorname{card}(F))$, cela contredit la définition de $n(i)$. B_i est donc fini et si l'on pose $Y_i=\{y\in Z/\forall f\in B_i(f(i),y)\in\beta(i)\}$ alors, $Y_i\neq\phi$. En effet il découle de la définition des B_i et de la multiplicativité de h que

$$i\in h(v(B_i))\subset p(v(B_i)) = I(\operatorname{card}(B_i))\cap u(B_i)\ ;$$

donc, $i\in u(B_i)$ et donc, $\exists y\in Z/\forall f\in B_i(f(i),y)\in\beta(i)$ ce qui montre bien que Y_i est non vide.

Pour terminer on se donne une fonction $f_0\in Z^I$ telle que pour tout $i\in I$ $f_0(i)\in Y_i$ (une telle fonction existe grâce à la non vacuité des Y_i et à l'axiome du choix), et on montre que f_0 possède la propriété souhaitée. Dans ce but prenons $f\in A$ et $i\in h(v(\{f\}))$ on a alors $f\in B_i$ donc $(f(i),f_0(i))\in\beta(i)$. L'ensemble $u(f,f_0)$ contient $h(v(\{f\}))$ qui appartient à $\boldsymbol{U}$ donc: $u(f,f_0)\in\boldsymbol{U}$ ce qui achève notre démonstration.

Lemme 3. *Si $P=(p_1,p_2,\cdots,p_k)\in\boldsymbol{P}$, q et r sont tels $1\leq s(P)<q\leq r$, alors pour tout $B\in{}^P\boldsymbol{S}$ et toute ^{r}relation $(k+1)$-aire) $b\in{}^r\boldsymbol{X}$ on a:*

b est ^{P}concourante sur B dans ${}^q\boldsymbol{X}\Leftrightarrow b$ est B-idéalisable dans ${}^q\boldsymbol{X}$.

Démonstration. Notons $I(P,q,r)$ la proposition que nous voulons démontrer. Nous ferons une démonstration par récurrence. Les étapes de la récurrence seront les suivantes:

a) On démontre $I((1),2,2)$.

b) On démontre $I((p),p+1,p+1)$ pour tout entier p.

c) On établit que, pour tous P et q tels $s(P)<q$, $I(P,q,q)$ implique $I(P,q+1,q+1)$.

d) On établit que, pour tout P et tout m tell que $(P,m)\in\boldsymbol{P}$, $I(P,s(P)+1,s(P)+1)$ implique $I((P,m),m+1,m+1)$ ce qui, avec b) implique que l'on a $I(P,s(P)+1,s(P)+1)$ pour tout P.

e) On établit que, pour tous P, q et r tels que $s(P)<q\leq r<\omega$, $I(P,q,r)$ im-

plique $I(P, q, r+1)$ ce qui, compte tenu de b), c) et d), implique que l'on a $I(P, q, r)$ pour tous P, q, et r tels que $s(P)<q\leq r$.

a) Montrons $I((1), 2, 2)$:

Comme $B\in\boldsymbol{S}$ et card $(\boldsymbol{S})<\mathcal{K}$, on a card $(B))<\mathcal{K}$ donc, si A est l'ensemble des applications constantes de I dans B, card $(A)<\mathcal{K}$. Puisque $b\in{}^2\boldsymbol{X}$, il existe un entier n tel que $b\subset{}^2T_n\times{}^2T_n$ et une application $\beta\in(\mathcal{P}(T_n\times T_n))^I$ telle que b soit la classe de β modulo $\boldsymbol{U}$. Il suffit donc d'appliquer le lemma 2 avec $Y=Z=T_n$ et A, β ci-dessus puis de remplacer les expressions:

$$\exists g\in Z^I\ \forall x\in F\ \{i\in I/(x, g(i))\in\beta(i))\}\in\boldsymbol{U}\quad\text{et,}$$
$$\exists f_0\in Z^I\ \forall x\in B\ \{i\in I/(x, f_0(i))\in\beta(i)\}\in\boldsymbol{U}\quad\text{respectivement par:}$$
$$\exists y\in{}^2T_n\ \forall x\in F\ ({}^2x, y)\in b$$
$$\exists y\in{}^2T_n\ \forall x\in B\ ({}^2x, y)\in b\ \text{pour terminer la démonstration.}$$

b) Soit p est un entier quelconque, on exprime d'abord dans $\boldsymbol{X}$ l'équivalence pour $P=(1)$ pour tous B et b vérifinat les conditions de l'énoncé. On obtient, n et m étant des entiers:

$$\forall B\in E_m\ \forall\beta\subset(T_n\times T_n)^I$$
$$[(\forall^{\text{fin}} F\subset B\ \exists f\in(T_n)^I\ \forall x\in F\ \exists u\in\boldsymbol{U}\ \forall i\in I\ [(x, f(i))\in\beta(i)\Leftrightarrow i\in u])\Leftrightarrow$$
$$(\exists f\in(T_n)^I\ \forall x\in B\ \exists u\in\boldsymbol{U}\ \forall i\in I\ [(x, f(i))\in\beta(i)\Leftrightarrow i\in u])].$$

On transfère ensuite dans ${}^p\boldsymbol{X}$ ce dernier énoncé ce qui donne:

$$\forall B\in{}^pE_m\ \forall\beta\subset{}^p((T_n\times T_n)^I)$$
$$[(\forall^{p\text{fin}} F\subset B\ \exists f\in{}^p((T_n))^I\ \forall x\in F\ \exists u\in{}^p\boldsymbol{U}\ \forall i\in{}^pI\ [(x, f(i))\in\beta(i)\Leftrightarrow i\in u])$$
$$\Leftrightarrow(\exists f\in{}^p((T_n)^I)\ \forall x\in B\ \exists u\in{}^p\boldsymbol{U}\ \forall i\in{}^pI\ [(x, f(i))\in\beta(i)\Leftrightarrow i\in u])].$$

Ce dernier énoncé équivaut à:

$$\forall B\in{}^pE_m\ \forall b\subset{}^{p+1}T_n\times{}^{p+1}T_n$$
$$[(\forall^{p\text{-fin}} F\subset B\ \exists y\in{}^{p+1}T_n\ \forall x\in F({}^{p+1}x, y)\in b)\Leftrightarrow(\exists y\in{}^{p+1}T_n\ \forall x\in B({}^{p+1}x, y)\in b)].$$

Ceci achève la preuve du b).

c) Supposons $I(P, q, q)$ vérifiée pour $P=(p_1, p_2, \cdots, p_k)\in\underline{\boldsymbol{P}}$ et $q\in\boldsymbol{N}^*$ tels que que $s(P)<q$.

Soient $B\in{}^p\boldsymbol{S}$ et $b\in{}^{q+1}\boldsymbol{X}$. Il existe un entier n tel que $b\subset({}^rT_n)^{k+1}$. On en déduit que b est la classe modulo ${}^r\boldsymbol{U}$ d'une ^{r}application β telle que $\beta\subset{}^r((T_n)^{k+1})^I)$.

L'énoncé (b ^{p}concourante sur B dans ${}^{q+1}\boldsymbol{X}$) est équivalent à l'énoncé,

(1) $\forall^{p\text{-fin}} F|\subset B\ \exists f\in{}^q(T_n)^I)\ \forall x|\in F\ \exists u\in{}^q\boldsymbol{U}\ \forall i\in{}^qI\ [({}^qx, f(i))\in\beta(i)\Leftrightarrow i\in u]$.

Soit la ^{q}relation binaire $\boldsymbol{b}\in{}^q\boldsymbol{X}$ définie par:

$$(x, f)\in\boldsymbol{b}\Leftrightarrow(x\in{}^qT_n\wedge f\in{}^q((T_n)^I\wedge\exists u\in{}^q\boldsymbol{U}\ \forall i\in{}^qI\ [(x, f(i))\in\beta(i)\Leftrightarrow i\in u]),$$

la relation (1) exprime que la ^{r}relation binaire $\boldsymbol{b}$ est ^{p}concourante sur B dans ${}^q\boldsymbol{X}$; d'aprés l'hypothèse de récurrence cela équivaut à l'énoncé ($\boldsymbol{b}$ est B-idéalisable dans ${}^q\boldsymbol{X}$) qui s'écrit, $\exists f\in{}^q((T_n)^I)\ \forall x\in B\ \exists u\in{}^q\boldsymbol{U}\ \forall i\in{}^qI\ [({}^qx, {}^qf(i))\in\beta(i)\Leftrightarrow i\in u]$

et est équivalent à, $\exists y \in {}^{q+1}T_n \; \forall x \in B \; ({}^{q+1}x, {}^{q+1}y) \in b)$ qui exprime que b est B-idéalisable dans ${}^{q}\boldsymbol{X}$. On a donc $I(P, q+1, q+1)$.

Corollaire 1. *Si $I(P, s(P)+1, s(P)+1)$ est vraie, alors $I(P, q, q)$ est vrai pour tout q tels $s(P)<q$.*

Corollaire 2. *Si $1 \leq p < m$, alors on a $I((p), m, m)$.*

d) Supposons $I(P, s(P)+1, s(P)+1)$ vérifiée pour $P \in \boldsymbol{P}$ et montrons que si $(P, m) \in \boldsymbol{P}$, alors on a $I((P, m), m+1, m+1)$.

Soit k le nombre de coordonnées de P. Soient $B \in {}^{P}\boldsymbol{S}$, $B' \in {}^{m}\boldsymbol{S}$ et une relation $(k+2)$-aire $b \in {}^{m+1}\boldsymbol{X}$. Il existe un entier n tel que $b \subset ({}^{m+1}T_n)^{k+2}$, b est donc la classe modulo ${}^{m}\boldsymbol{U}$ d'une application ^{m}interne β, telle que $\beta \subset {}^{m}((T_n)^{k+2})^{I}$.

Montrons que si b est ${}^{(P,m)}$concourante sur (B, B') dans ${}^{m+1}\boldsymbol{X}$ alors b est (B, B')-idéalisable dans ${}^{m+1}\boldsymbol{X}$.

L'énoncé (b ${}^{(P,m)}$concourante sur (B, B') dans ${}^{m+1}\boldsymbol{X}$) est équivalent à:

(1) $\forall^{P\text{fin}} F \mid \subset B \; [\forall^{m\text{fin}} F' \subset B' \; \exists y \in {}^{m+1}T_n \; \forall x' \in F' (\forall x \mid \in F({}^{m+1}x, {}^{m+1}x', y) \in b)]$.

Compte tenu d'une propriété des ensembles ^{P}fini démontrée plus haut (1) équivaut à

(2) $\forall^{P\text{fin}} F \mid \subset B \; [\forall^{m\text{fin}} F' \subset B' \; \exists y \in {}^{m+1}T_n \; \forall x' \in F' (\forall x \in {}^{m+1}F(x, {}^{m+1}x', y) \in b)]$.

Il découle de (2) que la relation binaire ${}^{(m+1)}$interne $\boldsymbol{b}(F)$ définie par:
$(t, y) \in \boldsymbol{b}(F) \Leftrightarrow t \in {}^{m+1}T_n \wedge y \in {}^{m+1}T_n \wedge (\forall x \in {}^{m+1}F(x, {}^{m+1}x', y) \in b)$ est ^{m}concourante sur B' dans ${}^{m+1}\boldsymbol{X}$. *Après avoir vérifié, en utilisant le transfert, que cette dernière formule définit bien une relation binaire de ${}^{m+1}\boldsymbol{X}$*, on peut deduire, en utilisant le corollaire 2 du c) que cela équivaut à l'affirmation que $\boldsymbol{b}(F)$ est B'-idéalisable dans ${}^{m+1}\boldsymbol{X}$. On a donc l'énoncé équivalent à (2):

(3) $\forall^{P\text{fin}} F \mid \subset B \; [\exists y \in {}^{m+1}T_n \; \forall x' \in B' (\forall x \in {}^{m+1}F(x, {}^{m+1}x', y) \in b)]$,
ce qui équivaut à:

(4) $\forall^{P\text{fin}} F \mid \subset B \; [\exists y \in {}^{m+1}T_n \; \forall x \mid \in F(\forall x' \in B' ({}^{m+1}x, {}^{m+1}x', y) \in b)]$.

Nous allons maintenant, pour pouvoir appliquer l'hypothèse de récurrence, exprimer modulo ${}^{m}\boldsymbol{U}$, l'énoncé entre crochets, on obtient:

(5) $\forall^{P\text{fin}} F \mid \subset B \; [\exists f \in {}^{m}((T_n)^{I}) \; \forall x \mid \in F(\forall x' \in B' \; \exists u \in {}^{m}\boldsymbol{U} \; \forall i \in {}^{m}I [({}^{m}x', x', f(i)) \in \beta(i) \Leftrightarrow i \in u])]$.

Soit, la relation $(k+1)$-aire ^{m}interne $\boldsymbol{b}' \in {}^{m}\boldsymbol{X}$ définie par:
$(t, f) \in \boldsymbol{b}(F') \Leftrightarrow$
$t \in ({}^{m}T_n)^{k} \wedge f \in {}^{m}((T_n)^{I}) \wedge (\forall x' \in B' \; \exists u \in {}^{m}\boldsymbol{U} \; \forall i \in {}^{m}I \; [(x, x', f(i)) \in \beta(i) \Leftrightarrow i \in u])$.
On vérifie sans peine, en utilisant le transfert, que cette dernière formule définit bien une relation $(k+1)$-aire de ${}^{m}\boldsymbol{X}$!
On voit que l'énoncé (4) exprime que la relation $\boldsymbol{b}'$ est ^{P}concourante sur B dans ${}^{m}\boldsymbol{X}$ et, grâce à l'hypothèse de récurrence et au corollaire 1 du c), cela implique

qu'elle est B-idéalisable dans ${}^{m}\boldsymbol{X}$. On a donc:

(6) $\exists f\in{}^{m}((T_n)^I)\,[\forall x|\in B(\forall x'\in B'\,\exists u\in{}^{m}\boldsymbol{U}\,\forall i\in{}^{m}I[({}^{m}x, x', f(i))\in\beta(i)\Leftrightarrow i\in u])]$,

qui devient, par "passage au quotient":

(7) $\exists y\in{}^{m+1}T_n\,\forall x|\in B\,\forall x'\in B'(({}^{m+1}x, {}^{m+1}x', y)\in b)$

Ce dernier énoncé signifiant que b est (B, B')-idéalisable dans ${}^{m+1}\boldsymbol{X}$, ceci achève la partie d) de la démonstration.

e) Supposons que l'on ait $I(P, q, r)$ pour $P=(p_1, p_2, \cdots, p_k)\in\boldsymbol{P}$, et pour des entiers q et r tels que $s(P)<q\leq r$. Montrons que l'on a alors $I(P, q, r+1)$: Soient $B\in{}^{P}\boldsymbol{S}$ et $b\in{}^{r+1}\boldsymbol{X}$. Il existe un entier n tel que $b\subset({}^{r}T_n)^{k+1}$. On en déduit que b est la classe modulo ${}^{r}\boldsymbol{U}$ d'une ^{r}application β telle que $\beta\subset{}^{r}((T_n)^{k+1})^I)$. L'énoncé (b ^{P}concourante sur B dans ${}^{q}\boldsymbol{X}$) est équivalent à l'énoncé,

(*) $\forall^{P\text{-fin}} F|\subset B\,\exists y\in{}^{q}T_n\,\forall x|\in F\,\exists u\in{}^{r}\boldsymbol{U}\,\forall i\in{}^{r}I\,[({}^{r}x, {}^{r}y)\in\beta(i)\Leftrightarrow i\in u]$.

Soit la ^{r}relation binaire $\boldsymbol{b}\in{}^{r}\boldsymbol{X}$ définie par:

$(x, y)\in\boldsymbol{b}\Leftrightarrow(x\in{}^{r}T_n\wedge y\in{}^{r}T_n\wedge\exists u\in{}^{r}\boldsymbol{U}\,\forall i\in{}^{r}I\,[(x, y)\in\beta(i)\Leftrightarrow i\in u]$,

la relation (*) exprime que la ^{r}relation binaire $\boldsymbol{b}$ est ^{p}concourante sur B dans ${}^{q}\boldsymbol{X}$; d'aprés l'hypothèse de récurrence cela équivaut à l'énoncé ($\boldsymbol{b}$ est B-idéalisable dans ${}^{q}\boldsymbol{X}$) qui s'écrit, $\exists y\in{}^{q}T_n\,\forall x|\in B\,\exists u\in{}^{r}\boldsymbol{U}\,\forall i\in{}^{r}I\,[({}^{r}x, {}^{r}y)\in\beta(i)\Leftrightarrow i\in u]$ et est équivalent à, $\exists y\in{}^{q}T_n\,\forall x|\in B({}^{r+1}x, {}^{r+1}y)\in b)$ qui exprime que b est B-idéalisable dans ${}^{q}\boldsymbol{X}$. On a donc $I(P, q, r+1)$. On en déduit que, $I(P, q, q)$ étant vraie pour tous P et q tels que $s(P)<q$, $I(P, q, r)$ est vraie pour tous P, q et r tels que $s(P)<q\leq r$.

Ceci achève la preuve du lemme 3.

Fin de la démonstration de la condition ii)

Il suffit d'appliquer le lemme 3, avec $b\in{}^{r}\boldsymbol{S}$. En effet, si $b\in{}^{r}\boldsymbol{S}\subset{}^{r}\boldsymbol{X}$, si $B\in{}^{P}\boldsymbol{S}$, si $s(P)<q<r$, si b est ^{P}concourante sur B dans ${}^{q}\boldsymbol{X}$, alors b est ^{P}concourante sur B dans ${}^{q}\boldsymbol{S}$, si b est B-idéalisable dans ${}^{q}\boldsymbol{X}$, alors elle est B-idéalisable *dans* ${}^{q}\boldsymbol{S}$. En effet, si $P=(p_1, p_2, \cdots, p_k)$ et si $b\subset{}^{r}E_m\times\cdots\times{}^{r}E_m$ est une relation $(k+1)$-aire de ${}^{r}\boldsymbol{S}\subset{}^{r}\boldsymbol{X}$ alors pour tout x de ${}^{P}\boldsymbol{S}$, si $({}^{r}x, {}^{r}y)\in b$, on a ${}^{r}y\in{}^{r}E_m$.

Si d'autre part $y\in{}^{q}\boldsymbol{X}$, on a $y\in{}^{q}E_m$. Il suffit d'appliquer le transfert de droite à gauche dans l'extension: ${}^{q}\boldsymbol{X}\to{}^{r}\boldsymbol{X}$, à l'énoncé" ${}^{r}y\in{}^{r}E_m$".

γ) vérification de la condition iii)

Soit $F(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ un *p-énoncé* sur ${}^{w}\boldsymbol{X}$, nous désignons sous ce terme une p-formule sur ${}^{w}\boldsymbol{X}$ sans variable libre, portant sur les éléments $x_1, x_2, \cdots, x_k$ de ${}^{w}\boldsymbol{X}$. Cet énoncé est équivalent à un énoncé sous-forme prénexe, autrement dit, de la forme:

(1) $Q_1 t_1\in X_1\,Q_2 t_2\in X_2\cdots Q_m t_m\in X_m\,A({}^{w}t_1, {}^{w}t_2, \cdots, {}^{w}t_m, x_1, x_2, \cdots, x_k)$

où chaque Q_i est un quantificateur, chaque X_i un élément de ${}^{p^i}\boldsymbol{X}$ avec $p\leq p^i\leq w$,

et $A({}^w t_1, {}^w t_2, \cdots, {}^w t_1, x_1, x_2, \cdots, x_k)$ un énoncé sans quantificateurs.

Pour chaque x_i nous noterons $d_i = \min \{d \in \{p, p+1, \cdots, w\} / (\exists x \in {}^d X / x_i = {}^w x)\}$.

Si F est un énoncé de la forme (1) nous appellerons hauteur de F l'entier,

$$\text{hauteur}\,(F) = \text{Max}\,\{p_1, p_2, \cdots, p_m, d_1, d_2, \cdots, d_k\}\ .$$

La hauteur d'un p-énoncé sur ${}^w\boldsymbol{X}$ est donc supérieure ou égale à p.

Lemme 4. *Si $p \leq w$ et si $E(x)$ est une p-formule sur ${}^w\boldsymbol{X}$ avec une seule variable libre, x, alors il existe une p-formule $F(y)$ sur ${}^p\boldsymbol{X}$ ayant y comme seule variable libre et telle que:*

pour tout $s \in {}^p\boldsymbol{S}$, $F(s)$ est un p-énoncé de hauteur p sur ${}^p\boldsymbol{X}$ équivalent à $E({}^w s)$.

Démonstration. Soit $E(x)$ une p-formule sur ${}^w\boldsymbol{X}$ avec une seule variable libre, $p \leq w$. Pour tout $s \in {}^p\boldsymbol{S}$, la hauteur de $E({}^w s)$ est un entier h indépendant de s. Démontrons qu'il existe une p-formule $E'(y)$ telle que, pour tout $s \in {}^p\boldsymbol{S}$, $E'({}^{h-1}s)$ soit un énoncé de hauteur h-1 sur ${}^{h-1}\boldsymbol{X}$ équivalent à $E({}^w s)$. Nous aurons ainsi, en un nombre fini d'étapes, le résultat souhaité. Soit
$F(x, x_1, \cdots, x_k) \equiv Q_1 t_1 \in X_1\, Q_2 t_2 \in X_1 \cdots Q_m t_m \in X_m\, A({}^w t_1, {}^w t_2, \cdots, {}^w t_m, x, x_1, \cdots, x_k)$, une p-formule sur ${}^w\boldsymbol{X}$ sous forme prénexe, équivalente à $E(x)$. Soit $s \in {}^p\boldsymbol{S}$, posons $h = \text{hauteur}\,(F({}^w s, x_1, \cdots, x_k))$.

Supposons que $h = p_{i_1} = p_{i_2} = \cdots p_{i_p} = d_{j_1} = \cdots d_{j_q} > p$. La formule $F({}^w s, x_1, \cdots, x_k)$, que nous pouvons écrire,

$$\cdots Q_{i_1} t_{i_1} \in X_{i_1} \cdots Q_{i_2} t_{i_2} \in X_{i_2} \cdots Q_{i_p} t_{i_p} \in X_{i_p} \cdots$$
$$A(\cdots {}^w t_{i_1}, \cdots {}^w t_{i_2}, \cdots {}^w t_{i_p} \cdots, x_{j_1}, \cdots x_{j_2}, \cdots x_{j_q} \cdots)$$

équivaut à:

$$\cdots Q_{i_1} t_{i_1} \in X_{i_1} \cdots Q_{i_2} t_{i_2} \in X_{j_2} \cdots Q_{i_p} t_{i_p} \in X_{i_p} \cdots$$
$$A({}^h t_1, \cdots t_{i_1}, \cdots t_{i_2}, \cdots t_{i_p}, \cdots {}^h t_m, {}^h a_1 \cdots a_{j_1}, \cdots a_{j_2}, \cdots a x_{j_q} \cdots {}^h a_1)\,,$$

avec, pour chaque indice j, ${}^d a_j = x_j$.

En revenant à la définition de ${}^h\boldsymbol{X}$, on voit que l'énoncé précédent équivaut à l'énoncé de hauteur $h-1$ sur ${}^{h-1}\boldsymbol{X}$:

$$\cdots Q_{i_1} \tau_{i_1} \in Y_{i_1}{}^I \cdots Q_{i_2} \tau_{i_2} \in Y_{i_2}{}^I \cdots Q_{i_p}\, Y_{i_p}{}^I \cdots \exists u \in {}^{h-1}\boldsymbol{U}\ \forall s \in {}^{h-1}I\,(s \in u \Leftrightarrow$$
$$A({}^{h-1}t_1, \cdots \tau_{i_1}(s), \cdots \tau_{i_2}(s), \cdots \tau_{i_p}(s), \cdots {}^{h-1}t_m, {}^{h-1}a_1 \cdots \alpha_{j_1}(s), \cdots \alpha_{j_2}(s), \cdots \alpha_{j_q}(s) \cdots {}^{h-1}a_1).$$

Ceci achève la preuve du lemme.

Fin de la démonstration de la condition iii)

Si $E(x)$ avec est une p-formule sur ${}^w\boldsymbol{S}$, alors on peut la considérer comme une p-formule sur ${}^w\boldsymbol{X}$ il existe donc, d'après le lemme 4, une p-formule $F(y)$ sur ${}^p\boldsymbol{X}$ ayant y comme seule variable libre et telle que pour tout $s \in {}^p\boldsymbol{S}$, $F(s)$ est un

p-énoncé de hauteur p sur ${}^{p}\boldsymbol{X}$ équivalent à $E({}^{w}s)$. Il découle de ce qui précède que $F(y)$ peut être choisie de la forme:
$F(y)\equiv Q_1\, t_1\in C_1\, Q_2\, t_2\in C_2\cdots Q_k\, t_k\in C_k\, B(t_1, t_2, \cdots, t_k, y, a_1, a_2, \cdots, a_q)$ avec B sans quantificateurs et $C_1, C_2, \cdots C_k, a_1, a_2, \cdots, a_q\in {}^{p}\boldsymbol{X}$. Soit ${}^{p}T_n$ contenant tous les C_j et tous les a_i.

On voit que:

$$\forall X_1\in T_n\cdots\forall X_k\in T_n\ \forall x_1\in T_n\cdots\forall x_q\in T_n$$
$$[\forall Z\in \boldsymbol{S}\ \exists Y\in \boldsymbol{S}\ \forall s\in \boldsymbol{S}$$
$$(x\in Y\Leftrightarrow x\in Z\wedge(Q_1\, t_1\in X_1\cdots Q_k\, t_k\in X_k\, B(t_1, \cdots, t_k, s, x_1, \cdots, x_q))],$$

cela provient du fait que la superstructure $\boldsymbol{S}$ est complète.

Transféré dans ${}^{p}\boldsymbol{X}$, cet énoncé devient:

$$\forall X_1\in {}^{p}T_n\cdots\forall X_k\in {}^{p}T_n\ \forall x_1\in {}^{p}T_n\cdots\forall x_q\in {}^{p}T_n$$
$$[\forall Z\in {}^{p}\boldsymbol{S}\ \exists Y\in {}^{p}\boldsymbol{S}\ \forall s\in {}^{p}\boldsymbol{S}$$
$$(x\in Y\Leftrightarrow x\in Z\wedge(Q_1\, t_1\in X_1\cdots Q_k\, t_k\in X_k\, B(t_1, \cdots, t_k, s, x_1, \cdots, x_q)))].$$

On a donc:

$$\forall Z\in {}^{p}\boldsymbol{S}\ \exists Y\in {}^{p}\boldsymbol{S}\ \forall s\in {}^{p}\boldsymbol{S}$$
$$(s\in Y\Leftrightarrow s\in Z\wedge(Q_1\, t_1\in C_1\cdots Q_k\, t_k\in C_k\, B(t_1, \cdots, t_k, s, a_1, \cdots, a_q))),$$
$$\forall Z\in {}^{p}\boldsymbol{S}\ \exists Y\in {}^{p}\boldsymbol{S}\ \forall s\in {}^{p}\boldsymbol{S}\ (s\in Y\Leftrightarrow s\in Z\wedge F(s)),$$
$$\forall Z\in {}^{p}\boldsymbol{S}\ \exists Y\in {}^{p}\boldsymbol{S}\ \forall s\in {}^{p}\boldsymbol{S}\ (s\in Y\Leftrightarrow x\in Z\wedge E({}^{w}s)),$$

ce qu'il fallait démontrer.

5. Preuve de la consistance relative de RIST

Nous pouvons maintenant donner la preuve de la conservativité de RIST. La conservativité de RIST s'énonce:

Métathéorème. *Tout théorème interne de RIST est un théorème de ZFC.*

Dans notre démonstration, nous utiliserons comme modèle des extensions successives ajustées de la superstructure complète, $\boldsymbol{S}(\alpha)$, bâtie sur ensemble transitif de la forme $R(\alpha)$ où α est un ordinal, les ensembles $R(\alpha)$ étant définis par induction sur les ordinaux par $R(\phi)=\phi$ et pour tout ordinal α, $R(\alpha)=\cup_{\mu\in\alpha}\mathcal{P}(R(\mu))$. Nous considèrerons l'axiome de fondation comme un axiome de ZFC. Cet axiome équivaut à l'affirmation que tout ensemble est dans un $R(\alpha)$.

Voici, avec ou sans démonstrations, les propriétés des $R(\alpha)$ qui nous utiliserons au cours de notre preuve.

◇ Si α est un ordinal limite, alors, $R(\alpha)=\cup_{\mu\in\alpha}R(\mu)$.

◇ Si α est un ordinal limite, et si $t_1\in R(\alpha), \cdots, t_k\in R(\alpha)$, alors $(t_1, \cdots, t_k)\in R(\alpha)$.

Montrons le pour $k=2$. Nous montrons d'abors que si t est s sont deux éléments de $R(\alpha)$, alors, il en est de même de $\{t\}$ et de $\{t, s\}$. Soient donc s et t deux éléments de $R(\alpha)$. On a $R(\alpha)=\cap_{\mu\in\alpha}R(\mu)$ donc, $t\in R(\mu')$, et $s\in R(\mu'')$

avec $\mu' \in \alpha$ et $\mu'' \in \alpha$. Si on prend $\mu = \max\{\mu', \mu''\}$, on a: $t \in R(\mu)$ et $s \in R(\mu)$ donc, $\{t\} \in \mathcal{P}(R(\mu))$ et $\{t, s\} \in \mathcal{P}(R(\mu))$, d'où l'on tire, $\{t\} \in R(\alpha)$ et $\{t, s\} \in R(\alpha)$. On en déduit que la propriété est vraie pour $k=2$ car $t_1 \in R(\alpha)$ et $t_2 \in R(\alpha)$ impliquent $\{t_1\} \in R(\alpha)$ et $\{t_1, t_2\} \in R(\alpha)$, d'où on tire: $(t_1, t_2) - \{\{t_1\}, \{t_1, t)_2\}\} \in R(\alpha)$. Pour $k>2$, on a $(t_1, \cdots, t_k) = (t_1, (t_2, \cdots, t_k)) = \{\{t_1\}, \{t_1, (t_2, \cdots, t_{k-1})\}\}$, la démonstration se termine donc aisément par récurrence. Cette propriété admet une réciproque immédiate.

$\diamond$ Si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont des énoncés de ZFC alors, pour tout ordinal α, il existe un ordinal limite β contenant α tel que: $(A_1 \Leftrightarrow A_1^{R(\beta)}) \wedge (A_2 \Leftrightarrow A_2^{R(\beta)}) \wedge \cdots (A_n \Leftrightarrow A_n^{R(\beta)})$, où $A_i^{R(\beta)}$ désigne le relativisé à $R(\beta)$ de l'énoncé A_i (voir [9] p.67).

$\diamond$ Si α est un ordinal limite et ${}^*\mathcal{S}(\alpha)$ une extension de $\mathcal{S}(\alpha)$ alors,

$$(z \in {}^*(\mathcal{P}(R(\alpha)) \wedge z \text{ } {}^*\text{fini}) \Rightarrow z \in {}^*R(\alpha).$$

$\diamond$ Si α est un ordinal limite, alors pour tous $x \in {}^*R(\alpha)$ $y \in {}^*R(\alpha)$ et $f \in {}^*\boldsymbol{S}(\alpha)$, si f est une application de x dans y et si x et y sont *finis, on a $f \in {}^*R(\beta)$.

Pour les deux dernières propriétés, on démontre la propriété obtenue en supprimant les étoiles puis on applique le transfert.

Démonstration du métathéorème. Soit A_0 un énoncé interne de RIST. Sa démonstration dans RIST utilise des axiome de ZFC en nombre intuitivement fini, $A_1, A_2, \cdots, A_n$ et éventuellement les axiomes, $\mathcal{SR}_1$ $\mathcal{SR}_2$, $\mathcal{SR}_3$, et les schémas d'axiome (T),(I) et (S).

Remarquons que chaque fois que nous utilisons, dans une démonstration, le shéma d'axiomes (I), nous n' utilisons en fait qu'un axiome $I(\alpha_1, \cdots, \alpha_k; \beta, F)$ où $I(\alpha_1, \cdots, \alpha_k;\ )$, où $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$, β sont des niveaux fixés de standardicité et F est une formule interne; de même, à chaque utilisation de (T) on fait usage d'un seul axiome $T(\alpha, F)$ relatif a un niveau α de standardicité et à une formule intene F. De la même façon, quand on fait appel à (S), on utilise un axiome $S(\alpha, F)$ ou F est une formule α-externe faisant intervenir un nombre fini de de quantificateurs externes $Q_1^{\beta_1}, \cdots, Q_m^{\beta_m}$, les constantes $\beta_1, \cdots, \beta_m$ étant toutes α-standard. Nous noterons $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{w-1}$, les niveaux *distincts* de standardicité utilisés dans la preuve de A_0 écrits par ordre décrissant de standardicité, ce qui signifie que l'on aura $\neg(\mu_2 \mathcal{SR} \mu_1), \neg(\mu_3 \mathcal{SR} \mu_2) \cdots, \neg(\mu_{w-1} \mathcal{SR} \mu_{w-2})$.

Soit α un ordinal tel que $\boldsymbol{N} \in R(\alpha)$ et soit β un ordinal limite contenant α tel que:

$$(A_0 \Leftrightarrow A_0^{R(\beta)}) \wedge (A_1 \Leftrightarrow A_1^{R(\beta)}) \wedge \cdots (A_n \Leftrightarrow A_n^{R(\beta)}).$$

Posons $E = R(\beta)$, et soit $\boldsymbol{S}(\beta) = {}^1\boldsymbol{S}(\beta) \rightarrow {}^2\boldsymbol{S}(\beta) \rightarrow {}^3\boldsymbol{S}(\beta) \cdots \rightarrow {}^w\boldsymbol{S}(\beta)$. w extensions ajustées successives de $\boldsymbol{S}(\beta)$

Pour tout entier p nous noterons: ${}^pE = \{{}^wx / x \in {}^pE\}$.

Il découle de la définition des ${}^pE$ pour $1 \leq p \leq w$ que l'on a: ${}^1E \subset {}^2E \subset \cdots \subset {}^wE$. Si $x \in {}^wE$, nous noterons: $p(x) = \min\{p \in \boldsymbol{N} / x \in {}^pE\}$.

Nous definirons *sur* ${}^{w}E$ deux relations binaires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$ en posant pour tous x et y dand ${}^{w}E$:

$$(x, y)\in\mathcal{A}\Leftrightarrow x\in y\,,$$
$$(x, y)\in\mathcal{S}\Leftrightarrow p(x)\leq p(y)\,.$$

Aux constantes $\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_{w-1}$, on peut associer des éléments $a_1, a_2, \cdots a_{w-1}$, de ${}^{w}E$ tels que, pour tout couple (i, j), $\mu_i \mathcal{SR} \mu_j$ si et seulement si $p(a_i)\leq p(a_j)$; il suffit de prendre $a_1\in{}^{1}E$ et, pour $i>1$, $a_i\in{}^{i}E\setminus{}^{i-1}E$. On aura donc pour tout i, $p(a_i)=i$. A la constante $\boldsymbol{N}$ qui apparait dans la formulation du principe d'idéalisation (implicitement, dans les sous-formules de la forme "x fini"), nous ferons correspondre l'élément ${}^{w}\boldsymbol{N}$ de ${}^{w}E$.

Soit la réalisation $\mathcal{M}=({}^{w}E, \mathcal{A}, \mathcal{S}, a_1, a_2, \cdots a_{w-1}, {}^{w}\boldsymbol{N})$ de domaine ${}^{w}E$ dans laquelle le prédicat "$\in$" d'appartenance est interprété par la relation, $\mathcal{A}$ le prédicat de Wallet est interprété par la relation $\mathcal{S}$, les constantes $\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_{w-1}$ et $\boldsymbol{N}$ respectivement par les éléments $a_1, a_2, \cdots a_{w-1}$ et ${}^{w}\boldsymbol{N}$ de ${}^{w}E$.

Nous allons montrer que $\mathcal{M}$ est un modéle du systéme d'axiomes $\sum$ constitué par, $A_1, A_2, \cdots, A_n, \mathcal{SR}_1, \mathcal{SR}_2, \mathcal{SR}_3$, ainsi que tous les axiomes de la forme $I(\alpha_1, \cdots, \alpha_k; \beta, F)$, $I(\alpha_1, \cdots, \alpha_k;, F)$, $S(\alpha, F)$ ou $T(\alpha, F)$ utilisés dans la preuve de A_0,

a) $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont vrais dans $\mathcal{M}$:

En effet pour chaque A_i, si nous notons $(A_i)_w$ l'interprétation de A_i dans $\mathcal{M}$ on a:
$(A_i)_w\equiv(A_i)^{{}^{w}R(\beta)}\Leftrightarrow A_i{}^{R(\beta)}\Leftrightarrow A_i$. La première équivalence s'obtient par transfert, la seconde découle du choix de β.

b) Les axiomes $\mathcal{SR}_1$, $\mathcal{SR}_2$ et $\mathcal{SR}_3$ sont vrais dans $\mathcal{M}$:

En effet, ces axiomes ont les interprétations suivantes dans $\mathcal{M}$:
Pour $\mathcal{SR}_1$: $\forall x\in{}^{w}E\; p(x)\leq p(y)$,
pour $\mathcal{SR}_2$: $\forall x\in{}^{w}E\forall y\in{}^{w}E\;(p(x)\leq p(y))\vee(p(y)\leq p(x))$,
pour $\mathcal{SR}_3$: $\forall x\in{}^{w}E\forall y\in{}^{w}E\forall z\in{}^{\alpha}E((p(x)\leq p(y))\wedge(p(y)\leq p(z)))\Rightarrow p(x)\leq p(z))$,
qui sont des énoncés démontrables à partir des propriétés des ${}^{p}E$ citées plus haut.

b) Montrons que pour toute formule $F(x, t_1, t_2, \cdots, t)$ interne avec $x, t_1, \cdots, t_k$ comme seules variables libres l'axiome $T(\alpha, F)=\forall^{\alpha}t_1\cdots\forall^{\alpha}t_k(\forall^{\alpha}x\,F(x, t_1, \cdots t_k)\Rightarrow \forall xF(x, t_1, \cdots t_k))$, est vrai dans $\mathcal{M}$. Puisque α est un des μ_i, il lui correspond un élément $a_i\in{}^{i}E$, si on interprète la constante α par a_i, l'interprétation correspondante de $T(\alpha, F)$ dans $\mathcal{M}$ équivaut à:

$$\forall t_1\in{}^{i}E\cdots\forall t_k\in{}^{i}E(\forall x\in_i{}^{i}E\,F(x, t_1, \cdots t_k)\Rightarrow\forall x\in{}^{w}E\,F(x, {}^{w}t_1, \cdots {}^{w}t_k))\,.$$

L'implication entre crochets est vérifiée pour tous $t_1, \cdots t_k\in_p{}^{p}E$ grâce à la partie i) du théorème principal du chapitre 2-A; $T(\alpha, F)$ est donc vrai dans $\mathcal{M}$.

c) Montrons que, si $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ et β sont dans la liste des μ_i alors pour toute formule interne F ayant x et y comme variables libres et éventuellement des paramètres, l'axiome $I(\alpha_1, \cdots, \alpha_k; \beta, F) \equiv (\forall^{\alpha_1\,\mathrm{fin}} z_1 \cdots \forall^{\alpha_k\,\mathrm{fin}} z_k \exists^{\beta} y\ \forall x_1 \in z_1 \cdots \forall x_k \in z_k F(x_1, \cdots, x_k, y)) \Leftrightarrow \exists^{\beta} y\ \forall^{\alpha_1} x_1 \cdots \forall^{\alpha_k} x_k F(x_1, \cdots, x_k, y)$ est vrai dans $\mathcal{M}$, pour toute interprétation dans $\mathcal{M}$ des paramètres:

Soient $a_{p_1}, a_{p_2}, \cdots a_{p_k}$ et a_q, les interprétations respectives de $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ et β. Comme β n'est α_i-standard pour aucun $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$, q est strictement supérieur à tous les p_i. Après quelques transformations, pour toute interprétation dans ${}^{w}E$ des paramètres, l'interprétation correspondante de $I(\alpha_1, \cdots, \alpha_k; \beta, F)$ dand $\mathcal{M}$ devient:

$$[\forall^{w\,\mathrm{fin}} z_1 \in {}^{p_1}E \cdots \forall^{w\,\mathrm{fin}} z_k \in {}^{p_k}E\ \exists y \in {}^{q}E\ \forall (z\ x_1, \cdots, x_k) \in {}^{w}E((x_1 \in z_1 \wedge \cdots x_k \in z_k) \Rightarrow \bar{F}(x_1, \cdots, x_k, y))] \Leftrightarrow [\exists y \in {}^{q}E\ \forall x_1 \in {}^{p_1}E \cdots \forall x_k \in {}^{p_k}E\ \bar{F}(x_1, \cdots, x_k, y)],$$

où $\bar{F}$ est la formule obtenue en remplaçant les paramètres de F par leurs interprétations respectives.

En regroupant les variables, si on pose $(p_1, \cdots, p_k) = P$ et $B = ({}^{p_1}E, \cdots, {}^{p_k}E) \in {}^{P}\mathcal{S}$ cet énoncé peut encore s'écrire:

$$[[\forall z \mid \in B((z\,{}^{P}\mathrm{fin}) \Rightarrow \exists y \in {}^{q}E\ \forall x \mid \in z\ \bar{F}({}^{w}x, {}^{w}y))] \Rightarrow (\exists y \in {}^{q}E\ \forall x \mid \in B\ \bar{F}({}^{w}x, {}^{w}y))]].$$

Comme, pour ${}^{p_i}\mathrm{fini}$, $z_i \in {}^{p_i}E$ équivaut à $z_i \subset {}^{p_i}E$ on a, pour ${}^{P}\mathrm{fini}$, $z \mid \in B$ ssi $z \mid \subset B$. L'énoncé précédent équivaut à:

$$[[\forall z \mid \subset B((z\,{}^{P}\mathrm{fin}) \Rightarrow \exists y \in {}^{q}E\ \forall x \mid \in z\ \bar{F}({}^{w}x, y^{w}))] \Leftrightarrow [\exists y \in {}^{q}E\ \forall x \mid \in B\ \bar{F}({}^{w}x, {}^{w}y)]].$$

Soit b la ^{w}relation $(k+1)$-aire définie par $(x, y) \in b \Leftrightarrow \bar{F}(x, y) \wedge (x \in {}^{w}E) \wedge (y \in {}^{w}E)$. Le premier membre de l'énoncé précédent exprime que b est ^{P}concourante sur B dans ${}^{q}\boldsymbol{S}$ et le deuxiéme qu'elle est B-idéalisable dand ${}^{q}\mathcal{S}$. Il suffit donc d'appliquer la condition iii du théorème d'existence des extensions itérées ajustées pour montrer l'équivalence.

On démontre de même que, pour toute interprétation des paramètres de F, l'interprétation correspondante dans $\mathcal{M}$ de l'axiome $I(\alpha_1, \cdots, \alpha_k; ., F)$ équivaut à:

$$[[\forall z \mid \subset B((z\,{}^{P}\mathrm{fin}) \Rightarrow \exists y \in {}^{w}E\ \forall x \mid \in z\ \bar{F}({}^{w}x, {}^{w}y))] \Leftrightarrow [\exists y \in {}^{w}E\ \forall x \mid \in B\ \bar{F}({}^{w}x, {}^{w}y)]].$$

Nous concluerons donc, comme pour l'axiome $I(\alpha_1, \cdots, \alpha_k; \beta, F)$, en utilisant le ii) du théorème principal du chapitre 2-A, mais en remplaçant q par w.

d) Montrons que pour tout α appartenant à la liste des μ_i et toute formule α-externe F, $S(\alpha, F)$ est vrai dans $\mathcal{M}$. Supposons que $\alpha = \mu_p$, pour toute interprétation dans $\mathcal{M}$ des paramétres de F, si $\bar{F}$ est l'interprétation correspondante de F alors, $S(\alpha, F)$ doit être interprété par:
$\forall y \in {}^{p}E\ \exists z \in {}^{p}E\ \forall t \in {}^{p}E(t \in z \Leftrightarrow (t \in y \wedge \bar{F}(t, \cdots))$, qui équivaut à $\forall y \in {}^{p}E\ \exists z \in {}^{p}E\ \forall t \in {}^{p}E(t \in z \Leftrightarrow (t \in y \wedge \bar{F}({}^{w}t, \cdots))$. Il découle du fait que F est α-externe que

$\bar{F}(t)$ est, pour tout $t \in {}^{w}E$, un p-énoncé sur ${}^{w}E$. D'autre part, $y \in {}^{p}E$ implique $y \subset {}^{p}E$, on peut donc appliquer le iii) du théorème d'existence d'extensions ajustées successives. On obtient qu'il existe un ensemble z (contenu dans y) tel que $\forall t \in {}^{p}E(t \in z \Leftrightarrow (t \in y \wedge \bar{F}({}^{w}t, \cdots))$, comme d'autre part ($z \subset y$ et $y \in {}^{p}E$) implique $z \in {}^{p}E$, la preuve est terminée.

La preuve de la consistance relative de RIST se termine ainsi: (d'une manière analogue à celle de la consistance de IST dans [12])

On sait que A_0 admet une démonstration dans RIST à partir des axiomes de $\sum$. Cette preuve, interprétée dans $\mathcal{M}$, donne une preuve dans ZFC de l'interprétation $(A_0)_w$ de A_0 or, on a $(A_0)_w \equiv (A_0)^{{}^{w}R(\beta)}$. La propriété de transfert implique que $(A_0)^{{}^{w}R(\beta)} \Leftrightarrow {A_0}^{R(\beta)}$; comme β est choisi tel que ${A_0}^{R(\beta)} \Leftrightarrow R(\beta)$, on obtient une démonstration de A_0 dans ZFC. Ceci achéve la preuve du métathéorème. ■

6. Remarques Finales

a) On aura remarqué au cours de la preuve du théorème d'existence de suites d'extensions ajustées, que la technique qui consistait à remplacer un énoncés P sur ${}^{p+1}\boldsymbol{X}$ par un énoncés P' sur ${}^{p}\boldsymbol{X}$, était utilisée de manière récurrente. P' était l'énoncé obtenu en revenant à la définition de ${}^{p+1}\boldsymbol{X}$, "en s'exprimant modulo ${}^{p}\boldsymbol{U}$". On voit bien que, de proche en proche, tout énoncés sur ${}^{p}\boldsymbol{X}$ peut s'exprimer modulo $\boldsymbol{U}$. On peut déduire également cela d'un résultat général de L. Haddad publié dans [4].

Dans ce travail, l'auteur établi ceci: Soient I, J, E des ensembles, $\boldsymbol{U}$ un ultrafiltre sur I, $\boldsymbol{V}$ un ultrafiltre sur J et $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{V}$ l'ultrafiltre sur $I \times J$ égal au produit ordinal de $\boldsymbol{U}$ par $\boldsymbol{V}$. Si on pose $*(X^I) = [X^I)]^I{}_{/U}$, $**X = *(X^I)_{/*V}$ alors, on peut idendifier $**X$ à $(X^{I \times J})_{/W}$.

b) Dans un travail antérieur au nôtre, et publié dans [3], E.I. Gordon à montré qu'il était possible d'ordonner partiellement les ensembles au moyen d'un prédicat binaire, noté **st** défini dans I.S.T. (à la place de notre prédicat non défini $\mathcal{SR}$) de telle manière que, si y **st** x si y est fini alors, pour tout $t \in y$, on a t **st** x. Sa definition est la suivante: Deux ensembles x et y étant donnés, x est dit standard relativement à y et on écrit x **st** y si il existe une fonction φ telle que:

i) φ est standard et, pour tout t, $\varphi(t)$ est un ensemble fini,

ii) y est dans le domaine de φ,

iii) $x \in \varphi(y)$.

La définition dans IST ci-dessus peut être considérée comme une définition dans RIST; il suffit de donner au mot "standard" dans le i) la définition que nous lui avons donné au début de cet article (x-standard pour tout x). On voit alors que, pour tous ensembles x et y, x **st** y implique $x \mathcal{SR} y$. En effet soient x, y et φ verifiant i) ii) et iii); φ standard implique que φ est y-standard donc, d'aprés $(T)\,\varphi(y)$ est y-standard; comme $\varphi(y)$ est fini, cela implique que tout

élément de $\varphi(y)$ est y-standard donc: $x\mathcal{SR}y$. La réciproque est fausse. Pour ne pas avoir des contre-exemples trop particuliers, exigeons que x et y soient tous deux éléments de $[0, 1]$. Ecrivons IMFIN(φ) pour dire que φ est une fonction telle que, pour tout y $\varphi(y)$ est un ensemble fini. Pour tout y non standard fixé dans $[0, 1]$ on a: $\forall^{st,fin}\Phi\,\exists x\in[0,1]\,\forall\varphi\in\Phi\,(\mathrm{IMFIN}(\varphi)\Rightarrow x\notin\varphi(y))$, (pour chaque Φ fini et standard, on prend $x\in[0,1]\setminus\bigcup_{\varphi\in\Phi t.q.\mathrm{IMFIN}(\varphi)}\varphi(y)$). Par (T) ce dernier énoncé équivaut à: $\forall^{st,fin}\Phi\,\exists^{y}x\in[0,1]\,\forall\varphi\in\Phi\,(\mathrm{IMFIN}\,(\varphi)\Rightarrow x\notin\varphi(y))$. Il sufit d'appliquer (I) pour obtenir:

$$\exists^{y}x\in[0,1]\,\forall^{st}\varphi\,(\mathrm{IMFIN}\,(\varphi)\Leftrightarrow x\notin\varphi(y))\,.$$

On a donc prouvé l'existence de deux éléments x et y de $[0, 1]$ tels que $x\mathcal{SR}y$ et $\neg(x\,\mathbf{st}\,y)$. Le prédicat binaire **st** de Gordon perment, comme notre prédicat $\mathcal{SR}$, d'introduire des infinitésimaux de différents ordres et d'obtenir, parmi d'autre choses, une caractérisation externe de la limite double faisant intervenir deux niveaux d'infinitésimalité. L'inconvénient d'une telle définition, dans IST, du prédicat de standardicité relative, est qu'elle interdit, comme l'a signalé l'auteur, d'énoncer un principe relatif de standardisation satisfaisant. Pour le démontrer, E.I. Gordon établit dans [3] **4**, Théorème 5, l'existence d'un entier N et d'un $x\in[0, 1]$ tels que x n'est infiniment voisin d'ordre N d'aucun élément N-standard de $[0, 1]$.

Bibliographie

[1] S. Albeverio, J.E. Fenstad, R. Hoegh-Krohn and T. Lindstrom: Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics, Academic Press, 1986.

[2] C.C. Chang and H.J. Kesiler: Model theory, North-Holland, 1973.

[3] E.I. Gordon: *Relatively standard elements in the theory of internal sets of E. Nelson*, Siberian Math. J. **30**, n°1 (1989), 89–95 (Russian).

[4] L. Haddad: *La double ultrapuissance,* Séminaire d'Analyse, Université de Clermont II, n°24 (1988).

[5] L. Haddad: Introduction a l'Analyse Nonstandard, Beyrouth Eté 1973.

[6] C.W. Henson and L. Moore: *Nonstandard analysis and the theory of Banach spaces*, Lecture Notes **983** (Springer ed.) 27–112.

[7] H.J. Keisler: *Ultraproducts and saturated models*, Proc. Acad. Sci. Amsterdam A**67** (1964), 178–186.

[8] H.J. Keisler: *Good ideals in fields of sets*, Ann. Math. **79** (1964), 338–359.

[9] J.L. Krivine: Théorie Axiomatique des Ensembles, Presses universitaires de France, 1972.

[10] W.A. J. Luxemburg: *A general theory of monads*, Intern. Sympos. Pasadena, Calif. 1987, Holt, Reinhart and Winston, New -York, 1969, 18–86.

[11] M. Morley and R. Vaught: *Homogeneous universal models,* Math. Scand., **11** (1962), 37–57.

[12] E. Nelson: *Internal set theory*: *A new approach to nonstandard analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. **83** n°6 (1977), 1165–1198.

[13] A. Robinson and E. Zakon: *A set-theoretical characterization of enlargements*, Intern. Sympos. Pasadena, 1967.

[14] Y. Péraire et G. Wallet: *Une théorie relative des ensembles internes*, C.R. Acad. Sci. Paris, **308**, Serie I, (1989), 301–304.

Université Blaise Pascal (Clermont II),
Départment de mathématiques,
B.P. 45, 63170 Aubière.
France