Lions J.L.
Osaka Math. J.
15 (1963), 131-142.

REMARQUES SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES OPÉRATIONNELLES

PAR

JACQUES LOUIS LIONS

Introduction

On considère l'équation (différentielle opérationnelle)

$$\frac{du}{dt}(t)+A(t)u(t) = f(t)\,, \tag{*}$$

avec $u(0)$ donné, où les $A(t)$ forment une famille d'opérateurs *non bornés* dans un espace *H de Hilbert.*

Des résultats assez complets sont connus lorsque les domaines $D(A(t))$ des $A(t)$ sont *indépendants de t*, et cela même lorsque H est un espace de Banach; Cf. [1], [10], [11]. Si l'on fait des hypothèses sur les $A(t)$ impliquant que l'on peut, dans un sens ou dans un autre, définir les puissances $A(t)^\theta$ de $A(t)$, $0<\theta<1$, et si l'on suppose que *pour un θ convenable, les domaines $D(A(t)^\theta)$ des $A(t)^\theta$ sont indépendants de t*, alors la théorie est également dans un état assez satisfaisant; [9] pour le cas où H est un Hilbert, [2] pour le cas Banach-Pour le cas hilbertien, et $\theta=\frac{1}{2}$, cf. [3], [6], [7].

Lorsque les $A(t)$ sont des opérateurs différentiels, $D(A(t))$ étant défini par des conditions aux limites, on a montré dans [8]-avec $H=L^2(\Omega)$; le résultat est très probablement encore vrai, mais non démontré, si $H=L^p(\Omega)$, $1<p<\infty$, $p\neq 2$-que "souvent" $D(A(t)^\theta)$ est indépendant de t pour θ assez petit, mais on a également donné des exemples où $D(A(t)^\theta)$ dépend de t, quel que soit θ. Il est donc nécessaire de développer une théorie pour (*) lorsque $D(A(t))$ et $D(A(t)^\theta)$ quel que soit θ, $0<\theta<1$, *dépendent effectivement* de t.

C'est ce qui est fait dans [5], [6] chap. VII, lorsque H est un espace de Hilbert, en supposant que la "*partie principale*" *de $A(t)$ est autoadjointe* et *dépend différentiablement de t* (dans un sens convenable).

Dans [4], M. M. Kato et Tanabe ont donné des conditions suffisantes pour que le problème soit bien posé, H étant un espace de Banach;

appliqués aux espaces de Hilbert, les résultats de ces auteurs généralisent [5], [6] en ce que notamment *on ne suppose plus la partie principale de* $A(t)$ *auto-adjointe.*

Dans l'article présent, nous complétons, *dans le cas où* H *est un espace de Hilbert*, les résultats de M. M. Kato et Tanabe *en éliminant une grande partie des hypothèses de différentiabilité en* t. Plus précisément, si les $A(t)$ sont des opérateurs différentiels, notre résultat est valable en supposant les coefficients de $A(t)$ *seulement mesurables et bornés en* t ; par contre les *conditions aux limites stables doivent dépendre de façon une fois différentiable de* t (pour que l'hypothèse (1. 3), N° 1, soit satisfaite ; Cf. [6]). L'existence dans le théorème 1. 1 demeure vraie *sans* cette hypothèse ; il est très probable que l'unicité reste encore vraie après affaiblissement considérable de cette hypothèse, mais nous n'avons pas pu améliorer les hypothèses de différentiabilité en t dans notre démonstration.

Le N° 1 énonce les hypothèses et le résultat dont la démonstration occupe les N° 2 et 3.

1. Enoncé du résultat

Soient K et H deux espaces de Hilbert, $K \subset H$, K étant séparable et dense dans H, l'injection de K dans H étant continue. Si $u, v \in K$ (resp. $f, g \in H$), on désigne par $((u, v))$ (resp. (f, g)) leur produit scalaire; $\|u\| = ((u, u))^{1/2}$, $|f| = (f, f)^{1/2}$.

Pour chaque $t \in]-\infty, T]$, $T < \infty$, on se donne un sous-espace $V(t)$ *fermé* dans K; on suppose que $V(t)$ est dense dans H. On se donne également une forme $a(t\,; u, v)$ sesqui-linéaire continue sur K, vérifiant :

(1. 1) pour tout $u, v \in K$, la fonction $t \to a(t\,; u, v)$ est mesurable et bornée sur $(0, T)$;

(1. 2) il existe λ et α, $\alpha > 0$, indépendants de t, tels que $Re\ a(t\,; v, v) + \lambda |v|^2 \geq \alpha \|v\|^2$, pour tout $v \in V(t)$.

On fait maintenant une *hypothèse de régularité sur les* $V(t)$; si $P(t)$ est le projecteur orthogonal dans K sur $V(t)$, on suppose que

(1. 3) pour tout $u \in K$, $t \to P(t)u$ est continue dans K, $h^{-1}[P(t+h)u - P(t)u] \to P'(t)u$ dans K faible, $t \to P'(t)u$ étant faiblement continue dans K; enfin, $\|P'(t)\|$ ($=$norme de $P'(t)$ dans $\mathcal{L}(K\,; K)) \leq c_1$[1])

---

1) De façon générale, $\mathcal{L}(X\,;\,Y)$ désigne l'éspace des applications linéaires continues de X dans Y.

On désigne par $L^2(0, T; K)$ (resp. $L^2(-\infty, T; K)$) l'espace des (classes de) fonctions de carré sommable sur $(0, T)$ (resp. $(-\infty, T)$) à valeurs dans K; si $u \in L^2(0, T; K)$, sa norme sera

$$\left(\int_0^T \|u(t)\|^2 dt\right)^{1/2}.$$

On désigne ensuite par $L^2(0, T; V(t))$ le sous-espace (fermé) de $L^2(0, T; K)$ des classes de fonctions $u \in L^2(0, T; K)$ telles que $u(t) \in V(t)$ p.p. on t.

Si $u, v \in L^2(0, T; V(t))$, la fonction $t \to a(t; u(t), v(t))$ est dans $L^1(0, T)$.[2)]

Ceci posé, nous pouvons énoncer le

Théorème 1.1. *On suppose que* (1.1), (1.2), (1.3) *ont lieu. Il existe alors une fonction u et une seule dans* $L^2(0, T; V(t))$, *telle que*

$$\int_0^T [a(t; u(t), \varphi(t)) - (u(t), \varphi'(t))]\, dt = \int_0^T (f(t), \varphi(t)) dt + (u_0, \varphi(0)) \tag{1.4}$$

pour toute φ *telle que*

$$\varphi \in L^2(0, T; V(t)), \ \varphi' = \frac{d\varphi}{dt} \in L^2(0, T; H), \ \varphi(T) = 0. \tag{1.5}$$

Dans (1.4), f *est donnée dans* $L^2(0, T; H)$ *et* u_0 *dans* H.

En fait, l'existence de u est déjà démontrée dans [6], chap. IV, et cela, *sans l'hypothèse* (1.3). Le point nouveau est donc l'unicité, dont la démonstration occupe les N° 2 et 3.

2. Lemmes

Soit $V(t)'$ l'anti-dual de $V(t)$; si $f \in V(t)'$ et $v \in V(t)$, (f, v) désignera la valeur de f en v; si $f \in H$, (f, v) au sens précédent coïncide avec le produit scalaire de f et v dans H; il n'y a donc pas confusion de notations. Si $u \in V(t)$, la forme antilinéaire

$$v \to ((u, v))$$

2) Montrons la *mesurabilité* de la fonction $t \to a\ (t; u(t), v(t))$. Pour $\varphi, \psi \in K$, $a(t; \varphi, \psi) = ((\mathcal{B}(t)\varphi, \psi))$, $\mathcal{B}(t) \in \mathcal{L}(K, K)$, et $a(t; u, v) = ((\mathcal{A}(t) u, v))$ pour $u, v \in \mathrm{V}(t)$, $\mathcal{A}(t) \in \mathcal{L}(\mathrm{V}(t); \mathrm{V}(t))$. On a: $a(t; P(t)\varphi, P(t)\psi) = ((\mathcal{A}(t) P(t)\varphi, P(t)\psi)) = ((\mathcal{A}(t) P(t)\varphi, \psi)) = ((\mathcal{B}(t) P(t)\varphi, P(t)\varphi))$, d'où $\mathcal{A}(t) P(t) = P(t)\mathcal{B}(t) P(t)$; de même $\mathcal{A}^*(t) P(t) = \mathcal{B}^*(t) P(t) \in \mathcal{L}(K; V(t))$. On a: $a(t; u(t); v(t)) = ((\mathcal{A}(t) u(t), v(t)))$, et il suffit ($K$ étant séparable) de montrer que $t \to ((\mathcal{A}(t) u(t), \varphi))$ est mesurable pour $\varphi \in \mathrm{K}$. Or $((\mathcal{A}(t) u(t), \varphi)) = ((\mathcal{A}(t) u(t), P(t)\varphi)) = ((u(t), \mathcal{A}^*(t) P(t)\varphi))$ et il suffit de montrer la mesurabilité de $\mathcal{A}^*(t) P(t)\varphi$, donc de $((\mathcal{A}^*(t) P(t)\varphi, \psi)) = ((\mathrm{P}(t)\mathcal{B}^*(t)\varphi, \psi)) = ((\mathcal{B}^*(t) P(t)\varphi, P(t)\psi))$ et il suffit de montrer la mesurabilité de $\mathcal{B}^*(t) P(t)\varphi$, donc de $(\mathcal{B}^*(t) P(t)\varphi, \psi)) = ((P(t)\varphi, \mathcal{B}(t)\varphi))$, et finalement de $\mathcal{B}(t)\psi$ donc de $((\mathcal{B}(t)\psi, \varphi)) = a(t; \psi, \varphi)$, fonction mesurable par hypothèse.

est continue sur $V(t)$, donc

$$((u, v)) = (\Lambda(t)u, v), \ \Lambda(t)u \in V(t)',$$

ce qui définit $\Lambda(t) \in \mathcal{L}(V(t)\,;\, V(t)')$, isomorphisme de $V(t)$ sur $V(t)'$. Pour chaque $\rho \geqq 0$, $\Lambda(t)+\rho$ est un isomorphisme de $V(t)$ sur $V(t)'$; on pose :

$$(\Lambda(t)+\rho)^{-1} = M(t, \rho). \tag{2.1}$$

Si l'on pose

$$((u, v))_\rho = ((u, v))+\rho(u, v), \tag{2.2}$$

alors, pour $f \in H$ et $v \in V(t)$, on a :

$$(f, v) = ((M(t, \rho)f, v))_\rho.$$

Lemme 2.1. *On a*:

(2.3) $\rho|M(t, \rho)| \leqq 1, \quad \rho||M(t, \rho)|| \leqq 1$,[3]

(2.4) $\rho M(t, \rho)f \to f$ *dans* H *lorsque* $\rho \to +\infty$, $f \in H$,

(2.5) $\rho M(t, \rho)f \to f$ *dans* $V(t)$ *lorsque* $\rho \to +\infty$, $f \in V(t)$.

Démonstration. Soit $\rho M(t, \rho)f = u$. Alors

$$(\Lambda(t)+\rho)u = \rho f$$

d'où

$$||u||^2+\rho|u|^2 = \rho(f, u)$$

d'où $|u| \leqq |f|$ ce qui montre la première inégalité (2.3).

Si $f \in V(t)$, alors $\Lambda(t)u = \rho(f-u) \in V(t)$ donc

$$|\Lambda(t)u|^2+\rho||u||^2 = \rho(f, \Lambda(t)u) = \rho((f, u))$$

d'où $||u|| \leqq ||f||$ ce qui montre la deuxième inégalité (2.3).

Montrons (2.4). Supposons d'abord que $f \in D(\Lambda(t))$; alors

$$u = \rho(\Lambda(t)+\rho)^{-1}f = f-(\Lambda(t)+\rho)^{-1}\Lambda(t)f$$

d'où

$$|u-f| \leqq \frac{1}{\rho}|\Lambda(t)f| \ ;$$

ceci montre (2.4) lorsque $f \in D(\Lambda(t))$; comme $D(\Lambda(t))$ est dense dans H et que l'on a la première inégalité (2.3), (2.4) en résulte.

3) $|\ |$ = norme dans $\mathcal{L}(H\,;\,H)$, $\|\ \|$ = norme dans $\mathcal{L}(V(t)\,;\,V(t))$.

Montrons enfin (2.5). Pour les mêmes raisons que ci-dessus, il suffit de le montrer pour $f\in D(\Lambda(t)^{3/2})$; alors $\Lambda(t)f\in V(t)$ et

$$u-f=-M(t,\rho)\Lambda(t)f$$

donne
$$\|u-f\|\leq\frac{1}{\rho}\|\Lambda(t)f\|$$

d'où le résultat suit.

Lemme 2.2. *Pour $f,\ g\in H$, la fonction $t\to(M(t,\rho)f,\ g)$ est une fois continûment différentiable dans $]-\infty,\ T]$; on a* :

$$\begin{aligned}(2.6)\qquad \frac{d}{dt}(M(t,\rho)f,\ g) &= (P'(t)M(t,\rho)f,\ g)+(f,\ P'(t)M(t,\rho)g)\\ &\quad-((M(t,\rho)f,\ P'(t)M(t,\rho)g))_\rho-((P'(t)M(t,\rho)f,\ M(t,\rho)g))_\rho .\end{aligned}$$

Démonstration.[4] Ecrivons $M(t)$ au lieu de $M(t,\rho)$. On a :

$$\begin{aligned}(2.7)\qquad ((M(t)-M(s))f,\ g) &= ((P(t)-P(s))M(t)f,\ g)+(f,\ (P(t)-P(s))M(s)g)\\ &\quad-((M(t)f,\ (P(t)-P(s))M(s)g))_\rho-(((P(t)-P(s))M(t)f,\ M(s)g))_\rho .\end{aligned}$$

On vérifie que $t\to M(t)f$ est continue dans K fort, de sorte qu'en divisant (2.7) par $t-s$ et faisant tendre $t-s$ vers 0, il vient (2.6)

Lemme 2.3.[5] *On a* :

$$(2.8)\qquad \rho^{1/2}\left|\frac{d}{dt}M(t,\rho)\right|\leq c_2,\quad \rho\to+\infty .$$

Démonstration. Ecrivons ici M au lieu de $M(t,\rho)$. On déduit de (2.6) que

$$\begin{aligned}(2.9)\qquad \left|\left(\left(\frac{d}{dt}M\right)f,\ g\right)\right| &\leq |P'(t)Mf|\,|g|+|f|\,|P'(t)Mg|+2c_1\|Mf\|\,\|Mg\|\\ &\quad+\rho|Mf|\,|P'(t)Mg|+\rho|P'(t)Mf|\,|Mg| .\end{aligned}$$

Mais

$$|P'(t)Mf|\leq c_3\|P'(t)Mf\|\leq c_1c_3\|Mf\| ;$$

même chose pour $P'(t)Mg$, de sorte que (2.9) donne

---

4) L'identité (2.7), qui permet de simplifier beaucoup une démonstration antérieure, m'a été signalée par M. T. Kato.

5) Cas particulier du Théorème 7.1 de [4] ; notons que l'on pourrait remplacer l'hypothèse (1.3) par l'hypothèse (K-2) de [4].

$$(2.10)\qquad \left|\left(\left(\frac{dM}{dt}\right)f,\ g\right)\right| \leq c_4(\|Mf\|\ |g|+|f|\ \|Mg\|+\|Mf\|\ \|Mg\| \\ +\rho|Mf|\ \|Mg\|+\rho\|Mf\|\ |Mg|)\,.$$

Or (cf. (2.3)) $|Mf|\leq\frac{1}{\rho}|f|$. Par ailleurs, si $u=Mf$, alors

$$\|u\|^2+\rho|u|^2=(f,u)\quad\text{donc}\quad |u|\leq\frac{1}{\rho}|f|\quad\text{et}\quad \|u\|^2\leq\frac{1}{\rho}|f|^2$$

donc

$$(2.11)\qquad \|Mf\|<\frac{1}{\rho^{1/2}}|f|$$

et (2.10) donne $\left|\left(\left(\frac{dM}{dt}\right)f,\ g\right)\right|\leq c_2\rho^{-1/2}|f|\ |g|,\ \rho\to+\infty,$ d'où (2.8).

Lemme 2.4. *On a*:

$$(2.12)\qquad \left|\left(\left(\frac{d}{dt}M(t\ \rho)\right)u,\ u\right)\right|\leq c_5\rho^{-1}\|u\|\ |u|\quad \textit{pour tout}\quad u\in V(t)\,.$$

Démonstration. On écrit encore M pour $M(t,\rho)$ et P' pour $P'(t)$. On déduit de (2.6) que:

$$\left(\left(\frac{d}{dt}M\right)u,\ u\right)=2ReX_1-2ReX_2-2ReX_3\,,$$

où

$$X_1=(P'Mu,\ u)\,,\quad X_2=((P'Mu,\ Mu))\,,\quad X_3=\rho(P'Mu,\ Mu)\,.$$

Mais

$$X_1=(P'\Lambda(t)^{-1/2}M\Lambda(t)^{1/2}u,\ u)$$

donc

$$|X_1|\leq|P'(t)\Lambda(t)^{-1/2}w|\ |u|,\quad w=M\Lambda(t)^{1/2}u\,.$$

Or

$|P'(t)\Lambda(t)^{-1/2}w|\leq c_6\|P'(t)\Lambda(t)^{-1/2}w\|\leq c_1c_6\|\Lambda(t)^{-1/2}w\|=c_1c_6|w|$ donc
$|X_1|\leq c_7|M\Lambda(t)^{1/2}u|\ |u|\leq c_7\rho^{-1}|\Lambda(t)^{1/2}u|\ |u|=c_7\rho^{-1}\|u\|\ |u|$.

Puis

$$|X_2|\leq\|P'Mu\|\ \|Mu\|\leq c_1\|Mu\|^2\,.$$

D'après (2.11), on en déduit

$$|X_2|\leq c_1\rho^{-1}|u|^2,$$

Enfin $X_3=\rho(P'\Lambda(t)^{-1/2}M\Lambda(t)^{1/2}u,\ Mu)$, donc

$$|X_3|\leq \rho c_1c_6|M\Lambda(t)^{1/2}u|\,|Mu|\leq \rho c_1c_6\rho^{-1}|\Lambda(t)^{1/2}u|\rho^{-1}|u| = c_1\rho^{-1}\|u\|\ |u|$$

ce qui, joint aux majorations obtenues pour X_1 et X_2 donne (2. 12). c.q.f.d.

Pour poursuivre, introduisons *les définitions suivantes*:

$W^1(-\infty,\ T;\ H)=\left\{u\,|\,u\in L^2(-\infty,\ T;\ H),\ \dfrac{du}{dt}\in L^2(-\infty,\ T;\ H)\right\}$ où $\dfrac{du}{dt}$ est calculé au sens des distributions dans $]-\infty,\ T[$ à valeurs dans H; c'est un espace de Hilbert pour la norme

$$\left(\int_{-\infty}^{T}\left(|u(t)^2|+\left|\frac{du}{dt}(t)\right|^2\right)dt\right)^{1/2};$$

$W_0^1(-\infty,\ T;\ H) = \{u\,|\,u\in W^1(-\infty,\ T;\ H),\ u(T) = 0\}$ [6];

$W^{-1}(-\infty,\ T;\ H) =$ anti-dual de $W_0^1(-\infty,\ T;\ H)$.

Lemme 2. 5. *L'application* $u\rightarrow M(t,\ \rho)u$ *est linéaire continue de* $W^1(-\infty,\ T;\ H)$ (resp. $W_0^1(-\infty,\ T;\ H)$) *dans lui même.*

Démonstration. En effet

$$\frac{d}{dt}(Mu) = \left(\frac{dM}{dt}\right)u+M\left(\frac{du}{dt}\right),\ \text{et d'après les Lemmes 2. 1 et 2. 3}$$

$$|M|\leq\rho^{-1},\quad \left|\frac{dM}{dt}\right|\leq c_2\rho^{-1/2}.$$

Lemme 2. 6. *L'application* $u\rightarrow M(t,\ \rho)u$ *du Lemme* 2. 5 *se prolonge par continuité en une application linéaire continue, encore notée* $u\rightarrow M(t,\ \rho)u$, *de* $W^{-1}(-\infty,\ T;\ H)$ *dans lui même.*[7]

Démonstration. Soit $u,\ v\in W_0^1(-\infty,\ T;\ H)$; soit Mu la fonction $t\rightarrow M(t,\ \rho)u(t)$; considérons Mu comme un élément $(W_0^1(-\infty,\ T;\ H))'= W^{-1}(-\infty,\ T;\ H)$; alors

$$(Mu,\ v) = \int_{-\infty}^{T}(M(t,\ \rho)u(t),\ v(t))dt = \int_{-\infty}^{T}(u(t),\ M(t,\ \rho)v(t))dt = (u,\ Mv),$$

d'où le Lemme, le prolongement étant identique à l'application transposée

6) Si $u\in W^{-1}(-\infty,\ T;\ H)$, u est p.p. égale à une fonction continue dans $]-\infty,\ T]$ à valeurs dans H, fonction encore notée u, de sorte que la condition "$u(T)=O$" a un sens. *Ou encore*: $W_0^1(-\infty,\ T;\ H)$ coïncide avec l'adhérence dans $W^1(-\infty,\ T;\ H)$ des fonctions identiquement nulles au voisinage de T.

7) Noter que $W^1(-\infty,\ T;\ H)$ est dense dans $W^{-1}(-\infty,\ T;\ H)$.

(ou adjointe).

Lemme 2.7. *Pour* $u\in L^2(-\infty, T; H)$, *on a*:

$$\frac{d}{dt}(M(t, \rho)u) = M(t, \rho)\frac{du}{dt}+\Big(\frac{d}{dt}M(t, \rho)\Big)u\,, \tag{2.13}$$

où $M(t, \rho)\dfrac{du}{dt}$ *est pris au sens du Lemme* 2.6.[8]

Démonstration. La formule est vraie pour $u\in W^1(-\infty, T; H)$; puis on passe à la limite, en utilisant les Lemmes 2.5 et 2.6.

Lemme 2.8. *Soit* $g\in L^2(-\infty, T; H)$, *identiquement nulle au voisinage de* T, *telle que*

$$M(t, \rho)\frac{dg}{dt}\in L^2(-\infty, T; H)\,.^{9)}$$

D'après (2.13), $\dfrac{d}{dt}(M(t, \rho)g)\in L^2(-\infty, T; H)$; *on a*:

$$\int_{-\infty}^{T}\Big\{\Big(g(t), M(t, \rho)\frac{dg}{dt}\Big)+\Big(\frac{d}{dt}M(t, \rho)g), g\Big)\Big\}dt = 0\,. \tag{2.14}$$

Démonstration. Puisque g est nulle au voisinage de T, on a:

$$Mg = M(t, \rho)g\in W_0^1(-\infty, T; H) \qquad \text{et donc}$$

$$\int_{-\infty}^{T}\Big(\frac{d}{dt}(Mg), g\Big)dt = -\int_{-\infty}^{T}\Big(Mg, \frac{dg}{dt}\Big)dt\,. \tag{2.15}$$

Soit $\alpha_m=\alpha_m(t)$ une suite régularisante; on a:

$$\int_{-\infty}^{T}\Big(Mg, \frac{dg}{dt}\Big)dt = \lim_m.\int_{-\infty}^{T}\Big(M(g*\alpha_m), \frac{dg}{dt}\Big)dt = \lim_m.\int_{-\infty}^{T}\Big(g*\alpha_m, M\frac{dg}{dt}\Big)dt^{\;10)}$$
$$= \int_{-\infty}^{T}\Big(g, M\frac{dg}{dt}\Big)dt\,;$$

ceci, joint à (2.15), montre (2.14).

3. Démonstration du Théorème 1.1.

Soit u satisfaisant à (1.4) avec $f=0$, $u=0$.

---

8) Noter que $\dfrac{du}{dt}\in W^{-1}(-\infty, T; H)$.

9) $M(t, \rho)\dfrac{dg}{dt}$ a un sens, car $\dfrac{dg}{dt}\in W^{-1}(-\infty, T; H)$ et Lemme 2.6.

10) Car M est définie sur $\mathrm{W}^{-1}(-\infty, T; \mathrm{H})$ par transposition et $g*\alpha_m$ appartient à $W_0^1(-\infty, T; H)$.

3. 1. Remplaçant u par exp $(kt)u$ et choisissant k convenablement, on peut supposer que (1. 2) a lieu avec

$$\lambda = -c_5^2/8\alpha\,,$$

(c_5 étant la constante intervenant au Lemme 2. 4).

Soit par ailleurs U le prolongement de u par 0 pour $t<0$; si ϕ est donnée avec :

$$\phi \in L^2(-\infty,\ T\,;\ V(t))\,,\quad \phi' = \frac{d\phi}{dt} \in L^2(-\infty,\ T\,;\ H)\,,\quad \phi(T) = 0\,, \tag{3.1}$$

alors

$$\int_{-\infty}^{T} [a(t\,;\ U(t),\ \phi(t)) - (U(t),\ \phi'(t))]\,dt = 0\,. \tag{3.2}$$

On va montrer que dans ces conditions $U=0$.

3. 2. Commençons par montrer que (avec les notations du N° 2),

$$M(t,\ \rho)\frac{dU}{dt} \in L^2(-\infty,\ T\,;\ H)\,.\text{[11]} \tag{3.3}$$

Pour cela, considérons, pour $\varphi \in W_0^1(-\infty,\ T\,;\ H)$:

$$X = \int_{-\infty}^{T}\Big((M(t,\ \rho)\frac{dU}{dt},\ \varphi\Big)dt = \text{produit scalaire entre}$$

$$M(t,\ \rho)\frac{dU}{dt} \in W^{-1}(-\infty,\ T\,;\ H)\ \ \text{et}\ \ \varphi \in W_0^1(-\infty,\ T\,;\ H)\,;$$

il suffit de montrer que

$$|X| \leq c_8\Big(\int_{-\infty}^{T}|\varphi(t)|^2dt\Big)^{1/2}. \tag{3.4}$$

Or (cf. Lemme 2. 6)

$$X = \int_{-\infty}^{T}\Big(\frac{dU}{dt},\ M\varphi\Big)dt$$

où

$$M\varphi(=t \to M(t,\ \rho)\varphi(t)) = \psi \in W_0^1(-\infty,\ T\,;\ H)$$

(cf. Lemme 2. 5). Donc

$$X = -\int_{-\infty}^{T}(U(t),\ \psi'(t))dt\,.$$

Mais (cf. (2. 11))

$$||\psi(t)|| = ||(\Lambda(t)+\rho)^{-1}\varphi(t)|| \leq \rho^{-1/2}|\varphi(t)|$$

11) $M(t,\ \rho)\dfrac{dU}{dt}$ a un sens ; cf. [9]

donc $\psi \in L^2(-\infty, T; V(t))$; on peut donc prendre $\phi = \psi$ dans (3. 2) et

$$X = -\int_{-\infty}^{T} a(t; U(t), \psi(t))dt$$

d'où

$$|X| \leq c_9 \Big(\int_{-\infty}^{T} \|\psi(t)\|^2 dt\Big)^{-1/2} \leq c_9 \rho^{-1/2} \Big(\int_{-\infty}^{T} |\varphi(t)|^2 dt\Big)^{1/2}$$

d'où (3. 4) et le résultat désiré.

3. 3. *Choix de ϕ dans* (3. 2).

Soit $\theta_m(t)$ définie par :

$$\theta_m(t) = \begin{cases} 1 \quad \text{pour} \quad t \leq T - 2/m, \\ 1 - m\Big[t - \Big(T - \dfrac{2}{m}\Big)\Big] \quad \text{pour} \quad T - \dfrac{2}{m} \leq t \leq T - \dfrac{1}{m}, \\ 0 \quad \text{pour} \quad t \geq T - \dfrac{1}{m}. \end{cases}$$

Posons :

$$U_\rho(t) = M(t, \rho)U(t) \tag{3. 5}$$

et enfin

$$\phi(t) = \phi_{m,\rho}(t) = \rho\theta_m^2(t)U_\rho(t). \tag{3. 6}$$

Grâce à (3. 3) et au N° 2, et puisque $\theta_m(T) = 0$, on peut prendre ϕ donnée par (3. 6) dans l'équation (3. 2). Il vient :

$$X_\rho + Y_\rho + Z_\rho = 0$$

où

$$X_\rho = Re \int_{-\infty}^{T} \rho a(t; \theta_m U, \theta_m U_\rho)dt,$$

$$Y_\rho = -Re \int_{-\infty}^{T} \rho\theta_m\theta_m'(U, U_\rho)dt,$$

$$Z_\rho = -Re \int_{-\infty}^{T} \rho\Big((\theta_m U), \frac{d}{dt}(\theta_m U_\rho)\Big)dt.$$

D'après le Lemme 2. 1 et la définition de U_ρ (et le théorème de Lebesgue) :

$$X_\rho \to X = Re \int_{-\infty}^{T} a(t; \theta_m U, \theta_m U)dt \tag{3. 7}$$

lorsque $\rho \to \infty$.

Grâce au point 3. 1 on a :

$$X \geq \alpha \int_{-\infty}^{T} \|\theta_m U\|^2 dt + (c_{5/8\alpha}^2) \int_{-\infty}^{T} |\theta_m U|^2 dt. \tag{3.8}$$

Encore d'après le Lemme 2. 1,

$$Y_\rho \to Y = -Re \int_{-\infty}^{T} \theta_m \theta_m' |U(t)|^2 dt \geq 0. \tag{3.9}$$

Posons maintenant

$$\theta_m U = g.$$

Appliquant le Lemme 2. 7 :

$$Z_\rho = -\rho Re \int_{-\infty}^{T} \left(g, \frac{d}{dt}(Mg)\right) dt = -\rho\, Re \int_{-\infty}^{T} \left(g, \left(\frac{dM}{dt}\right) g + M\frac{dg}{dt}\right) dt.$$

D'après (3. 3), on est dans les conditions d'application du Lemme 2. 8, donc

$$2Z_\rho = -\rho \left[\int_{-\infty}^{T} \left(g, M\frac{dg}{dt}\right) dt + \int_{-\infty}^{T} \left(g, \left(\frac{dM}{dt}\right) g\right) dt + \int_{-\infty}^{T} \left(\frac{d}{dt}(Mg), g\right) dt \right]$$

vaut :

$$2Z_\rho = -\rho \int_{-\infty}^{T} \left(g, \left(\frac{dM}{dt}\right) g\right) dt$$

d'où, d'après le Lemme 2. 4 :

$$|2Z_\rho| \leq c_5 \int_{-\infty}^{T} \|g(t)\|\ |g(t)|\, dt$$

donc

$$|Z_\rho| \leq \frac{\alpha}{2} \int_{-\infty}^{T} \|g(t)\|^2 dt + (c_{5/8\alpha}^2) \int_{-\infty}^{T} |g(t)|^2 dt$$

de sorte que, avec (3. 8) et (3. 9) on en déduit :

$$0 = \lim_{\rho \to \infty} (X_\rho + Y_\rho + Z_\rho) \geq \frac{\alpha}{2} \int_{-\infty}^{T} \|\theta_m U(t)\|^2 dt.$$

Donc $\theta_m U = 0$ et ceci quel que soit m, donc $U = 0$, ce qui achève la démonstration du Théorème 1. 1.

UNIVERSITÉ DE PARIS

(Reçu le 6 décembre, 1962)

Bibliographie

[1] T. Kato: *Integration of the equation of evolution in a Banach space,* J. Math. Soc. Japan **5** (1953), 208-304.

[2] T. Kato: *Abstract evolution equations of parabolic type in Banach and Hilbert spaces,* Nagoya Math. J. **19** (1961), 93-125.

[3] T. Kato.: *Fractionnal powers of dissipative operators,* J. Math. Soc. Japan **13** (1961), 246-274; article (II), ibid., **14** (1962), 242-248.

[4] T. Kato and H. Tanabe: *On the abstract evolution equation,* Osaka Math. J. **14** (1962), 107-133.

[5] J. L. Lions: *Equations différentielles du 1er ordre dans un espace de Hilbert,* C. R. Acad. Sci. Paris, **248** (1959), 1099-1102.

[6] J. L. Lions: Equations différentielles opérationnelles, Springer-Verlag, 1961.

[7] J. L. Lions: *Espaces d'interpolation et domaines de puissances d'opérateurs,* J. Math. Soc. Japan **14** (1962), 233-241.

[8] J. L. Lions: *Remarques sur les espaces d'interpolation et les problèmes aux limites.* Colloque Int. C. N. R. S., Paris, Juin 1962.

[9] P. E. Sobolevski: *Utilisation des puissances fractionnaires,* Doklady Akad. Nauk. **130** (1960), 272-275.

[10] H. Tanabe: *On the equations of evolution in a Banach space,* Osaka Math. J. **12** (1960), 363-376.

[11] H. Tanabe: *Evolutional equations of parabolic type,* Proc. Japan Acad. **37** (1961), 610-613.