The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	巨大船の船体および局部振動に関する研究
Author(s)	松本, 亙平
Citation	大阪大学, 1971, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/843
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

巨大船の船体および局部振動に関する研究

松 本 亙 平

昭 和 46 年 4 月

巨大船の船体および局部振動に関する研究

目　　次

序　言 …… 1

第1編　梁理論による船体振動の研究 …… 2

第1章　緒言 …… 2

第2章　電子計算機による船体振動の計算法 …… 3

2.1　梁要素の評価と解法の分類 …… 3

2.2　Myklestad-Prohl Method …… 5

2.3　Transfer Matrix Method …… 9

2.4　Finite Element Method …… 16

2.5　各計算法の相互関係 …… 24

2.6　計算精度の検討 …… 27

第3章　実船実験結果と梁理論による計算値との比較 …… 38

3.1　実船実験結果 …… 38

3.2　理論計算値 …… 40

3.3　実験値と計算値との比較および検討 …… 44

第4章　船体振動の応答の計算法 …… 50

4.1　船体上下振動の応答の計算法 …… 50

4.2　船体縦および捩り振動の応答の計算法 …… 54

4.3　船体振動応答の計算例 …… 55

第5章　結　言 …… 60

第2編　流体中の弾性体の振動理論 …… 62

第1章　緒　言 …… 62

第2章　有限要素法による流体動圧力の計算法 …… 63

2.1　完全流体非回転運動に対する有限要素法の一般的原理 …… 63

2.2　基礎matrixの誘導 …… 66

2.3　有限要素法による振動動圧力の解法 …… 72

2.4　振動動圧力の解析例 …… 82

第3章　有限要素法による船体振動の付加水質量の計算 …… 88
3.1　付加水質量の計算法 …… 88
3.2　三次元修正係数 …… 94
3.3　船体高次振動への応用 …… 96
3.4　三次元修正係数の解析例 …… 105
第4章　流体と弾性体の連成振動の解法 …… 108
4.1　基礎運動方程式 …… 108
4.2　質点系の振動 …… 109
4.3　梁の振動 …… 112
4.4　板の振動 …… 115
4.5　解析例 …… 116
第5章　結　言 …… 118

第3編　巨大船のNon-Beam Vibration に関する研究 …… 119
第1章　緒　言 …… 119
第2章　巨大油送船のNon-Beam Vibrationの定性的検討 …… 120
2.1　船体構造のmodel 化 …… 120
2.2　振動方程式 …… 120
2.3　固有振動数および振動型曲線 …… 123
2.4　Non-Beam Vibrationの定性的検討 …… 126
2.5　Non-Beam Vibrationの逆対称型振動と捩り振動との連成振動 …… 137
第3章　巨大油送船のNon-Beam Vibrationの計算法 …… 147
3.1　巨大油送船をmodel 化した振動系 …… 147
3.2　Non-Beam Vibrationの固有振動数の計算法 …… 147
3.3　実際計算に使用する諸数値 …… 152
3.4　本modelによる定性的検討 …… 155
第4章　Non-Beam Vibrationの付加水質量の計算法 …… 181
4.1　有限要素法によるNon-Beam Vibrationの二次元付加水質量の計算法 …… 181
4.2　二次元付加水質量係数のシリーズ計算 …… 189
4.3　付加水質量増加率との関係 …… 193
4.4　三次元修正係数 …… 197

4.5　Non-Beam Vibrationの付加水質量の振動方程式への導入 …… 200
第5章　Non-Beam Vibrationの実験値と計算値との比較 …… 203
5.1　実験供試船 …… 203
5.2　Input Data …… 205
5.3　実験値と計算値の比較 …… 208
第6章　結　言 …… 220

第4編　巨大船の上部構造前後振動に関する研究 …… 221
第1章　緒　言 …… 221
第2章　上部構造前後振動の固有振動数の計算法 …… 221
2.1　上部構造前後振動の計算model …… 221
2.2　上部構造前後振動の固有振動数の計算法 …… 223
2.3　上部構造の側壁に波板を使用した場合の影響 …… 227
2.4　実験値と電子計算機による計算値の比較 …… 231
2.5　上部構造固有振動数の簡易計算式 …… 242
第3章　船体振動と上部構造前後振動の関連 …… 250
3.1　実船実験の例 …… 250
3.2　船体縦振動と上部構造前後振動の関連の定性的検討 …… 250
3.3　船体上下振動と上部構造前後振動の関連の定性的検討 …… 265
3.4　船体振動と上部構造前後振動の連成固有振動数の計算法 …… 266
3.5　上部構造前後振動の応答 …… 273
第4章　上部構造前後振動とDogger および煙突の振動との関連 …… 284
4.1　上部構造前後振動とDogger の振動との関連 …… 284
4.2　上部構造前後振動と煙突の振動との関連 …… 295
第5章　上部構造前後振動の防振対策 …… 305
5.1　防振対策の必要性 …… 305
5.2　防振対策の考え方 …… 306
5.3　防振対策実施例 …… 309
第6章　結　言 …… 312
謝　辞 …… 315
参考文献 …… 315
付　録 …… 320

序　　言

近年、船舶の巨大化の傾向は目ざましいものがあり、現在すでに５０万トン油送船が実現しようとしている。船体振動の研究分野においても巨大船に対する種々の新しい問題が生じ、各方面からの研究が実施されるようになつて来た。本論文ではこれらの巨大船の振動問題を総合的に取り上げ、理論的ならびに実験的に究明した。理論解析法に関しては最初から電子計算機の使用を前提とした新しい解析法を導いた。

本論文は内容的に４編より構成されている。

まず第１編においては船体主構造を１本の梁と見なし、梁理論に従がう船体振動の理論解析法について検討する。このような理論は主として巨大船の低次振動の解析に適用することができる。すなわち電子計算機による固有振動数および応答の理論計算法を述べるとともに、実船実験との比較検討を行ない梁理論による船体振動の総合的研究結果について述べる。

第２編においては船体のように流体中で振動する弾性体の振動理論について述べる。ここでは巨大船の船体振動問題において、現在の取り扱いで不備な点を補なう理論解析法として有限要素法を三次元流体問題に適用し、この方法による付加水質量の計算法および流体と弾性体との連成振動の一般理論を述べる。

第３編においては巨大船の船体振動の新しい問題としてその高次振動において船体を１本の梁として取り扱えない、いわゆるNon-Beam Vibrationの現象に関する理論的研究について述べる。ここで著者は巨大油送船を対象として船体構造を梁とバネにより構成される振動系にモデル化して、Non-Beam Vibrationに関する定性的性質の検討、実船に対する理論解析法およびNon-Beam Vibrationの付加水質量の計算法について述べ、さらに実船実験結果との比較を行なう。

第４編においては巨大船の局部振動として最も重要と考えられる上部構造の前後振動について論じる。まずその固有振動数の理論計算法について述べると共に、系統的な実船実験を実施し、実験結果と理論値との比較検討を行なう。また船体振動とDogger Funnelのような局部振動との関連につき考察を行ない、最後にその防振対策の一般的考え方を検討する。

第1編　梁理論による船体振動の研究

第1章　緒　　言

船体振動の解析は普通船体全体を1本の梁と見なし、梁理論に従う自由－自由の境界条件を持つ変断面梁として取り扱われる。電子計算機を利用したこのような変断面梁の振動解析法には種々の方法があるが、これら各方法による計算精度や船体振動解析への適用性等の検討はこれまであまり行なわれていないのでこれらの間の比較検討を行なう。

第2章では電子計算機を使用する一般的な固有振動数の計算法としてMyklestad-Prohl Method, Transfer Matrix Method, Finite Element Methodの3つの解法を取り上げると共に新たに剪断および曲げ変形を行なう梁について回転慣性の影響を考慮した計算式を導き、それぞれの解法について計算精度に及ぼす諸要素の影響およびこれらの方法の相互関係について考察する。

第3章ではこれらの計算法を実船に応用した場合の適用性を検討するために著者が実施した油送船2隻およびOre/Bulk/Oil Carrier 1隻の計3隻の実船振動実験の結果と理論計算値との比較検討を行なう。

第4章ではプロペラやエンジンより発生する周期的な変動起振力を受ける時の船体振動の応答の計算法を示す。

第２章　電子計算機による船体振動の計算法

2.1　梁要素の評価と解法の分類

船体を１本の変断面梁と見なし、電子計算機を用いてその振動を解く場合、まず変断面梁を有限個の梁に分割し、それぞれの梁要素において均一な質量および剛性を持つものと置換し、そのような微少長さの梁が連続的に連結されて船体構造が構成されているものとする。このようなモデル化を行なえばその後の取り扱いはこれを梁要素の評価による分類と電子計算機に適用される解法の分類に分けることができる。

梁要素の評価に対して一般に呼ばれているmatrixの名称は次のとおりである。梁要素の両端のstate vector(断面における変位、傾斜、曲げモーメント、剪断力を表わすvector)を関係づけるmatrixはtransfer matrix* と呼ばれる。transfer matrixが均一梁の運動方程式より直接解析的に導かれる時、exact methodと呼ばれこれは当然振動数の関数である。このmatrixを変換し、両端の断面力と変位のvectorの関係で表わしたmatrixはdynamic stiffness matrix** と呼ばれる。一方、Finite Element Methodでは両端の変位を未知数として変位関数を三次式と仮定し歪エネルギおよび運動エネルギを計算することにより、梁の剛性にのみ関係するmatrixと梁の質量のみに関係する二つのmatrixに分けて求められる。前者をstiffness matrixと呼び、後者をmass matrixと呼ぶが、どちらも振動数の関数ではない。このmass matrixは近似的に梁を質点系に置換した場合に使用されるlumped mass matrixと区別するためにconsistent mass matrixと呼ばれる。これらの梁要素における剛性および質量の評価の分類を表1.1に示す。

---

*　transfer matrix の名称は一般に総称的に用いられるので、以後梁に関するものは transfer matrix of beam と断つた。

** 一般には $\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M}$ のmatrixも含めてこのように呼ばれる。

表 1.1　梁要素の評価

mass	質量の評価	剛性の評価
lumped mass	lumped mass matrix	stiffness matrix
distributed uniform mass	consistent mass matrix	stiffness matrix
	transfer matrix of beam dynamic stiffness matrix	

一方、固有振動数を求める実際的な解法としてはtransfer matrix method とeigenvalue method とがあり、その特徴を示せば表1.2のようになる。

表 1.2　解法の特徴

解法	特徴	電子計算機＊	
		計算時間	容量
transfer matrix method	振動数を仮定し、未知数を消去しながら残差を判定し解を求める。	長	大
eigenvalue method	変位を未知数として、多元の固有値方程式を解く。	短	小

梁要素の評価と解法は互に独立したものであるので、これらの組合せによりいくつかの方法が可能である。一般的な名称で呼ばれている方法をこの二つの組合せとして分類すると表1.3のようになる。

＊計算時間の比較はPrograming 上の技巧により大きく影響されるので一概に論ずる事はできないが、船体振動解析において船体を50分割程度までとし10節までの固有振動数を対象とした時に限ると上表の比較結果となるが、両者とも大形計算機では5分以内である。

表 1.3　方法の分類

方　　法	梁要素の評価	解　　法
Myklestad-Prohl Method	lumped mass matrix stiffness matrix	transfer matrix method
Transfer Matrix Method	transfer matrix of beam	transfer matrix method
Finite Element Method	consistent mass matrix stiffness matrix	eigenvalue method
Dynamic Stiffness Matrix Method ＊	dynamic stiffness matrix	eigenvalue method

これらの計算法のうち船体振動解析に適した方法としてMyklestad-Prohl Method Transfer Matrix Method, Finite Element Method を取り上げて説明する。

2.2　Myklestad-Prohl Method

この方法の特徴は変断面梁を梁としてではなく質量とバネにより構成される質点系に置換して取り扱う点にある。また解法としては現在 transfer matrix method と呼ばれているものに相当し、歴史的にはHolzer〔2〕によりShaft の捩り振動解析法として初めて導入されたものである。Myklestad〔3〕は1944年梁の曲げ振動解析にHolzer Method を拡張しておりまた殆んど同時期にProhl〔4〕もRotorの危険回転数の計算にこの解法を使用した。したがつて現在では一般にMyklestad-Prohl Method と呼ばれている。

船体振動の計算における電子計算機の使用は最初に1947年DTMBのAdams と Welch〔5〕によつて行なわれた。これはMyklestad-Prohl Method を使用して変断面梁の曲げ振動の固有振動数を計算したものであるが、引続きDTMB ではMathewson〔6〕, McGoldrick〔7〕, Leibowitz〔8〕等により船体振動解析用プログラムの開発が続けられた。これらはすべてMyklestad-Prohl Method に基づいたものであり、計算精度向上のため mass lumping の方法が種々考案されている。

＊ dynamic stiffness matrix が mass matrix と stiffness matrix に分離できない時には eigenvalue method は使用出来ないので多元の行列式の残差を判定する解法となる。〔1〕

本節では船体振動解析を目的とした回転慣性の影響を考慮した曲げおよび剪断振動の基礎式を導く。関係式は後述の比較のためtransfer matrix の形で示す。

今、図1.1に示したMyklestad-Prohlの梁要素のmodelを使用した時、mass 部におけるpoint transfer matrixは次式となる。

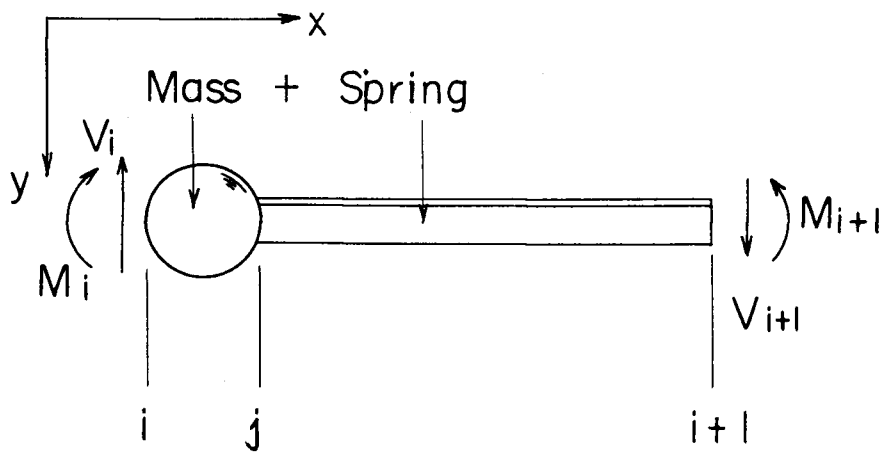


図1.1　Myklestad の梁要素

$$\begin{bmatrix} y \\ \beta \\ M \\ V \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{I}_m\omega^2 & 1 & 0 \\ -\bar{\mu}\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ \beta \\ M \\ V \end{bmatrix}_i \qquad (1.1)$$

ここに、　y ＝梁のたわみ

β ＝曲げによる傾斜角

M ＝曲げモーメント

V ＝剪断力

$\bar{\mu} = \mu \ell$ ：梁要素の質量

$\bar{I}_m = I_m \ell$ ：梁要素の回転慣性質量

ℓ ＝ 梁要素の長さ

またmassless spring 部におけるfield transfer matrix は次式となる。

$$\begin{bmatrix} y \\ \beta \\ M \\ V \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} 1 & \ell & -\frac{\ell^2}{2EI} & (\frac{\ell}{kAG} - \frac{\ell^3}{6EI}) \\ 0 & 1 & -\frac{\ell}{EI} & -\frac{\ell^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & \ell \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ \beta \\ M \\ V \end{bmatrix}_j \qquad (1.2)$$

ここに、EI：梁の曲げ剛性

k′AG：梁の剪断剛性

（1.1）式を（1.2）式に代入し、j断面のstate vector を消去すればMyklestad-Prohl modelの梁要素のtransfer matrix が求められるがMyklestad の用いた階差方程式の形に変換して示せば次式となる。

$$\begin{aligned} V_{i+1} &= V_i - \bar{\mu}\omega^2 y_i \\ M_{i+1} &= M_i + \bar{I}m\omega^2\beta_i + \ell V_{i+1} \\ \beta_{i+1} &= \beta_i - \frac{\ell}{EI} M_{i+1} + \frac{\ell^2}{2EI} V_{i+1} \\ y_{i+1} &= y_i + \ell\beta_i - \frac{\ell^2}{2EI} M_{i+1} + (\frac{\ell^3}{3EI} + \frac{\ell}{k'AG}) V_{i+1} \end{aligned} \qquad (1.3)$$

（1.3）式において、$\bar{I}_m \to 0$，$k'AG \to \infty$とおけばMyklestad により求められた曲げ振動のみの場合に一致する。DTMB では梁要素の長さℓは十分短かいものとして（1.3）式においてℓ^2およびℓ^3の項を無視した次式を使用している。

$$\begin{aligned} V_{i+1} &= V_i - \bar{\mu}\omega^2 y_i \\ M_{i+1} &= M_i + \bar{I}m\omega^2\beta_i + \ell V_{i+1} \\ \beta_{i+1} &= \beta_i - \frac{\ell}{EI} M_{i+1} \\ y_{i+1} &= y_i + \ell\beta_i + \frac{\ell}{k'AG} V_{i+1} \end{aligned} \qquad (1.4)$$

梁要素内のmass lumping の方法としては他に図1.2に示したようなRayleigh model，Duncan model 等があるがNeubert 〔9〕はこれらの関係を示しmass lumping の位置に関する考察を行なつている。Rayleigh model による基礎式をtransfer matrix の形で

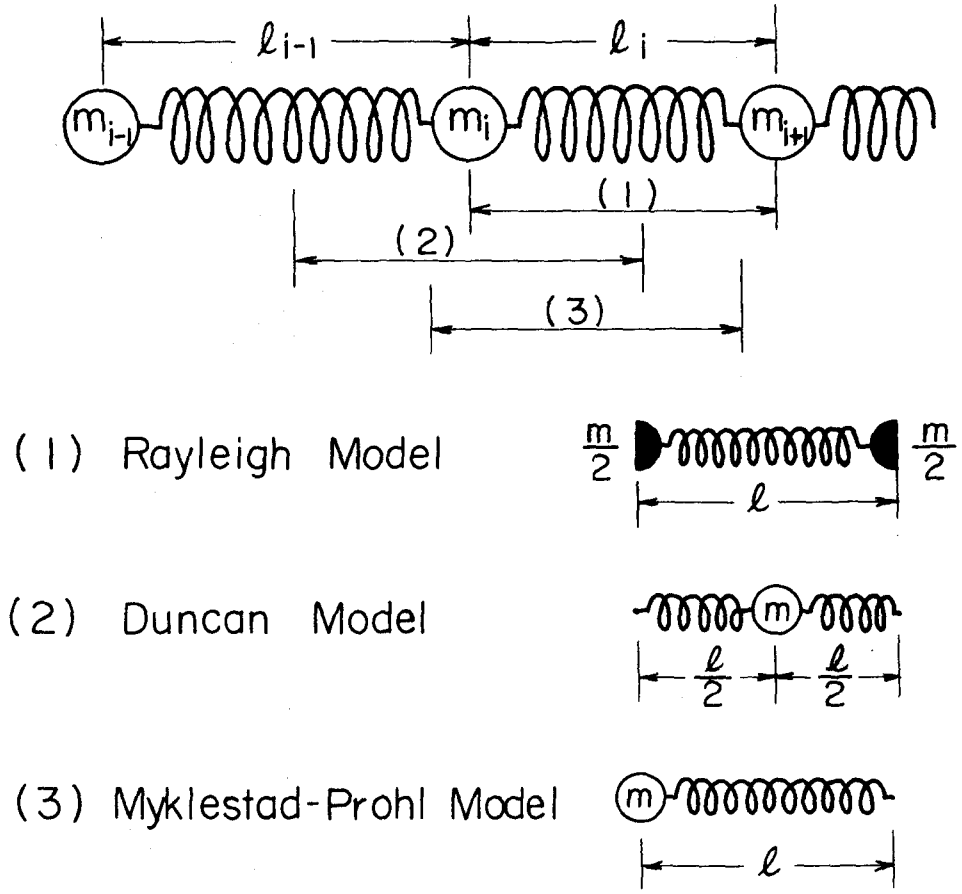


図1.2　Mass Lumping の方法

示せば次のようになる。

$$
\mathbf{H}_{RE} = \begin{bmatrix}
1-\frac{m\ell}{2}(b\ell-a\ell^3), & \ell-\frac{3}{2}a\,i\ell^3, & -3ab^2, & b\ell-a\ell^3 \\
\frac{3}{2}am\ell^3, & 1-3ai\ell^2, & -6a\ell, & -3a\ell^2 \\
-\frac{m\ell}{2}(\ell-\frac{3}{2}i\,a\ell^3), & i\ell-\frac{3}{2}i^2a\ell^3, & 1-3ai\ell^2, & \ell-\frac{3}{2}a\,i\ell^3 \\
-m\ell+\frac{m^2\ell^2}{4}(b\ell-a\ell^3), & -\frac{m\ell}{2}(\ell-\frac{3}{2}i\,a\ell^3), & \frac{3}{2}am\ell^3, & 1-\frac{m\ell}{2}(b\ell-a\ell^3)
\end{bmatrix}
\tag{1.5}
$$

ここに，$m=\mu\omega^2$，$i=I_m\ \omega^2$

$$a=\frac{1}{6EI}\ ,\quad b=\frac{1}{k'AG}$$

（1.3）式で示された4つの方程式は変断面梁を構成するすべての梁要素において成立する。したがつて今梁要素の数をN個とすれば4N個の方程式があり、一方未知数は両端を含む境界面（N＋1）個にそれぞれ4つづつあるので合計4（N＋1）個ある。このうち両端においてそれぞれ2つづつ境界条件として与えられるので結局4N個の数となり、振動数方程式が求められることとなる。この具体的な解法の手順はTransfer Matrix Method と同じであり後述する。

2.3 Transfer Matrix Method

本方法は解法としては前述したHolzer Methodの拡張であり、電子計算機の発達と共に著しく発展し、現在では一般にTransfer Matrix Method と呼ばれている。本方法の船体振動解析への応用は大高〔10〕により導入された。

2.3.1 剪断変形および回転慣性の影響を考慮した曲げ振動の transfer matrix

梁要素における基礎方程式はmatrixの形で次式のように表わされる。

$$\frac{dZ}{dx} = AZ \qquad (1.6)$$

ここに，Z：state vector
$=\{y, \beta, M, V\}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{k'AG} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{EI} & 0 \\ 0 & I_m\omega^2 & 0 & 1 \\ -\mu\omega^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

（1.6）式の一般解は次のようになる。

$$Z(x) = \exp(Ax) \cdot C \qquad (1.7)$$

梁の両端（$x=0$ および $x=\ell$）におけるstate vector を Z_i および Z_{i+1} とおき（1.7）式より Cを消去すれば両 state vector の関係は次のようになる。

$$Z_{i+1} = e^{A\ell} \cdot Z_i \qquad (1.8)$$

したがつて、transfer matrix は次のように計算される。

$$H = e^{A\ell} = I + A\ell + \frac{(A\ell)^2}{2!} + \frac{(A\ell)^3}{3!} + \cdots\cdots$$

$$= I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(A\ell)^n}{n!} \qquad (1.9)$$

この場合のtransfer matrix of beam の式は解析的にも求めることが出来るがかなり複雑な数式となる。〔11〕このような解析的に求められたtransfer matrix を使用すれば段付梁の取り扱いとしては正解を与えるものであるが、(1.9)式を使用して電子計算機で実際に計算する時最初の有限項しか算入出来ないために、このような項数の近似による誤差を含むことになる。本論で取り扱うTransfer Matrix Methodの計算精度とはこの項数近似による誤差を対象としたものである。

2.3.2 変断面梁としてのtransfer matrix

これまでの取り扱いは梁要素内において質量、剛性が均一な場合であつたが、これをxの関数であると仮定すれば、(1.6)式のAはxの関数となり次のような一階の変数定数をもつ微分方程式となる。

$$\frac{dZ}{dx} = A(x)Z \qquad (1.10)$$

ここに、
$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{kA(x)G} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{EI(x)} & 0 \\ 0 & I_m(x)\omega^2 & 0 & 1 \\ -\mu(x)\omega^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1.10)式の一般解は次式となる。

$$Z = e^{\int_0^x A(x)dx} \cdot C \qquad (1.11)$$

matrixの積分はmatrixを構成するすべての要素において独立に遂行され、積分定数は(1.11)式のCの中に含めるものとする。

$$L(x) = \int_0^x A(x)dx$$

とおき、transfer matrix を求めれば次のようになる。

$$H = e^{L(\ell) - L(0)} \qquad (1.12)$$

今、（1.10）式の含まれる質量、剛性の分布が直線的に変化するものとして

$$\mu(x)=\mu_i\ [1+\Delta\mu\, x/\ell]$$
$$I_m(x)=I_{mi}\ [1+\Delta I_m\, x/\ell] \qquad (1.13)$$
$$I(x)=I_i\ [1+\Delta I\, x/\ell]$$
$$A(x)=A_i\ [1+\Delta A\, x/\ell]$$

ここに
$$\Delta\mu=(\mu_{i+1}-\mu_i)/\mu_i$$
$$\Delta I_m=(I_{m\,i+1}-I_{m\,i})/I_{m\,i}$$
$$\Delta I=(I_{i+1}-I_i)/I_i$$
$$\Delta A=(A_{i+1}-A_i)/A_i$$

とおき、（1.12）式よりtransfer matrix を計算すれば、$\mathbf{H}=e^{\mathbf{A}\ell}$ とおき$\mathbf{A}$は次のようになる。

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{kA_iG}\frac{\log(\Delta A+1)}{\Delta A} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{EI_i}\frac{\log(\Delta I+1)}{\Delta I} & 0 \\ 0 & I_{m}i\omega^2(1+\frac{\Delta I_m}{2}) & 0 & 1 \\ -\mu_i\omega^2(1+\frac{\Delta\mu}{2}) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.14)$$

均一梁の場合は$\Delta\mu$，ΔI_m，ΔI，$\Delta A\to 0$となり（1.6）式の$\mathbf{A}$ matrixに一致する。また（1.13）式のI（x），A（x）の分布を

$$\frac{1}{I(x)}=\frac{1}{I_i}[1+\Delta I\frac{x}{\ell}]$$

$$\frac{1}{A(x)}=\frac{1}{A_i}[1+\Delta A\frac{x}{\ell}]$$

のようにおいた場合は（1.14）式に対応する式は次式のようになる。

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{kA_iG}(1+\frac{\Delta A}{2}) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{EI_i}(1+\frac{\Delta I}{2}) & 0 \\ 0 & I_{m}i\,\omega^2(1+\frac{\Delta I_m}{2}) & 0 & 1 \\ -\mu_i\omega^2(1+\frac{\Delta\mu}{2}) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.15)$$

この式において，

$$\mu = \frac{1}{2}(\mu_i + \mu_{i+1}) \quad , \quad I_m = \frac{1}{2}(I_{mi} + I_{mi+1})$$

$$I = \frac{1}{2}(I_i + I_{i+1}) \quad , \quad A = \frac{1}{2}(A_i + A_{i+1})$$

とおけば（1.6）式の**A**に一致する。つまり両端の諸数値の平均値を使用して均一梁の計算を行なえば、直線分布と仮定した場合と同じ結果が導かれる。

2.3.3 Transfer Matrix Method による解法

図1.3に示したように、船体がN個の均一梁が連結されて構成されているものと考えたとき、梁要素のそれぞれについて両端のstate vectorとtransfer matrix を表わす関係として次に示す式が成立する。

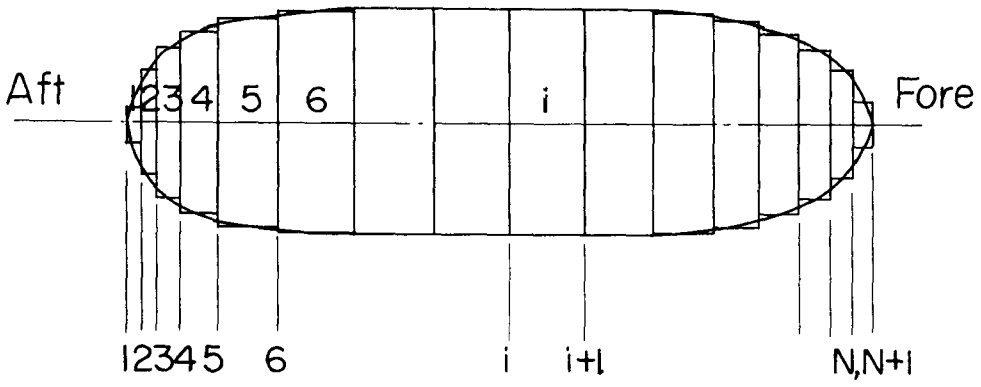


図1.3 変断面梁と等価な段付梁

$$Z_{i+1} = H_i \cdot Z_i \qquad (1.16)$$

$$(i = 1, 2, 3, \cdots\cdots, N)$$

今対象としているのは両端自由の梁であり、中間に集中荷重および支点は存在しない場合である。したがつて（1.16）式より船体の中間のstate vector を順次消去して行けば、船の両端におけるstate vector だけ残して、船体全体のtransfer matrix は次のように求められる。

$$Z_{N+1} = H_N \cdot H_{N-1} \cdots\cdots H_2 H_1 Z_1$$

$$= \left(\prod_{n=1}^{N} H_{N-n+1}\right) Z_1 = P \cdot Z_1 \qquad (1.17)$$

（1.17）式は両端の未知数計8つを含む4つの式を表わしている。残る4つの条件は境界条件として両端において2つづつ与えられ、両端自由の梁の場合次のようになる。

$$M_1 = 0 \qquad V_1 = 0$$

$$M_{N+1} = 0 \qquad V_{N+1} = 0 \tag{1.18}$$

これらの境界条件は（1.17）式の$\mathbf{Z}_1$ および$\mathbf{Z}_{N+1}$ に適合した次のmatrixを使用することによつて書き表わされる。

$$\mathbf{Z}_1 = \begin{bmatrix} y_1 \\ \beta_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{B}_S \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \tag{1.19}$$

$$\begin{bmatrix} M_{N+1} \\ V_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ \beta \\ M \\ V \end{bmatrix}_{N+1} \equiv \mathbf{B}_E \cdot \mathbf{Z}_{N+1}$$

ここに，$\mathbf{B}_E$ および$\mathbf{B}_S$ は終端および始端境界matrixと呼ぶ。

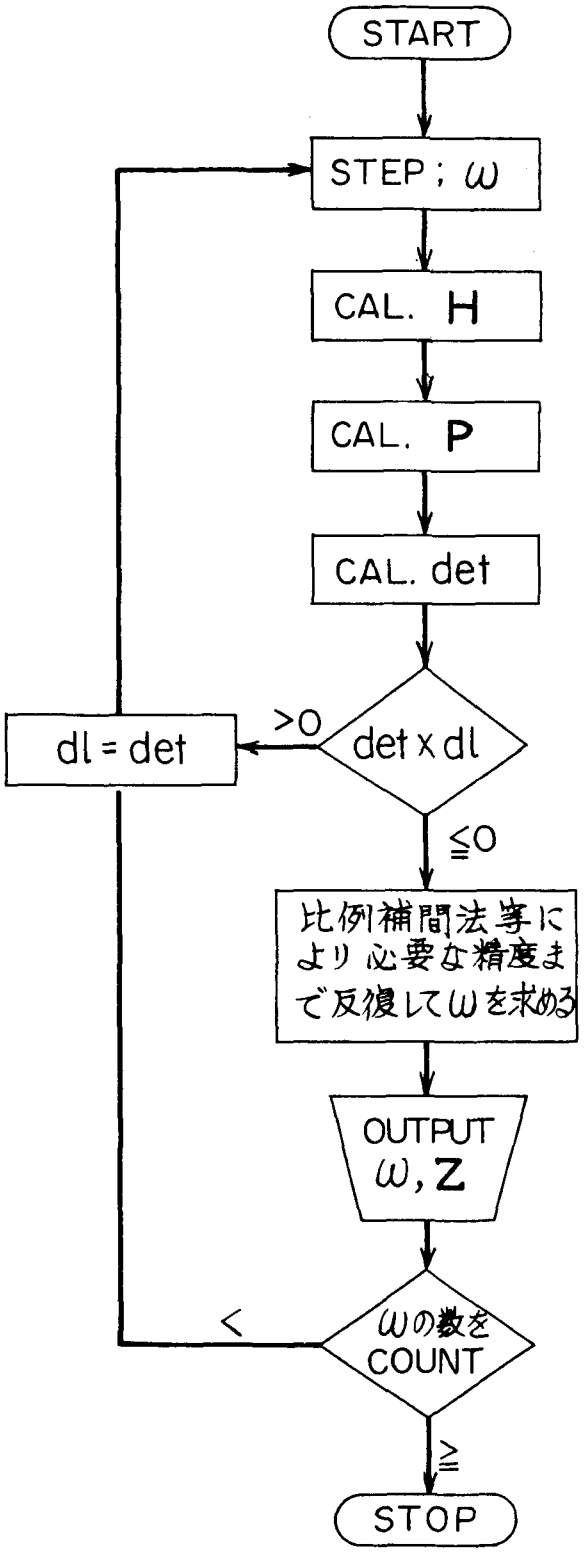
（1.19）式を（1.17）式に代入すれば振動数方程式として結局次式をえる。

$$\det \left| \mathbf{B}_E \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{B}_S \right| = 0 \tag{1.20}$$

（1.20）式による実際の計算のflow chart を図1.4に示す。

（1.3）式で表わされる階差方程式より解く方法は次の通りである。

（1.17）式および（1.19）式によつて次の関係が求められる。



（説明）

振動数をある間隔でSTEPさせる。

深要素それぞれのTransfer Matrixを計算する。

船全体のTransfer Matrixを作る。

残差を計算する。

残差=0となるωがあるかどうか判定する。

もしある範囲にあることがわかれば、さらに細く（こま）必要な精度がえられるまでωをSTEPさせて求める。

得られた固有振動数および振動モードを出力。

ほしい固有振動数の数をCOUNTする。

図1.4　Transfer Matrix Method の Flow Chart

$$M_{N+1} = a_{11} \quad y_1 + a_{12} \quad \beta_1$$
$$V_{N+1} = a_{21} \quad y_1 + a_{22} \quad \beta_1 \qquad (1.21)$$

今、もし、始端において $y_1 = 1$, $\beta_1 = 0$ とおけば階差方程式（1.3）式により順次計算を進めることが出来、すべての y_i, β_i, M_i, V_i がある振動数に対して求められる。この時（1.21）式より明らかなように a_{11}, a_{21} は

$$a_{11} = M'_{N+1} \qquad a_{21} = V'_{N+1} \qquad (1.22)$$

となる。

次に、$y_1 = 0$, $\beta_1 = 1$ と仮定すれば同様に

$$a_{12} = M''_{N+1} \quad , \qquad a_{22} = V''_{N+1} \qquad (1.23)$$

が求められる。したがつて（1.20）式の左辺の行列式の値は

$$\det. |B_E \cdot P \cdot B_S| = a_{11} \quad a_{22} - a_{12} \quad a_{21} \qquad (1.24)$$

で表わされるのでこの量が（1.20）式を満足するかどうかを振動数を変化することによつて判定し、固有振動数が計算される。

Transfer Matrix Method を使用して計算するとき注意しなければならないことは桁落ちの問題である。例えば（1.24）式において a_{11} a_{22} と a_{12} a_{21} が同程度の大きい値となつたとき計算機の有効桁数ではその残差を判定することが出来ない。これを防止するためには倍長の有効桁数を使用する必要がある。このような実際的な数値計算の検討は文献〔12〕,〔13〕に述べられている。ここでは、船体振動に応用する場合の精度の検討のために同一 program において計算機の有効桁数のみを変えて計算した一例を表1.4に示す。

表1.4　計算機の有効桁数による精度の比較

節数 \ α / σ	0			0.005			0.01		
	正　解	single	double	正　解	single	double	正　解	single	double
2	22.373	22.373	22.373	21.714	21.714	21.714	21.109	21.109	21.109
3	61.673	61.681	61.673	55.585	55.577	55.584	50.983	50.985	50.983
4	120.903	120.694	120.903	98.879	98.925	98.879	85.716	85.716	85.717
5	199.860	193.168	199.860	146.626	146.798	146.627	121.348	121.361	121.348
6	298.556	223.505	298.559	196.091	196.346	196.094	156.741	156.777	156.742
7	416.991	not found	417.008	245.896	244.961	245.904	191.569	191.521	191.575
8	555.166	not found	555.218	295.456	295.021	295.477	225.861	225.937	225.876

計算は均一梁の40等分を行ない、transfer matrix は(1.9)式の6項までとつた場合であり、表中の記号は次に示す通りである。

$\alpha = \dfrac{EI}{kGA\ell^2}$, $\alpha=0$ は曲げ振動のみの場合に相当する。

$\sigma^2 = \dfrac{\mu L^4 \omega^2}{EI}$, non-dimensional natural frequency

single: 有効桁数 8桁(4 bytes)

double: 有効桁数16桁(8 bytes)

正 解 : 均一梁の剪断、曲げ振動の解析解〔14〕

8節までの計算結果では曲げ振動のみ($\alpha=0$)を除いてsingle でも double でも同程度の精度が得られている。$\alpha=0$ の場合は精度が落ちる。分割数が少ない場合には$\alpha \neq 0$のときでも、桁落ちが生ずることがあるので、4 bytesのときには注意を要する。一方 8 bytesであれば8節までは十分桁落ちがないことが確められたので、船体振動の計算には問題がない。

2.4 Finite Element Method

梁要素のconsistent mass matrix は Archer〔15〕によつて示された。本節では船体振動解析を対象として新たに回転慣性質量によるconsistent mass matrix および剪断および曲げ変形によるstiffness matrixを示し、Finite Element Method による一般的な解法について述べる。

2.4.1 consistent mass matrix

(1) 曲げ振動の慣性力によるconsistent mass matrix

梁要素の変位関数は梁理論に従がい次に示すような三次式で表わされるものと仮定する。

$$y = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \qquad (1.25)$$

(1.25)式より回転角は

$$\beta = -3x^2 C_1 - 2x C_2 - C_3 \qquad (1.26)$$

となり、$x=0$ において $y=y_1$, $\beta=\beta_1$, $x=\ell$ において $y=y_2$, $\beta=\beta_2$ とおき(1.25)式の定数Cを消去して、両端の変位を使つて変位関数を求めれば次のようになる。

$$y = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}^T \cdot \{q\}$$
$$\equiv \mathbf{N}^T \cdot \{q\} \qquad (1.27)$$

ここに　$\{q\}=\{y_1, \beta_1, y_2, \beta_2\}$

$$N_1 = 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + 1$$

$$N_2 = \ell\left[-\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - \left(\frac{x}{\ell}\right)\right]$$

$$N_3 = -2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{\ell}\right)^2$$

$$N_4 = \ell\left[-\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right]$$

consistent mass matrix $\mathbf{M}c$ は梁要素の未知変位Vector{q} 使用して次のように定義される。

$$T = \frac{1}{2}\{\dot{q}\}^T \cdot \mathbf{M}c \cdot \{\dot{q}\} \qquad (1.28)$$

(1.28)式で表わされる慣性力による梁要素全体の運動エネルギは(1.27)式を使用して次のように計算される。

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{\ell}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^{\ell}\dot{y}(x)\cdot\mu\cdot\dot{y}(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\{\dot{q}\}^T \cdot \left[\mu\int_0^{\ell}\mathbf{N}\cdot\mathbf{N}^T dx\right]\cdot\{\dot{q}\} \qquad (1.29)$$

(1.29)式の括弧内の積分を遂行することにより次の consistent mass matrix が計算される。

$$\mathbf{M}c = \frac{\mu\ell}{420}\begin{bmatrix} 156 & & & \\ -22\ell & 4\ell^2 & & \text{SYM.} \\ 54 & -13\ell & 156 & \\ 13\ell & -3\ell^2 & 22\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \qquad (1.30)$$

(2) 曲げ振動の慣性モーメントによるconsistent mass matrix

一方、梁の曲げ振動において断面の回転慣性質量の影響を考慮する時には回転慣性モーメントによる運動エネルギを計算することによつて、同様なmass matrixを導くことが出来る。

この時、(1.26)式で表わされる回転角は(1.27)式と同様な形で両端の変位Vector{q}を使用して次のように表わされる。

$$\beta = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}^T \cdot \{q\}$$

$$\equiv \mathbf{M}^T \cdot \{q\} \qquad (1.31)$$

ここに、　$M_1 = \frac{6}{\ell}\left[\left(\frac{x}{\ell}\right) - \left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right]$

$$M_2 = \left[-3\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{\ell}\right) - 1\right]$$

$$M_3 = \frac{6}{\ell}\left[\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - \left(\frac{x}{\ell}\right)\right]$$

$$M_4 = 2\left(\frac{x}{\ell}\right) - 3\left(\frac{x}{\ell}\right)^2$$

回転慣性モーメントによる梁要素全体の回転運動エネルギは（1.31）式より

$$T_R = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} I_m \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\{\dot{q}\}^T \cdot \left[I_m \int_0^{\ell} \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^T dx\right] \cdot \{\dot{q}\}$$

で表わされるので回転慣性によるconsistent mass matrix, $\mathbf{M}_R$ は次のように求められる。

$$\mathbf{M}_R = \frac{I_m}{30\ell}\begin{bmatrix} 36 & & & \text{SYM.} \\ 3\ell & 4\ell^2 & & \\ -36 & -3\ell & 36 & \\ 3\ell & -\ell^2 & -3\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \qquad (1.32)$$

(3) 捩り振動および縦振動のconsistent mass matrix

捩り振動および縦振動の場合も同様に次に示すようなconsistent mass matrix が計算される。

$$\mathbf{M}_T = \frac{I_p \ell}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (1.33)$$

縦振動の場合には $I_p \rightarrow \mu$ とおけばよい。

2.4.2 lumped mass matrix

従来、使用されている連続体の近似解法として梁を質点系として取り扱う場合が多い。このlumped massの取り扱いでは考えている1つの質点に働く慣性力はその部分にlumpした質量のみが関係し、他の部分の質量は寄与しないとする考え方である。

即ち、 $F_i = m_i \ddot{y}_i$ （1.34）

$(i = 1., 2 \cdots\cdots N)$

この場合、（1.27）式において示されたconsistent mass matrix の変位関数と比較すると、次の関数を仮定したことになつている。

$$N_1 = N_3 = 1 \qquad (1.35)$$

$$N_2 = N_4 = 0$$

ただし $N_i N_j = 1 \ (i = j)$

$0 \ (i \neq j)$

このように、lumped mass matrixの変位関数は後で示すようにstiffness matrix の計算に使用される変位関数とconsistent なものでなく、lumped mass matrixを使用して計算された固有振動数はもはや正解の上界を与えるという保証はない。しかし、consistent mass matrixでは運動エネルギを計算するときに使用する変位関数とstiffness matrixを求めるために歪エネルギを計算するとき用いる変位関数とはconsistent なものであり、Finite Element Methodにより計算した固有振動数は必ず正解の上界を与える。

Rayleigh model に対するlumped mass matrix は(1.30)式と同等な形で次のように求められる。

$$\mathbf{M}_L = \frac{\mu \ell}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.36)$$

一方、Lumped massにおいて断面の回転慣性質量の影響を考慮するときには(1.34)式と同様に

$$M_i = I_{mi} \ddot{\beta}_i \qquad (1.37)$$

$$(i = 1, 2, 3 \cdots\cdots, N)$$

と考えられる。したがつて、同様に回転慣性によるlumped mass matrix は(1.32)式と同等な形で次のように求められる。

$$\mathbf{M}_{RL} = \frac{I_m \ell}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1.38)$$

lumped mass matrix は(1.30)式で表わされるconsistent mass matrixと比較すれば明らかなように対角線matrixとして非常に簡単な形で表わされ、実際の計算が簡単な上、全体のmatrix をcondense して取り扱うことが出来るという利点がある。〔16〕

2.4.3 stiffness matrix

(1) 曲げ変形のみのstiffness matrix

今、曲げ変形による変位関数として(1.27)式に示したものを使用する。これより、梁要素内における曲げモーメントの分布は次のように表わされる。

$$M = EI\frac{d^2y}{dx^2} = EI \cdot \{L_1, L_2, L_3, L_4\}^T \cdot \{q\}$$

$$\equiv EI \quad \mathbf{L}^T \cdot \{q\} \qquad (1.39)$$

ここに，$L_1 = \frac{6}{\ell^2}[1 - 2(\frac{x}{\ell})]$

$L_2 = \frac{2}{\ell}[2 - 3(\frac{x}{\ell})]$

$L_3 = \frac{6}{\ell^2}[2(\frac{x}{\ell}) - 1]$

$L_4 = \frac{2}{\ell}[1 - 3(\frac{x}{\ell})]$

梁要素全体の曲げ変形による歪エネルギは次のように計算される。

$$U_b = \int_0^\ell \frac{M^2}{2EI}dx = \frac{1}{2}\{q\}^T \cdot [EI\int_0^\ell \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T dx] \cdot \{q\}$$

$$\equiv \frac{1}{2}\{q\}^T \mathbf{K}_b \cdot \{q\} \qquad (1.40)$$

(139)式を使用して(1.40)式の括弧内の積分を遂行すれば次のようなstiffness matrix が計算される。

$$\mathbf{K}_b = \frac{2EI}{\ell^3} \cdot \begin{bmatrix} 6 & & & SYM. \\ -3\ell & 2\ell^2 & & \\ -6 & 3\ell & 6 & \\ -3\ell & \ell^2 & 3\ell & 2\ell^2 \end{bmatrix} \qquad (1.41)$$

(2) 捩り振動および縦振動のstiffness matrix

(1.33)式に示したmass matrixを求めた同じ変位関数を使用して、次のようなstiffness matrixが求められる。

$$\mathbf{K}_T = \frac{JG}{\ell} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1.42)$$

縦振動の場合にはJGのかわりにAEとなる。

(3) 曲げおよび剪断変形を考慮したstiffness matrix

剪断変形による梁要素全体の歪エネルギは次のように計算される。

$$U_s = \int_0^\ell \frac{V^2}{2kAG}dx \equiv \frac{1}{2}\{q_s\}^T \cdot \mathbf{K}_s \cdot \{q_s\} \qquad (1.43)$$

(1.42)式と同様に剪断変形のみのstiffness matrixは次式で求められる。

$$\mathbf{K}_s = \frac{k'AG}{\ell} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1.44)$$

曲げおよび剪断変形を同時に考慮するとき、歪エネルギは（1.40）式および（1.43）式の和として次のような関係がある。

$$\frac{1}{2}\{q\}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \{q\} = \frac{1}{2}\{q_s\}^T \cdot \mathbf{K}_s \cdot \{q_s\} + \frac{1}{2}\{q_b\}^T \cdot \mathbf{K}_b \cdot \{q_b\} \qquad (1.45)$$

ここに、$\{q\}=\{y_1, \beta_1, y_2, \beta_2\}$

$\{q_s\}=\{y_{s1}, y_{s2}\}$

$\{q_b\}=\{y_{b1}, \beta_1, y_{b2}, \beta_2\}$

$y_1 = y_{s1} + y_{b1}$

$y_2 = y_{s2} + y_{b2}$

一方、これらのstiffness matrixはそれぞれforce vector と次のような関係がある。

$$\{\mathbf{F}\} = \mathbf{K}_b \cdot \{q_b\}$$
$$\{\bar{\mathbf{F}}\} = \mathbf{K}_s \cdot \{q_s\} \qquad (1.46)$$
$$\{\mathbf{F}\} = \mathbf{K} \cdot \{q\}$$
$$\{q\} = \{\bar{q}_s\} + \{q_b\}$$

ここに，$\{\bar{q}_s\}=\{y_{s1}, 0, y_{s2}, 0\}$

$\{\mathbf{F}\} = \{V_1, M_1, V_2, M_2\}$

$\{\bar{\mathbf{F}}\} = \{V_1, V_2\}$

（1.45）式および（1.46）式の関係を使用して、曲げおよび剪断変形を考慮したstiffness matrixは次のように求められる。

$$\mathbf{K} = \frac{2EI}{\ell^3} \cdot \zeta \cdot \begin{bmatrix} 6 & & \text{SYM} & \\ -3\ell & 2\ell^2\eta & & \\ -6 & 3\ell & 6 & \\ -3\ell & \ell^2\alpha & 3\ell & 2\ell^2\eta \end{bmatrix} \qquad (1.47)$$

ここに $\zeta = \dfrac{1}{1+\dfrac{12k}{\ell^2}}$

$$\eta = 1 + \frac{3k}{\ell^2}$$

$$\alpha = 1 - \frac{6k}{\ell^2}$$

$$k = \frac{EI}{k'AG}$$

2.4.4 Finite Element Method による解法

梁要素個々のconsistent mass matrix を使用して全体のmass matrix $\mathbf{M}$ は次のようにassemble される。

まず、梁全体の運動エネルギーは次式で求められる。

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{N} T_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \{\dot{q}_i\}^T \cdot \mathbf{M}_i \cdot \{\dot{q}_i\} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \{\dot{u}_i, \dot{u}_{i+1}\}^T \cdot \mathbf{M}_i \cdot \begin{Bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{u}_{i+1} \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\{\dot{u}\}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \{\dot{u}\} \end{aligned} \qquad (1.48)$$

ここに $\mathbf{M}_i = {}_i\mathbf{M}_C + {}_i\mathbf{M}_R$

$$\{q_i\} = \{u_i, u_{i+1}\} = \{y_i, \beta_i, y_{i+1}, \beta_{i+1}\}$$

$$\{u\} = \{u_1, u_2, u_3 \cdots u_N, u_{N+1}\}$$

全く同様にして、(1.47)式に表わされる梁要素個々のstiffness matrixを使用して全体の歪エネルギは次式で求められる。

$$U = \sum_{i=1}^{N} U_i = \frac{1}{2}\{u\}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \{u\} \qquad (1.49)$$

Lagrange 関数Lは自由振動する梁に対して次のように表わされる。

$$L = T - U \qquad (1.50)$$

Hamilton の原理より、$\int_{t_0}^{t_1} L\,dt$ は t_0 と t_1 の間において停留値をとる。

変分法におけるEulerの特性方程式を使用すれば(1.48)式、(1.49)式を使つて求められる(1.50)式により、次の運動方程式が導かれる。

$$\mathbf{M} \cdot \{\ddot{u}\} + \mathbf{K} \cdot \{u\} = 0 \qquad (1.51)$$

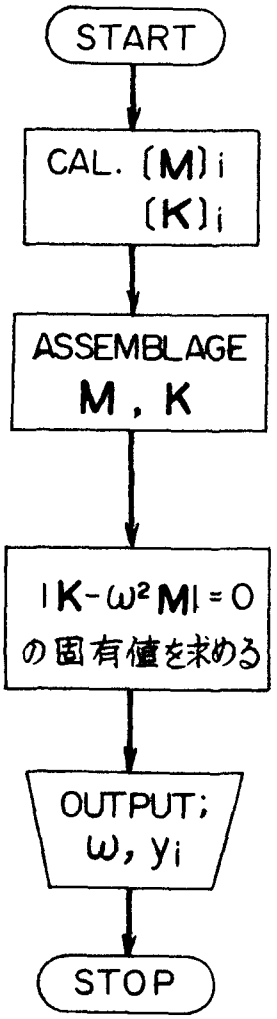
$\{u\} = \{r\}e^{i\omega t}$ とおき(1.51)式に代入すれば、結局固有値方程式として次式が得られる。

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0 \qquad (1.52)$$

（1.52）式は2（N＋1）元の固有値方程式である。

境界条件としては幾何学的境界条件のみが考えられる。したがつて船体振動のように両端自由の梁の場合には（1.52）式をそのまま固有値を求めるsubroutine に直結することによつて解が得られる。この場合、梁全体の剛体平行運動および回転剛体運動に相当する振動数0の2つの解も含んでいる。

Finite Element Methodによる解法のFlow Chart を図1.5に示す。



（説明）

梁要素のmassおよびstiffness matrixを計算する。

梁の全系にわたって寄せ集め、全体のmassおよびstiffness matrixを作る。

固有値を求めるSUBROUTINEに直結することにより解く。

固有振動数および振動モードをOUTPUTする。

図1.5　Finite Element Method のFlow Chart

2.5 各計算法の相互関係

梁の transfer matrix を使用する時は船体の変断面梁を段付梁に置換する近似を除けば完全に正解となる。Myklestad-Prohl Method では質点系の振動として取り扱われるので、梁要素の質点系の置換による近似仮定を含むことになる。まずその近似仮定の程度について調べることにする。

（1.9）式より transfer matrix は次に示す無限級数の和として与えられ、無限項まで考慮すれば正解が与えられる。

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} + \frac{\ell}{1!}\mathbf{A} + \frac{\ell^2}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{\ell^3}{3!}\mathbf{A}^3 + \frac{\ell^4}{4!}\mathbf{A}^4 + \frac{\ell^5}{5!}\mathbf{A}^5 + \cdots\cdots \qquad (1.9)$$

ここに，

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & -6a & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \\ -m & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.53)$$

ただし、記号は（1.5）式に示したのと同じである。

（1.53）式より（1.9）式に含まれる$\mathbf{A}$のべき乗を6項まで計算すれば次のようになる。

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} -bm & 0 & -6a & 0 \\ 0 & -6ai & 0 & -6a \\ -m & 0 & -6ai & 0 \\ 0 & -m & 0 & -bm \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & -(bm+6ai) & 0 & -(b^2m+6a) \\ 6am & 0 & 36a^2i & 0 \\ 0 & -(m+6ai^2) & 0 & -(bm+6ai) \\ bm^2 & 0 & 6am & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.54)$$

$$\mathbf{A}^4 = \begin{bmatrix} m(b^2m+6a) & 0 & 6a(bm+6ai) & 0 \\ 0 & 6a(m+6ai^2) & 0 & 6a(bm+6ai) \\ m(bm+6ai) & 0 & 6a(m+6ai^2) & 0 \\ 0 & m(bm+6ai) & 0 & m(b^2m+6a) \end{bmatrix}$$

$$
\mathbf{A}^5=\begin{bmatrix}
0 & b^2m^2+6am+6abim+36a^2i^2 & 0 & b^3m^2+12abm+36a^2i \\
-6am(bm+6ai) & 0 & -36a^2(m+6ai^2) & 0 \\
0 & bm^2+12aim+36a^2i^3 & 0 & b^2m^2+6abim+6am+36a^2i^2 \\
-m^2(b^2m+6a) & 0 & -6am(bm+6ai) & 0
\end{bmatrix}
$$

今、Myklestad-Prohl Method と比較するためにRayleigh model を使用して求めた（1.5）式を（1.9）式と同様にℓのベキ乗で整理すれば次のようになる。

$$
\mathbf{H}=\mathbf{I}_4+\frac{\ell}{1!}\mathbf{A}_1+\frac{\ell^2}{2!}\mathbf{A}_2+\frac{\ell^3}{3!}\mathbf{A}_3+\frac{\ell^4}{4!}\mathbf{A}_4+\frac{\ell^5}{5!}\mathbf{A}_5+\cdots\cdots \qquad (1.55)
$$

$$
\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & b \\
0 & 0 & -6a & 0 \\
0 & i & 0 & 1 \\
-m & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\qquad
\mathbf{A}_2=\begin{bmatrix}
-bm & 0 & -6a & 0 \\
0 & -6ai & 0 & -6a \\
-m & 0 & -6ai & 0 \\
0 & -m & 0 & -bm
\end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{A}_3=\begin{bmatrix}
0 & -9ai & 0 & -6a \\
9am & 0 & 0 & 0 \\
0 & -9ai^2 & 0 & -9ai \\
\frac{3}{2}bm^2 & 0 & 9am & 0
\end{bmatrix}
\qquad
\mathbf{A}_4=\begin{bmatrix}
12am & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
18ami & 0 & 0 & 0 \\
0 & 18ami & 0 & 12am
\end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{A}_5=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
-30am^2 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\qquad
\mathbf{A}_j=0\ (j\geqq 6)
$$

（1.54）式と（1.55）式を比較すれば明らかなように（1.9）式で表わされる展開項のうち最初の3項までは完全に一致する。そして4項目から6項目までは対応する要素の値は少し異なるが、不完全ながらも部分的に考慮されている。そして7項目以上は無視されていることになる。

したがつて、Myklestad-Prohl Method によつて計算される精度は transfer matrix の項数近似3項以上の精度を保証するものと思われる。

しかし、前述のDTMBで採用されている方法は（1.3）式を（1.4）式のように近似して求めた方法である。この場合同様に**A** matrix を求めれば次のようになる。

$$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & -6a & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \\ -m & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_2=\begin{bmatrix} -bm & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6ai & 0 & 0 \\ -m & 0 & -6ai & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -bm \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9ai^2 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}bm^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_j=0\ (\ j\geqq 4\ ) \tag{1.56}$$

この場合、最初の２項目までしか完全に一致していない。３項目は部分的に満足されているが４項以上は無視されている。したがつて精度的にはtransfer matrix method よりかなり劣る。

一方、Finite Element Methodについても、そのconsistent mass matrix とstiffness matrixから構成されるdynamic stiffness matrixを変換しtransfer matrixの形にして上と同様Transfer Matrix Method の項数近似と比較することができる。簡単のために曲げ振動の場合について求めたtransfer matrix の一部の要素(h_{ij}で表わす)を示せば次のようになる。

$$h_{11}=\frac{1+\frac{37}{140}am\ell^4+\frac{13}{4200}a^2m^2\ell^8}{1+\frac{1}{70}am\ell^4+\frac{1}{8400}a^2m^2\ell^8} \tag{1.57}$$

$$=1+\frac{\ell^4}{4!}[6am]+\frac{\ell^8}{8!}[24a^2m^2]+\cdots\cdots$$

同様に、ℓについて展開すれば

$$h_{12}=\frac{\ell}{1!}[1]+\frac{\ell^5}{5!}[6am]+\frac{\ell^9}{9!}[-\frac{1296}{7}a^2m^2]+\cdots$$
$$h_{13}=\frac{\ell^2}{2!}[-6a]+\frac{\ell^6}{6!}[-36a^2m]+\frac{\ell^{10}}{10!}[\frac{3888}{7}a^2m^2]+\cdots$$
$$h_{14}=\frac{\ell^3}{3!}[-6a]+\frac{\ell^7}{7!}[36a^2m]+\frac{\ell^{11}}{11!}[\frac{53136}{7}a^3m^2]+\cdots$$

となり、(1.9)式で表わされる無限級数の展開項と比較すれば最初の８項まで完全に一致する。そして(1.57)式より明らかなように要素の値の分母にℓに関する多項式を含むためℓのべき級数は無限級数となる。これより曲げ振動の場合にはtransfer matrix の展開項８項

までの精度が保証されるものと推定されるが、剪断変形および回転慣性の影響をも考慮した一般の場合には展開項の一致する項数は少なくなり、Transfer Matrix Method の4項近似程度の計算精度に留まるものと推定される。

このようにMyklestad-Prohl Method および Finite Element Method の計算精度はTransfer Matrix Method の展開項数の近似精度と関連して推定することが出来るので以下の精度の検討は主にTransfer Matrix Method の計算精度を主眼として行なうことにする。

2.6 計算精度の検討

2.6.1 精度検討の方法

これらの精度を検討するためには影響する要素として分割長さ、項数の他に梁の全長、固有振動数、曲げ剛性、剪断剛性、単位長さ当りの重量、極慣性モーメント等の量がすべて関係する。しかし、次の無次元量を使用すればこれらを一般性をもつて精度の検討が出来る。

N：梁の分割数

$$\alpha = \frac{EI}{k'AGL^2} \qquad (1.58)$$

$$\sigma^2 = \frac{\mu L^4 \omega^2}{EI}$$

$$\tau = \frac{Im}{\mu L^2}$$

ここに，　L：梁の全長

（1.58）式で表わされるパラメーターを変化させ、正解のある均一梁の理論値と比較し精度の検討を行つた。計算誤差はこの方法の場合特に正解に対して上界または下界を与えるという保証はないため、次に示す誤差率を用いた。

$$\varepsilon = \frac{|f_{cal} - f_{exact}|}{f_{exact}} \times 100\ (\%) \qquad (1.59)$$

各パラメーターは表1.5に示した範囲で変化させその傾向を調べる。

表1.5　精度検討のためのパラメーターの値

n	matrix exponential の展開項数	2，3，4，5，6，8，10，15の8種類
N	梁の分割数(等分割)	1，2，3，4，5，6，7，8，10，15，20，25，30 40の14種類
α	曲げ、剪断の剛性比	0（曲げ振動のみ） 0.0005　，　0.01
σ	無次元化振動数	2，3，4，5，6，7，8節まで考慮
τ	回転慣性比	0（無視する）

2.6.2 Transfer Matrix Method の計算精度

(1) matrix exponential の展開項数の影響

matrix exponentialの有限個の項数近似が精度におよぼす影響を調べるため分割数N＝２０の場合８節固有振動数まで計算誤差の検討を行なつた。計算結果を図1.6に示す。α＝０～0.０１の範囲では誤差に大きな傾向は見られないがαが大きくなれば幾分誤差は小さくなる。展開項数ｎが３～５で誤差は急激に小さくなり、ｎ＝６をとれば８節まで0.５％以内の誤差で固有振動数が計算出来ることがわかる。

(2) 梁の分割数の影響

梁の分割数を増加さすと一般に固有振動数は正確に求められる。matrix exponentialの展開項数を５とした場合の梁の分割数による精度の比較を図1.7に示す。αが大きくなると精度がよくなる傾向を示すが高次の固有振動数まで正確に求めるためには梁を十分細かく分割する必要があることがわかる。この図より８節までの固有振動数を１％以内の精度で求めるためにはｎ＝５の場合２５分割以上の分割数を必要とすることがわかる。

(3) 振動節数による影響

振動数σが増加するにしたがつて精度は悪くなる。振動節数による精度の影響を図1.8に示す。

(4) １％以内の誤差範囲

matrix exponentialの展開項を多くとればとる程また梁の分割数を多くすればする程、求められる固有振動数の精度はよい。ある誤差範囲以内で固有振動数を計算する場合、この両者の関係を求めておけば便利がよい。図1.9には１％以内の誤差で各節の固有振動数を求められる展開項数と分割数の関係を示したものである。α＝０～0.０１に対してその影響は顕著でない。この図より、例えば８節までの固有振動数を１％以内の誤差で求めるためには船体を１０等分すれば、展開項数を１０項とる必要があるのに対して、もし２０等分であれば展開項数は６項で十分であることを示している。

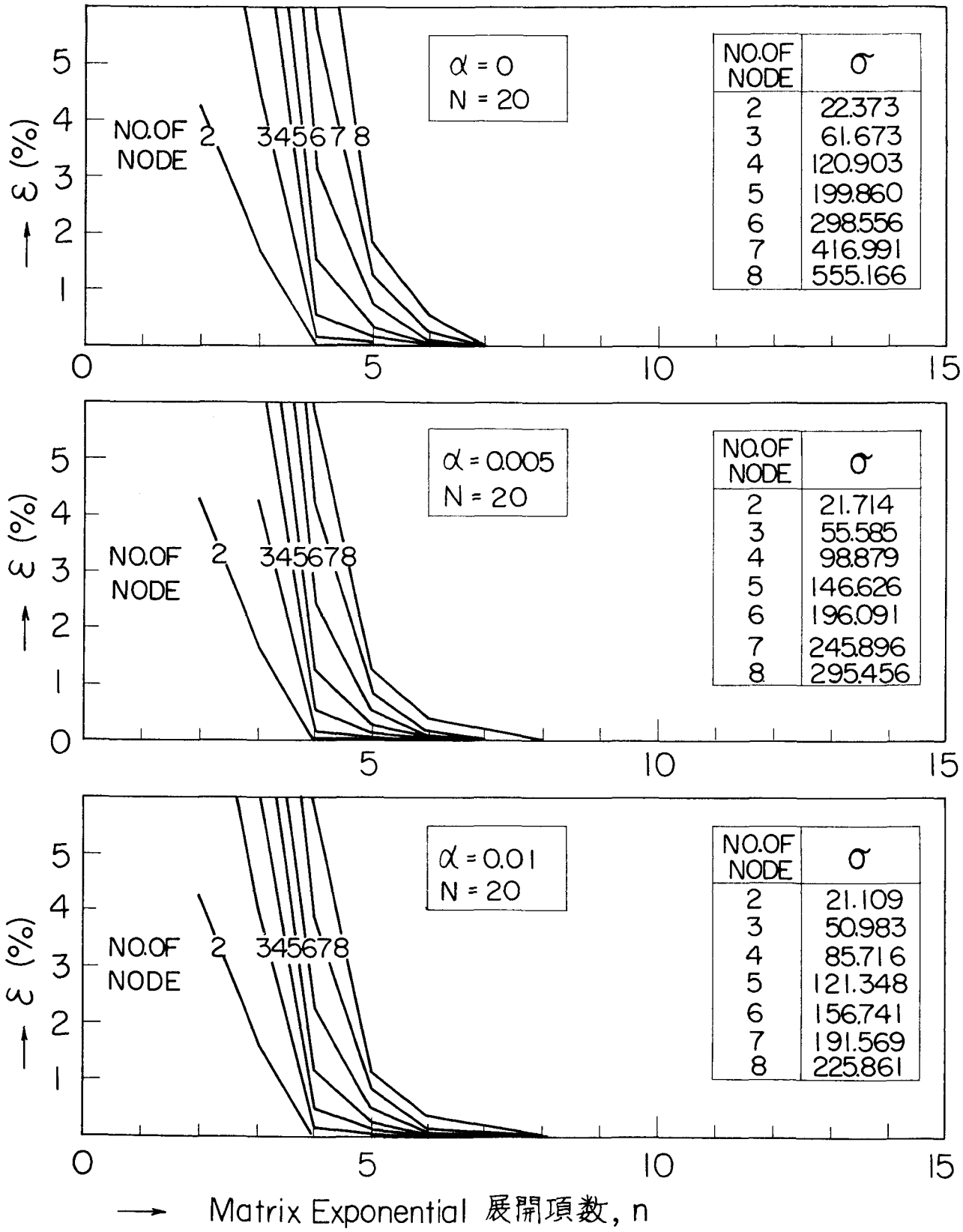


図1.6　Matrix Exponential の展開項数による精度の比較

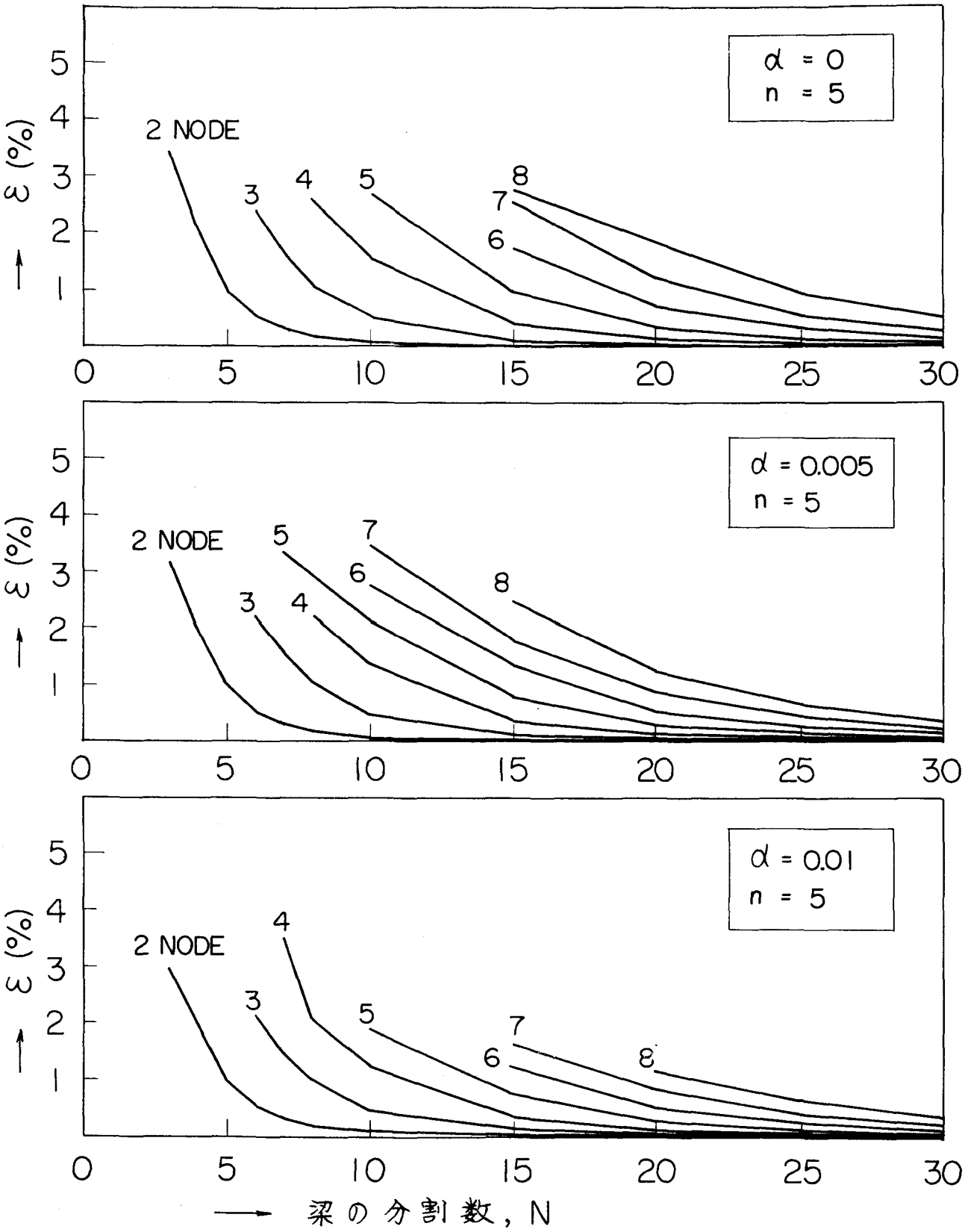


図 1.7　　梁の分割数による精度の比較

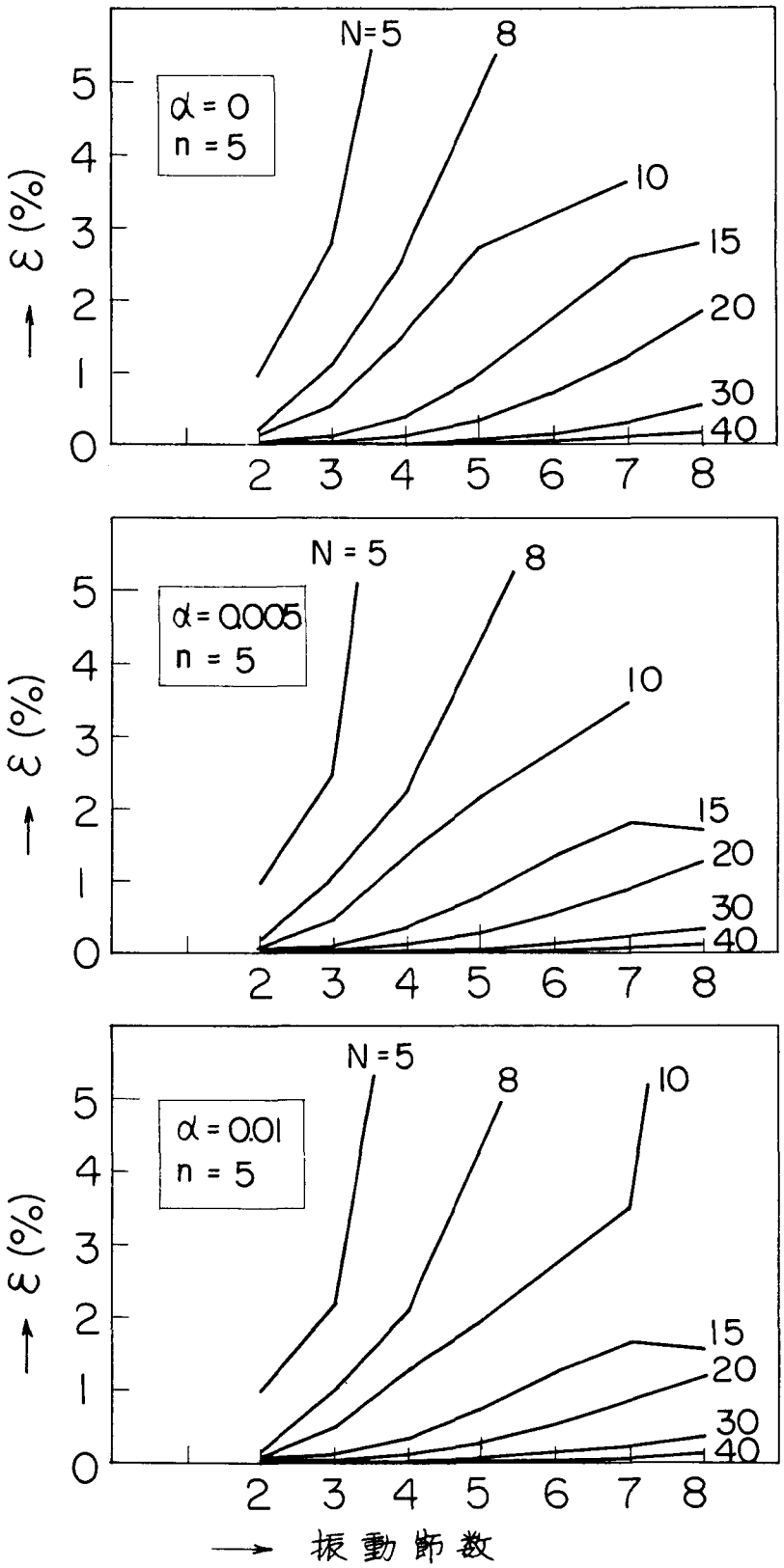
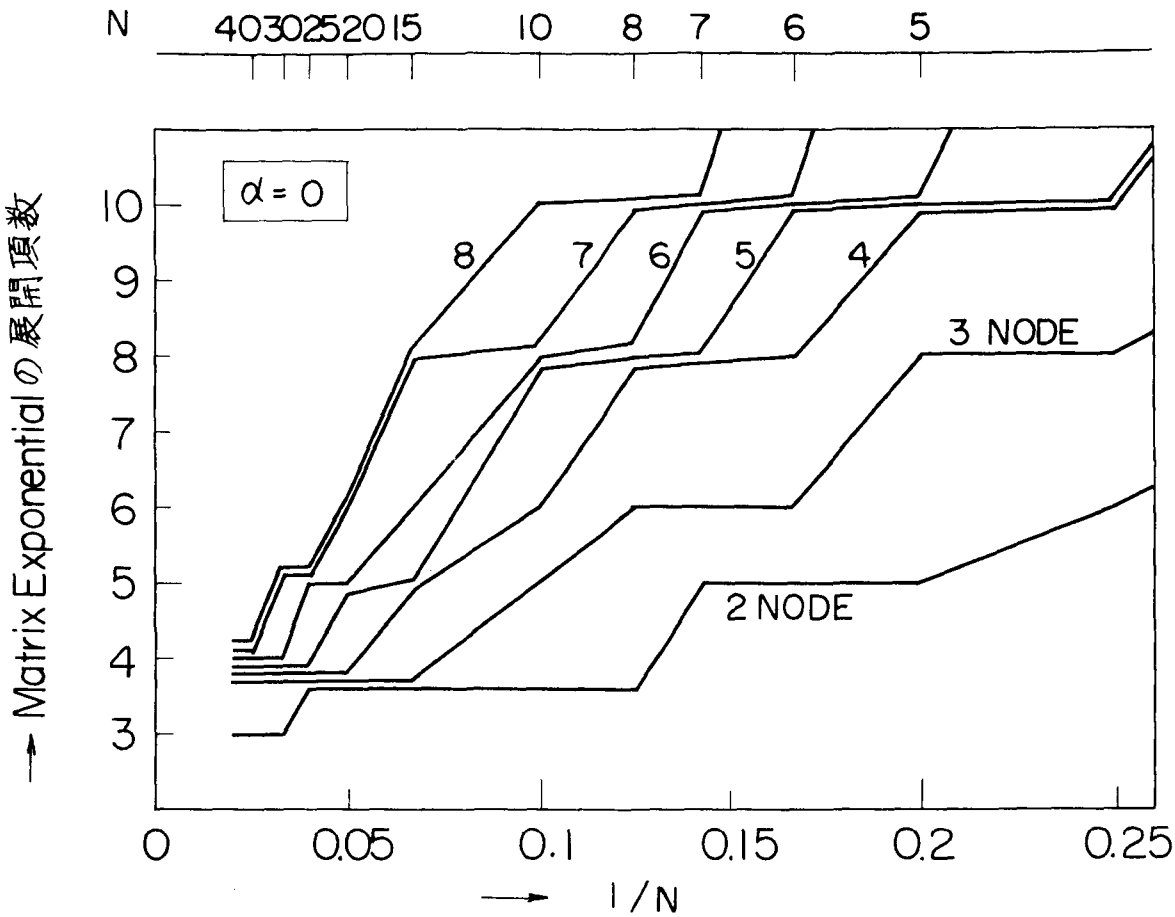
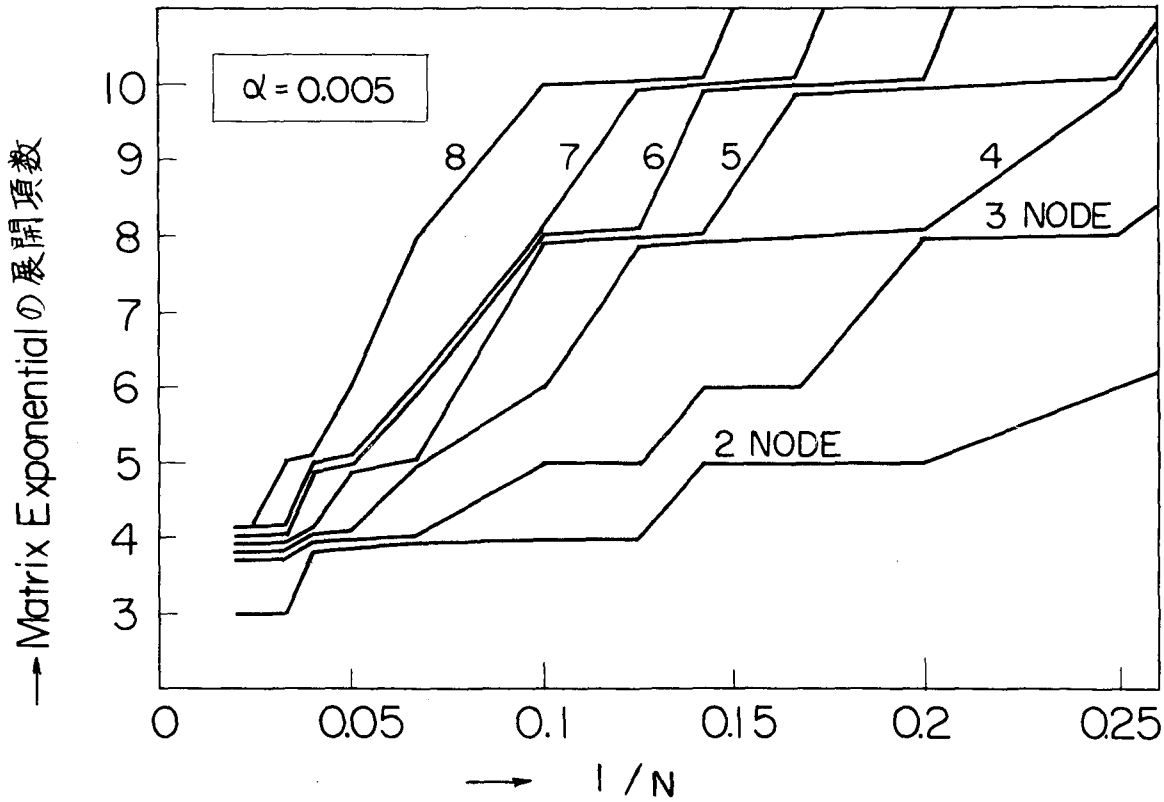


図1.8　振動節数による精度の比較


N
40 30 25 20 15 10 8 7 6 5
α = 0
8
7
6
5
4
3 NODE
2 NODE
→ Matrix Exponential の展開項数
10
9
8
7
6
5
4
3
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
→ 1/N


α = 0.005
8
7
6
5
4
3 NODE
2 NODE
→ Matrix Exponential の展開項数
10
9
8
7
6
5
4
3
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
→ 1/N

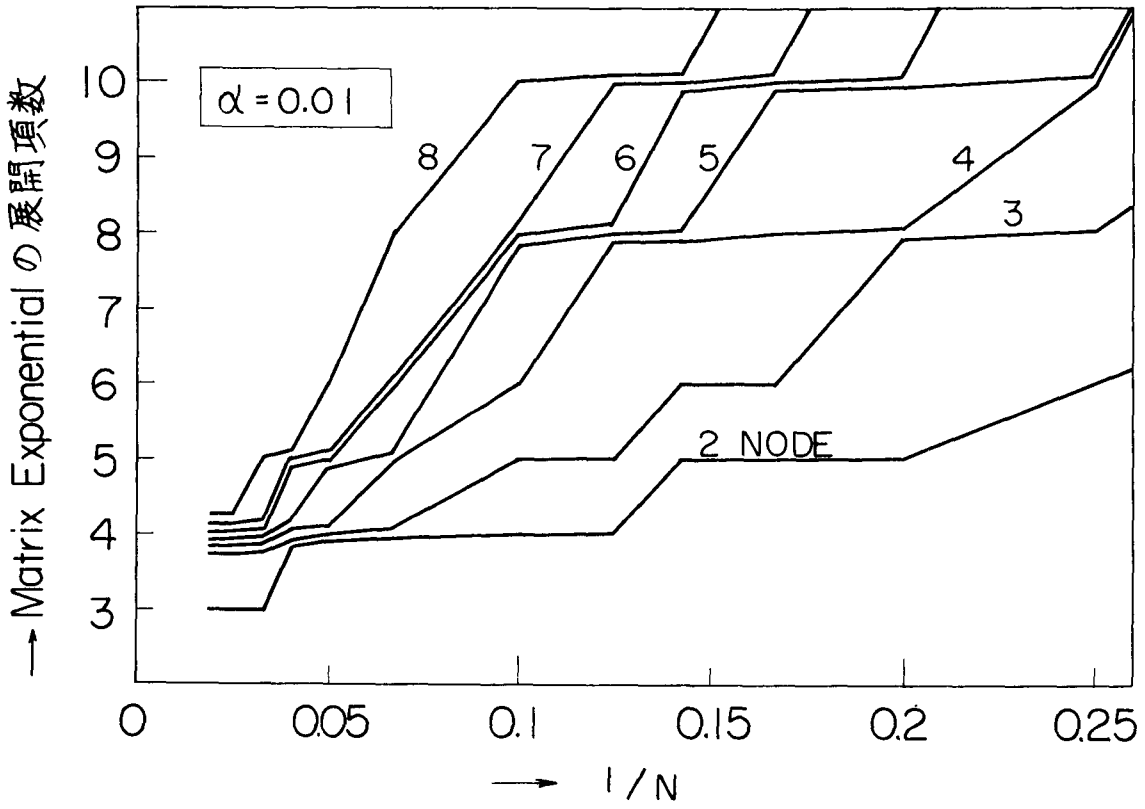


図1.9　1％以内の誤差で固有振動数が計算出来る範囲

2.6.3　Finite Element Method の計算精度

consistent mass matrix を使用した Finite Element Method による計算精度の検討の一例を図1.10に示す。本図は梁の分割数を40等分した場合、10節固有振動数が1％および5％の誤差範囲内で求められる限界線を示したものである。前節で述べたように曲げ振動のみの場合（$\alpha=0$）には良好な精度を示すのに対して$\alpha=0.005\sim0.01$程度の剪断の影響を含む場合には計算精度は幾分低下することがわかる。この図より明らかなように梁の分割数を30～40とすれば本方法により8節までの固有振動数が1％以内の計算精度で求められることがわかる。

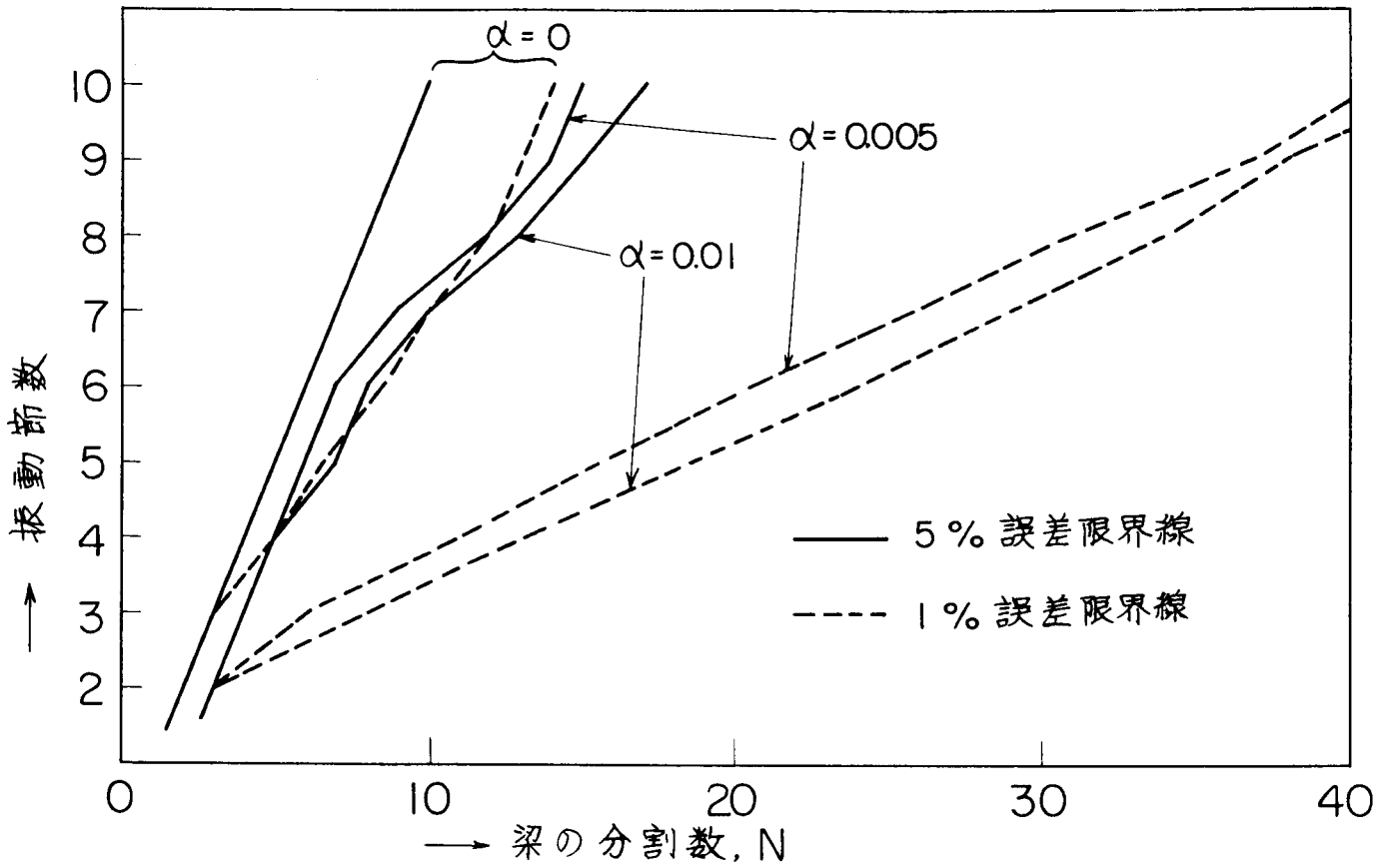


図1.10　Finite Element Method の計算精度

2.6.4　Myklestad-Prohl Method の計算精度

一方、consistent mass matrix のかわりに（1.36）式で示される lumped mass matrix を用いた場合＊の同様な計算精度の比較を図1.11に示す。Finite Element Method と比較した場合、精度はかなり劣り、梁の分割数を40分割しても1％以内の計算精度で求めうる固有振動数は6節程度である。これはDTMBで用いられているMyklestad-Prohl Methodとほぼ同程度の誤差である。〔8〕

＊表1.3に示した方法の分類では lumped mass matrix を使用したDynamic Stiffness Matrix Methodに相当するが解法による誤差は除外しているので、Myklestad-Prohl Method 計算精度を表わすものと考えてよい。

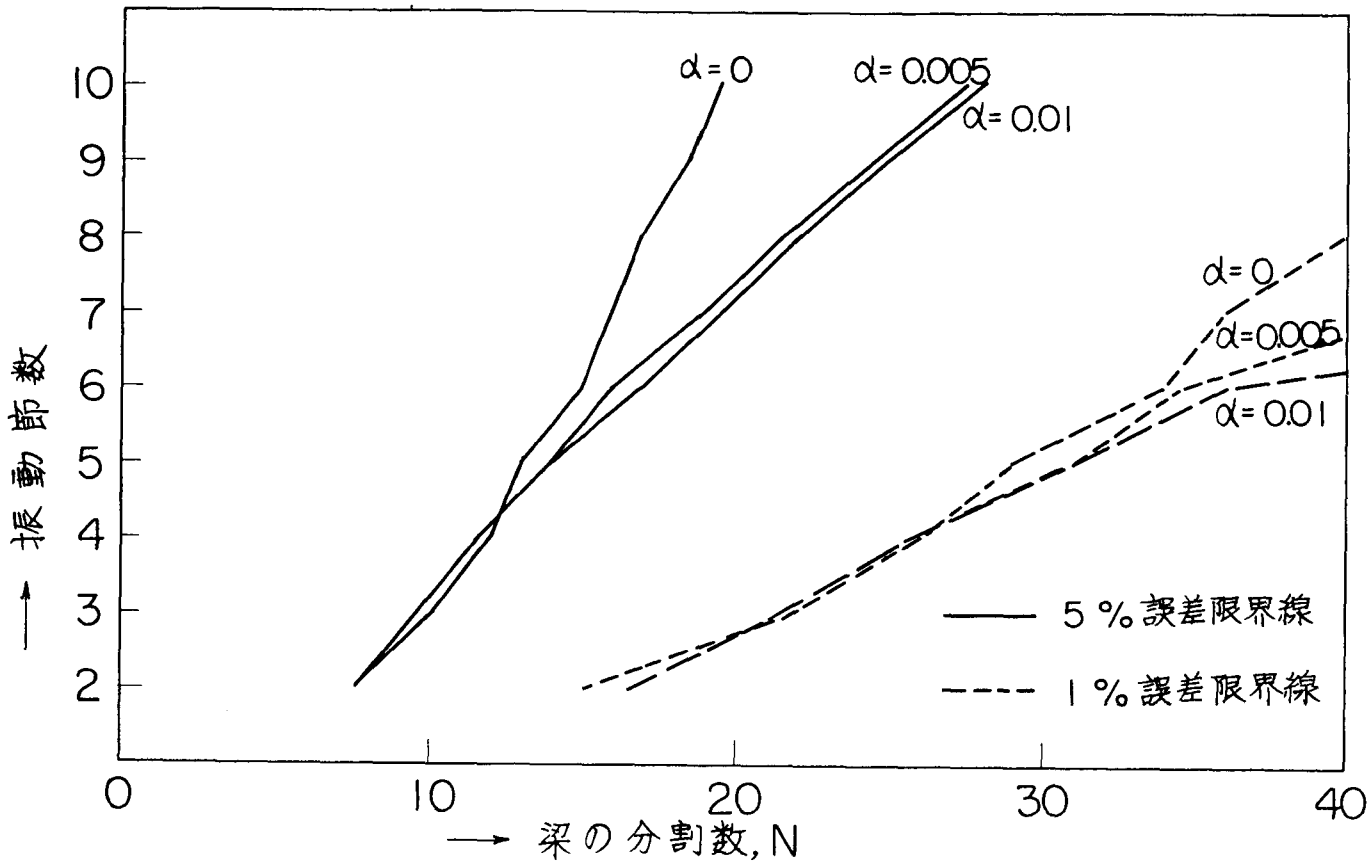


図1.11　Myklestad-Prohl Method の計算精度

2.6.4　各方法による計算精度の比較

これらの各方法による計算精度はTransfer Matrix Method におけるmatrix exponentialの展開項数の近似と関係づけられることは前述した通りであるが、この関係を図示すれば図1.12、図1.13および図1.14の如くである。図1.12および図1.13は曲げ振動のみの場合で梁の分割数をそれぞれ20および40としたものである。図中の数字はtransfer matrixの近似項数を表わしたものであり、大高(Transfer Matrix Method), Leibowitz (Lumped Mass Method) により求められた結果も同時に示した。図より明らかなようにlumped massでは transfer matrix 展開項数3から4の間にあるが、Finite Element Method では$\alpha=0$のとき8項以上、$\alpha=0.005\sim0.01$に対して4～5の間の計算精度となることがわかる。

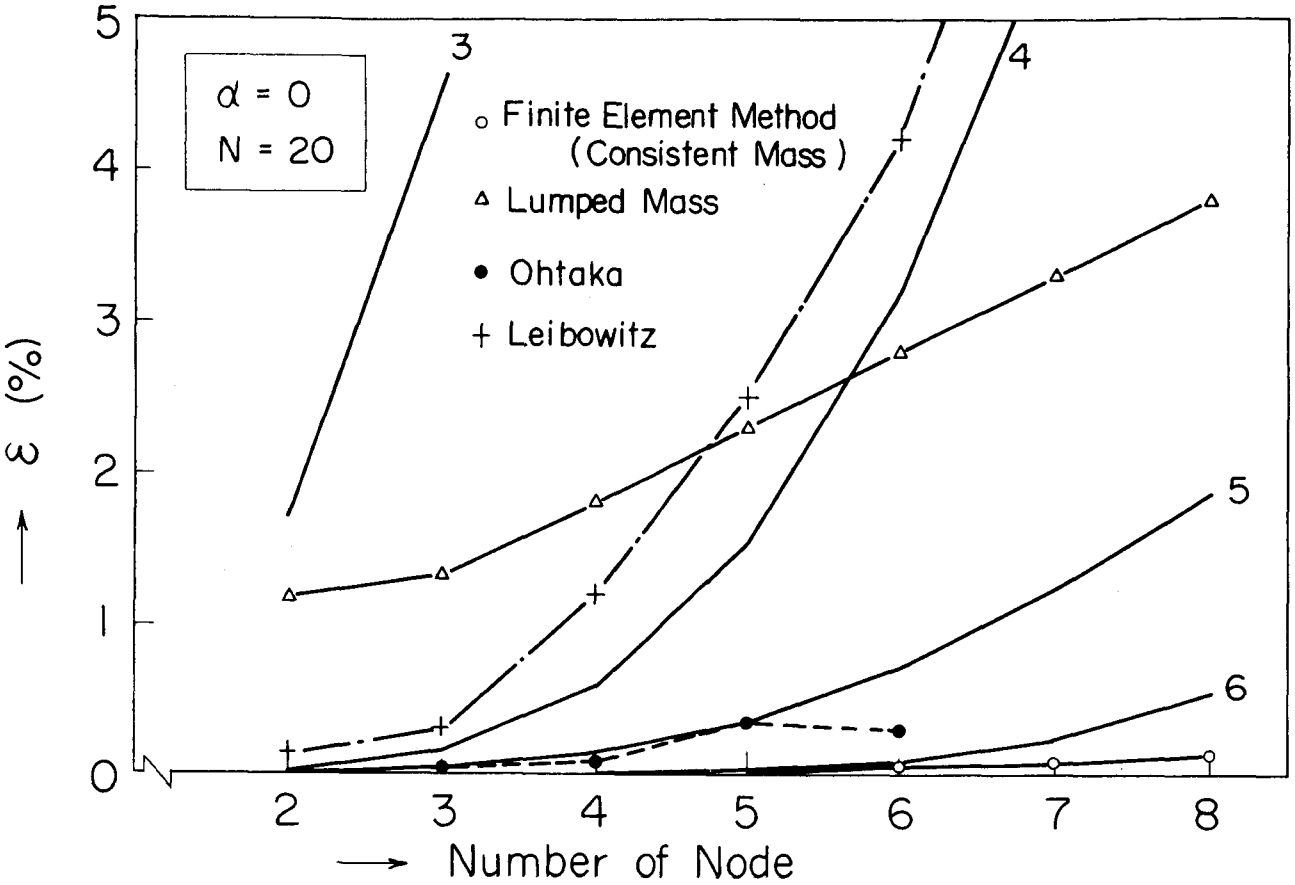


図1.12　各方法による精度の比較（その1）

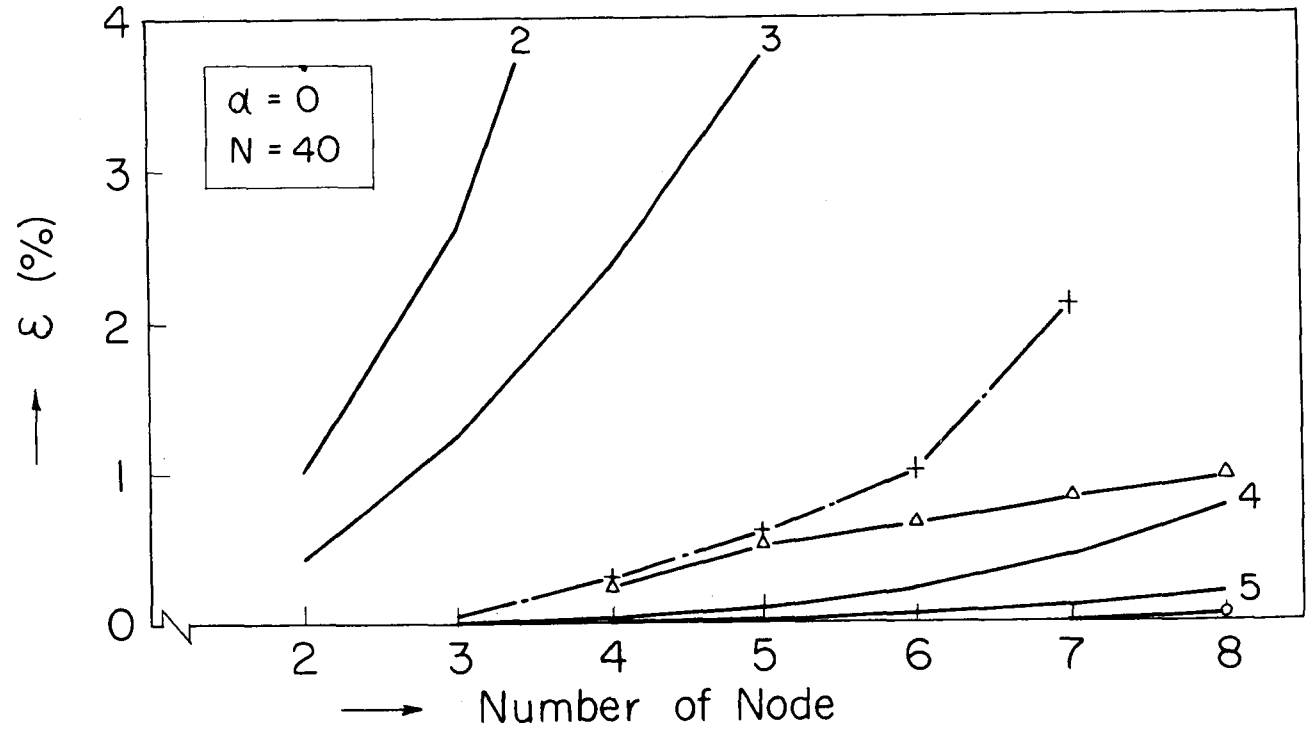


図1.13　各方法による精度の比較（その2）

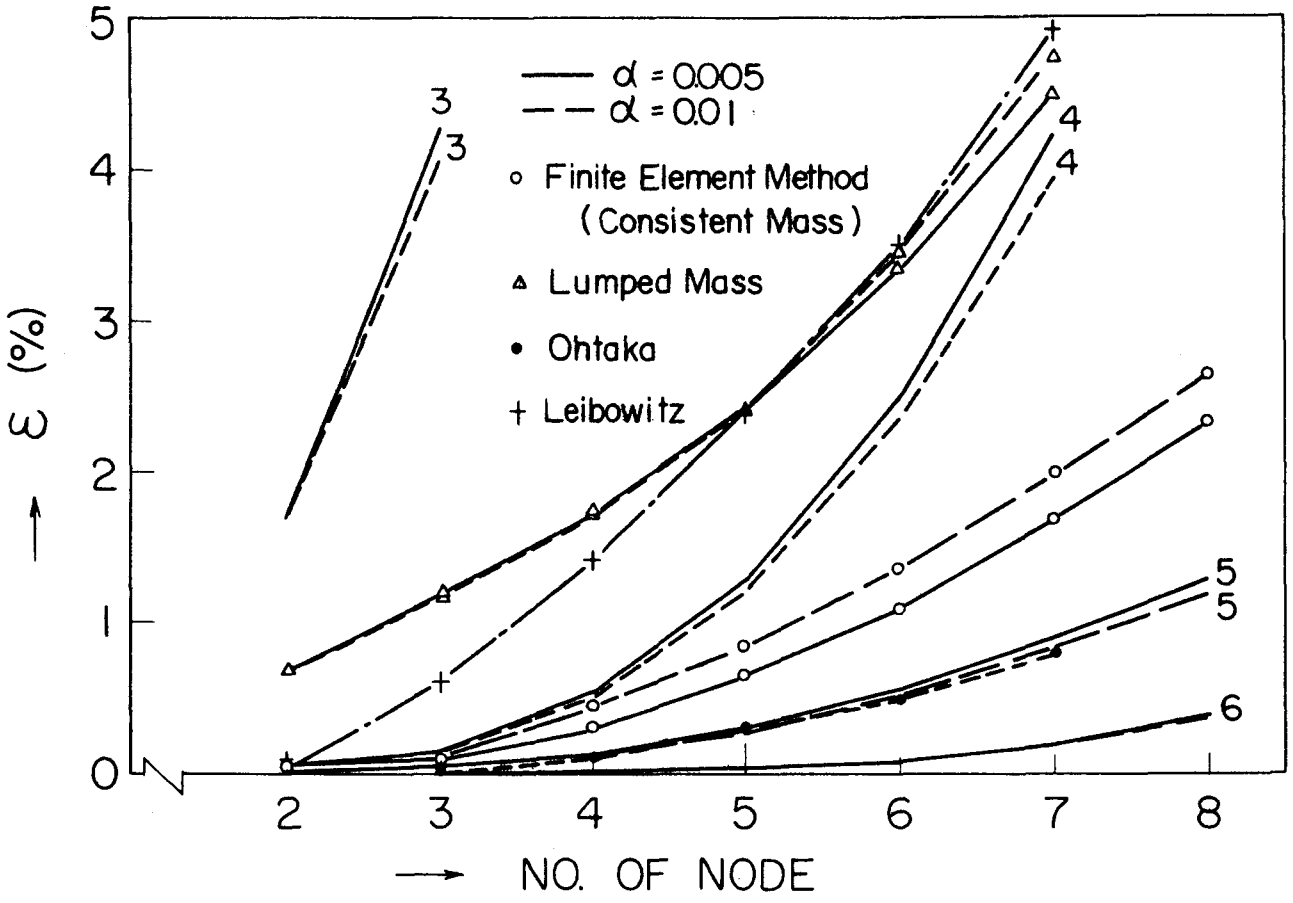


図1.14　各方法の精度の比較（その3）

第3章　実船実験結果と梁理論による計算値との比較

3.1　実船実験結果

本章で述べた計算法を実船に応用した場合の適用性を検討するため三隻の実船振動実験を実施した。実験に供試された船の主要目を表1.6に示す。実船振動実験結果の詳細については文献〔17〕に報告されているので再掲は省略する。これらの実験は船体上下振動および船体縦振動について行なわれたものであり、実験より得られた固有振動数の一覧表を表1.7および表1.8に示す。

表 1. 6　供試船主要目

項目＼船名	A	B	C
船種	OIL TANKER	OIL/BULK/ORE CARRIER	OIL TANKER
L(m)	246.000	240.000	274.000
B(m)	40.200	32.300	45.600
D(m)	21.800	18.900	21.600
d_{full}(m)	15.070	13.950	14.830
Δ full	122,258KT	92,240LT	153,660KT
D.W.T	103,690KT	74,107LT	128,000KT
主機関	HITACHI B&W 1084-VT2BF-180	HITACHI B&W 984-VT2BF-180	HITACHI B & W 1284-VT2BF-180
推進器翼数	5	5	5

表1.7　船体上下振動の実測固有振動数

（単位　cpm）

実験時状態	節数 ＼ 実験の種類 ＼ 船名	A		B		C	
		EXCITER TEST	UNDERWAY TEST	EXCITER TEST	UNDERWAY TEST	EXCITER TEST	UNDERWAY TEST
半載	2						
	3	90.9					
	4	136.4		143.2	145(5)		
	5	186		196 ✳			
	6	245		242	235(5)		
	7	290		282	283(5)		
	8	310	✳✳ 320(5)	320	320(9)		
	9			370	381(9)		
	10	410		407	400(5)		
	11		462(10)	457			
	12		519(10)	506	512(5)		
満載	2						
	3	88		87		70.8	
	4	124		120		109.2	
	5	169		148		146.9	
	6	196		203		173.2	
	7	245		235		210	
	8	292	289(5)	273		256	
	9			304		281	
	10			348			
	11			393	382(9)	351	
	12	440	440(5)	422	417(10)	391	

注）　✳ □ で囲んだものは振動モードが計測されているものを示す。

✳✳UNDERWAY　TESTで計測されたものには（　）内にプロペラ回転数の何倍であるかを示した。

表1.8　船体縦振動の実測固有振動数

(単位　cpm)

実験時状態	節数	A EXCITER TEST	A UNDERWAY TEST	B EXCITER TEST	B UNDERWAY TEST	C EXCITER TEST	C UNDERWAY TEST
半　載	1	280		318			
	2	493		628			
	3						
満　載	1			413	382(9)		
	2	518		510			
	3					546	

3.2　理論計算値

3.2.1　Input Data

前章に示した計算法を使用して船体振動を計算するとき、船の長さ方向の重量分布、曲げ剛性および剪断剛性分布等が必要である。船体は複雑な構造物であるのでそれらを正確に計算することは非常に労力のいる仕事となる。したがつて本計算には永元等〔18〕によつて提案されている長さ方向の分布形状を採用した。また船体上下固有振動数に及ぼす回転慣性の影響は一般に小さく、無視し得るものといわれているので本計算では考慮しなかつた。A船の Input Data の例を図1.15に示す。

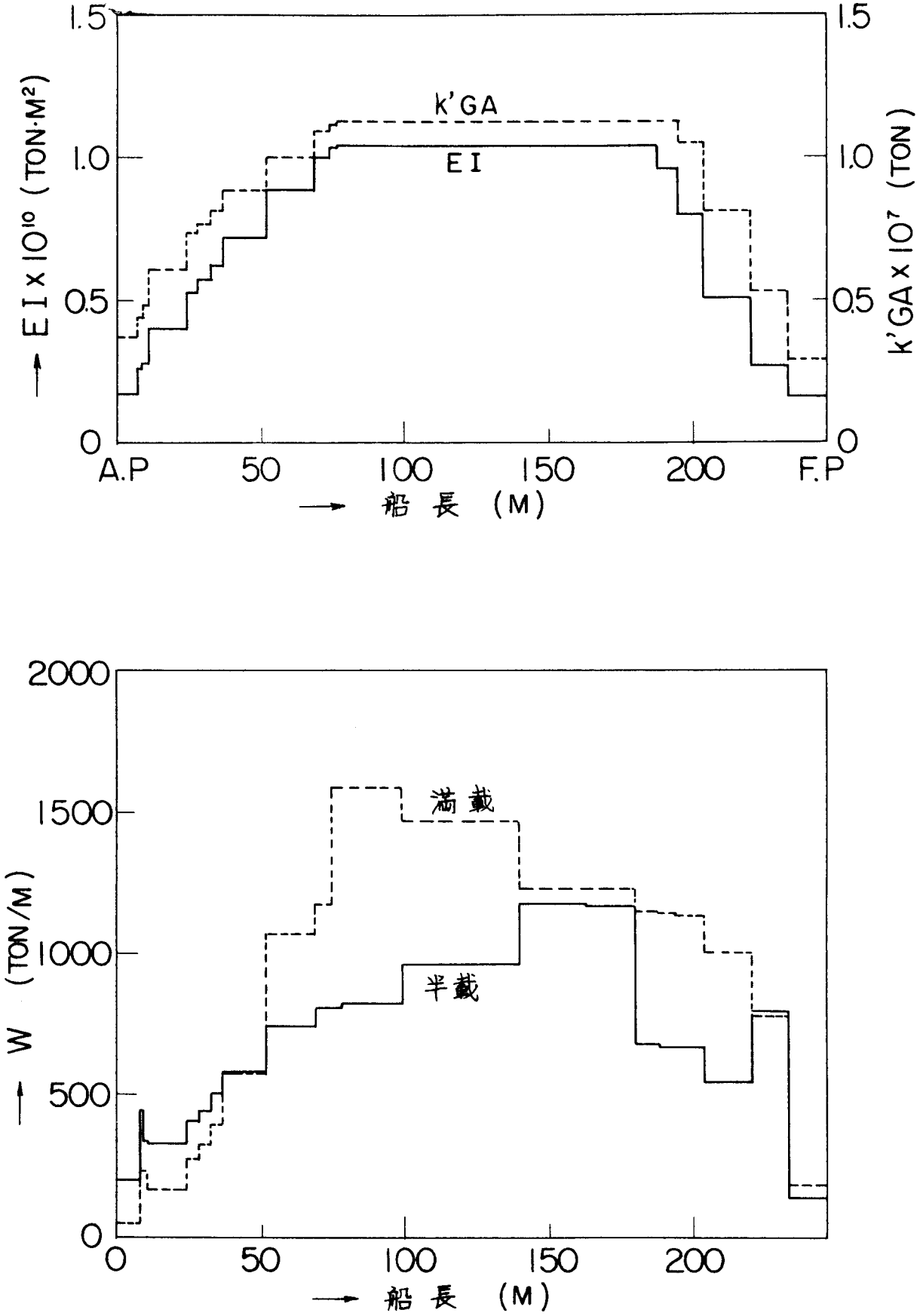


図1.15　A船の Input Data

3.2.2 電子計算機による計算結果

理論計算はFinite Element Method および Transfer Matrix Method について行ない、transfer matrix を求める際の項数近似は8項まで考慮した。梁要素の分割数はA，B船、23分割、C船22分割であり、図1.9より、Transfer Matrix Method による精度は計算対象とした12節まで1%程度内の誤差で求められることが推定される。一方Finite Element Method による計算結果は図1.10より明らかなように transfer matrix の展開項数4～5項に相当しておりTransfer Matrix Method より精度が悪い。

両方法による計算結果を表1.9および表1.10に示す。

表1.9 Transfer Matrix Method による船体上下固有振動数の計算結果

（単位 cpm）

船名 / 状態 / 節数	A		B		C	
	半載	満載	半載	満載	半載	満載
2	43.2	42.1	46.2	41.2		35.0
3	88.7	84.6	94.4	82.6		74.1
4	139.1	127.0	143.5	121.5		116.3
5	187.4	170.0	191.6	163.1		156.3
6	235.2	209.8	239.8	208.8		195.8
7	281.6	256.2	287.5	240.6		235.3
8	339.0	304.1	334.7	289.5		276.3
9	387.7	352.6	381.1	324.2		311.9
10	440.4	397.6	425.9	363.1		349.6
11	499.5	444.2	469.6	400.1		389.6
12	550.9	494.6	513.0	435.4		430.9

表1.10　Finite Element Method による船体上下固有振動数の計算結果

（単位　cpm）

節数＼船名・状態	A 半載	A 満載	B 半載	B 満載	C 半載	C 満載
2	43.3	42.1	46.3	41.2		35.0
3	88.7	84.4	94.6	82.9		74.3
4	143.7	130.8	144.3	122.2		117.0
5	190.2	175.5	193.5	165.4		159.1
6	248.3	220.1	244.1	213.1		200.3
7	286.5	267.4	294.7	249.7		246.8
8	356.6	305.7	341.1	291.7		283.5
9	403.2	364.6	394.6	333.3		327.4
10	465.3	403.7	450.5	381.7		354.7
11	520.0	461.0	493.4	416.6		433.1
12	571.9	556.7	534.1	442.0		478.5

船体縦固有振動数のTransfer Matrix Method による計算結果を表1.11に示す。

表1.11　Transfer Matrix Method による船体縦固有振動数の計算結果

（単位　cpm）

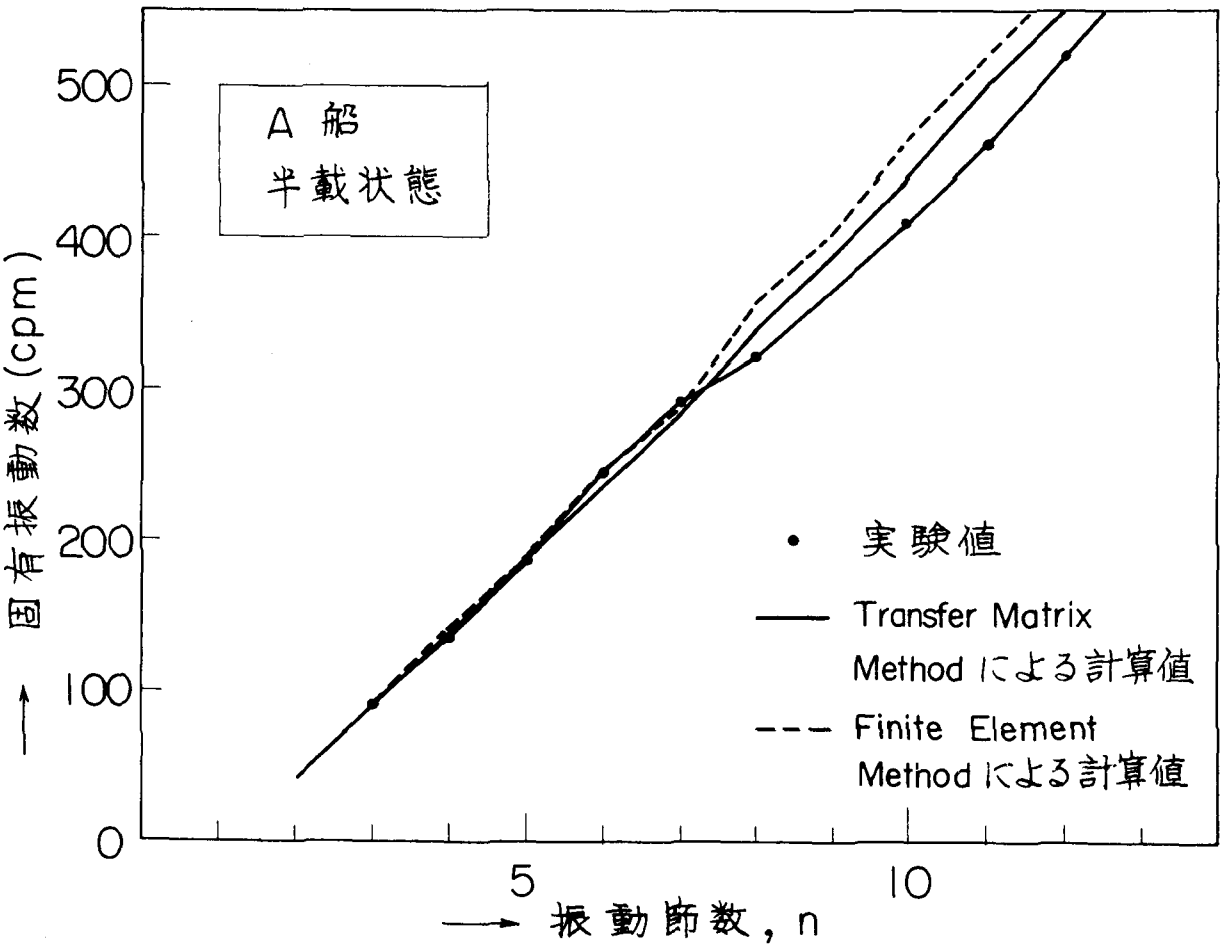
節数＼船名・状態	A 半載	A 満載	B 半載	B 満載	C 半載	C 満載
1	284.9	221.7	316.2	(259.3)* 217.5		189.1
2	482.3	391.1	599.5	(515.5) 443.3		354.2
3	681.8	597.4		(739.7) 638.6		508.3

＊括弧はBallast Water の有効重量を考慮して計算した値

3.3　実験値と計算値との比較および検討

3.3.1　船体上下振動

電子計算機による計算値と実験値の比較を図1.16、図1.17および図1.18に示す。計算法はTransfer Matrix Method および Finite Element Method によるものであるが、後者は前者より幾分高く求められている。この両者の差がFinite Element Methodの計算誤差を示すものである。



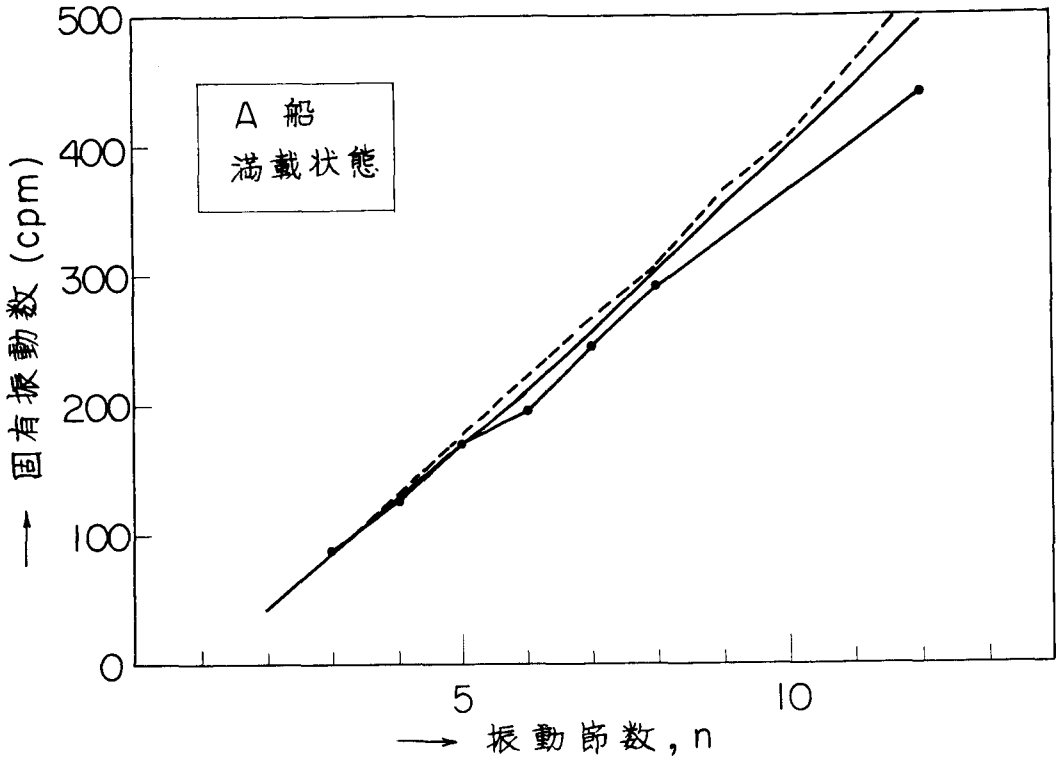
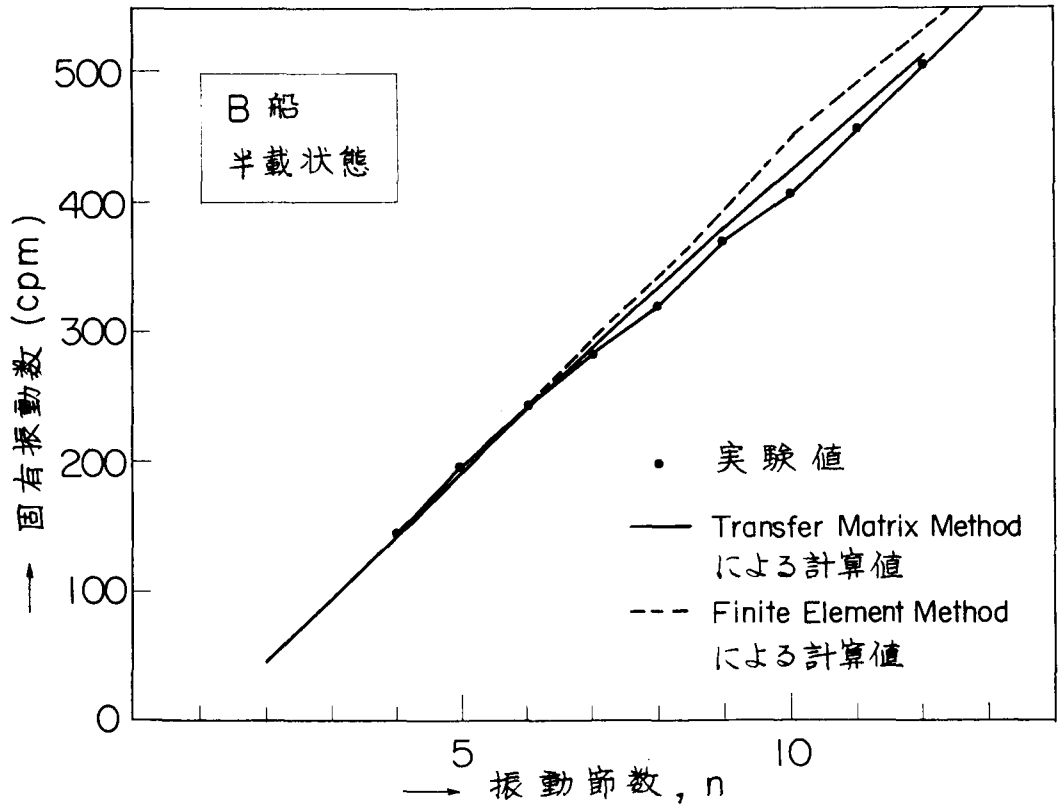


図1.16　計算値と実験値の比較（A船）



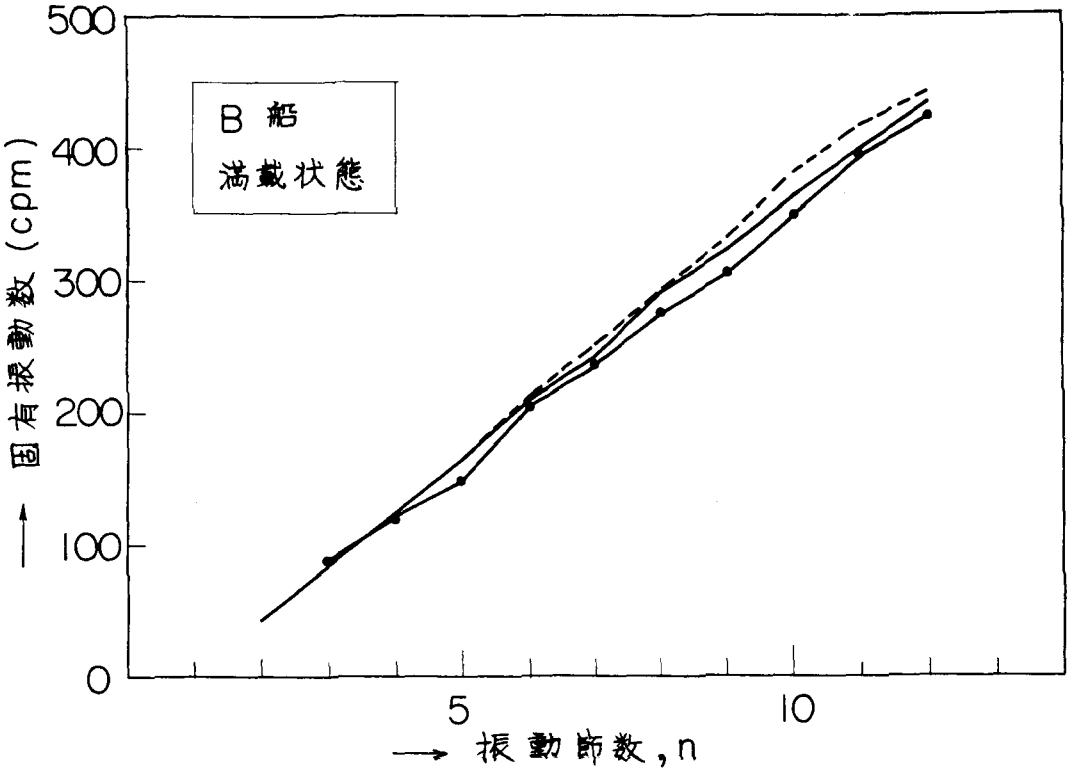


図1.17　計算値と実験値の比較（B船）

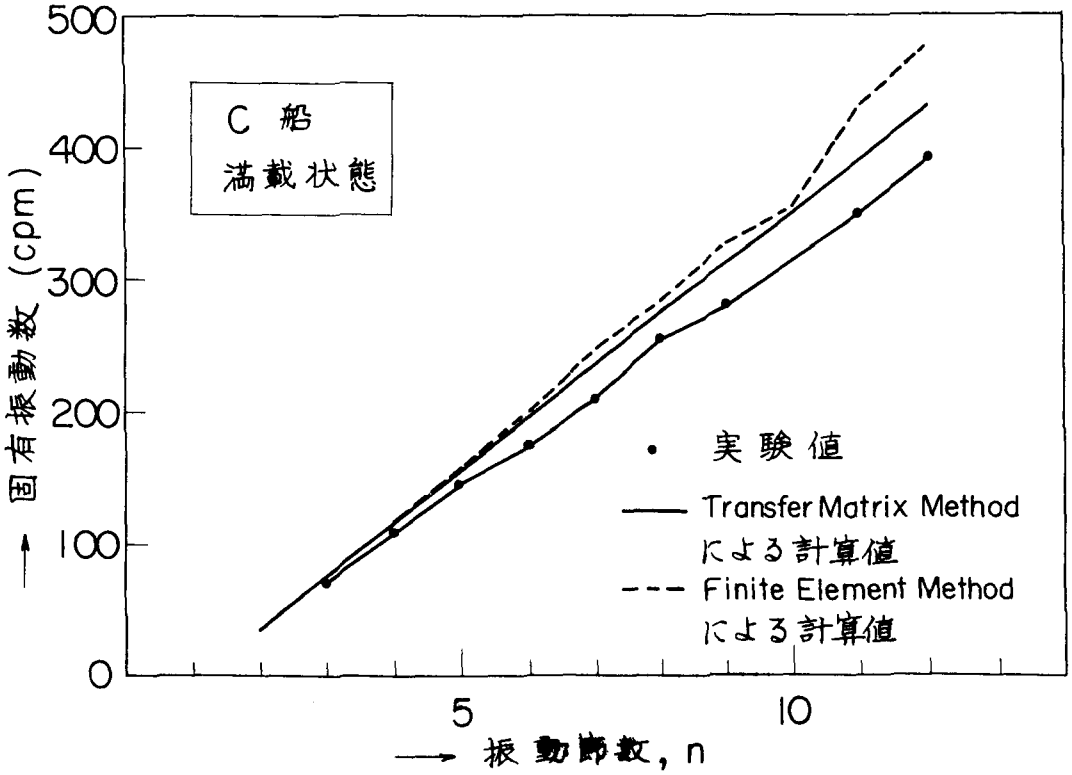


図1.18　計算値と実験値の比較（C船）

A船、B船においては計算値と実験値はほぼ１０節まで実用上十分な精度で求められている。C船においては計算値は実験値よりかなり低く求められている。計算値と実験値との比と節数の関係を図1.１９に示す。DW７４０００TON，O／B／O Carrier B船においては殆んど節数の増加とともに傾向的な変化は見当らないがDW１０７０００TONおよびDW１２８０００TONのOil tanker A船およびC船では節数の増加とともに実験値は計算値より低くなる傾向を示している。ことにC船ではその傾向がいちぢるしく、船体の巨大化にともなつてその低下率は大きくなるということが出来る。

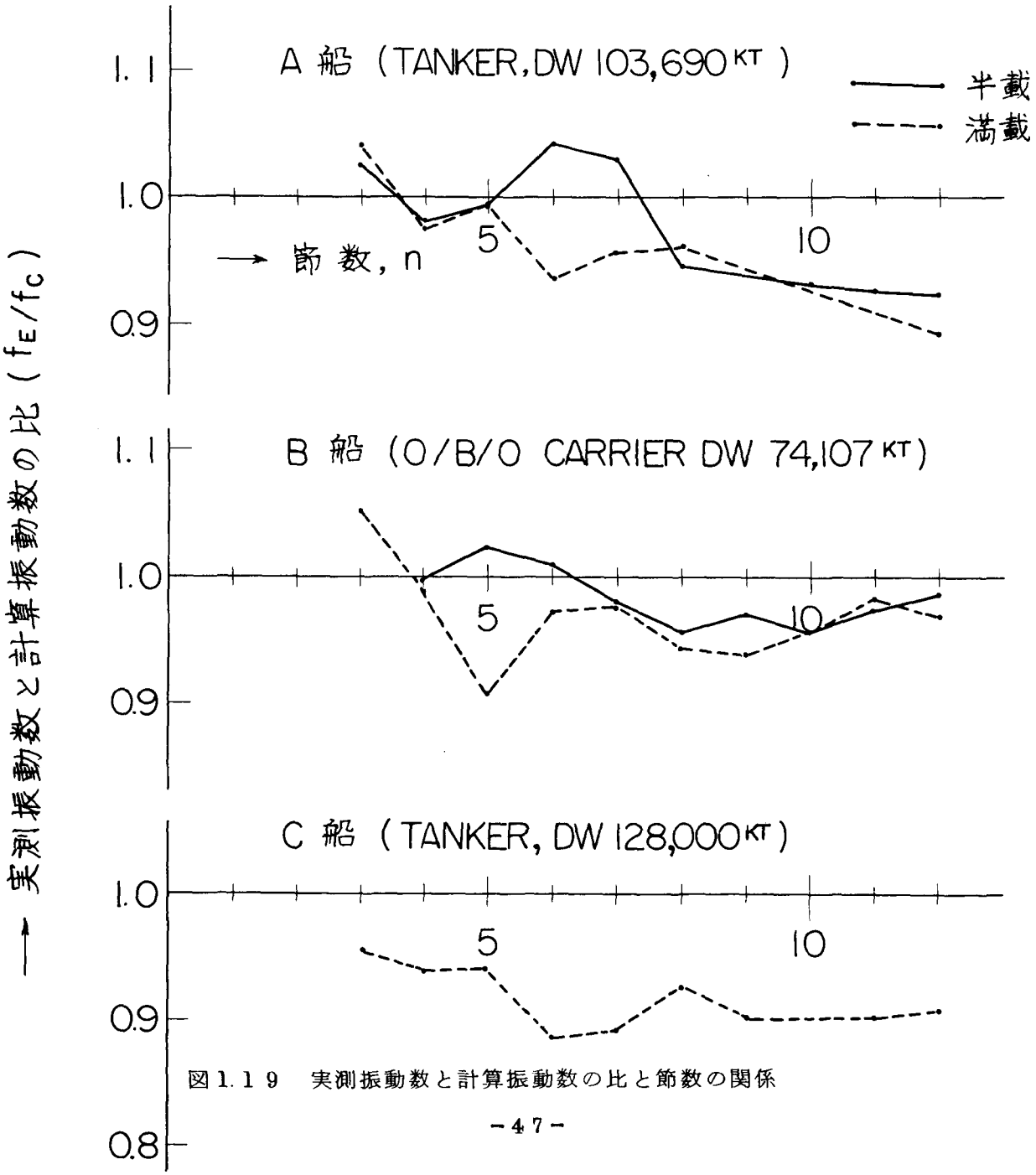


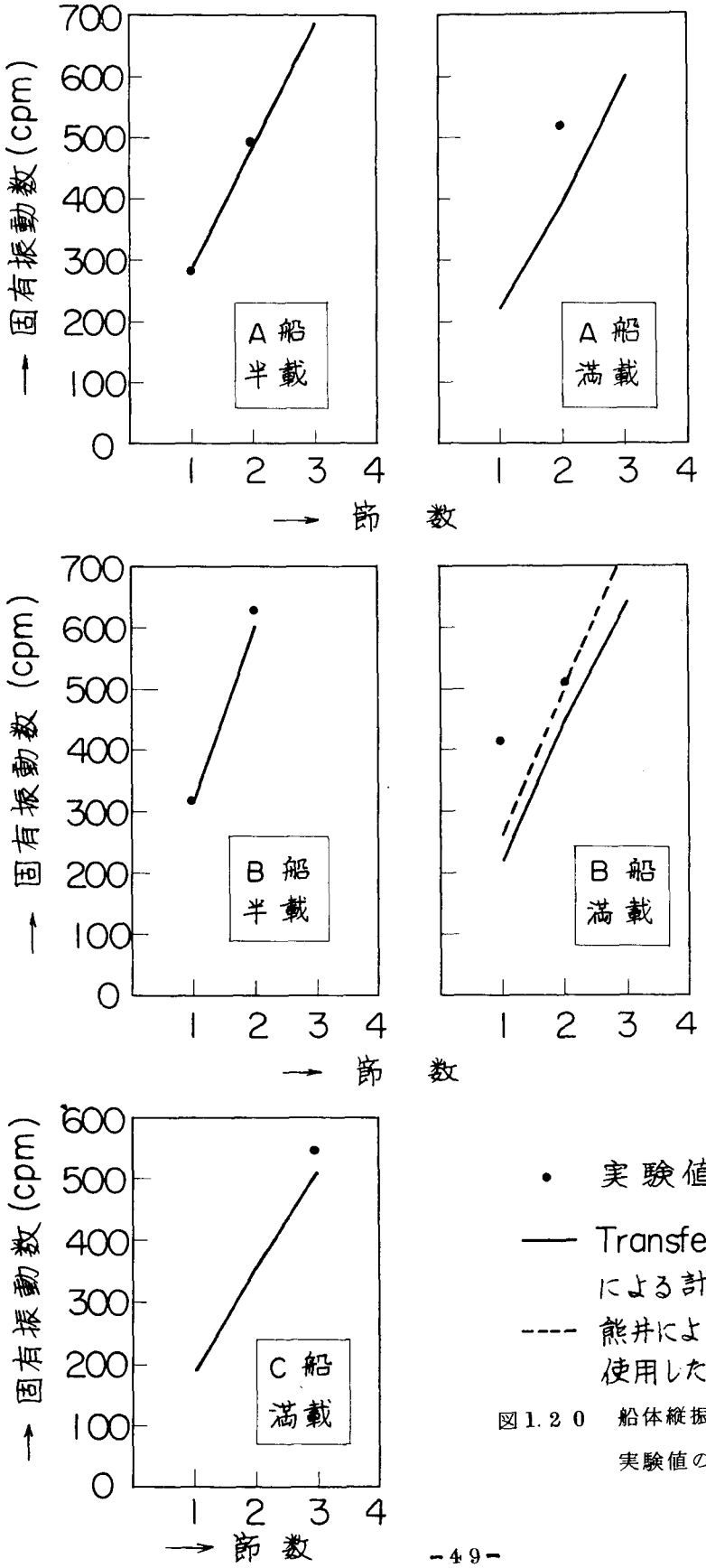
図1.１９　実測振動数と計算振動数の比と節数の関係

日本造船研究協会第９４部会では系統的な実船実験を実施し電子計算機による計算結果と比較しているが、一般に高次振動になれば実験値は梁理論による計算値より低く求められ、梁理論の船体振動解析への適用はせいぜい７，8.節までと結論されている。本実験結果からも同様な結論が裏付けされるものと思われる。

本船体振動実験では振動モードの計測はすべてSide Shell の片舷の位置においてのみ行なわれており断面変形の状態は確かめられていないが、三菱長崎において実施された１５万トン油送船の計測結果では上甲板Side Shell の位置とLongi Bhd の位置で同時計測がなされ、7.8節以上では殆んど異なつたモードを示すことが確かめられている。

3.3.2 船体縦振動

Transfer Matrix Method による計算値と実験値の比較を図1.２０に示す。半載状態において計算値は実験値とよく一致しているが満載状態においては実験値は計算値より高く求められている。これは主に、荷油重量の水平方向の振動に対する有効度を１００％としたため重量が過大評価になつたためと思われる。



• 実験値

—— Transfer Matrix Method による計算値

---- 熊井による有効振動重量を使用した場合の計算値

図1.20 船体縦振動の計算と実験値の比較

第4章　船体振動の応答の計算法

4.1　船体上下振動の応答の計算法

まず減衰を考慮した船体上下振動の運動方程式を導く。船体が曲げ振動をする時、周囲の水との摩擦によつて生じる外部減衰として、船体上下変位に比例する減衰力および船体断面の回転角速度に比例する減衰モーメントを考慮すればそれぞれ次式で表わされる。

$$R_1 = \xi_1 \frac{\partial y}{\partial t} \qquad (1.60)$$

$$R_2 = \xi_2 \frac{\partial \beta}{\partial t}$$

ここに、ξ_1：船体上下変位速度に比例する減衰力の外部減衰係数．単位 ton•m/sec.

ξ_2：船体断面の回転角速度に比例する減衰モーメントの外部減衰係数、単位 ton•m•sec

これらの減衰力およびモーメントを考慮すれば図1.21に示した力およびモーメントの平衡より、時間を変数分離して次の運動方程式が求められる。

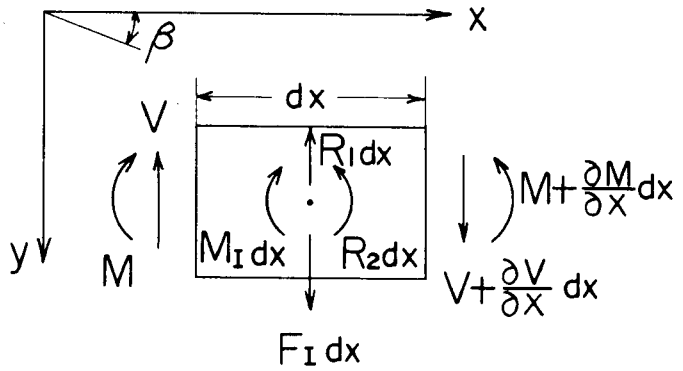


図1.21　梁要素の力およびモーメントの平衡

$$(\mu\omega^2 - i\,\xi_1\omega)\,y + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad (1.61)$$

$$(-I_m\,\omega^2 + i\,\xi_2\omega)\,\beta + \frac{\partial M}{\partial x} = V$$

一方、材料の内部減衰力として曲げ変形にもとづくnormal strainの直接粘性および剪断変形にもとづくshearing strain の剪断粘性を考慮すれば、内部減衰を考慮した曲げモーメントおよび剪断力は次式で与えられる。

$$M = -EI\left(1+\xi_B \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{d\beta}{dx} \qquad (1.62)$$

$$V = k'AG\left(1+\xi_S \frac{\partial}{\partial t}\right)\gamma$$

(1.62)式で表わされる曲げモーメントおよび剪断力を時間で変数分離した後(1.61)式で表わされる基礎運動方程式をmatrixを使つた微分方程式の形で表わせば次のように求められる。

$$\frac{d\mathbf{Z}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{Z} \qquad (1.63)$$

ここに、

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dfrac{1}{k'AG(1+i\xi_S\omega)} \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{EI(1+i\xi_B\omega)} & 0 \\ 0 & (Im\omega^2 - i\xi_2\omega) & 0 & 1 \\ -(\mu\omega^2 - i\xi_1\omega) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

減衰を考慮する場合、state vector $\mathbf{Z}$ およびmatrix $\mathbf{A}$ の要素は複素数となるが電子計算機による計算では実数の計算と同様に行なう事が出来るので特に困難は生じない。以後現われるtransfer matrix およびその他の諸量も一般には複素数となるが特にその事を断わらない。

(1.63)式を解けばtransfer matrix は次のように求められる。

$$H = e^{\mathbf{A}\ell} = \mathbf{I}_4 + \mathbf{A}\ell + \frac{(\mathbf{A}\ell)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{A}\ell)^3}{3!} + \cdots\cdots \qquad (1.64)$$

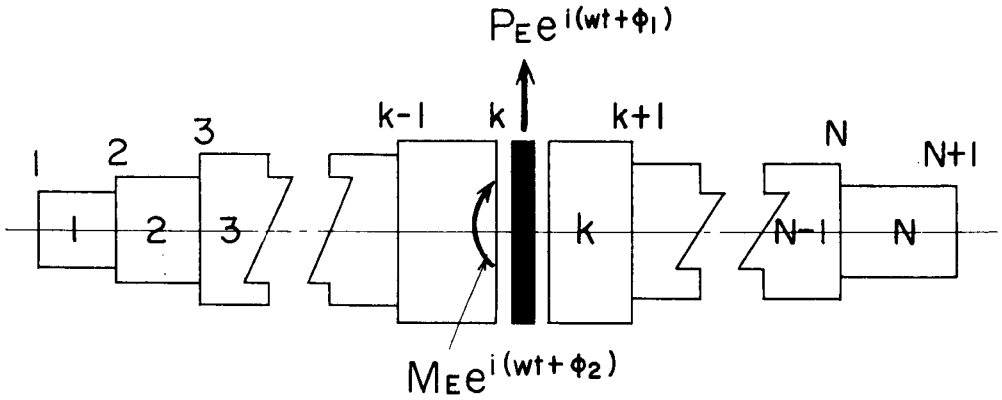


図1.22　変断面梁に働く起振力および起振モーメント

今、図1.22に示したように梁の任意の境界断面kにおいて起振力 $P_E e^{i(\omega t+\phi_1)}$ および起振モーメント $M_E e^{i(\omega t+\phi_2)}$ が作用するものとする。

N個の均一梁においてそれぞれ次に示すstate vector と transfer matrixの関係が成立する。

$$Z_{i+1} = H_i \, Z_i \qquad (1.65)$$

$$(i = 1., 2., 3, \cdots\cdots N)$$

ただし、図1.22に示したようにk断面において起振力およびモーメントが作用するものとすれば、(1.65)式において $i = k$ および $i = k-1$ のときに現われるstate vector Z_k の値は連続しない。これを区別するために右肩にsuffixをつけ、Z_k^L および Z_k^R で表わす事にする。

今、起振力およびモーメントの働いているk断面において、仮空の剛体部を考えk断面の連続条件に関係する Z_k^R および Z_k^L との関係を求める。図1.23に示した力およびモーメントの平衡より起振点において次の関係が成立する。

$$M_k^L = M_{k-1}^R + M_E e^{i(\omega t+\phi_2)}$$

$$V_k^L = V_{k-1}^R + P_E e^{i(\omega t+\phi_1)}$$

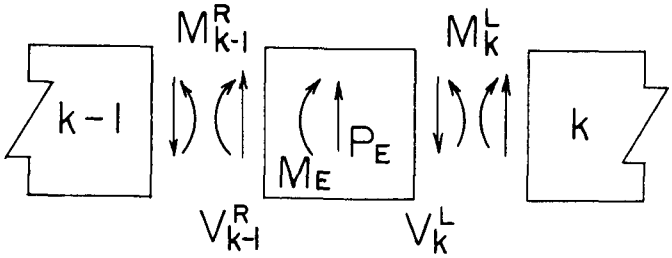


図1.23　起振点における力およびモーメントの平衡

上式より時間を変数分離し、両側のstate vector の連続条件を求めれば次のようになる。

$$Z^L_k = Z^R_k + P \qquad (1.66)$$

ここに、　$P = \{0, 0, M_E e^{i\phi_2}, P_E e^{i\phi_1}\}$

(1.65)式および(1.66)式より順次代入して行けば、中間のstate vector は次のように表わされる。

$$Z_i = H_i \cdot H_{i-1} \cdots\cdots H_1 \cdot Z_1$$

$$= \left[\prod_{j=1}^{i} H_j\right] \cdot Z_1 = {}_1Q_i \cdot Z_1$$

$$(i = 1, 2, 3 \cdots\cdots, k-1) \qquad (1.67)$$

$$Z_i = {}_1Q_i \cdot Z_1 + {}_kQ_i \cdot P$$

$$(i = k, k+1 \cdots\cdots, N)$$

(1.67)式において $i = N$ とおけば全梁の両端のstate vector だけを含む関係式が次のように求められる。

$$Z_N = {}_1Q_N \cdot Z_1 + {}_kQ_N \cdot P \qquad (1.68)$$

両端のstate vector は両端自由の境界条件を考慮すれば次のように表わされる。

$$Z_1 = \{y_1, \beta_1, 0, 0\}$$

$$Z_N = \{y_N, \beta_N, 0, 0\} \qquad (1.69)$$

（1.69）式は4つの未知数を含んでいる。この未知数は（1.68）式で表わされる4つの方程式によつて完全に決定される。即ち、そのうちy_1, β_1は

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = -\,{}_1Q_N(2,1)^{-1} \cdot {}_kQ_N(2,2) \cdot \begin{bmatrix} M_E e^{i\phi_2} \\ P_E e^{i\phi_1} \end{bmatrix}$$

ここに、　${}_1Q_N(2,1)$：${}_1Q_N$ matrixの左下の1／4部分matrix

${}_kQ_N(2,2)$：${}_kQ_N$ matrixの右下の1／4部分matrix

となり、始端のstate vector Z_1 は次のように表わされる。

$$Z_1^R = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -{}_1Q_N(2,1)^{-1} \cdot {}_kQ_N(2,2) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \cdot P \qquad (1.70)$$

（1.70）式を（1.67）式に代入することによつて船体の各点におけるstate vector が計算される事になる。

4.2　船体縦および振り振動の応答の計算法

前節と同様な考えにもとづき外部および内部減衰を考慮した船体縦および振り振動の運動方程式は次のように求められる。

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} + \frac{\mu\omega^2 - iC_L\omega}{AE(1+i\xi_L\omega)} \cdot \mu = 0$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{I_p\omega^2 - iC_T\omega}{GJ(1+i\xi_T\omega)} \cdot \phi = 0 \qquad (1.71)$$

ここに、G_L, C_T：縦および振り振動の外部減衰係数

ξ_L, ξ_T：縦および振り振動の内部減衰係数

（1.71）式で表わされる微分方程式を解き解析的に transfer matrix を求めれば次のようになる。

$$H_L = \begin{bmatrix} \cos n_L\ell & \sin n_L\ell/\overline{AE}\,n_L \\ -\overline{AE}\,n_L \sin n_L\ell & \cos n_L\ell \end{bmatrix}$$

$$H_T = \begin{bmatrix} \cos n_T\ell & \sin n_T\ell/\overline{GJ}\,n_T \\ -\overline{GJ}\,n_T \sin n_T\ell & \cos n_T\ell \end{bmatrix} \qquad (1.72)$$

ここに、 H_L , H_T : 船体縦および捩り振動の transfer matrix

$$\overline{AE} = AE(1+i\xi_L\omega)$$

$$\overline{GJ} = GJ(1+i\xi_T\omega)$$

$$n_L^2 = \frac{\mu\omega^2 - iC_L\omega}{AE(1+i\xi_L\omega)}$$

$$n_T^2 = \frac{I_p\omega^2 - iC_T\omega}{GJ(1+i\xi_T\omega)}$$

減衰を考慮した transfer matrix は各要素が複素数になるだけで同様に取り扱う事が出来る。以後の強制振動の計算は前節と同様に行なうことが出来る。

4.3 船体振動応答の計算例

船体振動の応答の計算は起振外力の大きさの推定と減衰係数のバラツキのために実験値と良好な一致を示さないのが普通である。第3章において述べた実験供試船のうち、B船の Ballast Condition における船体縦振動の応答を4.2に述べた方法にもとづき計算を行なつた。また実験は船尾上甲板中心線上に設置した起振機により前後方向の起振を行ない、上甲板船首尾において振動加速度を計測した。本章ではこれらの実験値と計算値の比較を行なう。

まず減衰を考慮しない場合の計算例を図1.24に示す。この場合、計算結果では250～650 cpmの間に縦振動1次および2次の固有振動数に相当する peak が求められているが、実験では1次の固有振動数のみ明瞭に現われている。 またこの2つの peak の中間においては実験値が一般に計算値より大きく求められており、他にいくつかの peak が計測されている。これは起振機の位置および計測点の位置がいずれも上甲板上にあり、中性軸からはずれているため、船体上下振動との連成効果によるものと思われる。〔19〕

減衰を考慮した場合の計算では内部減衰 ξ_L および外部減衰 C_L の両者の値を推定する必要があるが、この値の評価に対する信頼性が少ないため、ここでは両者を同時に用いないで近似的にどちらか一方を無視し残りの一つの減衰係数に代表させ、実験係数的にどの程度の値になるかを調査した。

まず外部減衰のみを考慮した場合は C_L = const として減衰を与えるよりは従来よく用いられるように振動数に比例した減衰係数を採用すれば、実験値の傾向とよく一致した応答曲

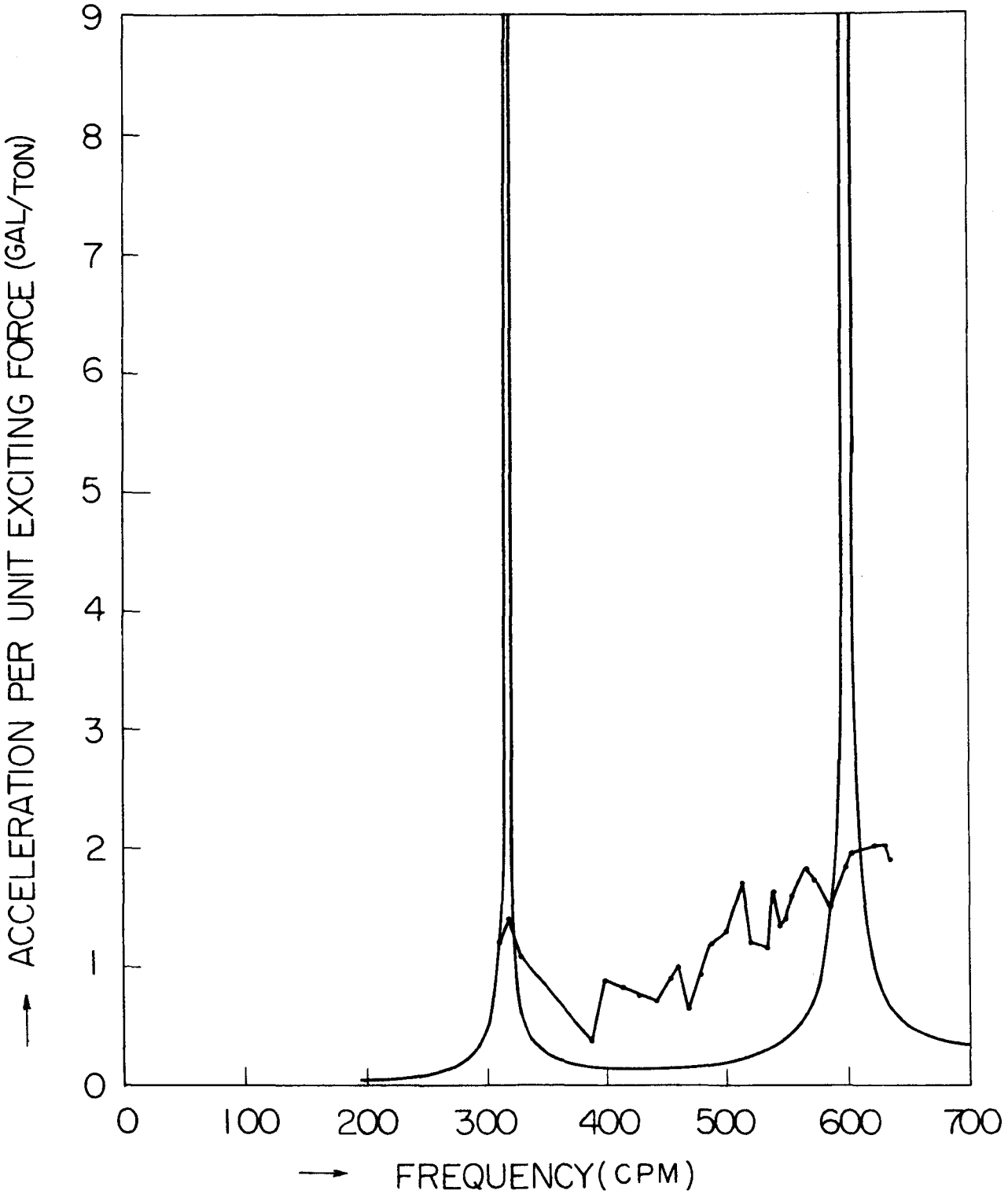


図1.24　船体縦振動の実測と計算共振曲線の比較

（無減衰の場合）

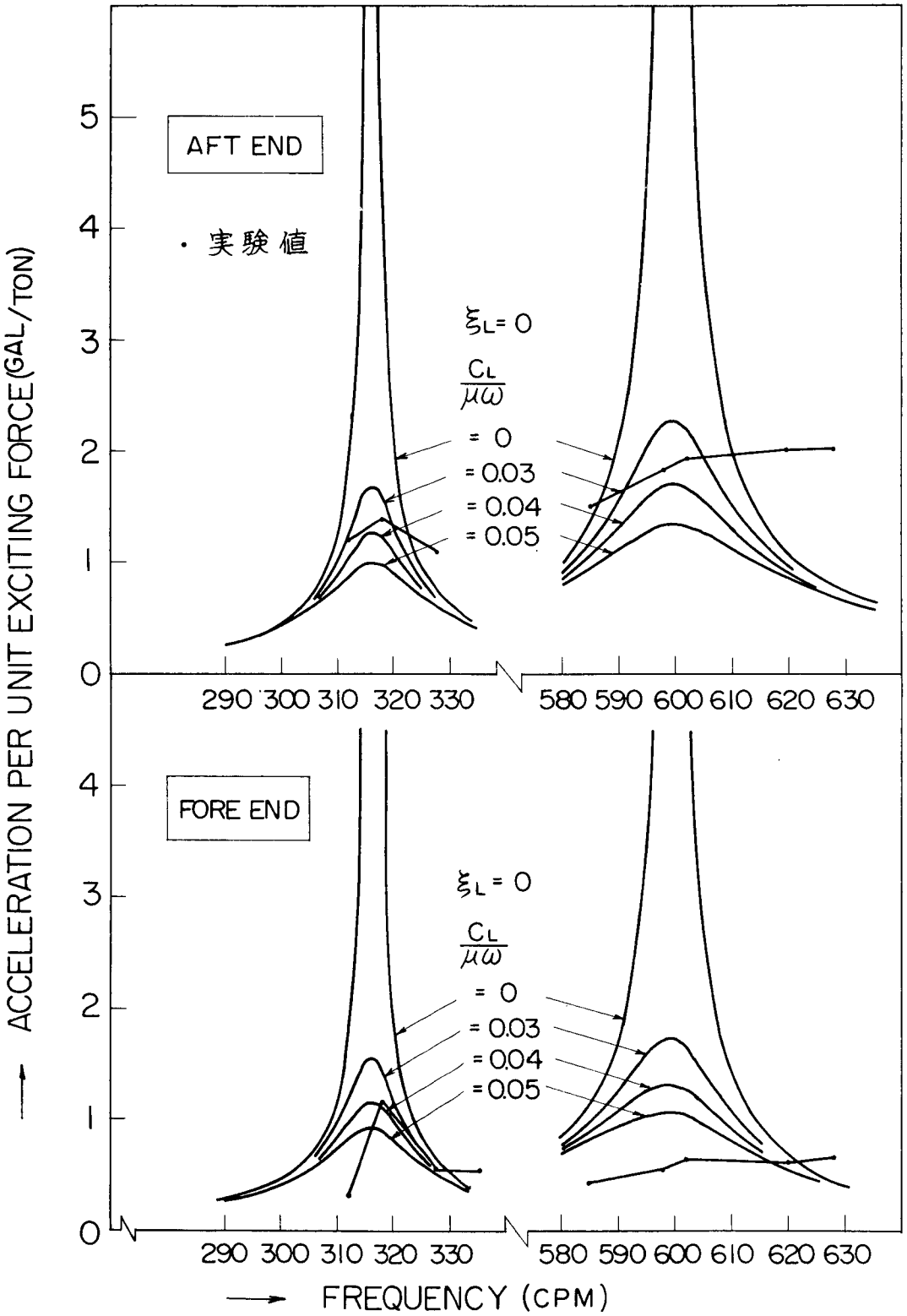


図1.25　船体縦振動の実測と計算共振曲線の比較

（外部減衰のみ考慮した場合）

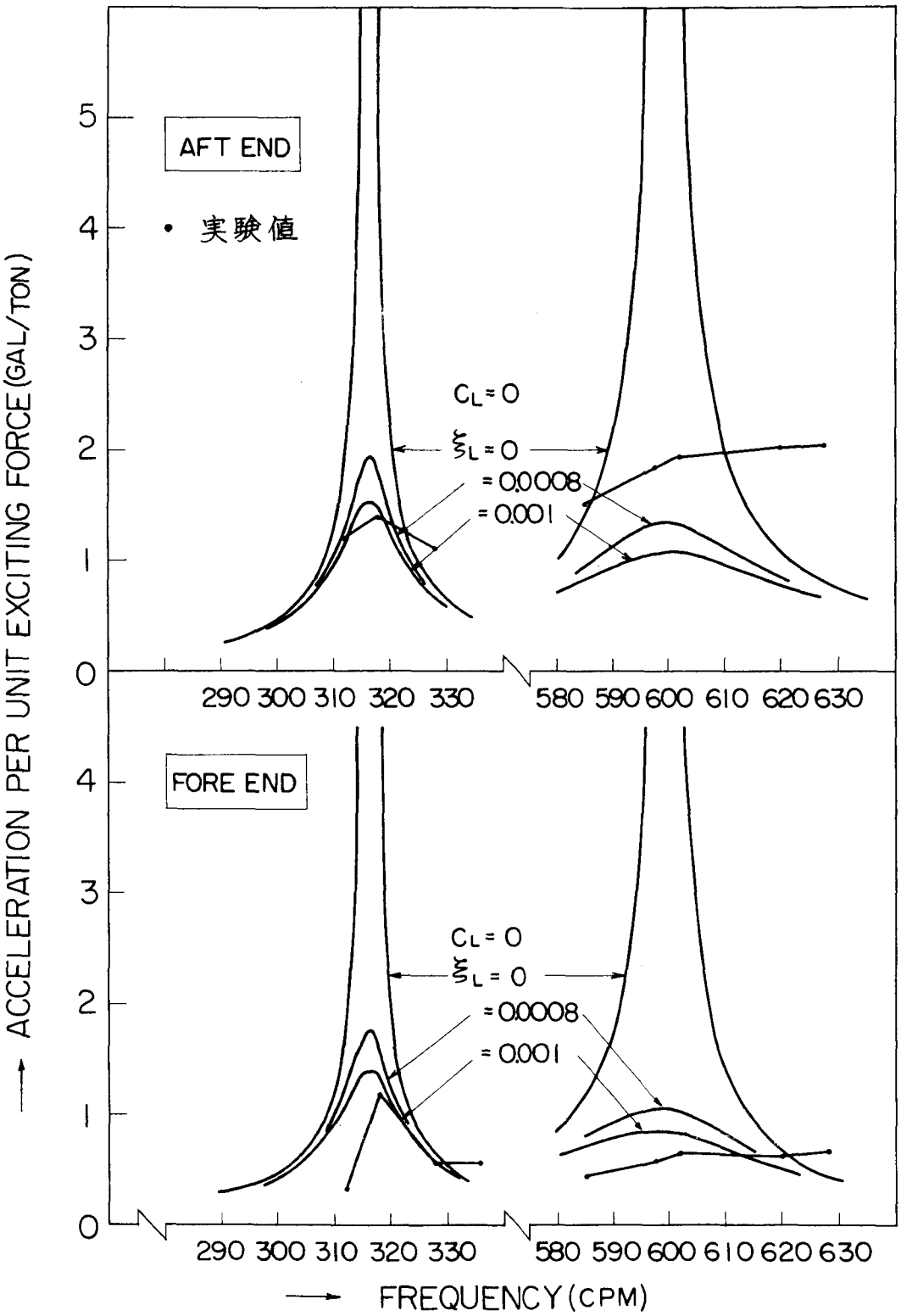


図 1.2 6　船体縦振動の実測と計算共振曲線の比較

（内部減衰のみ考慮した場合）

線が得られることがわかつたので $\frac{C_L}{\beta\omega}$ ＝const とおき計算を行なつた。
計算結果を図1.25に示す。この場合$\frac{C_L}{\mu\omega}$＝0.035程度を採用した応答曲線はほぼ実験結果のpeakの大きさに等しい。この値はMcGoldrick〔20〕によつて求められた船体上下振動に対する減衰係数とほぼ同程度の値であり、船体縦振動の場合にもこの値はかなり妥当な実験修正係数的な応答の計算値を与えるものと思われる。

次に、外部減衰を無視し内部減衰ξ_Lのみを考慮した場合の計算結果を図1.26に示す。この場合ほぼ次の値をとつたときが実験値と良好な一致を示すことがわかる。

$$\xi_L = 0.001$$

第5章　結　言

本編においては船体主構造を1本の梁と見なし船体振動を解析する理論計算法およびその適用性について述べた。

第2章においては変断面梁の振動の理論解析の一般的方法について述べ電子計算機による船体振動解析に適した方法としてMyklestad-Prohl Method, Transfer Matrix Methodおよび Finite Element Methodの3つの解法を取り上げ、計算精度におよぼす梁の分割数等の種々の影響を検討し、船体振動への適用性を考察した。特にFinite Element Methodでは梁の曲げおよび剪断変形を考慮したstiffness matrixおよび回転慣性モーメントによるmass matrixを新しく求めた。また従来の lumped massの取り扱いとの比較も行なつた。Transfer Matrix Method では transfer matrixが解析的に導かれる場合には梁としての取り扱いでは正解を与えるものであるが、近似的な解法として transfer matrix をTaylor展開により最初の有限項を近似的に採用する場合にはその項数近似のために精度が悪くなる。このような項数近似による方法と他の方法との相互関係を考察するとともに精度の検討を行なつた。これより得られた結論をまとめれば次のようになる。

(1) Transfer Matrix Method を使用して8節までの固有振動数を1%以内の誤差範囲で求めるためには梁要素20分割では項数近似6項，40分割程度では4項近似で十分である。

(2) Finite Element Methodによる計算精度は曲げ振動のみの場合、Transfer Matrix Methodの項数近似8項以上剪断変形も考慮する場合には項数近似4，5項程度に相当する。

(3) Finite Element Methodによる解は必ず正解の上界を与えるが lumped massを使用する場合(Myklestad-Prohl Method) ではこのような保証はない。

(4) 船体上下振動の8節程度までの固有振動数の計算ではFinite Element Methodでも Transfer Matrix Method でも精度的には十分正確に求められFinite Element Method の方がprogramingが簡単で計算時間も早いがTransfer Matrix Methodより少し精度は劣る。

第3章においては日立造船㈱において実施された実船実験3隻について計算値と実験値との比較検討を行なつた。これより得られた結論は次の通りである。

(5) 電子計算機による計算値は船体低次振動においてよく一致するが高次振動になるにつれ、

実験値は計算値より低くなりこの傾向は船体が巨大化するにつれていちぢるしくなる。

(6) 船体振動が梁理論に従がい解析されるのはせいぜい7，8節程度まででそれ以上は船体をもつと複雑なモデル化が必要である。

(7) 船体縦振動の計算値は半載状態においてはよい一致を示すが満載状態においては実験値は計算値より高く求められている。これは荷油の有効重量によるものと思われる。

第4章においてはTransfer Matrix Method による船体振動の応答の計算法について述べた。この計算を行なうためには、船体に作用する減衰力および起振力の大きさを知る必要があるがその評価には未知な点が多いので一般に実験と理論とはよい一致を示さないものと思われる。船体縦振動の応答の計算値と実験値との比較結果より次のことがわかつた。

(8) 外部減衰力のみを考慮して

$$\frac{C_L}{\mu\omega} = 0.035$$

の値を採用した時実験より得られたpeak の大きさとよく一致した応答を示す。

第2編　流体中の弾性体の振動理論

第1章　緒　言

船体振動の解析における流体の影響は従来付加水質量効果として考慮されている。船体形状は簡単な数学表示が困難であり、船体高次振動や巨大船の複雑な振動モデルに対する付加水質量の評価にはこれまでの数字モデルによる解析解の適用には限界が生じている。本編ではこのような不備を解消する新しい方法として最近電子計算機の発達とともに著しく発展して来た有限要素法を流体問題に応用する理論について検討する。

第2章では流体中で振動する物体に動く動圧力の有限要素法による一般的計算法およびその適用性について検討を行なう。

第3章では船体振動における三次元付加水質量を計算するために有限要素法により計算された動圧力を使用して船体振動の付加水質量を計算する方法について述べる。

第4章ではさらにこの理論を発展させ、流体の影響を代表する付加水質量の概念から離れ流体と弾性体との連成振動として弾性体の振動を解く一般振動理論について述べる。

第2章　有限要素法による流体動圧力の計算法

2.1　完全流体非回転運動に対する有限要素法の一般的原理

2.2.1　基礎変分式

いま、二次元流体領域において、物体が周期運動をするとき、流体領域において生ずるエネルギについて考える。

流体中の流れは周期的に変動するものとし、時間に関して変数分離したとき流体領域の運動エネルギは動圧力を使つて次式で与えられる。

$$\int T\,dt = \frac{1}{2}\int_V \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2\right] dV \qquad (2.1)$$

また、圧縮性のため流体領域に生ずる内部エネルギは

$$\int U\,dt = \left[-\frac{\rho\omega^2}{2K}\int_V p^2 dV\right] \qquad (2.2)$$

ここに、ρ：流体の密度

K：体積弾性率

であり、一方、振動により物体がなす仕事は

$$\int V\,dt = \int_A \rho A_n p\,dA \qquad (2.3)$$

で表わされる。

(2.1)式、(2.2)式および(2.3)式で表わされるエネルギはHamiltonの原理より次の量に極値を与えるような解を求める問題となる。

$$\chi = \int_{t_0}^{t} (T-U-V)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \left\{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2\right\} dV - \frac{\rho\omega^2}{2K}\int_V p^2 dV$$

$$- \int_A \rho A_n\, p\,dA \qquad (2.4)$$

ここに、Vは流体全域にわたる積分を意味し、Aは振動する物体面にわたる積分を意味する。

2.1.2 有限要素法による一般的原理

有限要素法による解法では最初に（2.4）式で表わされている積分領域を多くの有限要素に分割し、それらの有限要素の集合体として流体領域が構成されているものと考える。いま、全流体領域をN個の有限要素に分割したとすると、（2.4）式の積分は次に示すsummationの形で書き表わされる。

$$\chi = \sum_{i=1}^{N} ({}_F\chi_i^e - {}_U\chi_i^e) - \sum_{i=1}^{N_B} {}_B\chi_i^f \qquad (2.5)$$

ここに、 ${}_F\chi_i^e = \frac{1}{2}\int_{V_i^e} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2 \right] dV_i^e$

$${}_U\chi_i^e = \frac{\rho\omega^2}{2K}\int_{V_i^e} p^2 dV_i^e$$

$${}_B\chi_i^f = \rho\int_{A_i^f} A_n p\, dA_i^f$$

V_i^e ＝ i 番目の有限要素の体積

A_i^f ＝ i 番目の物体境界をなす有限要素の面積

N_B ＝N個の有限要素のうちその1面が物体境界面となつている有限要素の面の数

次に、各々の有限要素内において動圧力が有限要素の頂点（以後これを接点と呼ぶ）の動圧力の値を未知数として仮定される。したがつて全流体領域を構成するN個の有限要素の接点の数をM個とすれば、汎関係 χ はM個の未知数、P_i （$i = 1, 2, \cdots M$）を使つて書き表わされることになる。したがつて χ に極値を与える条件として次式を得る。

$$\frac{\partial \chi}{\partial p_K} = 0 \quad , \quad (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ M) \qquad (2.6)$$

このM個の方程式はvectorの形で次のように書く。

$$\left\{ \frac{\partial \chi}{\partial p_K} \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial p_1} \\ \frac{\partial \chi}{\partial p_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \chi}{\partial p_M} \end{Bmatrix} = 0 \qquad (2.7)$$

（2.5）式を（2.7）式に代入すれば次のようになる。

$$\sum_{i=1}^{N}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial_F\chi_i^e}{\partial p_1}\\ \dfrac{\partial_F\chi_i^e}{\partial p_2}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial_F\chi_i^e}{\partial p_M}\end{Bmatrix}-\sum_{i=1}^{N}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u\chi_i^e}{\partial p_1}\\ \dfrac{\partial u\chi_i^e}{\partial p_2}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial u\chi_i^e}{\partial p_M}\end{Bmatrix}=\sum_{i=1}^{N_B}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial_B\chi_i^f}{\partial p_1}\\ \dfrac{\partial_B\chi_i^f}{\partial p_1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial_B\chi_i^f}{\partial p_M}\end{Bmatrix} \qquad (2.8)$$

ある一つの有限要素に注目すれば χ_i^e は明らかにその有限要素を構成する接点における動圧力だけの関数であり、その他の接点の動圧力の値を含まない。このことはある有限要素における基礎matrixを導びいておけば、有限要素の数だけ、それらのcontributionを寄せ集めれば（2.8）式が求められることになる。${}_F\chi^e$，${}_U\chi^e$，${}_B\chi^e$ の基礎matrixは、一般に次のような形となる。

$$\left\{\frac{\partial_F\chi^e}{\partial p_k}\right\}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial_F\chi^e}{\partial p_i}\\ \dfrac{\partial_F\chi^e}{\partial p_j}\\ \dfrac{\partial_F\chi^e}{\partial p_m}\\ \dfrac{\partial_F\chi^e}{\partial p_p}\end{Bmatrix}=\mathbf{S}^e\begin{Bmatrix}p_i\\ p_j\\ p_m\\ p_p\end{Bmatrix} \qquad (2.9)$$

$$\left\{\frac{\partial_U\chi^e}{\partial p_k}\right\}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u\chi^e}{\partial p_i}\\ \dfrac{\partial u\chi^e}{\partial p_j}\\ \dfrac{\partial u\chi^e}{\partial p_m}\\ \dfrac{\partial u\chi^e}{\partial p_p}\end{Bmatrix}=\frac{\rho\omega^2}{K}\cdot\mathbf{C}^e\begin{Bmatrix}p_i\\ p_j\\ p_m\\ p_p\end{Bmatrix} \qquad (2.10)$$

ここに i，j，m，p：有限要素を構成する接点の添字

$$\left\{\frac{\partial_B\chi^f}{\partial p_k}\right\}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial_B\chi^f}{\partial p_i}\\ \dfrac{\partial_B\chi^f}{\partial p_j}\\ \dfrac{\partial_B\chi^f}{\partial p_m}\end{Bmatrix}=\mathbf{A}^f\begin{Bmatrix}A_i\\ A_j\\ A_m\end{Bmatrix} \qquad (2.11)$$

ここに、i，j，m：境界面に接した有限要素の一面の接点の添字

A_i ：i 境界接点の加速度

これらのmatrixの大きさは勿論、採用する有限要素の接点の数によつてかわる。またそれぞれのmatrixの名称は流体問題について取り扱う時、特に定められた名前がないのでここでは便査上次のように呼ぶことにする。

$\mathbf{S}^e$: fluid matrix(構造解析におけるstiffness matrixに相当する。)

$\mathbf{C}^e$: compressibility matrix

$\mathbf{A}^f$: boundary area matrix

(2.9)式,(2.10)式および(2.11)式を全有限要素にわたつて寄せ集めれば、(2.8)式は次の形となる。

$$\mathbf{S} \cdot \{p\} - \frac{\rho\omega^2}{K}\mathbf{C}\{p\} = \rho\mathbf{A}\{\dot{V}\} \qquad (2.12)$$

(2.12)式より

$$\{p\} = \rho\left[\mathbf{S} - \frac{\rho\omega^2}{K}\mathbf{C}\right]^{-1} \cdot \mathbf{A}\{\dot{V}\} \qquad (2.13)$$

非圧縮性流体と仮定すれば$\frac{\rho\omega^2}{K}\mathbf{C}=0$となる。$\{\dot{V}\}$を与えれば(2.13)式より動圧力分布$\{p\}$が求まる。

一般に圧縮性の影響を表わすcompressibility matrix は円振動数の関数となり$\{\dot{V}\}=0$のとき、(2.12)式はωに関する固有値方程式になる。この固有値は流体領域の固有振動数と呼ばれるものである。〔21〕

また、ここでは微少振動を対象としたためsurface wave の影響は無視したが、これによる項も振動数の関数となり、同様に波動による固有振動数が存在する。これらは共に物体の振動と関係なく流体のみの振動としての問題である。

2.2 基礎matrixの誘導

2.2.1 fluid matrix

(2.9)式で定義されるfluid matrix $\mathbf{S}^e$を誘導する。使用する有限要素は立体有限要素としては一番簡単な三角錐有限要素と直方体有限要素についてのべる。

三角錐有限要素はZienkiewicz〔22〕によつて導かれたものである。

(1) 三角錐有限要素

図2.1に示したような4つの頂点i, j, m, pを持つ三角錐有限要素について考える。

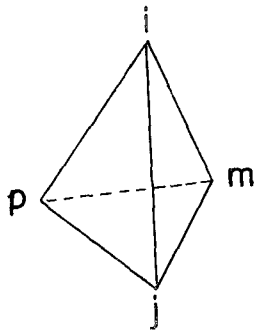


図 2.1　三角錐有限要素

いま、この有限要素内における動圧力 p の分布は三角錐の頂点の動圧力 p_i, p_j, p_m, p_p を未定定数として次のように仮定する。

$$p(x, y, z) = [N_i, N_j, N_m, N_p] \cdot \{p\}^e \qquad (2.14)$$

ここに、$\{p\}^e = \{p_i, p_j, p_m, p_p\}$

$$N_i = \frac{1}{6V}(a_i + b_i x + c_i y + d_i z)$$

$$N_j = \frac{1}{6V}(a_j + b_j x + c_j y + d_j z)$$

$$N_m = \frac{1}{6V}(a_m + b_m x + c_m y + d_m z)$$

$$N_p = \frac{1}{6V}(a_p + b_p x + c_p y + d_p z)$$

$$a_i = \det\begin{vmatrix} x_j & x_m & x_p \\ y_j & y_m & y_p \\ z_j & z_m & z_p \end{vmatrix}, \qquad b_i = -\det\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_j & y_m & y_p \\ z_j & z_m & z_p \end{vmatrix}$$

$$c_i = \det\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_j & x_m & x_p \\ z_j & z_m & z_p \end{vmatrix}, \qquad d_i = -\det\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_j & x_m & x_p \\ y_j & y_m & y_p \end{vmatrix}$$

ただし、i, j, m, p は円順環に従がう。

$V = \frac{1}{6}(a_i + a_j + a_m + a_p)$：三角錐の体積

これより、三角錐有限要素の fluid matrix は次のように求められる。

$$S^e = \frac{1}{36V}\begin{bmatrix} s_{ii} & s_{ji} & s_{mi} & s_{pi} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{mj} & s_{pj} \\ s_{im} & s_{jm} & s_{mm} & s_{pm} \\ s_{ip} & s_{jp} & s_{mp} & s_{pp} \end{bmatrix} \qquad (2.15)$$

ここに　$s_{st} = b_s \cdot b_t + c_s \cdot c_t + d_s \cdot d_t$

(2)　直方体有限要素

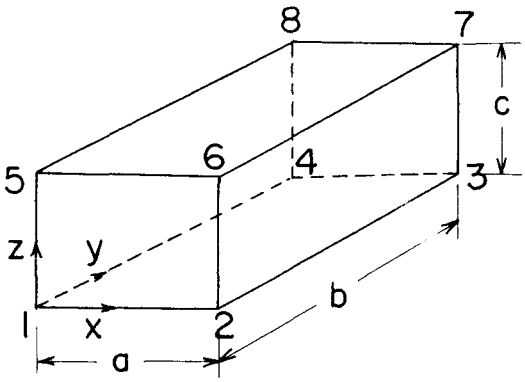


図 2.2　直方体有限要素

図 2.2 に示したような直方体有限要素について考える。直方体有限要素の場合、頂点を 8 つもつので 8 つの接点の動圧力の値を未知数として、有限要素内の動圧力分布は次のように仮定される。

$$p(x, y, z) = \lfloor N_1, N_2, N_3 \cdots N_7, N_8 \rfloor \cdot \{p\}^e \quad (2.16)$$

ここに $\{p\}^e = \{p_1, p_2, p_3 \cdots p_7, p_8\}$

$$N_1 = \left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{x}{b}\right)\left(1 - \frac{z}{c}\right) \qquad N_5 = \left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)\frac{z}{c}$$

$$N_2 = \frac{x}{a}\left(1 - \frac{x}{b}\right)\left(1 - \frac{z}{c}\right) \qquad N_6 = \frac{x}{a}\left(1 - \frac{y}{b}\right) \cdot \frac{z}{c}$$

$$N_3 = \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} \cdot \left(1 - \frac{z}{c}\right) \qquad N_7 = \frac{x}{a}\ \frac{y}{b}\ \frac{z}{c}$$

$$N_4 = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cdot \frac{y}{b} \cdot \left(1 - \frac{z}{c}\right) \qquad N_8 = \left(1 - \frac{x}{a}\right)\frac{y}{b}\ \frac{z}{c}$$

(2.16) 式を使用して、直方体有限要素の fluid matrix は次のように求められる。

$$\mathbf{S}^e = \begin{bmatrix} S_1 & & & & & & & \\ S_2 & S_1 & & & & \text{SYM} & & \\ S_3 & S_4 & S_1 & & & & & \\ S_4 & S_3 & S_2 & S_1 & & & & \\ S_5 & S_6 & S_7 & S_8 & S_1 & & & \\ S_6 & S_5 & S_8 & S_7 & S_2 & S_1 & & \\ S_7 & S_8 & S_5 & S_6 & S_3 & S_4 & S_1 & \\ S_8 & S_7 & S_6 & S_5 & S_4 & S_3 & S_2 & S_1 \end{bmatrix} \qquad (2.17)$$

ここに、$S_1 = 4\alpha + 4\beta + 4\gamma$

$S_2 = -4\alpha + 2\beta + 2\gamma$

$S_3 = -2\alpha - 2\beta + \gamma$

$S_4 = 2\alpha - 4\beta + 2\gamma$

$S_5 = 2\alpha + 2\beta - 4\gamma$

$S_6 = -2\alpha + \beta - 2\gamma$

$S_7 = -\alpha - \beta - \gamma$

$S_8 = \alpha - 2\beta - 2\gamma$

$$\alpha = \frac{bc}{36a}, \quad \beta = \frac{ac}{36b}, \quad \gamma = \frac{ab}{36c}$$

2.2.2　compressibility matrix

三角錐有限要素についてcompressibility matrix　$\mathbf{C}^e$を誘導する。

（2.5）式より次式が求まる。

$$\frac{\partial u\chi^e}{\partial p_k} = \frac{\rho\omega^2}{K}\int_{ve} p \frac{\partial p}{\partial p_k} dV^e \qquad (2.18)$$

$$(k = i, j, m, p)$$

（2.14）式より

$$p = \lfloor N_i, N_j, N_m, N_p \rfloor \cdot \{p\}^e \qquad (2.19)$$

$$\frac{\partial p}{\partial p_k} = N_k \quad (k = i, j, m, p)$$

（2.19）式を（2.18）式に代入すれば、compressibility matrix $\mathbf{C}^e$は次のようになる。

$$\mathbf{C}^e = \int_{ve} NsNtdV^e \qquad (2.20)$$

これより、　$\mathbf{C}^e$ は一般に次のように求められる。

$$\mathbf{C}^e = \frac{V}{20}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (2.21)$$

2.2.3　boundary area matrix

(1)　三角形境界

三角錐の一面（ i ， j ， m ）が図 2.3 に示したように境界面となつているとした場合 boundary area matrix　$\mathbf{A}^f$ は次式のように求められる。

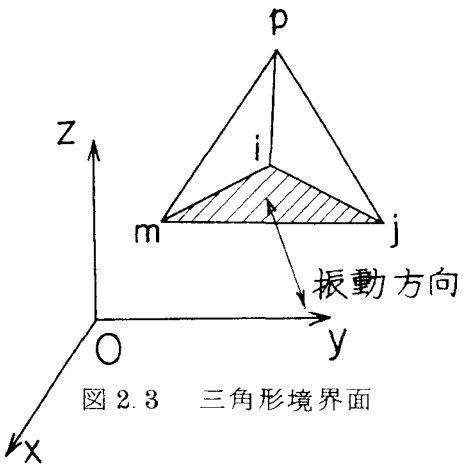


図 2.3　三角形境界面

$$\mathbf{A}^f = \frac{|n|}{24}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (2.22)$$

ここに、$n = C_x\ \lambda_x + C_y\ \lambda_y + C_z\ \lambda_z$

$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$：振動方向と x ， y ， z 軸の方向余弦

$$C_x = \begin{vmatrix} y_i & z_i & 1 \\ y_j & z_j & 1 \\ y_m & z_m & 1 \end{vmatrix} \qquad C_y = \begin{vmatrix} z_i & x_i & 1 \\ z_j & x_j & 1 \\ z_m & x_m & 1 \end{vmatrix}, \qquad C_z = \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \end{vmatrix}$$

振動方向は通常、座標軸に合わせてとるので、いま z 軸方向に振動するものとすると、$\lambda_z=1$, $\lambda_x=\lambda_y=0$ より $n=C_z$ となる。この場合（ 2.22 ）式で　$\mathbf{A}^f$ を計算する場合、i ， j ， m 接点の x および y 座標のみが必要となる。

(2)　矩形境界

直方体要素の一面が境界に接し、面に垂直な振動を受ける場合の boundary area matrix は次のように表わされる。

$$\mathbf{A}^f = \frac{S}{36}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad (2.23)$$

ここに，　S：矩形の断面積

2.2.4　基礎matrixの性質

前節に示した基礎matrixは次に示すような重要な性質を持つ。この性質は実際にprograming を行なう時利用すれば、三次元問題を取り扱う場合の複雑さは少なくなり、Input Data を少なくし、誤りも防ぐことが出来る。

(1)　三角錐有限要素

fluid matrix

(a)　三角錐有限要素のnumbering の順序はある頂点より見て時計回り（または反時計回り）に統一して行なえば S^e の値は変わらない。

(b)　要素は任意の方向に平行移動しても S^e の値は変わらない。

(c)　要素は任意の軸回りに回転しても S^e の値は変わらない。

compressibility matrix

(d)　要素の座標、numbering に無関係であり、要素の体積のみによつて定まる。

boundary area matrix

(e)　振動方向に垂直な面の座標のみによつて定まる。

(2)　直方体有限要素

fluid matrix

(f)　直方体の三つの稜の長さのみによつて S^e の値は定まる。

boundary area matrix

(g)　面の面積のみに関係する。

2.2.5　三次元有限要素

前述した三角錐有限要素と直方体有限要素は立体有限要素としてはもつとも基礎的な要素である。その他精度をよくするためにこれ以外の立体有限要素も考えられている。〔23〕

直方体有限要素は基礎matrixの形も非常に簡単であるが、対象とする流体領域をこのような要素のみに分割することは境界面が、平面になるため不都合であり、取り扱える問題は限られた場合だけになる。

一方三角錐有限要素は任意の流体領域でも隙間なく全領域を分割することが可能であるが、実際問題として三角錐有限要素そのままで取り扱うことは非常な混乱をまねくことになる。したがつて本論ではこのような混乱を除くため三角錐有限要素をいくつかよせ集め、合成有限要素なるものを作り、それを基礎有限要素として用いることにする。

合成有限要素を図2.4に示す

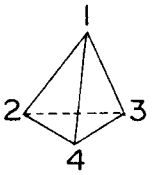
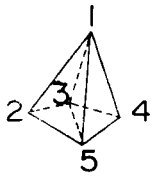
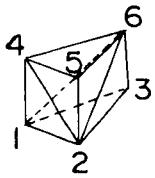
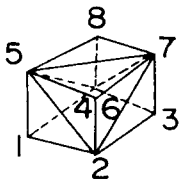
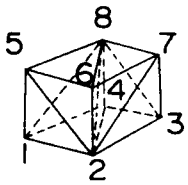
合成有限要素	L4	L5	L6	L8	
要素の形状					
三角錐の数	1	2	3	5	6

図2.4　　合成有限要素

5頂点合成有限要素は2つの三角錐有限要素を集めて作られるが、その組合せは2通りの方法がある。（図2.5参照）

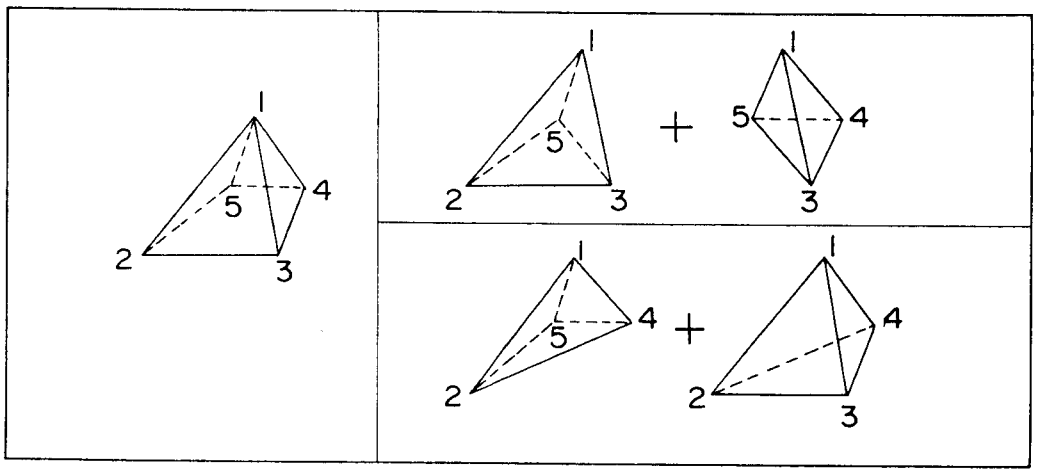


図2.5　5頂点合成有限要素の組合せ

同様に、6頂点合成有限要素を3つの三角錐有限要素より作る組合せは12通り、8頂点合成有限要素を5つの三角錐有限要素より作る組合せは2通り、6つの三角錐有限要素より作る組合せは百数十通りある。

2.3.　有限要素法による振動動圧力の解法

（2.13）式を解けば一般に流体領域の全接点の動圧力を計算することが出来る。しかしこのような一般的な解法は実際問題として、次の2つの点より解法としては可能であるが、問

題を解く段階において不可能に近いことがわかる。すなわち、1つは流体領域の分割が非常に複雑になり、Input Data が非常に多くなることと、もう1つは現在の段階においては時間的、容量的に使用される電子計算機の大きさではごく限られた接点しかとることが出来ないという点である。このような困難を解消するために考えられたのがLayer Division Method〔24〕であり、これにより三次元問題が実際上計算可能になつたといつても過言ではない。ここでは船体振動の場合を対象として無限流体中で物体が振動するとき、無限流体域をその影響が十分無視出来る範囲の有限流体領域におきかえ、Layer Division Method を使用して解く方法について述べる。

2.3.1 Layer Division Method

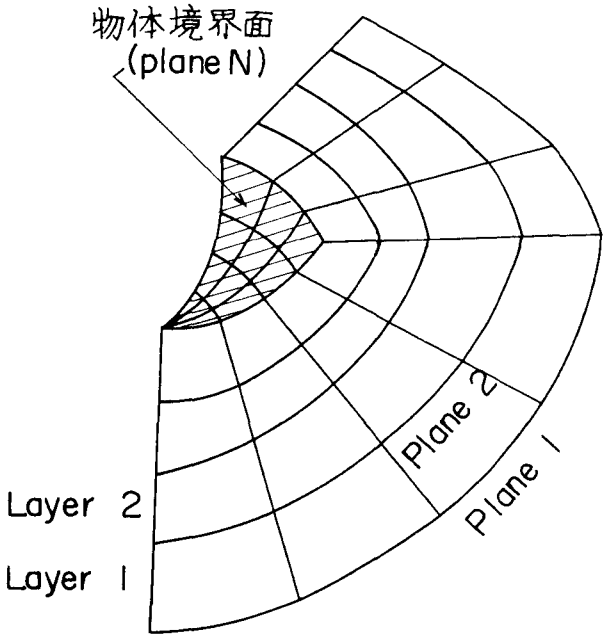


図2.6 有限要素分割

Layer Division Method の特徴は流体領域の有限要素への分割を秩序立てて行なうことにある。すなわち図2.6に示したように、流体領域を次に示す3種類の面により有限要素に分割する。

(1)、物体の境界面を拡大した曲面群

(2)、(1)の曲面を縦方向に分割する(N)面群

(3)、(1)の曲面を横方向に分割する(N)面群

いま、(1)の曲面群を外側からPlane 1,2……N，と呼びPlane i と $i+1$ で形成される立体層をLayer i と呼ぶことにする。

このような分割により、流体領域はいくつかの立体層が重なつてつながつている領域と考えることができ、このとき次のような関係が成立する。

(a) 各Plane 上の接点の数は等しい。

(b) 各Layer に含まれる有限要素の数は等しい。

(c) 物体の境界面はPlane N に集まり、他の面上の接点はすべて自由接点となる。

(d) 各Plane 上の接点はそれぞれ1対1に対応する。

したがつて流体領域に含まれる全接点の動圧力を表わす(2.12)式は次に示すような内容の

式になる。

$$\begin{bmatrix} K_1 & C_1 & 0 & & 0 \\ C_1^T & K_2 & C_2 & & \\ 0 & C_2^T & K_3 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{N-1} & C_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & C_{N-1}^T & K_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{N-1} \\ p_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ A\dot{V}_N \end{bmatrix} \qquad (2.24)$$

ここに、各添字はPlane の番号を表わしており、K_i , C_i はN次の正方matrix , p_i はN次のvectorを表わしている。

船体振動の問題において、必要とする動圧力は物体境界面上に働くものだけであり、したがつて$\{P_N\}$だけが求まればよい。

(2.24)式の第1式から順次展開し、p_1, $p_2 \cdots p_{N-1}$を消去すれば、結局次式が求まる。

$$\{p_N\} = \overline{K}_N^{-1} \cdot A \cdot \{\dot{V}_N\} \qquad (2.25)$$

ここに $\bar{K}_1 = K_1$

$$\bar{K}_i = K_i - C_{i-1}^T \cdot \bar{K}_{i-1}^{-1} C_{i-1}$$

$$(i = 2, 3, 4, 5 \cdots\cdots N)$$

いま、MをPlane に含まれる接点の数とすれば(2.24)式を直接解く方法ではMN元の連立方程式を解く必要がある。一方(2.25)式ではM元の連立方程式をN回解くことになる。これにより、計算時間は早くなるのみならず記憶容量も少なくなる。

2.3.2 実際のprogram 、理論値との比較

実際の問題を取り扱う時どのような方法が計算時間、精度から見て一番効果的であるかを検討するため、表2.1 に示す7種類の計算program を作成した。

表 2.1　　作成 program の種類

program	使用有限要素	解　　法	計算精度＊
F1	直方体有限要素	一度だけUnit 分割	Single
F2	直方体有限要素	全接点を一度に解く	
F3	三角錐有限要素		
F4	三角錐有限要素	Layer Division Method	Double
F5	合成有限要素（２通りの平均）		
F6	合成有限要素 { L6‥12 / L8‥74 }通りの平均		
F7	合成有限要素 { L6‥2 / L8‥2 }通りの平均		Single

＊精度とは電子計算機の有効桁数でありSingleで８桁、Doubleで１６桁である。

これらのprogram を使用して精度を検討するため、これまで解析されている理論値との比較を行なつた。その結果を表 2.2 に示す。動圧力の計算値は特に１つの値で代表さすために物体に働く力として比較を行なつている。

これらの各種program の特徴を比較検討した結果次のようなことがわかつた。

(1) 三角錐有限要素をよせ集めて合成有限要素を作る場合、一通りの組合せより二通りの組合せの平均をとつた方が精度はよくなるが、それ以上の組合せの平均をとつてもそれ程精度はよくならない。

(2) 大規模な問題では層分割の方法は直接全接点について解く方法より精度がよく、計算時間も早い。

(3) 層分割法で有限要素数５００程度の問題を解く場合にはSingle PrecisionでもDouble Precision でも精度はあまり変わらない。

したがつて、以後の計算では、有限要素は三角錐要素の組合せから作られる合成有限要素の代表的な２通りの組合せの平均を使用し、層分割法Single precision で計算するprogram（Ｆ７）を使用する。

表2.2　有限要素法による計算と理論解との比較

計算対象		有限要素分割[1] (1)	(2)	(3)	全有限要素数[2]	全接点数[3]	使用プログラム	有限要素法による解		理論解	有限要素法/理論解
矩形タンク（相向う面が同相の撓み振動）[26]		4	4	4	64	125	F1	$\frac{F}{4\rho\dot{V}}$	0.18511	0.18997	0.974
							F3		0.18887		0.994
ダム・ゲート（並進振動）		7	1	5	35	96	F2	$\frac{F}{\rho\dot{V}}$	0.10315	0.10687	0.965
							F4		0.12288		1.150
							F6		0.11779		1.102
							F6[4]		0.10385		0.972
球（並進振動）		6	5	5	150 (30)	217	F3	$\frac{F}{8\rho\dot{V}}$	0.2069	0262	0.790
							F4		0.2440		0.932
							F5		0.2411		0.921
							F7		0.2411		0.921
水中にたてられた橋脚（円断面）（並進振動）	r/h=0.1	6	6	5	180	294	F4	$\frac{F}{\rho\pi r^2 h\dot{V}}$	0.9388	桜井 0.9091 後藤 0.7125	1.0335[5] 1.318
							F5		0.9152		1.007 1.284
							F6		0.8860		0.975 1.244
		8	8	8	512	729	F5		0.8391		0.923 1.178
	r/h=0.5	8	8	8	512	729	F5		0.5581	0.5625	0.992
	r/h=1.0	8	8	8	512	729	F7		0.3738	0.3750	0.997
無限長円筒 L/B= 6（撓み振動）		6	6	6	216	343	F7	$\frac{F}{16\rho\dot{V}}$	1.0346	1.1559	0.895
		10	10	9	900	1210			1.1059		0.957
有限長円筒 L/B= 6		10	10	9	900 (90)	1210	F7	$\frac{F}{8\rho\dot{V}}$	38702	38170	1.014
円板（片面接水）		6	6	6	216 (36)	301	F7	$\frac{F}{4\rho\dot{V}}$	0.34475	0.3333	1.034

1）有限要素分割、(1)，(2)，(3)に示した数は2.3.1において述べた3種類の面の数を表わしている。実際の分割図は参考文献〔25〕に詳説されている。

2）有限要素の数は合成有限要素の数である。合成有限要素の大部分はL8有限要素であり、他はL6有限要素である。L6有限要素の数は括弧内の値である。

3）全接点から境界条件としてpの値が指定される数を引いた数が実際に連立方程式として解かれる。

4）分割の方法を変えたものである。

5）上段は桜井、下段は後藤の計算値〔27〕との比較をしている。

2.3.3 無限領域を有限領域に近似する精度の検討

無限流体領域において物体が振動する、いわゆる外部流体問題に有限要素法を適用するとき、近似的に流体領域を有限領域におきかえて取り扱わなければならない。したがつてこのような近似的な取り扱いが解の精度にどの程度の誤差となるかを調査しておく必要がある。本節では解析的に求められている三次元運動の代表的な問題の理論解により、この影響を検討する。

また、有限要素法による計算の精度は同じ有限要素数で問題を解いても、その分割法、いわゆる有限要素の切り方によつて大きく左右される。一般にいわれていることは動圧力の変化が急な領域では細かく切り、変化がゆるやかな所では荒く切ればよいということである。したがつていま対象としている外部流体問題では物体面近辺では細かく、物体面から離れるにしたがつて荒くということになる。このようなLayerの厚さを決定する目安を見い出す目的でまず理論解が求められているものについて流体領域の動圧力分布を調査する。

動圧力は$P=-\rho\dfrac{\partial\phi}{\partial t}$で与えられるので時間について変数分離すれば明らかに流体中の動圧力分布はvelocity potentialに比例する。したがつて以下における動圧力の比較はvelocity potentialそのままの形で比較する。

無限流体領域において無限長さの円筒が正弦状の撓み振動を行なう時のvelocity potentialは次のように求められている。〔28〕

$$\phi=\frac{V K_1(kr)}{k K_1'(ka)}\cos\theta\ \cos kZ \qquad (2.26)$$

ここに、$k=2\pi/\ell$　　a：円筒の半径

ℓ：振動の波長

いま、物体面から離れるにつれてどのように動圧力が変化するかをしらべるため物体面の動圧力との比をとれば次のようになる。

$$\frac{P}{P_a}=\frac{K_1(kr)}{K_1(ka)} \qquad (2.27)$$

船の撓み振動にあてはめれば、N節振動をする時

$$ka=\frac{\pi N}{2}\left(\frac{B}{L}\right) \qquad (2.28)$$

ここに、L，B：船の長さおよび幅

の関係があり、ｋａの値は同節振動ではＬ／Ｂが小さくなるにしたがい大きくなり、同じL/Bの船では節数が増加するに従がい大きくなる。L/B＝６～１２に対してｋａの値は図２.７に示した範囲をとる。ｋａ＝０.２５およびｋａ＝０.５に対して（２.２７）式で示される分布を表わしたものが図２.８である。同図には参考のため次に示される球と無限円筒の剛体振動に対する動圧力分布も加えた。

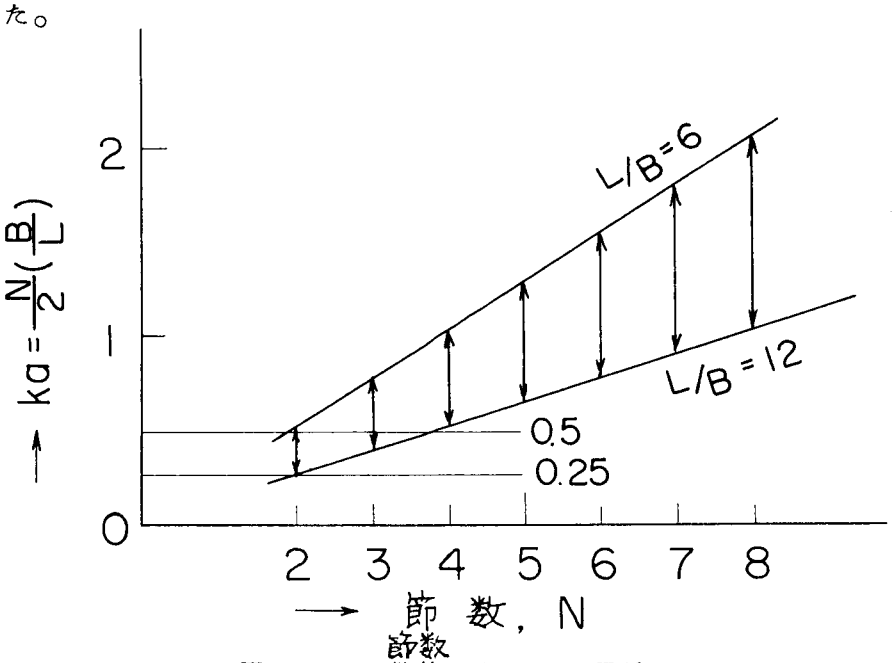


図２.７　節数Ｎとｋａの関係

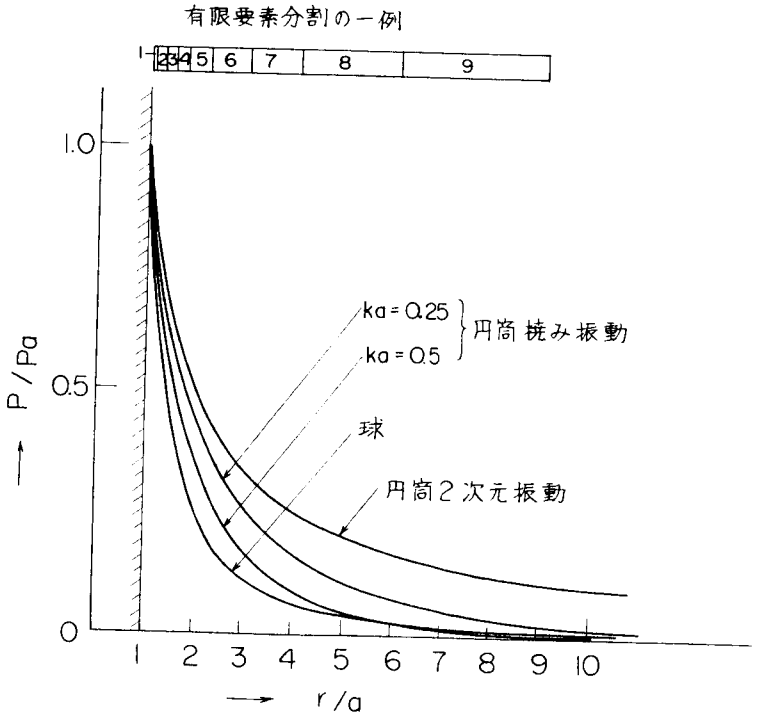


図２.８　動圧力分布

(1) 球

$$\phi = \frac{V}{2} \cdot \frac{a^3}{r^2} \cos \theta \qquad (229)$$

$$\frac{P}{Pa} = \left(\frac{a}{r}\right)^2$$

(2) 円筒（二次元振動）

$$\phi = -\frac{Va^2}{r} \cos \theta \qquad (230)$$

$$\frac{P}{Pa} = \frac{a}{r}$$

図2.8より実船の撓み振動の場合には船の幅の9倍程度の領域では振動による動圧力の値は物体面に働く値の1%以下になるものと思われる。このような分布形を参考にしたLayer の分割例も同時に示した。勿論三次元問題を一般的に取り扱う場合にはこのようなLayerの厚さは長さ方向に変化するものが使用される。

次に、無限領域を制限水域として取り扱つたための動圧力に与える誤差の影響について検討する。

流体の運動エネルギはGreen の定理により

$$T = \frac{\rho}{2} \int_V q^2 dV = \frac{\rho}{2} \int_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial \nu} dS = \frac{\rho}{2} \int_S \phi V_n \, dS$$

で表わされるので、付加水質量に対する誤差の影響は物体面に働く動圧力の誤差に比例する。したがつて誤差は次の量で比較する。

$$e = \left(\frac{\text{有限領域として計算した物体面に働く動圧力}}{\text{無限領域として計算した物体面に働く動圧力}} - 1 \right) \times 100\% \qquad (231)$$

半径bの円筒領域内で同じ軸を有する半径aの円筒が正弦状の弾性振動をする場合のvelocity potential は次のように表わされる。〔29〕

$$\phi = \frac{VF(r)}{kF'(a)} \cos kZ \cos\theta \qquad (232)$$

ここに，$F(r)=K_1(kr)I_1'(kb)-K_1'(kb)I_1(kr)$

$F'(a)=K_1'(ka)I_1'(kb)-K_1'(kb)I_1(ka)$

$b\to\infty$とすれば（2.32）式は（2.26）式に一致する。両式において$r=a$とおき（2.31）式を計算すれば次のようになる。

$$e=\frac{\dfrac{K_1'(kb)}{I_1'(kb)}\left[\dfrac{I_1'(ka)}{K_1'(ka)}-\dfrac{I_1(ka)}{K_1(ka)}\right]}{1-\dfrac{K_1'(kb)}{I_1'(kb)}\cdot\dfrac{I_1'(ka)}{K_1'(ka)}}\times 100 \qquad (2.33)$$

同様に図2.9に示したように、半径aの球が半径bの円心球内で剛体振動する時のvelecity

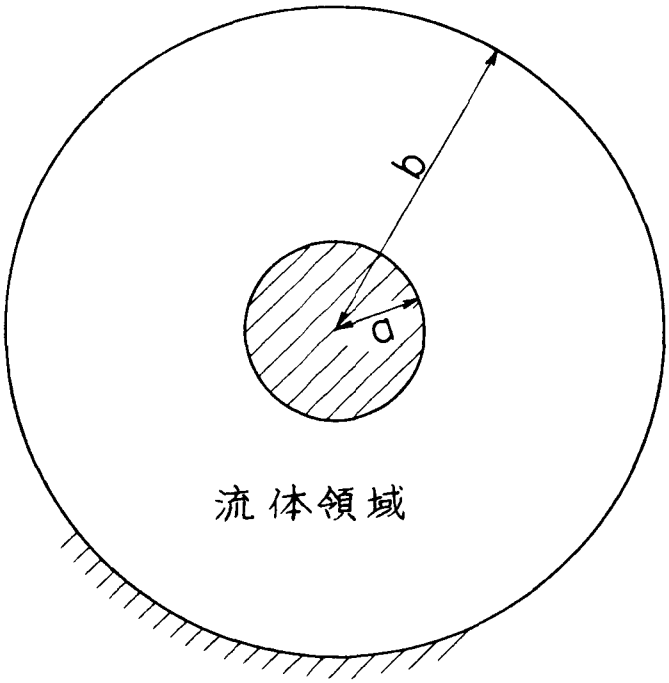


図2.9　同心球で囲まれた制限水域

potentialは次式で与えられる。

$$\phi=\frac{a^3}{b^3-a^3}\left(r+\frac{1}{2}\frac{b^3}{r^2}\right)V\cos\theta$$

これより，

$$e=\frac{3}{\left(\frac{b}{a}\right)^3-1}\times 100 \qquad (2.34)$$

また、円筒が二次元振動する場合は次のようになる。

$$\phi = \frac{a^2}{b^2 - a^2}\left(r + \frac{b^2}{r}\right) V \cos\theta$$

$$e = \frac{2}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1} \times 100 \qquad (2.35)$$

これらのeの値の計算結果を図2.10に示す。これより船体振動に応用する場合、船の幅の9

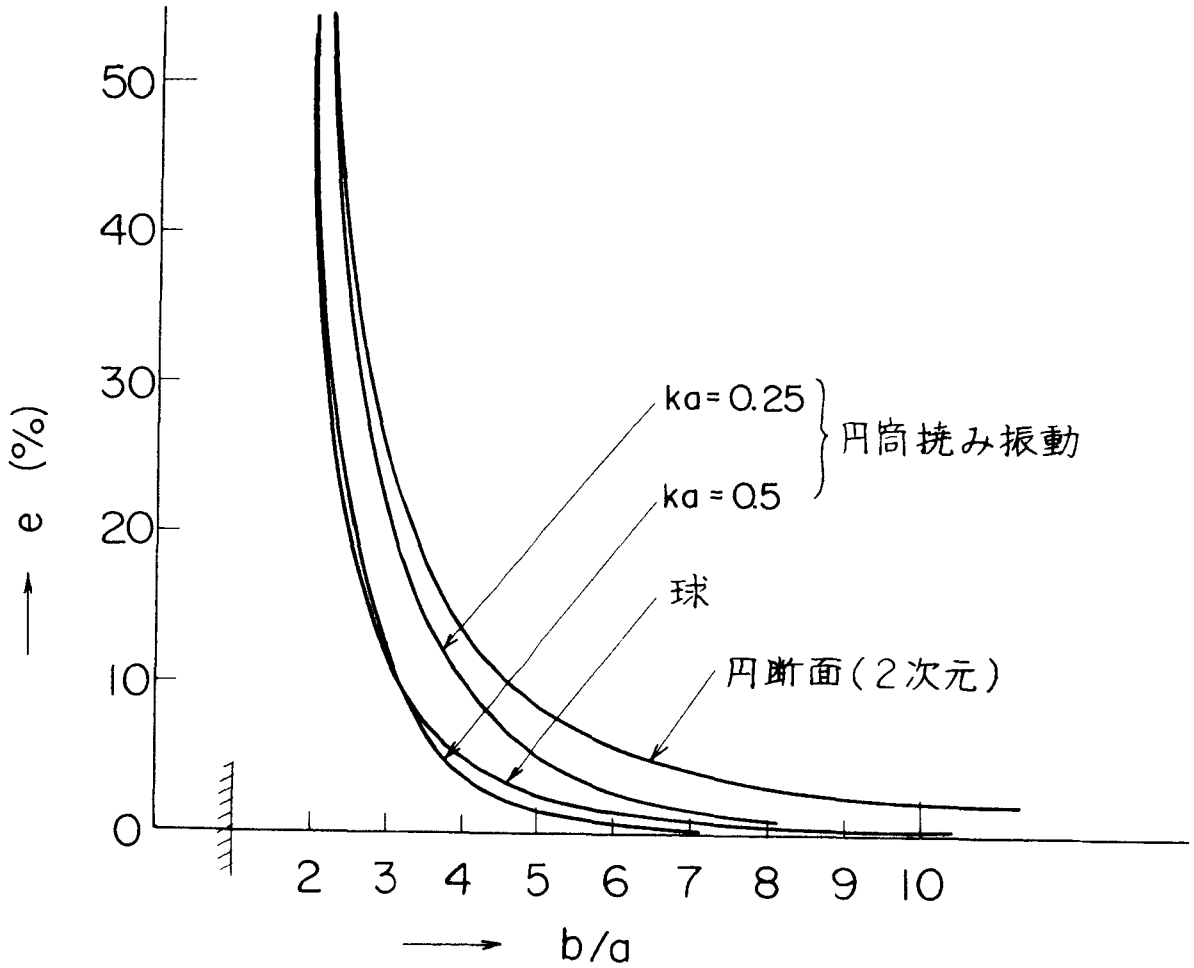


図2.10　振動動圧力におよぼす制限水域の影響

倍程度までの領域をとれば三次元の撓み振動の計算には1%以内の精度で解が得られることがわかる。

2.4 振動動圧力の解析例

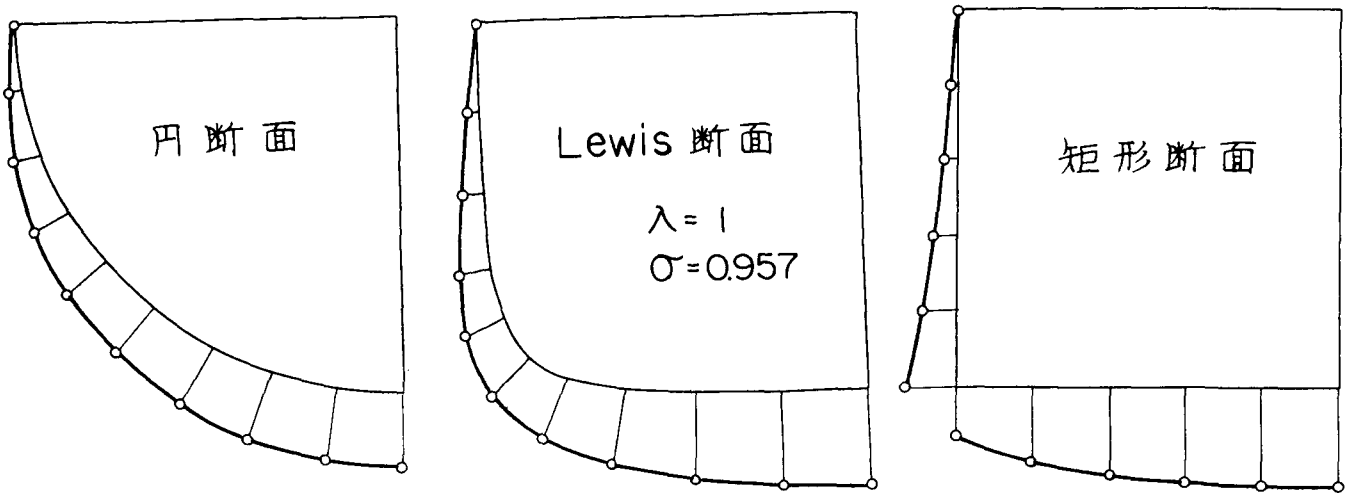
2.4.1 二次元問題

表2.3に示す3種類の断面について物体面に働く動圧力を計算し理論値との比較を行なつた。理論的に求められたvelocity potentialも表中に引用した。動圧力の比較は図2.11

表2.3 二次元問題の計算例

計 算 例	理論解(速度ポテンシャル)
円断面〔30〕	$\phi = -Va\cos\theta$ a：円の半径
Lewis 断面〔31〕 $\lambda = 1$ $\sigma = 0.957$	$\phi = V[(1-a_1)\cos\theta - a_2\cos 3\theta]$ $X = (1+a_1)\cos\theta + a_2\cos 3\theta$ $Y = (1-a_1)\sin\theta - a_2\sin 3\theta$ X, Y：断面上の座標
矩形断面〔31〕 $(\lambda = 1)$	side shell の辺において $\phi = \sin\alpha \cdot \sin\theta_1$ $X = E(\theta_1, \sin\alpha) - \cos^2\alpha \cdot F(\theta_1, \sin\alpha)$ bottom plate の辺において $\phi = \sqrt{1-\cos^2\alpha\ \sin^2\theta_2}$ $Y = E(\theta_2, \cos\alpha) - \sin^2\alpha \cdot F(\theta_2, \cos\alpha)$

に示す。これらの値はすべて1%以内の誤差範囲にあり、図からは殆んど誤差を読みとることはできない。



—— 解析解

○ 有限要素法による解

図 2.11 二次元動圧力分布の比較

2.4.2 三次元問題

三次元問題の比較例として表 2.4 に示した三つの例を計算した。この比較を図 2.12 に

表 2.4 三次元問題の計算例

計 算 例	理論解（速度ポテンシャル）
回転楕円体の剛体振動 〔30〕	$\phi = A(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}(\zeta_0^2-1)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2}\log\frac{\zeta_0+1}{\zeta_0-1}-\frac{\zeta_0}{\zeta_0-1}\right\}\cos\omega$ $A\left\{\frac{1}{2}\log\frac{\zeta_0+1}{\zeta_0-1}-\frac{\zeta_0^2-2}{\zeta_0(\zeta_0^2-1)}\right\}=-kV$
無限長円筒の正弦状撓み振動 〔28〕	$\phi=\frac{VK_1(ka)}{kK_1'(ka)}\cos\theta\ \cos kZ$
有限円筒の剛体振動 〔32〕	$\phi=\frac{4V}{\pi}\sum_m^{\infty}\frac{K_1(k_m a)}{mk_m K_1'(k_m a)}\sin\theta\ \sin k_m Z$

示す。動圧力分布は長さ方向には keel line の値を円周方向には中央部の値を示した。流体領域の実際の有限要素分割の例として回転楕円体の場合を図 2.13 に示す。この例では層

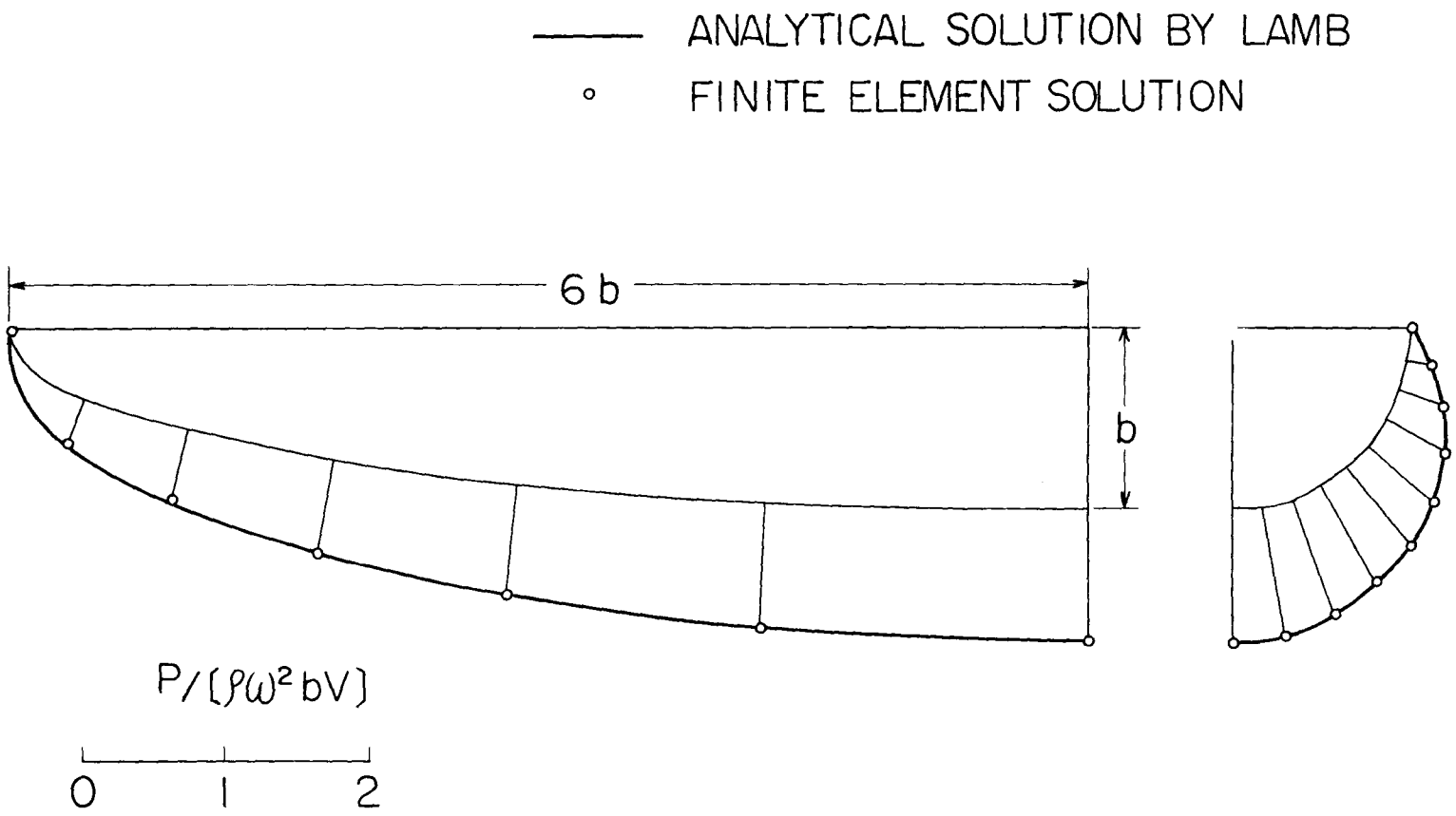


図2.12 (i) 三次元動圧力分布の比較（回転楕円体の場合）

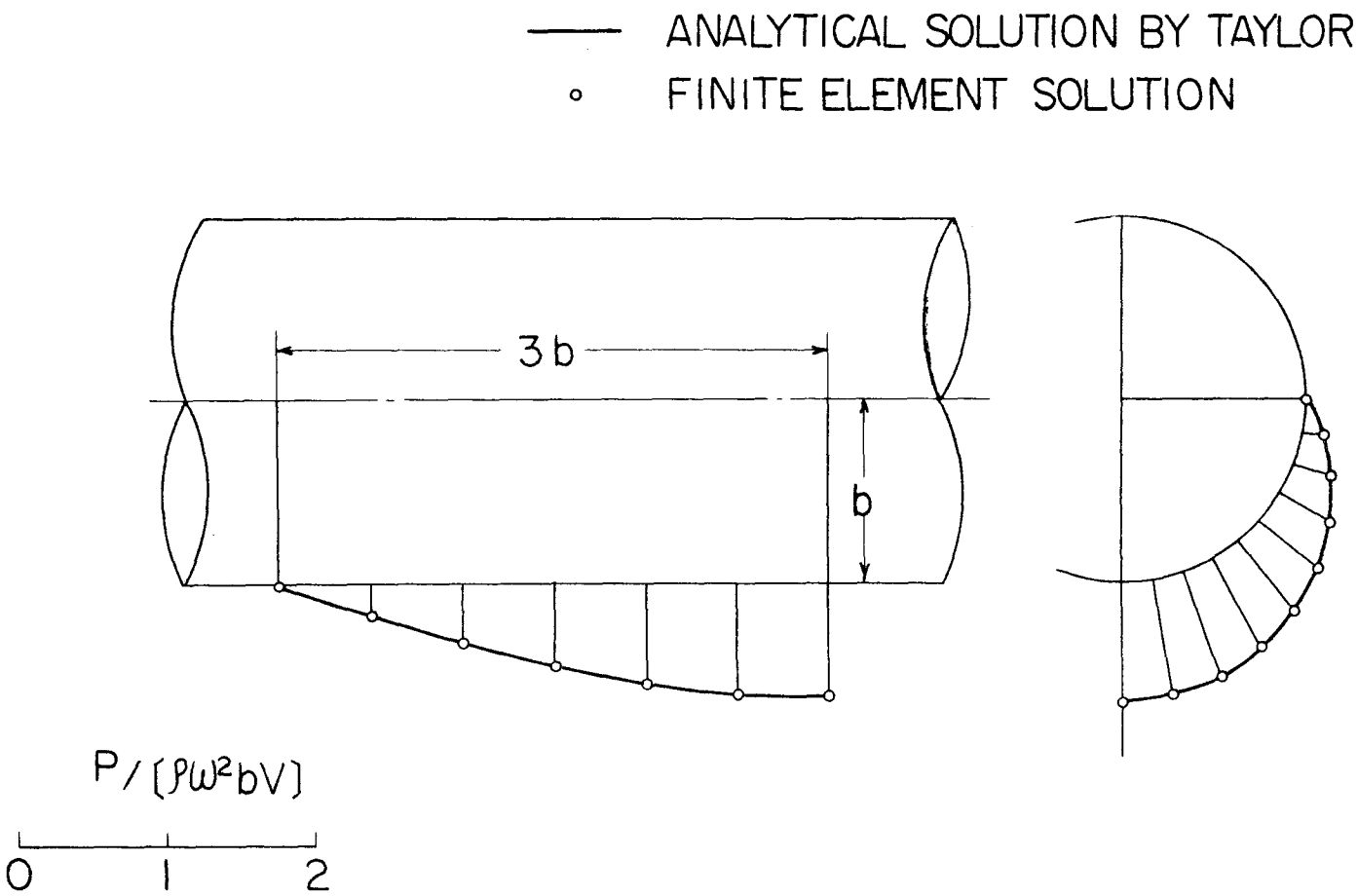


図 2.12(*ii*)　　三次元動圧力分布の比較（無限長円筒の場合）

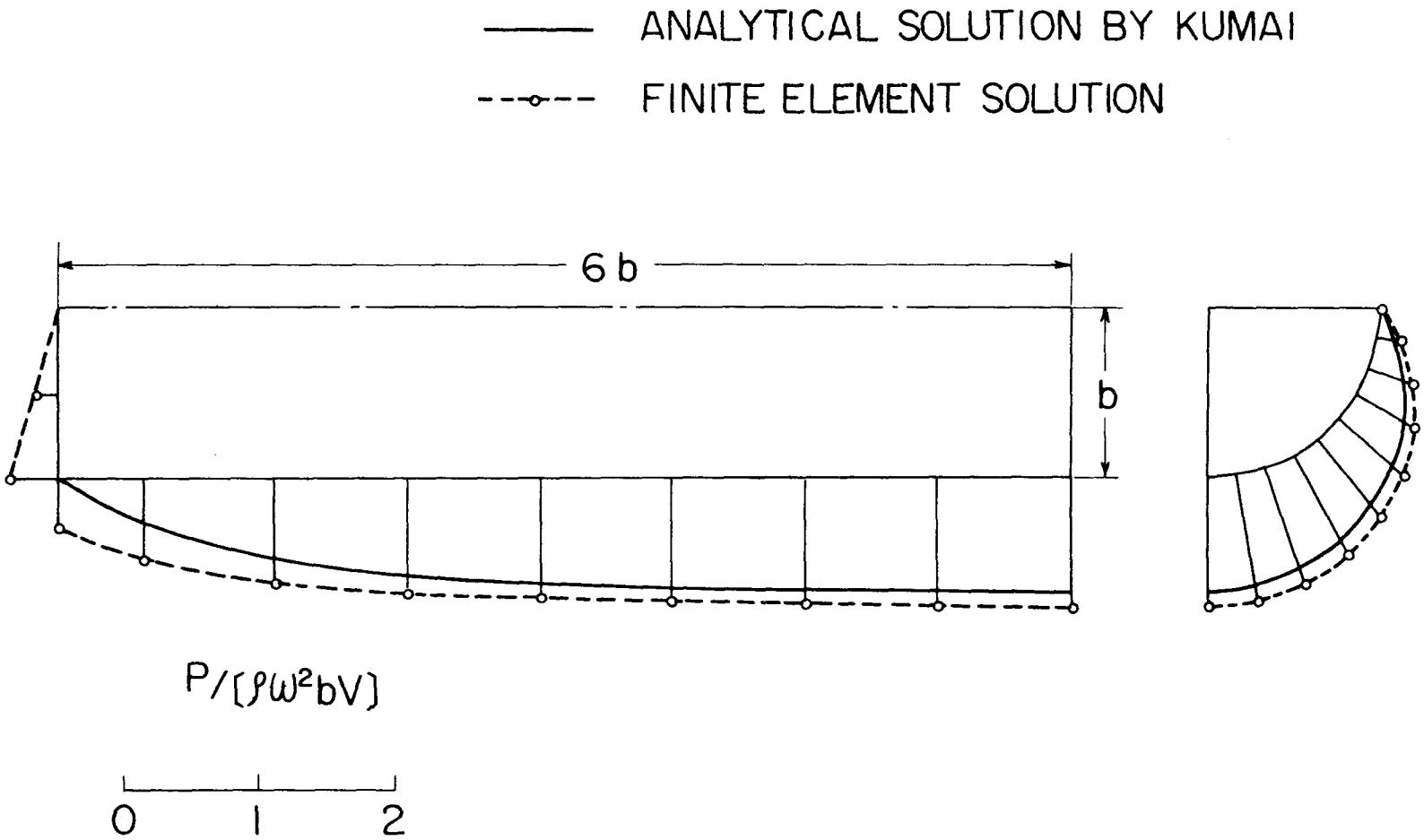


図 2.12 (*iii*)　　三次元動圧力分布の比較（有限長円筒の場合）

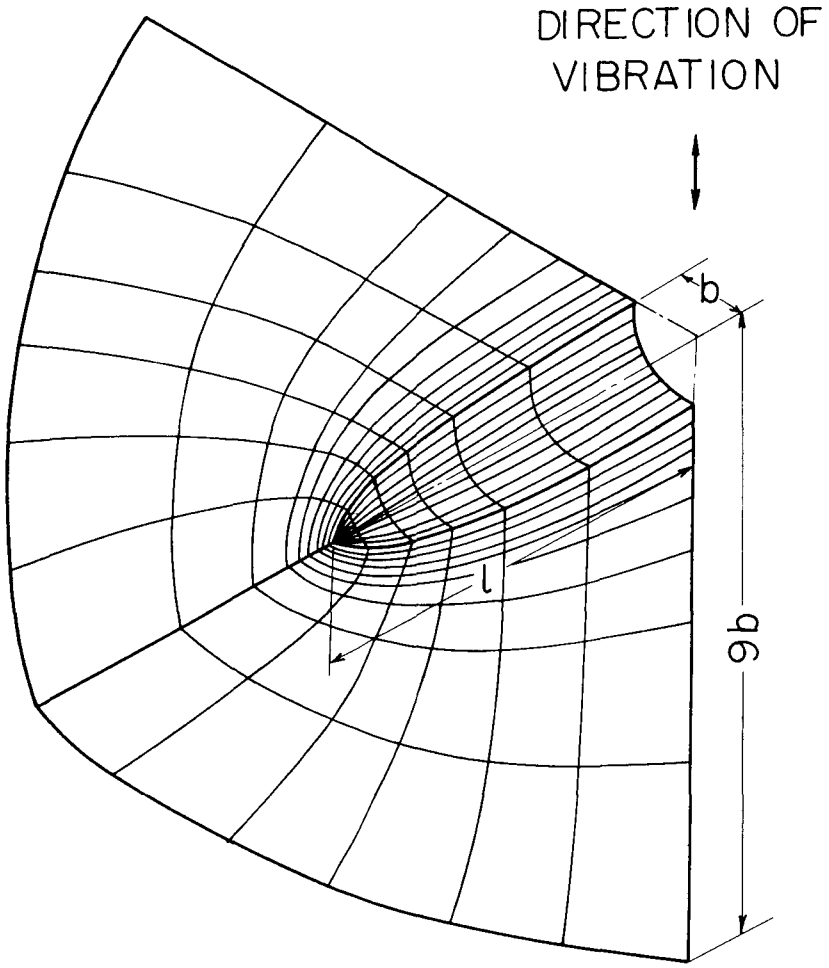


図2.13　流体領域の有限要素への分割例

分割法の3種類の分割面として10個のconfocal ellipsoid 面、7つの2葉双曲面および回転楕円体の軸を含む10個の平面により486個の合成有限要素に分割されている。有限円筒の理論値は有限要素法による解より幾分低めに求められているが、これは円筒の両端の断面においてvelocity potentialが0になるように理論解が導かれているためである。

第３章　有限要素法による船体振動の付加水質量の計算

3.1　付加水質量の計算法

3.1 1　二次元運動エネルギ、二次元付加水質量係数

いま、二次元問題について考える。図2.14に示したように無限流体中で任意断面をもつ物体が振動するとき全流体領域の二次元運動エネルギはGreen　の定理により次のように断面表面の線積分に書きかえられる。

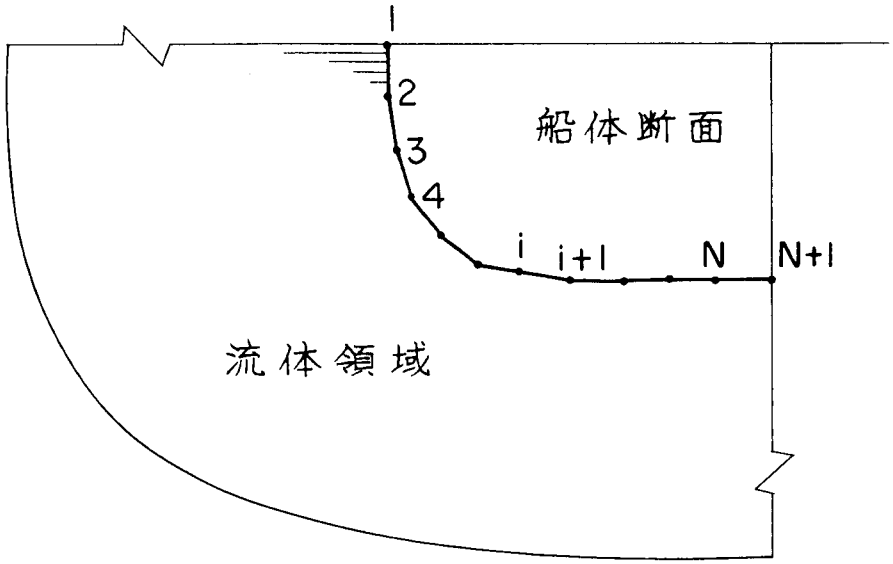


図2.14　　船体断面形状

$$T_2=\frac{\rho}{2}\int\int q^2 dA \;=\; -\frac{\rho}{2}\int\phi\frac{\partial\phi}{\partial n}ds \qquad (2.36)$$

ここに、ϕ：振動による流体のvelocity potential

有限要素法による計算では近似的に有限流体領域を対象として取り扱われるがこの場合にも同様に（2.36）式が成立する。〔33〕

いま、振動によるvelocity potentialを次のようにおく。

$$\phi \;=\; \phi_1 v \qquad (2.37)$$

これより動圧力は次のように表わされる。

$$p=-\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}=-\rho\phi_1\frac{\partial v}{\partial t} \qquad (2.38)$$

（2.37）式，（2.38）式を使用して（2.36）式の運動エネルギを動圧力で表わすと次のように書き表わせる。

$$T_2 = -\frac{\rho}{2}\int\phi\frac{\partial\phi}{\partial n}\,ds = -\frac{\rho}{2}\int\phi_1\, v^2\ell ds$$

$$= \frac{1}{2}\int p\left[\frac{v^2}{\dot{v}}\right]\ell ds \qquad (2.39)$$

ここに、ℓ：断面線分に normal な方向の振動方向に対する方向余弦

いま、物体は調和振動をするものとすれば

$$y = Y e^{i\omega t} \qquad (2.40)$$

と書くことができ、これより

$$\frac{v^2}{\dot{v}} = y$$

となり、（2.39）式に代入すれば運動エネルギは次のようになる。

$$T_2 = \frac{1}{2}\int p\, y\, \ell\, ds \qquad (2.41)$$

一方、図2.14に示したように水線面下の船体断面形状をN個の微少直線線分より形成されているものとし、有限要素法による動圧力の計算法を適用すれば一般に断面の加速度分布とそれにより断面に生じる振動動圧力の関係が次のように求められる。

$$\{p\} = \rho\ \mathbf{INF}\ \cdot\{\dot{v}\} \qquad (2.42)$$

ここに、 $\{p\} = \{p_1,\ p_2\ \cdots\cdots p_N,\ p_{N+1}\}$ （N＋1）次 vector

$\{\dot{v}\} = \{\dot{v}_1,\ \dot{v}_2, \cdots\cdots,\ \dot{v}_N,\ \dot{v}_{N+1}\}$ （N＋1）次 vector

INF：fluid influence matrix，（N×N）matrix

いま、図2.15に示したように隣接する接点 i，i＋1 間において動圧力分布は直線状に変化するものとする。また断面は剛体的に振動するものとして全断面にわたつて速度分布は一定であるとすれば（2.41）式および（2.42）式は次のようになる。

$$T_2 = \frac{1}{2}\int p\, y\ell ds = \frac{y}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}(p_k + p_{k+1})\,dx_k$$

$$= \frac{1}{2}\cdot y\cdot\{L\}^T\cdot\{p\} \qquad (2.43)$$

ここに、 $\{L\} = \{\frac{d_1}{2},\ \frac{1}{2}(d_1 + d_2), \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\ \frac{1}{2}\,dx_N\}$

$$\{p\} = \rho \cdot \dot{v}\ \mathbf{INF} \cdot \{1\} \qquad (2.44)$$

ここに、$\{1\} = \{1, 1, 1, \cdots\cdots 1,\}$

$\dot{v}$ ：断面の加速度

（2.44）式を（2.43）式に代入すれば結局次のように運動エネルギが計算される。

$$T_2 = \frac{1}{2}\rho y \dot{v} \{\{L\}^T \cdot \mathbf{INF} \cdot \{1\}\}$$

$$\equiv \frac{1}{2} m v^2 \qquad (2.45)$$

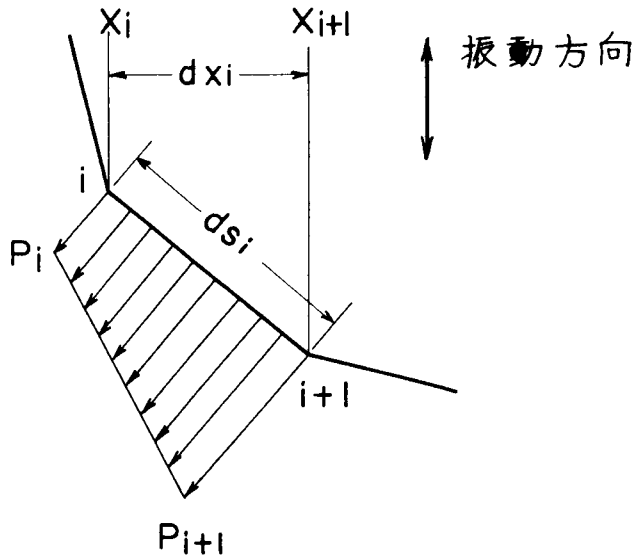


図2.15　線分に働く動圧力分布

この運動エネルギ は 対称性を考慮して全領域の1／4の部分に対して求められたものである。そこで二次元付加水質量係数は次のように定義される。

$$4T_2 = \rho \pi b^2 C_v \qquad (2.46)$$

ここに、b ：振動方向に対する断面の半幅

したがつて、（2.45）式および（2.46）式より二次元付加水質量は次のように求められる。

$$C_v = \frac{4}{\pi b^2} \cdot \{L\}^T \cdot \mathbf{INF} \cdot \{1\} \qquad (2.47)$$

付加水質量係数はまた全断面に働く力に対する断面の加速度の比例定数として定義することも出来る。〔34〕

すなわち、　$m' = R / \dot{v}$　（2.48）

ここに、　$R = \int p \ell ds$

（2.43）式と同様に、（2.44）式より断面に働く力、Rは次のように求められる。

$$R = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2}(p_k + p_{k+1}) dx_k = \{L\}^T \cdot \{p\}$$

$$= \rho \{L\}^T \mathbf{INF} \cdot \{1\} \cdot \dot{v} \qquad (2.49)$$

これより、（２４５）式で定義される付加水質量係数は

$$m' = \rho \{L\}^T \cdot \mathbf{INF} \cdot \{1\} \qquad (250)$$

となり、（２.４５）式に示した運動エネルギより定義されたものと等しくなる。

3.1.2　三次元運動エネルギ

三次元運動エネルギは（２.４１）式と同様に次式で表わされる。

$$T_3 = \frac{1}{2} \int\int p\, y\, \ell\, dA \qquad (251)$$

いま、図２.１６に示したように物体面はＭ個の三角形境界面より構成されているものとすれば、（２.５１）式の積分は次のように書きかえられる。

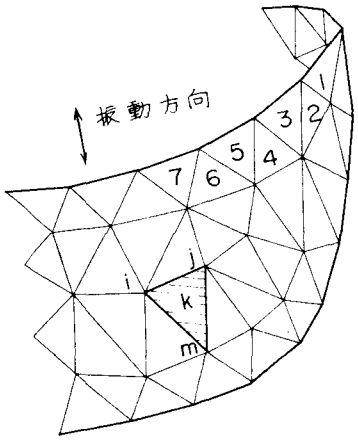


図２.１６　物体面上の三角形境界面

$$T_3 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M} \iint_{A_k} p_k\, y_k\, \ell_k\, dA_k \qquad (252)$$

（２.５２）式中の境界面一つに対する積分は次のようになる。

$$\iint_{A_k} p_k\, y_k\, \ell_k\, dA_k = \{y\}^T \cdot \mathbf{A}^f \cdot \{p\}^e \qquad (253)$$

ここに、$\{y\}^e = \{y_i, y_j, y_m\}$

$\{p\}^e = \{p_i, p_j, p_m\}$

$$\mathbf{A}^f = \frac{\lambda k S k}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

λk：振動方向と要素kの物体面の法線のなす方向余弦

$S k$：三角形kの面積

（2.53）式を（2.51）式に代入すれば、運動エネルギは次のようになる。

$$T_3=\frac{1}{2}\{y\}^T\cdot \mathbf{A}\cdot\{p\} \qquad (2.54)$$

ここに、$\{y\}=\{y_1,\ y_2,\ \cdots\cdots\ y_N\}$

$\{p\}=\{p_1,\ p_2\ \cdots\cdots\ p_N\}$

N：物体面を構成する総接点

一方、物体面を構成する全接点の加速度分布$\{\dot{v}\}$とそれにより物体面に生じる動圧力分布$\{p\}$との関係は（2.25）式より次のように書き表わされる。

$$\{p\}=\rho\cdot \mathbf{INF}\cdot\{\dot{v}\} \qquad (2.55)$$

（2.55）式を（2.54）式に代入すれば次のようになる。

$$T_3=\frac{\rho}{2}\{y\}^T\cdot \mathbf{A}\cdot \mathbf{INF}\cdot\{\dot{v}\}$$

$$\equiv\frac{\rho}{2}\{v\}^T\cdot \mathbf{M}\cdot\{v\} \qquad (2.56)$$

（2.56）式において付加水質量は一般に（N×N）のmatrixの形で求められており、物体面の速度分布が与えられれば1つのscalar量としての付加水質量が求められる。すなわち、いま物体の各接点における速度分布が次のように表わされているものとする。

$$\{v\}=V\{G\} \qquad (2.57)$$

ここに、$\{G\}=\{G_1,\ G_2,\ G_3,\ \cdots\cdots\ G_N\}$

（2.57）式を（2.56）式に代入すれば付加水質量は次のように一つのscaler量で求められる。

$$m=\rho\{G\}^T\cdot \mathbf{M}\cdot\{G\} \qquad (2.58)$$

特別な場合として物体が剛体運動をするときの付加水質量は次のようになる。

$$m=\rho\{1\}^T\cdot \mathbf{M}\cdot\{1\}=\rho\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}M_{ij} \qquad (2.59)$$

いま、船体を1本の梁として解析する場合の付加水質量を求める時、積分領域は船体の全wetted surfaceに相当している。

wetted surface上の接点の位置が図2.17に示したように、船体を長さ方向に分割した横

断面上に分布するものとすれば、各横断面上の接点は同じ速度を持つので一般に次のようになる。

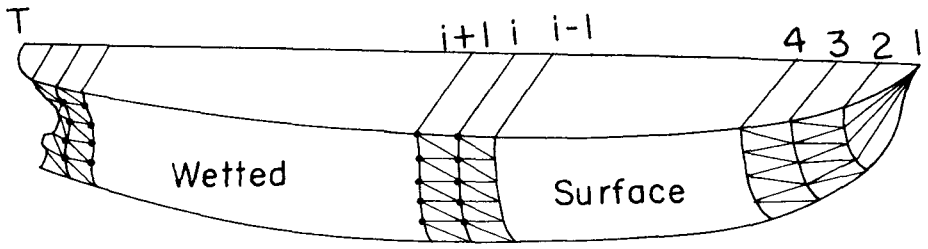


図2.17　船体wetted surface上の接点位置

$$\{ v_i \} = V_i \{ 1 \}$$

$$i = 1, 2, 3, \cdots\cdots, T$$

ここに、V_i ：i 横断面の速度

T：横断面の数

$\{ v_i \}$：i 横断面の速度vector（i 横断面に含まれる接点の数だけの元数をもつ）

ゆえに、全体の速度vector{v}は次のようになる。

$$\{ v \} = \{ v_1, v_2, v_3 \cdots\cdots\cdots, v_T \} \qquad (2.60)$$

$$= \mathbf{D} \cdot \{ u \}$$

ここに、$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \{1\} & & 0 \\ & \{1\} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \{1\} \end{bmatrix}$，N×Tの大きさを持つmatrix

$$\{ u \} = \{ V_1, V_2 \cdots\cdots\cdots\cdots V_T \}$$

（2.60）式を（2.56）式に代入すれば次のようになる。

$$T_3 = \frac{\rho}{2} \{ u \}^T \cdot \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{D} \cdot \{ u \}$$

$$\equiv \frac{\rho}{2} \{ u \}^T \cdot \mathbf{M}_T \cdot \{ u \} \qquad (2.61)$$

(2.56)式で定義されるN×Nの大きさを持つ付加水質量matrix $\mathbf{M}$ はT×Tの大きさを持つ $\mathbf{M}_T$ matrixに縮少される。

このように、流体の運動エネルギは船体の振動モードの関数として求められており、この関係と船体自身の運動エネルギとを組合わすことによつて従来の付加水質量の考え方によることなく流体と弾性体の連成振動としてのconsistentな解を求めることが可能である。このような考え方にもとづいた解法は第4章においてのべる。

さて、船体が次に示す振動モードで振動するものと仮定する。

$$v(x) = f(x) \cdot V \qquad (2.62)$$

ここに、x：船体の長さ方向の座標

この時、各横断面における速度を表わすVector $\{ u \}$ は次式で表わされる。

$$\{ u \} = \begin{Bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_T) \end{Bmatrix} V = \{ f \} \cdot V \qquad (2.63)$$

(2.63)式を(2.61)式に代入すれば

$$T_3 = \frac{1}{2} [\rho \{ f \}^T \cdot \mathbf{M}_T \cdot \{ f \}] V^2$$

となり、三次元撓み振動の付加水質量は次に示す一つのscalar量として与えられることになる。

$$m = \rho \{ f \}^T \cdot \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{INF} \cdot \mathbf{D} \{ f \} \qquad (2.64)$$

3.2 三次元修正係数

3.2.1 三次元修正係数の一般的定義

船体の三次元形状の数学的表示は一般に困難であるが、船体横断面の形状は等角写像を利用することによつてほぼ似通つた形状を近似的に数式化して取扱うことが可能である。これ

らの断面形状はLewis Form, Prohaska Form等のように呼ばれ、船体断面の二次元付加水質量係数は解析的に容易に計算することができる。しかし実際の船体振動による流体は三次元的に運動するので、問題を三次元運動として取り扱わなければならない。一般に三次元問題は数学的取り扱いが困難なため次のような三次元修正係数が考えられている。

いま、船体振動の三次元運動エネルギは次のように表わされるものとする。

$$T_3 = \frac{1}{2}\int_0^L m v^2 dx = \frac{1}{2} M_3 V^2$$

また、二次元的に流体が運動するとした時の運動エネルギは

$$T_2 = \frac{1}{2}\int_0^L m_2 v^2 d\,x = \frac{1}{2} M_2 V^2$$

で表わされ容易に計算出来るので、いま三次元修正係数として

$$J = \frac{T_3}{T_2} = \frac{M_3}{M_2} \qquad (2.65)$$

の値が求められておれば、あるいは近似的に推定出来れば（2.65）式よりM_3が計算出来ることになる。そのために数学的に取り扱いが出来うる例へば回転楕円体等のJの値が計算され、用いられる。〔31〕〔35〕これが従来の方法による三次元修正係数の定義であり、ある振動モードに対応して一つの値で求められるいわゆるoverall Jと呼ばれるものに相当している。電子計算機によるこれまでの船体振動の解析では二次元付加水質量に上述のoverall Jを掛けたものが用いられるのが普通である。この場合、明らかに全体的な運動エネルギは等しくなるが、三次元修正係数が長さ方向に一様であるため、付加水質量の分布形状は必ずしも正確な分布となつていない。そこで三次元修正係数を長さ方向に分布した三次元修正係数を用いた方が実際の分布形状をよく近似するものと思われる。このような考え方に基づき熊井は各断面において次のようにJの値を決定する方法を提案している。〔36〕すなわち、ある船体断面におけるJの値はその同一の断面を持つ船の長さに等しい筒のJの値に等しいと考える方法である。このようなJを特に（2.65）式で定義されたoverall Jと区別してlocal Jと呼ぶことにする。このようなlocal Jの分布よりoverall Jは

$$\bar{J} = \frac{\int_0^L J\, m_2 v^2 dx}{\int_0^L m_2 v^2 dx}$$

として求められるが、（2.65）式で定義された$\bar{J}$とは一般には異なつた値が求められる。

これらが船体振動の計算に実際に用いられている三次元修正係数であるが、本章では有限要素法を使用して求められる船体振動の付加水質量より三次元修正係数の一般的問題を取り扱う。

3.2.2 三次元修正係数marix, J

前節で述べた一般的定義では二次元付加水質量に三次元修正係数を掛けることによつて三次元付加水質量が得られるものとして求められた。勿論、これらは一つのscaler量として定義されたものであり、ある振動モードに対応して三次元修正係数が求められることになる。さらに一般的な定義として振動モードに関係なく三次元修正係数を定義することができる。

すなわち、（2.61）式に示したように三次元付加水質量matrixが求められているとき、三次元修正係数matrix　J は次のように定義することができる。

$$\mathbf{J} = \mathbf{M}_T \cdot \mathbf{M}_2^{-1} \qquad (2.66)$$

ここに、

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & m_T \end{bmatrix}$$

ある形状を有する物体に対して、このような　J　matrixを求めておけば似通つた物体に対して近似的に三次元付加水質量matrixが次のように計算出来る。

$$\mathbf{M}_T{}^{*} = \mathbf{J}\ \mathbf{M}_2^{*} \qquad (2.67)$$

また、（2.67）式より、overall J は次のように求められる。

$$\bar{J} = \frac{\{f\}^T \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{M}_2{}^{*} \cdot \{f\}}{\{f\}^T \cdot \mathbf{M}_2 \cdot \{f\}} \qquad (2.68)$$

3.3 船体高次振動への応用

船体振動の付加水質量の計算にこれまで述べた有限要素法を使用する場合、十分な精度をを保つためには振動モードに応じた有限要素分割をしてやる必要がある。すなわち、船体高次振動になればなる程有限要素の数すなわち解くべき連立方程式の数が非常に多くなることになる。したがつて、高次振動の場合（2.55）式は1000元以上の大きさのmatrixになり直接求めることは現在の電子計算機の容量的、時間的制約から見て殆んど困難に近い。

そこで著者は近似的にこのような有限要素法による計算を可能にするために次のような方法を導入した。〔３７〕

3.3.1　Sub -region Method

有限要素法を使用して付加水質量を計算するには船体をとりまく全流体領域を対象として有限要素に分割しなければならない。この時全流体領域をとりまく面の境界条件は図2.１８に示したようになる。しかし船体形状は船体中心線に関して対称であるので考慮する流体領域は図2.１９に示したように全域の半分でよい。

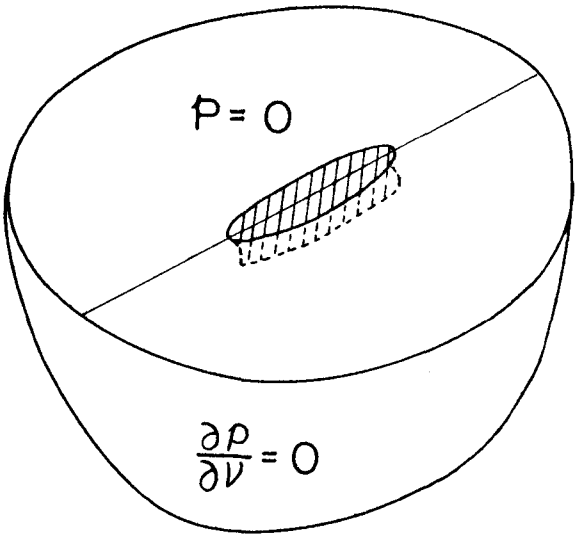


図2.１８　全流体領域

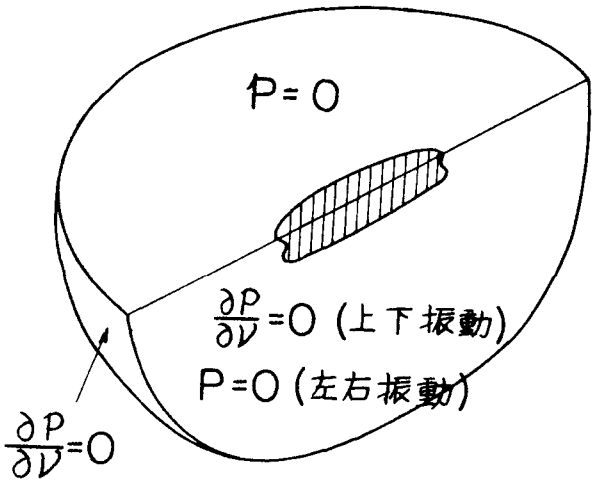


図2.１９　１／２流体領域

さらに、いま船がｎ節の撓み振動をしているとした場合、船体の振動モードはｎ個のnodeと両端を含めて（ｎ＋１）個のloopが存在する。船体のwetted surfaceに働く動圧力分布は当然船体振動モードにより一義的に決定される。熊井〔３８〕は回転楕円体模型の２３および４節振動時に船体keel line上に働く動圧力分布を実測している。これを見ても明らかなように船体wetted surface面上に振動モードのnodeに対応してｐ＝０，loopに対応してｐ＝maxとなる位置が存在する。ただし両端においてはｐ＝０であり、端から１つ中のnodeの中間にｐ＝maxとなる位置がさらにある。また図2.２０に示したように流体領域中にもｐ＝０となる（ｎ＋２）個の面と$\frac{\partial p}{\partial \nu}=0$となる（ｎ＋２）個の面（動圧力が極大または極小となる位置）が存在することになる。このことを考慮すれば図2.１９に示した

流体領域はさらに図2.20に示したようなそれぞれの境界条件をもつ2（n＋1）個のsubregion　に分割することが出来ることになる。もし何らかの形でこれらのsubregionの分割曲面が推定出来れば有限要素法による付加水質量の計算は2（n＋1）個subregionに分けて独立に行なうことができる。

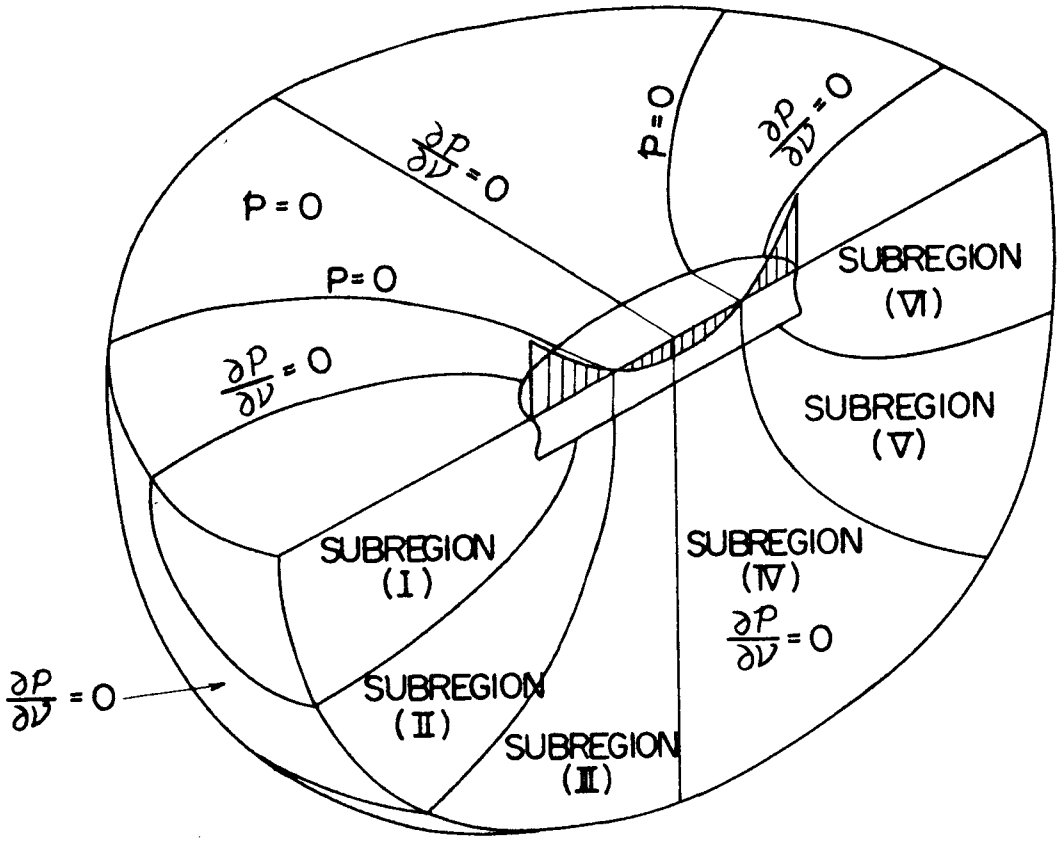


図2.20　Subregionに分割した流体領域

しかる時、全流体領域の運動エネルギは次のように求められる。

$$T_3 = \sum_{i=1}^{2(n+1)} T_i = \sum_{i=1}^{2(n+1)} \frac{1}{2} m_i \quad V^2$$

$$= \frac{1}{2} M_3 V^2 \qquad (2.69)$$

ここに、$m_i = \rho \{ f_i \}^T \cdot_i \mathbf{M}_T \cdot \{ f_i \}$

（subregion i における付加水質量）

$$M_3 = \sum_{i=1}^{2(n+1)} m_i$$

この方法により、有限要素法の計算を行なうcaseの数はn節振動の場合 2(n+1)個のcaseの計算が必要となる。

3.3.2 subregionの分割曲面

Subregion Methodを採用するときにはsubregionに分割する曲面を仮定してやる必要がある。数学的取り扱いが可能な回転楕円体の場合についてこの分割曲面を考察する。

この場合、三次元velocity potentialは楕円座標ζ, μ, ωを用い、Laplaceの方程式を満足する一般解として次の形が求められる。〔30〕

$$\phi = P_n^s(\mu) \cdot Q_n^s(\zeta) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \} s\omega \qquad (2.70)$$

実際の船体振動に対するvelocity potentialは各振動モード曲線の形を考慮して(270)式を組合せ次に示す境界条件を満足するように求められる。

$$\nu_n = -\frac{\partial \phi}{\partial n}\Big|_{\zeta=\zeta_0} \qquad (2.71)$$

(2.71)式を満足するために(2.70)式においてs＝1でなければならず、また振動モードを次に示すような$P_n^1(\mu)$と見合つたものを選ぶと、(2.70)式の解は1項のみで求められることになる。

1) 2節振動　$v(\mu) = \frac{5}{4} V (\mu^2 - \frac{1}{5})$

2) 3節振動　$v(\mu) = \frac{7}{4} V \cdot \mu (\mu^2 - \frac{3}{7})$　(2.72)

3) 4節振動　$v(\mu) = \frac{1}{8} V (21\mu^4 - 14\mu^2 + 1)$

いま、$\zeta=\zeta_1$の回転楕円体曲面上において$p=0$および$p=\max$となる位置は（2.70）式より明らかに次式より求められる。

$$p=0 \qquad P_n^1(\mu)=0$$

$$\frac{\partial p}{\partial \nu}=0 \qquad \frac{d P_n^1(\mu)}{d\mu}=0 \qquad (2.73)$$

ここに、2,3,4節に対して、$n=3,\ 4,\ 5$

（2.73）式より明らかにこれらのsubregionの分割曲線はいづれも回転楕円体と同焦点をもつ2葉双曲面となる。

（2.72）式で表わされる振動モードのnodeおよびloopの位置、およびLegendreの陪関数を使用して（2.73）式より求められる分割曲線を表2.5に示す。

表2.5　分割曲面の方程式

振動節数	分割曲面		振動モード	
	$p=0$	$\frac{\partial p}{\partial \nu}=0$	node	loop
2節振動	$\mu=\pm 1$ $\mu=\pm\sqrt{\frac{1}{5}}$ $=0.447$	$\mu=\pm\sqrt{\frac{11}{15}}$ $=0.856$ $\mu=0$	$\pm\sqrt{\frac{1}{5}}$ $=0.447$	± 1 0
3節振動	$\mu=\pm 1$ $\mu=\pm\sqrt{\frac{3}{7}}$ $=\pm 0.655$ $\mu=0$	$\mu=\pm\sqrt{\frac{27+\sqrt{393}}{56}}$ $=0.914$ $\mu=\pm\sqrt{\frac{27-\sqrt{393}}{56}}$ $=0.358$	$\pm\sqrt{\frac{3}{7}}$ $=0.655$ 0	± 1 $\pm\sqrt{\frac{1}{7}}$ $=\pm 0.378$
4節振動	$\mu=\pm 1$ $\mu=\pm\sqrt{\frac{7+\sqrt{28}}{21}}$ $=\pm 0.765$ $\mu=\pm\sqrt{\frac{7-\sqrt{28}}{21}}$ $=\pm 0.285$	$\mu=\pm\sqrt{\frac{63+\sqrt{924}}{105}}$ $=\pm 0.943$ $\mu=\pm\sqrt{\frac{63-\sqrt{924}}{105}}$ $=\pm 0.557$ $\mu=0$	$\pm\sqrt{\frac{7+\sqrt{28}}{21}}$ $\pm\sqrt{\frac{7-\sqrt{28}}{21}}$	± 1 $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ $=0.577$

これよりp＝0の分割曲面はすべて振動モードのnode位置を通る。$\frac{\partial p}{\partial \nu}=0$の分割曲面は振動モードのloopの位置と多少ずれるが近似的に殆んどloopの位置を通るものと見なしてもよいものと思われる。両端に存在する$\frac{\partial p}{\partial \nu}=0$の分割曲面の位置はほとんど両端に近く、端から最初のnodeまでの間隔の約$\frac{1}{4}$～$\frac{1}{5}$の所に存在する。

また高次振動において船体の平行部においていくつかのloopおよびnodeが存在する場合には、midship sectionと同一の断面をもつ無限長筒のvelocity potentialと見なすことができ、この場合subregionの分割面は船体の長さ方向の軸に垂直でnodeおよびloopを通る平面となる。したがつてこのような分割曲面の推定は図2.21に示したように船形に応じて次に示すようにとればよいものと思われる。

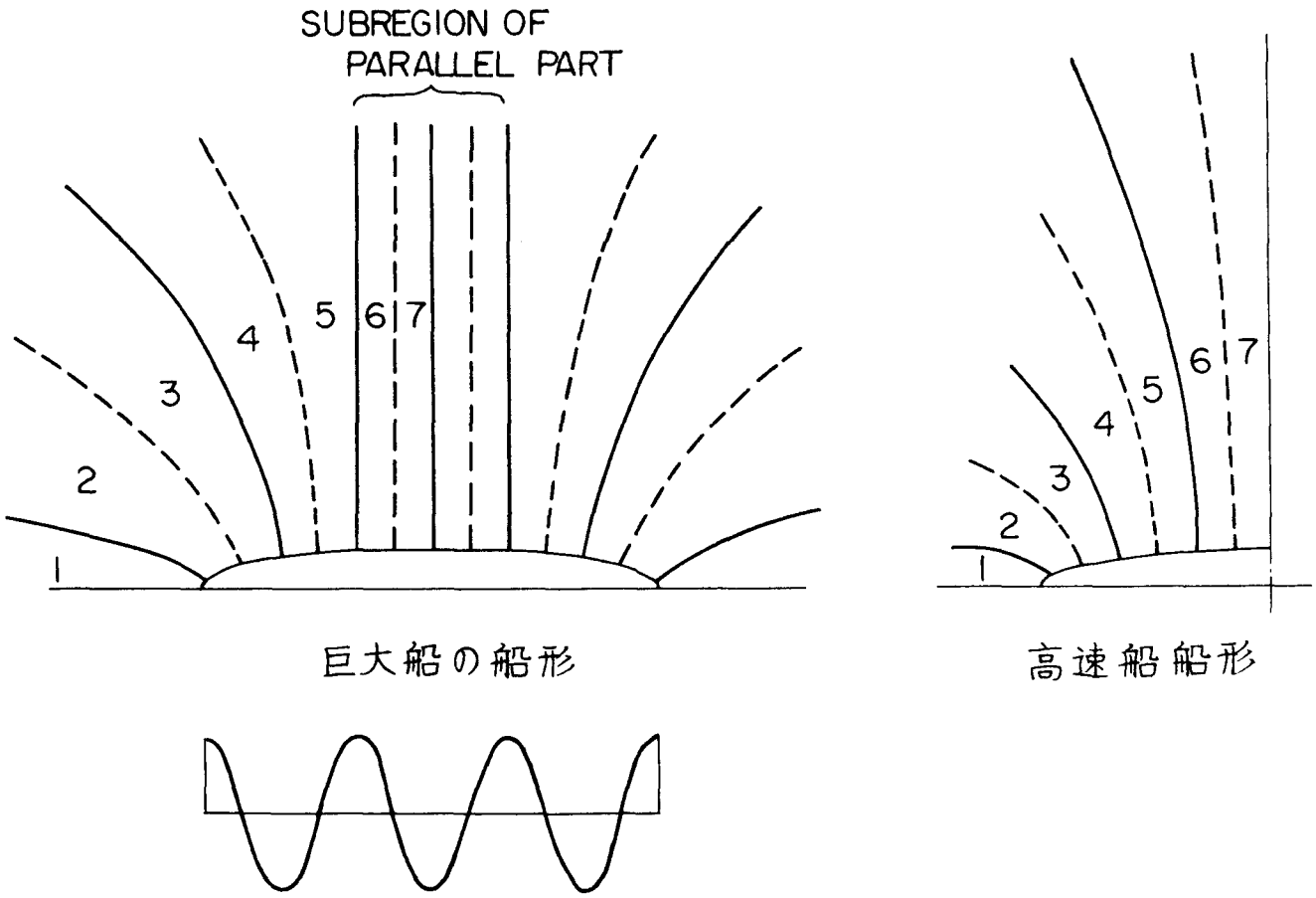


図2.21　船形に応じた分割曲面

(1) 巨大船の船形

平行部長さが全長の1／3程度におよぶので平行部を除いた船首尾部を1つの回転楕円体と考え、それと同焦点を持ち振動モードのloopおよびnodeを通る双曲面をSub-region分割面と考える。平行部においては船体長さ方向に垂直な平面をSubregion分割面と考える。

(2) コンテナー船等の高速船船形

船体と同じ長さ、幅をもつ回転楕円体と見なし、振動モードのloopおよびnodeを通る同焦点を有する2葉双曲面を分割面と考える。

3.3.3 subregionの三次元修正係数

Subregion Methodによる計算では各subregionにおいて独立に付加水質量が計算できるので、この部分について従来のoverall Jと同じ考え方を適用して三次元修正係数を次のように定義することができる。

$$J_i = \frac{{}_iT_3}{{}_iT_2} \qquad i = 1,\ 2, \cdots\cdots,\ 2(n+1) \qquad (2.74)$$

ここに、 ${}_iT_3$= subregion i の三次元運動エネルギ

${}_iT_2$= subregion i の二次元運動エネルギ

このようなJ_iのことをsubregion local Jと呼ぶことにする。(2.74)式によりJ_iは長さ方向に2(n+1)個の数だけ分布して求められることになる。

Subregion local Jとoverall Jとの関係は次に示す通りであり、明らかに分割曲面が正しいものであれば(2.65)式のoverall Jと一致したものである。

$$\bar{J} = \frac{\sum_{i=1}^{2n} (J_i \cdot {}_iT_2)}{\sum_{i=1}^{2n} {}_iT_2} \qquad (2.75)$$

3.3.4 船体の平行部におけるsubregion local J

先にも述べたように船体平行部のsubregion local Jは同じ断面をもつ無限長筒の撓み振動をする場合のoverall Jの値となり、円断面の場合はTaylor〔28〕により、また矩形断面の場合はJoosen〔39〕により理論解が求められている。有限要素法による解の精度を確

かめるため、その比較を行なつた。計算結果を図2.2.2に示す。この図中に、$\lambda=1$, $\sigma=$

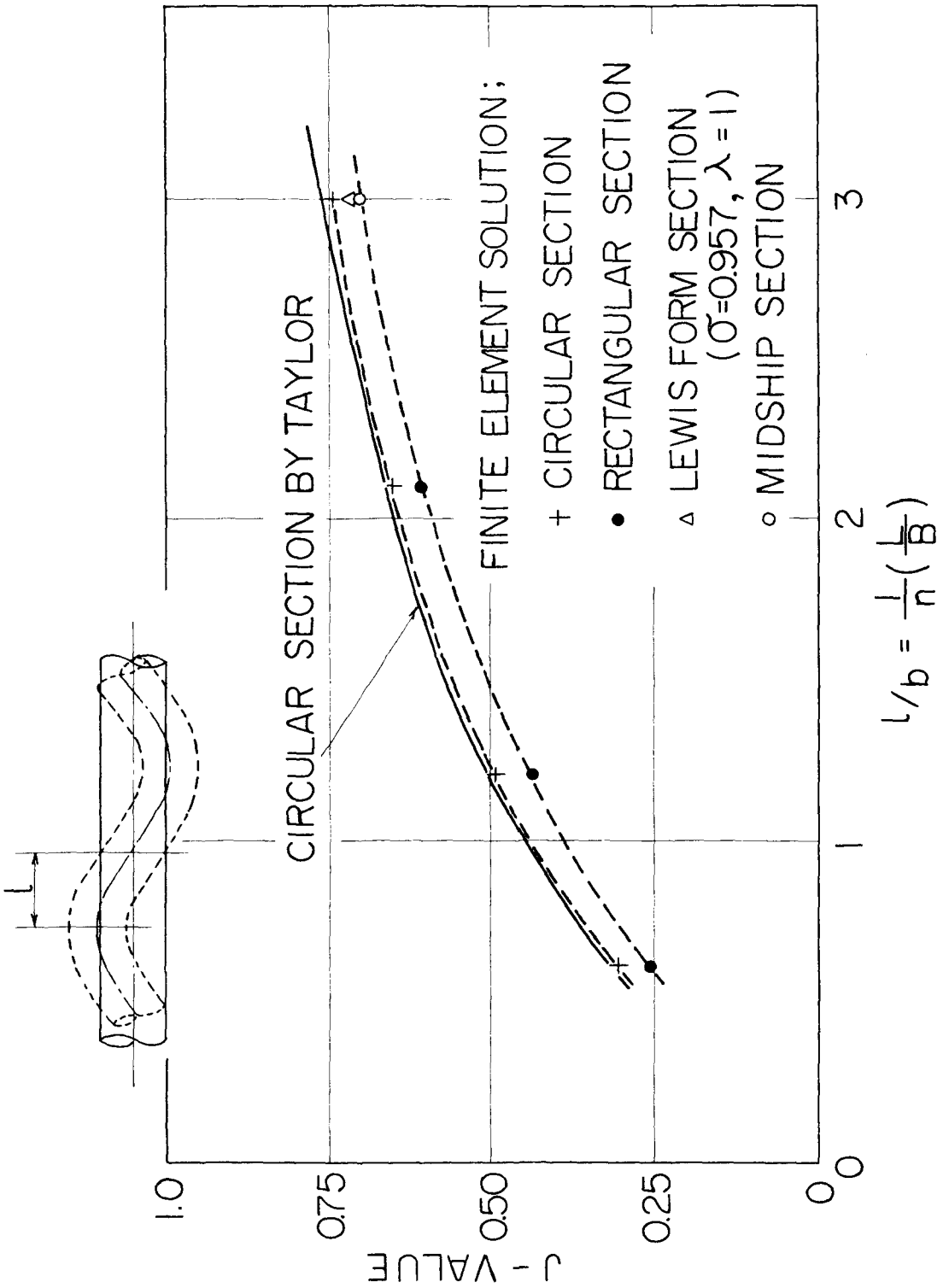


図2.2.2 船体平行部のSubregion local J

0.957のパラメータ値を有するLewis Form Sectionの筒およびr／b＝0.12のround cornerを持つ断面の筒の場合の計算結果もあわせて示している。

この表より明らかなように断面形状の相異による三次元修正係数の差はあまりないことがわかる。

3.3.5 分割曲線の誤差が三次元修正値におよぼす影響

subregion methodを使用する時分割曲線を近似的に3.3.2に示したように推定して計算する必要があるが、この曲面の近似による誤差の影響を検討するため、図2.23に示したように矩形断面筒が撓み振動をするときその$\frac{1}{4}$波長に相当する物体面を一面としてsubregionの大きさを変えた場合のsubregion Jを調べた。計算結果を表2.6に示す。

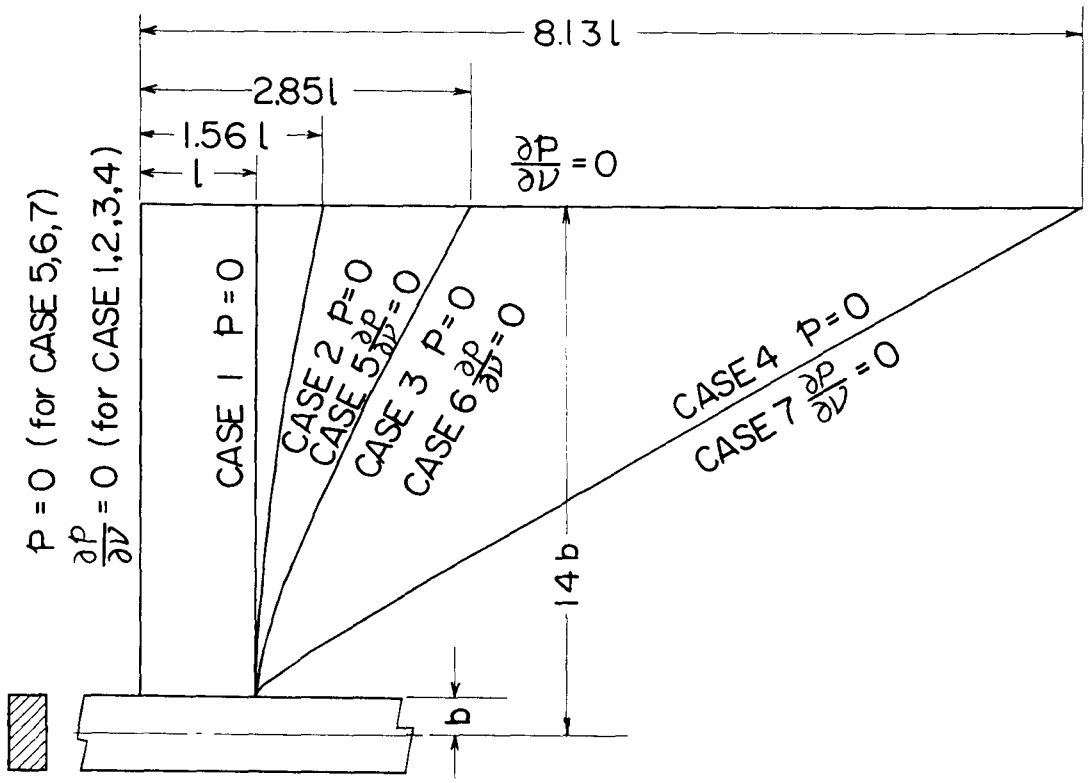


図2.23 同一物体面を有する種々のsubregion 流体領域

表2.6　近似subregionのJの値

case	subregion local J	case	subregion local J
1	0.6833	5	0.6949
2	0.6853	6	0.6548
3	0.6908	7	0.5709
4	0.6958		

このようにsubregionの物体境界面を含む流体領域の大きさが相当変化してもsubregion local Jにおよぼす影響は小さいと見なすことができSubregion Methodを使用する時、特に分割面の近似に基づく誤差は計算精度に大きな影響を与えないものと思われる。

3.4　三次元修正係数の解析例

これまで述べた有限要素法による三次元付加水質量の計算法を従来より解析解のある回転楕円体等に適用し、三次元修正係数の比較を行なうとともにsubregion methodによる解析例を示す。

3.4.1　剛体振動に対する三次元修正係数

物体が流体中を剛体的に振動する場合（n＝0）、前述のsubregionの数は2つであるが長さ方向に対称な物体では1つだけを考慮すればよい。即ちsubregion local Jはそのままoverall Jに相当する。回転楕円体および有限長円筒に対して計算した結果と解析解との比較を表2.7に示す。ここに示した解析解は回転楕円体がLamb〔30〕、有限長円筒が熊井〔32〕によつて求められたものである。

表2.7　三次元修正係数の比較（n＝0）

対象 ＼ 項目		有限要素法による解，J_{FEM}	解析解 J_A	$\frac{J_{FEM}}{J_A}$	備考
回転楕円体	L／B＝6	0.902	0.918（6.01）＊	0.98	有限要素法による計算は流体領域を486個の有限要素に分割したものである
	L／B＝8	0.933	0.945（8.01）	0.99	
	L／B＝10	0.951	0.960（9.01）	0.99	
有限長円筒 L／B＝6		0.822	0.81	1.01	

＊解析解のJの値は括弧内のL／Bに対する値である。

この計算例から明らかなように有限要素法による計算値は理論値とよく一致し、十分な精度を示すことがわかる。

3.4.2　2, 3節振動に対するsubregion local J

2, 3節振動の振動モード曲線を（2.72）式に示した二次および三次曲線と仮定した時の回転楕円体に対するsubregionの三次元修正係数は表2.8に示したように求められる。ただし、subregionの番号は図2.20に示したように端から順につけている。

表2.8　回転楕円体の subregion local J

（L／B＝6）

節　数	subregion	$\frac{8T_3}{\rho B^2 V^2}$	$\frac{8T_2}{\rho B^2 V^2}$	J
2　節	（Ⅰ）（Ⅱ）	0.4233	0.6246	0.6776
	（Ⅲ）	0.1956	0.2730	0.7165
	Total	0.6188	0.8976	0.6894
3　節	（Ⅰ）（Ⅱ）	0.1281	0.2246	0.5701
	（Ⅲ）	0.0508	0.0803	0.6327
	（Ⅳ）	0.0755	0.1140	0.6621
	Total	0.2543	0.4189	0.6072

表から明らかなようにsubregion local J の分布は船体中央部で大きく、船首尾に行くにしたがつて小さくなつている。運動エネルギ の 値は船首尾で大きな値となつているがこれは振動モードの相対振幅が船首尾において大きくなる事に起因している。

三次元修正係数の断面形状による影響を調べるため、L／B＝6の有限長円筒および矩形断面筒および回転楕円体が2節振動をするときのsubregion（Ⅱ）および（Ⅲ）についてsubregion local J の比較を行なつた。計算結果を表2.9に示す。

表2.9　Subregion local J の比較

（L／B＝6　　2節振動）

Subregion	物体形状	$\frac{8T_3}{\rho\pi B^2 V^2}$	$\frac{8T_2}{\rho\pi B^2 V^2}$	Subregion local J
（Ⅰ）	回転楕円体	0.998	1.390	0.718
	有限長円筒	1.031	1.431	0.721
	有限長矩形筒	1.434	2.165	0.662
（Ⅱ）	回転楕円体	——	——	0.678＊
	有限長円筒	0.785	1.309	0.600
	有限長矩形筒	1.090	1.981	0.550

＊表2.8における（Ⅰ）＋（Ⅱ）の値を示した。

次にこれまでの計算では振動モード曲線は簡単に二次（または三次）曲線として取り扱つたが、他の形状の曲線を用いた時、運動エネルギはどのように変化するかを2節振動Subregion Ⅰの部分について調べた。その結果を表2.10に示す。

表2.10　振動モード曲線の形状が三次元運動エネルギにおよぼす影響－三次元運動エネルギ（$\frac{8T_3}{\rho\pi BV^2}$）の比較

物体／振動モード曲線	回転楕円体	有限長円筒	有限長矩形筒
直線分布	0.4035	0.4847	0.6735
二次曲線	0.6159	0.7854	1.0900
正弦曲線	0.5836	0.7346	1.0198

この表より明らかなように、二次曲線と正弦曲線とではあまり差がないが、直線分布と仮定した場合にはかなり運動エネルギは小さくなることがわかる。

第4章　流体と弾性体の連成振動の解法

4.1　基礎運動方程式

物体が流体中（あるいは流体表面）で振動するとき物体が流体から受ける影響は通常物体の撓み形を仮定して、流体の運動エネルギを計算し、それと等価な質量が物体に付け加えられたものと考える付加水質量の方法が適用される。この付加水質量の値は与えられた撓み形により一義的に求められるものであり、明らかにその値を使用して求められた固有値に対応する振動モードが仮定した撓み形に等しいとき正解となる。一般に物体が弾性振動を行なうとき、そのモードが低次のものであれば比較的一致したものが求められるので良好な近似値を与えるものと考えられる。しかし複雑な構造物では振動系もこみ入つたものとなり、また高次振動に対してはその撓み形が簡単な数式表示の出来ないモードとなるので、有限要素法等の力を借りても、一度で正しい振動モードを仮定することはほとんど不可能である。したがつてこのような方法を使用すれば何回かの反復計算を行なうことになり、非常に手数のかかる計算となる。このような困難さを解消する解法として、本章では有限要素法を用いた流体と弾性体の連成振動の解法について述べる。すなわち、物体が振動するとき、とりまく流体の運動エネルギは撓み形の関数として求められて、物体の運動エネルギ、歪エネルギと同等の取り扱いにより振動系の運動方程式がHamiltonの原理より求められる。すなわち固体および流体からなる力学系に対するHamiltonの原理は次式で表わされる。

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T-U)dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} Ldt = 0 \qquad (2.76)$$

ここに、T：力学系の全運動エネルギ

U：力学系の全位置エネルギ

これより、固体が流体中に存在する一般的な場合に、力学系の状態を表わす一般座標を q_1, q_2, q_3……, q_n とすれば、次に示すLagrangeの運動方程式が求められる。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad (2.77)$$

$$(i = 1,\ 2,\ 3, \cdots\cdots,\ n)$$

いま、非圧縮性流体中において微少振動を行なうとき（2.77）式は次のようになる。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_E}{\partial \dot{q}_i}\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_F}{\partial \dot{q}_i}\right)+\frac{\partial U_E}{\partial q_i}=Q_i \qquad (2.78)$$

$$(i=1,\ 2,\cdots\cdots,\ n)$$

ここに、T_E ：弾性体の運動エネルギ

T_F ：流体の運動エネルギ

U_E ：弾性体の歪エネルギ

Q_i ：一般座標 q_i に働く外力

本章では特に自由振動の場合を取り扱うことにする。その時（2.78）式において $Q_i=0$ となる。

流体の運動エネルギはGreen の定理により、物体面の面積分にかきかえられ、調和振動するものと仮定すれば、物体面に働く動圧力を使用して次のように書き表わせる。

$$T_F=\frac{1}{2}\int\int p\,y_n\,dA \qquad (2.79)$$

ここに、y_n ：物体面に垂直方向の振動振幅

一方、物体面に働く動圧力の分布は（2.25）式によつてその位置における加速度分布との関係が次のmatrixの形で求められる。

$$\{p\}=\rho\cdot\mathbf{K}_N^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\{\dot{v}\} \qquad (2.80)$$

$$\equiv\rho\cdot\mathbf{INF}\cdot\{\dot{v}\}$$

ここで定義されたmatrixは特に流体の影響を代表するものであるので以後fluid influence matrixと呼ぶことにする。

4.2 質点系の振動

本節では流体中で振動する弾性体を質点系の振動として解くときの解法を取り扱う。実際上質点系と見なされるものは梁部材又は板部材と考えられ、問題は流体領域を分割したときの物体面上の接点の位置と質点を考える際の質点の位置の関係を対応さす必要があることである。したがつて梁、板として取り扱うとき、その対応関係により少し修正した形で振動方程式が求められる。

連続する弾性体を質点系の振動として解く方法にはmass matrix として lumped mass matrix と consistent mass matrix があり、また stiffness matrixについても梁

の場合は第1編においてのべた。板の場合にも全く同様にmass matrix と stiffness matrixが求められている。〔40〕

4.2.1 物体面の接点と一致して質点を考える場合

これは板の接水振動を有限要素法により解く場合等に相当し、(2.80)式に示されたvector {p}の1つ1つの接点に対応して質点を考える場合である。

流体の運動エネルギは(2.79)式より変形して(2.56)式に示したように次の形で表わされる。

$$T_F = \frac{\rho}{2}\{\dot{y}\}^T \cdot \mathbf{M}_F \cdot \{\dot{y}\} \qquad (2.81)$$

ここに、 $\mathbf{M}_F = \mathbf{A} \cdot \mathbf{INF}$

一方、弾性体の運動エネルギおよび位置エネルギは

$$T_E = \frac{1}{2}\{\dot{y}\}^T \cdot \mathbf{M}_E \cdot \{\dot{y}\} \qquad (2.82)$$

$$U_E = \frac{1}{2}\{y\}^T \cdot \mathbf{K}_E \cdot \{y\} \qquad (2.83)$$

で表わされるので(2.78)式にこれらを代入すれば運動方程式として次式を得る。

$$\{\mathbf{M}_E + \rho\,\mathbf{M}_F\}\{\ddot{y}\} + \mathbf{K}_E \cdot \{y\} = 0 \qquad (2.84)$$

これより、振動方程式は次のように求められる。

$$\det\left|\mathbf{K}_E - \omega^2(\mathbf{M}_E + \rho\,\mathbf{M}_F)\right| = 0 \qquad (2.85)$$

4.2.2 弾性体を数個の質点に置換して考える場合

これは弾性体の接水面における接点のうちいくつかが等しい値をもつように関連ずけられた場合である。例へば船体振動を梁として取り扱う場合、ある断面における接点はすべて等しい振動振幅をもつ。すなわち、物体面上の全接点Nが、質点系として考えるM個の断面のどれかに含まれるものとすれば、次の関係を得る。

$$\{y\} = \mathbf{SUM} \cdot \{y_B\} \qquad (2.86)$$

ここに、{y}：物体面接点の変位vector(N次)

$\{y_B\}$：質点の変位vector(M次)

SUM：(N, M)型matrix, i接点がj質点に属するとき

$\mathbf{SUM}_{ij} = 1$ 他の要素はすべて0の値をとる。

(2.86)式(2.81)式に代入すれば、流体の運動エネルギはcondenseされた形で次のように求められる。

$$T_F = \frac{\rho}{2}\{\dot{y}_B\}^T \cdot \mathbf{SUM}^T \cdot \mathbf{M}_F \cdot \mathbf{SUM} \cdot \{\dot{y}_B\} \qquad (2.87)$$

(2.87)式より(2.85)式に相当する振動方程式は次のようになる。

$$\det\left|\mathbf{K}_E - \omega^2(\mathbf{M}_E + \rho\,\mathbf{SUM}^T \cdot \mathbf{M}_F \cdot \mathbf{SUM})\right| = 0 \qquad (2.88)$$

4.2.3　物体面の接点と質点が一致しない場合

流体領域の有限要素分割と弾性体の有限要素分割を別個に行なうとき、一般に物体面上の接点位置が一致しないことになる。したがつて（2.80）式は適当な変換式によつて弾性体の振動系と組合わせて使用出来るように修正する必要がある。

いま、質点系の接点kが、動圧力を計算したときの物体面上の接点で構成される三角形ij，m内部に存在するものとすれば、接点kにおける　動圧力は接点i，j，mの値を使用して次のように求められる。

$$p_k = [N_i(\xi k, \eta k), Nj(\xi k, \eta k), Nm(\xi k, \eta k)] \cdot \{p\}^e \qquad (2.89)$$

ここに、（ξ k，η k）：三角形 i jmの重心位置に原点をとつたときの接点kの座標

$$N_\alpha(\xi, \eta) = \frac{1}{2S}(e_\alpha + f_\alpha \xi + g_\alpha \eta)$$

$\alpha = i$, j, m.

e，f，g：i jmの座標によつてきまる定数

S：三角形の面積

質点の接点がM個あるとすれば（2.89）式の関係がM個あり、まとめてmatrixの形で次のように表わされる。

$$\{p_B\} = \mathbf{N}_B \cdot \{p\} \qquad (290)$$

ここに　$\mathbf{N}_B$：（M，N）型matrix

一方、質点系の接点により構成される三角形（i'，j'，m'）に流体の接点k'が存在するものとすれば（2.89）式と同様に

$$\hat{v}k' = \{N_i'(\xi k', \eta k'), Nj'(\xi k', \eta k'), Nm'(\xi k', \eta k')\}^T \cdot \{\hat{v}_B\}^e \qquad (2.91)$$

流体の接点N個に対して（2.89）式が求められるのでまとめてmatrixの形で次のように表わされる。

$$\{\hat{v}\} = \mathbf{N}_B' \cdot \{\hat{v}_B\} \qquad (2.92)$$

ここに　$\mathbf{N}_B'$：（N，M）型matrix

（2.90）式および（2.92）式を（2.80）式に代入すれば変換されたfluid influence matrixとして次式を得る。

$$\{p_B\} = \rho\, \mathbf{N}_B \cdot \mathbf{INF} \cdot \mathbf{N}_B' \cdot \{\hat{v}_B\} \qquad (2.93)$$

（2.93）式においてはもはや質点の接点の位置に一致させたものであるので質点の運動方

程式に組み込んで使用することができる。

4.3 梁の振動

流体中の梁の振動を前節に示したように質点系に置換して取り扱わず、梁をTimochenko Beam と見なした連続段付梁と考えた場合、第1編においてのべたTransfer Matrix Method を使用して解く方法について述べる。

梁の曲げ、剪断変形を考え、さらに回転慣性の影響も考慮した基礎微分方程式はHamilton の原理より次のように求められる。

$$\frac{d}{dx}\mathbf{Z} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{Z} + \mathbf{F}(x) \qquad (2.94)$$

ここに、 $\mathbf{Z} = \{y, \theta, M, V\}$ (state vector)

$$\mathbf{F}(x) = \{0, 0, 0, F(x)\}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1/k'AG \\ 0 & 0 & -1/EI & 0 \\ 0 & I_p\omega^2 & 0 & 1 \\ -m\omega^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

船体振動の場合、境界条件は次のようになる。

$$\mathbf{Z} = \{y, \theta, 0, 0\} \quad at \quad x = 0, L \qquad (2.95)$$

Transfer Matrix Method では区間 i において、均一梁と考える。しかるとき(2.94)式における $\mathbf{A}$ は定数matrixとなりその解は次のようになる。

$$\mathbf{Z} = e^{\mathbf{A}x}\left[\int_0^x e^{-\mathbf{A}x}\{\mathbf{F}(x)\}dx + \mathbf{C}\right] \qquad (2.96)$$

いま図2.24に示したように区間 i において流体から受ける動圧力は両端の値の平均値をとるものとすれば

$$F(x) = \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\cdot\begin{bmatrix} F_i \\ F_{i+1} \end{bmatrix} \qquad (2.97)$$

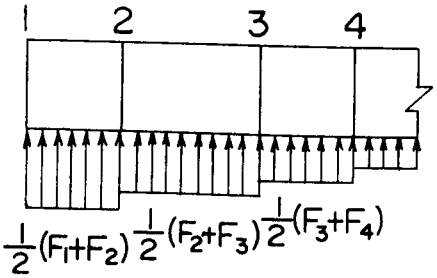


図2.24 均一動圧力分布

となり x の関数でなくなり、（2.96）式は次のようになる。

$$Z(x) = e^{Ax}\{A^{-1}(I_4 - e^{-Ax})\cdot F + C\} \qquad (2.98)$$

区間 i の両端（$x=0$ および ℓi）における state vector を Z_i, Z_{i+1} とし（2.98）式より C を消去すれば次式が求まる。

$$\begin{aligned} Z_{i+1} &= H_i\, Z_i + H_i \cdot A^{-1} \cdot (I_4 - H_i^{-1}) \cdot F \\ &\equiv H_i\, Z_i + W_i \cdot F \end{aligned} \qquad (2.99)$$

ここに、 $H_i = e^{A_i \ell_i} = I_4 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ell_i^k A_i^k)}{k!}$

（2.97）式のかわりに図2.25に示したように区間 i において直線分布をするとすれば

$$F(x) = \frac{\ell i - x}{\ell_i} F_i + \frac{x}{\ell i} F_{i+1} \qquad (2.100)$$

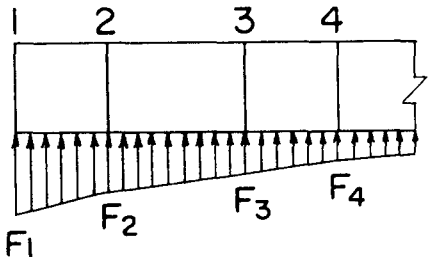


図2.25　直線動圧力分布

となり、この場合も（2.96）式に代入し、積分を遂行すれば（2.99）式と同じ形の式が得られる。

いま、fluid influence matrix と組合すために（2.99）式の右辺の第2項を0要素をつけ加えて enlarge する。

$$Z_{i+1} = H_i Z_i + W_i' \cdot F' \qquad (2.101)$$

ここに、 $W_i' = [\{0\}, \{0\}, \cdots, W_i, \{0\}]$

$$F' = \{F_1, F_2 \cdots\cdots F_{N+1}\}$$

一方、 F' は（2.80）式，（2.81）式および(2.86）式より

$$F' = -\rho\omega^2\ A \cdot INF \cdot SUM \cdot \{y\} \qquad (2.102)$$

であるので、{ y } vector を state vector を用いて表わすため0要素を加えて(2102)式をかき直せば次のようになる。

$$F' = -\rho\omega^2\ INF' \cdot Z' \qquad (2.103)$$

ここに、 $Z' = \{Z_1, Z_2 \cdots\cdots Z_{N+1}\}$

(2.103)式を(2.101)式に代入すれば

$$Z_{i+1} = H_i \cdot Z_i - \rho\omega^2 W'_i \cdot INF' \cdot Z' \qquad (2.104)$$

$$(i = 1,\ 2, \cdots\cdots\cdots,\ N)$$

(2.104)式をmatrixの形でまとめて書けば次の形となる。

$$(\bar{H} - \rho\omega^2 U \cdot INF') \cdot Z' = 0 \qquad (2.105)$$

ここに、 $U = \{W_1',\ W_2',\ W_3' \cdots\cdots W'_N\}$

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} H_1 & -I_4 & 0 & & & 0 \\ 0 & H_2 & -I_4 & & & \cdot \\ 0 & 0 & H_3 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & -I_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_N & -I_4 \end{bmatrix}$$

(2.105)式を次に示すようにsubmatrixに分ける。

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_N \\ Z_{N+1} \end{bmatrix} = 0 \qquad (2.106)$$

梁の両端におけるstate vector Z_1, Z_{N+1}のみ残し、中間のvectorを消去すれば次式を得る。

$$D_1 \cdot Z_1 + D_2 \cdot Z_{N+1} = 0 \qquad (2.107)$$

ここに、 $D_1 = R_{11} - R_{12} R_{22}^{-1} R_{21}$

$D_2 = R_{13} - R_{12} R_{22}^{-1} R_{23}$

(2.95)式で与えられる境界条件を含んだstate vectorのうち、残った未知数4つでvector Q を作れば(2.95)式は次式となる。

$$Z_1 = BS \cdot Q \qquad (2.108)$$

$$Z_{N+1} = BE \cdot Q$$

ここに、 $BS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad BE = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

（2.108）式を（2.107）式に代入すれば結局振動方程式は次式となる。

$$\det \left| D_1 \cdot BS + D_2 \cdot BE \right| = 0 \qquad (2.109)$$

4.4　板の振動

流体中の板の振動をRayleigh-Ritz Method を用いて解く解法について述べる。この方法は吉識〔41〕によつて示された解法を板の接水振動の場合に拡張したものである。この解法の特徴は板の振動モードは次に示す多項式によつて仮定される。

$$W(x, y) = \{S\}^T \cdot \{C\} \qquad (2.110)$$

ここに、$\{S\} = \{S_1, S_2 \cdots\cdots S_N\}$

$\{C\} = \{C_1, C_2 \cdots\cdots C_N\}$

$\{S_i\} = \{s_{i1}, s_{i2}, \cdots s_{ij} \cdots s_{ii}\}$

$\{C_i\} = \{c_{i1}, c_{i2}, \cdots c_{ij} \cdots c_{ii}\}$

$s_{ij} = \varphi(x, y) x^{i-j} y^{j-1}$

$\varphi(x, y) = \prod_{i=1}^{n} (m_i x + n_i y + r_i)^{p_i}$　$: p_i = 0$　自由端

$= 1$　支持端

（境界条件を満足する関数）　$= 2$　固定端

平板の運動エネルギおよび歪エネルギは次式により求められる。

$$T = \frac{1}{2} \lambda^2 D \int_A \{W(x, y)\}^2 dA \qquad (2.111)$$

$$U = \frac{D}{2} \int_A \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dA \qquad (2.112)$$

ここに、$\lambda^2 D = \gamma t \omega^2 / g$

（2.110）式を（2.111），（2.112）式に代入すれば、次式の形で書き表わされる。〔42〕

$$T = \frac{\lambda^2 D}{2} \{C\}^T \cdot J \cdot \{C\} \qquad (2.113)$$

$$U = \frac{D}{2} \{C\}^T \cdot E \cdot \{C\} \qquad (2.114)$$

一方、流体の運動エネルギは（2.81）式より次式で表わされる。

$$T_F = \frac{\rho}{2}\{\dot{y}\}^T \mathbf{M}_F \cdot \{\dot{y}\} \qquad (2.115)$$

上式のvector$\{\dot{y}\}$は（2.110）式の撓み関数を使用して次のように表わされる。

$$\{\dot{y}\} = i\omega \mathbf{S}' \cdot \{C\} \qquad (2.116)$$

$$S'_i = \{S(x_i, y_i)\}^T$$

（2.116）式を（2.115）式に代入すれば次式が求まる。

$$T_F = -\frac{\rho\omega^2}{2}\{C\}^T \cdot \mathbf{S}'^T \cdot \mathbf{M}_F \cdot \mathbf{S}' \cdot \{C\} \qquad (2.117)$$

（2.113），（2.114）式および（2.117）式よりHamiltonの原理を適用すれば結局次に示す振動方程式が求められる。

$$\left| \mathbf{E} - \lambda^2\{\mathbf{J} + \frac{\rho g}{\gamma t}\mathbf{S}'^T \cdot \mathbf{M}_F \cdot \mathbf{S}'\} \right| = 0 \qquad (2.118)$$

4.5　解析例

簡単な計算例として図2.26に示したような円形均一断面をもつ1本の橋脚が水中に垂直

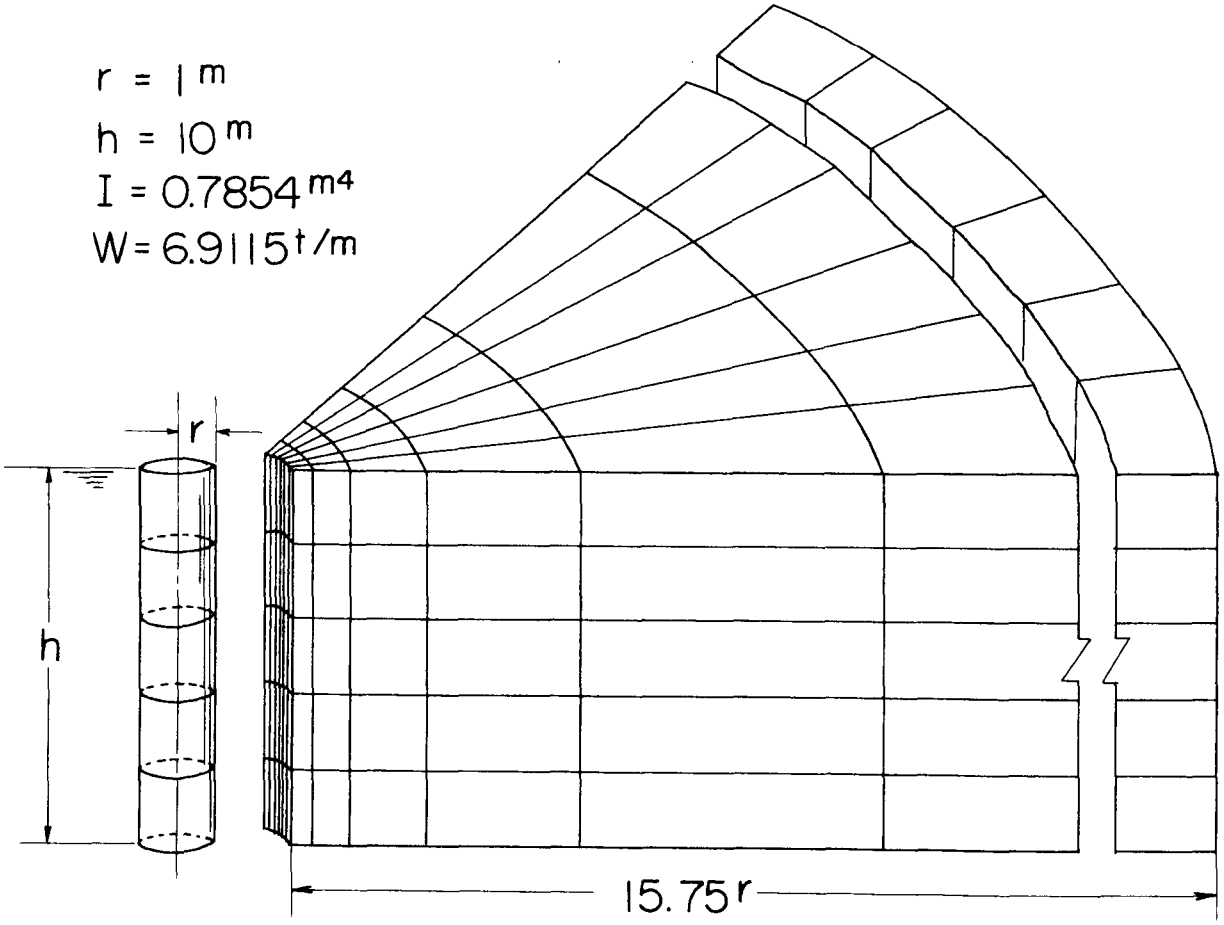


図2.26　流体と弾性体の連成振動の解析例

に建てられた場合の固有振動数を計算する。計算は質点系の振動として取り扱い4.2.2に示した方法を用いた。計算結果を表2.11に示す。

表2.11　流体と弾性体の連成振動の計算例

状態	水のある時		水のない時	接水による低下率	
	本方法	従来の方法*		本方法	従来の方法
固有振動数	519.6	474.0	571.7	0.91	0.83

*桜井の式を積分して$F=\int_0^h p(y)dy$を等分布すると考えて付加質量として柱の自重に加えた計算値

第5章 結　言

本編では流体中での弾性体の振動問題の一般理論として有限要素法を用いた理論解析法について述べた。

まず第2章では有限要素法による三次元流体問題の一般理論を検討した。
すなわち、船体振動時に船体表面に働く動圧力の計算法について具体的な適用法を検討した。
その結果、

(1) 有限要素法を用いて三次元問題を解く方法として著者はLayer Division Methodを導入し、実際計算技術上の問題を検討し、三次元計算を可能なものにした。

(2) 解析解による物体面上に働く動圧力と有限要素法による計算値と比較した結果実用上十分な精度で解が求まることがわかつた。
また、船体振動の場合のように流体領域として無限領域が対象となる場合にこの方法を適用する時近似的に有限領域に置換する必要があり、その近似度による誤差として、

(3) 船の幅の約10倍程度まで取れば動圧力（付加水質量）は1%以内の誤差で求めることが出来、高次振動になればさらに精度はよくなる傾向にあることがわかつた。

第3章においては船体振動の三次元付加水質量の計算法について述べた。まず三次元修正係数の一般的考え方について考察するとともに船体振動の三次元付加水質量を有限要素法により効率よく求める方法として次に示すSubregion Methodを導入した。この方法によれば、

(4) 対象とする全流体領域を船体振動モードに対応して境界条件を考察してSubregionに分割することにより、それぞれの部分について独立に計算を行なうことが出来る。

(5) それぞれのSubregionにおいて三次元修正係数を求めることが出来るので全体としては長さ方向に分布した値として求めることが出来る。

またこの方法を適用する際の精度等の考察を行ない解析例も示した。

第4章において、付加水質量の考え方から離れて流体と弾性体との連成振動として取扱う理論について述べた。この方法によれば、

(6) 流体による影響は有限要素法より求められる振動モードと動圧力の関係（fluid influence matrix）を直接弾性体の運動方程式と組合わして解が得られるので付加水質量の計算のときのように振動モードを仮定する必要がなく、流体と弾性体の振動のconsistentな解を求めることが出来る。

(7) 弾性体として質点系、梁、板の場合について一般的な理論解析法を示した。

第3編　巨大船のNon—Beam Vibrationに関する研究

第1章　緒　　言

船舶の巨大化にともなって船体の固有振動数はますます低くなる傾向にある。巨大船の船体上下振動の解析は従来行なわれて来たように船体を1本の梁と考えた計算によると、常用回転数近傍のblade frequencyは10節以上の高次の固有振動数に相当することになる。

最近の実船計測結果〔17〕によれば、巨大船では一般に7，8節以上の振動数で船の幅方向にもかなり大きな振幅の変化が存在することが認められる。このことは高次の固有振動数に対しては、もはや1本の梁と考えるのは不適当であることを示しているものと思われる。

このように船体の幅方向にも振動モードが存在するような高次振動の現象は従来の1本の梁と考えた解析では得られなかったものであり、梁理論に従がわない振動という意味からNon—Beam Vibrationと呼ばれている。

このような現象は模型実験でも確かめられており〔43〕〔44〕、また理論計算でも船体を船底振動との連成と見なした計算〔45〕〔46〕、船体を1枚の等方性矩形板と見なした計算〔47〕、2本の均一梁の連成振動と見なした計算〔48〕、および格子構造と見なした計算〔49〕等が示されている。

本編では巨大油送船を対象として、船体を梁とバネによって構成される振動系にmodel化して取り扱い、巨大油送船のNon—Beam Vibrationに関する理論的研究を行なった。

まず第2章においては油送船のSide Shellおよび Longi Bhd. をそれぞれ1本の梁と見なし4本の梁が互に均一なバネによって連結されている簡単なmodelを使用してNon—Beam Vibrationの定性的な検討を行なう。〔50〕〔51〕

第3章においては巨大油送船のNon—Beam Vibration の固有振動数および振動モードを定量的に求めるために、船体構造をさらに複雑な振動系にmodel化してTransfer Matrix Methodによる理論計算法〔52〕を示し、Non—Beam Vibration におよぼす諸要素の影響を検討する。

第4章においてはNon—Beam Vibration の付加水質量について有限要素法による計算法を示すとともに、その一般的性質について述べる。

第5章においては2雙の油送船のNon—Beam Vibration の実船実験結果と本編において示した理論計算法による計算値との比較検討を行なう。

第2章　巨大油送船のNon—Beam Vibration の定性的検討

2.1　船体構造のmodel化

巨大油送船の船体構造を図3.1に示したように、Side ShellおよびLongi Bhd をそれぞれ1本の剪断梁と見なし、これらが等分布バネによって連結されている簡単な振動系に模型化してNon—Beam Vibration の発生の定性的な検討を行なう。

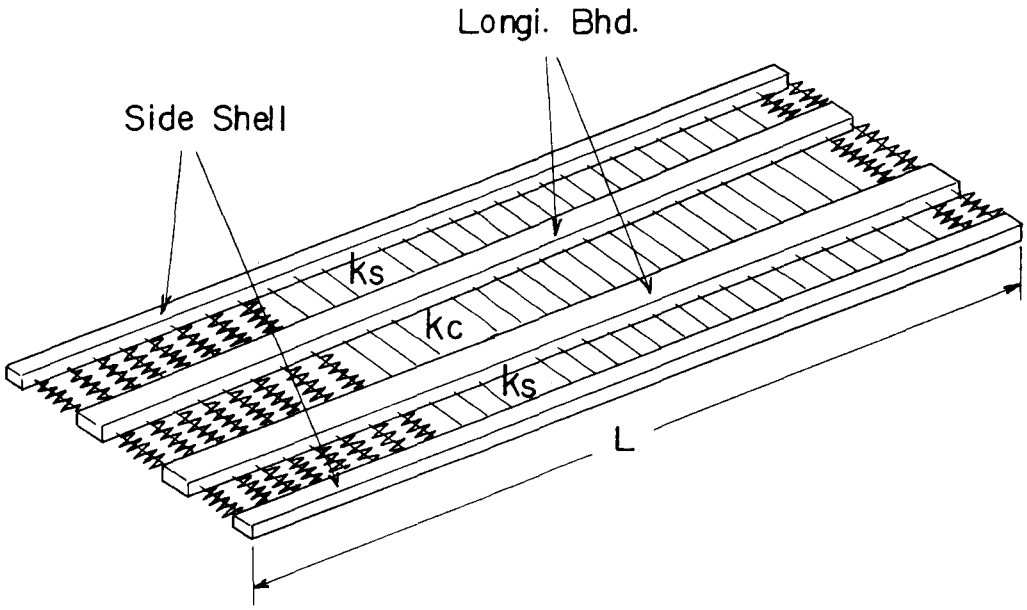


図3.1　4本の梁によるNon—Beam Vibrationの振動系

2.2　振動方程式

4本の剪断梁の運動方程式はそれぞれ次式で表わされる。

$$
\left.
\begin{aligned}
&m_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + k_1 (y_1 - y_2) = S_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \\
&m_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} - k_1 (y_1 - y_2) + k_2 (y_2 - y_3) = S_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \\
&m_3 \frac{\partial^2 y_3}{\partial t^2} - k_2 (y_2 - y_3) + k_3 (y_3 - y_4) = S_3 \frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} \\
&m_4 \frac{\partial^2 y_4}{\partial t^2} - k_3 (y_3 - y_4) = S_4 \frac{\partial^2 y_4}{\partial x^2}
\end{aligned}
\right\} \quad (3.1)
$$

ここに、　mi ：i番目梁の単位長さ当りの質量

ki ：i番目梁と（i＋1）番目梁とを連結するバネ

S_i ：i番目梁の剪断剛性

（3.1）式の連立微分方程式を解くために、まず解を

$$y_j = Y_j\, e^{i\omega t} \quad (j=1,2,3,4)$$

とおき、さらに次の無次元化量を使用する。

$$\left.\begin{aligned} \eta_j &= \frac{Y_j}{L} \\ \xi &= \frac{x}{L} \\ \sigma_j{}^2 &= \frac{m_j L^2 \omega^2}{S_j} \\ K_{ij} &= \frac{k_j L^2}{S_i} \end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot 2)$$

ここに、　L ：梁の長さ

解の形を次のようにおく。

$$\eta_i = A^{(i)} e^{\lambda\xi} \qquad (i=1,2,3,4)$$

これより次の方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \tau_1 & K_{11} & 0 & 0 \\ K_{21} & \tau_2 & K_{22} & 0 \\ 0 & K_{32} & \tau_3 & K_{33} \\ 0 & 0 & K_{43} & \tau_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ A^{(3)} \\ A^{(4)} \end{bmatrix} = 0 \qquad (3\cdot 3)$$

ここに、　$\tau_1 = \lambda^2 + \sigma_1^2 - K_{11}$

$\tau_2 = \lambda^2 + \sigma_2^2 - K_{21} - K_{22}$

$\tau_3 = \lambda^2 + \sigma_3^2 - K_{32} - K_{33}$

$\tau_4 = \lambda^2 + \sigma_4^2 - K_{43}$

船体構造は船体中心線に関して対称であるので（３・２）式に含まれる parameter は次の関係を持つ。

$$\sigma_1=\sigma_4\ ,\ \sigma_2=\sigma_3$$

$$K_{32}=K_{22}\ ,\ K_{33}=K_{21}\ ,\ K_{43}=K_{11}$$

これらの関係を使用して（３・３）式を変形すれば次のようになる。

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \tau_1 & K_{11} & & \\ K_{21} & \tau_2-K_{22} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \tau_1 & K_{11} \\ & & K_{21} & \tau_2+K_{22} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} A^{(1)}-A^{(4)} \\ A^{(2)}-A^{(3)} \\ \hline A^{(1)}+A^{(4)} \\ A^{(2)}+A^{(3)} \end{array}\right] = 0 \qquad (3\cdot 4)$$

（３・４）式より明らかなように、船体中心線に関して対称な振動モードと逆対称な振動モードに分けて取り扱うことができる。すなわち、それぞれの振動モードに対して振動数方程式は次のようになる。

(a)　対称型振動（$A^{(1)}=A^{(4)}$, $A^{(2)}=A^{(3)}$のとき）

$$\begin{vmatrix} \tau_1 & K_{11} \\ K_{21} & \tau_2+K_{22} \end{vmatrix} = 0 \qquad (3\cdot 5)$$

(b)　逆対称型振動（$A^{(1)}=-A^{(4)}$, $A^{(2)}=-A^{(3)}$ のとき）

$$\begin{vmatrix} \tau_1 & K_{11} \\ K_{21} & \tau_2-K_{22} \end{vmatrix} = 0$$

（３・５）式より λ に関する方程式を導けば次に示す重二次方程式が得られる。

$$\lambda^4-2\Phi\lambda^2+\psi=0 \qquad (3\cdot 6)$$

ここに、(a)対称型振動

$$2\Phi=-(\sigma_1^2+\sigma_2^2-K_{11}-K_{21})$$

$$\psi=\sigma_1^2\sigma_2^2-K_{11}\sigma_2^2-K_{21}\sigma_1^2$$

(b)逆対称型振動

$$2\Phi=-(\sigma_1^2+\sigma_2^2-K_{11}-K_{21}-2K_{22})$$

$$\psi=\sigma_1^2\sigma_2^2-K_{11}\sigma_2^2-(K_{21}+2K_{22})\sigma_1^2+2K_{11}K_{22}$$

（3・6）式の方程式の根を

$$\lambda^2=\begin{cases}-\lambda_1^2\\ \\ -\lambda_2^2\end{cases}$$

とおけば、解は次に示すようになる。

$$\eta_1=A_1^{(1)}\cos\lambda_1\xi+A_2^{(1)}\sin\lambda_1\xi+A_3^{(1)}\cos\lambda_2\xi+A_4^{(1)}\sin\lambda_2\xi \qquad (3\cdot7)$$

$$\eta_2=C_1A_1^{(1)}\cos\lambda_1\xi+C_1A_2^{(1)}\sin\lambda_1\xi+C_2A_3^{(1)}\cos\lambda_2\xi+C_2A_4^{(1)}\sin\lambda_2\xi$$

ここに、

$$C_1=1-\frac{1}{K_{11}}(\sigma_1^2-\lambda_1^2)$$

$$C_2=1-\frac{1}{K_{11}}(\sigma_1^2-\lambda_2^2)$$

梁の境界条件は両端自由とすれば

$$\left.\frac{d\eta_i}{d\xi}\right|_{\xi=0\ \mathrm{or}\ 1}=0$$

$$(i=1,2)$$

となり、（3・7）式を代入すれば次の固有値方程式が求められる。

$$\lambda_1\lambda_2\sin\lambda_1\sin\lambda_2=0$$

ゆえに、固有値は次のように求まる。

$$\lambda^2=-(n\pi)^2 \qquad (3\cdot8)$$

$$n=0,1,2,3\cdots\cdots\cdots^{*}$$

2.3 固有振動数および振動型曲線

（3・8）式を（3・6）式に代入しωについて解けば固有振動数が次のように求められる。

対称型振動

$$\left.\begin{matrix}s\omega_{II}^2\ ^{**}\\ s\omega_{I}^2\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\left[\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_K^2\pm\sqrt{(\omega_1^2-\omega_2^2+\omega_S^2-\omega_{SL}^2)^2+4\omega_{SL}^2\omega_S^2}\right] \qquad (3\cdot9a)$$

* n＝0は$\lambda_1\lambda_2=0$の固有値に対応している。

** 固有振動数ωの添字は左下に対称型振動のとき s、逆対称型振動のとき a をつけ、右下に低い方の固有振動数に I を、高い方の固有振動数に II をつけて表わす。

逆対称型振動

$$\left.\begin{matrix} a\omega_{II}^2 \\ a\omega_{I}^2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left[\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_Y^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2-\omega_2^2+\omega_S^2-\omega_{SL}^2-2\omega_L^2)^2+4\omega_{SL}^2\omega_S^2}\right] \qquad (3\cdot 9b)$$

ここに、 $\omega_1^2=\frac{S_1}{m_1}\frac{(n\pi)^2}{L^2}$ （Side Shell のみの固有振動数）

$\omega_2^2=\frac{S_2}{m_2}\frac{(n\pi)^2}{L^2}$ （Long Bhd のみの固有振動数）

$$\omega_S^2 = \frac{k_S}{m_1}$$

$$\omega_{SL}^2 = \frac{k_S}{m_2}$$

$$\omega_L^2 = \frac{k_C}{m_2}$$

$$\omega_K^2 = \omega_S^2+\omega_{SL}^2$$

$$\omega_Y^2 = \omega_S^2+\omega_{SL}^2+2\omega_L^2$$

また、これらの固有振動数に対応する振動型曲線は次のようになる。

$$\eta_1=A\cos n\pi\xi$$

$$\eta_2=CA\cos n\pi\xi \qquad (3\cdot 10)$$

ここに、 $C=1+\left(\frac{\omega_1}{\omega_S}\right)^2-\left(\frac{\omega}{\omega_S}\right)^2$

（3・9）式において n＝0 とおけば、（3・10）式から明らかなように4本の梁が相互に剛体的に振動する場合の固有振動数が次のように求められる。

$$\left.\begin{matrix} s\overline{\omega_{II}}^2 \\ s\overline{\omega_{I}}^2 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \omega_K^2 \\ 0 \end{matrix}\right. \qquad (3\cdot 11)$$

$$\left.\begin{matrix} a\overline{\omega_{II}}^{\,2} \\ \\ a\overline{\omega_{I}}^{\,2} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left[\omega_Y{}^2 \pm \sqrt{(\omega_S - \omega_{SL}{}^2 - 2\omega_L{}^2)^2 + 4\omega_{SL}{}^2\omega_S{}^2}\right]$$

これらの長さ方向に0節振動をする場合の横方向の振動型曲線は図3.2に示したようになる。

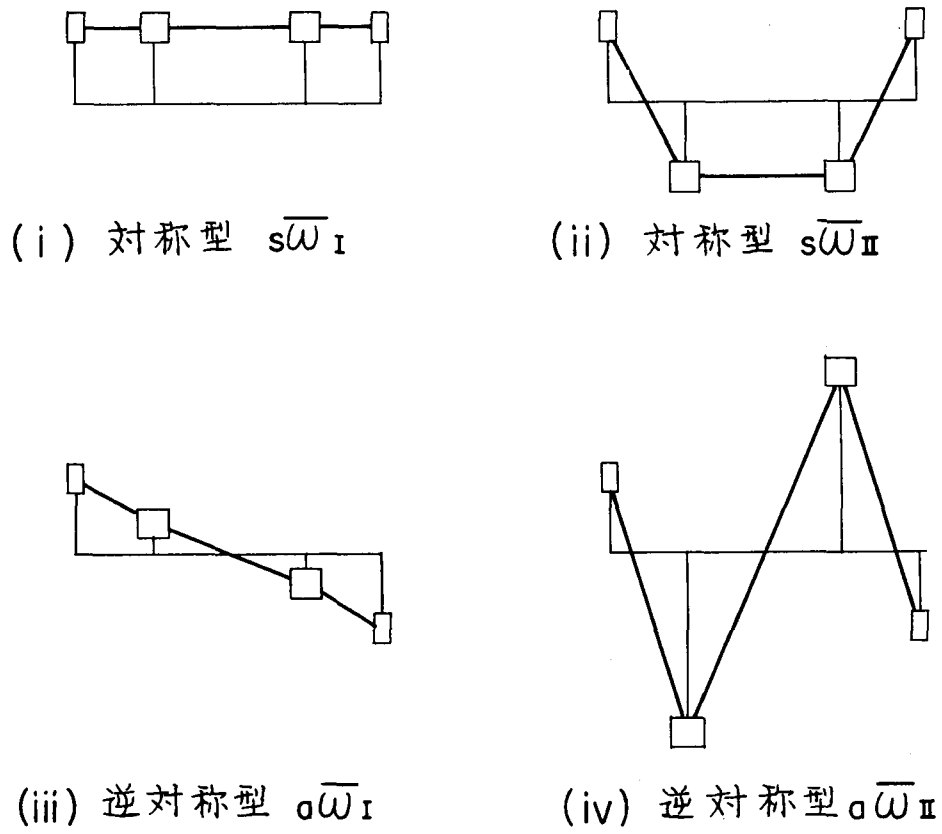


図3.2　0節振動の横断面振動型曲線

このように、$s\overline{\omega_I}$, $a\overline{\omega_I}$, $s\overline{\omega_{II}}$, $a\overline{\omega_{II}}$ は順次、横方向の0，1，2，3節振動に対応することがわかる。ただし $s\overline{\omega_I}=0$ は全体の振動系の剛体運動としての解に相当している。

また、k_S, $k_C \to \infty$ のとき、（3・9）式のそれぞれの固有振動数は次のようになる。

$$s\omega_I \to \omega_T$$

$$s\omega_{II},\ a\omega_I,\ a\omega_{II} \to \infty \qquad (3.12)$$

ここに、$\omega_T{}^2 = \dfrac{S_1+S_2}{m_1+m_2} \cdot \dfrac{(n\pi)^2}{L^2}$（1本の梁としての固有振動数）

すなわち、$s\omega_I$は従来の1本の剪断梁と考えた場合の固有振動数に近づき、他の3つの系列の固有振動数は現われない。したがって$s\omega_I$は従来の梁理論による固有振動数に対応するものと見なすことができ、他の3つの系列の固有振動数は船体の幅方向の剛性を考慮することによって新しく発生するNon—Beam Vibration と考えることができる。

このNon—Beam Vibration が発生する0節振動型曲線の固有振動数には次の大小関係がある。

$$a\overline{\omega_{II}} > s\overline{\omega_{II}} > a\overline{\omega_{I}} > s\overline{\omega_{I}} = 0$$

しかし、実際の船体振動の場合には、対称型および逆対称型振動によって付加水質量の影響が異なるため必ずしもこの関係は成立しないものと思われる。

2.4 Non—Beam Vibration の定性的検討

2.4.1 Non—Beam Vibration の固有振動数の一般的傾向

次に、梁がn節の撓み振動をする場合のNon—Beam Vibration の性質の定性的検討を行なうために、次の無次元化量を導入する。

$$m = \frac{m_2}{m_1}, \quad k = \frac{k_C}{k_S}, \quad \nu^2 = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

$$K = \frac{ksL^2}{S_1\pi^2}, \quad k_n = \frac{K}{n^2}$$

$$\Lambda^2 = \frac{\omega^2}{\omega_1\omega_2}$$ （無次元化振動数）

$$\Lambda_1{}^2 = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{\nu^2}$$ （Side Shellのみの無次元化振動数）

$$\Lambda_2{}^2 = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \nu^2$$ （Long Bhd のみの無次元化振動数）

$$\Lambda_T{}^2 = \frac{1+m\nu^2}{(1+m)\nu}$$ （1本の梁と考えた場合の無次元化振動数）

これらの無次元化量を使用して（３・９）式で表わされる固有振動数および（３・１０）式で表わされるSide Shell と Longi Bhd の振幅比は次のように表わされる。

対称型振動

$$\left.\begin{matrix} {}_{s}\Lambda_{II}^{2} \\ {}_{s}\Lambda_{I}^{2} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\nu^2} + \nu^2 + \frac{k_n}{\nu}\left(1+\frac{1}{m}\right)\right.$$

$$\left. \pm\sqrt{\left\{\frac{1}{\nu^2} - \nu^2 + \frac{k_n}{\nu}\left(1-\frac{1}{m}\right)\right\}^2 + \frac{4k_n^2}{m\nu^2}}\right] \qquad (3\cdot13a)$$

逆対称型振動

$$\left.\begin{matrix} {}_{a}\Lambda_{II}^{2} \\ {}_{a}\Lambda_{I}^{2} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\nu^2} + \nu^2 + \frac{k_n}{\nu}\left(1+\frac{1}{m}+\frac{2k}{m}\right)\right.$$

$$\left. \pm\sqrt{\left\{\frac{1}{\nu^2} - \nu^2 + \frac{k_n}{\nu}\left(1-\frac{1}{m}-\frac{2k}{m}\right)\right\}^2 + \frac{4k_n^2}{m\nu^2}}\right] \qquad (3\cdot13b)$$

$$C = \frac{\eta_2}{\eta_1} = 1 + \frac{\nu}{k_n}\left(\frac{1}{\nu^2} - \Lambda^2\right) \qquad (3\cdot13c)$$

（３・１３）式よりNon-Beam Vibration の４つの系列の無次元化振動数は次の性質を持つことが容易に証明出来る。

(1) 対称型振動の低い方の固有振動数（${}_{s}\Lambda_{I}$）はSide Shell のみおよび Longi Bhd のみの固有振動数（Λ_1およびΛ_2）の中間に存在し、節数の増加にしたがってそれぞれ低い方の固有振動数に近づく。また振動型曲線はそれぞれの単独の固有振動数の大小によって傾向が異なるが、固有振動数の低い方の梁の振幅が一般にもう一つの梁の振幅より大きく、節数の増加とともにその振幅差は大きくなる。両梁は同相振動をする

(2) 対称型振動の高い方の固有振動数（${}_{s}\Lambda_{II}$）はSide Shell のみおよび Longi Bhd のみの固有振動数のいずれよりも高い所に存在し、節数が増加するにしたがってそれぞれ高い方の固有振動数に近づき、振幅比は一般に固有振動数の高い方の梁が大きく、２本の梁

は逆相振動をする。

(3) 逆対称型振動の低い方の固有振動数（$a\Lambda_{I}$）はそれぞれ単独の梁の固有振動数の低いい方の固有振動数より高い範囲に存在する。節数の増加にしたがってそれぞれのうち低い方の固有振動数に近づく。振動型曲線の傾向は対称型振動の(1)と同じである。

(4) 逆対称型振動の高い方の固有振動数（$a\Lambda_{II}$）はそれぞれ単独のいずれの固有振動数よりも高い範囲に存在し、振動型曲線は対称型振動の(2)と同じ傾向を示す。

このように、それぞれの系列の固有振動数は完全に分離して求められ、その振動型曲線の特徴により分類することができる。

例としてm＝1、k＝1、K＝10の場合の計算例を図3.3（i）および（ii）に示す。Λ_Tは従来の1本の梁としての固有振動数を表わすものであり、$s\Lambda_{I}$の低次振動ではΛ_Tに近い値を示すが、高次振動になれば上記(1)の傾向に示すことがわかる。

2.4.2 Non-Beam Vibration の固有振動数におよぼす質量比の影響

次に1本の梁としての固有振動数を一定として（$\Lambda_T=1$）、Side Shell および Longi Bhd の質量比（m）を変化させたときのNon-Beam Vibration の固有振動数におよぼす影響を調べる。この時、それぞれ単独の梁の無次元化固有振動数は次のようになる。

$$\Lambda_1=m\ ,\ \Lambda_2=\frac{1}{m}$$

上述したNon-Beam Vibration の性質より明らかなように、m＞1のとき$\Lambda_1>\Lambda_2$となるので、節数の増加とともに、次の傾向を有する。

$$s\Lambda_{I},\ a\Lambda_{I}\ \rightarrow\ \Lambda_2\quad(\eta_2\ >\ \eta_1)$$

$$s\Lambda_{II},\ a\Lambda_{II}\ \rightarrow\ \Lambda_1\quad(\eta_1\ >\ \eta_2)$$

逆に、0＜m＜1のときは次のようになる。

$$s\Lambda_{I},\ a\Lambda_{I}\ \rightarrow\ \Lambda_1\quad(\eta_1\ >\ \eta_2)$$

$$s\Lambda_{II},\ a\Lambda_{II}\ \rightarrow\ \Lambda_2\quad(\eta_2\ >\ \eta_1)$$

k＝1，K＝10とおきm＝$\frac{1}{2}$，1，2，3と変化させた時の計算例を図3.4（i）および（ii）に示す。

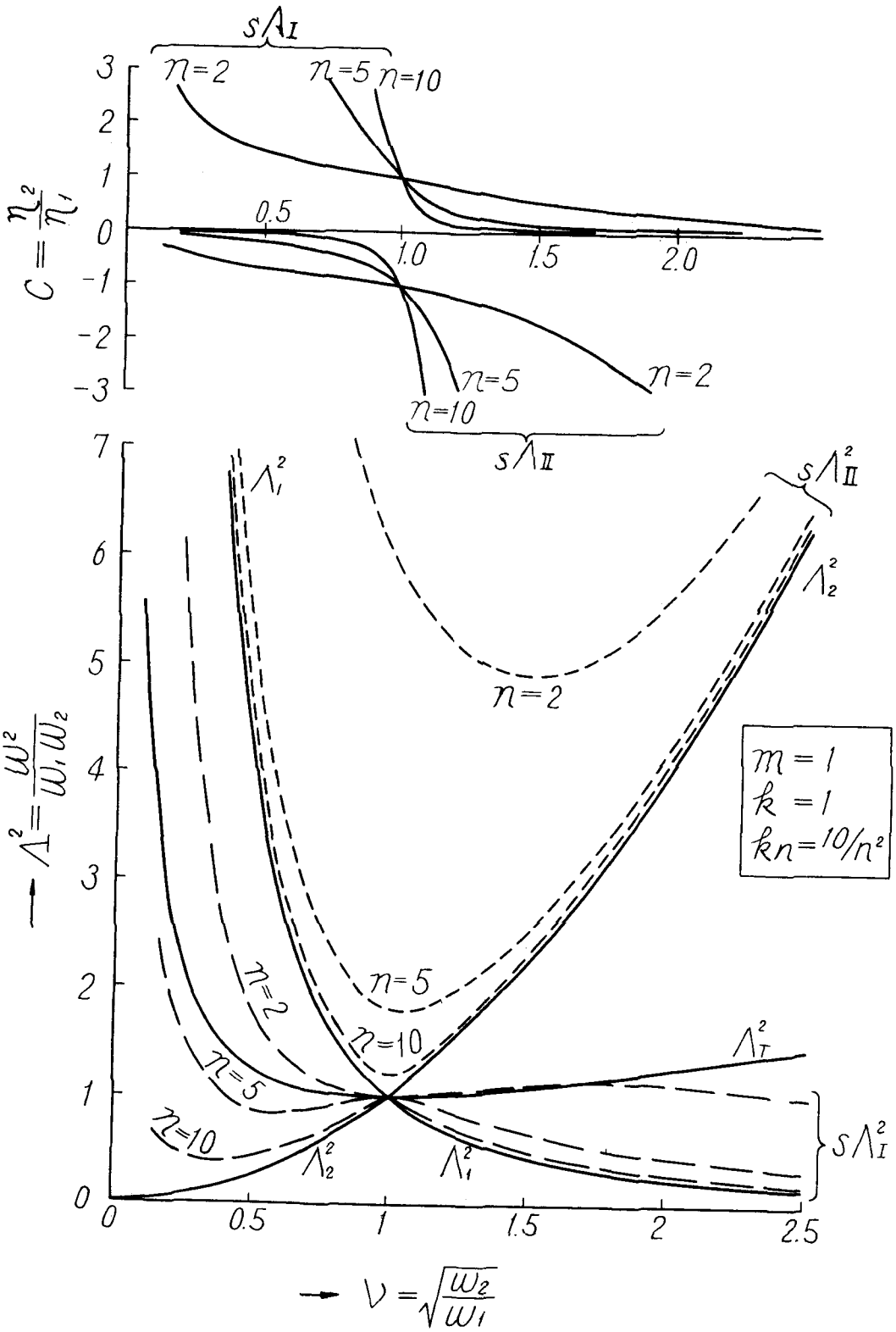


図 3.3 (i) Non-Beam Vibrationの固有振動数（対称型振動）

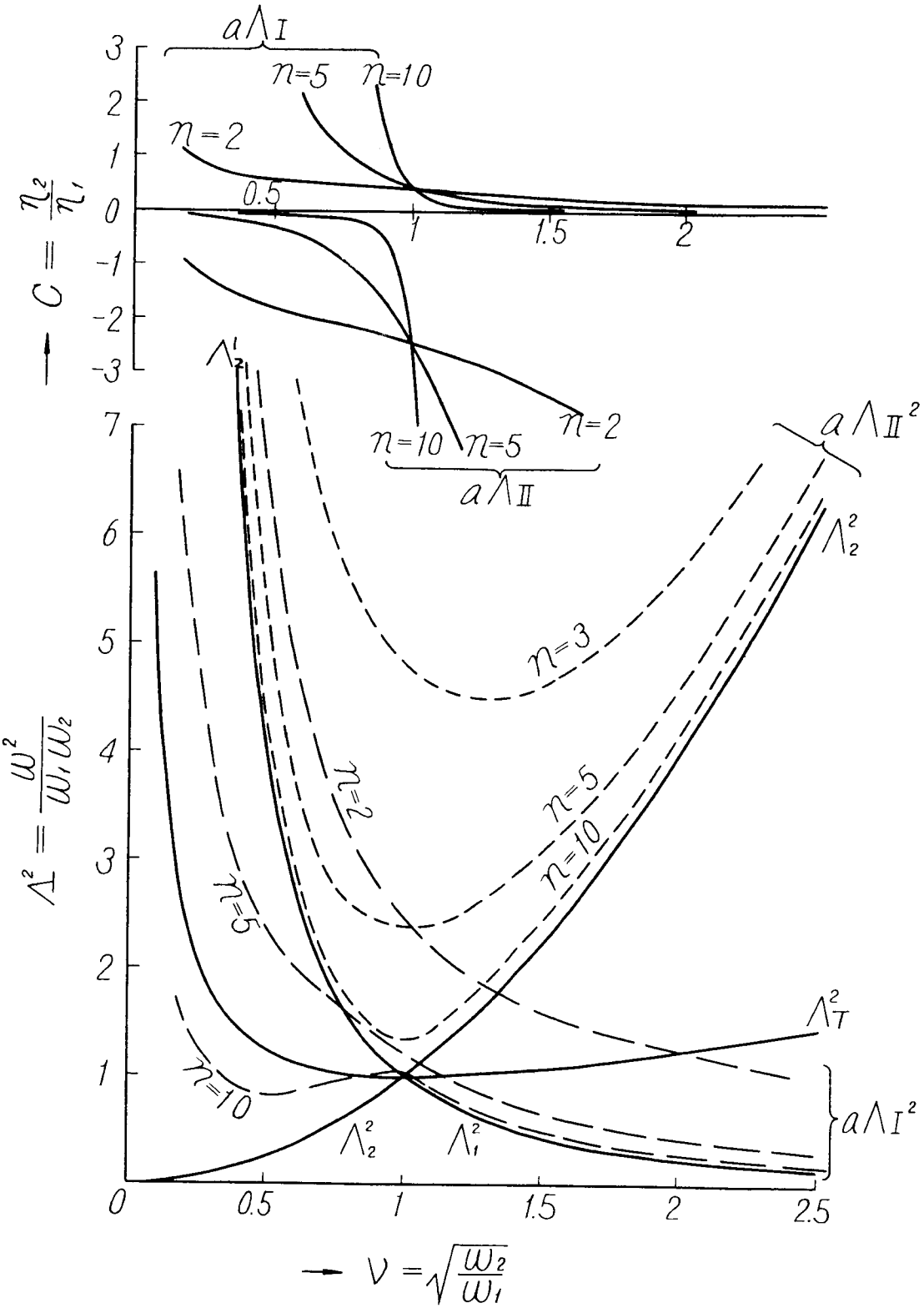


図 3.3 (ii) Non-Beam Vibrationの固有振動数（逆対称型振動）

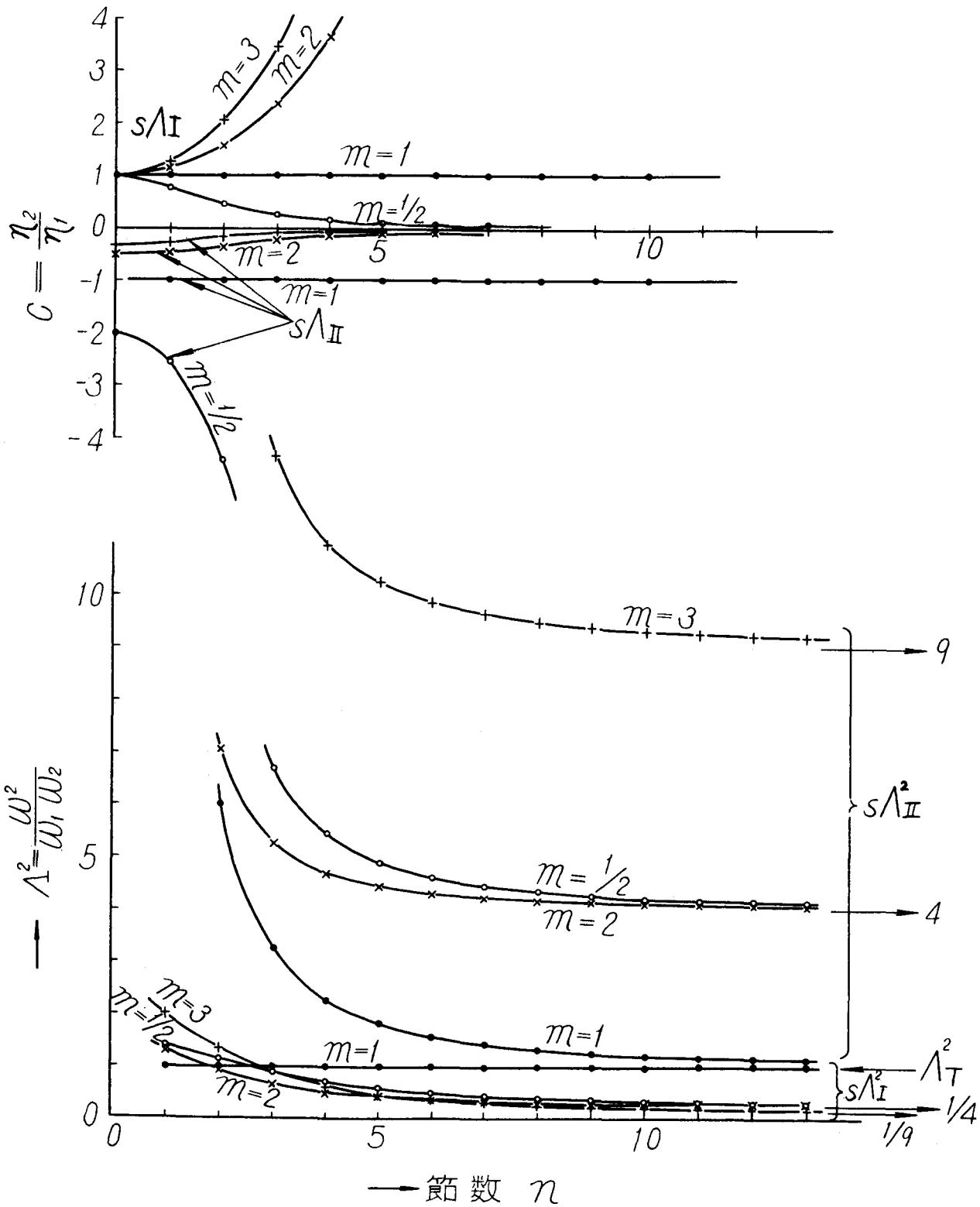


図 3.4 (i)　Non-Beam Vibration の固有振動数におよぼす梁の質量比の影響（対称型振動）

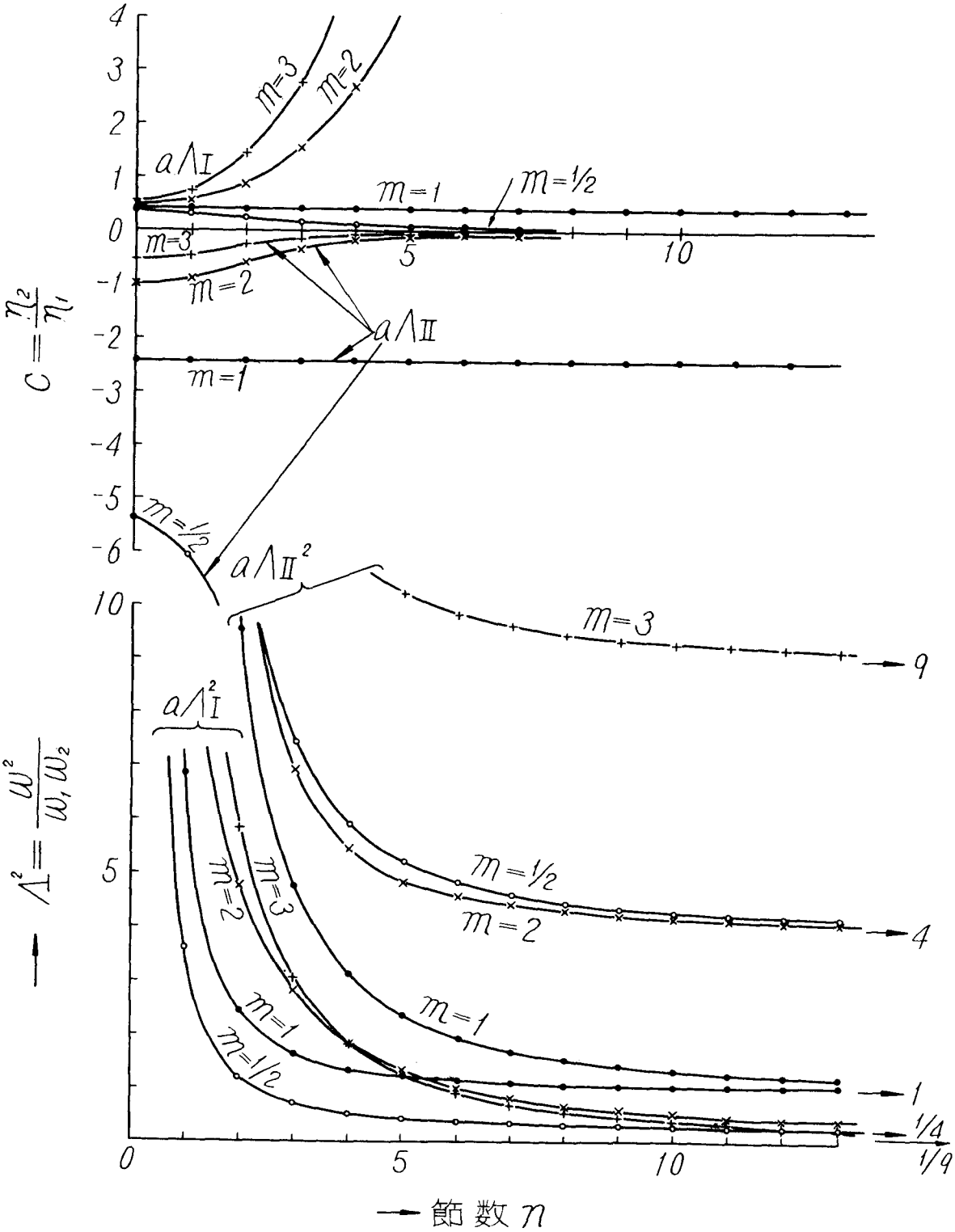


図 3.4 (ii) Non-Beam Vibration の固有振動数におよぼす梁の質量比の影響（逆対称型振動）

一般に、両梁の質量の差が大きくなるにしたがって、両梁のNon—Beam Vibrationの固有振動数の差（$s\Lambda_{I}$と$s\Lambda_{II}$および$a\Lambda_{I}$と$a\Lambda_{II}$）も大きくなる。

2.4.3 Non—Beam Vibration の固有振動数におよぼす連結バネの影響

梁の連結バネがNon—Beam Vibration の固有振動数におよぼす影響の計算例を図3.5（i）および（ii）に示す。この計算では$\nu=0.5$，$m=2$，$k=1$の場合$K=1$，20，100について行なった。一般に$K\to 0$になるにしたがって、Non—Beam Vibration の固有振動数はSide Shellのみおよび Longi Bhd のみの固有振動数に近づく。対応する振動型曲線はその比が∞または0に近づき、これより振動型はそれぞれの単独の梁としての振動型曲線を有することがわかる。$K\to\infty$となると、Non—Beam Vibrationの固有振動数は（3.12）式に示した傾向を示し、対応する振動型の振幅比は次の値に近づく。

対称型振動　$s\Lambda_{I}$，$C\to 1$

$s\Lambda_{II}$，$C\to -\dfrac{1}{m}$

逆対称型振動

$$a\Lambda_{I},C\to\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{m}-\frac{2k}{m}+\sqrt{\left(1-\frac{1}{m}-\frac{2k}{m}\right)^{2}+\frac{4}{m}}\right]$$

$$a\Lambda_{II},C\to\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{m}-\frac{2k}{m}-\sqrt{\left(1-\frac{1}{m}-\frac{2k}{m}\right)^{2}+\frac{4}{m}}\right]$$

2.4.4 Non—Beam Vibrationの固有振動数におよぼす連結バネ比（k）の影響

Side Shell と Longi Bhdを連結するバネ（k_S）とLongi Bhd間を連結するバネ(k_C)のバネの強さの比k（$=k_C/k_S$）がNon—Beam Vibrationの固有振動数におよぼす影響を調べる。この場合対称型振動は（3.13）式より明らかなようにk_Cには無関係にk_Sのみにより求められる。

すなわち、k_Sの値は関係するがkのparameterを含まない。そして逆対称型振動のみk_Cの影響が現われる。$m=2$，$\nu=0.5$，$K=10$とし、$k=0.5$，1，2，10と変化させた時の計算例を図3.6に示す。$k\to 0$のとき、逆対称型固有振動数はそれぞれ対称型固有振動数に一致する。すなわち、

$$a\Lambda_{I}\to s\Lambda_{I}$$

$$a\Lambda_{II}\to s\Lambda_{II}$$

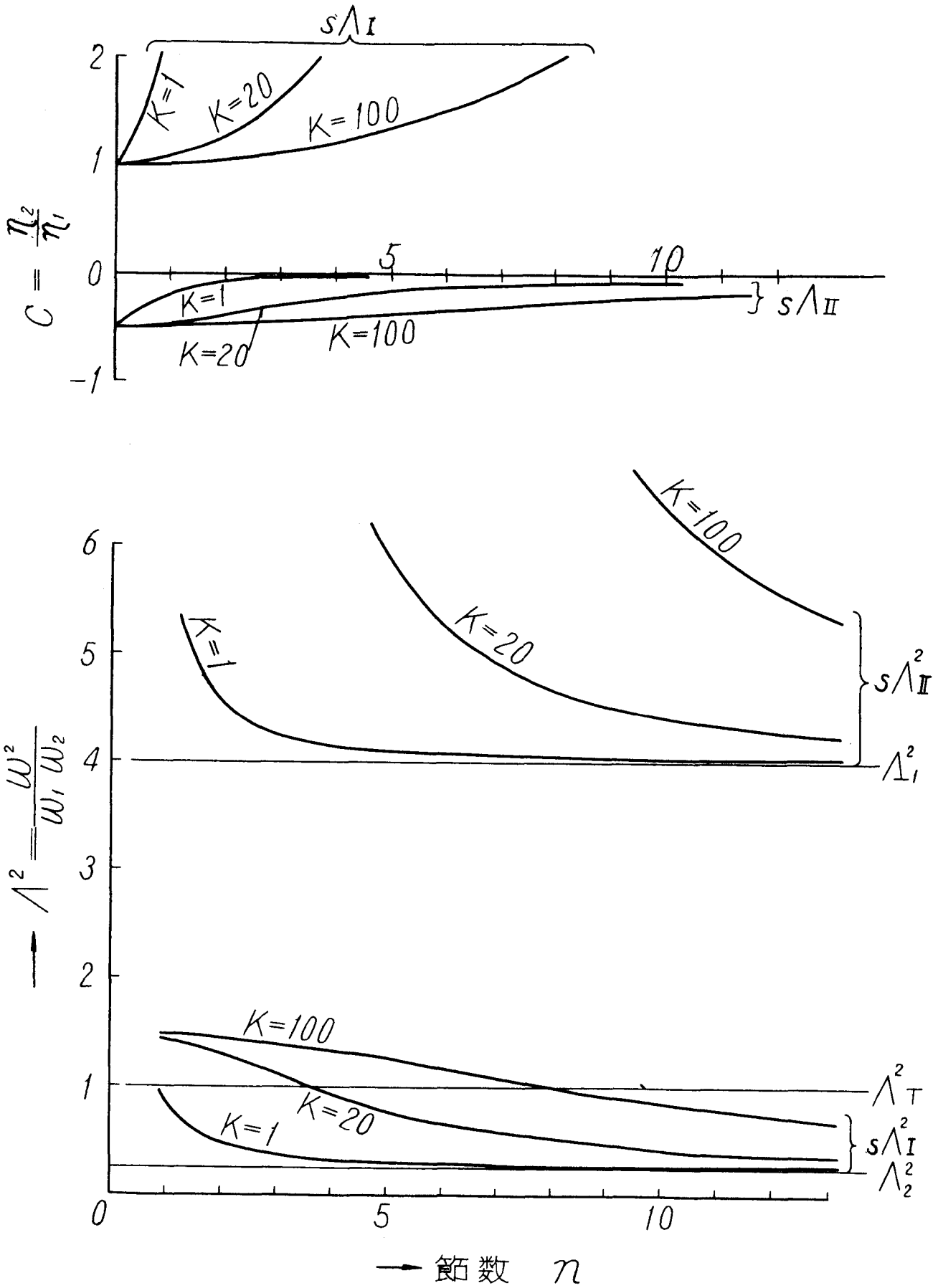


図 3.5 (i) Non-Beam Vibration の固有振動数におよぼす連結バネの影響（対称型振動）

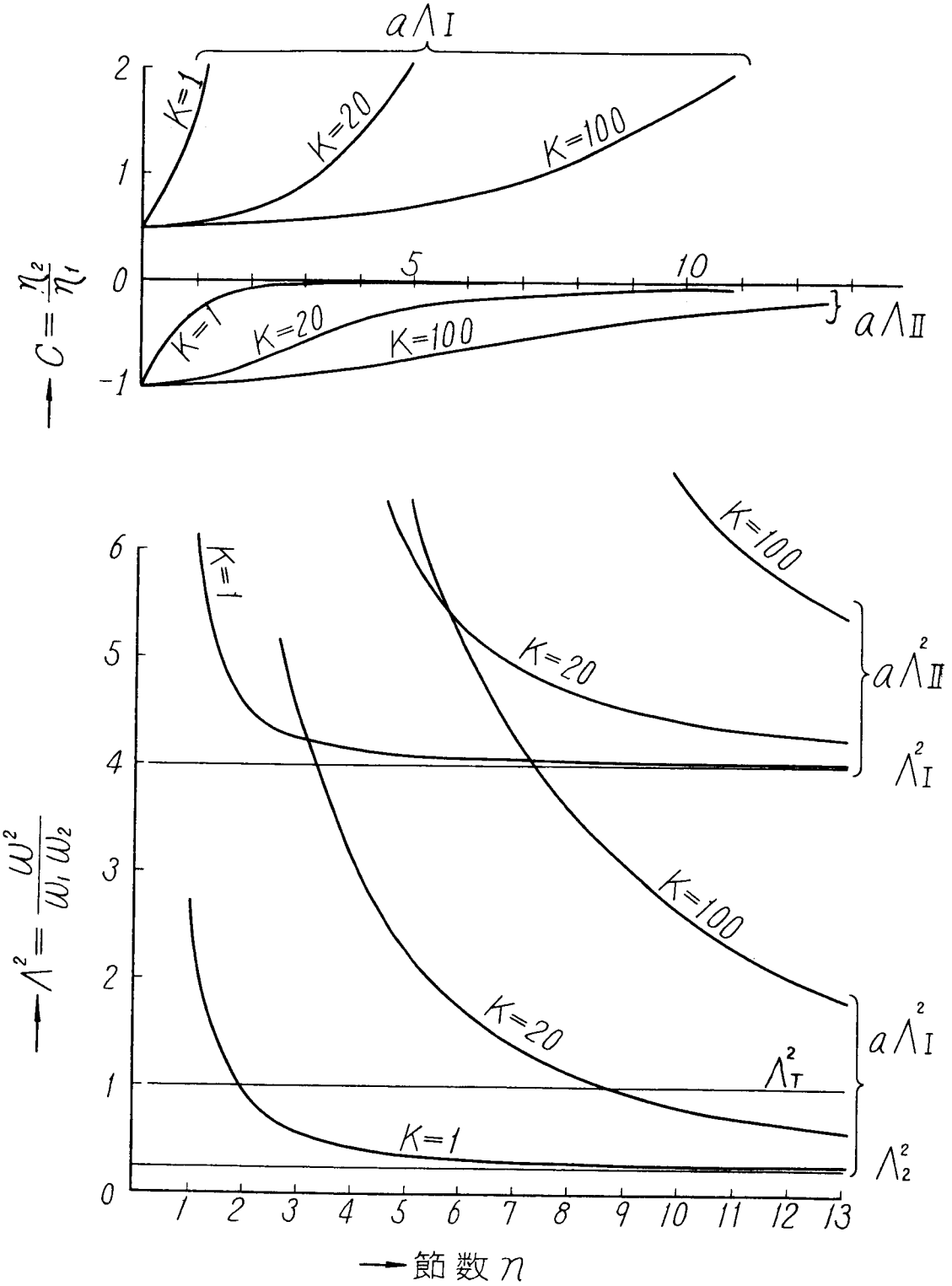


図 3.5 (ii) Non-Beam Vibration の固有振動数におよぼす連結バネの影響（逆対称型振動）

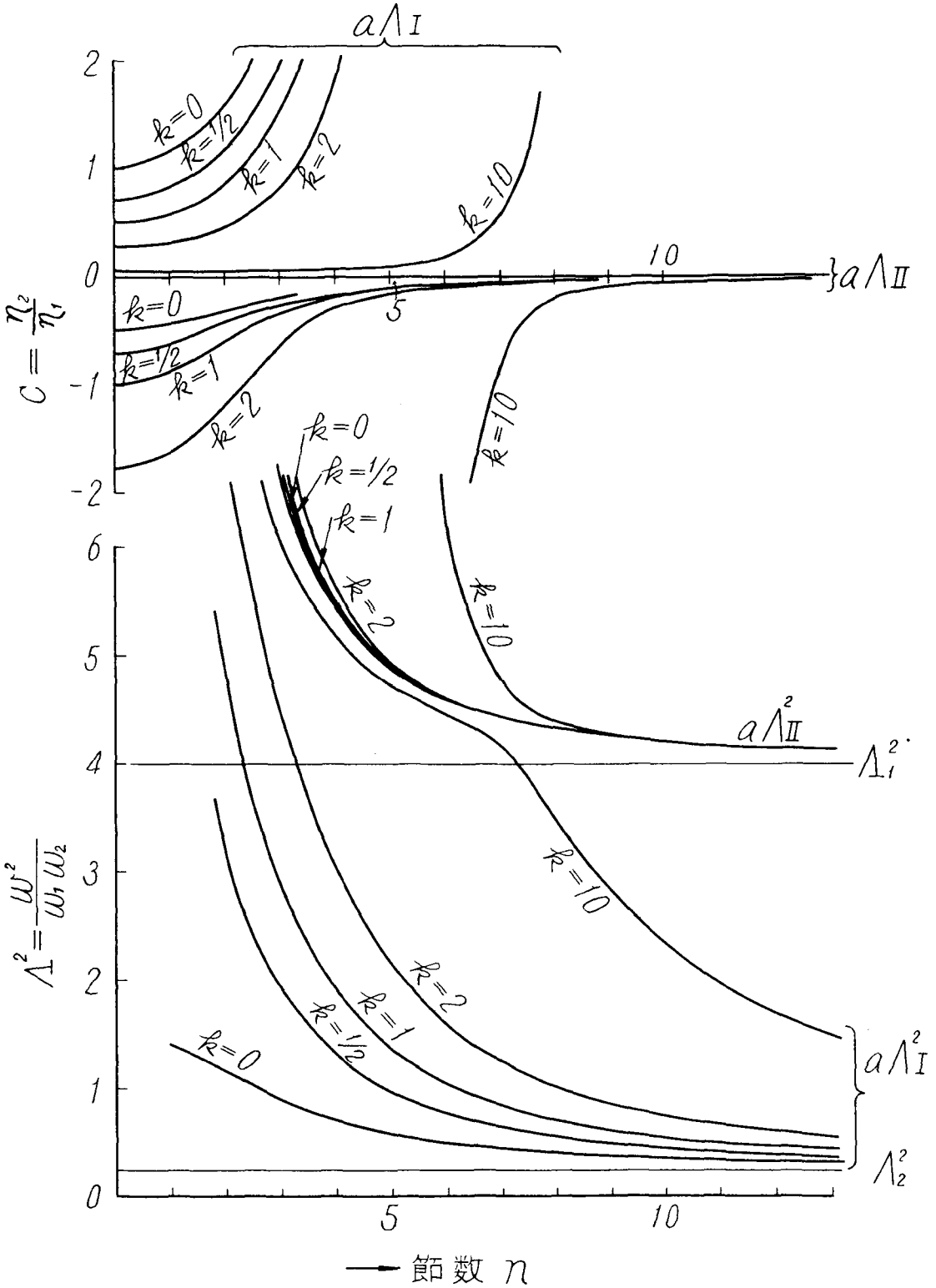


図 3.6　Non-Beam Vibration の固有振動数におよぼすバネ比の影響
（逆対称型振動）

となり、振幅比も当然 $s\Lambda_{I}$，$s\Lambda_{II}$のものに近づく。

一方、$k\to\infty$のとき、

$$a\Lambda_{II}\to\infty$$

$$a\Lambda_{I}\to\frac{1}{\nu^2}+\frac{k_n}{\nu}$$

に近づき、図から明らかなように、$s\Lambda_{II}\fallingdotseq a\Lambda_{I}$となる。この時、対応する振動型の振幅比は次のようになる。

$a\Lambda_{I}$ に対して　$\eta_2\geqq\eta_1$

$a\Lambda_{II}$ に対して　$\eta_1\geqq\eta_2$

実際の船体構造の場合には$m>1$，$\nu<1$と考えられるので、Non—Beam Vibration のそれぞれの固有振動数はこれまで検討した振動型曲線の傾向により次のように分類することができる。

$s\Lambda_{I}$：　Longi Bhd　の振動が支配的な対称型振動

$s\Lambda_{II}$：　Side Shell　の振動が支配的な対称型振動

$a\Lambda_{I}$：　Longi Bhd　の振動が支配的な逆対称型振動

$a\Lambda_{II}$：　Side Shell　の振動が支配的な逆対称型振動

2.5　Non—Beam Vibration の逆対称型振動と捩り振動との連成振動

2.5.1　連成振動の振動モデル

前節で求められたNon—Beam Vibration の4つの系統の固有振動数はSide Shell およびLongi Bhdが相対的に上下方向に振動する振動モードであるが、これらの断面変形を生ずるとき、当然Side Shell およびLongi Bhdはその相対的変位に応じて回転することが考えられる。この回転の影響は断面を構成するUpper Deck およびBottom Plateの横方向の剪断変形および伸縮変形を考慮したさらに複雑な振動系にモデル化することによって計算される。特に逆対称型振動の低い方の固有振動数（$a\omega_{I}$）はその断面の振動モードは図3.2（iii）に示したように左右方向の変位は拘束されているが上下方向の変位は船体捩り振動のモードに近い。船体を1本の梁と見なした捩り振動では船体のある断面において断面の剪断中心まわりに部材は均一な回転を起こす。すなわち、Side Shell およびLongi Bhd の回転

量は剪断中心からの距離に比例することになる。本節では簡単のためこのような船体捩り振動の影響を考慮したNon—Beam Vibration の定性的検討を行なう。

この場合、Non—Beam Vibration の固有振動数は逆対称型振動の低い方の固有振動数を対象とするため、図3.7に示したような両舷のwing tank をそれぞれ1本の梁と考え2本の

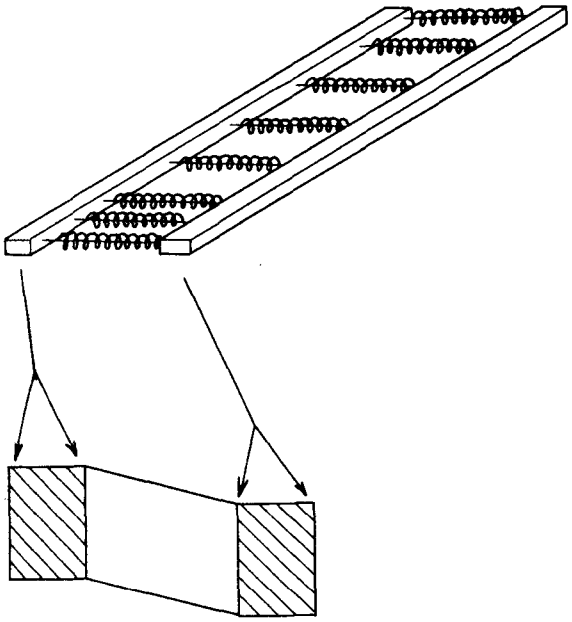


図3.7　2本の梁によるNon—Beam Vibration の振動系

梁がバネによって連結されたモデルについて船体捩り振動との連成振動について取り扱う。このようなモデルを図3.8に示す。両梁を連結するバネはUpper Deck およびBottom Plate

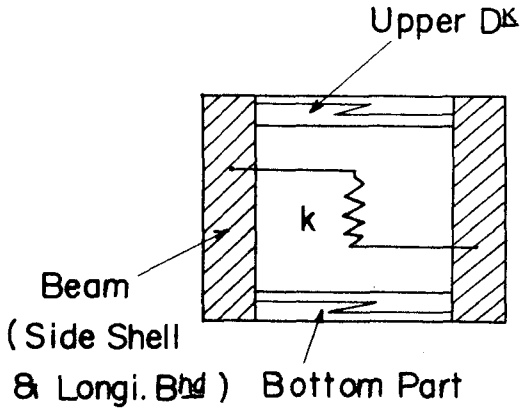


図3.8　連成振動のmodel

の上下方向の曲げおよび剪断変形にもとづくものであり、さらにこれらの部分は捩り振動を生ずる面内の剪断変形をする梁にモデル化されている。

2.5.2　連成振動の固有振動数および振動モード

いま、図3.9に示したように2本の梁が上下方向に剪断変形を生じるとともに断面の中心に関して全断面が捩り変形により一様に回転を生じたものとする。

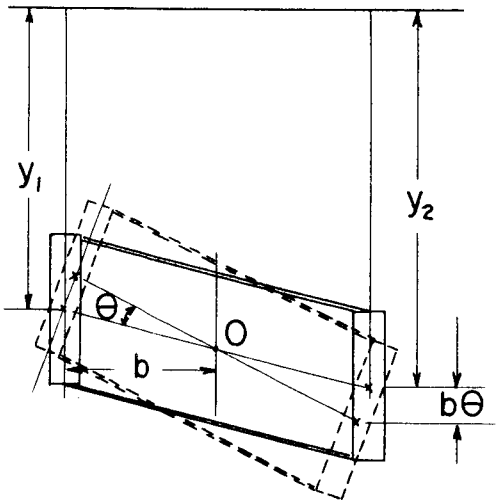


図 3.9　断面の変形

この時、力およびモーメントの平衡を考えることにより次に示す3つの運動方程式が求められる。

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{y}_1 - m_1 b\ddot{\theta} + k\,(y_1 - y_2) &= S_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \\ m_2\ddot{y}_2 + m_2 b\ddot{\theta} + k\,(y_2 - y_1) &= S_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \\ I_p\ddot{\theta} + b\,(m_2\ddot{y}_2 - m_1\ddot{y}_1) &= GJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \end{aligned}\right\} \quad (3.14)$$

ここに、　b　；　断面の半幅

Ip　；　捩り振動の極慣性モーメント

GJ　；　断面の捩り剛性

(3.14) 式の解を次のようにおく。

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= A_1 e^{\lambda x} e^{i\omega t} \\ y_2 &= A_2 e^{\lambda x} e^{i\omega t} \\ \theta &= A_3 e^{\lambda x} e^{i\omega t} \end{aligned}\right\} \quad (3.15)$$

(3.15) 式を (3.14) 式に代入すれば次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \tau_1 & k & -m_1\omega^2 b \\ k & \tau_2 & m_2\omega^2 b \\ -m_1\omega^2 b & m_2\omega^2 b & \tau_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = 0 \qquad (3.16)$$

ここに、 $\tau_1 = S_1\lambda^2 + m_1\omega^2 - k$

$\tau_2 = S_2\lambda^2 + m_2\omega^2 - k$

$\tau_3 = GJ\lambda^2 + I_p\ \omega^2$

2本の梁は船体中心線に関して、対称であると見なすことができるので、

$m_1 = m_2 \equiv m$, $S_1 = S_2 \equiv S$

とおき、(3.16) 式を変形すれば次式が求められる。

$$\left[\begin{array}{c|cc} \tau + k & 0 & 0 \\ \hline 0 & \tau - k & -2mb\omega^2 \\ 0 & -mb\omega^2 & \tau_3 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} A_1 + A_2 \\ \hline A_1 - A_2 \\ A_3 \end{array}\right] = 0 \qquad (3.17)$$

(3.17) 式よりこの振動系は次の2つの場合に分けて取り扱うことができ、特性方程式は次のようになる。

(1) $A_1 = A_2$, $A_3 = 0$ のとき、

$$\tau + k = 0 \qquad (3.18)$$

(2) $A_1 = -A_2$ のとき、

$$\begin{vmatrix} \tau - k & -2mb\omega^2 \\ -mb\omega^2 & \tau_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.19)$$

(1)の場合、(3.15) 式より明らかなように、$y_1 = y_2$, $\theta = 0$、すなわち断面の回転はなく、両

梁は一体となり1本の梁として振動する。（3.18）式より求められる固有振動数は当然、1本の剪断梁としての固有振動数と一致する。

(2)の場合、両梁は船体中心線に関して逆対称の振動を行なう。

（3.19）式と境界条件

$$Q_1 = S \left.\frac{\partial y_1}{\partial x}\right|_{\substack{x=0 \\ \text{or } x=L}} = 0$$

$$M_T = GJ \left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_{\substack{x=0 \\ \text{or } x=L}} = 0$$

を使用することによって、固有値は次のように求められる。

$$\lambda L = n\pi \quad (n = 0, 1, 2 \cdots\cdots) \tag{3.20}$$

（3.20）式を（3.19）式に代入することによりω^2に関する次の方程式が得られる。

$$(\omega^2 - \omega_t^2)(\omega^2 - \omega_d^2) = \alpha\omega^4 \tag{3.21}$$

ここに、

$$\omega_t^2 = \frac{GJ}{I_p}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

$$\omega_d^2 = \frac{2k}{m} + \frac{S}{m}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

$$\alpha = \frac{2mb^2}{I_p}$$

ωtは1本の梁のn節船体捩り振動の固有振動数、ω_dは回転の影響を考慮しない場合の逆対称型の振動のn節のNon-Beam Vibrationの固有振動数を表わしている。

連成振動の固有振動数は（3.21）式を解くことによって次のように求められる。

$$\omega^2 = \begin{Bmatrix} \omega_{\mathrm{II}}^2 \\ \omega_{\mathrm{I}}^2 \end{Bmatrix} = \varepsilon(\omega_t^2 + \omega_d^2) \pm \sqrt{\varepsilon^2(\omega_t^2 + \omega_d^2)^2 - 2\varepsilon\omega_t^2 \cdot \omega_d^2} \tag{3.22}$$

ここに、 $$2\varepsilon = \frac{I_p}{I_p - 2mb^2} = \frac{1}{1-\alpha}$$

この固有振動数に対応する振動モードは次のようになる。

$$y_1 = A_1 \cos \frac{n\pi}{L} x$$

$$y_2 = -A_1 \cos \frac{n\pi}{L} x \qquad (3.23)$$

$$\theta = d A_1 \cos \frac{n\pi}{L} x$$

ここに、 $d = \frac{1}{b}\left\{1 - \frac{\omega_d^2}{\omega^2}\right\}$

y_1, y_2 は回転による上下方向変位を含まない振動モードであり、これを考慮すれば、（3.23）式の振動モードは次のようになる。

$$Y_1 = y_1 - b\theta = \frac{\omega_d^2}{\omega^2} A_1 \cos \frac{n\pi}{L} x$$

$$Y_2 = y_2 + b\theta = -\frac{\omega_d^2}{\omega^2} A_1 \cos \frac{n\pi}{L} x \qquad (3.24)$$

2.5.3　連成固有振動数の定性的検討

（3.21）式において $n = 0$ とおけば、

$$\omega_d^2 = \frac{2k}{m}, \quad \omega_t^2 = 0$$

となり、$n = 0$ の連成固有振動数は（3.22）式より次のように求められる。

$$\bar{\omega}_{II}^2 = 2\varepsilon\omega_d^2 = \frac{4\varepsilon k}{m}$$

$$\bar{\omega}_I^2 = 0 \qquad (3.25)$$

これに対応する振動型曲線は（3.23）式より明らかなように、$\omega_I = 0$ は $y_1 = y_2 = 0$ ，$\theta = \text{const}$ となり、梁の全長にわたって断面が一様回転する解となっている。$\bar{\omega}_{II}^2$ に対するモ

ードも断面の一様回転をするものであるが、両梁の剪断変形量と回転量による変形量の比は次のようになっている。

$$\frac{b\theta}{y_1} = 1 - \frac{1}{2\varepsilon}$$

$0 < \frac{1}{2\varepsilon} < 1$ の値をとるので、上式は $0 < b\theta < y_1$ すなわち、両梁のバネによる剪断変形の方が主体となっていることがわかる。

次にn節振動をする場合のNon—Beam Vibrationの連成固有振動数ω_{I}、ω_{II}の存在範囲について検討する。

（3.22）式で表わされる連成固有振動数を無次元化すれば次のようになる。

$$\Lambda^2 = \begin{Bmatrix} \Lambda_{\mathrm{II}}{}^2 \\ \Lambda_{\mathrm{I}}{}^2 \end{Bmatrix} = \varepsilon\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) \pm \sqrt{\varepsilon^2\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)^2 - 2\varepsilon} \qquad (3.26)$$

ここに、 $\Lambda^2 = \dfrac{\omega^2}{\omega_t \omega_d}$

$$\xi = \frac{\omega_d}{\omega_t} = \sqrt{\frac{I_p}{GJ}}\sqrt{\frac{2k}{m}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 + \frac{S}{m}}$$

対応する振動モードより撓み振動変位量と捩り振動の回転変位量との比をとれば次のようになる。

$$\frac{b\theta}{y_1} = 1 - \frac{\xi}{\Lambda^2} \qquad (3.27)$$

（3.21）式より、$0 < \alpha < 1$の範囲にあり、したがってεは次の範囲の値をとる。

$$\frac{1}{2} < \varepsilon$$

$\varepsilon = \frac{1}{2}$のとき、（3.26）式より

$$\Lambda^2 = \frac{1}{2}\left\{\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) \pm \left|\xi - \frac{1}{\xi}\right|\right\}$$

となり、$\xi > 1$のとき、すなわち$\omega_d > \omega_t$のとき

$$\Lambda_{II}^2 = \xi \quad \text{すなわち} \quad \omega_{II}^2 = \omega_d^2$$

$$\Lambda_I^2 = \frac{1}{\xi} \quad \text{すなわち} \quad \omega_I^2 = \omega_t^2$$

$\xi < 1$のとき、すなわち　$\omega_t > \omega_d$のとき

$$\Lambda_{II}^2 = 1/\xi \quad \text{すなわち} \quad \omega_{II}^2 = \omega_t^2$$

$$\Lambda_I^2 = \xi \quad \text{すなわち} \quad \omega_I^2 = \omega_d^2$$

となる。すなわち、この場合Non-Beam Vibrationの固有振動数は連成なしの固有振動数に一致する。

なお、ω_t，ω_dに対応する振動の振幅比はそれぞれ（$1-\xi^2$），0となる。

$\varepsilon \to \infty$のとき連成固有振動数は次のようになる。

$$\Lambda_{II}^2 \to \infty$$

$$\Lambda_I^2 = 1/\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right), \quad \frac{b\theta}{y_1} = -\xi^2$$

$\frac{1}{2} < \varepsilon$の範囲で連成固有振動数は図3.10に示したような範囲に存在する。

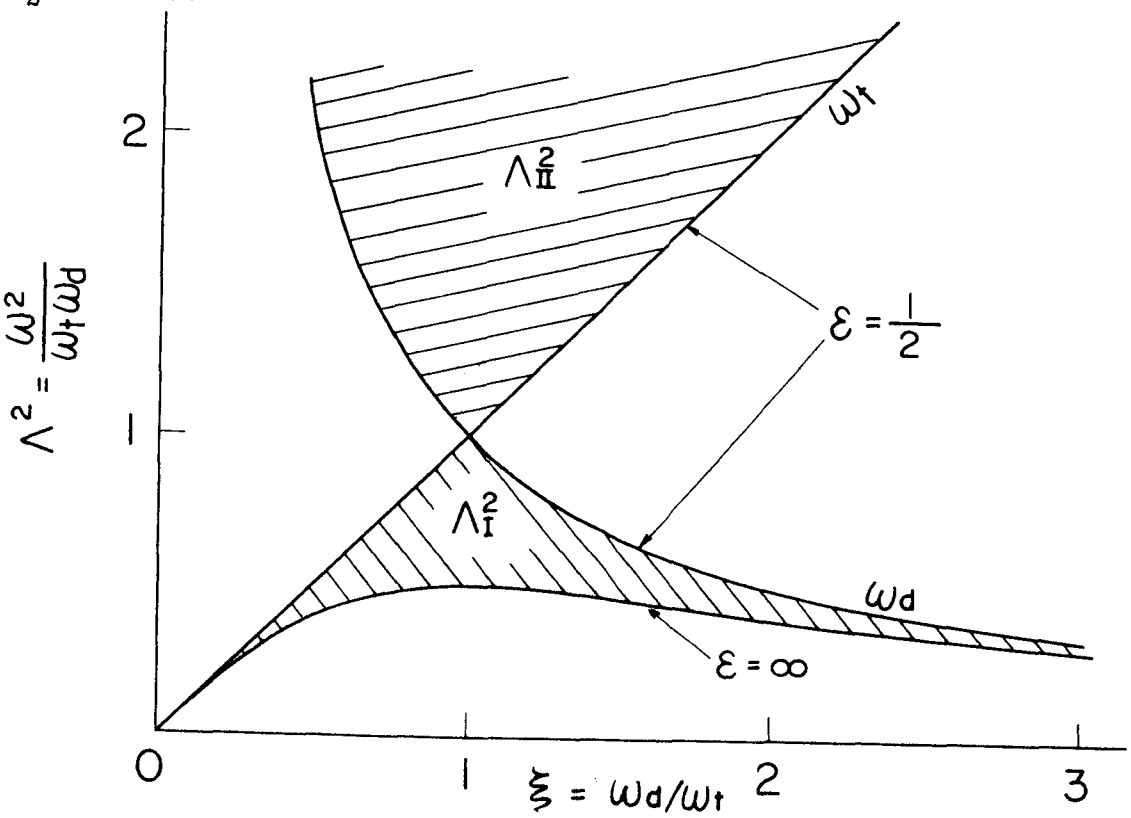


図3.10　連成固有振動数の存在範囲

すなわち、　$\xi > 1$ （$\omega_d > \omega_t$）のとき

$$\Lambda_{II}^2 > \xi \qquad (\omega_{II} > \omega_d)$$

$$\frac{1}{\xi} > \Lambda_I^2 > \frac{\xi}{\xi^2+1} \quad \left(\omega_t > \omega_I > \frac{\omega_t \omega_d}{\sqrt{\omega_t^2+\omega_d^2}} \right)$$

$0 < \xi < 1$　（$\omega_d < \omega_t$）のとき

$$\Lambda_{II}^2 > \frac{1}{\xi} \quad (\omega_{II} > \omega_t)$$

$$\xi > \Lambda_I^2 > \frac{\xi}{\xi^2+1} \quad \left(\omega_d > \omega_I > \frac{\omega_t \omega_d}{\sqrt{\omega_t^2+\omega_d^2}} \right)$$

一方、これらの固有振動数に対応する振動モードは次のようになる。

$\xi > 1$ のとき、

$$\Lambda_{II}^2 \cdots\cdots \frac{b\theta}{y_1} = 1 - \frac{\xi}{\Lambda_{II}^2} > 0$$

$$\Lambda_I^2 \cdots\cdots \quad -\xi^2 < \frac{b\theta}{y_1} < 1 - \xi^2 < 0$$

$\xi < 1$ のとき

$$\Lambda_{II}^2 \cdots\cdots \quad \frac{b\theta}{y_1} > 1 - \xi^2 > 0$$

$$\Lambda_I^2 \cdots\cdots \quad -1 < -\xi^2 < \frac{b\theta}{y_1} < 0$$

また、$n \to \infty$ のとき、これらの固有振動数は次の値に近づく。

$$\Lambda^2 \to \varepsilon \left(\delta + \frac{1}{\delta}\right) \pm \sqrt{\varepsilon^2 \left(\delta + \frac{1}{\delta}\right)^2 - 2\varepsilon}$$

ここに、　$\delta = \sqrt{\frac{I_p}{GJ} \cdot \frac{S}{m}}$

このように、これらの２つの系統の固有振動数は連成なしの捩り振動のみ（ω_t）および 逆対称型Non-Beam Vibration の固有振動数（ω_d）が連成の結果、ω_Iおよびω_{II}に 変化したものであると見なすことができるが、これをω_d の捩り振動による影響という面から見れば $\xi > 1$のとき、ω_{II}に、また$\xi < 1$のときω_Iになったと解釈することができる。

実船では$\xi < 1$と考えられるので捩り振動の影響により一般に連成なしの場合より固有振動数が低下することがわかる。

第3章　巨大油送船のNon−Beam Vibrationの計算法

3.1　巨大油送船をモデル化した振動系

本章では巨大油送船のNon−Beam Vibrationの固有振動数を正確に求めるために第2章で取り扱ったよりさらに複雑なモデルにより計算する方法についてのべる。巨大油送船の船体構造はその主要部材を梁とバネによって構成される振動系にモデル化すれば図3.11に示したようになる。すなわち、

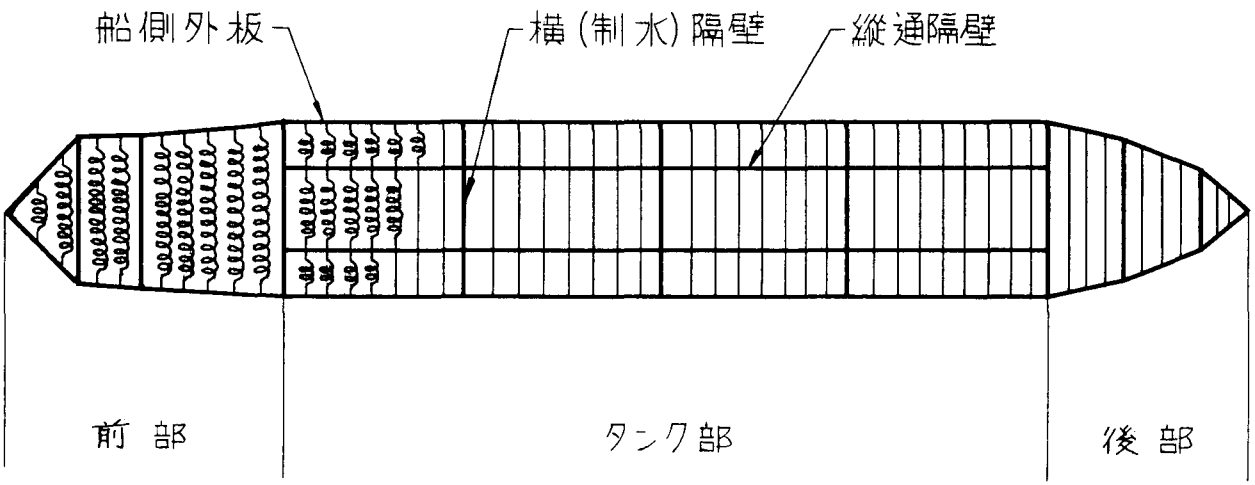


図3.11　巨大油送船のmodel化した振動系

(1)　船体を長さ方向にAft Part,Tank PartおよびFore Partの3つの部分から構成されているものとする。

(2)　Aft Part,Fore Partにおいては両玄のSide Shellをそれぞれ単独の剪断梁と考え、両玄間の強度部材はSide Shellをつなぐ分布バネと考える。またAft Peak Bhd等のTrans Bhdは単独バネとして取り扱う。

(3)　Tank PartにおいてはSide Shell,Longi Bhdをそれぞれ単独の剪断梁と考え、Trans Ring等の部材はこれらの梁をつなぐ分布バネと考える。またTrans BhdおよびSwash Bhdは単独バネとして取り扱う。

3.2　Non−Beam Vibrationの固有振動数の計算法

船の長さ方向に船体を分割し、Transfer Matrix Method を使用してNon-Beam Vibrationの固有振動数を求める。Trans Bhd間でField Transfer Matrix,Trans Bhdの位置ではPoint Transfer Matrixを求め、連続条件により全体の振動系の固有振動数を求める。State Vector は Tank Part および Fore またはAft Part で次のように定義する。

$$\text{Tank Part},\ \mathbf{Z}=\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_S\\ \hline \mathbf{Z}_L\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Y_S\\ Q_S\\ \hline Y_L\\ Q_L\end{bmatrix}$$

$$\text{Fore (または Aft) Part},\ {}_f\mathbf{Z}\ (\text{or}\ {}_a\mathbf{Z})=\begin{bmatrix}Y_S\\ Q_S\end{bmatrix}$$

ここに、 Y_S : Side Shell の変位

Y_L : Longi Bhd の変位

Q_S : Side Shell の剪断力

Q_L : Longi Bhd の剪断力

船体中心線に対してこれらの諸量は対称であるので、それを考慮すれば、Transfer Matrixは対称型振動と逆対称型振動に分けて求めることができる。Transfer Matrix の計算法を付録1，2に示す。

Transfer Matrix の記号は次に示すものを使用する。

$\mathbf{H}$: Tank Part の Field Transfer Matrix（4次正方matrix）

${}_a\mathbf{H}$ （${}_f\mathbf{H}$）：Aft (Fore) Part の Field Transfer Matrix (2次正方matrix)

$\mathbf{T}$: Tank Part の Point Transfer Matrix（4次正方matrix）

${}_a\mathbf{T}$ （${}_f\mathbf{T}$）：Aft (Fore) Part の Point Transfer Matrix

（2次正方matrix）

いま、Aft,Tank,Fore の3つの部分においてTrans Bhdの数をそれぞれNa,N,Nf とすれば（ただし各Partの両端のBhdは含まない）State Vector と Transfer Matrix との間に次の関係が成立する。

Aft Partにおいて、

$$ {}_a\mathbf{Z}_i^L = {}_a\mathbf{H}_i \cdot {}_a\mathbf{Z}_{i-1}^R \qquad (3.28) $$

$$ (i = 1, 2, 3, \cdots\cdots, Na+1) $$

$$ {}_a\mathbf{Z}_i^R = {}_a\mathbf{T}_i \cdot {}_a\mathbf{Z}_i^L \qquad (3.29) $$

$$ (i = 1, 2, \cdots\cdots\cdots\cdots, Na) $$

（3.28）式を順次（3.29）式に代入し、中間のState Vectorを消去すれば、最終的に両端のState Vector の関係として次式をえる。

$$ {}_a\mathbf{Z}_{Na+1}^L = {}_a\mathbf{H}_{Na+1} \cdot {}_a\mathbf{T}_{Na} \cdot {}_a\mathbf{H}_{Na} \cdots\cdots {}_a\mathbf{T}_1 \cdot {}_a\mathbf{H}_1 \cdot {}_a\mathbf{Z}_0^R $$

$$ \equiv {}_a\mathbf{U} \cdot {}_a\mathbf{Z}_0^R \qquad (3.30) $$

同様に、TankおよびFore Partにおいて次式が成立する。

$$ \mathbf{Z}_{N+1}^L = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Z}_0^R \qquad (3.31) $$

$$ {}_f\mathbf{Z}_{Nf+1}^L = {}_f\mathbf{U} \cdot {}_f\mathbf{Z}_0^R \qquad (3.32) $$

Aft Part と Tank Part の交叉部において、図3.12に示したような力および変位の平衡より次の3つの式が成立する。ただし記号の位置を表わすsuffixは省略する。

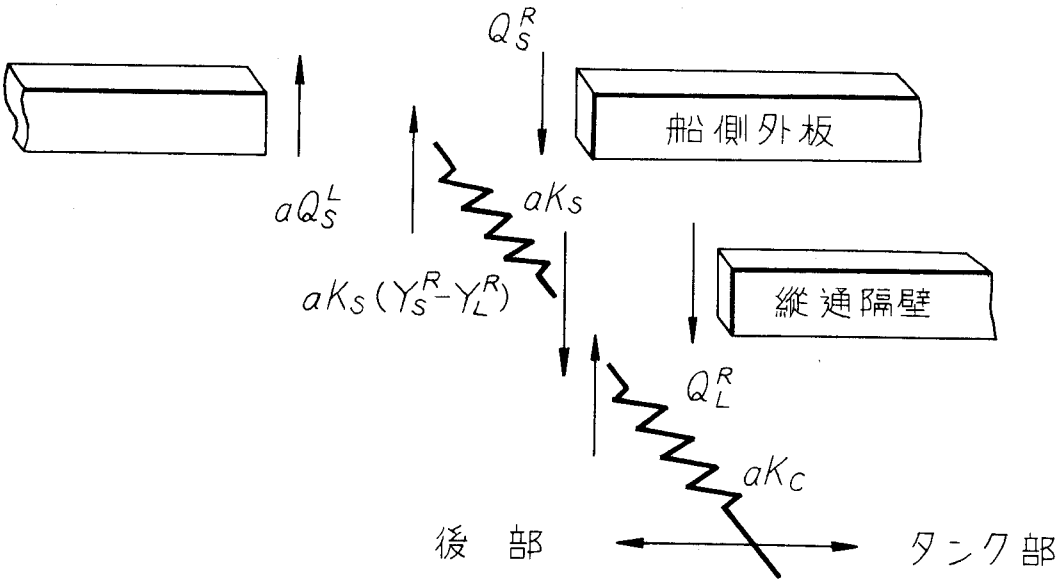


図3.12　後部とタンク部の交叉部における剪断力の平衡

$$Y_S^R = {}_aY_S^L \qquad (3.33)$$

$$Q_S^R = {}_aQ_S^L + {}_aKs \cdot ({}_aY_S^L - Y_L^R) \qquad (3.34)$$

$$Q_L^R = -{}_aKs\ ({}_aY_S^L - Y_L^S) \qquad \text{(対称型振動)} \qquad (3.35)$$

または、$Q_L^R = -{}_aKs \cdot {}_aY_S^L + ({}_aKs + 2\,{}_aKc)\,Y_L^R$ （逆対称型振動）

同様に、Tank Part と Fore Part の交叉部において次式が成立する。

$${}_fY_S^R = Y_S^L \qquad (3.36)$$

$${}_fQ_S^R = Q_S^L + {}_fKs \cdot (Y_S^L - Y_L^L) \qquad (3.37)$$

$$Q_L^L = {}_fKs \cdot (Y_S^L - Y_L^L) \qquad \text{(対称型振動)} \qquad (3.38)$$

または、$Q_L^L = {}_fKs \cdot Y_S^L - ({}_fKs + 2\,{}_fKc)\,Y_L^L$ （逆対称型振動）

船首尾端における境界条件は次式で与えられる。

対称型振動　　：$Qs=0$　　(3.39)

逆対称型振動　：$Ys=0$

いま、対称型振動の場合を取り扱うことにして、（3.39）式より、${}_aQs=0$，${}_aYs=x$ とおけば

$${}_aZ_0^R = \begin{bmatrix} x \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

これを（3.30）式の右辺に代入すれば

$${}_aZ_{Na+1}^L = {}_aU \cdot \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_aU_{11} \\ {}_aU_{21} \end{bmatrix} \cdot x$$

さらに、AftおよびTank Partの交叉部において、$Y_L^R = y$とおき、上式と（3.33），（3.34），（3.35）式によって次式が求まる。

$$\mathbf{Z}_0^R = \begin{bmatrix} aU_{11} & , & 0 \\ aU_{21} + aKs \cdot aU_{11} & , & -aKs \\ 0 & , & 1 \\ -aKs \cdot aU_{11} & , & aKs \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \equiv \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

（3.40）式を（3.31）式に代入すれば

$$\mathbf{Z}_{N+1}^{L} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \equiv \mathbf{B} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

（3.41）式を（3.38）式に代入すれば

$$a_{11}x + a_{12}y = 0 \tag{3.42}$$

ここに、 $a_{11} = B_{41} - {}_fKs\ (B_{11} - B_{31})$

$a_{12} = B_{42} - {}_fKs\ (B_{12} - B_{32})$

また、（3.41）式を（3.36），（3.37）式に代入すれば

$$ {}_f\mathbf{Z}_0^R = \begin{bmatrix} B_{11} & , & B_{12} \\ B_{21} + {}_fKs\ (B_{11} - B_{31}) & , & B_{22} + {}_fKs\ (B_{12} - B_{32}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\equiv \mathbf{C} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

（3.43）式を（3.32）式に代入すれば

$$ {}_f\mathbf{Z}_{N_f+1}^{L} = {}_f\mathbf{U} \cdot \mathbf{C} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \equiv \mathbf{D} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

（3.44）式の第2式と船首端の境界条件（3.39）式より次式が求まる。

$$Q_S = d_{21}x + d_{22}y = 0 \tag{3.45}$$

（3.42）式および（3.45）式より振動数方程式は次式で与えられる。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix} = 0$$

同様にして、逆対称型振動の場合も固有振動数が計算できる。

3.3 実際計算に使用する諸数値

前節で述べた方法にもとづき実際の油送船について Non—Beam Vibration の解析をするとき、固有振動数に関係する種々の要素を実際上どのように評価すればよいかという問題がある。本節ではこのような Input Data の評価法についてのべる。

3.3.1 重 量 分 布

重量に関係する項として Hull Weight, Cargo Weight, Virtual Added Water Weight の3つの重量を考慮する。

(1) Hull Weight, Δ_H

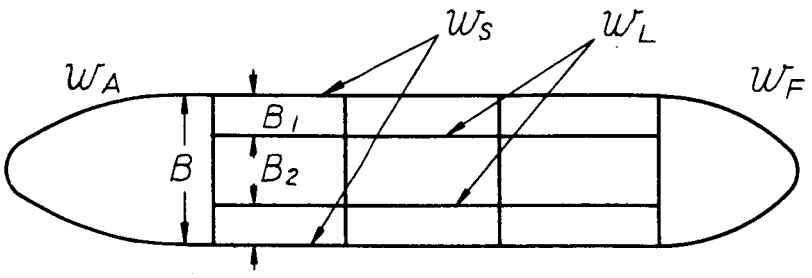


図3.13 荷 重 分 布

図3.13に示したような各梁の重量 W_s, W_L, W_a, W_f は次のように求める。Hull Weight は Biles 分布にしたがうものとし、Aft および Fore Part では両梁に等分に、Tank Part では $W_s : W_L = B_1 : (B_1 + B_2)$ の比で Side Shell および Long Bhd に分配する。長さ方向、X の位置における断面の重量分布を W (X) とすれば、次のように求められる。

$$W_a\ (X_a) = \frac{W\ (X_a)}{2}$$

$$Wf\ (Xf) = \frac{W\ (Xf)}{2}$$

$$Ws\ (Xs) = \frac{B_1}{2B} W\ (Xs)$$

$$W_L\ (X_L) = \frac{B_1+B_2}{2B} \cdot W\ (X_L)$$

ここに、　B_1：Wing tank の幅

B_2：Centre tank の幅

B　：船の幅（$=B_2+2B_1$）

次節の定性的検討では近似的に次の分布を採用した。

$$W\ (X) = \frac{\Delta_H}{L}$$

(2)　Cargo Weight，Δ_C

荷油は振動質量としてすべて有効と考え、荷油のはいっているTankの全長にわたって等分布させる。〔53〕Centre tank の cargo はすべてW_Lに分布させ、Wing Tank の cargo は半分づつをW_S，W_L の両者に分配する。厳密にはこのような流体荷物の場合、Virtual Mass と同様な取り扱いが必要であるものと思われる。

(3)　Virtual Added Water Weight，Δ_V

Non-Beam Vibration の Virtual Mass の評価については問題が複雑になるため、第4章において詳しくのべることにする。

次節の計算ではその定性的な傾向のみ検討するため、従来の1本の梁としての Virtual Mass を便査上採用している。

3.3.2　梁の剪断剛性

Side Shell および Longi Bhd の梁としての剪断剛性は簡単に次式により求める。

$$S = D \cdot t \cdot G$$

ここに、　D：船の深さ

t：Side Shell または Longi. Bhd の板厚

G：Shear modulus

3.3.3 Trans Bhd，Swash Bhdの剪断バネ

一般に、Trans Bhd の剪断変形による剪断バネは次式により求める。

$$K_i = \frac{A_W \cdot G}{B_i}$$

ここに、

$A_W = D \cdot t$ (Flane Bhd)

$= \varepsilon \cdot D \cdot t$ (Swash Bhd，ただしεは開孔の影響による剪断剛性低下率〔54〕)

B_i：Ksに対してB_1，Kcに対してB_2，Corrugate Wall に対してはそのGirth length，Aft Peak および Fore Peak Bhd に対してはその位置における船の幅をとる。

次節の計算では、$\varepsilon = 0.25$ またはAft Peak および Fore Peak Bhd の幅（Ba，Bf）は実船のData を参考にして次の値を使用した。

$B_a = 0.669B$

$B_f = 0.730B$

3.3.4 Trans Ring の分布バネ定数

図3.14に示したTrans Ring のうち斜線で示した部分の曲げおよび剪断変形を考えて、次

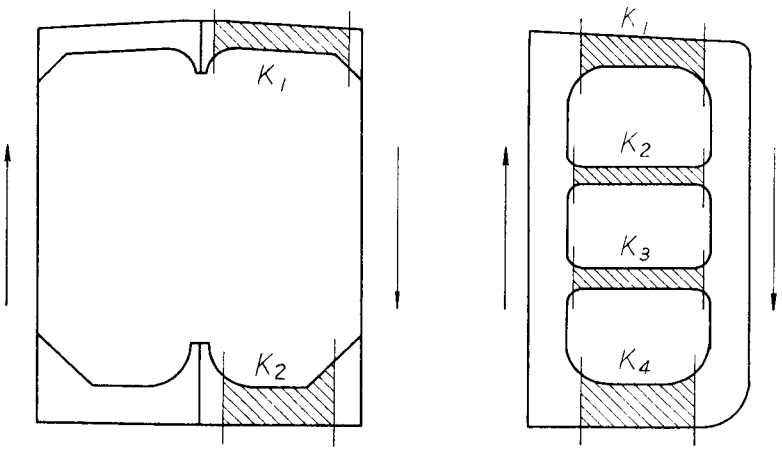


図3.14 trans ringの変形

式により計算する。〔55〕

$$ks = \left(\sum_{i=1}^{4} K_i \right) / L_{trans}$$

$$kc = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} K_i \right) / L_{trans}$$

ここに、L_{trans} : trans space

$$K_i = \frac{12EI_i}{(1+2\eta_i)\ell_i^3}$$

$$\eta_i = \frac{6EI_i}{GA_i\ell_i^2}$$

なお、ℓ_i を求めるための span point の計算は山口の文献〔56〕によった。また、Aft および Fore Part の分布バネ定数も同様に web frame および bottom floor 等の剪断および曲げ変形を考慮することによって求めることができるが次節の計算では近似的に次式で求めたものを採用した。

$$\frac{1}{k_a} = \frac{1}{k_s} + \frac{1}{k_c}$$

3.4 本モデルによる定性的検討

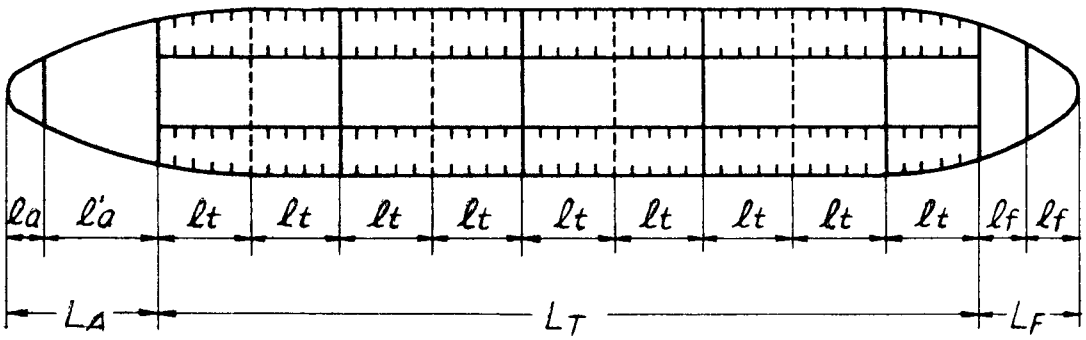
本節においては巨大船の Non-Beam Vibration の定性的な検討を行なうため、前節で示したモデルによる数値計算を行ない、その固有振動数およびモードにおよぼす種々の影響を調べる。

3.4.1 載荷重量別計算

船の巨大化にともなって現行ルールで設計した船にどのような Non-Beam Vibration が発生するかを検討するために、5万、10万、15万および30万トンの 5case について数値計算を行なった。計算に使用した主要寸法を表3.1に示す。また構造部材の配置は各船とも図3.15に示したように相似形を採用した。板厚はNKルールにしたがい、表3.2に示した値

表3.1　主　寸　法

ITEM \ SHIP (DWT)	50,000	100,000	150,000	200,000	300,000
DEAD WEIGHT	50,000	100,000	150,000	200,000	300,000
HULL WEIGHT	10,000	20,000	30,000	40,000	60,000
L (M)	192.30	242.30	277.35	305.30	349.50
B (M)	32.05	40.40	46.25	50.90	58.25
D (M)	16.50	20.80	23.85	26.25	30.05
d_{fuLL} (M)	11.87	14.95	17.12	18.84	21.57
L_A (M)	35.60	44.85	51.34	56.52	64.70
L_T (M)	139.59	175.95	201.33	221.625	249.71
L_F (M)	17.11	21.50	24.68	27.155	35.09
B_1 (M)	9.238	11.645	13.331	14.671	16.790
B_2 (M)	13.574	17.110	19.588	21.558	24.670
L_{trans} (M)	3.102	3.910	4.474	4.925	5.638



$$\ell_a = \frac{L_A}{5} \quad \ell'_a = \frac{4}{5} L_A, \quad \ell_t = \frac{L_T}{9}, \quad \ell_f = \frac{L_F}{2}$$

図3.15　横隔壁配置

表3.2　板　厚

SHIP / MENBER	50,000	100,000	150,000	200,000	300,000
LONGI. BHD	12.8	13.9	14.9	15.5	16.2
TRANS. BHD	10.4	13.2	15.2	17.0	20.0
SIDE SHELL	19.0	21.0	22.5	23.5	25.0
UPPER DK	23.0	25.4	32.0	36.5	40.0
BOTTOM PLATE	23.0	25.4	30.0	35.5	40.0

を使用した。〔57〕　なお、計算は満載状態について行ない、Cargo Oil Weight は Tank Part に均一に分布するとして計算を行なった。

計算の一例として、15万トンの場合のモード曲線を図3.16 (i) ～ (iv) (対称型振動) および図3.17 (i) ～ (iv) (逆対称型振動) に示す。計算から求めたこれらのモード曲線は日本造船研究協会SR－94のもとに実施された三菱重工業㈱長崎研究所の実船の測定結果〔17〕と極めてよく似た性状を示している。これらのモード曲線を比較検討して見るとすぐにわかるように、巨大船の振動は傾向的に2つの系列に分けることができる。すなわち、Side Shell の振動（実線）が支配的である型（S—type）と Longi Bhd の振動（点線）が支配的である型（L—type）である。図中に示したL5，S3等の記号はこのことを示したもので、以下にはこの形式に従って分類することにする。ただし記号の後の数字は S—type では Side Shell Line での節数を、L—type では Longi Bhd Line での節数を表わすことにする。type 別に節数と固有振動数の関係を示せば図3.18に示すようになる。Longi Bhd は Tank Part のみに設けられ、当然 Side Shell より長さが短いため、見掛け上同型で節数の同じ2つの固有振動数が現われることがある。すなわち、L—type の振動節数には Aft および Fore Part に生じるであろう節数は含んでいないことに注意を要する。これら各 type の連成固有振動数と横断面の変形を考慮しない1本の剪断梁として計算した固有振動数および Side Shell, Longi Bhd だけをそれぞれ単独の剪断梁として計算した固有振動数を比較すれば表3.3 (i)，(ii) のようになる。

なお、剪断振動を取り扱っているため1節振動は省略した。〔58〕これらの Non—Beam Vibration の固有振動数の一般的性質は第2章において検討した単純なモデルの場合と全く

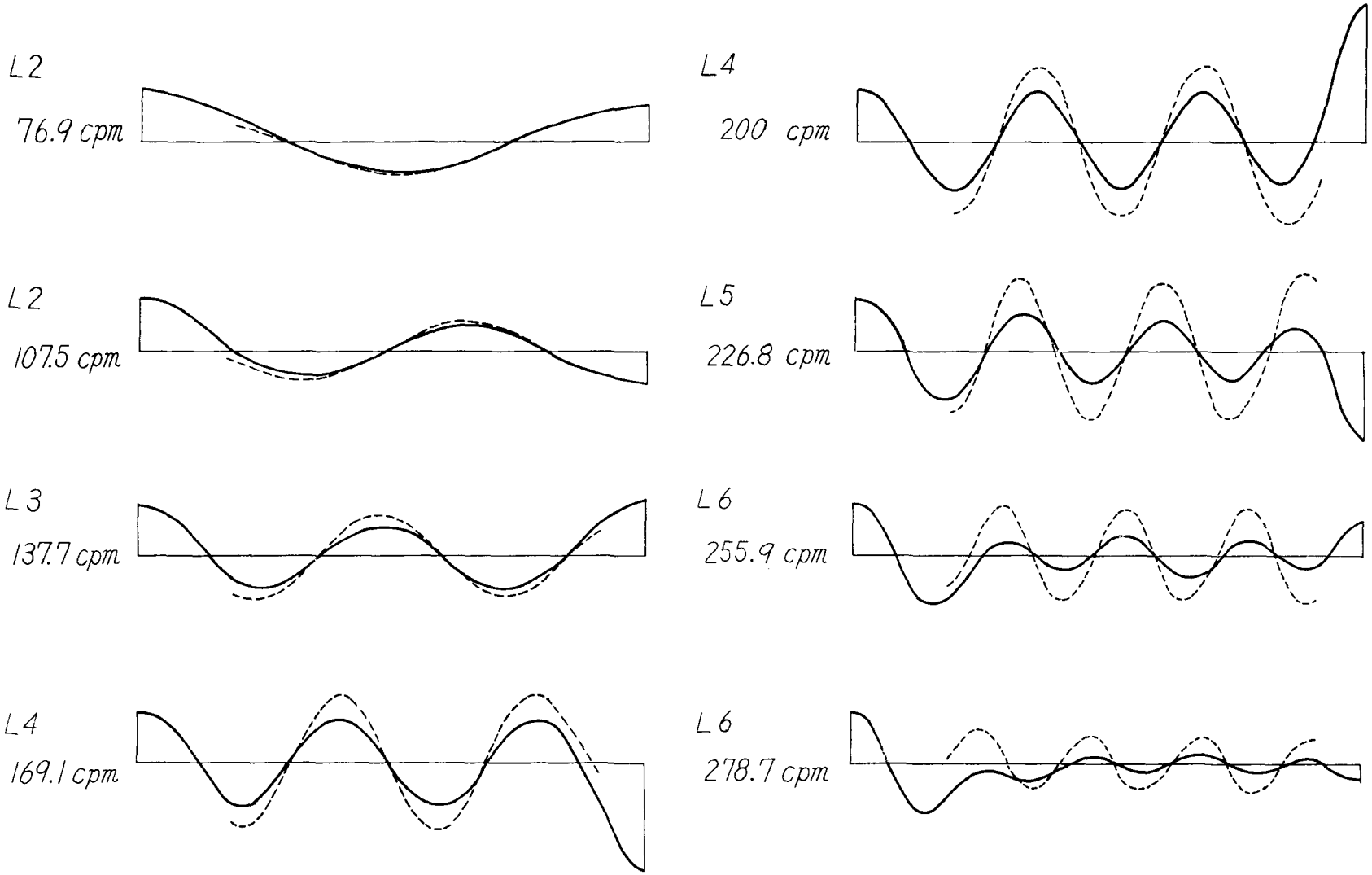


図3.16（i）　15万トン油送船の振動型曲線（対称型）

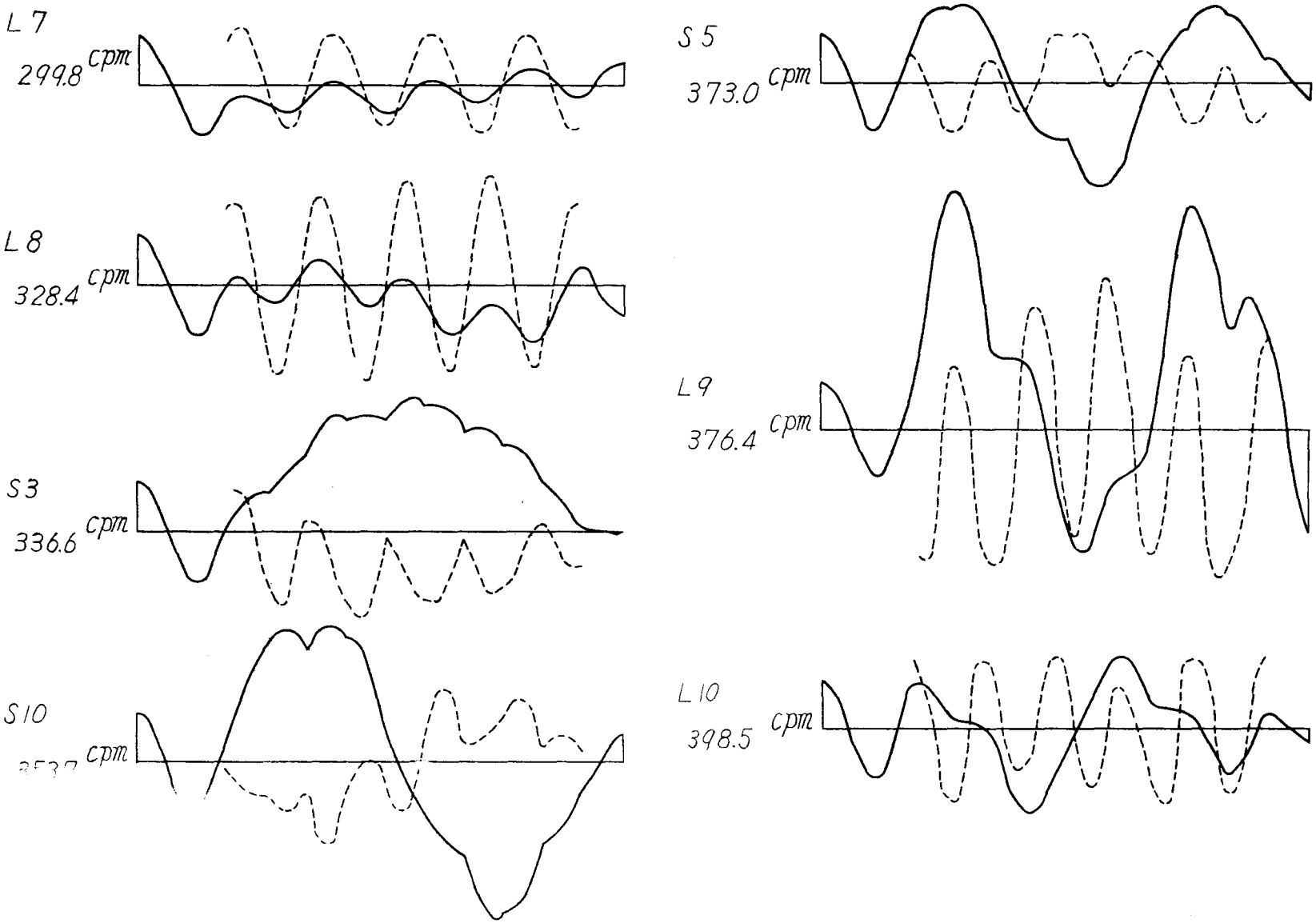


図 3.16 (*ii*)　15万トン油送船の振動型曲線（対称型）

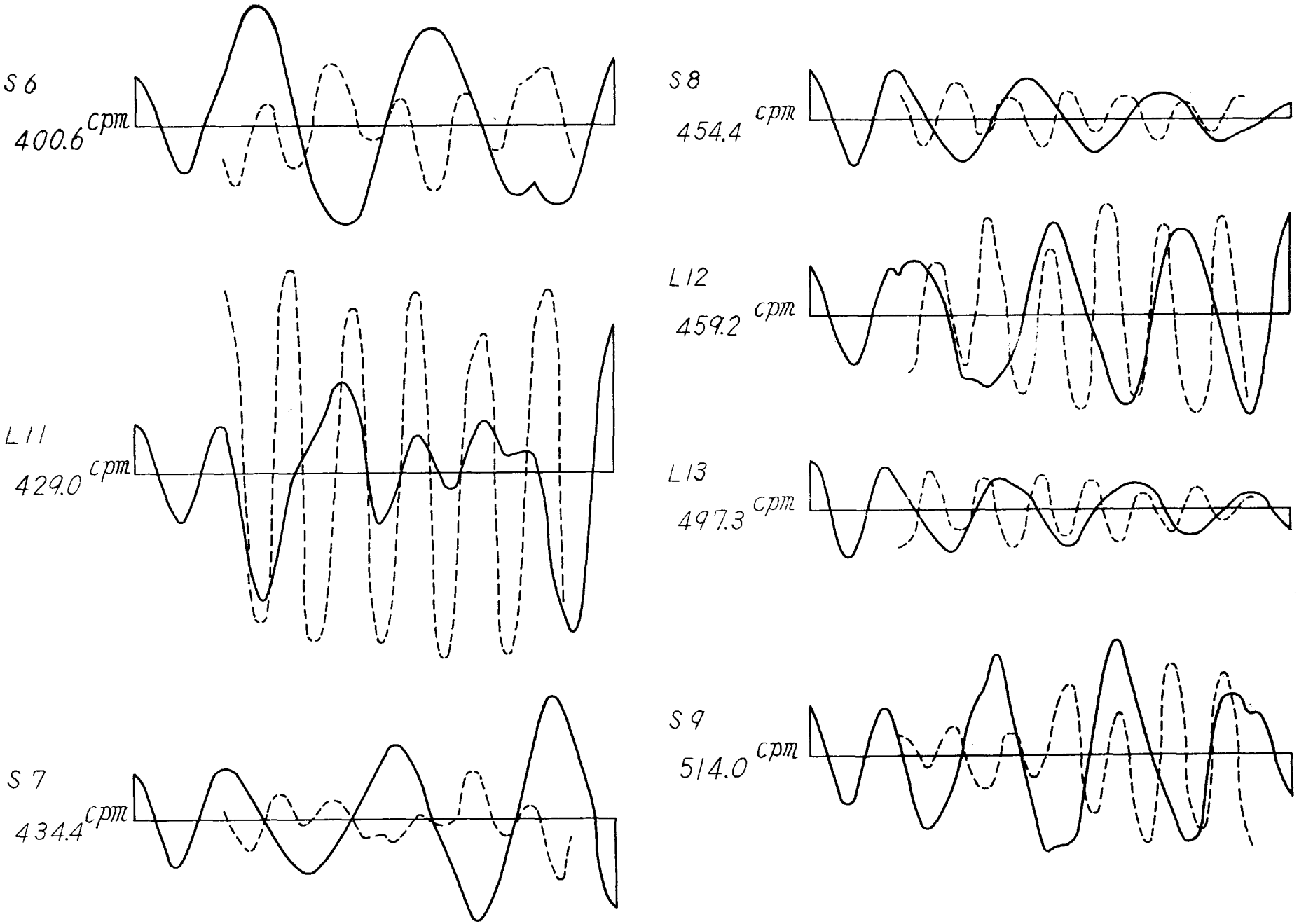


図3.16 (*iii*)　15万トン油送船の振動型曲線（対称型）

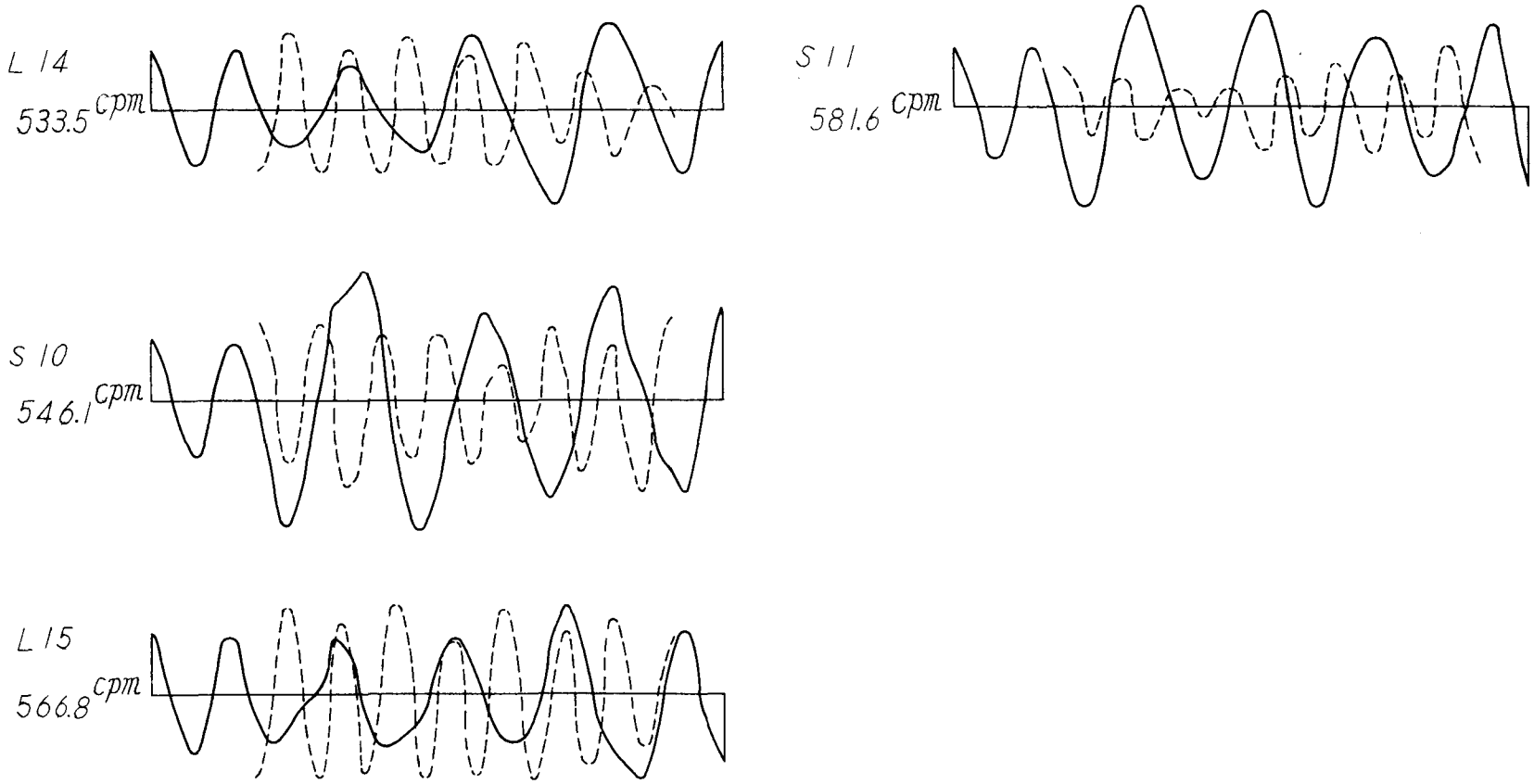


図 3.16 (iv) 15万トン油送船の振動型曲線（対称型）

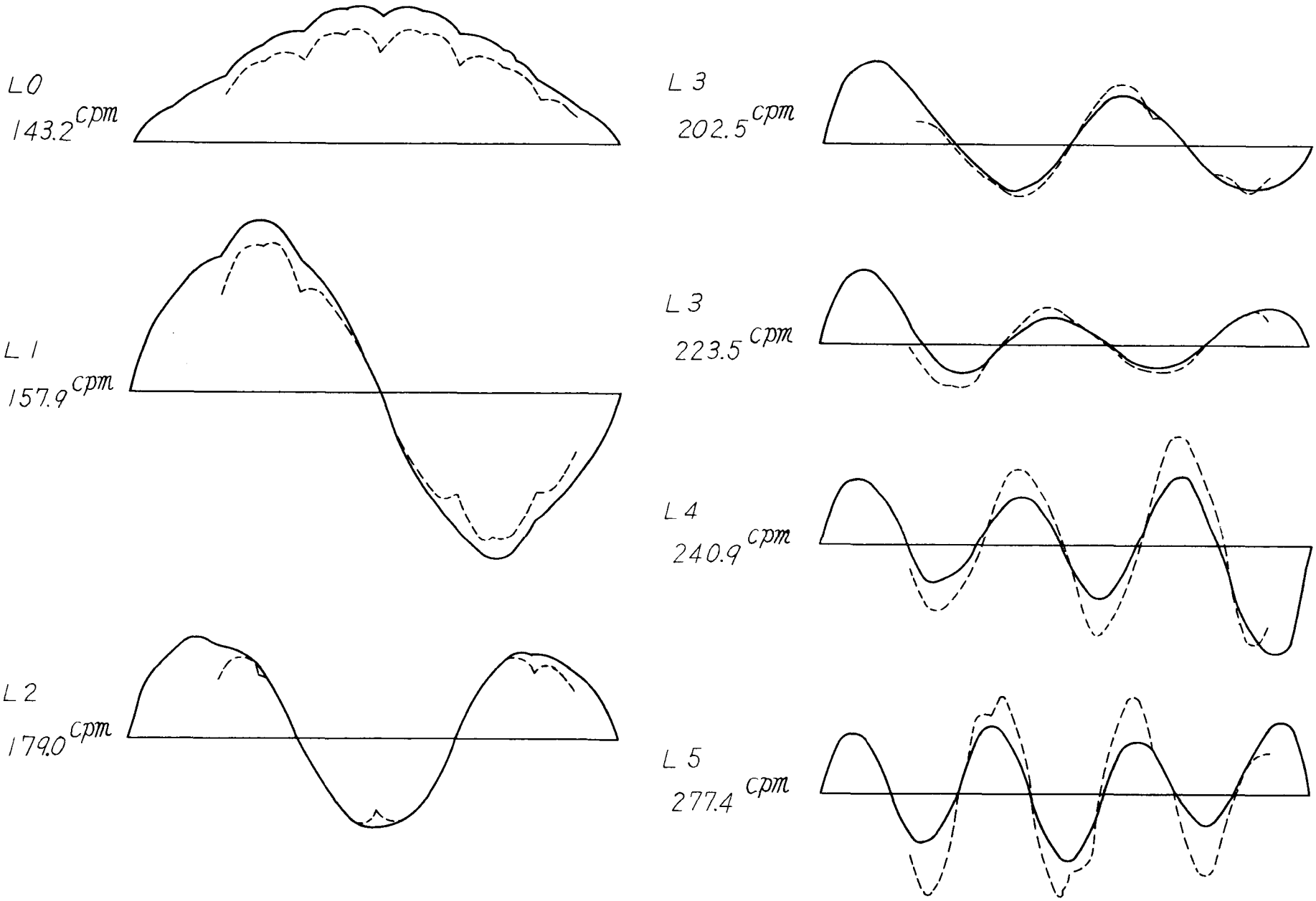


図 3.17 (i)　15万トン油送船の振動型曲線（逆対称型）

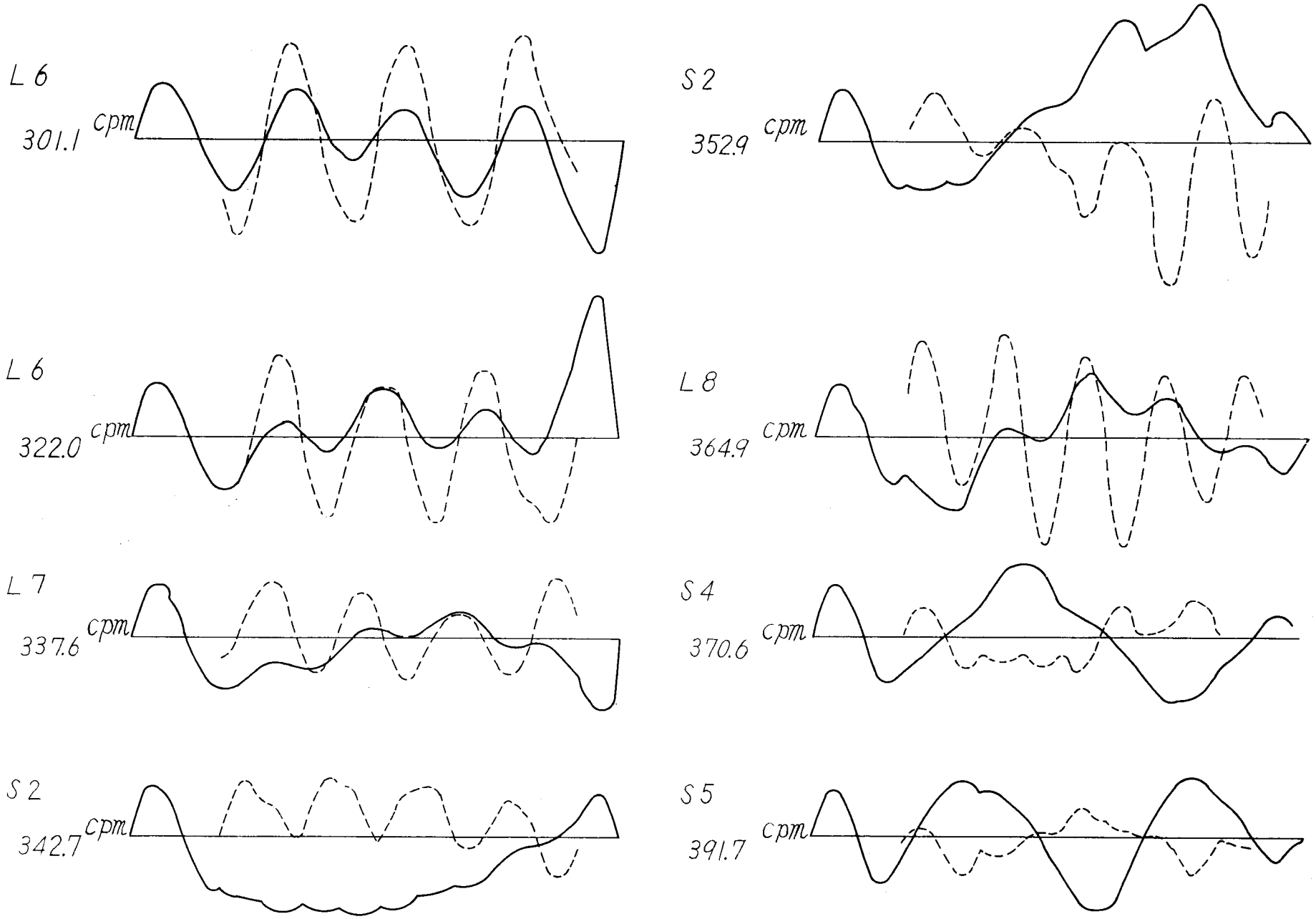


図 3.17 (ii) 15万トン油送船の振動型曲線（逆対称型）

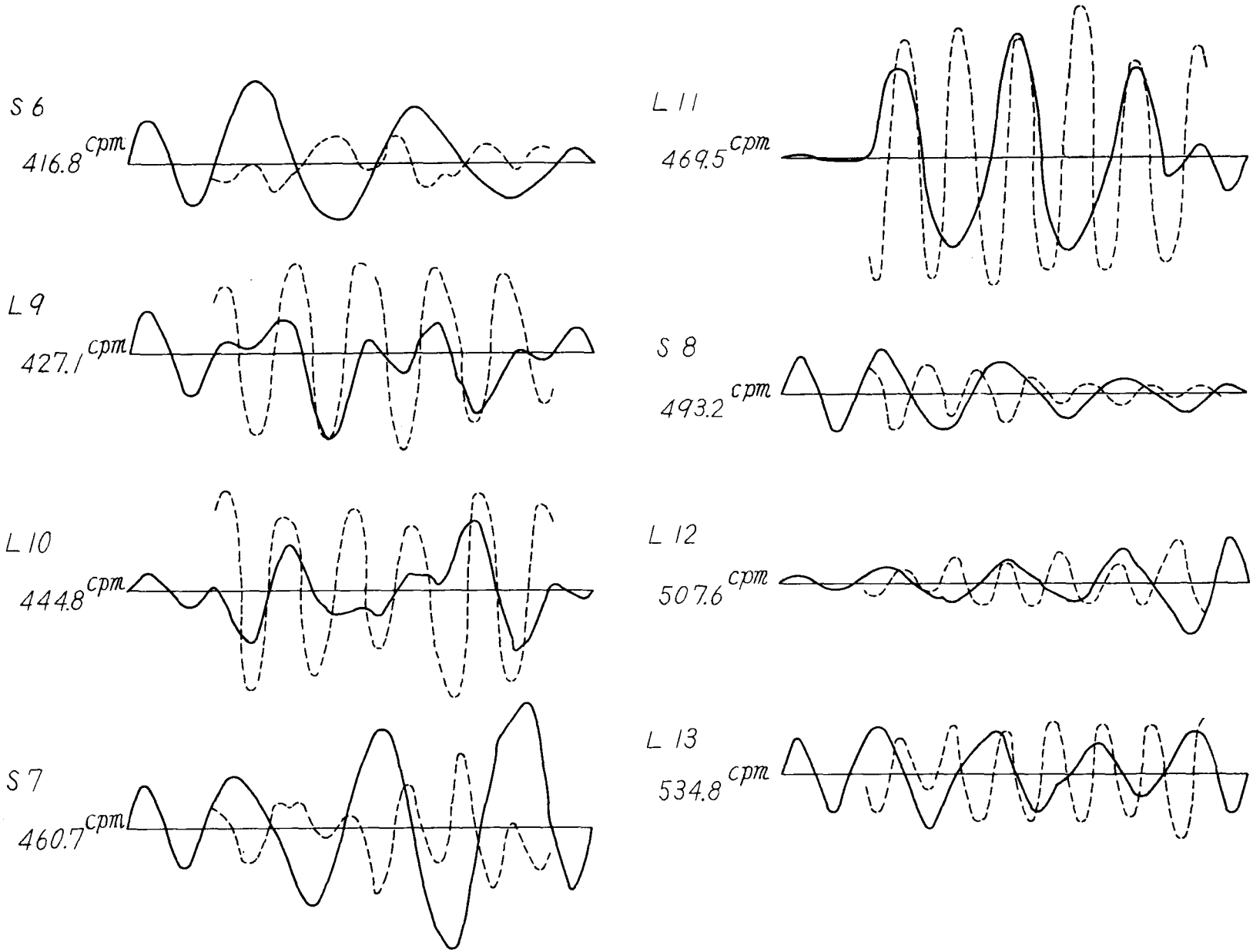


図 3.17 (iii) 15万トン油送船の振動型曲線（逆対称型振動）

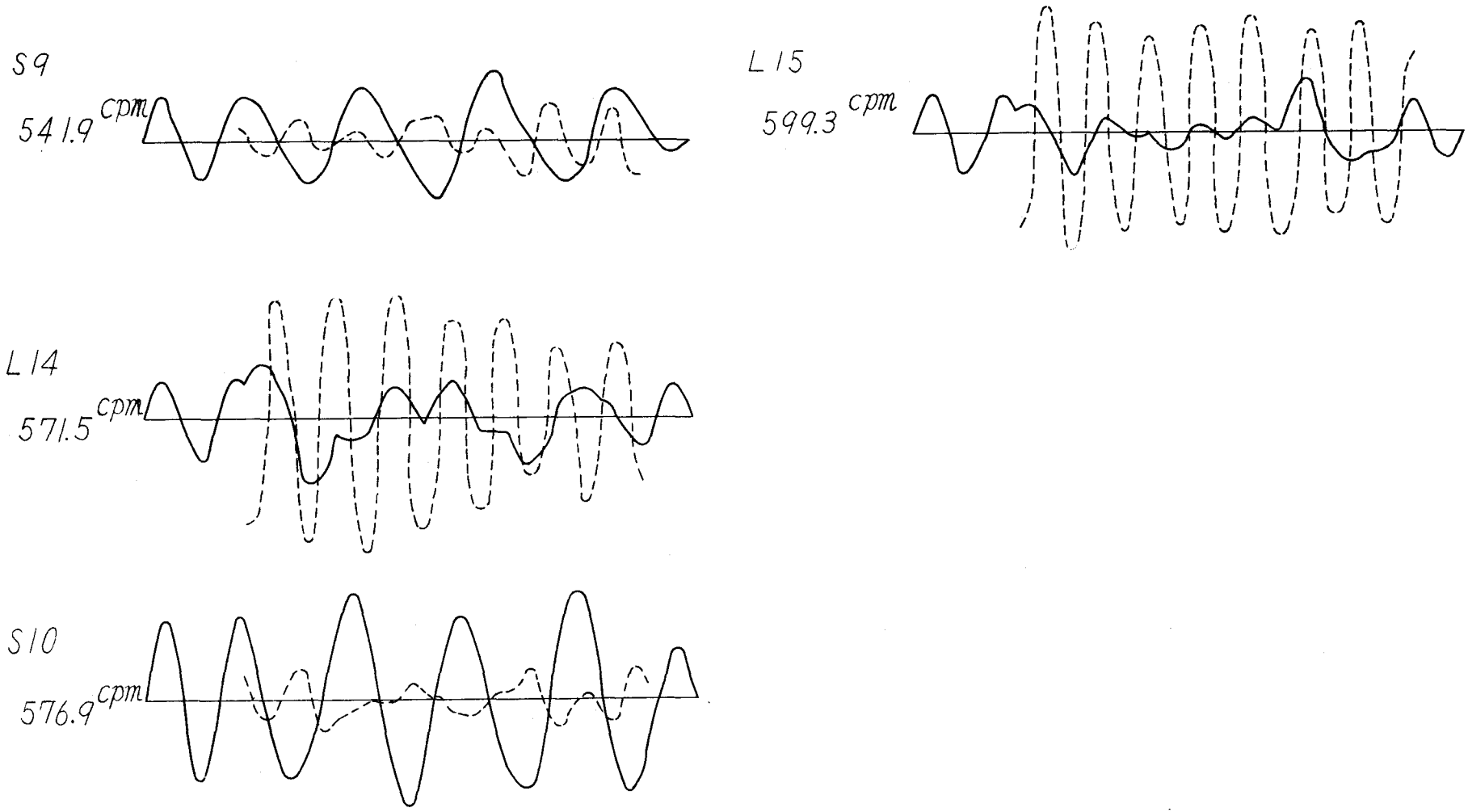


図 3.17 (*iv*)　15万トン油送船の振動型曲線（逆対称型）

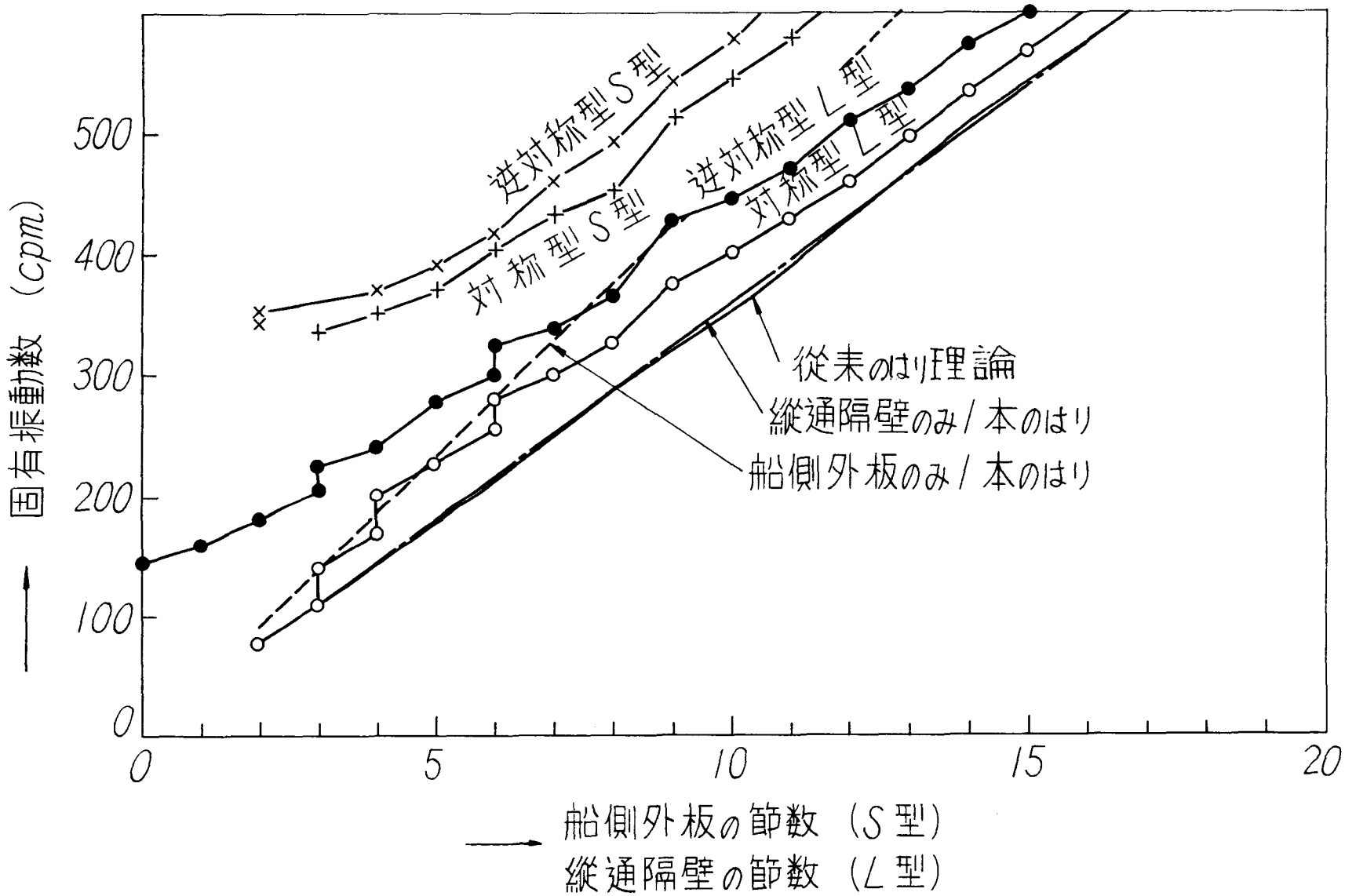


図 3.18　Non-Beam Vibration の固有振動数と節数の関係

表 3. 3(*i*)　本理論と単純梁理論による固有振動数の比較（L—type）

NON—BEAM ANALYSIS				ONE BEAM ANALYSIS				COMPARISON		
対称型振動 L—type, N_{SL}		逆対称型振動 L type, N_{AL}		1本の梁 No		Longi, Bhdのみ N_L		$\frac{N_{SL}}{N_O}$	$\frac{N_{SL}}{N_L}$	$\frac{N_{AL}}{N_L}$
MODE	固有振動数	MODE	固有振動数	MODE	固有振動数	MODE	固有振動数			
		L 0	14.3.2							
		L 1	157.9							
L 2	76.9	L 2	179.0	2	77.9	2	71.6	0.988	1.073	2.500
L 2	107.5	L 3	202.5	3	110.7	3	107.5	0.971	1.000	1.884
L 3	137.7	L 3	223.5	4	143.9	4	143.3	0.958	0.961	1.560
L 4	169.1	L 4	240.9	5	179.9	5	179.1	0.940	0.944	1.345
L 4	200.0	L 5	277.4	6	216.4	6	214.9	0.924	0.931	1.291
L 5	226.8	L 6	301.1	7	252.5	7	250.7	0.898	0.905	1.201
L 6	255.9	L 6	322.0	8	287.7	8	286.6	0.889	0.893	1.124
L 6	278.7	L 7	337.6	9	320.2	9	322.4	0.870	0.865	1.047
L 7	299.8	L 8	364.9	10	353.1	10	358.2	0.849	0.837	1.019
L 8	328.4	L 9	427.1	11	390.9	11	394.0	0.840	0.833	1.084
L 9	376.4	L 10	444.8	12	431.3	12	429.8	0.873	0.876	1.035
L 10	398.5	L 11	469.5	13	471.5	13	465.7	0.845	0.856	1.008
L 11	429.0	L 12	507.6	14	508.8	14	501.5	0.843	0.855	1.012
L 12	459.2	L 13	534.8	15	541.6	15	537.3	0.848	0.855	0.995
L 13	497.3	L 14	571.5	16	575.4	16	573.1	0.864	0.868	0.997

表 3. 3 (*ii*)　本理論と単純梁理論による固有振動数の比較（S—type）

NON—BEAM ANALYSIS				ONE BEAM ANALYSIS		COMPARISON	
対称型振動 S—type, N_{SS}		逆対称型振動 S—type, N_{AS}		Side Shell のみ Ns		$\frac{N_{SS}}{N_S}$	$\frac{N_{AS}}{N_S}$
MODE	固有振動数	MODE	固有振動数	MODE	固有振動数		
		S 2	342.7	2	91.1		3.762
S 3	336.6	S 2	352.9	3	140.1	2.403	2.519
S 4	353.7	S 4	370.6	4	187.7	1.884	1974
S 5	373.0	S 5	391.7	5	233.1	1.600	1.680
S 6	400.6	S 6	416.8	6	280.3	1.429	1.487
S 7	434.4	S 7	460.7	7	329.6	1.318	1.398
S 8	454.4	S 8	493.2	8	377.5	1.204	1.306
S 9	514.0	S 9	541.9	9	421.9	1.218	1.284
S 10	546.1	S 10	576.9	10	465.5	1.173	1.239

同じ傾向をもつことがわかる。

１５万トンタンカーの数値計算結果によれば、これら各 type の振動は固有振動数の低い方から対称型 L—type 、逆対称型 L—type 、対称型 S—type 、逆対称型 S—type の順に現われる傾向を示しており、低次振動では対称型 L—type と１本の梁の計算とはよく一致するが、高次振動になれば次第にかけはなれる。（例えば７節以上になれば固有振動数は１０％以上異なる値となる。さらに高次振動になるにしたがって L—type の系列の固有振動数は Longi Bhd のみを１本の梁と考えた固有振動数に、S—type の系列のものは Side Shell のみを１本の梁と考えたものに近づく傾向がある。

船の大きさが異なる場合の計算結果を上記振動の type 別に比較したものを図 3.１９に示す。これらの図から固有振動数と節数の関係は各 type とも載荷重量のちがいによって傾向的に変わることなく、載荷重量が増加するにつれて、各 type ともほぼ一様に固有振動数が低下することがわかる。

3.4.2　荷重分布が固有振動数および振動モードにおよぼす影響

Ballasting が Non—Beam Vibration におよぼす影響をしらべるために、１５万トンタンカーの Ballast Condition について、４５％ Ballast Water を図 3.２０に示したように Tank Part に均一に積んだ場合（A 状態）および実状にあわせた積みつけをした場合（B および C 状態）の三状態につき計算を行なった。

三状態の固有振動数の比較を表 3.4 に示す。またそのうち主要なものについてはモード曲線を図 3.２１（i）～（iv）に示す。荷重分布が固有振動数におよぼす影響は対称型、逆対称型とも L—type に対してほとんど影響がなく、最大５％程度であるが、S—type ではかなりの影響があり、最低次モードでは１５％程度にもなる。モード曲線では対称型 L—type に対してはほとんど影響はないが、逆対称型 L—type に対してはかなりの影響がある。S—type のモード曲線は荷重分布によって大きく影響される。

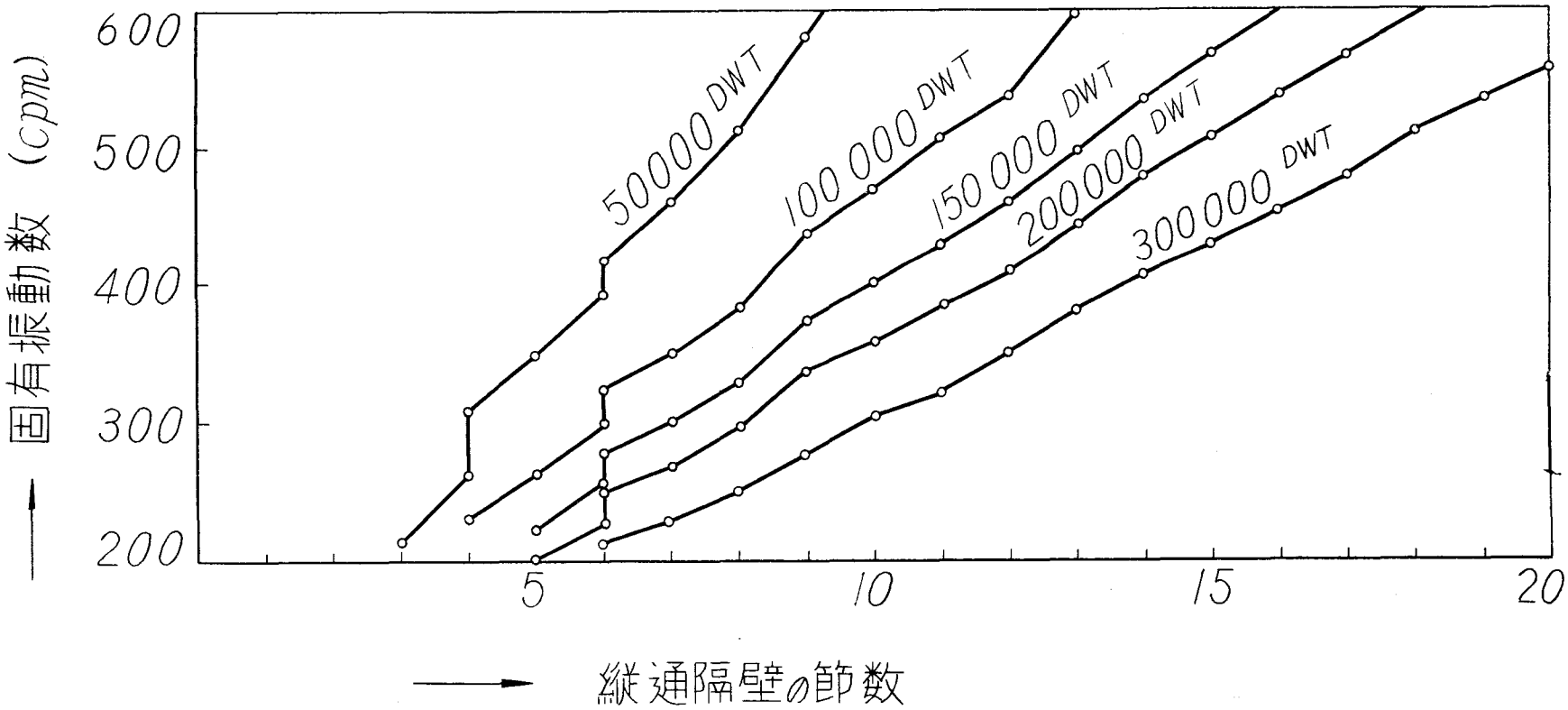


図 3.1 9 (i) 載荷重量が固有振動数におよぼす影響 (対称型 L 型)

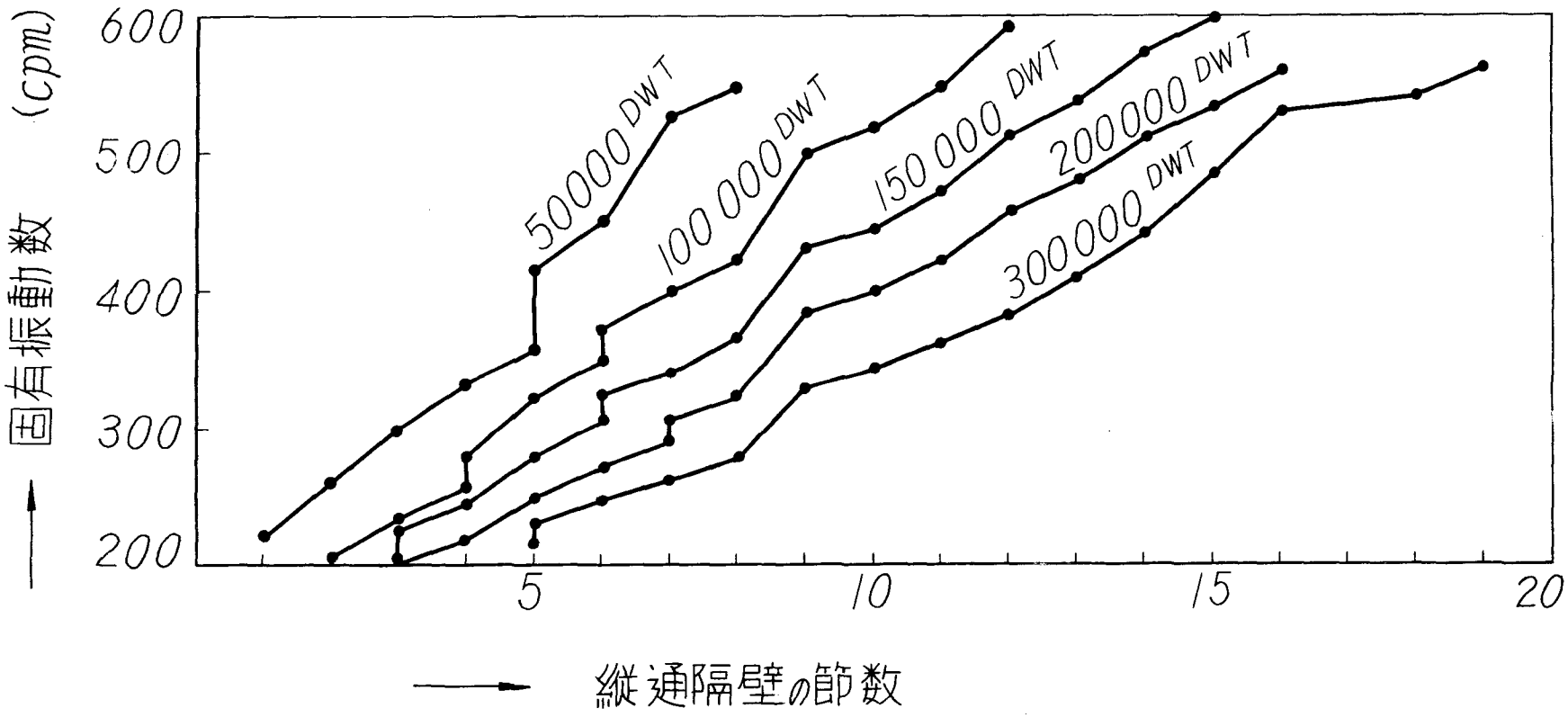


図 3.19 (ii) 載貨重量が固有振動数におよぼす影響（逆対称型L型）

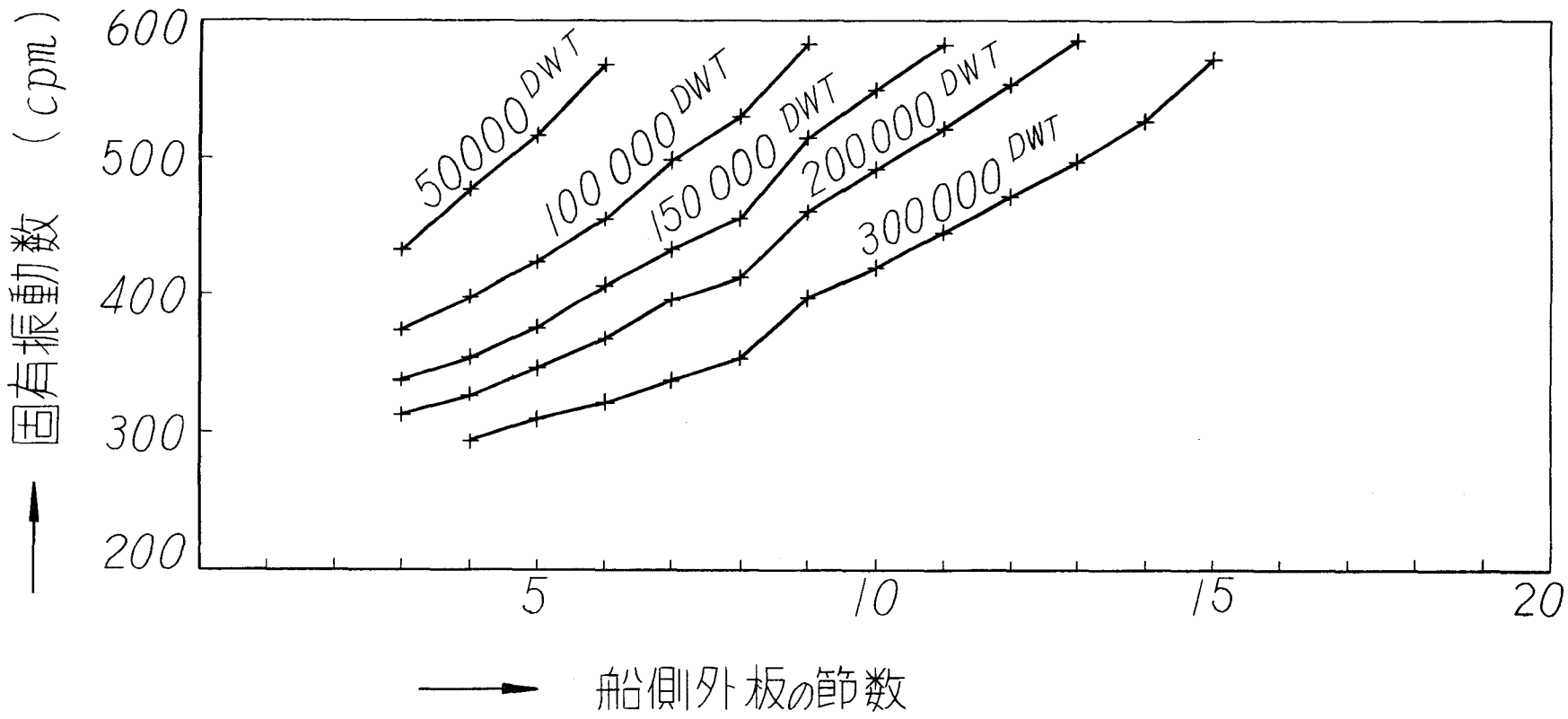


図 3.19 (iii) 載荷重量が固有振動数におよぼす影響 (対称型S型)

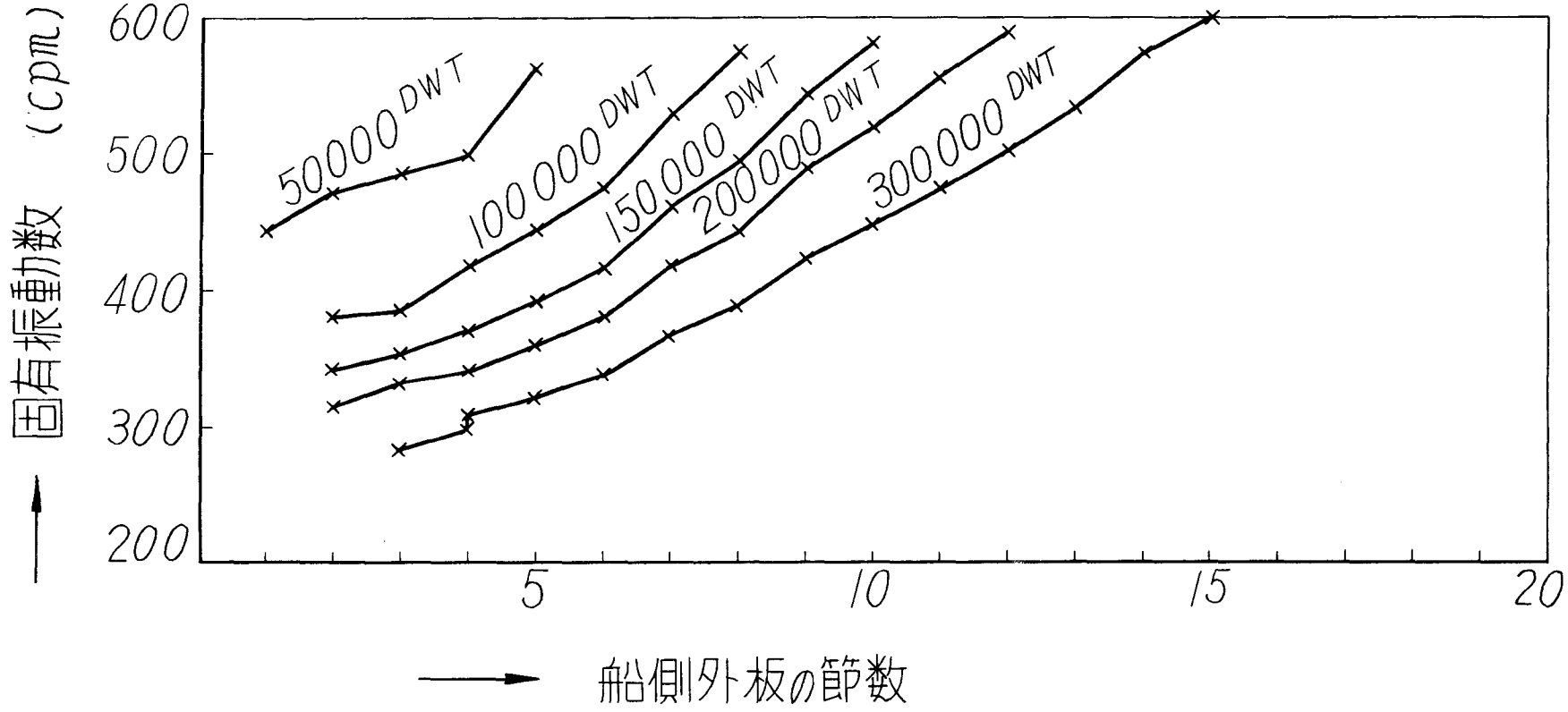


図 3.19 (iv) 載荷重量が固有振動数におよぼす影響 (逆対称型S型)

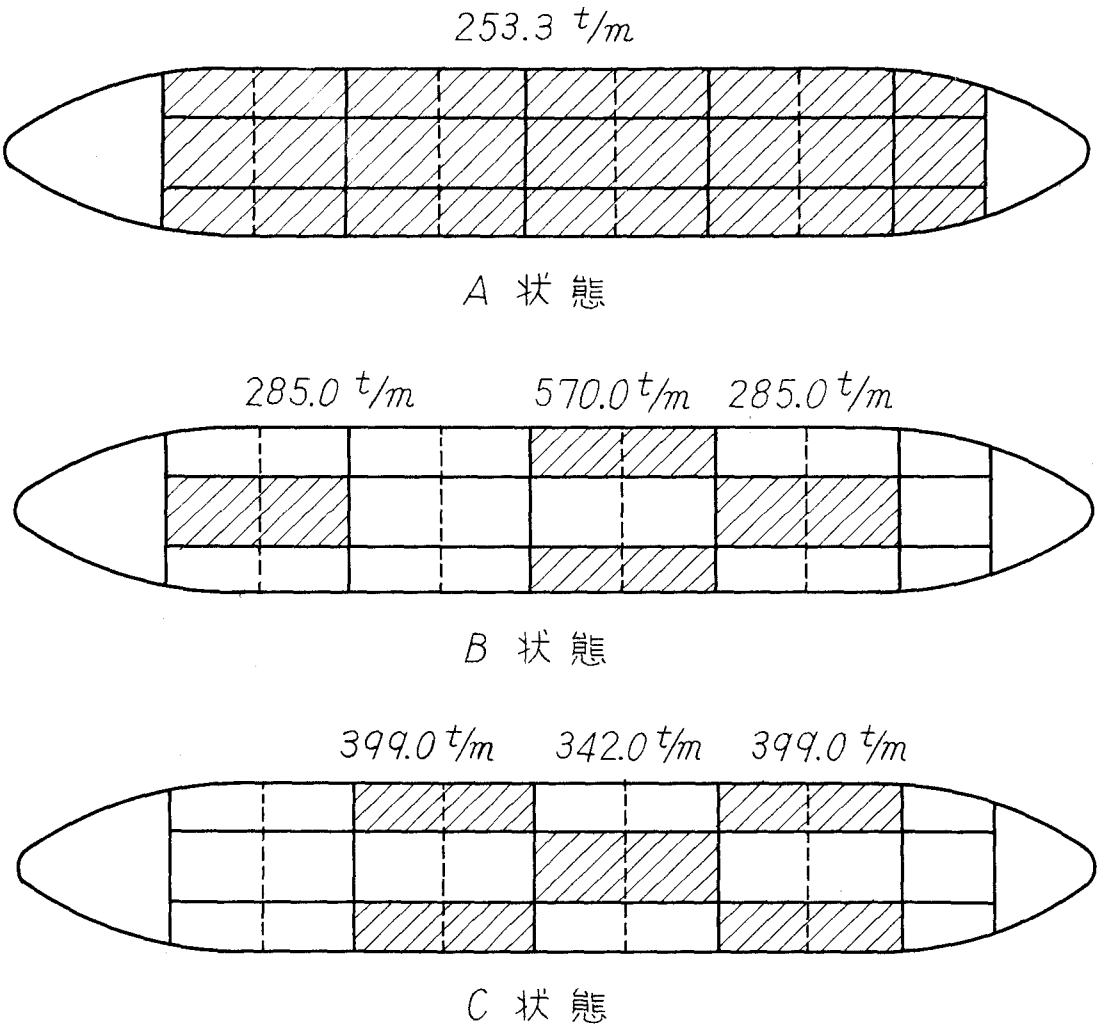

253.3 t/m
A 状態
285.0 t/m
570.0 t/m
285.0 t/m
B 状態
399.0 t/m
342.0 t/m
399.0 t/m
C 状態

図3.20　軽貨状態

表 3.4　Non-Beam Vibration の固有振動数におよぼす荷重分布の影響

単位：cpm

対称型振動						逆対称型振動					
振動	A 状態	B 状態		C 状態		振動	A 状態	B 状態		C 状態	
モード	N_A	N_B	N_B/N_A	N_C	N_C/N_A	モード	N_A	N_B	N_B/N_A	N_C	N_C/N_A
L3*	230.1	232.1	1.009	229.2	0.996	L1	217.7	216.5	0.994	217.2	0.998
L4	273.2	273.1	1.000	275.3	1.008	L2	242.5	248.0	1.023	238.8	0.985
L5	311.1	317.1	1.019	319.2	1.026	L2*	271.1	269.1	0.993	268.3	0.990
L5	344.9	345.4	1.001	353.0	1.023	L3	301.9	313.4	1.038	319.6	1.059
L6*	376.9	374.2	0.993	386.6	1.026	L4	331.0	338.4	1.022	338.2	1.022
L7	418.0	417.7	0.999	437.7	1.047	L5	384.1	371.3	0.967	374.5	0.975
L8	461.1	466.1	1.011	475.0	1.030	L5	409.6	402.3	0.982	411.7	1.005
L9	528.7	506.4	0.958	517.6	0.979	L6*	433.8	433.4	0.999	440.2	1.015
L10	559.0	564.6	1.010	570.4	1.020	L6	454.6	455.9	1.003	468.0	1.029
L11	596.5	593.1	0.994	591.3	0.991	L7	477.8	503.1	1.058	517.9	1.084
S4*	473.9	391.0	0.825	421.6	0.890	L8	508.9	538.4	1.058	548.5	1.078
S4*	496.6	517.5	1.040	432.4	0.871	S2*	495.9	411.9	0.831	446.2	0.900
S5	518.9	548.5	1.057	548.2	1.056	S4*	517.7	523.1	1.010	450.6	0.870

*　振動モードは図 3.21 に示されている。

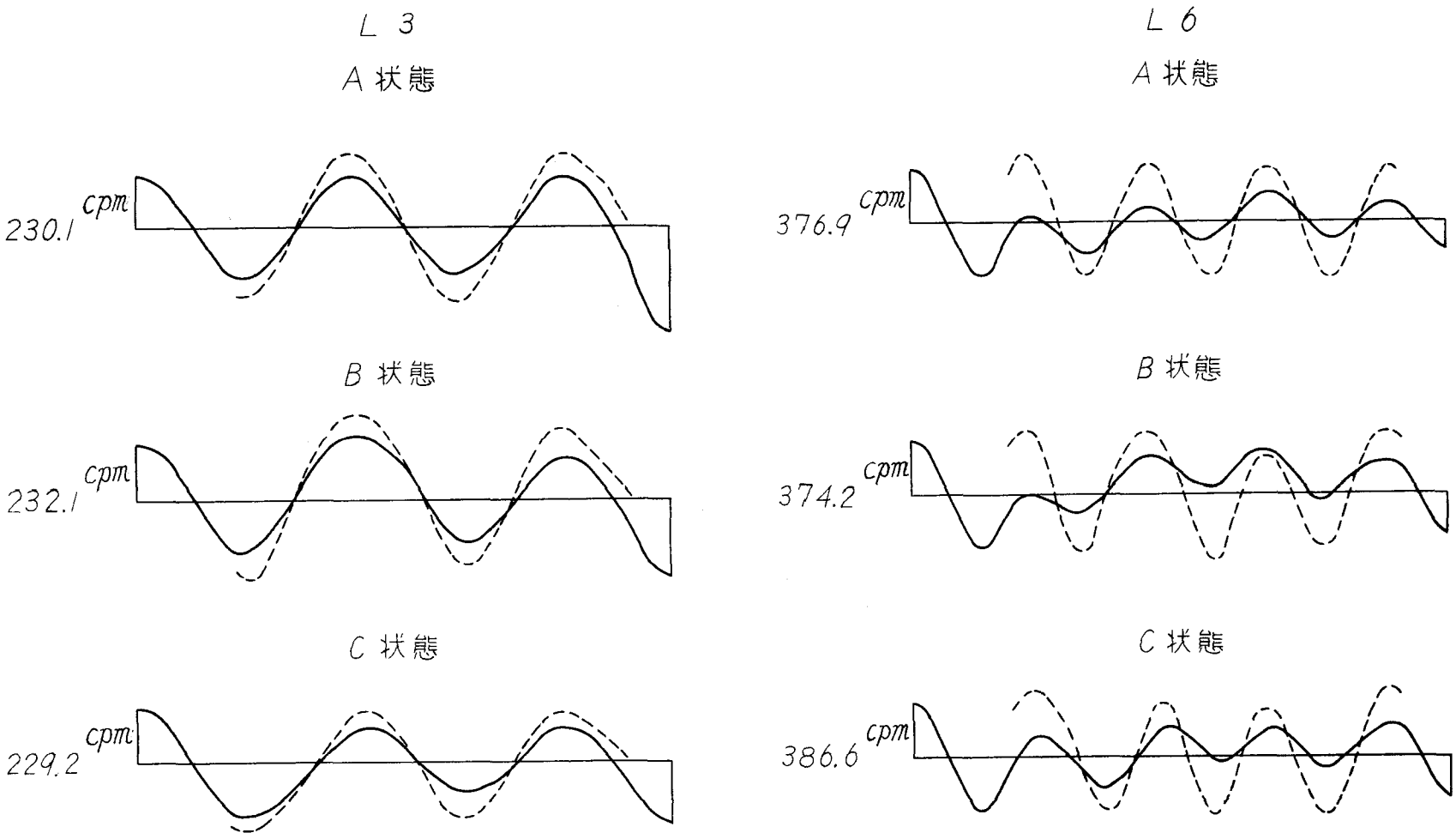


図 3.21 ·(i) 振動型曲線の比較

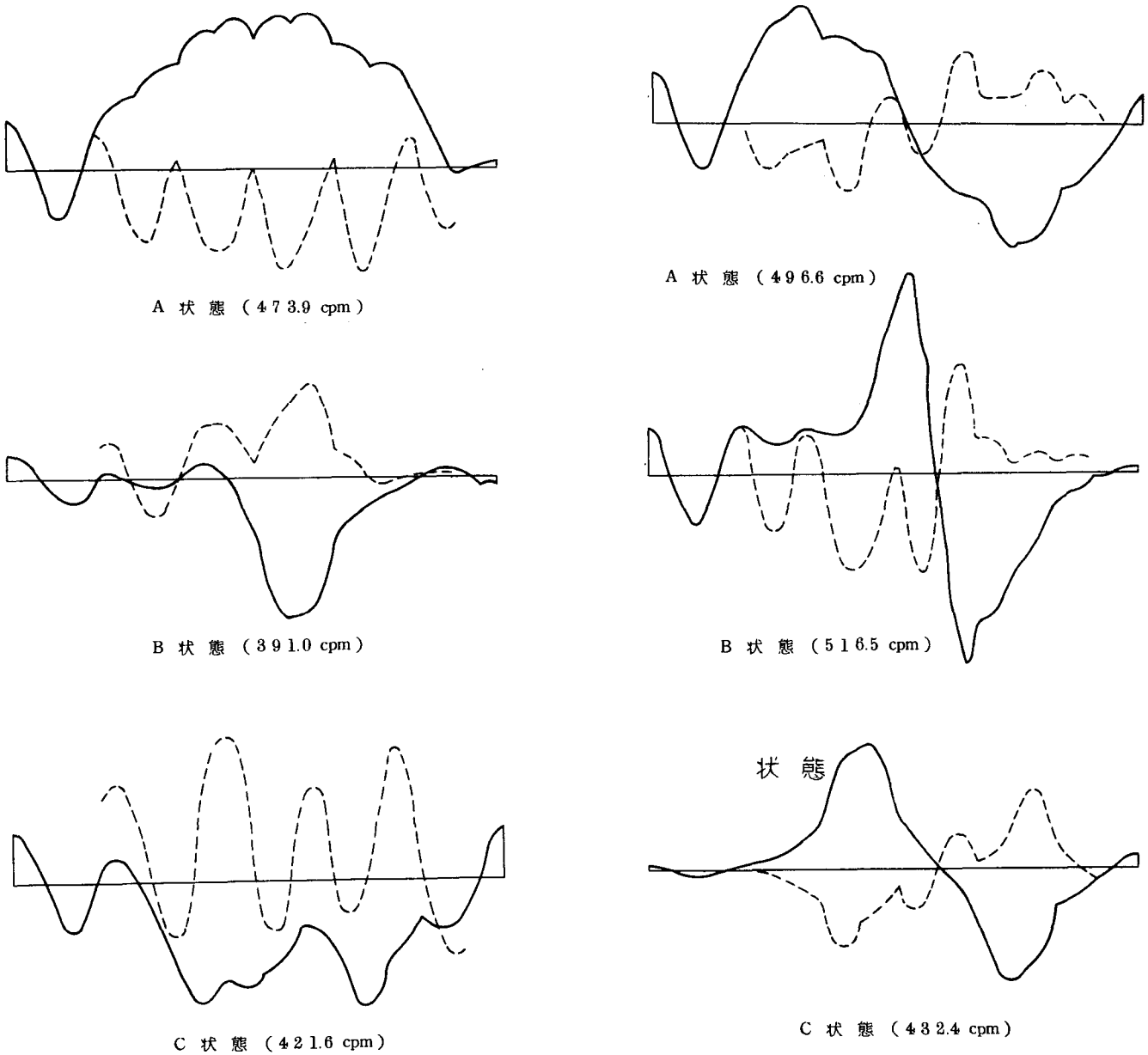


図3.21・(ii) 振動型曲線の比較

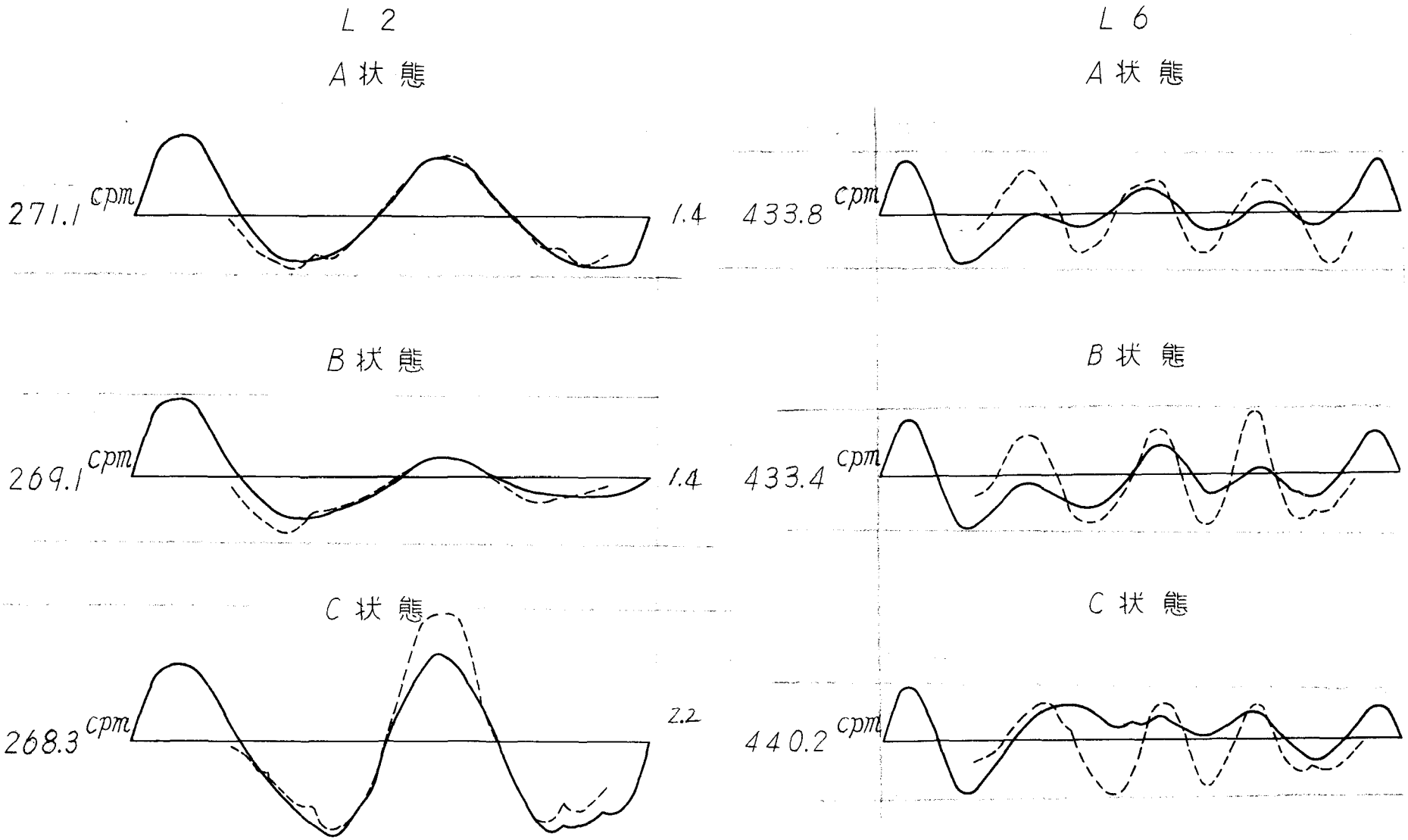


図 3. 2 1 ·(iii)　振動型曲線の比較

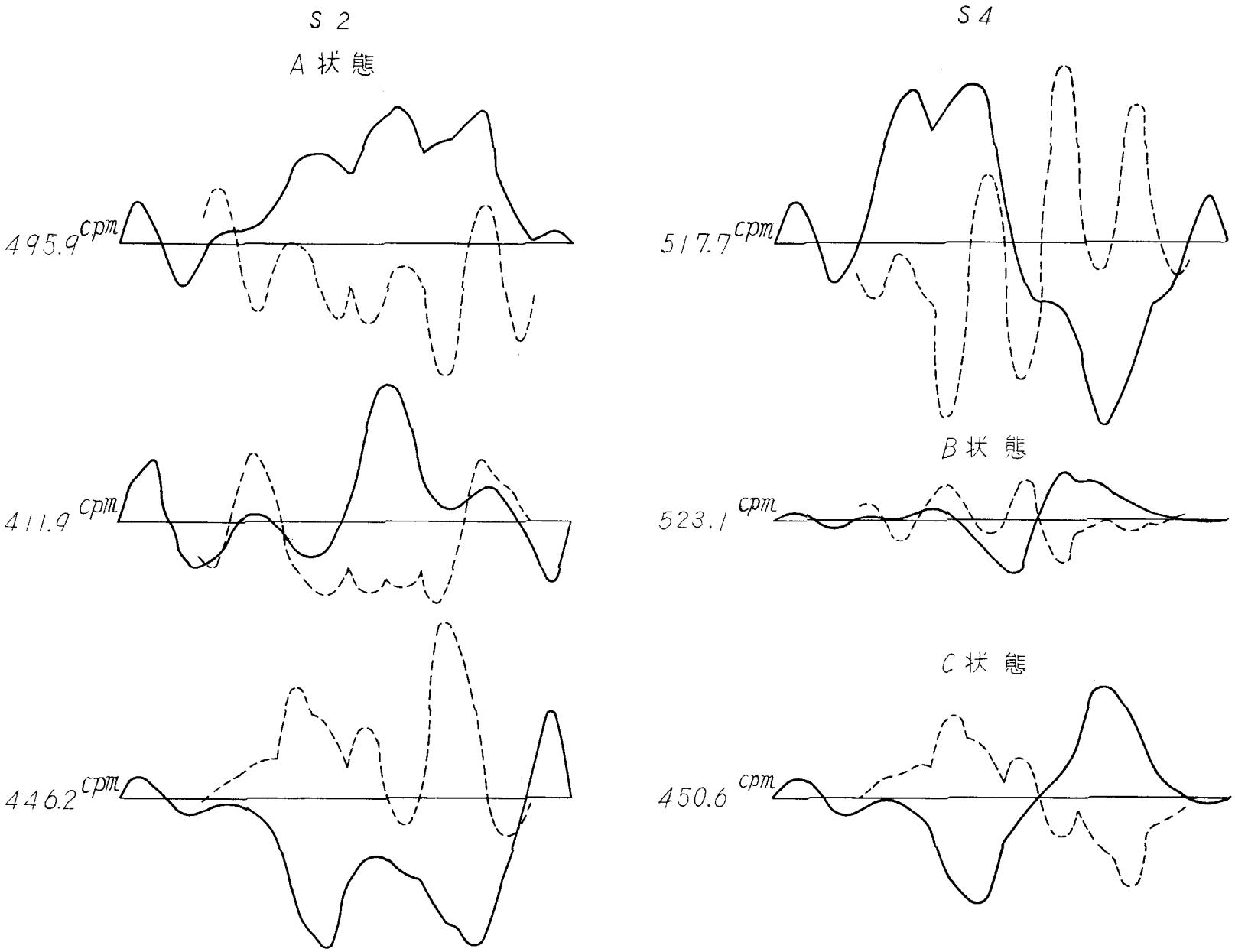


図 3.21 -(iv) 振動型曲線の比較

3.4.3　横隔壁が固有振動数におよぼす影響

Trans Bhdが Non—Beam Vibrationにおよぼす影響を検討するため、図3.22に示したような通常のTrans Bhd配置の構造（Ship A）,Swash Bhdなしの構造（Ship B）、さらに2つのTrans Bhdを除いた構造（Ship D）の船について計算を行ない、比較した。

計算結果を表3.5に示す。対称型L—typeの場合、Trans Bhdが存在してもその固有振動数は殆んど変らない。他の3つのtypeの振動では低次振動の場合かなりの影響を受けるが、（15％程度）高次振動ではその影響は小さくなる。

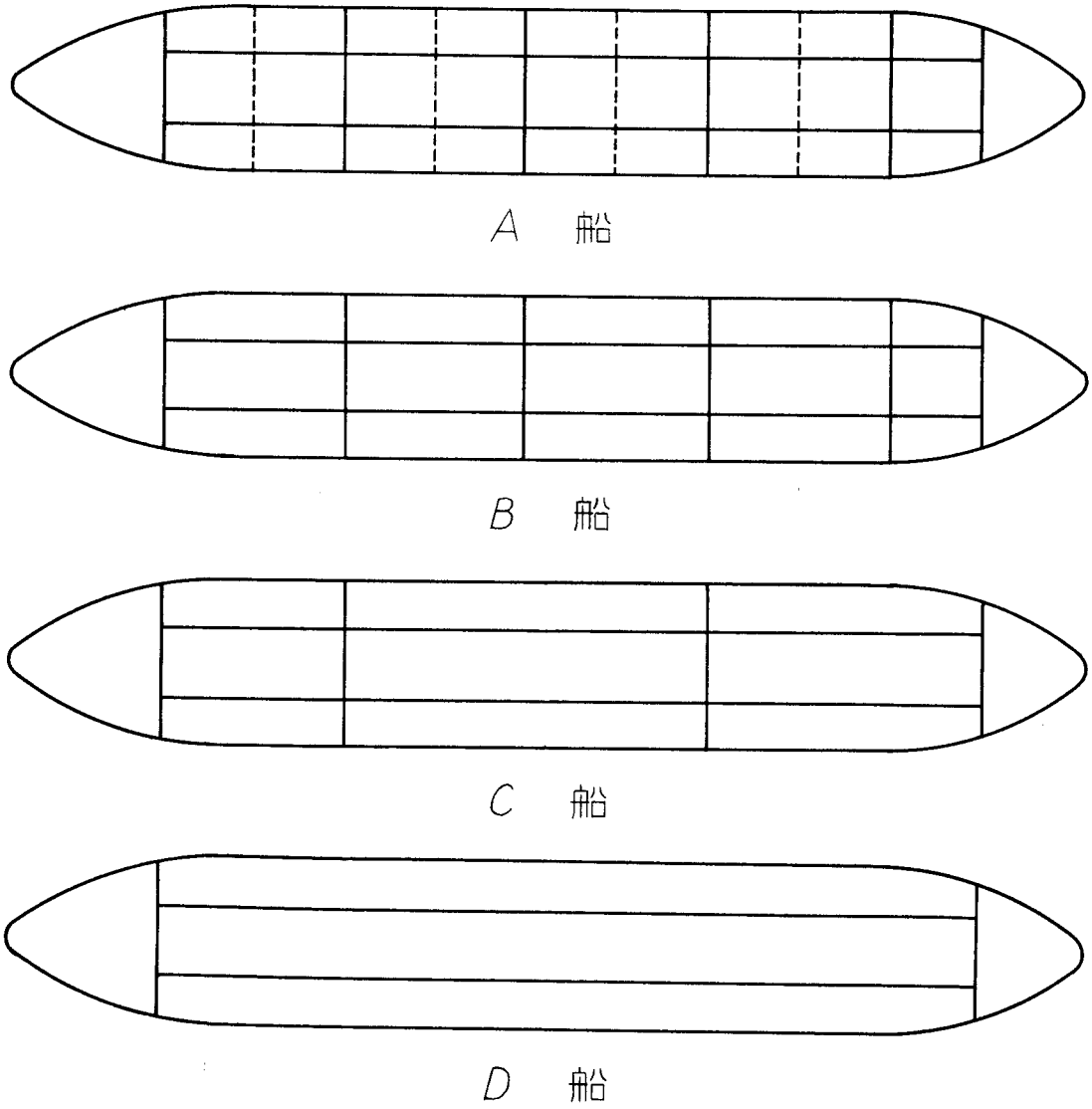


図3.22　横隔壁配置

表3.5　Non—Beam Vibration の固有振動数におよぼす横隔壁の影響

対称型振動					逆対称型振動				
MODE	A	B	C	D	MODE	A	B	C	D
	N_A (cpm)	N_B/N_A	N_C/N_A	N_D/N_A		N_A (cpm)	N_B/N_A	N_C/N_A	N_D/N_A
L5	226.8	0.994	0.989	0.985	L5	277.4	0.994	0.955	0.831
L6	255.9	0.992	0.988	0.984	L6	301.1	0.989	0.960	0.854
L6	278.7	0.990	0.986	0.986	L6	322.0	0.985	0.954	0.877
L7	299.8	0.990	0.987	0.991	L7	337.6	1.024	0.999	0.963
L8	328.4	0.995	0.997	0.994	L8	364.9	0.998	0.995	0.965
L9	373.0	1.006	0.968	0.958	L9	427.1	0.986	0.936	0.906
L10	400.6	0.996	0.986	0.972	L10	444.8	0.990	0.971	0.947
L11	429.0	0.998	0.984	0.984	L11	469.5	0.995	0.971	0.964
L12	459.2	0.999	0.999	0.995	L12	507.6	0.990	0.967	0.954
L13	497.3	1.025	1.007	0.993	L13	534.8	0.991	0.981	0.965
L14	533.5	1.021	1.007	0.993	L14	571.5	0.997	0.982	0.959
L15	566.8	0.995	0.984	0.999	L15	599.3	0.996	0.993	0.976
S3	333.6	0.958	0.991	0.865	S2	342.7	0.952	0.915	0.884
S4	353.7	0.972	0.919	0.876	S3	352.9	0.935	0.928	0.901
S5	376.4	0.964	0.935	0.898	S4	370.6	0.977	0.933	0.928
S6	398.5	0.975	0.968	0.938	S5	391.7	0.976	0.963	0.944
S7	434.4	0.996	0.978	0.951	S6	416.8	0.976	0.976	0.952
S8	454.4	0.997	0.995	0.990	S7	460.7	0.996	0.964	0.938
S9	514.0	0.959	0.952	0.939	S8	493.2	0.994	0.981	0.966
S10	546.1	0.973	0.958	0.971	S9	541.9	0.990	0.976	0.964
S11	581.6	0.998	0.989	0.955	S10	576.9	0.993	0.990	0.973

第4章　Non−Beam Vibrationの付加水質量の計算法

4.1　有限要素法によるNon−Beam Vibration の二次元付加水質量の計算法

4.1.1　fluid influence matrix

図3.23に示したように水線面下の船体断面形状をN個の微少直線々分より形成されている

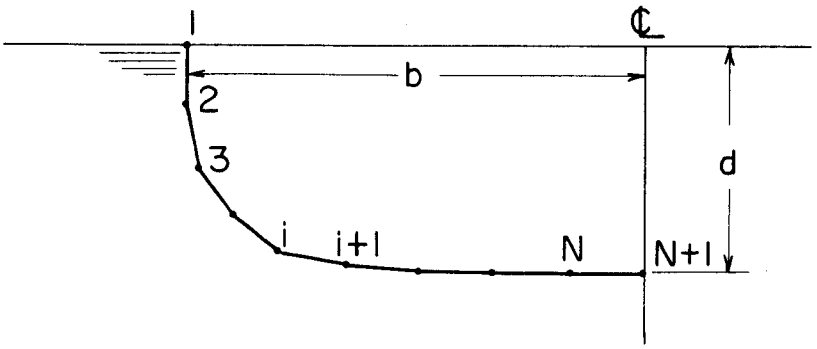


図3.23　船体断面

ものとする。第2編に示した有限要素法による解法を適用すれば、一般に断面の加速度分布とそれにより断面に生ずる振動動圧力の関係を表わす、いわゆるfluid influence matrix は次のように求められる。

$$\{p\} = \rho \ \mathbf{INF} \cdot \{\dot{v}\} \qquad (3.46)$$

ここに、　$\{p\} = \{p_1, p_2 \cdots\cdots, p_N, p_{N+1}\}$

$\{\dot{v}\} = \{\dot{v}_1, \dot{v}_2, \cdots\cdots, \dot{v}_N, \dot{v}_{N+1}\}$

INF　:fluid influence matrix, (N+1,N+1)型matrix

Non−Beam Vibration の解析において船体中心線に関する対称性を考慮することにより、対称型振動と逆対称型振動に分けて取り扱うことができることは前章において述べた通りである。したがって有限要素法による計算における二次元流体領域の境界条件も対称型振動および逆対称型振動に対してそれぞれ図3.24に示したようになる。明らかにそれぞれの場合の境界条件を用いて計算されたfluid influence matrixは異なったものになり、以下次に示す添字

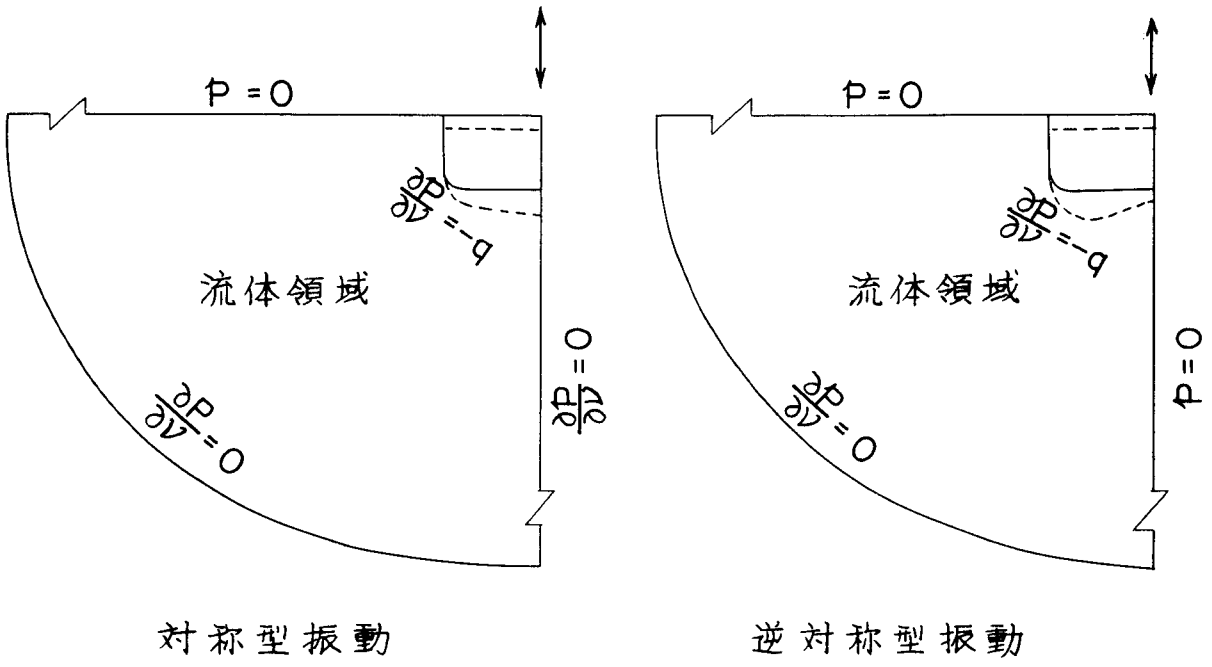


図 3. 2 4　流体領域の境界条件

により区別することにする。

INF$_S$：　対称型振動に対する fluid influence matrix

INF$_A$：　逆対称型振動に対する fluid influence matrix

4. 1. 2　二次元運動エネルギおよび付加水質量係数matrix

（2. 4 1）式で示したように二次元運動エネルギは次式で表わされる。

$$T = \frac{1}{2}\int p\, y\, \ell\, ds \qquad (3.47)$$

図3. 2 5に示したように1つの線分要素において、p および y は直線的に変化するものと仮定すれば、（3. 4 7）式の積分は vector { p }，{ y }を使用して次のように書き表わされる。

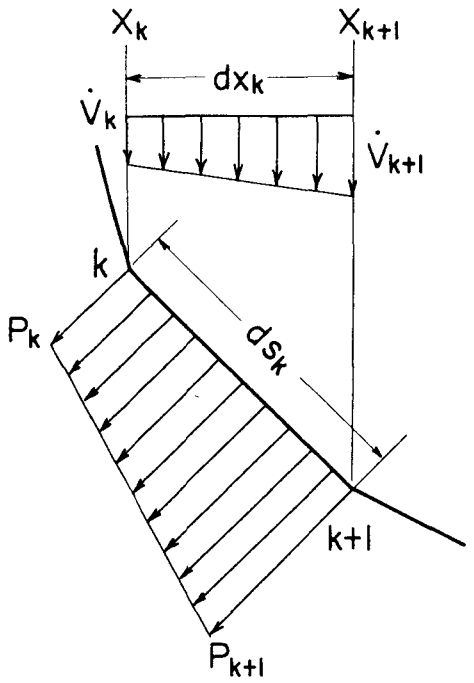


図 3. 2 5　線分要素に働く動圧力

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\int_k p_k y_k dx_k$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\lfloor y_k, y_{k+1}\rfloor \cdot \frac{1}{4}dx_k \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} p_k \\ p_{k+1} \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\{y\}^T \cdot \mathbf{N} \cdot \{p\} \qquad (3.48)$$

ここに、　$\{y\} = -\frac{1}{\omega^2}\{\dot{v}\}$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} dx_1 & dx_1 & & & & 0 \\ dx_1 & dx_1+dx_2 & dx_2 & & & \\ & dx_2 & dx_2+dx_3 & & & \\ 0 & & & \ddots & & \\ & & & & dx_{N-1}+dx_N & dx_N \\ & & & & dx_N & dx_N \end{bmatrix}$$

（3.46）式を（3.48）式に代入すれば、運動エネルギは次のようになる。

$$T=\frac{1}{2}\{y\}^T\rho\ \mathbf{N}\cdot\mathbf{INF}\cdot\{\dot{v}\}$$

$$=\frac{1}{2}\{v\}^T\cdot\mathbf{M}\cdot\{v\} \qquad (3.49)$$

ここに、 $\mathbf{M}$ ；付加水質量matrix，（N＋1，N＋1）matrix

$=\rho\ \mathbf{N}\cdot\mathbf{INF}$

二次元付加水質量係数はmatrixの形で次のように定義することができる。

$$\mathbf{C}_V=\frac{4}{\rho\pi b^2}\mathbf{M} \qquad (3.50)$$

ここに、 b；断面の半幅

いま、断面変形がなく、剛体的に運動するものとすれば、速度vector は

$$\{v\}=V\{1\}$$

で表わされ、従来の二次元付加水質量係数との関係は次のようになる。

$$\{1\}^T\cdot{}_S\mathbf{C}_V\cdot\{1\}=\sum_{i=1}^{N+1}\sum_{j=1}^{N+1}{}_S\mathbf{C}_{V\,ij}=C_V$$

$$\{1\}^T\cdot{}_A\mathbf{C}_V\cdot\{1\}=\sum_{i=1}^{N+1}\sum_{j=1}^{N+1}{}_A\mathbf{C}_{V\,ij}=C_H \qquad (3.51)$$

ここに、 ${}_S\mathbf{C}_V$：対称型振動に対する二次元付加水質量係数matrix

${}_A\mathbf{C}_V$：逆対称型振動に対する二次元付加水質量係数matrix

ただし、（3.51）式のC_Hは断面を90°回転した左右振動に対する付加水質量係数に相当している。

いま、船体断面の船底部が次に示すような速度分布で振動しているものとする。

$$\{v\}=V\cdot\{q\}$$

ここに、$\{q\}=\{q_1, q_2, q_3, \cdots\cdots, q_N, q_{N+1}\}$

この時、付加水質量係数は次のように1つのscaler量として求められることになる。

$$C'_V = \{q\}^T \cdot C_V \cdot \{q\} \qquad (3.52)$$

C'_V / C_V は断面全体の付加水質量の増加率に相当している。

4.1.3 Non—Beam Vibration の二次元付加水質量

次にNon—Beam Vibration の解析においてSide Shell と Longi Bhdをそれぞれ別個の梁として取り扱う時、付加水質量係数をどのように評価するかという問題について取り扱う。

いま、断面変形による船底部の速度分布は二次曲線で近似されるものと仮定する。図3.26に示したように断面の速度分布を代表的な速度値*すなわちSide Shell およびShip Centreの位置における速度を使用して書き表わすと次のようになる。

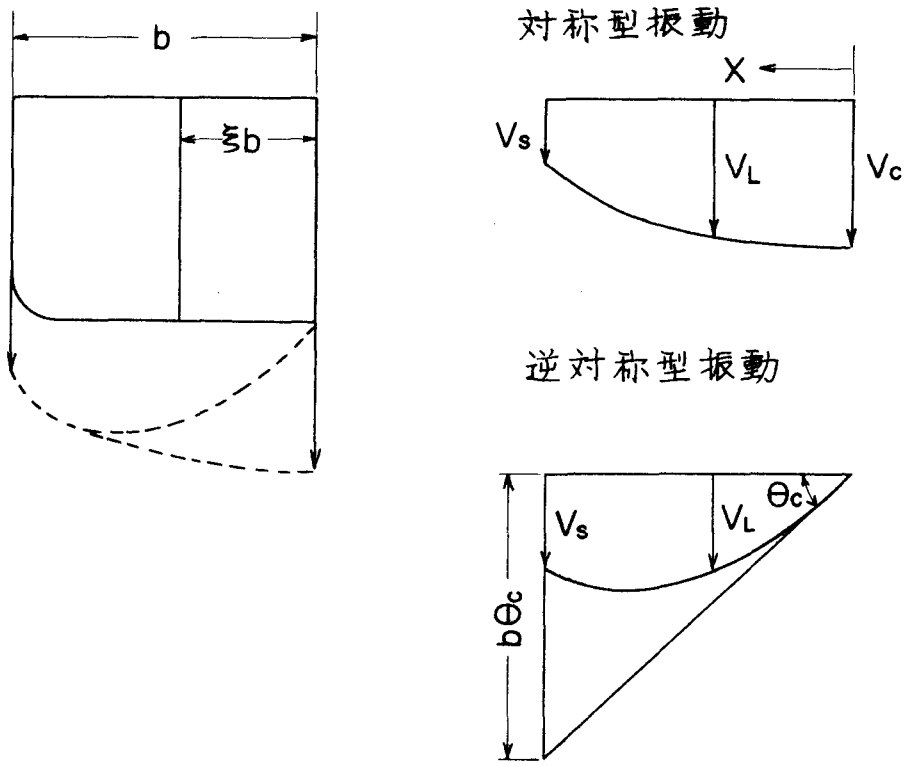


図3.26 断面船底部の速度分布

* Side Shell およびLongi Bhdの位置における速度を使用すれば直接両梁の付加水質量を計算することができるが、Longi Bhdの位置を表わす変数を含むため、一般性を持たせる意味においてこのような船体中心と船側位置での2つの速度に代表させた。

(1) 対称型振動

$$ {}_{S}v(x) = \lfloor H_S(x), H_C(x) \rfloor \cdot \begin{Bmatrix} V_S \\ V_C \end{Bmatrix} \qquad (3.53) $$

ここに、 V_S : Side Shell の位置における速度

V_C : Ship Centre Lineの位置における速度

$$ H_S(x) = \left(\frac{x}{b}\right)^2 $$

$$ H_C(x) = \left\{ 1 - \left(\frac{x}{b}\right)^2 \right\} $$

(2) 逆対称型振動

$$ {}_{A}v(x) = \lfloor G_S(x), G_C(x) \rfloor \cdot \begin{Bmatrix} V_S \\ b\theta_C \end{Bmatrix} \qquad (3.54) $$

ここに、 θ_C : Ship Centre Line の位置における回転角速度

$$ G_S(x) = \left(\frac{x}{b}\right)^2 $$

$$ G_C(x) = \left(\frac{x}{b}\right)\left\{1 - \left(\frac{x}{b}\right)\right\} $$

(3.53)式および(3.54)式より断面の速度vector$\{v\}$は次のように書き表わされる。

対称型振動

$$ \{v\} = \begin{Bmatrix} {}_{S}v(x_1) \\ {}_{S}v(x_2) \\ \vdots \\ {}_{S}v(x_{N+1}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_S(x_1), H_C(x_1) \\ H_S(x_2), H_C(x_2) \\ \vdots \\ H_S(x_{N+1}), H_C(x_{N+1}) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} V_S \\ V_C \end{Bmatrix} = \mathbf{H} \begin{Bmatrix} V_S \\ V_C \end{Bmatrix} \qquad (3.55) $$

逆対称型振動

$$\{v\}=\begin{Bmatrix} {}_A v(x_1) \\ {}_A v(x_2) \\ \vdots \\ {}_A v(x_{N+1}) \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} G_S(x_1), G_C(x_1) \\ G_S(x_2), G_C(x_2) \\ \vdots \quad \vdots \\ G_S(x_{N+1}), G_C(x_{N+1}) \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} V_S \\ b\theta_C \end{Bmatrix}=\mathbf{G}\cdot\begin{Bmatrix} V_S \\ b\theta_C \end{Bmatrix} \tag{3.56}$$

ここに、 $\mathbf{H}$, $\mathbf{G}$ は（N＋1，2）の大きさのmatrix である。
（3.55）式および（3.56）式を（3.49）式および（3.50）式に代入すればNon-Beam Vibration の付加水質量係数を表わすmatrixは次のように求められる。

$$\overline{{}_S\mathbf{C}_V}=\mathbf{H}^T\cdot{}_S\mathbf{C}_V\cdot\mathbf{H}=\begin{bmatrix} {}_S C_{SS} & {}_S C_{CS} \\ {}_S C_{SC} & {}_S C_{CC} \end{bmatrix}$$

（3.57）

$$\overline{{}_A\mathbf{C}_V}=\mathbf{G}^T\cdot{}_A\mathbf{C}_V\cdot\mathbf{G}=\begin{bmatrix} {}_A C_{SS} & {}_A C_{CS} \\ {}_A C_{SC} & {}_A C_{CC} \end{bmatrix}$$

ここに、 $\overline{{}_S\mathbf{C}_V}$ および $\overline{{}_A\mathbf{C}_V}$ matrixは（2×2）の大きさのmatrixであり、しかも対称matrixであるので、従来の二次元付加水質量が1つの値で定義されていたものが、Non-Beam Vibration の場合では、3つの異なった値をもつ係数によって定義されることになる。これらの値は断面形さえ与えられれば計算される量である。対称型振動に対するこれらの量と C_V との間には次の関係がある。

$$C_V={}_L 1, 1_J\cdot\overline{{}_S\mathbf{C}_V}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$={}_S C_{SS}+2{}_S C_{SC}+{}_S C_{CC}$$

実際にNon-Beam Vibration の解析にこれらの係数を使用するには梁の位置はSide Shell およびLongi Bhdにあるので代表速度を変換してやる必要がある。すなわち、

対称型振動

$$\begin{Bmatrix} V_S \\ V_C \end{Bmatrix} = \mathbf{BHD}_S \cdot \begin{Bmatrix} V_S \\ V_L \end{Bmatrix} \qquad (3.58)$$

ここに、　V_L ：Longi Bhd の位置における速度

$$\mathbf{BHD}_S = \begin{bmatrix} 1 & , & 0 \\ -\dfrac{\xi^2}{(1-\xi^2)} & , & \dfrac{1}{1-\xi^2} \end{bmatrix}$$

ξ ： centre tank の幅と船の全幅との比

逆対称型振動

$$\begin{Bmatrix} V_S \\ b\theta_C \end{Bmatrix} = \mathbf{BHD}_A \cdot \begin{Bmatrix} V_S \\ V_L \end{Bmatrix} \qquad (3.59)$$

ここに、

$$\mathbf{BHD}_A = \begin{bmatrix} 1 & , & 0 \\ -\dfrac{\xi}{1-\xi} & , & \dfrac{1}{\xi(1-\xi)} \end{bmatrix}$$

（3.58）式および（3.59）式を使用すれば付加水質量係数は次のように変換される。

$$\begin{aligned} {}_S\tilde{C}_V &= \mathbf{BHD}_S^T \cdot {}_S\overline{C}_V \cdot \mathbf{BHD}_S \\ {}_A\tilde{C}_V &= \mathbf{BHD}_A^T \cdot {}_A\overline{C}_V \cdot \mathbf{BHD}_A \end{aligned} \qquad (3.60)$$

（3.60）式より、図3.24に示した流体領域の運動エネルギは次式に表わされることになる。

$$T = \frac{1}{2} \lfloor V_S , V_L \rfloor \cdot \mathbf{M} \begin{bmatrix} V_S \\ V_L \end{bmatrix}$$

ここに、

$$\mathbf{M} = \frac{\rho \pi b^2}{4} \tilde{C}_V \qquad (3.61)$$

4.2　二次元付加水質量係数のシリーズ計算

4.2.1　計算プログラム

前節に述べた方法にもとづきNon-Beam Vibrationの二次元付加水質量係数を有限要素法を用いて計算する専用プログラムを作成し、シリーズ計算を行なった。作成したプログラムの特徴は次に示す通りである。

(1)　有限要素分割

(a)　船体断面の半分の部分（図3.23）は10個の直線々分（11個の点を結んだもの）で表わされるものとする。

(b)　考慮する流体領域は図3.27に示したように船体断面の中心に関してこれを14倍拡大した領域までの有限領域を対象とする。

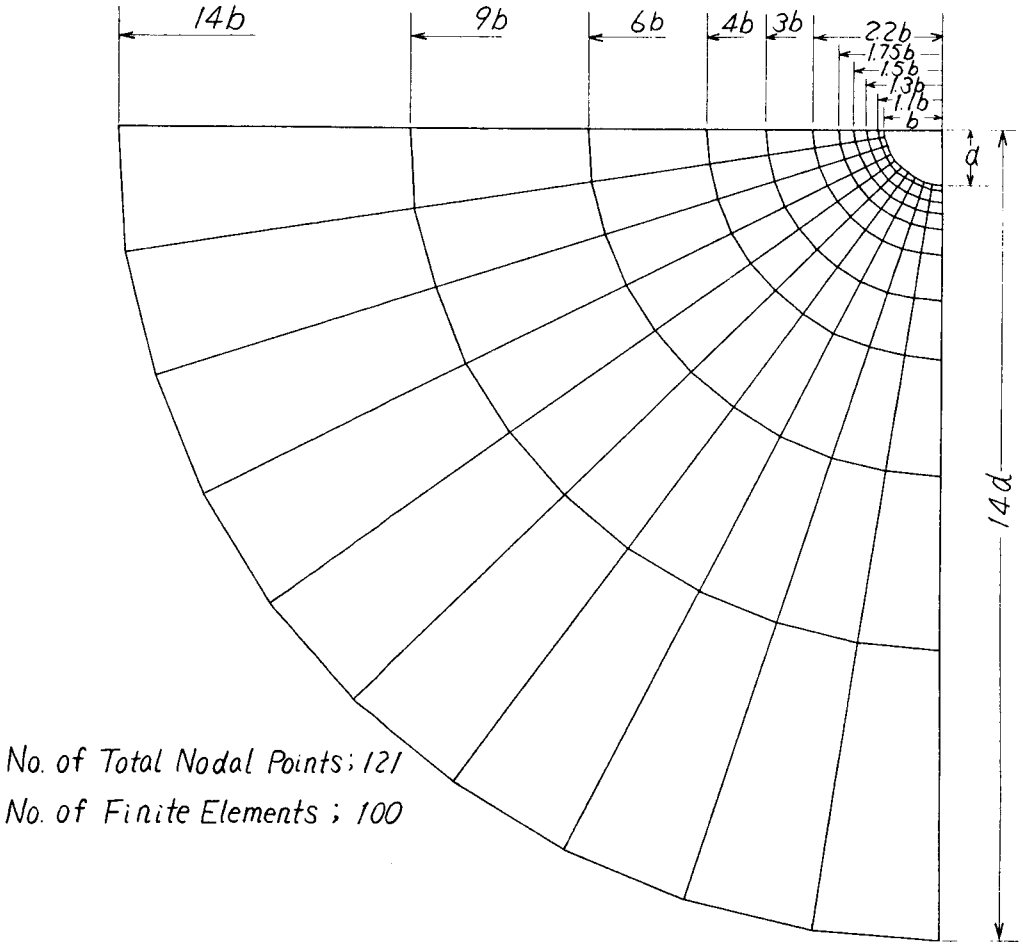


図3.27　流体領域の有限要素への分割

(c) 流体領域は船体断面形状を与える１１個の座標を input することによって、１００個の四辺形有限要素に自動的に分割される。

(2) 有限要素法による計算法の特徴

(a) 四辺形有限要素の contribution の計算は三角形二個の二通りの組合せについて計算しその平均をとる。

(b) 逆行列計算は二次元 Layer Division Method を適用している。

本プログラムでは従来の上下および左右振動に対する二次元付加水質量係数 C_V, C_H も同時に計算出来るが、計算精度の検討のために、これらの理論値と有限要素法による計算値の比較を行なった。結果を表 3.6 に示す。

表 3.6　二次元付加水質量係数の理論解と有限要素法による解との比較

係数 / 断面	C_V, 上下振動			C_H, 左右振動		
	理論解	有限要素法	比	理論解	有限要素法	比
円断面	1	0.981	0.981	0.405	0.375	0.924
矩型断面 b／d＝1	1.513	1.434	0.948	0.478	0.433	0.910
Lewis 断面 $\lambda=1$ $\sigma=0.957$	1.312	1.276	0.972	0.439	0.390	0.888

4.2.2　シリーズ計算

Longi Bhd が存在する船体平行部を対象として図 3.28 に示したように Bilge 部に半径 R の Round Corner をもつ矩形断面について次に示すようにパラメーターを変化させてシリーズ計算を行なう。

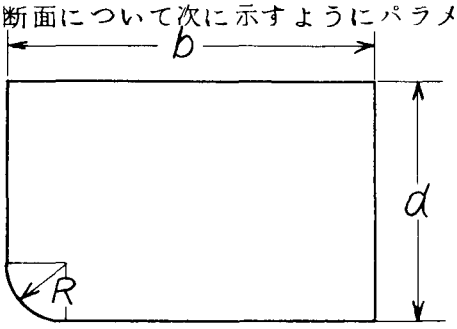


図 3.28　船体断面の形状

$$\lambda = \frac{d}{b} = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$$

$$\frac{R}{b} = 0, 0.1, 0.2$$

計算結果を図3.29（対称型振動）および図3.30（逆対称型振動）に示す。

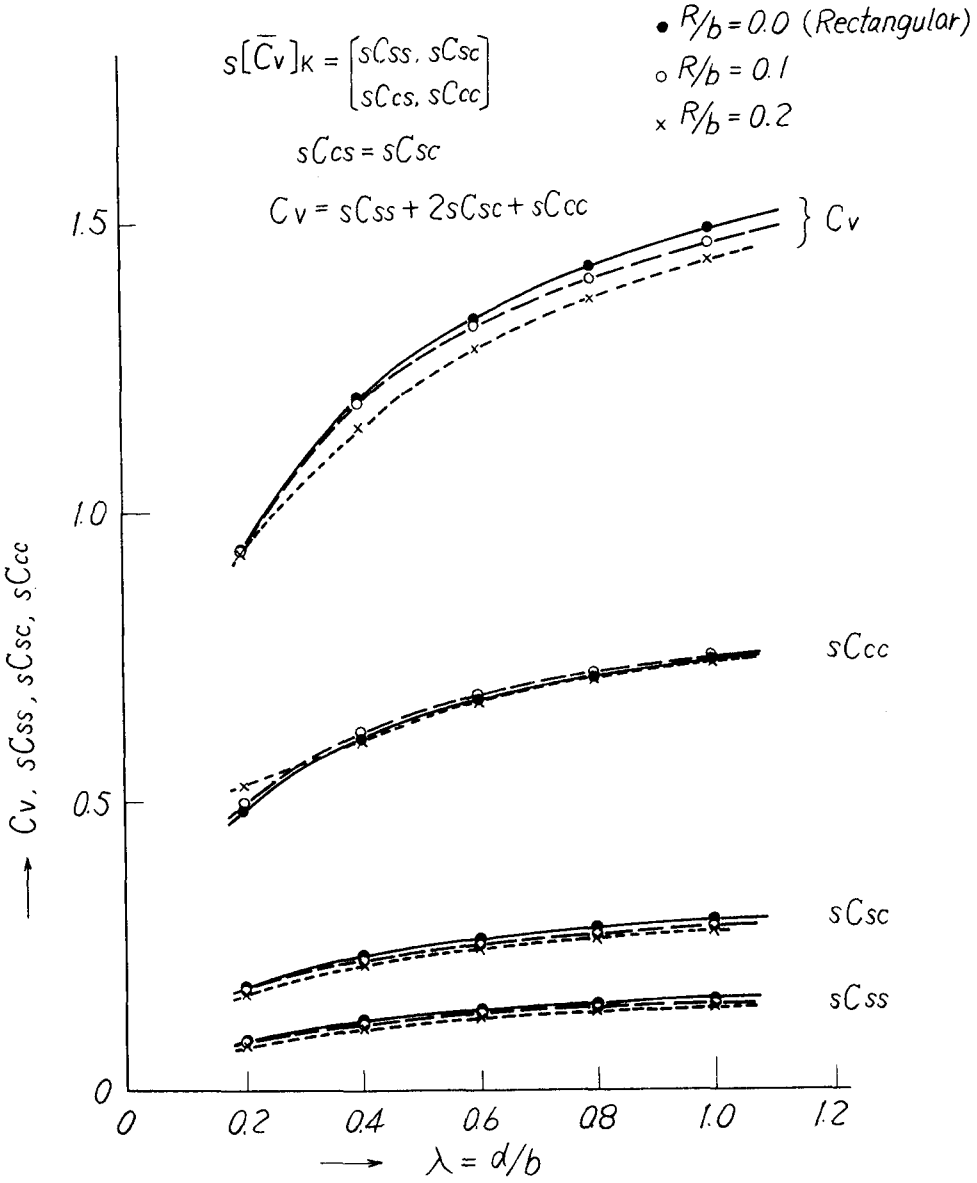


図3.29　付加水質量係数（対称型振動）

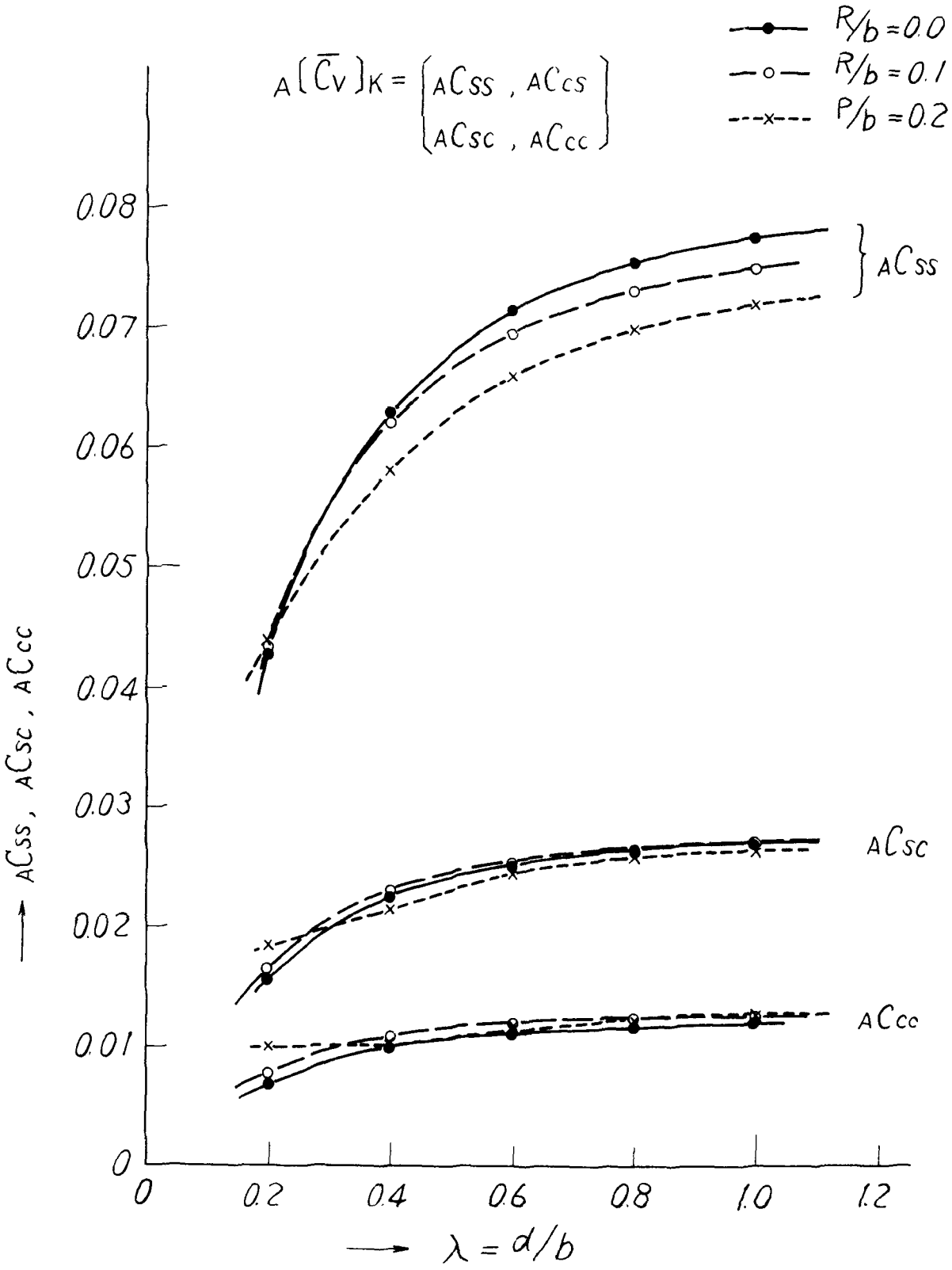


図 3.30　付加水質量係数（逆対称型振動）

これらのシリーズ計算結果より次のことがわかる。

(1) 実船の船体中心部におけるBilge Circleは$0.1 \leqq R/b \leqq 0.2$の範囲にあり、この範囲においてR／bの付加水質量係数におよぼす影響は小さく、船体断面形状を矩形と考えた値と殆んど変わらない。

(2) 対称型振動に対しては ${}_{S}\overline{C}_{V}$ の要素のうち${}_{S}C_{CC}$が大きく、これらの要素は近似的にCvと次のような関係にある。

$$ {}_{S}\overline{C}_{V} = C_{V} \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad (3.62) $$

(3) 逆対称型振動に対しては ${}_{A}\overline{C}_{V}$ の要素は近似的に次のような関係にある。

$$ {}_{A}\overline{C}_{V} = C_{V} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & \frac{1}{50} \\ \frac{1}{50} & \frac{1}{115} \end{bmatrix} \qquad (3.63) $$

4.3 付加水質量増加率との関係

熊井は船体断面の船底部が変形するとき、付加水質量の増加率として次の量を導入している。〔59〕

$$ \varepsilon = \frac{T}{T_{\delta=0}} - 1 \qquad (3.64) $$

ここに、 δ ：断面変形の量を与える係数

すなわち、船底部の速度分布を次のような二次曲線で仮定している。

$$ v(x) = V\left[1 + \delta\left\{1 - \left(\frac{x}{b}\right)^2\right\}\right] \qquad (3.65) $$

ここに、V ：船側外板の位置での速度

δが正のとき、船側位置と船体中央部は同相振動、負のときは逆相振動をする速度分布が得られる。

（3.64）式で定義したεを使用して断面変形のある場合の付加水質量係数は次に示す1つのスラカー量として求められる。

$$C'_V=(1+\varepsilon)C_V \qquad (3.66)$$

εは当然δの関数として求められる。

逆対称型振動に対する船底部の速度分布も（3.65）式と同様に次のように仮定する。

$$v(x)=V\cdot\left(\frac{x}{b}\right)\left[1+\gamma\left(1-\frac{x}{b}\right)\right] \qquad (3.67)$$

しかるとき、前節で定義された二次元付加水質量係数とεとの関係は(3.61)式を(3.64)式に代入することにより次のように求められる。

(1) 対称型振動

$$\varepsilon_S=\frac{\lfloor 1,1+\delta\rfloor\cdot {}_S\bar{C}_V\cdot\begin{bmatrix}1\\1+\delta\end{bmatrix}}{\lfloor 1,1\rfloor\cdot {}_S\bar{C}_V\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}-1$$

$$=\alpha(\delta+\beta)^2-\alpha\beta^2 \qquad (3.68)$$

ここに、 $\alpha={}_SC_{CC}/C_V$

$\beta=1+{}_SC_{SC}/{}_SC_{CC}$

(2) 逆対称型振動

$$\varepsilon_A=\frac{\lfloor 1,1+\gamma\rfloor\cdot {}_A\bar{C}_V\cdot\begin{bmatrix}1\\1+\gamma\end{bmatrix}}{\lfloor 1,1\rfloor\cdot {}_S\bar{C}_V\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}-1$$

$$=\bar{\alpha}(\gamma+\bar{\beta})^2-\bar{\alpha}\bar{\beta}^2-\sigma \qquad (3.69)$$

ここに、 $\bar{\alpha}={}_AC_{CC}/C_V$

$\bar{\beta}=1+{}_AC_{SC}/{}_AC_{CC}$

$\sigma=1-\dfrac{C'_H}{C_V}$

$$C'_H = {}_AC_{CC} + 2\,{}_AC_{SC} + {}_AC_{SS}$$

（3.62）式および（3.63）式で求められた近似式を使用すれば（3.68）式および（3.69）式は次のようになる。

$$\varepsilon_S = \frac{1}{2}\left(\delta + \frac{7}{5}\right)^2 - 1 \qquad (3.70)$$

$$\varepsilon_A = \frac{1}{115}\left(\gamma + \frac{33}{10}\right)^2 - 1 \qquad (3.71)$$

（3.70）式および（3.71）式を（3.66）式に代入すれば断面変形のある場合の付加水質量係数は次のように求められる。

$${}_SC'_V = \frac{C_V}{2}\left(\delta + \frac{7}{5}\right)^2 \qquad (3.72)$$

$${}_AC'_V = \frac{C_V}{115}\left(\gamma + \frac{33}{10}\right)^2 \qquad (3.73)$$

ここに、 $\delta = \dfrac{V_C}{V_S} - 1$

$\gamma = \dfrac{b\theta_S}{V_S} - 1$

これらの断面変形の様相と付加水質量増加率との関係を図3.31に示す。これより次のことがわかる。

(1) 対称型振動に対して$-\frac{14}{5} < \delta < 0$の変形範囲において付加水質量係数はCvより一般に減少するが$\delta > 0$の範囲では増加する。

(2) 逆対称型振動に対しては$-13.6 < \gamma < 7$の範囲で付加水質量は減少するが他のγの範囲ではむしろ増加する。

したがって第2章で示されたNon-Beam Vibrationのそれぞれの振動型に対する付加水質量は一般に次のような傾向があるものと思われる。

(a) Longi Bhdの振動が支配的な対称型振動（対称型L type）C'_Vは一般にCvより大

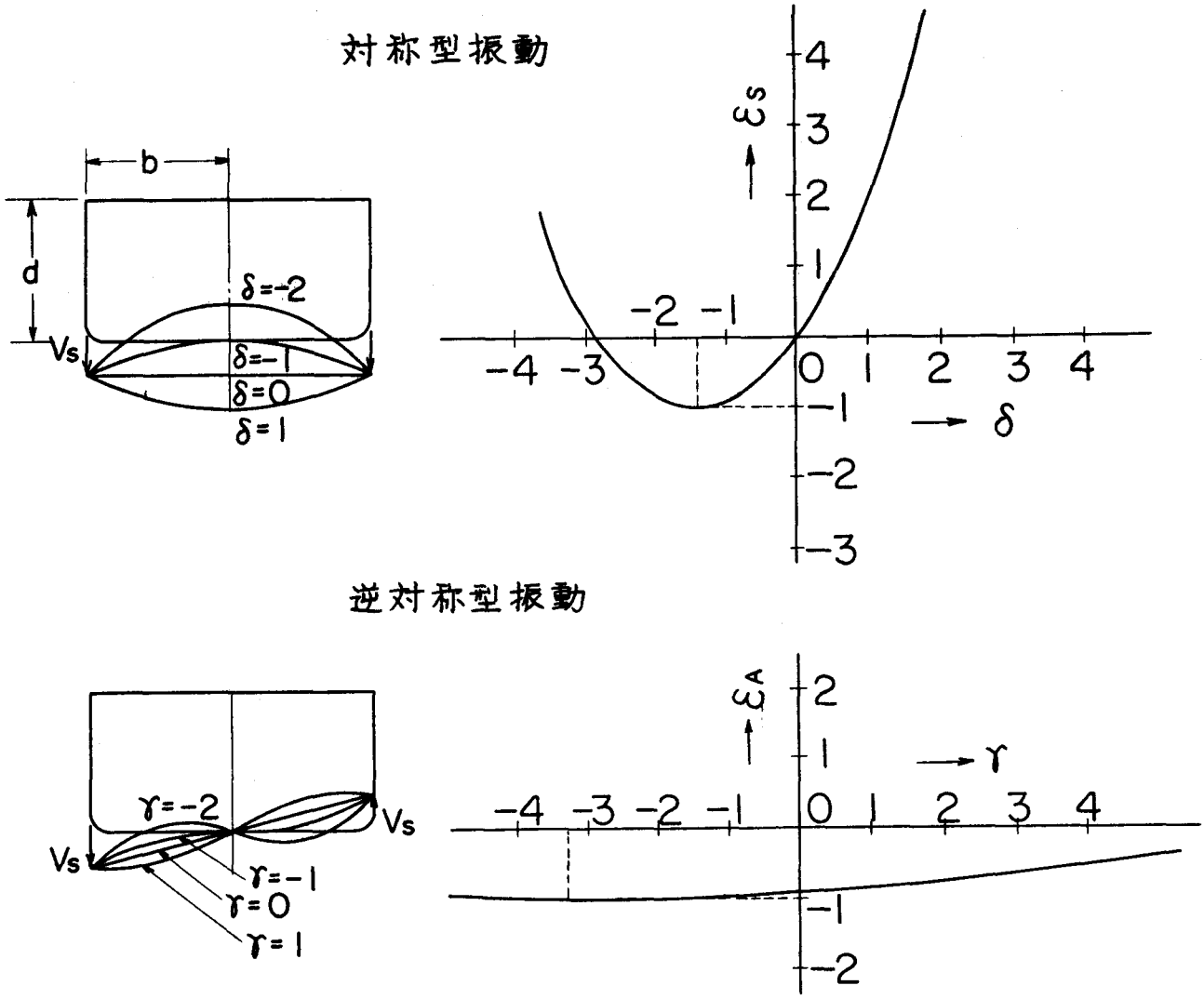


図 3.3 1　断面変形率と付加水質量増加率の関係

きく、高次振動になる程増加する。

(b) Side Shellの振動が支配的な対称型振動（対称型S—type）、一般に$-2<\delta<0$の範囲にあるのでC'_VはC_Vより減少する。

(c) Longi Bhdの振動が支配的な逆対称型振動（逆対称型L—type）、$\gamma>1$であるので、低次振動の間は付加水質量は従来のものより小さいが高次振動になれば大きくなり、増加する傾向にある。

(d) Side Shellの振動が支配的な逆対称型振動（逆対称型S—type）、一般に変形は$-1<\gamma<-3$程度の範囲にあるものと思われるのでC'_VはC_Vより減少する傾向にある。

4.4 三次元修正係数

有限要素法による三次元付加水質量の計算法は第2編第3章において述べた。本節ではこの方法を拡張してNon—Beam Vibrationの三次元付加水質量の一般的計算法について考察する。

有限要素法による計算では船体のwetted surface上の接点の位置における速度分布の関数として三次元運動エネルギは次のように計算される。

$$T=\frac{1}{2}\{v\}^T\cdot \mathbf{M}\cdot\{v\} \qquad (3.74)$$

いま、簡単のため、船首尾端までLongi Bhdが貫通しているものとする。それぞれの横断面に含まれる接点の速度は前節と同様に断面において二次曲線で分布しているものと仮定し、Side ShellおよびLongi. Bhdの位置における速度の関係として表わす。しかるとき(3.74)式中の速度分布は次のようにかき表わされる。

$$\{v\}=\{{}_1v,\ {}_2v,\cdots\cdots\cdots\cdots,\ {}_Tv\} \qquad (3.75)$$

ここに、対称型振動に対して

$$\{{}_iv\}={}_i\mathbf{H}\cdot{}_i\mathbf{BHD}_S\cdot\begin{Bmatrix}{}_iv_S\\{}_iv_L\end{Bmatrix}$$

$$={}_i\mathbf{Q}_S\cdot\begin{Bmatrix}{}_iv_S\\{}_iv_L\end{Bmatrix}$$

逆対称型振動に対して

$$\{{}_i v\} = {}_i G \cdot {}_i BHD_A \cdot \begin{Bmatrix} {}_i v_S \\ {}_i v_L \end{Bmatrix}$$

$$= {}_i Q_A \cdot \begin{Bmatrix} {}_i v_S \\ {}_i v_L \end{Bmatrix}$$

ゆえに、 $\{v\} = W \cdot \{u\}$ （3.76）

ここに、

$$W = \begin{bmatrix} {}_1Q & & 0 \\ & {}_2Q & \\ 0 & & {}_TQ \end{bmatrix}$$ ，（N×2T）の大きさのmatrix

$$\{u\} = \{{}_1v_S, {}_1v_L, {}_2v_S, {}_2v_L, \cdots\cdots, {}_Tv_S, {}_Tv_L\}$$ （3.77）

対称型振動において、

$${}_i v_S = {}_i v_L = u_i$$

とおけば、（2.59）式に示した1本の梁としての付加水質量matrixに一致する。

（3.76）式を（3.74）式に代入すれば運動エネルギは次のようになる。

$$T = \frac{1}{2}\{u\}^T \cdot W^T M \cdot W \cdot \{u\} = \frac{1}{2}\{u\}^T M_3 \{u\}$$ （3.78）

（3.77）式に示したように、$\{u\}$ vector は Non-Beam Vibration における Longi Bhd および Side Shell の振動モードを表わすものであり、仮に

$$v_S(x) = F_S(x) \cdot V$$
$$v_C(x) = F_C(x) \cdot V$$ （3.79）

で表わされるものとすると付加水質量は次のように一つの scaler 量として求められる。

$$m_3=\{F\}^T\ \mathbf{M}_3\ \{F\} \qquad (3.80)$$

ここに、 $\{F\}=\{{}_1F_S(x_1),\ {}_1F_C(x_1),\ {}_2F_S(x_2),\ {}_2F_C(x_2),\cdots\cdots\cdots\ {}_TF_S(x_T),\ {}_TF_C(x_T)\}$

一方、Non—Beam Vibration の二次元付加水質量は次のようになる。

$$T_2=\int_0^L T_i\,dx=\sum_{i=1}^{T-1} L_iT_i=\frac{1}{2}\{\mu\}^T\cdot\ \mathbf{M}_2\cdot\{u\} \qquad (3.81)$$

ここに、 $L_i=\frac{1}{2}(x_i-x_{i-1})$

$$T_i=\frac{1}{2}\ \llcorner {}_iV_S,\ {}_iV_L\lrcorner\cdot\mathbf{M}_i\cdot\begin{Bmatrix}{}_iV_S\\ {}_iV_L\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{V^2}{2}\llcorner F_S(x_i),\ F_C(x_i)\lrcorner\cdot\ \mathbf{M}_i\ \cdot\begin{Bmatrix}F_S(x_i)\\ F_C(x_i)\end{Bmatrix}$$

（3.81）式より

$$m_2=\{F\}^T\ \mathbf{M}_2\ \{F\} \qquad (3.82)$$

（3.80）式および（3.82）式より overall の三次元修正係数は次のように求められる。

$$\bar{J}=\frac{m_3}{m_2} \qquad (3.83)$$

この overall Jを使用すれば三次元修正をほどこした付加水質量係数は次のようになる。

$$\begin{aligned}{}_S\mathbf{C}_{V3}&=\bar{J}_S\cdot\ {}_S\bar{\mathbf{C}}_V\\ {}_A\mathbf{C}_{V3}&=\bar{J}_A\cdot\ {}_A\bar{\mathbf{C}}_V\end{aligned} \qquad (3.84)$$

また、第2編3.2.2で定義したような三次元修正係数matrix **J** を同様にNon—Beam Vibration の場合にも使用することが出来る。

すなわち、（3.81）式および（3.78）式より次のようになる。

$$\mathbf{J} = \mathbf{M}_3 \cdot \mathbf{M}_2^{-1} \qquad (3.85)$$

理論的にはこのような J matrixが求められれば、Non—Beam Vibrationの三次元付加水質量が求められることになる。しかし実際上現在の電子計算機の容量的および時間的制約を考慮すれば十分な精度を得ることは困難である。さらに第3章に示したようにNon—Beam Vibration の振動モードは高次振動になればなる程複雑な様相を示し、この計算に必要な（3.79）式の数学的表示をすることは非常にむづかしくなる。この意味においても第2編 第4章において述べた流体との連成振動としての解法が構造物の振動性状が複雑になればなる程必要である。

4.5 Non—Beam Vibration の付加水質量の振動方程式への導入

（3.84）式で求められるNon—Beam Vibration の付加水質量係数は3つの異なった要素の値を持つmatrixとして求められた。一方前章で取り扱った梁自身の質量m_1, m_2（付録1参照）を含む運動方程式の中に流体の影響をどのように組み入れるかの問題についてのべる。

Field Tnansfer Matrixを求める際、考慮している区間において断面形状の変化がないものとすれば、単位長さ当りの$\frac{1}{2}$断面の流体の運動エネルギは次式で表わされる。

$$T_f = \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{J}\rho\pi b^2}{4}\right)\cdot\{v\}^T \ \tilde{C}_V \ \{v\}$$

$$= \frac{1}{2}\{v\}^T \cdot \mathbf{M}_F \cdot \{v\} \qquad (3.86)$$

ここに、 $\{v\} = \{\dot{y}_1, \dot{y}_2\}$

$$\mathbf{M}_F = \frac{\bar{J}\rho\pi b^2}{4} \ \tilde{C}_V$$

$$= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix}$$

一方、Side Shell およびLongi Bhdの梁自身の運動エネルギは次式で表わされる。

$$T_m = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2$$

$$= \frac{1}{2} \{ v \}^T \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \{ v \} \qquad (3.87)$$

ゆえに、単位長さ当りの全運動エネルギは次式となる。

$$T = T_f + T_m = \frac{1}{2} \{ v \}^T \cdot \begin{bmatrix} m_1 + m_{11} & m_{21} \\ m_{12} & m_2 + m_{22} \end{bmatrix} \cdot \{ v \} \qquad (3.88)$$

（3.88）式より両梁に働く力は次のように求められる。

$$Q_1 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1} \right) = (m_1 + m_{11}) \ddot{y}_1 + m_{12} \ddot{y}_2$$

$$Q_2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_2} \right) = m_{12} \ddot{y}_1 + (m_2 + m_{22}) \ddot{y}_2 \qquad (3.89)$$

船体構造および形状の対称性を考慮すれば対称型および逆対称型振動に分けて取り扱うことが出来、運動方程式は力の平衡を考えることによって次のようになる。

$$Q_1 + k_S (y_1 - y_2) = S_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}$$

$$Q_2 - k_S (y_1 - y_2) = S_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \qquad \text{（対称型振動）} \qquad (3.90)$$

または、 $Q_2 - k_S (y_1 - y_2) + 2 k_C y_2 = S_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}$ （逆対称型振動）

（3.89）式、（3.90）式より、付録1（A．1．2）に示した連立微分方程式の特性方程式に対応した形で次式が求まる。

対称型振動

$$\begin{vmatrix} S_1 \lambda^2 + \omega^2 (m_1 + m_{11}) - k_S , & k_S + \omega^2 m_{12} \\ k_S + \omega^2 m_{12} , & S_2 \lambda^2 + \omega^2 (m_2 + m_{22}) - k_S \end{vmatrix} = 0$$

（3.91）

逆対称型振動

$$\begin{vmatrix} S_1\lambda^2+\omega^2(m_1+m_{11})-k_S, & k_S+\omega^2 m_{12} \\ k_S+\omega^2 m_{12}, & S_2\lambda^2+\omega^2(m_2+m_{22})-k_S-2k_C \end{vmatrix} = 0$$

(3.91)式より付録1に示したと同様にTransfer Matrixが計算できることになる。

第5章　Non−Beam Vibrationの実験値と計算値との比較

5.1　実験供試船

前述した計算法により実船実験が行なわれた供試船について計算を行ない、実験値との比較を行なう。実船実験は日本造船　研究協会第９４部会の系統的実験の一環として三菱重工業㈱長崎造船所建造のＤＷ１５万トンおよびＤＷ１３万トンの油送船について同長崎研究所の手で実施されたものである。実船計測の詳細については報告書〔１７〕に詳説されているのでここには必要な部分のみ引用した。供試船の主要目および実験時状態を表3.7に示す。また、解析に必要な部材板厚は表3.8に、船体構造配置は図3.３２およびLoading Plan は図3.３３に示した通りである。

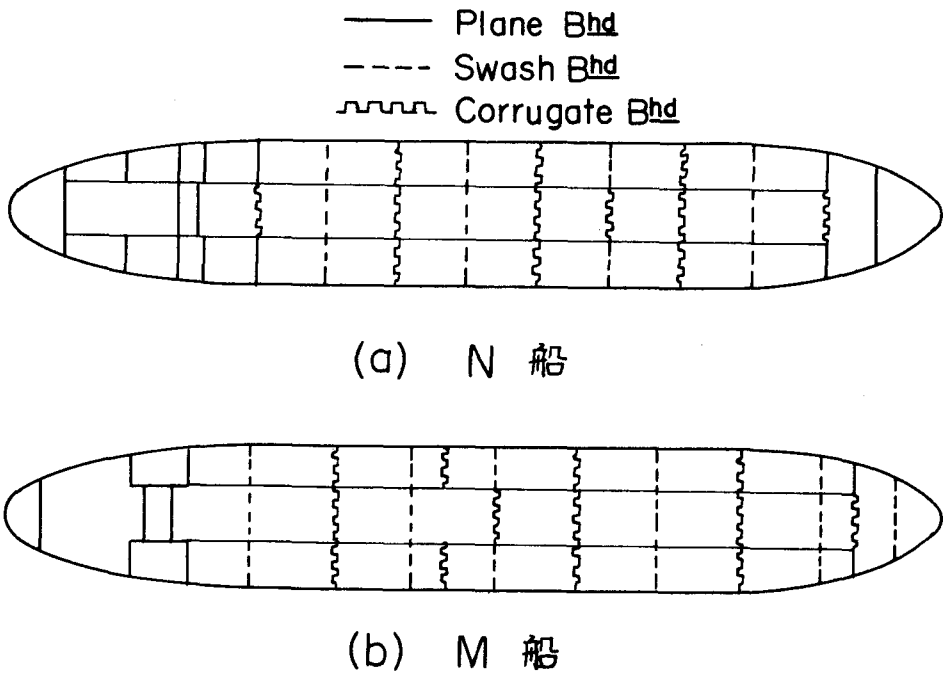
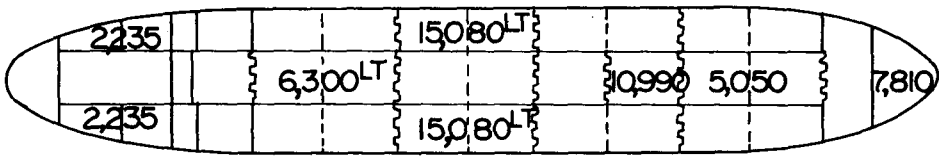
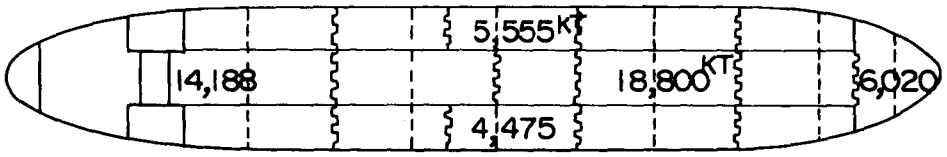


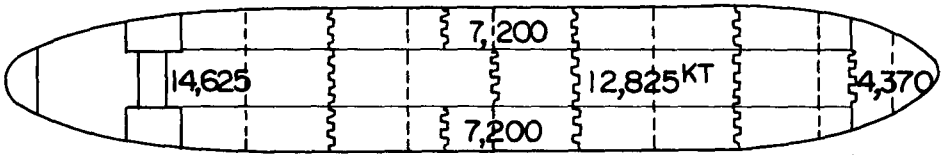
図3.３２　船　体　構　造　配　置



(a)　N 船



(b)　M 船 (Condition A)



(c)　M 船 (Condition B)

図 3.3 3　実験時 Loading Plan

表3.7　供試船の主要目および実験時状態

主　要　目		N　船		M　船	
L (M)	L_A *	285.00	41.760	256.00	34.640
	L_T		210.900		198.600
	L_F		32.340		22.760
B (M)	B_1	48.20	14.100	42.50	12.250
	B_2		20.000		18.000
D (M)		23.50		22.0	
DW (TON)		156.700		131.300	
L_{tnans} (M)		4.500		4.500	
実験時状態				A	B
Δ (TON)		94,900		69,000	67,500
d_f (M)		7.340		7.760	5.990
d_a (M)		10.060		8.220	9.700
d_m (M)		8.690		7.990	7.840

* 記号はすべて第3章のものと同じである。

表3.8　部　材　板　厚　(mm)

部材＼供試船	N　船	M　船
Longi Bhd	17.2	17
Trans Bhd	{14, 11.5	{14, 11.5
Side Shell	22.1	22.6
Upper Deck	30	28.5
Bottom Plate	28.5	29
Aft Peak Bhd	10.5	10.5
Fore Peak Bhd	11.5	14.0

5.2　Input Data

5.2.1　重量分布

船殻重量およびballast waterの重量は3.3.1に述べた方法によりSide Shell および

Longi Bhdに分配した。分布形状は図3.34に示したようになる。また付加水質量は4.5に示した方法により振動方程式の中に導入している。本実験船のLinesが入手できなかったためほぼ同船形と思われるものを近似的にモデルとして二次元付加水質量の計算を行なった。付加水質量の分布形状を図3.35（対称型振動および逆対称型振動）に示した。また三次元修正値は第4章に述べたように未知な部分が多いのでここでは考慮しなかった。したがって計算固有振動数は幾分低い値になるものと思われる。

5.2.2 剪断剛性およびその他の諸数値

剪断剛性は簡単のため3.3.2に示した方法により計算し長さ方向に一定値とした。また計算に使用したその他の諸数値を表3.9にまとめた。

表3.9 計算に使用した諸数値

要目 ＼ 供試船			N船	M船
剪断剛性 S (ton)	Side Shell		4.3106×10^6	4.1268×10^6
	Longi Bhd		3.3549×10^6	3.1042×10^6
Trans Bhd のバネ定数，K (ton/m)	Plane Bhd	$_PK_C$	13.654×10^4	14.202×10^4
		$_PK_S$	19.366×10^4	20.868×10^4
	Swash Bhd	$_SK_C$	3.477×10^4	3.500×10^4
		$_SK_S$	4.454×10^4	3.771×10^4
	Corrugate Bhd	$_CK_C$	10.691×10^4	11.120×10^4
		$_CK_S$	15.958×10^4	17.126×10^4
	Aft Peak Bhd		13.213×10^4	19.173×10^4
	Fore Peak Bhd		5.608×10^4	2.556×10^4
分布バネ定数 k (ton/m²)	k_S		10.372×10^3	11.952×10^3
	k_C		3.474×10^3	4.740×10^3
	k_a および k_f		2.591×10^3	3.394×10^3

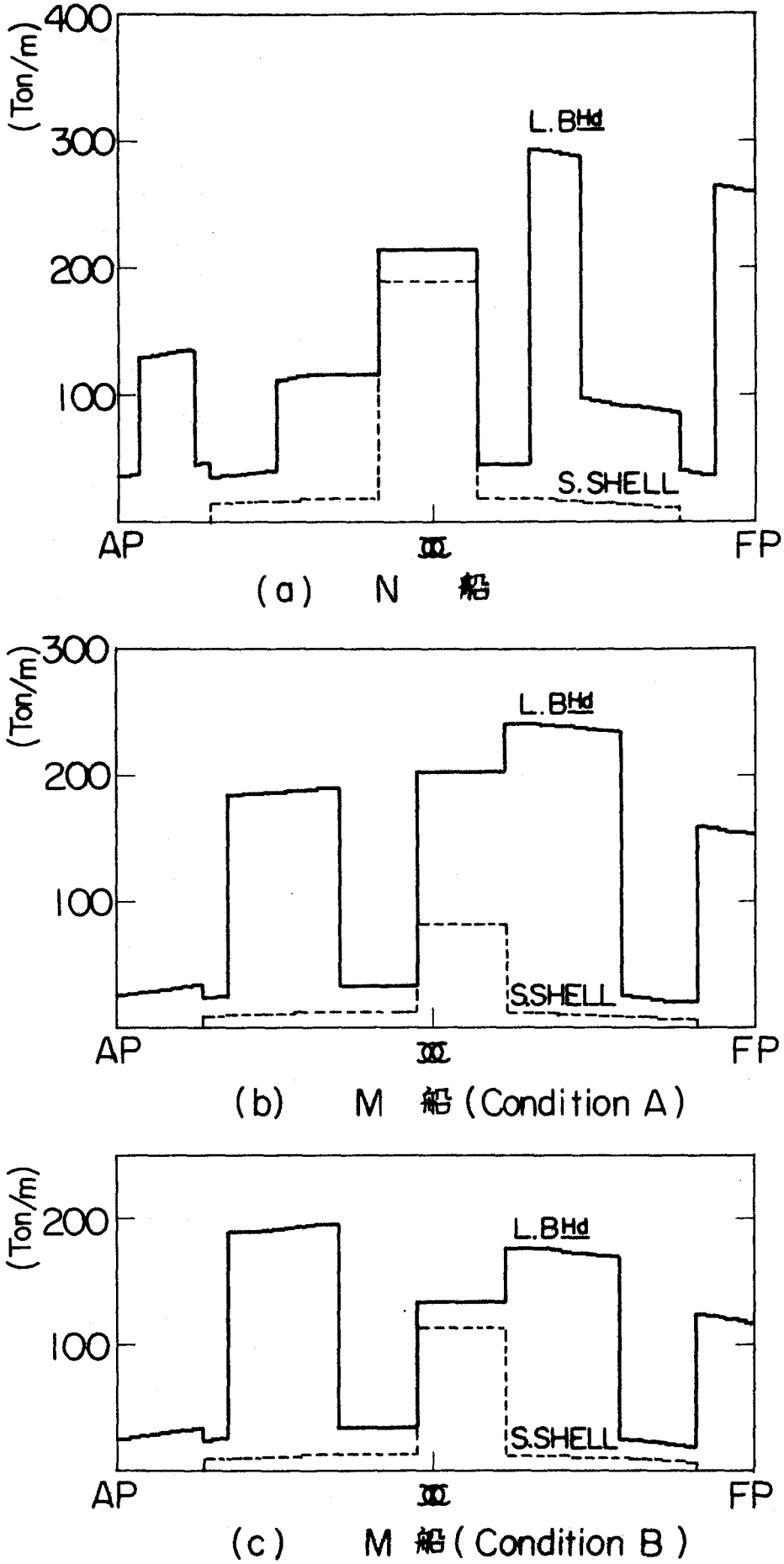
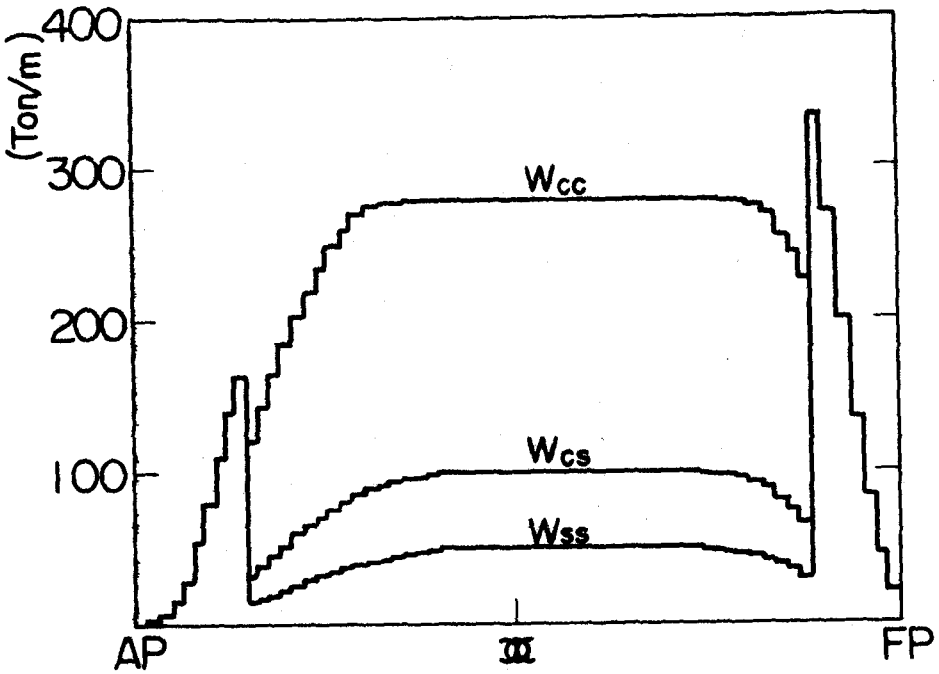
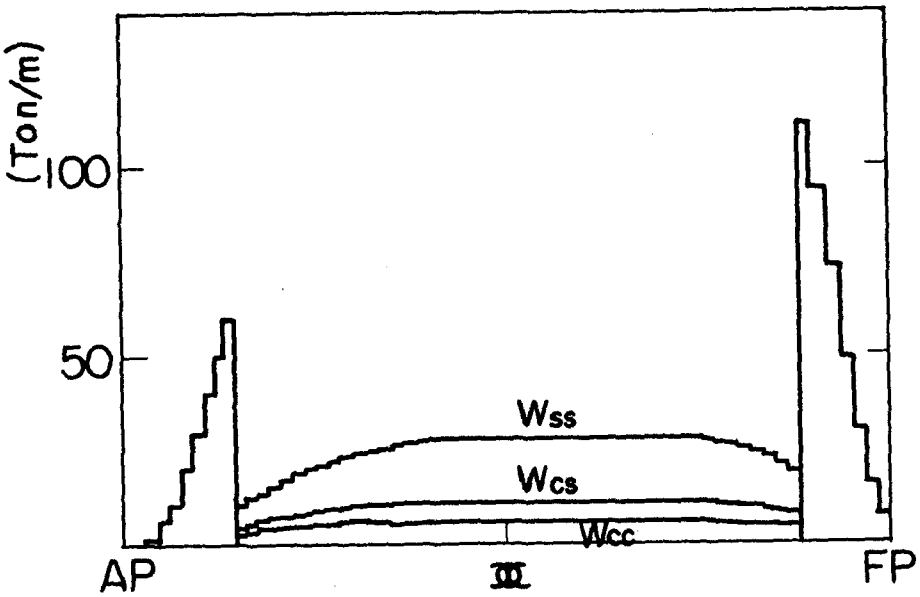


図 3.3 4　船殻重量およびBallast重量の分布



(a) 対称振動



(b) 逆対称振動

図3.35　付加水重量分布曲線（N船）

5.3　実験値と計算値の比較

表3.7に示したN船およびM船の各状態における固有振動数の実験値と計算値の比較を図3.36に示す。

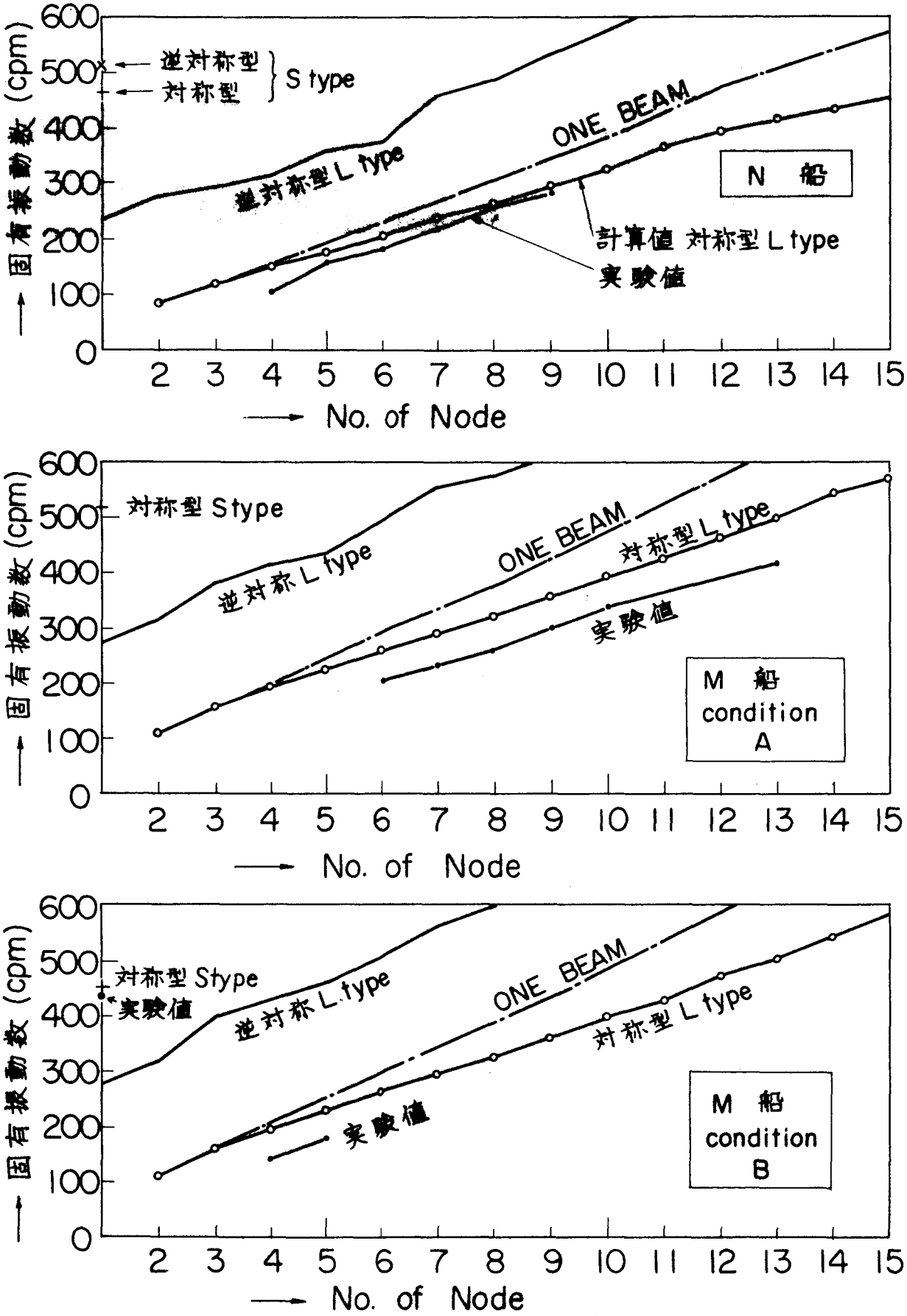


図 3. 3 6　固有振動数の実験値と計算値の比較

理論計算は600cpm以下の固有振動数を求めているが、S-tvpeの固有振動数は一般に500cpm近辺に低次振動が現われている。M船では逆対称型S-typeの固有振動数はいずれの状態においても600cpm以上になっている。また1本の剪断梁と考えた場合の固有振動数も同時に図中に示している。

一方実験結果では対称型L-typeの固有振動数が計測されており、逆対称振動は残念ながら計測されていない。これは両船の実験において、起振機の位置が船尾中央部におかれているためそのような起振力が作用しなかったためと思われる。

N船の実験結果では4節の固有振動数はかなり計算値より低くなっているが他は高次振動になるにつれ対称型L-typeの計算値とよく一致する傾向が認められる。本理論は剪断変形のみを考慮しているため曲げの影響の多い低次振動では差が出てきたものと思われる。M船の実験結果では実験値は計算値よりかなり低く求められているが節数と固有振動数の関係は傾向的には対称振動L-type の計算値と同じ傾向を示すことがわかる。これはこの計算に使用したInput Dataには近似的に諸要素を評価したものが多く、定量的に一致さすためにはさらにこれらのInput Dataの吟味が必要であるものと思われる。

計算により求められた振動モード曲線と実験モード曲線との比較を図3.37、図3.38および図3.39に示す。図から明らかなようにLongi. BhdとSide Shellの相対的な振動モードの関連は計算と実験とではよく似た形状を示し、Non-Beam Vibration の発生状況をよく説明するものと思われる。

本実験では逆対称型振動の計測値は求められなかったが、将来さらに巨大化が進めば二軸船の採用も考えられ、実船において逆対称振動を生じさすに十分な起振力が発生することも考えられ、今後この方面の実験的研究も必要であると思われる。

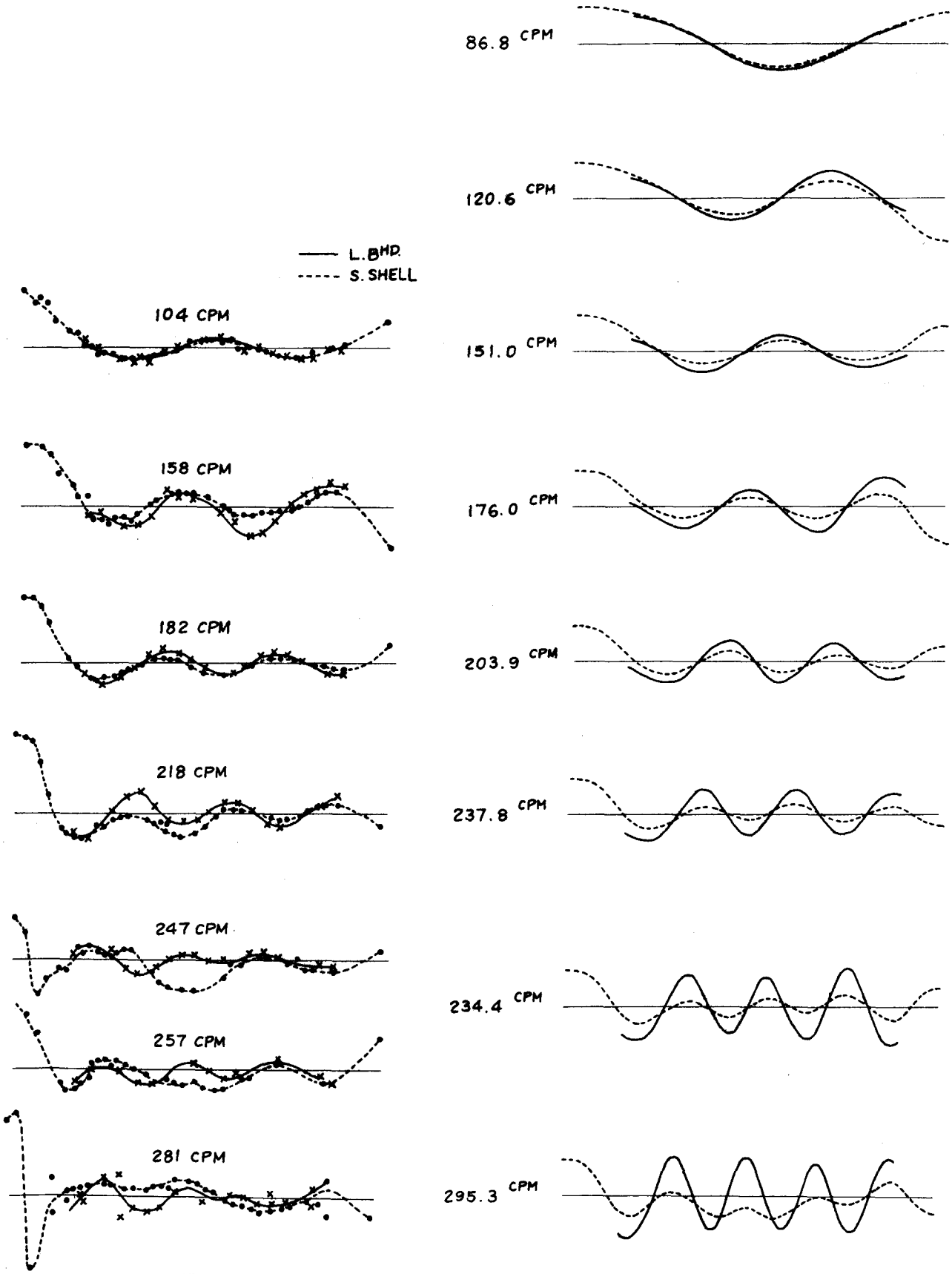


図 3.3 7(1)　振動モードの実験値と計算値の比較（N船対称型振動）

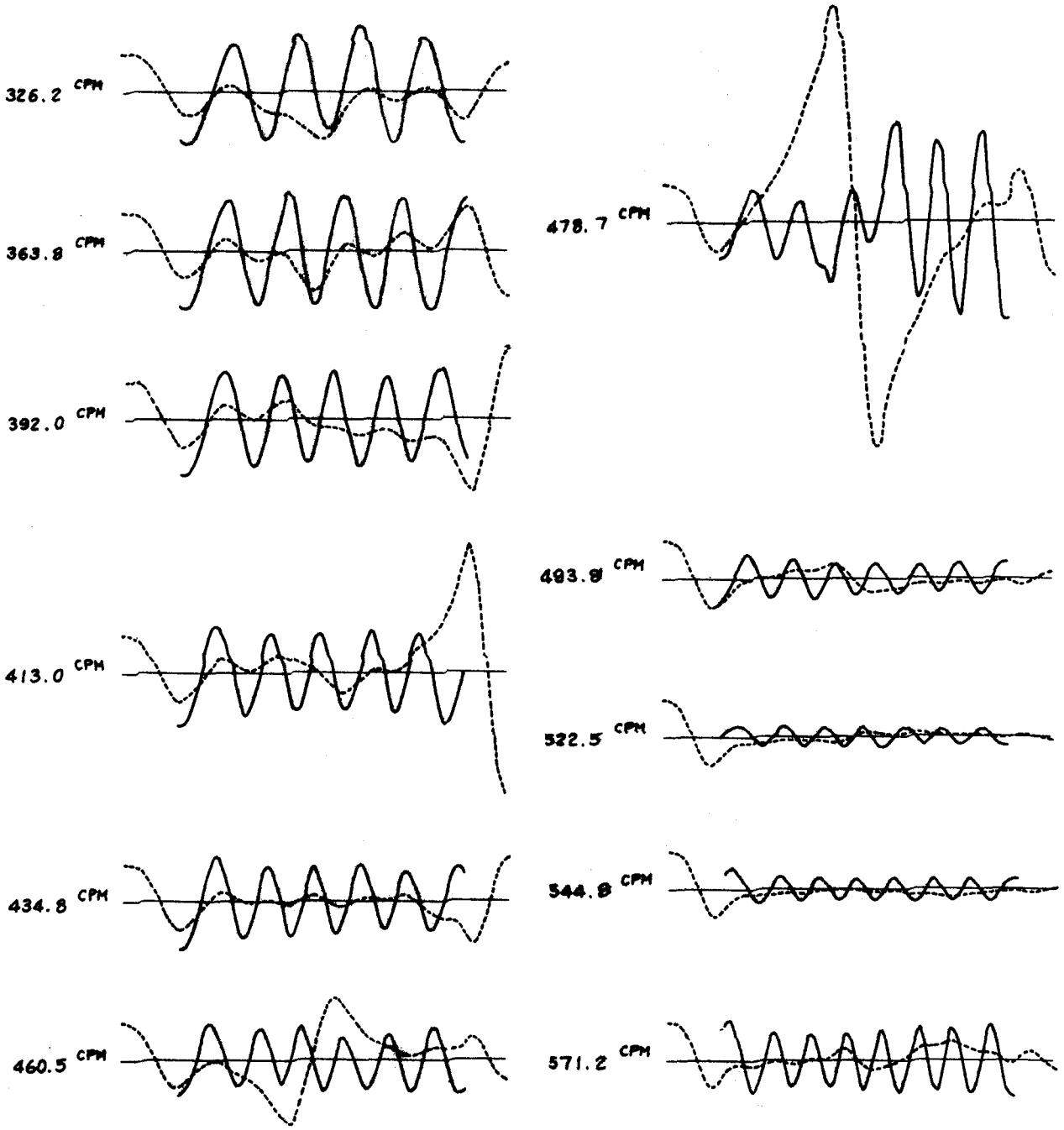


図8.8 7(ii)　振動モードの計算値（N船対称型振動）

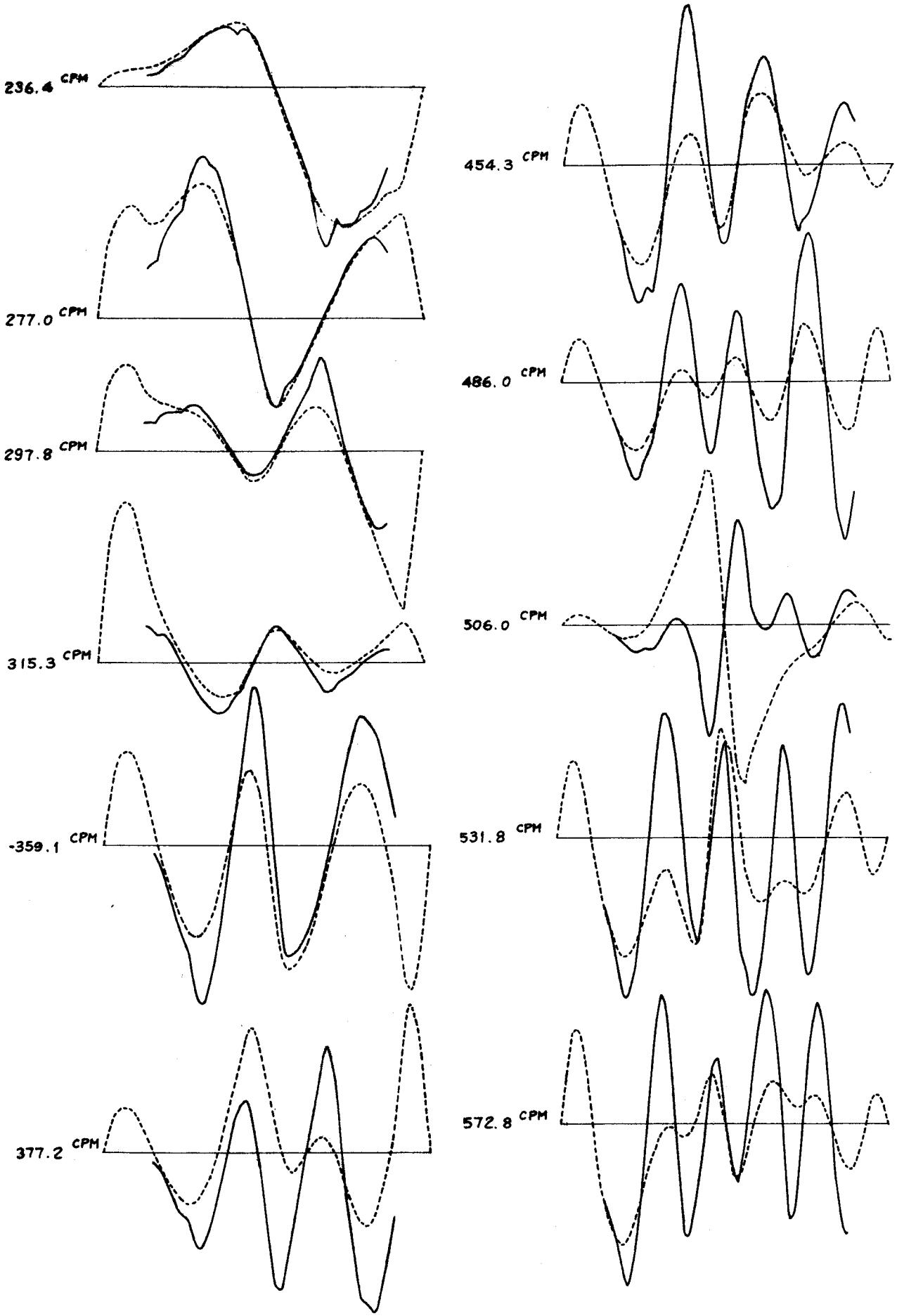


図3.3 7(iii)　振動モードの計算値（N船逆対称型振動）

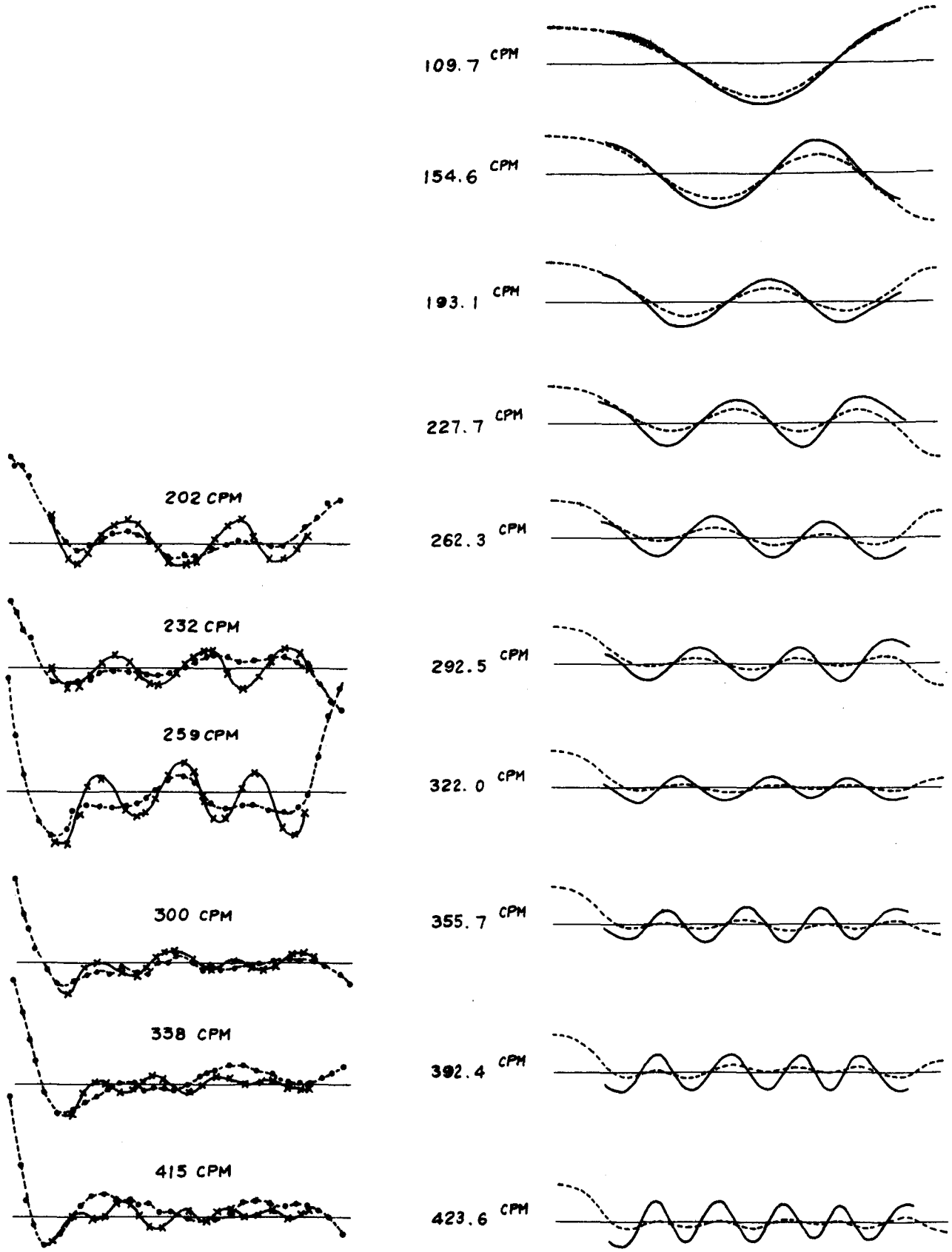


図 3.3 8(1)　振動モードの実験値と計算値の比較（M船 condition A，対称型振動）

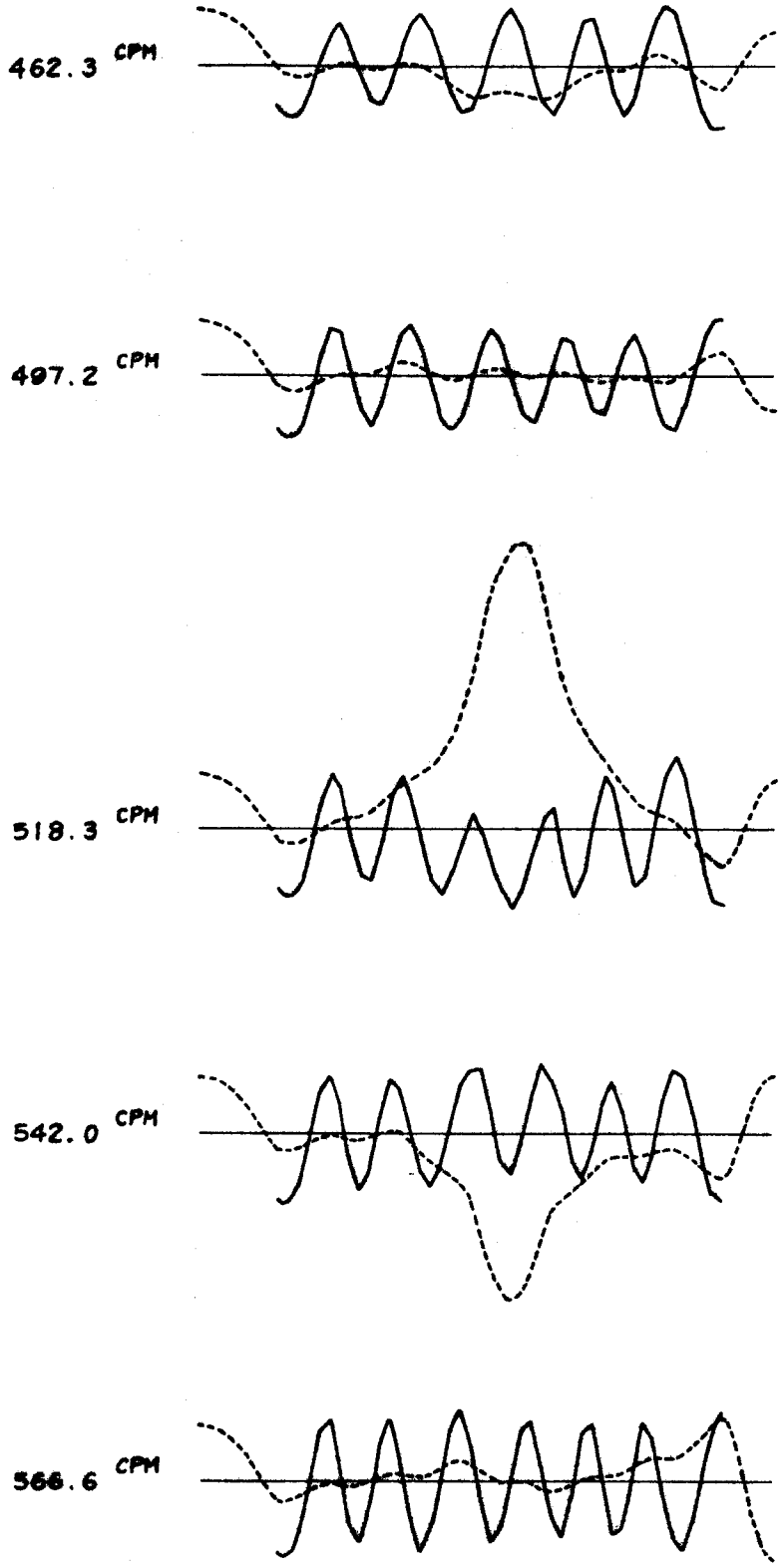


図 3.3 8(ii)　振動モードの計算値（M船 condition A，対称型振動）

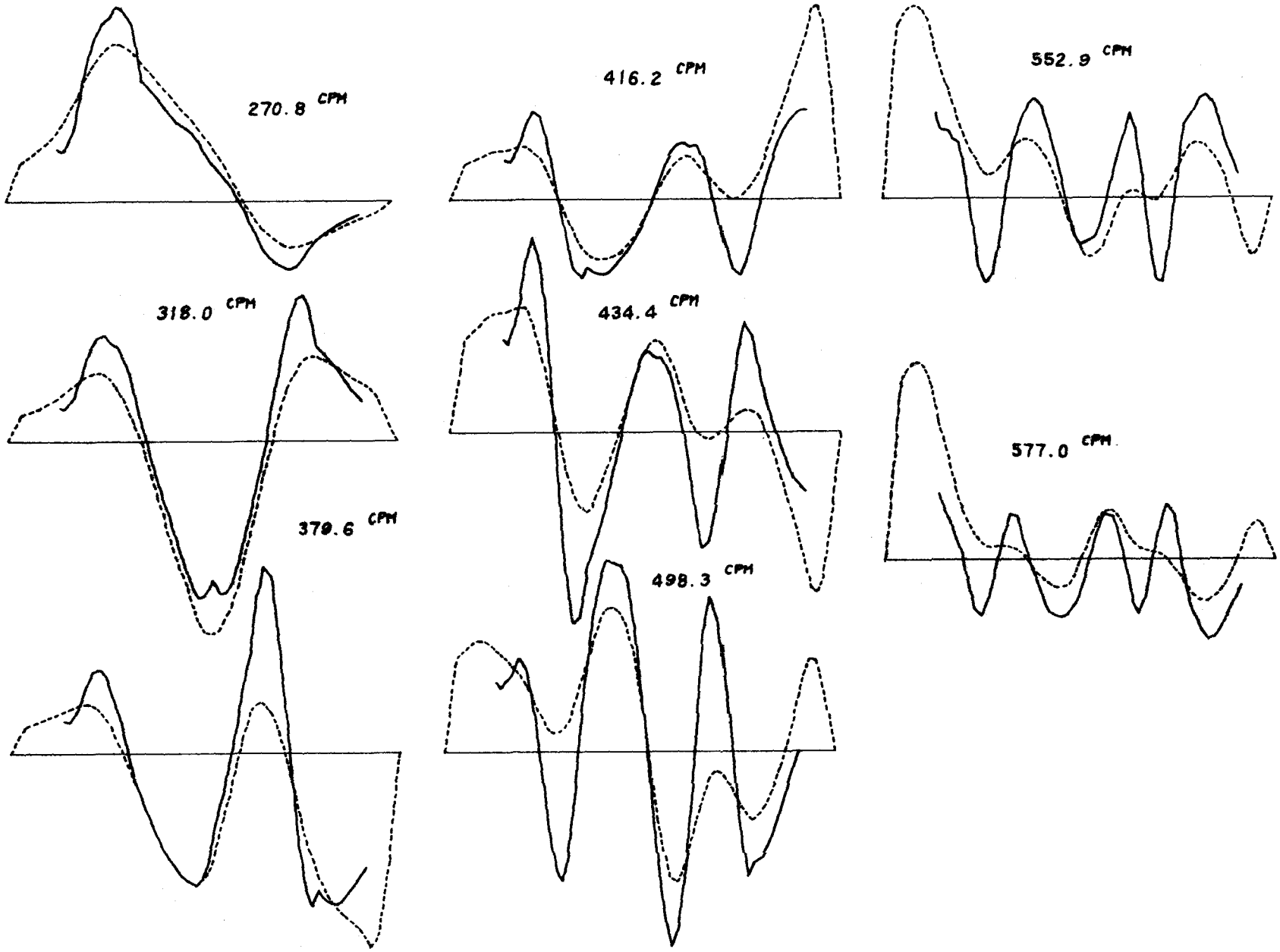


図3.3 8(iii)　振動モードの計算値（M船 condition A，逆対称型振動）

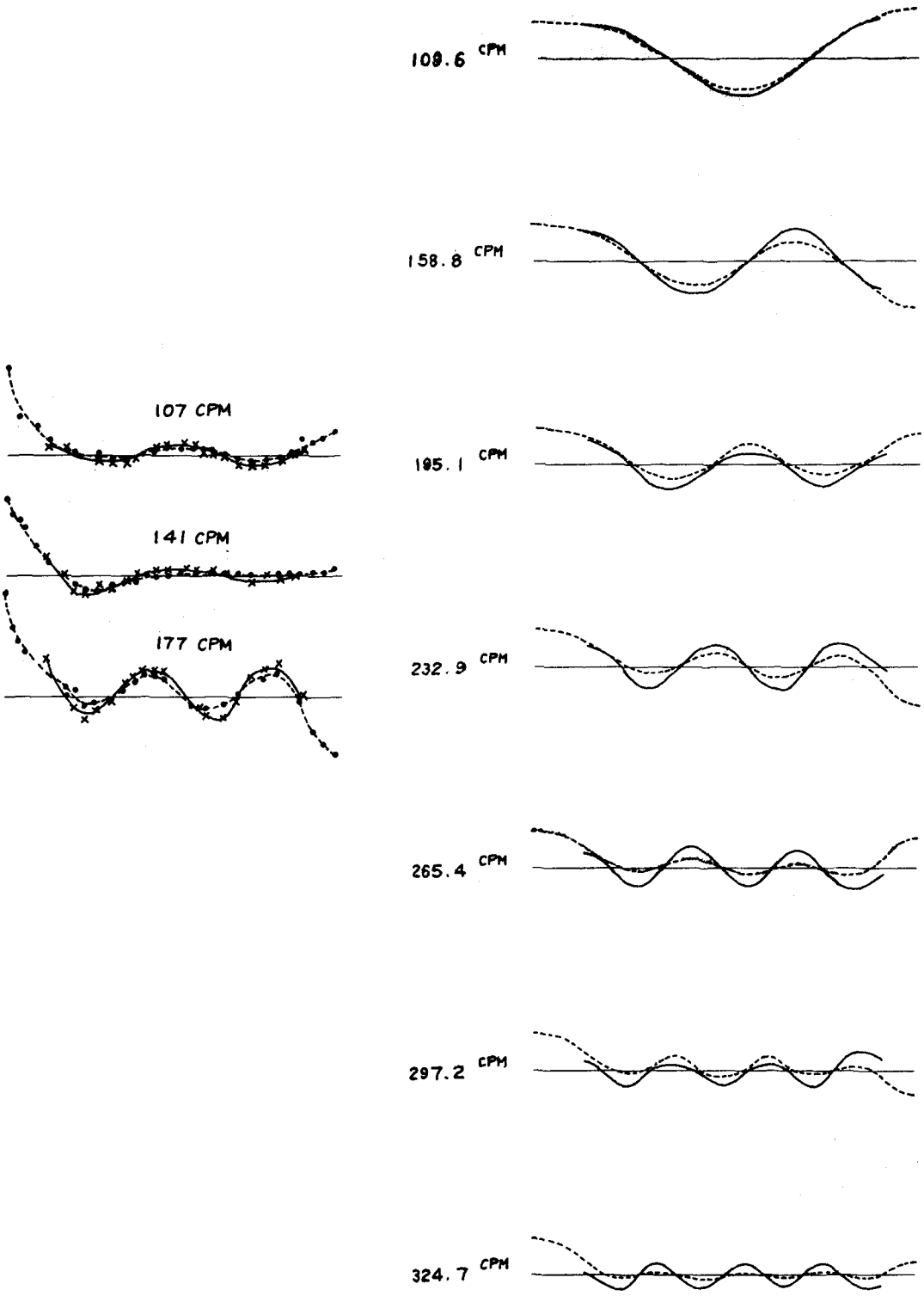


図 3.3 9(i)　振動モードの実験値と計算値の比較　(M船 condition B 対称型振動)

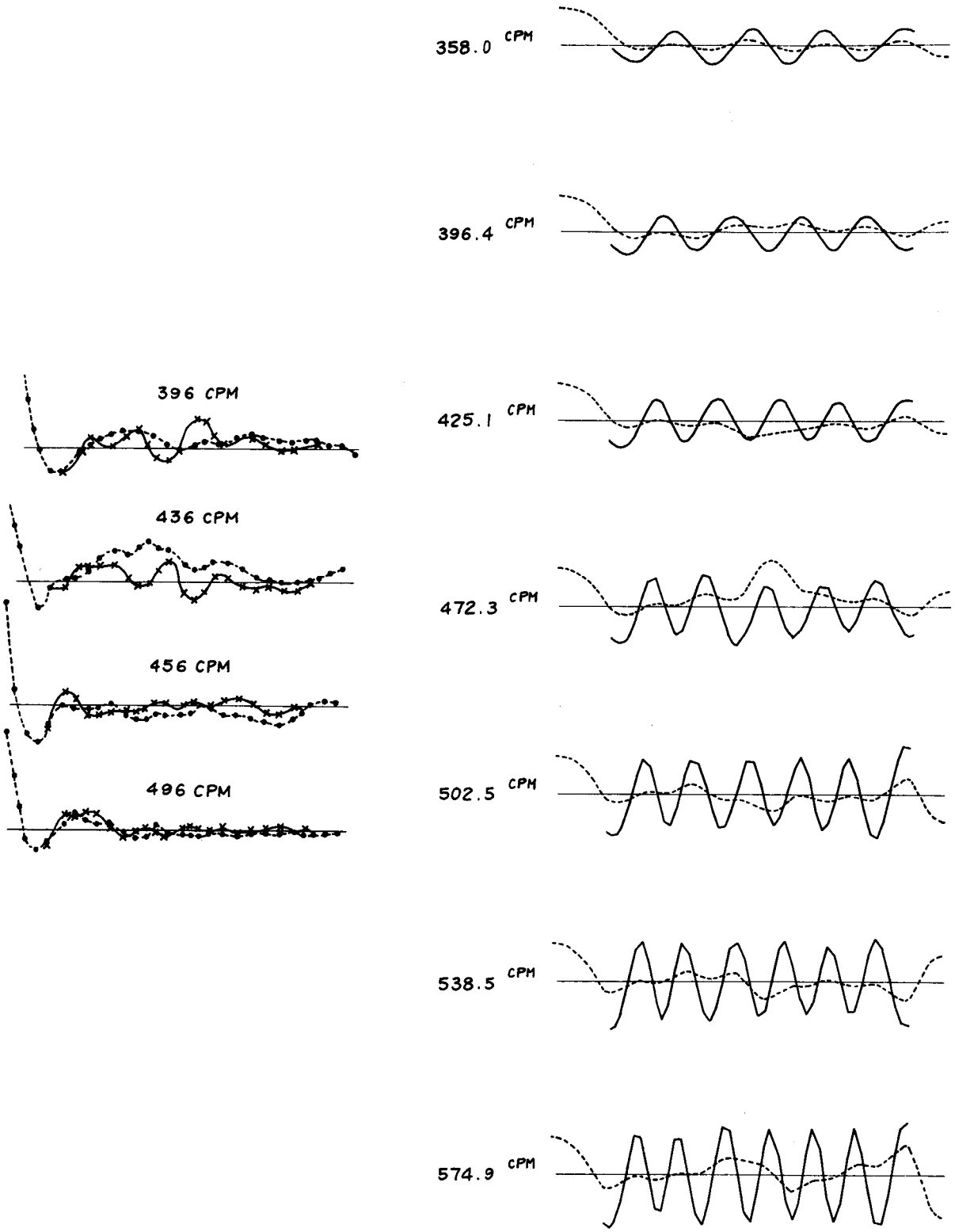


図 3.3 9(ii)　振動モードの実験値と計算値の比較（M船 condition B 対称型振動）

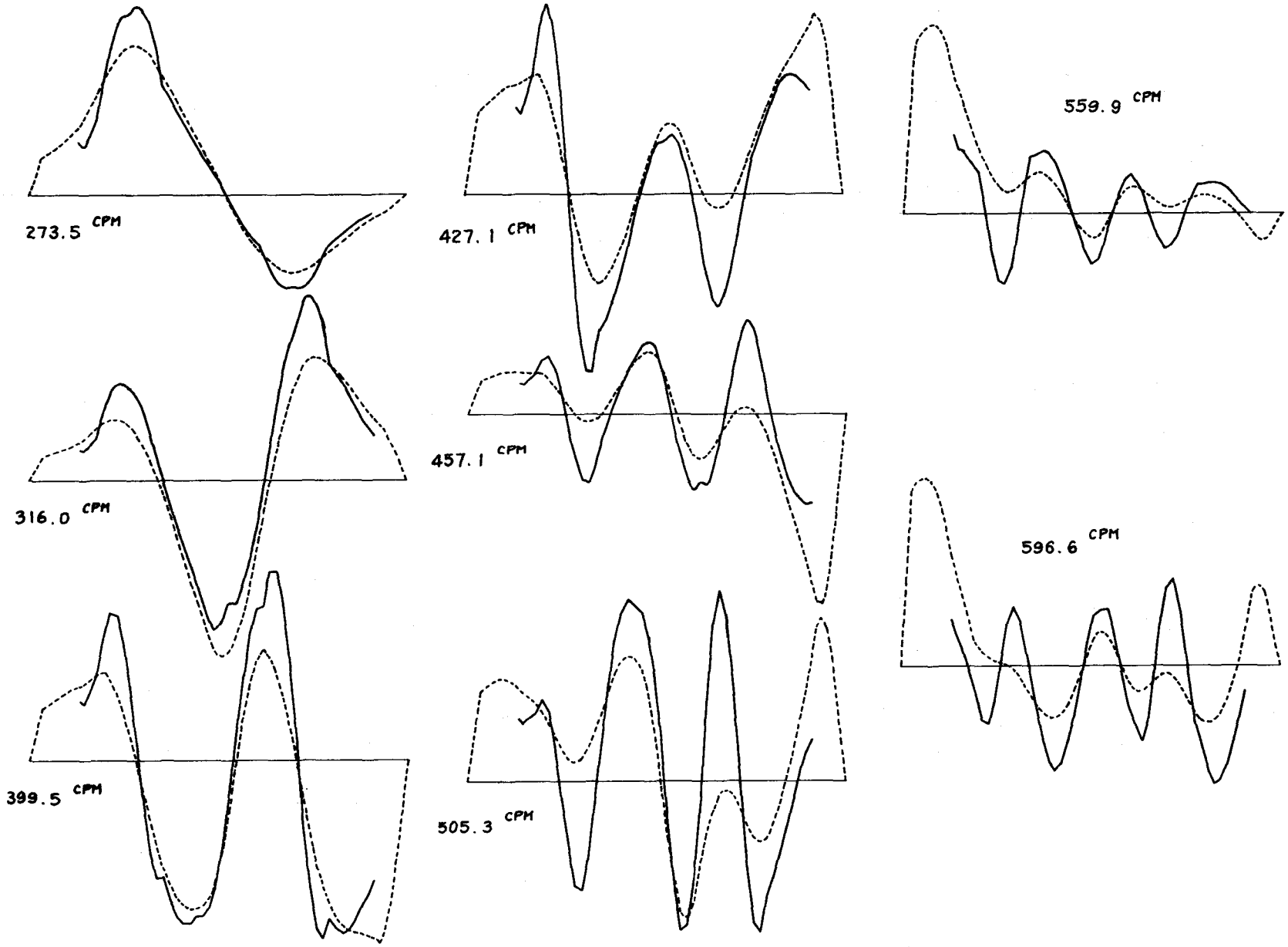


図 3.3 9(iii)　振動モードの計算値（M船 condition B,逆対称型振動）

第6章　結　　言

本編では巨大船の船体上下振動として従来の船体を1本の梁とした解析では説明できないいわゆるNon—Beam Vibrationの研究について論じた。

第2章においては巨大油送船を対象としてその船体構造をSide ShellおよびLongi Bhdをそれぞれ1本の梁と見なしこれら4本の梁が互にバネでつながれている振動系にモデル化しNon—Beam Vibrationの定性的な検討を行ない次のような結論を得た。

(1) 巨大船のNon—Beam Vibrationは船の幅方向の対称性により船体中心線に関して振動モードが対称な振動と逆対称な振動に分けて取り扱うことができる。またそれぞれの振動はSide Shellの振動が支配的な型（S—type）とLongi Bhdが支配的である型（L—type）に分類することができる。

(2) この4つの型の振動は振動数の低い方から対称型L—type，逆対称型L—type、対称型S—type、逆対称型S—typeの順序で発生する。

(3) 低次振動では船体を1本の剪断梁と考えた固有振動数と対称型L—typeの固有振動数は良く一致するが、高次振動になればL—typeの振動数はLongi Bhdだけを1本の梁と考えたものにS—typeはSide Shellだけを1本の梁と考えた固有振動数に近づく。

さらに、Non—Beam Vibrationの固有振動数および振動モードにおよぼす質量比、連結バネ、連結バネ比の影響について考察した。また、

(4) 捩り振動との連成を考慮することによって逆対称型L—typeの固有振動数は一般に低下することがわかった。

第3章においてはさらに定量的に実際の油送船の固有振動数を計算する方法としてTransfer Matrix Methodを使用した理論解析法を示した。この計算法より実船の種々の状態がNon—Beam Vibrationの固有振動数におよぼす影響を検討した結果次のような結論が得られた。

(5) このモデルにおいても前述の(1)，(2)，(3)に述べた結果と同様のことが成立する。

(6) 載荷重量の増加にともなって各typeの固有振動数はほぼ一様に低下する。

(7) 荷重分布が固有振動数におよぼす影響はL—typeではほとんどないがS—typeではかなりの影響を受け、特にモード曲線は大きく影響を受ける。

(8) 横隔壁が固有振動数におよぼす影響は対称型L—typeではほとんどない。他の3つの型では低次振動においては影響されるが高次振動になるにつれて影響は少なくなる。

第4章においてはNon—Beam Vibrationの付加水質量の取り扱い方について述べた。これより、

(9) Non—Beam Vibrationの二次元付加水質量係数は従来の梁理論による解析では付加水質量係数が一つで定義されるのに対して対称型振動および逆対称型振動に対してそれぞれ三つの異なった係数として定義することができる。

そして、有限要素法を使用した任意断面の付加水質量係数の計算法を示すとともに、シリーズ計算を行ない、これらの係数は船体中央断面に対してほぼ次の値となることがわかった。

(10) 対称型振動に対して

$$ {}_{S}C_{V} = C_{V} \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} $$

逆対称型振動に対して

$$ {}_{A}C_{V} = C_{V} \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & \frac{1}{50} \\ \frac{1}{50} & \frac{1}{115} \end{bmatrix} $$

また、一般に船底の変形のある場合の付加水質量係数増加率と従来の付加水質量係数との関係を求め、定性的な検討を行なった。Non—Beam Vibrationの三次元修正係数についての一般的な理論解析法を述べたが実際に応用する場合電子計算機の容量等の問題があり今後の検討課題として残されている。また、このように定義されたNon—Beam Vibrationの付加水質量係数が前述した計算法にどのような形で導入出来るかについて示した。

第5章においてはNon—Beam Vibrationの実船実験と理論計算法との比較を行なった。その結果、

(11) 実験より求められた対称型L—typeの固有振動数と理論計算値によるものとの比較は低次振動においては曲げ変形の影響を無視しているため計算値はかなり高い目に求められているが高次振動では傾向的に良く一致する。

(12) 実験より求められた振動モード曲線と計算より求められたものとは良く一致した形状を示し、Non—Beam Vibrationの性状を良く説明していることがわかった。

第4編　巨大船の上部構造前後振動に関する研究

第1章　緒　　言

巨大船の局部振動で最も重要な問題は上部構造の前後振動である。巨大船においては船尾船楼形式が採用される場合がほとんどであり、航海船橋甲板からの前方見通しをある角度以上に保つためにはどうしても上部構造を高くする必要があり、その結果上部構造の前後振動の固有振動数がDWT5万トン以上の船ではdiesel船の常用回転数におけるblade frequencyに相当する500cpm～600cpm近辺にまで低下し、共振を起こす可能性が生じて来る。この問題は10万トン以上の巨大船が建造され始めた1960年代の半ば頃より注目視されるようになったものであるが船体振動のhanging motionと考えられる計測例はかなり以前から報告されている。〔60〕著者は1965年に上部構造前後振動の固有振動数の計算法を発表するとともに〔61〕〔62〕、この問題に関連する種々の研究を行なった。本論文ではこれまでの成果をまとめ上部構造前後振動について総合的に検討する。

まず第2章においては上部構造前後振動の固有振動数の計算法について述べる。電子計算機による精密計算法および多くの実船振動実験の結果をもとにして得られた簡易計算式を取り上げる。

第3章においては船体縦振動および船体上下振動と上部構造前後振動との関連について定性的検討を行ない、さらに上部構造前後振動の応答について考察する。

第4章においては上部構造の近辺に存在する局部振動体であるdoggerおよび煙突についてそれが上部構造前後振動におよぼす影響について検討する。

最後に第5章では上部構造前後振動の防振対策に対してその一般的考え方について述べる。

第2章　上部構造前後振動の固有振動数の計算法

2.1　上部構造前後振動の計算model

本章では電子計算機による精密な計算法と実船実験をもとにした簡易計算法の2通りを取り上げる。

船舶の上部構造の形式は多種多様であり、また構造的にも複雑であるのでこれをmodel化

するには種々の問題がある。著者は図4.1のごとき実際の上部構造を次のような仮定のもとに図4.2に示したような回転バネ支持の変断面片持梁にmodel化して取り扱った。

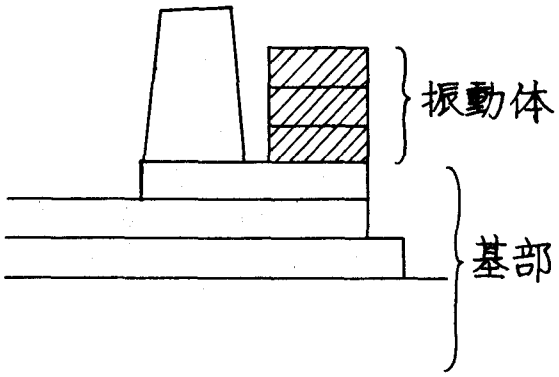


図4.1　実船の上部構造

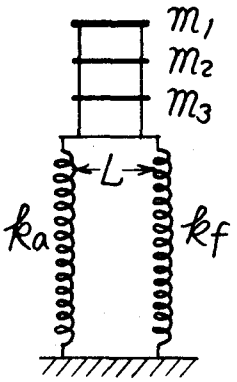


図4.2　上部構造のmodel化

(1) 上部構造を基部甲板*において回転バネ支持された変断面片持梁と見なし、その剪断および曲げ変形ならびに剛体としての回転変形を考慮する。

(2) 上述のそれぞれの変形による変位は微少なものであるとしsuperposeすることができるものと仮定する。

(3) 振動による慣性力はそれぞれの甲板位置に集中して作用するものと仮定する。

(4) 各甲板間の剪断剛性および曲げ剛性は一定とする。

(5) 粘性抵抗およびその他の減衰力は固有振動数には影響をおよぼさないものとし無視する。

(6) 回転慣性の影響はこれを無視する。

2.2　上部構造前後振動の固有振動数の計算法

2.2.1　基礎方程式

図4.2に示したようなN層上部構造振動系の振動方程式は次のように導かれる。

いま、各甲板に働く力と変位の関係を表わすflexibility matrixは次のようになる。

$$\mathbf{Y} = \Phi \cdot \mathbf{P} \qquad (4.1)$$

ここに、　$\mathbf{Y} = \{ Y_1, Y_2, \cdots\cdots, Y_N \}$: N次変位vector

$\mathbf{P} = \{ P_1, P_2, \cdots\cdots, P_N \}$: N次力vector

$\Phi = \Phi_R + \Phi_S + \Phi_B$: flexibility matrix

---

*　後述するように基部甲板は必ずしも上甲板ではない。

$\Phi_R = \frac{1}{K}\left(\frac{H}{L}\right)^2 \cdot \mathbf{C}$ ：基部甲板の回転による flexibility matrix*

$\Phi_S = \frac{H}{G}\mathbf{S}$ ：剪断変形による flexibility matrix

$\Phi_B = \frac{H^2}{6E}\mathbf{B}$ ：曲げ変形による flexibility matrix

$C_{ij} = (N+1-i)\ (N+1-j)$

$S_{ij} = \sum_{k=i}^{N} \frac{1}{A_k} \quad (i \geq j) \qquad S_{ij} = S_{ji}$

$B_{ij} = \sum_{k=i}^{N} \{ 6\ (k-i)\ (k-j) + 3\ (2k-i-j) + 2 \} \cdot \frac{1}{I_k}$

$(i \geq j) \qquad B_{ij} = B_{ji}$

K：基部甲板における総合バネ定数

H：甲板間高さ

L：基部甲板における aft wall と front wall 間の距離

N：上部構造振動体の層数

A_k, I_k：k 番目甲板における剪断有効断面積および慣性二次 moment

一方、運動方程式は次式で表わされる。

$$-\mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{Y}} = \mathbf{P} \tag{4.2}$$

ここに、 $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & & & & 0 \\ & m_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & m_N \end{bmatrix}$ ：lumped mass matrix

m_i：i 番目甲板における質量

(4.2) 式を (4.1) 式に代入し、解を $\mathbf{Y} = e^{i\omega t}\mathbf{A}$ とおけば次式が得られる。

$$\left(\frac{1}{\omega^2}\mathbf{I}_N - \mathbf{U}\right)\cdot\mathbf{A} = 0 \tag{4.3}$$

ここに、$\mathbf{I}_N$：N次単位matrix

ω ：円振動数

---

*この計算式では基部甲板における回転の影響のみを考慮しているが基部甲板より上の甲板においても、いちぢるしいくいちがいがある時にはその甲板における回転の影響を考慮する必要がある。その計算法については文献〔61〕に詳説している。

$$\mathbf{U}=\Phi\cdot\mathbf{M} \quad : \text{dynamical matrix}$$

これより振動方程式は次のようになる。

$$\left|\frac{1}{\omega^2}\mathbf{I}_N-\mathbf{U}\right|=0 \qquad (4.4)$$

電子計算機による場合は（4.4）式で表わされるN次の固有値方程式を固有値を求めるsub-routine に直結することによって一般にN個の固有振動数とそれに対応する振動モードが容易に求められる。また上部構造の前後振動では一般に最低次固有振動数のみを対象とするのでMatrix Iteration Method等を利用すれば効率よく計算が可能である。

これらのInput Dateの評価で一番不確定な要素を多く含むのは基部バネ定数Kの推定である。このKの値と最低次固有振動数は1対1で対応するがこの関係を計算しておけば、防振対策を講じる時等、設計的な立場から見て便利である。したがって電子計算機による計算では最低次固有振動数を対象としてまずK→∞の場合の最低次固有振動数を計算し、それ以下の固有振動数に対しては、これに対応するKの値を逆算するようにしている。

その方法は次に示す通りである。

flexibility matrixは（4.1）式に示したようにKの関数として次のようになる。

$$\Phi=\frac{1}{K}\left(\frac{H}{L}\right)^2\mathbf{C}+\Phi_B+\Phi_S \qquad (4.5)$$

（4.5）式を（4.4）式に代入すれば次のようになる。

$$\left|\left(\frac{H}{L}\right)^2\Gamma(\omega)^{-1}\mathbf{C}\cdot\mathbf{M}-K\mathbf{I}_N\right|=0 \qquad (4.6)$$

ここに、 $\Gamma(\omega)=\frac{1}{\omega^2}\mathbf{I}_N-\{\Phi_B+\Phi_S\}\cdot\mathbf{M}$

いま、（4.6）式においてωを与えれば対応するKの値は次のように計算できる。

$$K=\left(\frac{H}{L}\right)^2\cdot\{\mathbf{C}_0\}^T\cdot\Gamma(\omega)^{-1}\cdot\mathbf{M}\cdot\{\mathbf{C}_0\} \qquad (4.7)$$

ここに、$\{\mathbf{C}_0\}=\{N, N-1, \cdots\cdots, 2, 1\}$

2.2.2 固有振動数の計算に必要な諸数値

前節に述べた計算に必要なそれぞれのInput Dataの作成については次のように考える。

(1) 基部甲板のきめ方

図4.3に示したように上部構造の各層の長さを頂部から順にℓ_1, ℓ_2, ・・・・・で表わしたとき、

$N \cdot H \geq \ell_N$

を満足する甲板までを考慮し、

基部甲板とする。

上記にかかわらず上部構造のある甲板の後端壁がその下の甲板の後端壁といちぢるしいくいちがいがある時はその甲板を基部甲板とする。このくいちがい量はほぼ次の基準より定める。

$$\frac{\ell_i}{\ell_{i+1}} \leqq \frac{2}{3}$$

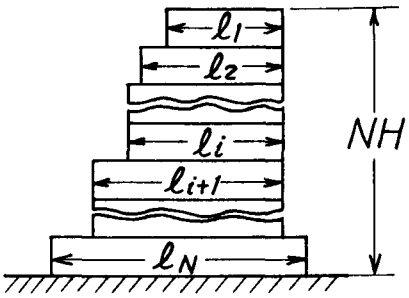


図 4.3　側壁長さによる上部構造振動体の判定

(2)　剪断有効断面積

剪断に対する有効断面積は次の様に計算する。

(i)　剪断力を受け持つ部材は甲板間を全通する steel wall のうち side wall のみとする。

(ii)　side wall が船の centre line と平行でない場合は便宜上 centre line と side wall のなす角が 45°以内のもののみが剪断力を受持つとし、またその割合は side wall の centre line への投影長さをとることとする。

(iii)　side wall に窓、扉などの開口がある場合はその長さにわたって剪断力を受け持たないものとする。

(3)　断面慣性二次モーメント

断面の慣性モーメントは次の様に計算する。

(i)　曲げモーメントを受け持つ部材は甲板間を全通する steel wall のうち外周の閉じた wall のみとする。

(ii)　wall が船の長さ方向、および幅方向に平行でない場合はそれぞれの投影長さを用いて計算することとする。

(iii)　対象としている外周 wall に窓、扉等の開口がある場合にはその開口の長さにわたってこれを省略する。

(4)　重　　量

重量にはすべての重量を考慮し各甲板に集中させる。重量の主なものは steel weight, deck covering, ceiling & wall 等でありその他艤装重量等も入れる。ただし甲板間に連続する部材の重量は上の甲板に含めることにしている。

(5) 基部バネ定数

基部バネ定数は次式で計算される。

$$\frac{1}{K}=\frac{1}{k_a}+\frac{1}{k_f}$$

ここに、 k_a ：基部甲板上 aft wall 位置における総合バネ定数

k_f ：基部甲板上 front wall 位置における総合バネ定数

k_a および k_f は次の仮定のもとに基部構造を構成する各部材のバネを総合して求められる。

(i) 上部構造からの作用する力は基部甲板以下の構造に含まれる steel wall , pillor bhd 等を通じて船底部まで伝達される。

(ii) 各部材のバネの計算は力の伝達を考慮して軸方向の変形および剪断変形より求める。*

(iii) deck plate は剛性に寄与しないものとする。

(iv) これらの変形による同一 deck での撓みは一定とする。

これより k_a , k_f は次のように合成される。

$$\frac{1}{k_a}=\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{{}_ak_i}\ ,\qquad \frac{1}{k_f}=\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{{}_fk_i}$$

ここに、 $${}_ak_i=\sum_{j=1}^{P}{}_ik_j$$

$${}_fk_i=\sum_{j=1}^{Q}\overline{{}_ik_j}$$

${}_ik_j$, $\overline{{}_ik_j}$ ： i deckに含まれる j 番目のバネ

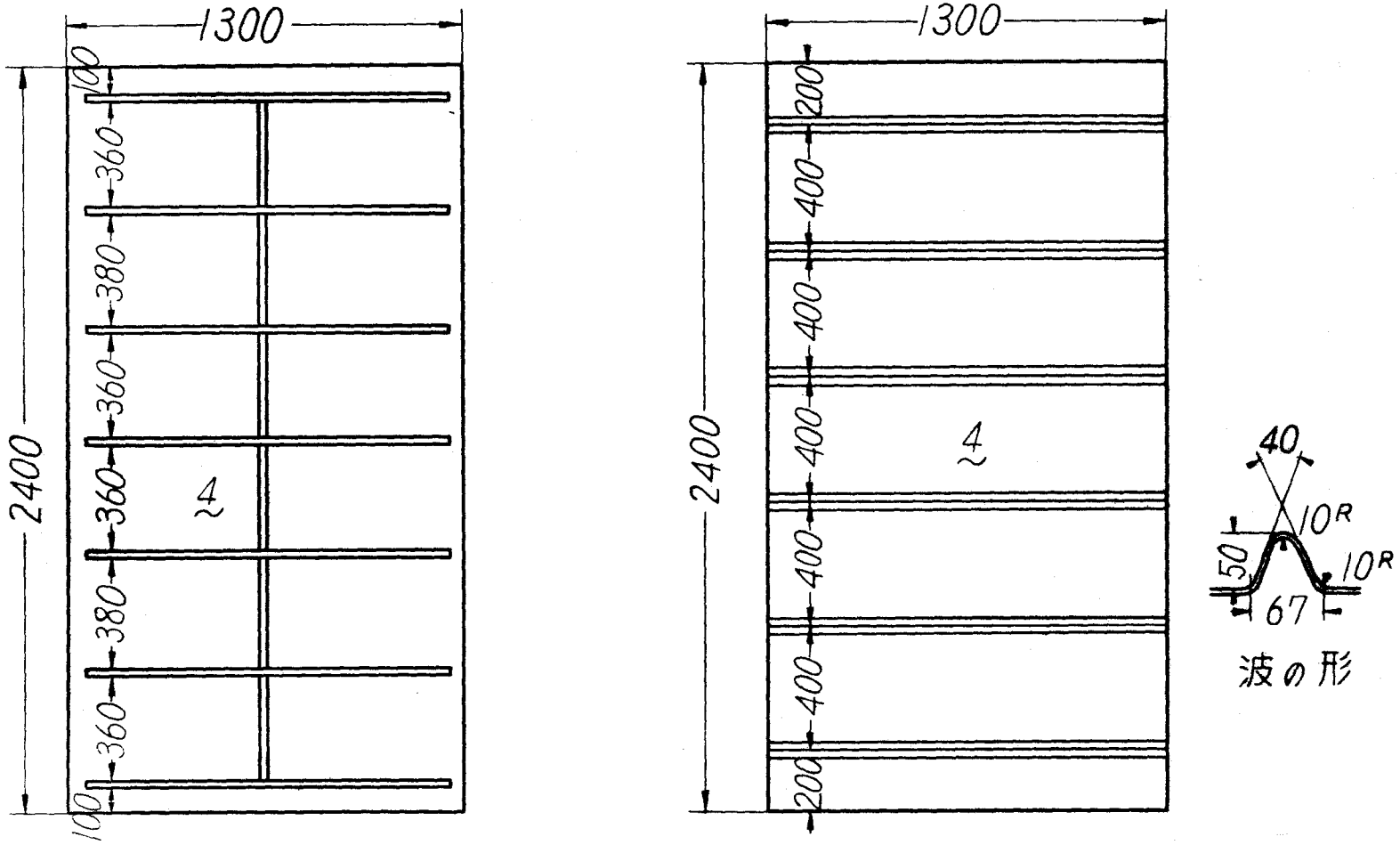
2.8 上部構造の側壁に波板を使用した場合の影響

上部構造の側壁には重量軽減やひずみ防止などの目的で波板を使用する場合があるが波板は通常の防撓板に比較して剪断剛性が低いために、その振動におよぼす影響が懸念される。この点を検討するために模型実験および二、三の計算を行なった。

2.8.1 剪断剛性に関する静的模型実験

波板と防撓板との剪断剛性を静的に比較するため模型実験を行なった。試験片は図4.4に示したような寸法のものとし、これを図4.5の一部に示したような方法で荷重を加えて、荷重とたわみとの関係を求めた。実験結果は図4.5に示した通りである。荷重ーたわみ曲線の

* 基部バネ定数に関する詳細な計算法は文献〔63〕に述べている。



防とう材は 50×6mm 平鋼板の片面のみ.

(i) 防とう板

(ii) 波　　板

図 4.4 試　　験　　片

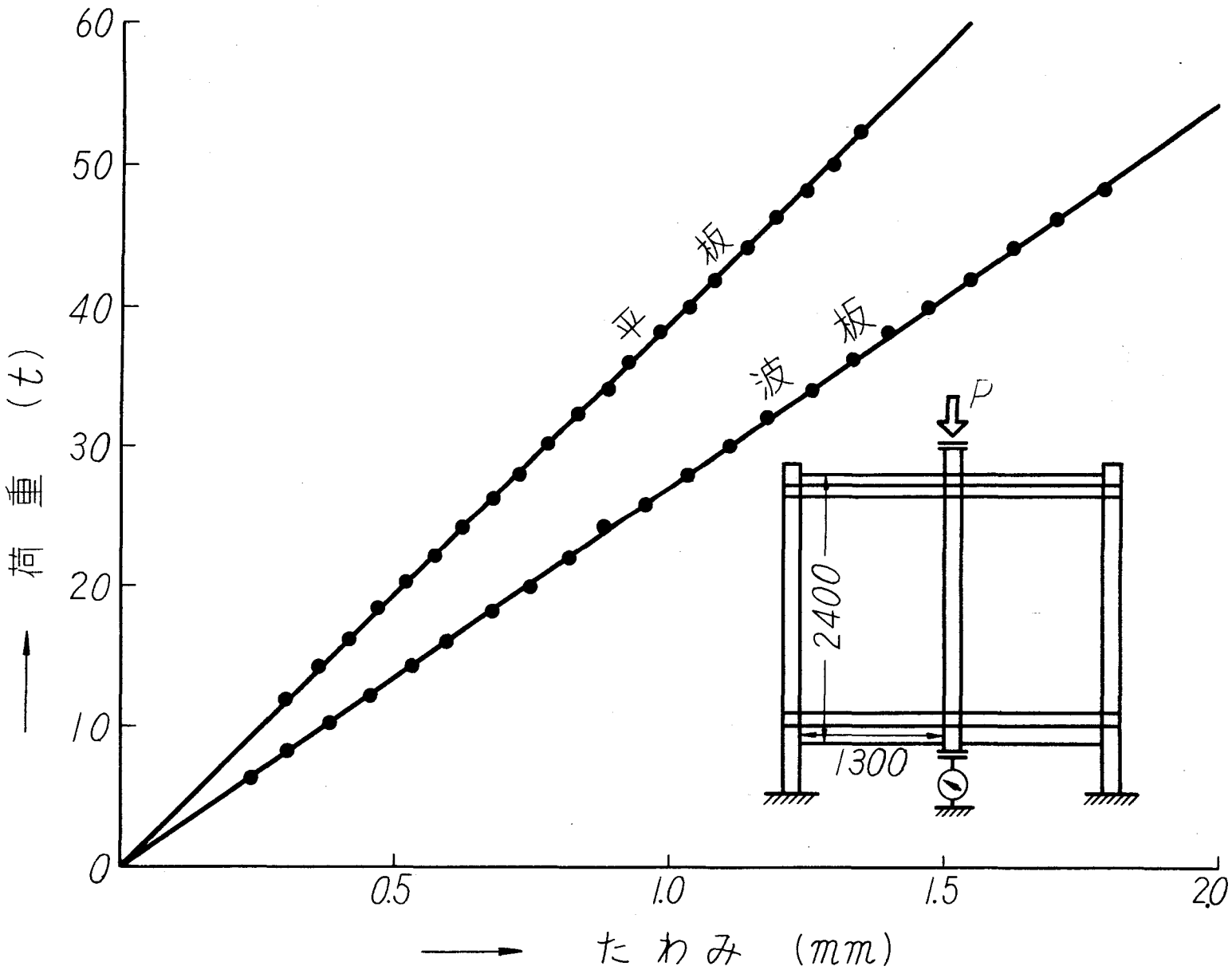


図4.5 荷重とたわみの関係

傾斜は板の剪断剛性に比例すると考えられるので、いま波板の剪断剛性と防撓板のそれとの比をηで表わせば、図4.5から次の値が得られる。

$$\eta = \frac{(k' AG)_c}{(k' AG)_f} = 0.687$$

ただし、添字c，fはそれぞれ波板および防撓板を示す。すなわち防撓板に比較して波板の剪断剛性は約31％低下することがわかる。このような波板の剪断剛性に関しては白石の研究〔64〕があるが、上記の実験値は白石の方法によるものにくらべて低下率が若干大きいようである。

2.3.2　固有振動数におよぼす影響

上記の実験により波板の剪断剛性は防撓板のそれよりかなり低下することがわかったが、上部構造の固有振動数におよぼす影響はこの数値だけから単純に評価することはできない。すなわち、固有振動数には側壁の剪断剛性以外にも曲げ剛性や重量など影響する因子が多く、中でも基部甲板の回転バネ定数が最も大きな影響をおよぼす。したがって波板を使用した場合の影響は上述諸項のうち剪断剛性だけを変化させた場合を検討する必要がある。（厳密には波板を用いれば曲げ剛性も変化するが、その変化による影響はかなり小さいと考えられるので、ここでは無視することにした。）また、検討の対象として、上部構造の層数が6、甲板高さが2.7 m、基部甲板における前後壁の距離が26.4 mの船を選び、表4.1に示したような数値を用い、その剪断剛性のみが0～50％にわたって変化した時の固有振動数を前述の方法によって計算した。

表4.1　上部構造諸数値

層 No.	断面積 (cm^2)	断面二次モーメント (cm^4)	重量 (ton)
1	368	91×10^6	26.4
2	1734	647×10^6	60.5
3	1768	702×10^6	67.7
4	3248	1691×10^6	76.5
5	3163	2157×10^6	90.8
6	6006	6122×10^6	151.7

計算結果は図4.6に示した通りであり、固有振動数の低下率は基部甲板の回転バネ定数Kの大きさによって異なることがわかる。実船のKの値は日立造船㈱の建造船におけるこれまでの実績によればK＝500~1000 ton/cm であるので、上記の静的模型実験から得られた波板の剪断剛性低下率すなわち約３０％を用いれば、その固有振動数は約１０％程度低下することがわかる。なお、波板を上部構造の側壁に採用することの影響は固有振動数に対してのみでなく振幅にも影響があるので、この点についての検討も必要であるが、共振点の近傍では固有振動数と起振外力の振動数との関係如何によってかなり様相が異なるので単純には論じられないし、また単なる強制振動の場合には当然剪断剛性の低下にほぼ逆比例して振幅が増加すると考えられるので、ここでは振幅の問題は特に取り上げないこととした。

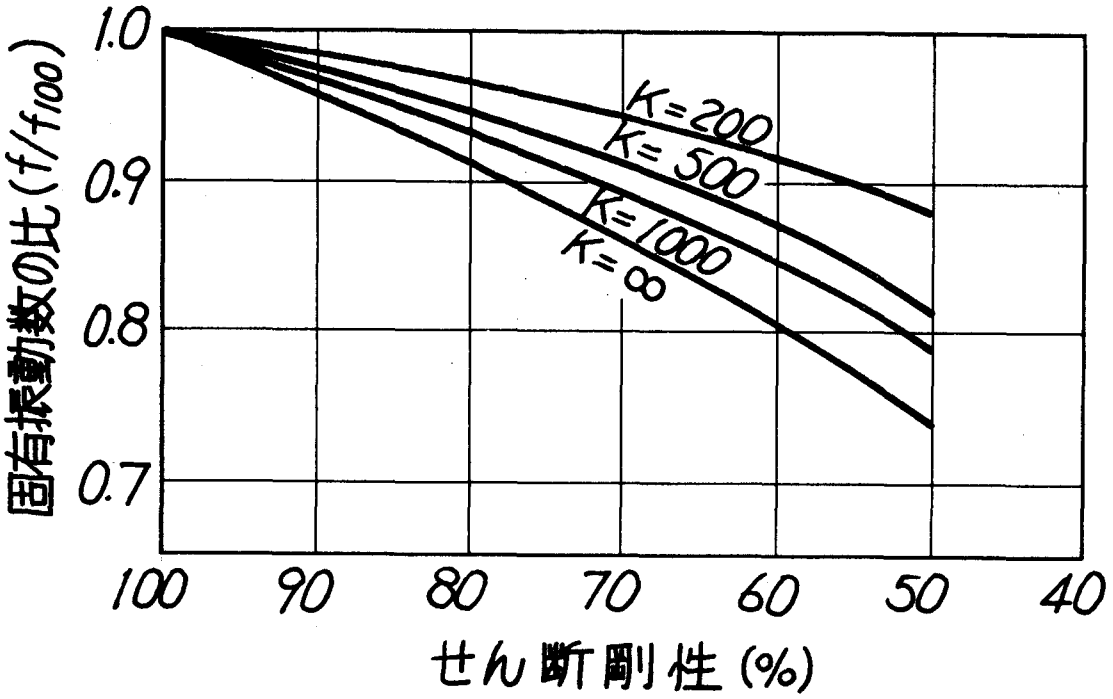


図4.6　せん断剛性と固有振動数低下率との関係

2.4　実験値と電子計算機による計算値の比較

2.4.1　上部構造前後振動の実船実験

上部構造前後振動の実験は船を岸壁にけい留中に起振機を使用して行なういわゆる起振機

実験と試運転時を利用して行なう航走時の振動測定に大別される。正確な固有振動数を測定するには起振機による実験が望ましく、起振機は図4.7に示したように上部構造の上層の甲板に設置され前後方向に起振される。そして例えば図4.7に示したような位置で上部構造の前後振動のモードが計測される。

表4.2に示したごとき供試船について求められたいわゆる共振曲線を図4.8および図4.9に示す。これらの図から明らかなように卓越したpeakの間に混ってそれ以外にかなり多数の小さなpeakが認められる。いまそれぞれの場合について固有振動数の低いものから順に1次、2次、3次と呼ぶことにし、図4.8および図4.9に示した1～3次の固有振動数に対応する振動モードを示せば図4.10のごとくになる。図はいずれも最上層甲板の振幅を基準として表わしたものである。これらの振動モードはいずれも片持梁の1次振動モードをしており2次、3次において基部甲板で位相が逆になる他は殆んど変らない形状を示す。これらのpeakは船体振動との連成効果によるものと思われる。これについては第4章において述べる。

2.4.2　実験値と計算値の比較

実験より得られた上部構造前後振動の固有振動数と2.2において述べた電子計算機による計算値との比較を行なう。表4.3は実験した供試船の主要寸法および上部構造の層数、高さ、実測固有振動数などを示したものであるが、これらの内5隻（C－4，C－5，B－8，B－9，B－10）については残念ながら電子計算機による計算は行なわれていない。なお表中の船名欄に示したA，B，C，Dの符号は後述する上部構造の形式別の分類を示すものであり、上欄のL，B，D，DWは供試船の長さ、幅、深さ、載荷重量をN，Hは上部構造の層数および上甲板からの高さを、N_Eは実験により得られた上部構造の固有振動数を示したものである。これらの実験値を電子計算機による計算値と比較した結果をまとめたのが表4.4である。この表においてN，H，N_Eは表4.3の場合と同じであるが、n，hは2.4において述べたいわゆる基部甲板上の振動体の層数および高さを示したもので、例えばB－1船の場合、上部構造の層数および高さはそれぞれ6層および15.6 mであったが、その中の3層7.8 mをいわゆる振動体と考え、残りの3層は基部甲板の回転バネ定数の計算に入れていることを示している。またf_cは電子計算機による計算値であり、f_c/N_Eは計算値と実測値との比を示したものである。なおこの表からf_cとN_Eとの関係を求めて図示すれば図4.11のごとくであり±10％のzoneに入るものが全体の52％、±20％のzoneに入るものが72％であって必ずしも良好な結果であるとはいえない。

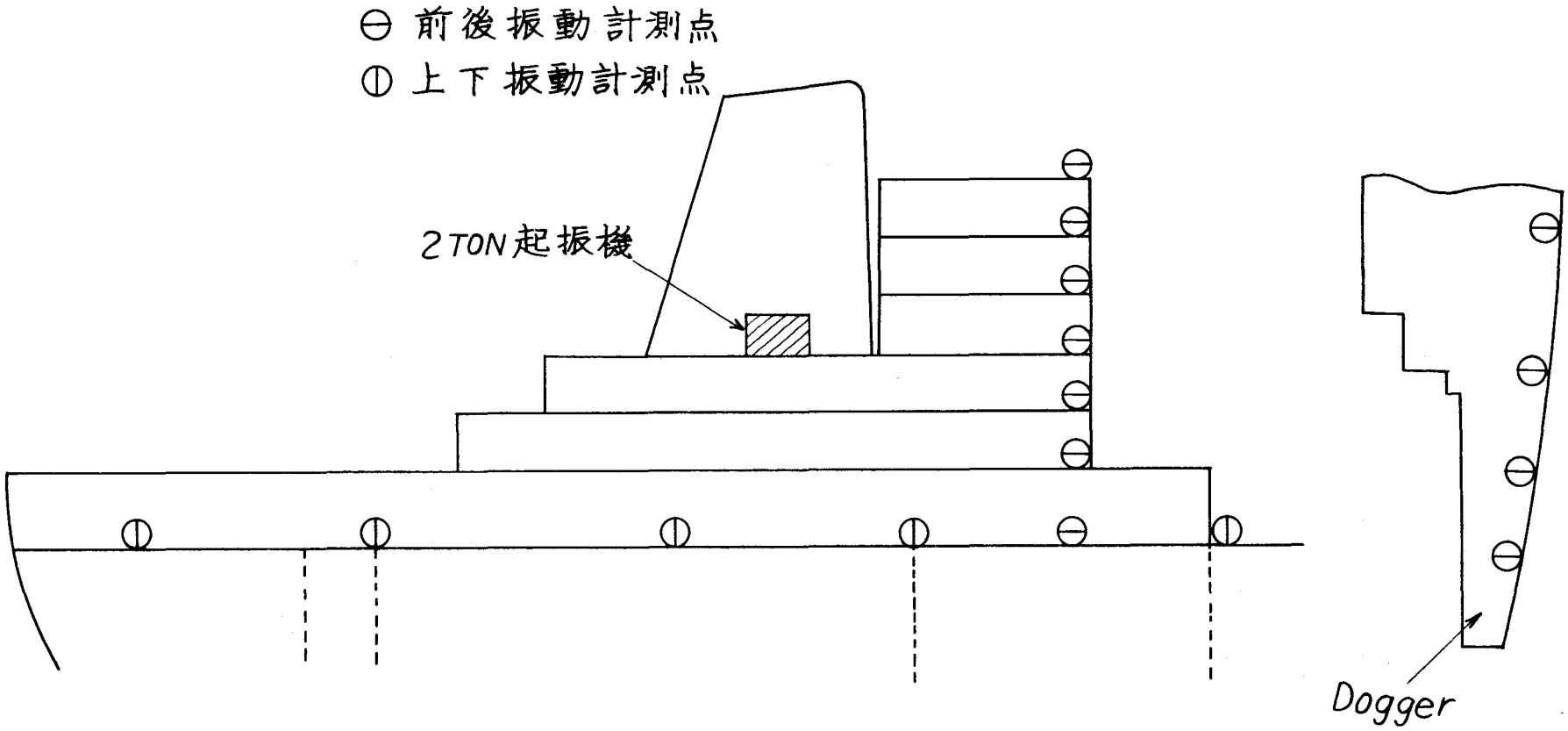


図4.7 計 測 点 配 置 (D船)

表4.2 供試船の主要目

船名	船種	L×B×D (m)	D.W. (KT)	主機	常用回転数 rpm	推進器翼数	備考
A	油送船	246.00×40.20×21.80	99,655	日立B&W 1284-VT2BF-180	108	5	通常形上部構造
B	油送船	246.00×40.20×21.80	103,929	日立B&W 1084-VT2BF-180	108	6	同上
C	鉱石運搬船	241.00×36.80×17.90	82,056	日立B&W 984-VT2BF-180	110	5	同上
D	油送船	234.00×37.00×19.80	88,461	日立B&W 984-VT2BF-180	108	5	同上
E	鉱石運搬船	195.00×27.40×16.65	39,905	日立B&W 784-VT2BF-180	110	5	同上
F	油送船	246.00×40.20×21.80	100,800	日立B&W 1084-VT2BF-180	108	5	Tower Bridge
G	油送船	207.00×31.84×14.50	45,250	日立B&W 784-VT2BF-180	108	5	通常形上部構造
H	油送船	265.00×44.20×21.50	121,450	日立B&W 1284-VT2BF-180	108	5	Tower Bridge
I	油送船	227.00×36.50×16.40	66,300	日立B&W 884-VT2BF-180	108	5	通常形上部構造

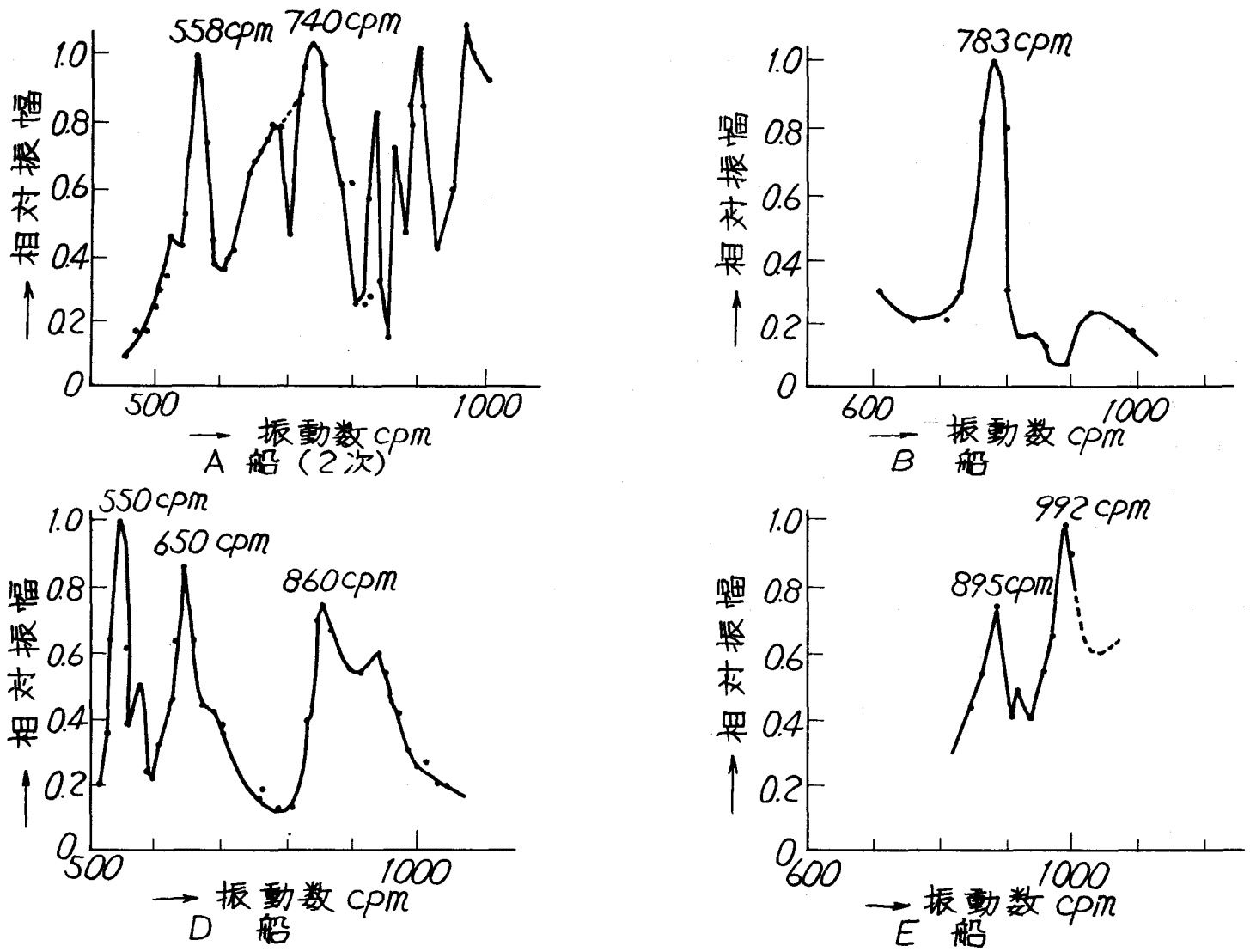


図 4.8 共 振 曲 線 (Exciter Test)

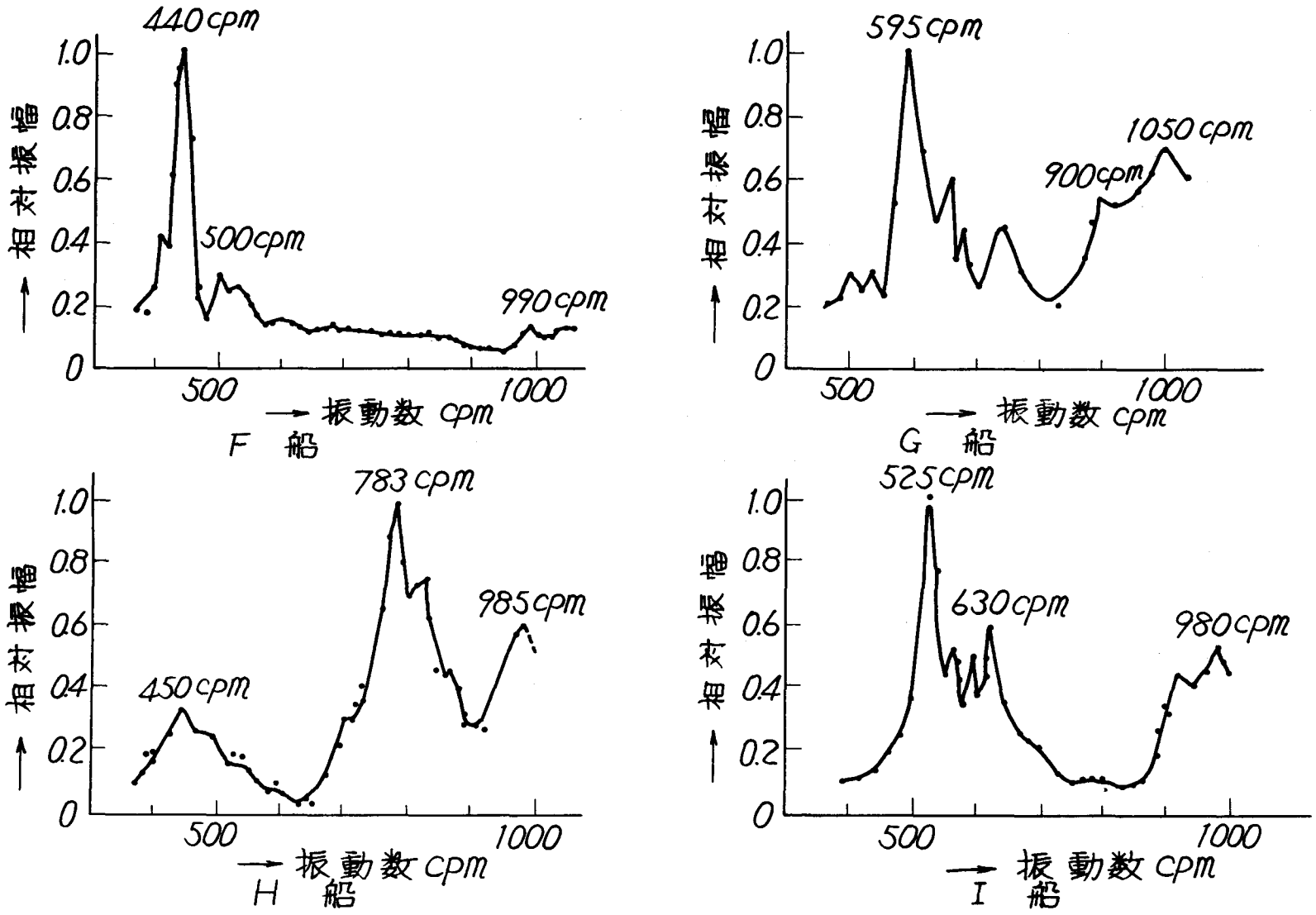


図4.9 共振曲線 (Exciter Test)

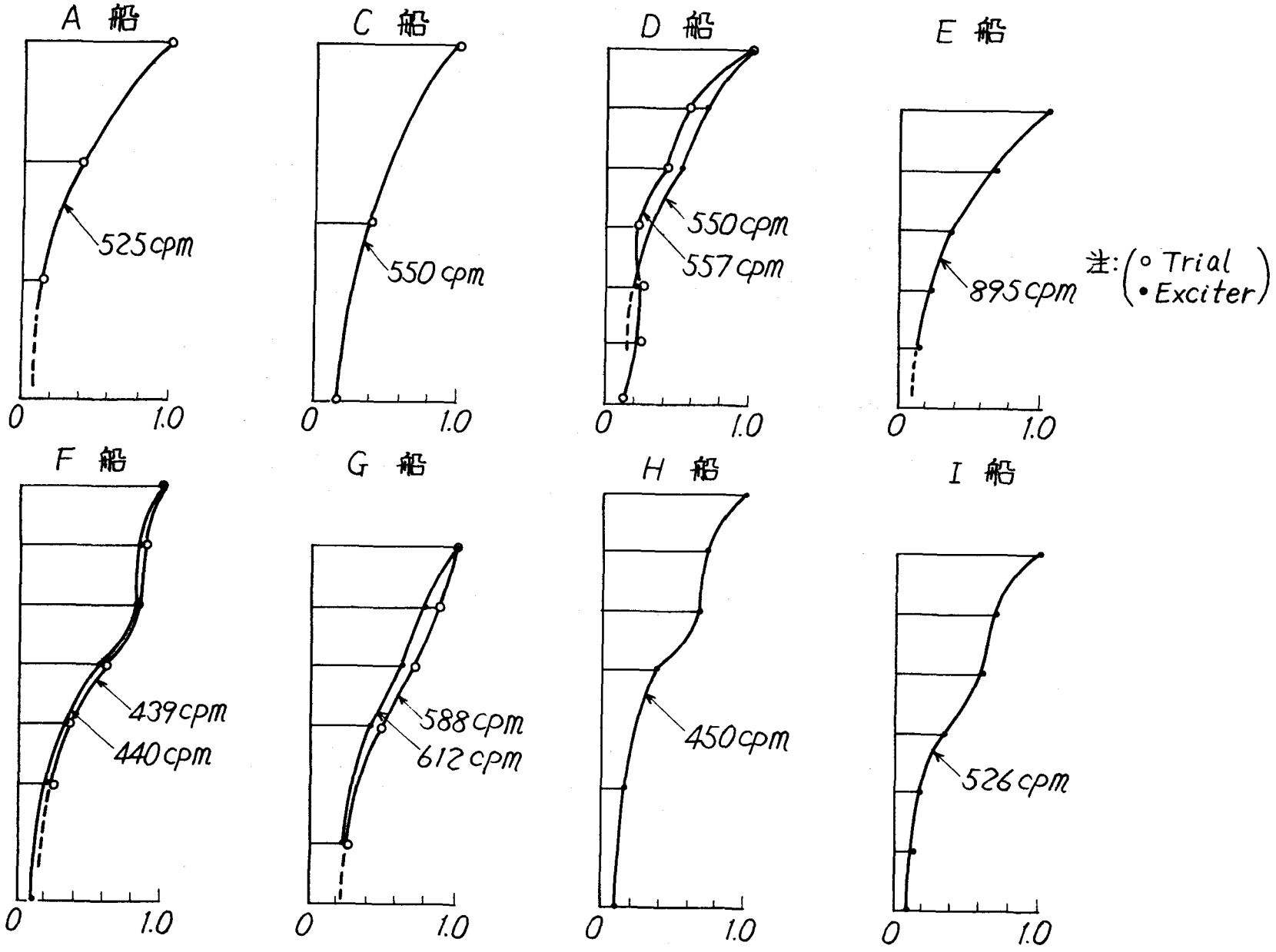


図 4.10(i) 上部構造のMode Curve (一次)

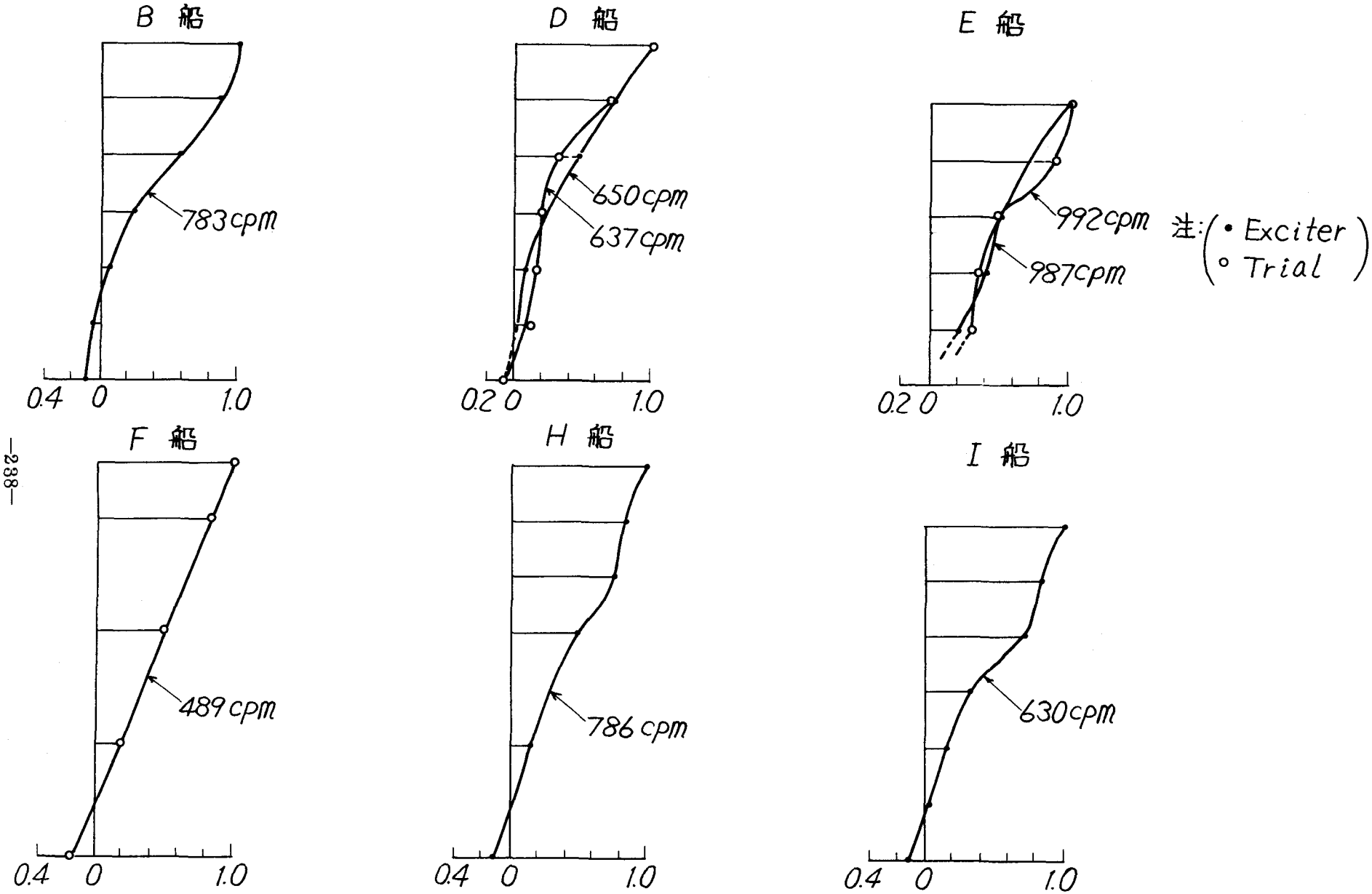


図 4.10(ii) 上部構造のMode Curve (二次)

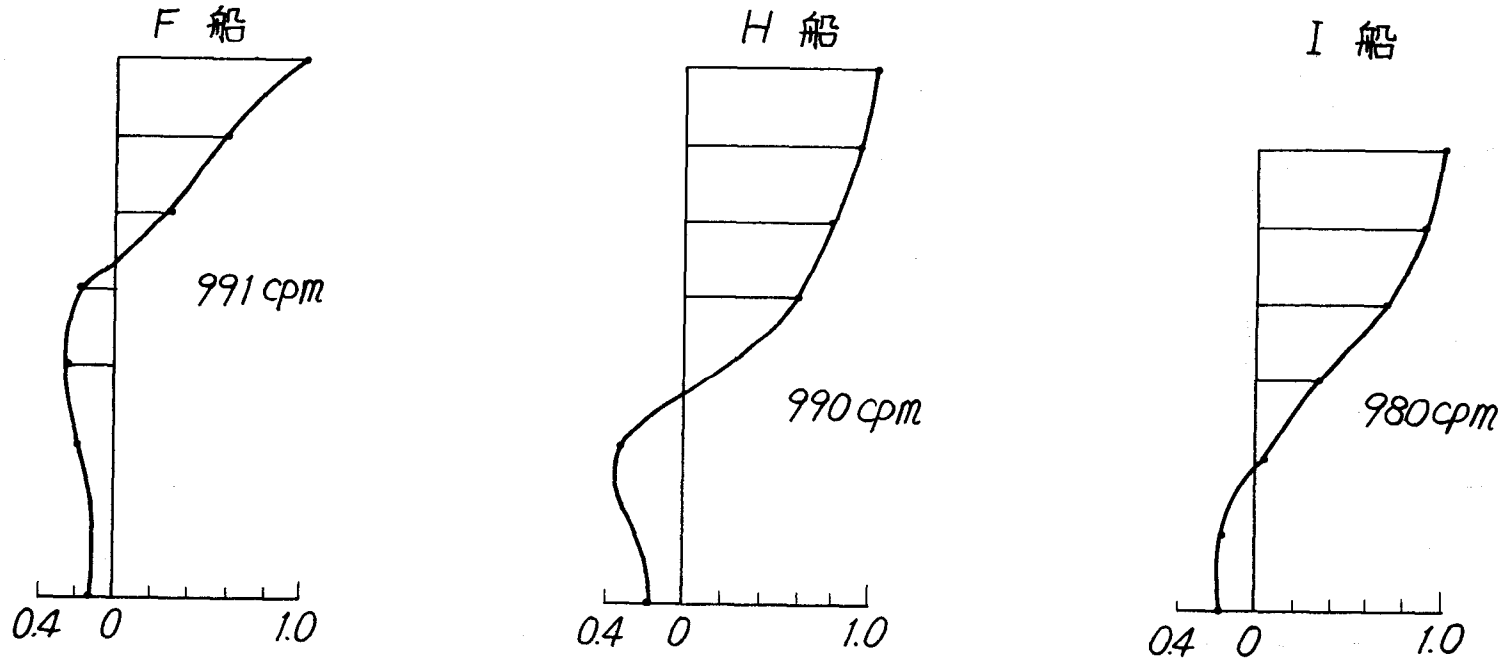


図 4.10(iii) 上部構造のMode Curve (三次)

表4.3 供試船主要寸法など

船名	L (m)	B (m)	D (m)	D.W (t)	N (層)	H (m)	NE (cpm)
A－1	265	44.2	21.5	121.453	7	18.3	450
A－2	246	40.2	21.8	103.354	7	18.3	440
A－3	265	44.2	21.5	121.100	7	18.3	487
B－1	234	37.0	19.8	88.461	6	15.6	550
B－2	246	40.2	21.8	99.655	6	15.6	558
B－3	207	31.8	14.5	45.250	6	15.6	595
B－4	227	36.5	16.4	66.300	6	15.6	525
B－5	249	38.9	18.9	89.390	5	13.7	712
B－6	180	28.0	15.3	36.138	6	15.6	710
B－7	298	50.8	24.2	195.100	7	19.2	684
B－8	244	31.7	19.1	61.950	6	15.9	618
B－9	264	44.2	23.0	120.200	6	16.6	610
B－10	172	24.8	12.9	25.400	5	13.0	921
B－11	188	31.4	21.0	33.399	5	13.0	815
B－12	183	29.6	16.4	41.145	5	13.3	880
B－13	240	32.3	18.9	74.107	5	13.0	820
B－14	310	47.2	16.4	173.900	6	15.8	826
B－15	290	48.2	24.0	192.800	6	16.2	780
B－16	131	19.4	12.3	131.257	5	12.5	810
B－17	163	24.8	13.4	23.250	5	12.8	800
B－18	142	21.6	12.5	16.022	5	12.8	865
B－19	227	36.5	16.4	66.354	5	15.6	800
C－1	222	36.2	16.8	66.668	5	15.7	665
C－2	222	37.1	17.8	78.872	6	15.6	731
C－3	274	45.6	21.6	128.000	7	19.2	428
C－4	241	39.0	19.7	92.500	6	17.0	672
C－5	188	31.4	21.0	33.399	5	13.0	718
D－1	184	28.2	16.0	41.003	5	13.0	745
D－2	240	36.8	17.6	78.170	6	16.2	658
D－3	254	39.9	21.0	90.000	6	16.2	745
D－4	145	21.8	13.2	11.740	5	13.0	612

表 4.4　電子計算機による計算値と実測値との比較

船　名	N (層)	H (m)	n (層)	h (m)	N_E (cpm)	f_c (cpm)	f_c/N_E
A－ 1	7	18.3	7	18.3	450	445	0.988
A－ 2	7	18.3	7	18.3	440	445	1.010
A－ 3	7	18.3	7	18.3	487	450	0.924
B－ 1	6	15.6	3	7.8	550	853	1.551
B－ 2	6	15.6	3	7.8	558	535	0.959
B－ 3	6	15.6	3	7.8	595	732	1.314
B－ 4	6	15.6	4	10.4	525	490	0.933
B－ 5	5	13.7	3	8.3	712	868	1.220
B－ 6	6	15.6	3	7.8	710	730	1.028
B－ 7	7	19.2	3	8.3	684	741	1.083
B－ 8	6	15.9	3	7.9	618	—	—
B－ 9	6	16.6	4	10.9	610	—	—
B－10	5	13.0	2	5.2	922	—	—
B－11	5	13.0	2	5.2	815	840	1.031
B－12	5	13.3	2	5.3	880	756	0.859
B－13	5	13.0	2	5.2	820	810	0.988
B－14	6	15.8	2	5.5	826	1002	1.213
B－15	6	16.2	2	5.4	780	1222	1.567
B－16	5	12.5	2	5.0	810	1012	1.250
B－17	5	12.8	2	5.1	800	660	0.825
B－18	5	12.8	2	5.1	865	769	0.889
B－19	5	15.6	3	7.8	800	680	0.850
C－ 1	5	15.7	4	10.4	665	901	1.356
C－ 2	6	15.6	4	10.4	731	753	1.031
C－ 3	7	19.2	5	13.7	428	445	1.040
C－ 4	6	17.0	5	10.9	672	—	—
C－ 5	5	13.0	4	10.4	718	—	—
D－ 1	5	13.0	4	10.4	745	989	1.328
D－ 2	6	16.2	6	16.2	658	632	0.960
D－ 3	6	16.2	5	13.5	745	645	0.866
D－ 4	5	13.0	5	13.0	612	650	1.062

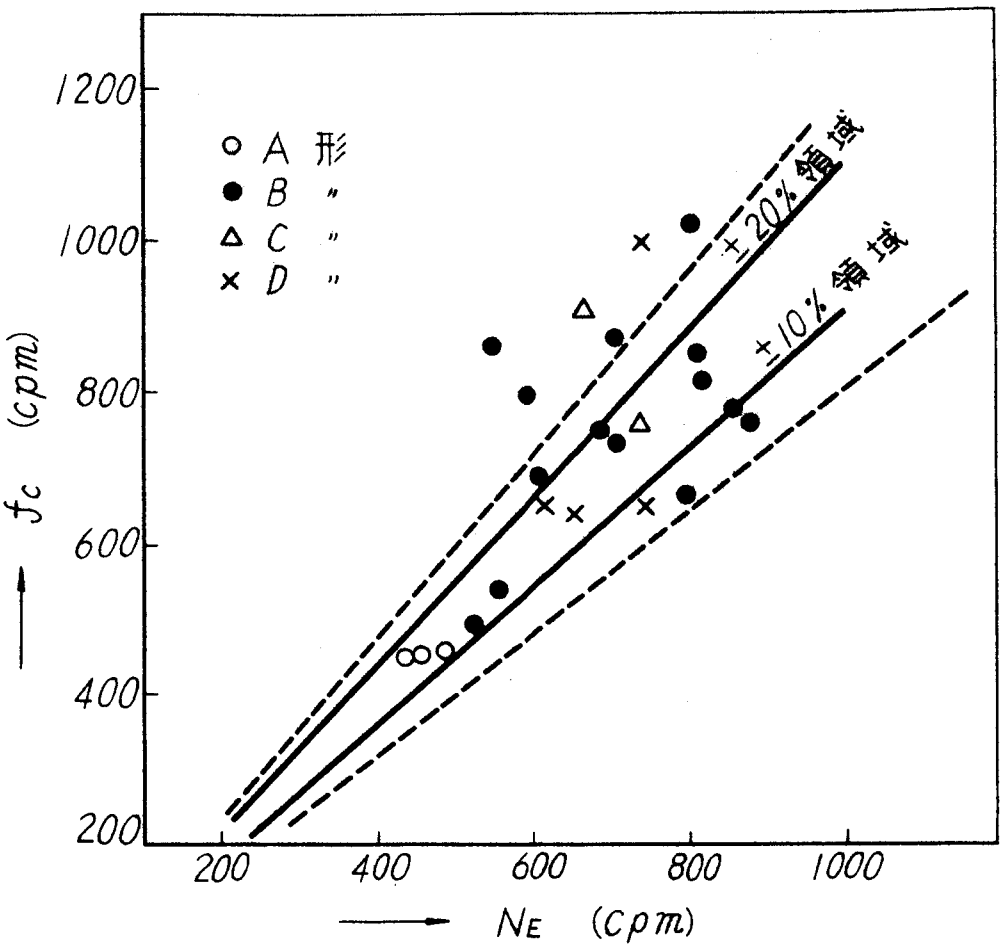


図 4.11　N_E と f_c の関係

計算法の精度と上部構造の型式との関係については特に明瞭な関係は認められないが、B－typeの船が多いだけにこの型の上部構造で±２０％のerrorを越えるものが多いようである。ただ、一般的な感じとして、A－typeおよびC－typeのように形状的に片持梁と考えやすいような型式の方がerrorは少ないようである。

2.5　上部構造固有振動数の簡易計算式

本節においては設計初期において大まかな上部構造の型式および寸法のみによって上部構造の前後振動の固有振動数を求める簡易計算式についてのべる。

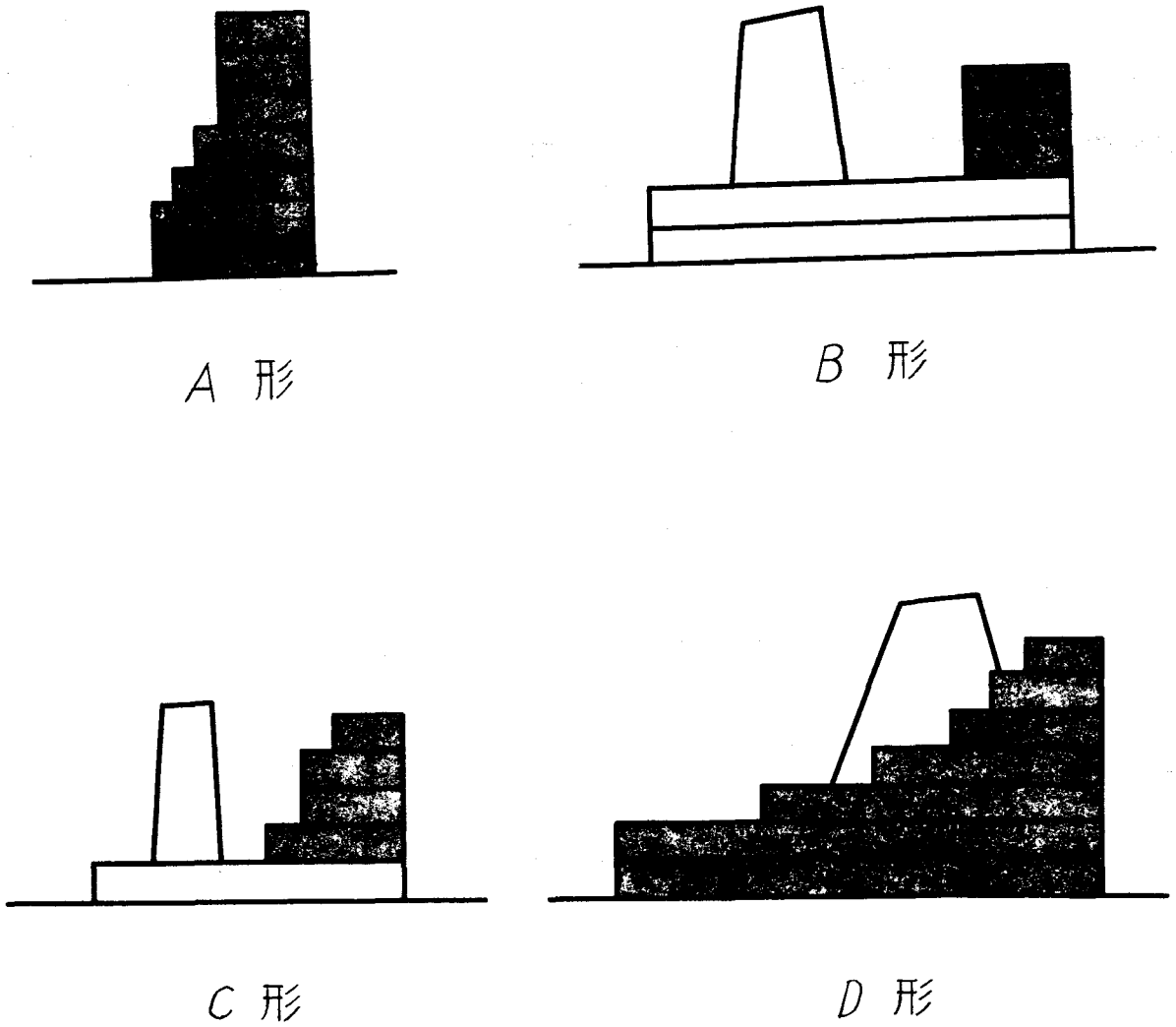


図4.12 上部構造の形式

2.5.1　上部構造の型式による分類

船舶の上部構造は極めて個性的であり、船主の好みや建造工作の便宜上などから種々多様なものが用いられている。

しかしこれらを大まかに眺めるといくつかの型式に分類することができる。すなわち、図4.12に示したような4つの型に分類することとした。

A type：日立造船㈱においてTower Bridgeと称している独立型の上部構造

B type：長い甲板室（2～3層）上に2～3層の上部構造と煙突とが独立にのった型式

C type：長い甲板室（大体1層）上に4～5層の上部構造と煙突とが独立にのった型式

D type：上部構造と煙突とが独立せずに一体となった型式

なお、図4.12においてハッチした部分は2.4の電子計算機による方法で取り扱ったのと同様な考え方に従がい、基部甲板以上の振動体部分を示したものである。

2.5.2　簡易計算法の概略

この簡易計算法のPrinciple は著者らがすでに提案している方法〔65〕を更に拡張したものであり、その要点は次に示す通りである。

(1) 上部構造の型式をAとC，BおよびDの3つのグループに分ける。（AとCは厳密には型式が異なるが、振動体部分のみの形状はよく似ているので、同一に扱うことにした。）

(2) 上部構造を前述の電子計算機による方法と同様に振動体部分と基部甲板の部分に分けて考える。

(3) 振動体部分の高さに応じてその片持梁としての固有振動数 f_∞ を求める。

(4) 上記の f_∞ に基部甲板の回転バネによる修正を行なって固有振動数 N_C を求める。

なお、上記中で振動体部分と基部甲板部分との分け方は2.2.2(1)に示した基準により定める。

さて、振動体の片持梁としての固有振動数 f_∞ はすでに述べた電子計算機による諸計算の内、基部甲板のバネ定数を $K\rightarrow\infty$ とした時の振動数とその高さとの関係から求めた。その結果を図4.13に示す。図から明らかなように f_∞ は一般に振動体高さ h に逆比例しており、また上部構造の3つのtype によって曲線の傾向が異なっている。

次に基部甲板の回転にもとづく修正係数は固有振動数の実測値 N_E と上記の f_∞ との比から求める。図4.14は基部甲板を構成する甲板層数と N_E/f_∞ との関係を示したものであって、図からわかるようにDate はかなりばらついているが、ここでは便宜上層数に無関係に一定

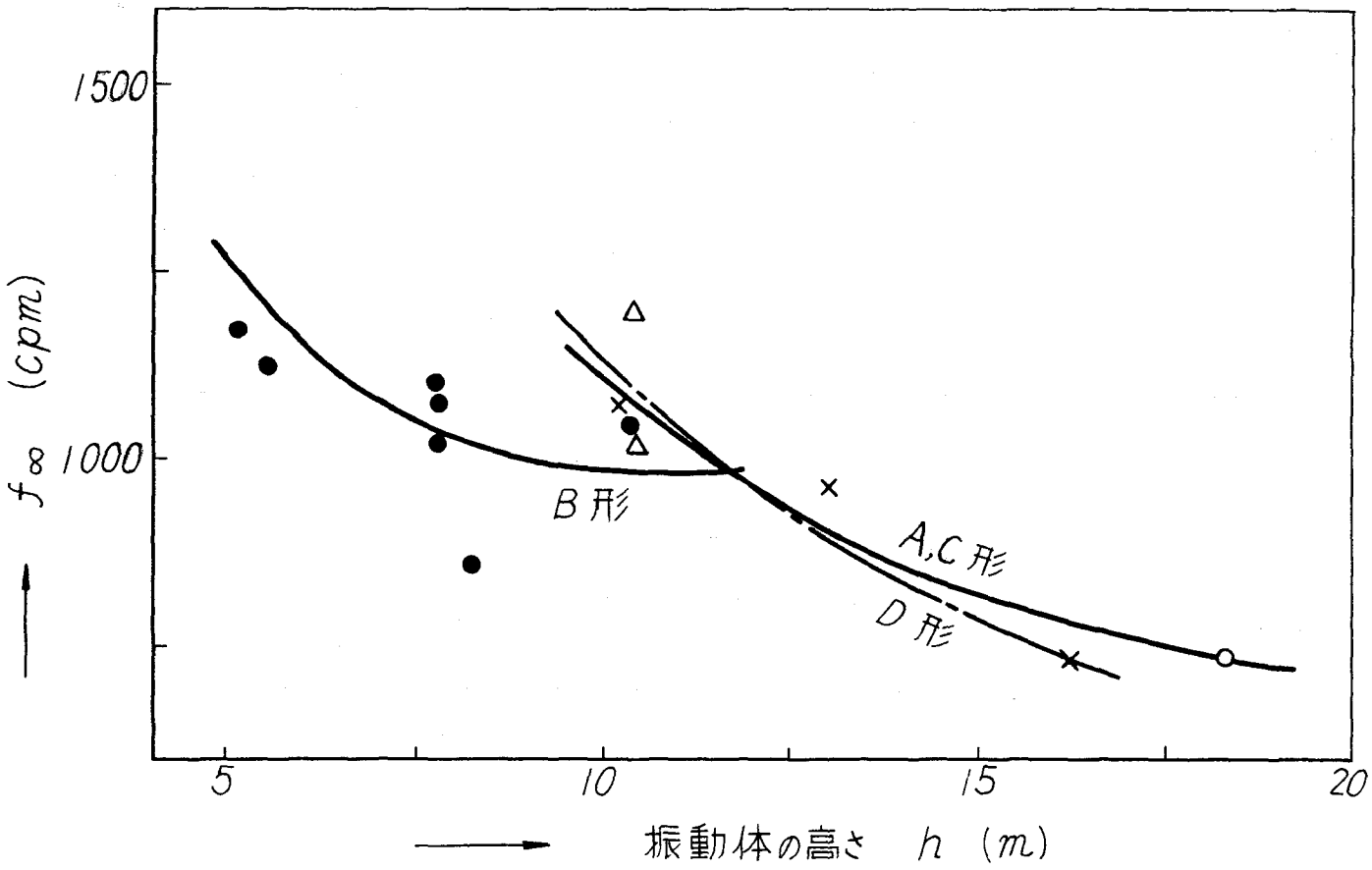


図4.13 振動体高さと f_∞

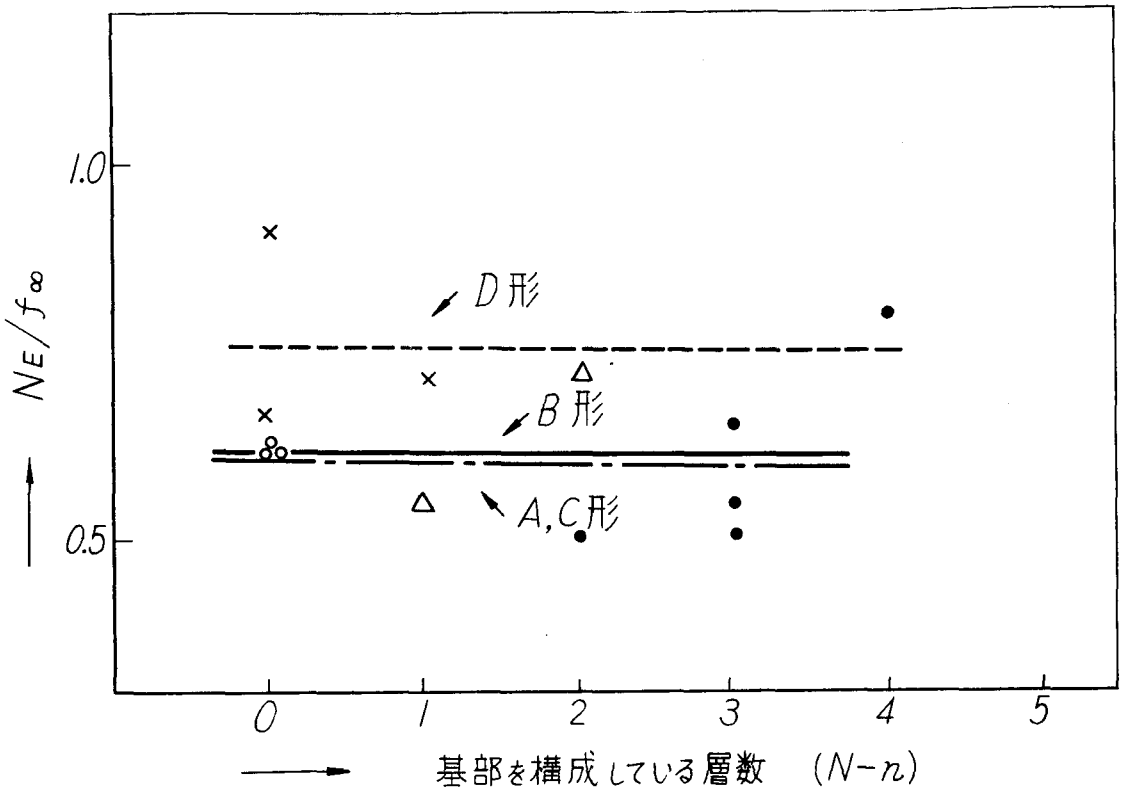


図4.14 基部甲板の修正係数

と考え、次のような値をとることにした。

A, C type $N_E/f_\infty = 0.625$

B type $N_E/f_\infty = 0.602$

D type $N_E/f_\infty = 0.751$

したがって上部構造の固有振動数は次の手順に従って計算されることとなる。

(1) 対象とする上部構造がAとC，BおよびD typeのいずれに属するかを定める。

(2) 上部構造のprofileから振動体の高さh(m)を読む。

(3) 図4.13からhに対するf_∞ (cpm) を求める。

(4) このf_∞に上部構造のtypeによって図4.14の修正係数を乗じてN_cを求める。

すなわち、

$$N_c = f_\infty \times \left(\frac{N_E}{f_\infty}\right)$$

2.5.3　簡易計算法による計算値と実験値の比較

この簡易計算法を上述した当社の建造船に適用してみた結果を示せば表4.5および図4.15のごとくである。これらの図および表から明らかなように、この簡易計算法で求めたN_cは電子計算機による計算値f_cよりもかなり精度がよく、たとえば±10％のZoneに入るものは70％、残りはすべて±20％のZoneに入っている。

この簡易計算法はもともとがこれら実船の実績をもとにした実験修正係数的なものを用いているので、上述した精度の向上も当然であると考えられる。そこで構造様式の異なった他社建造船に対してこの計算法が適用し得るか否かを検討して見た。他社建造船の実験資料はSR—94の船体分科会に発表されているもの〔17〕を対象として、その検討結果を示せば表4.6および図4.16のごとくである。これらの図および表から明らかなようにK－1、K－2、K－4およびK－5の4隻は他船に比較してかけ離れて精度が悪いが、これを除けば±10％のZoneに入るものが55％その他は大体±20％のZone内に入っている。K－1～K－5は他の船に比較して上部構造側壁の板厚が厚いので、このグループの船だけが他船と異なる理由もこの辺りにあるのではないかと考えられる。いずれにせよこの簡易計算法は当社建造船のみでなく他社建造船にもある程度適用し得ると考えられる。

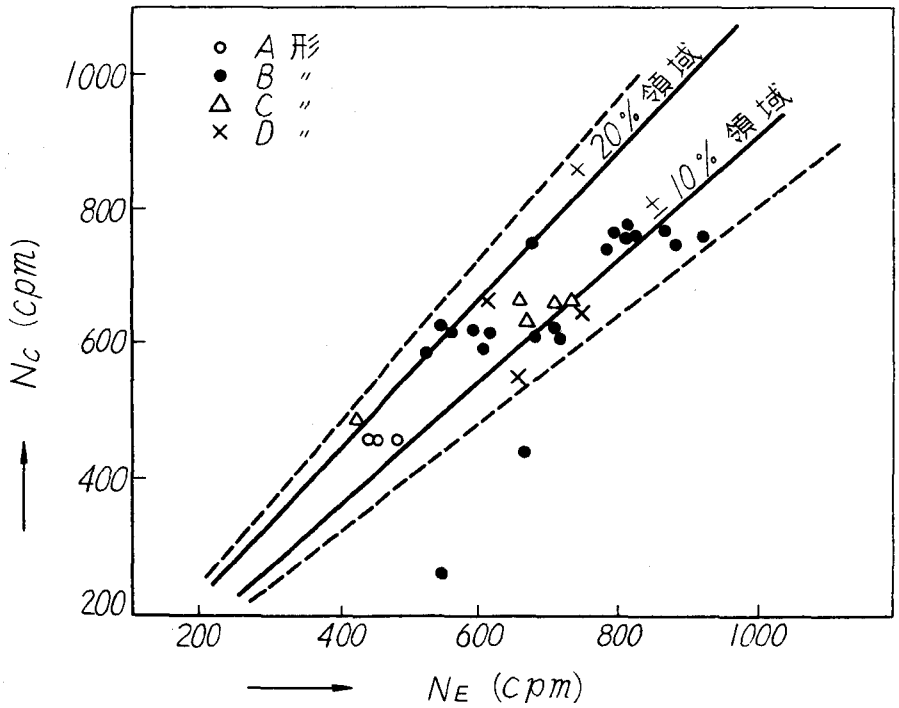


図4.15　N_E と N_C　(当社船)

表4.5　簡易計算法による計算値と実測値との比較（当社船）

船　名	N (層)	H (m)	n (層)	h (m)	N_E	N_C	N_C/N_E
A－ 1	7	18.3	7	18.3	450	455.9	1.013
A－ 2	7	18.3	7	18.3	440	455.9	1.036
A－ 3	7	18.3	7	18.3	487	455.9	0.936
B－ 1	6	15.6	3	7.8	550	6204	1.128
B－ 2	6	15.7	3	7.8	558	6204	1.112
B－ 3	6	15.6	3	7.8	595	620.4	1.043
B－ 4	6	15.6	4	10.4	525	588.5	1.121
B－ 5	5	13.75	3	8.25	712	610.2	0.857
B－ 6	6	15.6	3	7.8	710	620.4	0.874
B－ 7	7	19.25	3	8.25	684	610.2	0.892
B－ 8	6	15.95	3	7.95	618	616.7	0.998
B－ 9	6	16.44	3	10.96	610	588.0	0.964
B－10	5	13.0	2	5.2	921	754.4	0.818
B－11	5	13.0	2	5.2	815	754.4	0926
B－12	5	13.25	2	5.3	880	745.6	0847
B－13	5	13.0	2	5.2	820	754.4	0.920
B－14	6	15.75	2	5.5	826	729.1	0.883
B－15	6	16.2	2	5.4	780	737.1	0945
B－16	5	12.5	2	5.0	810	773.6	0.955
B－17	5	12.75	2	5.1	800	763.8	0.955
B－18	5	12.75	2	5.1	865	763.8	0.883
B－19	5	15.6	3	7.8	800	620.4	0.776
C－ 1	5	15.7	4	10.4	665	666	1.002
C－ 2	6	15.6	4	10.4	731	666	0.911
C－ 3	7	19.15	5	13.65	428	483.6	1.130
C－ 4	6	17.03	5	10.96	672	638.8	0.951
C－ 5	5	13.0	4	10.4	718	666	0.928
D－ 1	5	13.0	4	10.4	745	817.8	1.098
D－ 2	6	16.2	6	16.2	658	546.4	0.830
D－ 3	6	16.2	5	13.5	745	642.3	0.862
D－ 4	5	13.0	5	13.0	612	664.8	1.086

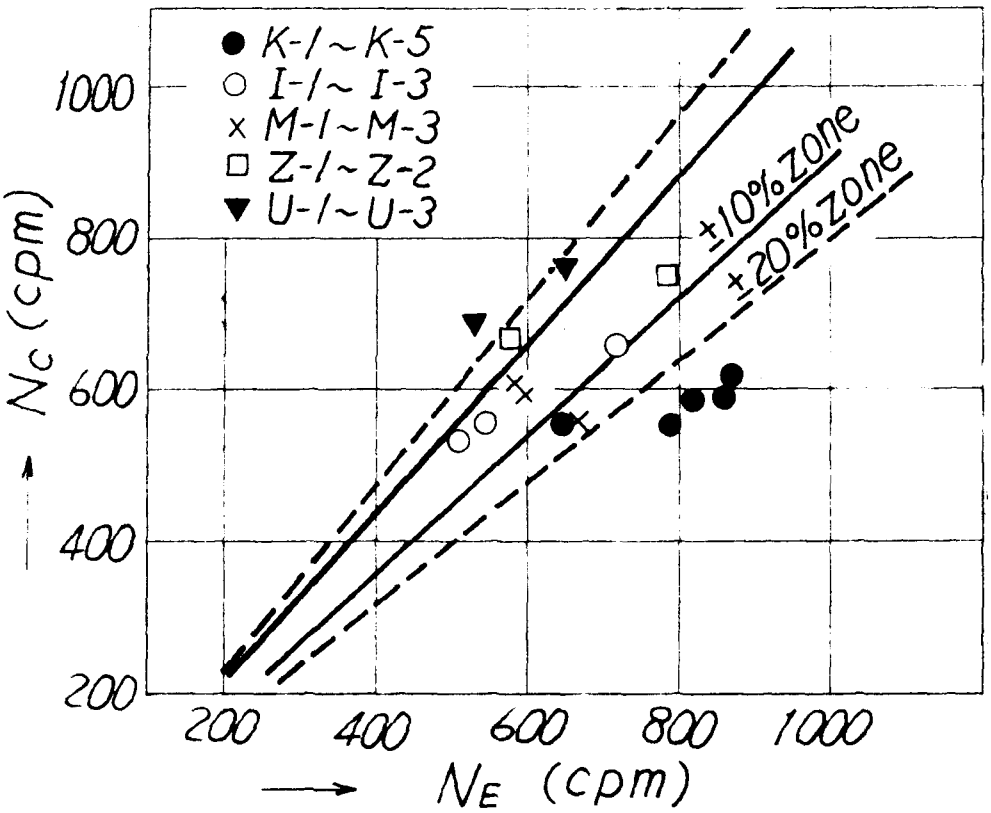


図4.16 N_E と N_C (他社船)

表4.6　簡易計算法による計算値と実測値との比較（他社船）

船　名	N (層)	H (m)	n (層)	h (m)	N_E	N_C	N_C/N_E
K－1	5	13.5	3	7.85	870	619.1	0712
K－2	5	13.4	4	10.6	820	588.2	0.717
K－4	6	16.05	5	13.25	650	554.5	0.853
M－1	5	13.6	3	8.4	585	607.4	1.039
M－2	6	14.9	4	9.75	598	591.3	0.989
U－2	6	15.65	2	5.15	652	759.1	1.164
Z－2	5	13.25	2	5.3	788	745.6	0.946
K－3	6	16.05	5	13.25	650	554.5	0.853
K－5	6	16.05	5	13.25	790	554.5	0.702
I－1	7	19.6	6	16.8	509.5	529.6	1.039
Z－1	6	15.6	5	13.0	580	664.8	1.146
U－1	5	12.5	5	12.5	530	689.0	1.300
M－3	7	18.55	6	15.9	661.6	555.4	0.839
I－2	6	15.9	6	15.9	545	555.4	1.019
I－3	5	13.25	5	13.25	720	653.3	0.907

表4.7　β と $k\ell$ の変化量

β	$(k\ell)_1$	$(k\ell)_2$	N_2/N_1
3.00	1.57　(1.00)	2.12　(1.36)	1.36
3.25	1.55　(0.99)	1.95　(1.24)	1.25
3.50	1.53　(0.98)	1.79　(1.14)	1.16
3.75	1.51　(0.97)	1.73　(1.10)	1.13
4.00	1.48　(0.94)	1.66　(1.05)	1.12
4.25	1.45　(0.92)	1.64　(1.03)	1.12
4.50	1.39　(0.89)	1.61　(1.02)	1.15
4.75	1.32　(0.84)	1.59　(1.01)	1.20
5.00	1.22　(0.78)	1.57　(1.00)	1.28

第3章　船体振動と上部構造前後振動の関連

3.1　実船実験の例

上部構造の振動はその内部には起振外力を発生する機器が存在しないので船体主構造との接続点である上部構造の基部甲板から船体振動が強制力として上部構造に伝達されるものと考えられる。すなわち、船体上下振動および縦振動は上部構造の前後振動の原因となり、船体左右振動および捩り振動は上部構造の左右振動発生の因となる。

いま、この両者の関係を示す一例としてD船*について得られた結果を図4.17に示す。本図はD船航走時の両者の振動モードの関係を示したものであるが、これからも明らかなように船体の上下たわみ振動は上部構造前後振動の一つの原因であり、両者は重要な関連を有することが推察される。

また船体縦振動と上部構造前後振動との関連を調べるための実験の一例として著者はI船の起振機実験の際図4.18に略記したように上甲板上に配置された6ケの振動計で船体後半部の前後振動を上部構造の前後振動と同時に計測した。その結果を図4.18、図4.19、図4.20に示す。図4.18は主要な振動数における各計測点のオッシログラムを示したものであり、図4.19は上部構造の航海船橋甲板と上甲板上の各点の共振曲線であり、また図4.20は上甲板前後振動の振幅分布を示したものである。これらの図によれば上部構造からかなり離れた上甲板上でも明らかに船体の前後振動が認められ、これらの共振曲線は上部構造のそれとよく一致していることおよびこの近傍では連成振動によると思われるいくつかのpeakが認められることがわかる。またこれらの各peakにおける上部構造のmode curveは図4.20に点線で示したように前の2つのpeakでは互に同位相、後の2つのpeakでは互に逆位相を示すこともわかる。

このように船体上下および縦振動は上部構造前後振動と密接な関係にあることが推察される。

3.2　船体縦振動と上部構造前後振動の関連の定性的検討

3.2.1　連成振動固有振動数および応答

いま、船体縦振動と上部構造前後振動の連成振動の定性的検討を行なうために船体を均一

---

*　供試船を表わす船の記号は第2章表4.1に示したものと同じである。

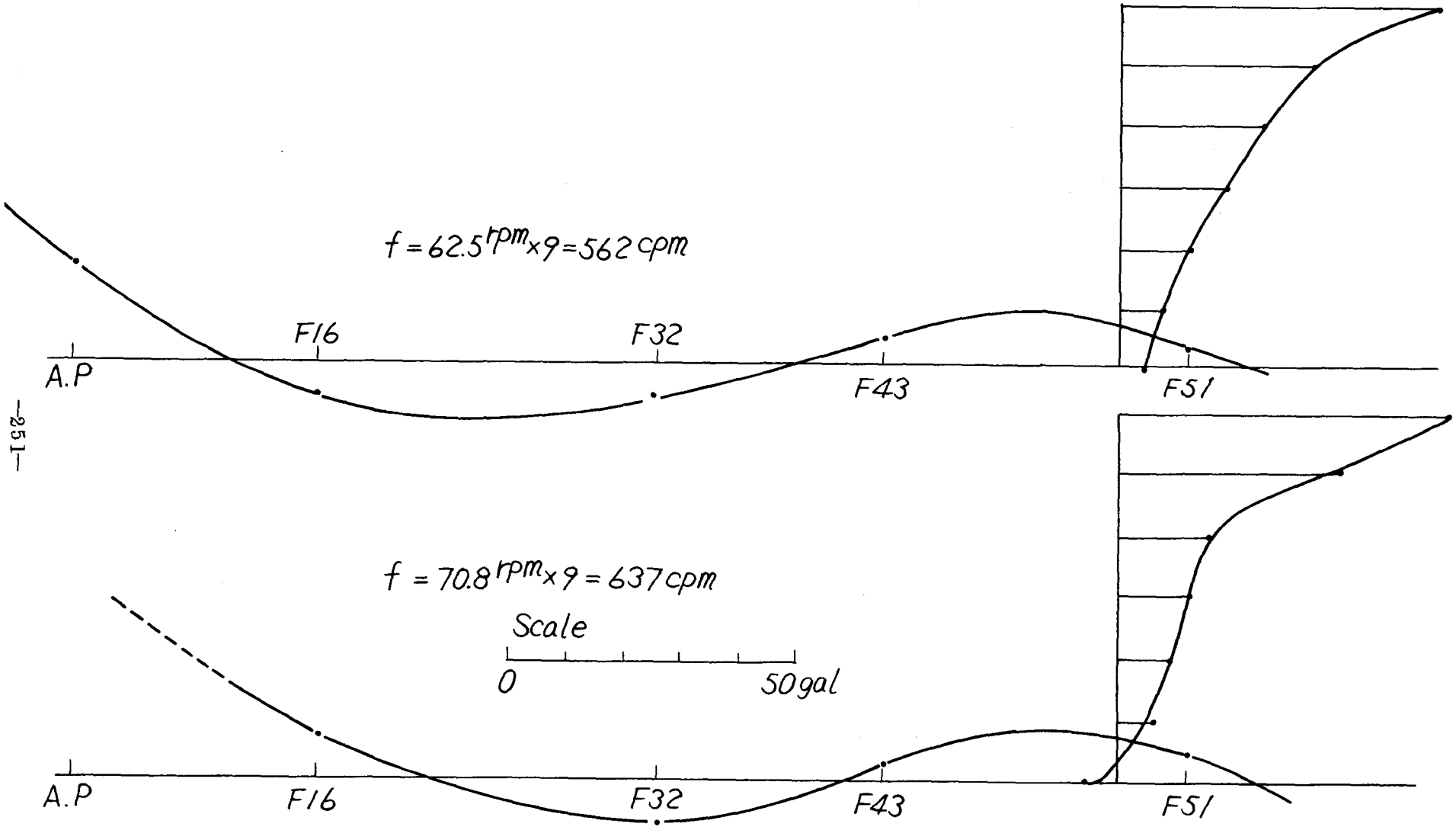


図 4.17　上部構造と船体振動との関連（D船）

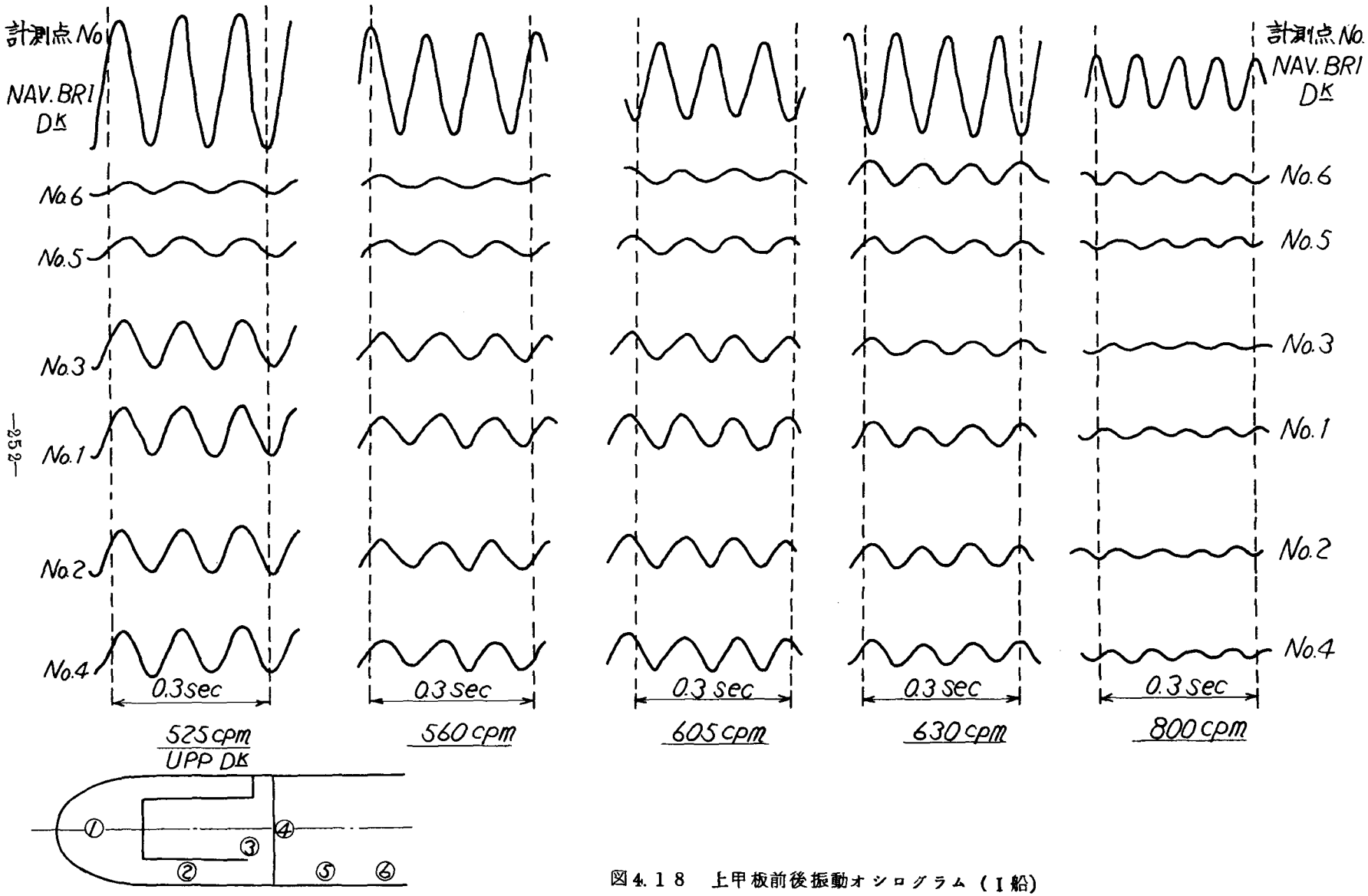


図4.18　上甲板前後振動オシログラム（I船）

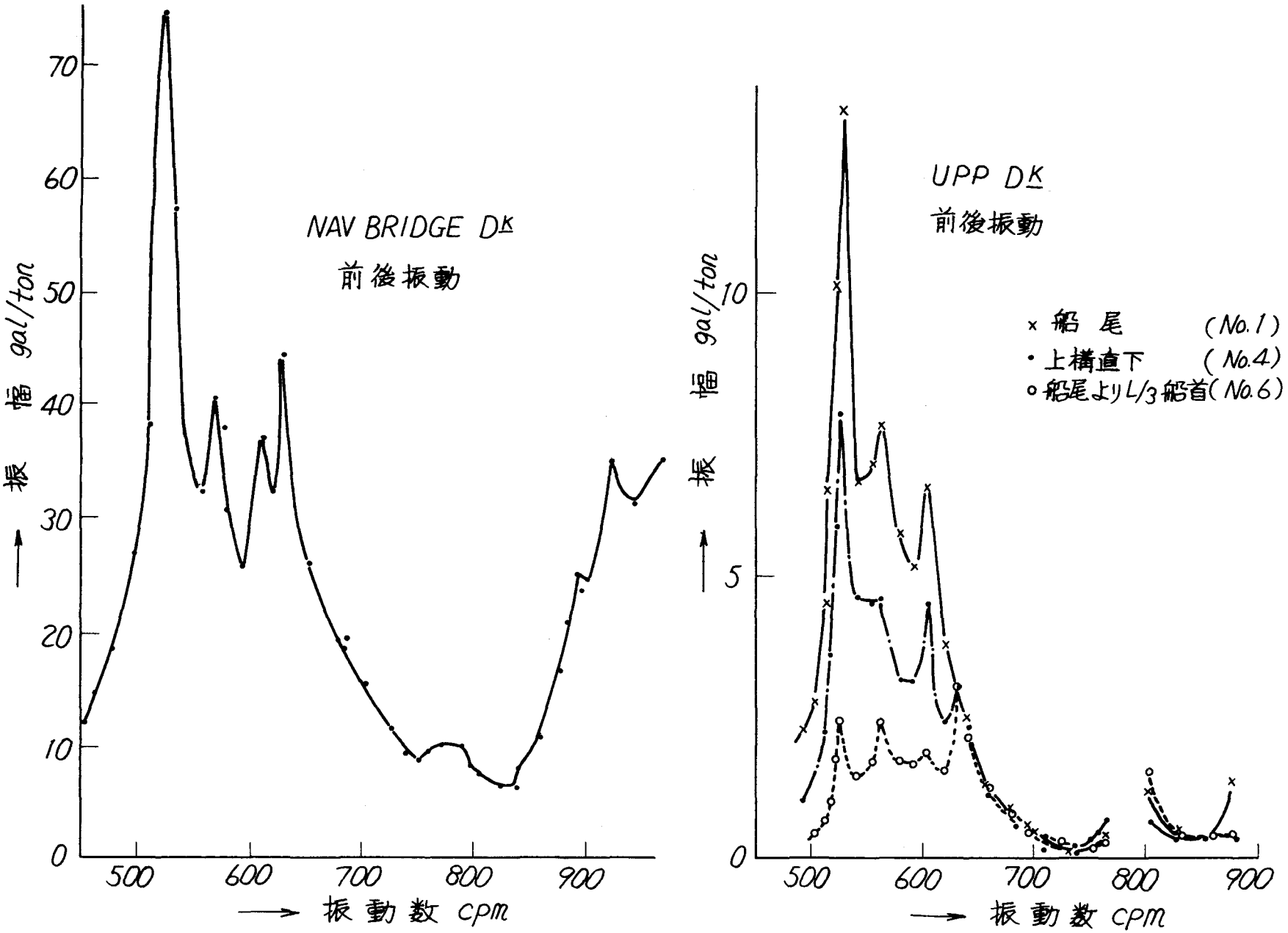

NAV BRIDGE DK
前後振動
振幅 gal/ton
振動数 cpm
UPP DK
前後振動
× 船尾 (No.1)
• 上構直下 (No.4)
○ 船尾より L/3 船首 (No.6)
振幅 gal/ton
振動数 cpm

図 4.19 共 振 曲 線

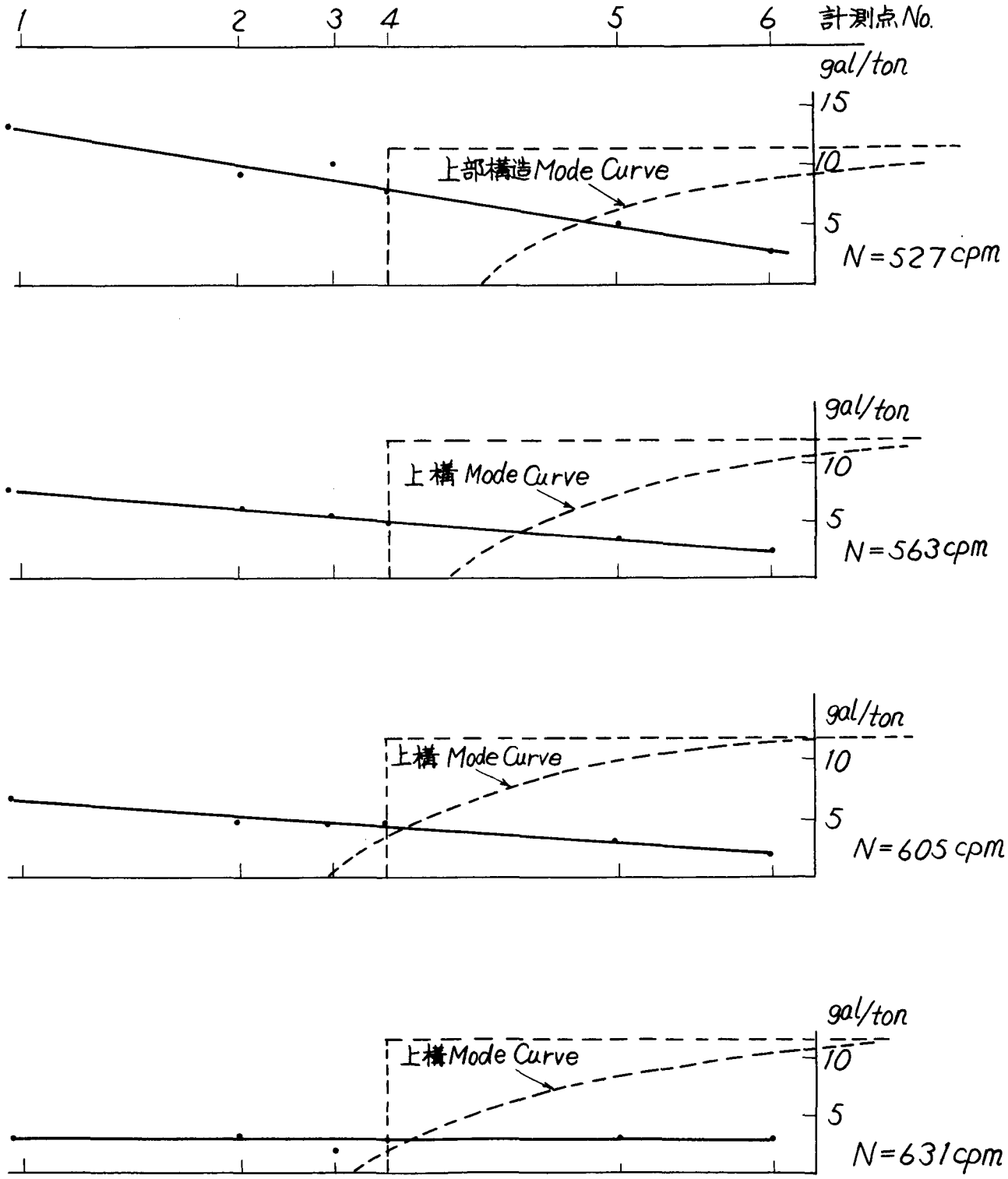


図4.20 船体縦振動の Mode

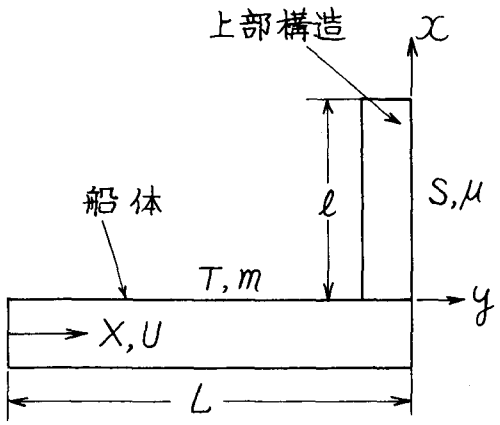


図 4.2 1　船体と上部構造の連成振動モデル

断面棒、上部構造をその一端に位置する均一剪断梁と仮定して、図4.2 1に示したような簡単なモデルについて考察する。

この振動系に対する固有値方程式は次のように求められる。

$$\tan KL = -\alpha \tan k\ell \qquad (4.8)$$

ここに、

$$K = \omega\sqrt{\frac{\triangle L}{Tg}} \quad , \quad k = \omega\sqrt{\frac{w\ell}{Sg}}$$

L：船の長さ　　ℓ：上部構造の高さ

△：排水量　　w：上部構造の全重量

T：船体の引張剛性　　S：上部構造の剪断剛性

g：重力加速度　　ω：円振動数

$$\alpha = \frac{w}{\triangle}\,\frac{KL}{k\ell} = \frac{w}{\triangle}\cdot\beta$$

また、上部構造の頂部に $F_0 e^{iwt}$ なる起振力が作用したときの船体および上部構造前後振動の振動モードは次のようになる。

$$U = \frac{\alpha\left(1-\frac{1}{\cos k\ell}\right)\frac{\cos KX}{\cos KL}}{\tan KL + \alpha\tan k\ell}\cdot Q e^{iwt} \qquad (4.9a)$$

$$y = \frac{\left\{\alpha\left(1-\frac{1}{\cos k\ell}\right)\cos k(\ell - x) + (\tan KL + \alpha\tan k\ell)\sin kx\right\}/\cos k\ell}{\tan KL + \alpha\tan k\ell}\cdot Q e^{iwt} \qquad (4.9b)$$

ここに、　$Q = F_0 / kS$

したがって上部構造の基部の振幅を y_0、頂部の振幅を y_ℓ で表わせば（4.9 b）式より次のようになる。

$$y_0 = \frac{\alpha\left(1-\frac{1}{\cos k\ell}\right)}{\tan KL + \alpha \tan k\ell} \cdot Q e^{iwt}$$

$$y_\ell = \left\{ \frac{\alpha\left(1-\frac{1}{\cos k\ell}\right)/\cos k\ell}{\tan KL + \alpha \tan k\ell} + \tan k\ell \right\} Q e^{iwt} \qquad (4.10)$$

$$\frac{y_\ell}{y_0} = \frac{1}{\cos k\ell} + \frac{\tan KL + \alpha \tan k\ell}{\alpha\left(1-\frac{1}{\cos k\ell}\right)} \cdot \tan k\ell$$

3.2.2　定性的性質

（4.8）式に諸数値を与えれば連成固有振動数を計算することができる。いま、一例として、

$T = 80 \times 10^6$ ton　,　$S = 10^6$ ton

$L = 200$ m　,　$\ell = 18$ m

$\triangle = 30{,}000$ ton　,　$w = 300$ ton

の場合について、（4.8）式の解の存在位置を図4.22に示す。図は上部構造の一次固有値の近傍を示したものであるが、これから明らかなように船体縦振動の固有振動数と上部構造の固有振動数とが接近している時にはこの近傍で（4.8）式を満足する固有値 $k\ell$（または KL）が2つあらわれる。1つはもとの値より小さく他の1つはもとの値より大きくなることがわかる。また peak における y_ℓ / y_0 の値は（4.10）式から明らかなように例へば $k\ell < \pi/2$ に生じた固有値では $y_\ell / y_0 > 0$，$k\ell > \pi/2$ に生じた固有値では $y_\ell / y_0 < 0$ となることがわかる。したがって図4.18、図4.19、図4.20に示した実船実験の資料で400～600 cpmの近傍に peak が2つ以上あらわれかつ基部と頂部とで位相が逆転する現象の説明は上述の理由によるものであろうと思われる。

また（4.10）式から明らかなように共振点での y_ℓ / y_0 の値は $1/\cos k\ell$ に等しく、これは $k\ell$ が $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ に近い程大きな値を示す。すなわち新たに生じた固有値 $k\ell$ がもとの固有値（すなわち $(2n+1)\frac{\pi}{2}$）に近い程振幅は大きいと考えられる。図4.19に表われた peak のうち525 cpmの peak が一番大きいのは525 cpmが船体の縦振動を考えない時の

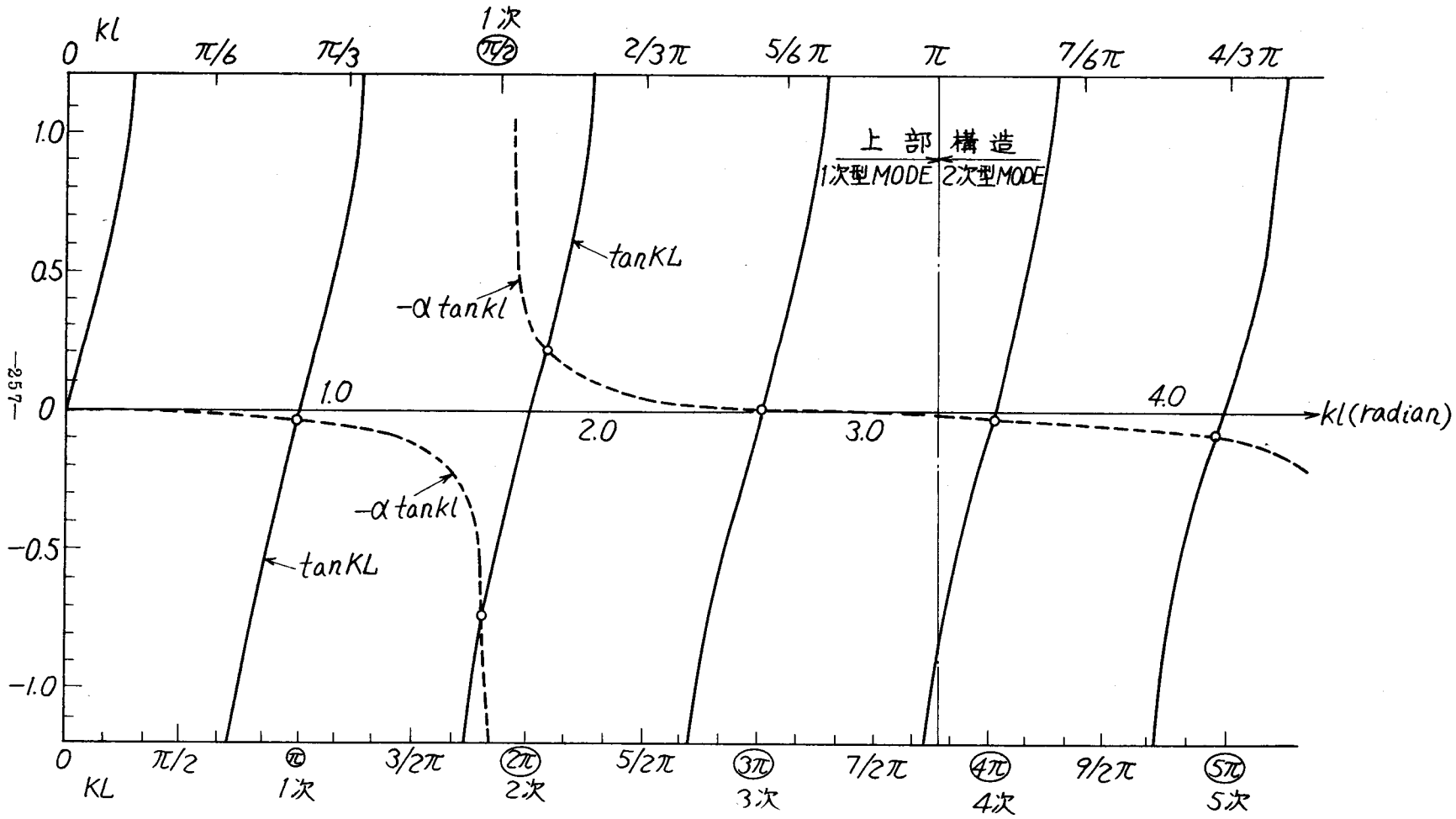


図4.2 2 固 有 値 方 程 式 の 解

上部構造の固有振動数にもっとも近いからであろうと考えられる。

上述の考察により、船体縦振動との連成を考えれば上部構造の固有振動数がその連成効果により変化することがわかったが次にこの変化量について考えて見る。（4.8）式の固有値は $w/\triangle$ および β $\left(=KL/k\ell=\sqrt{\frac{S}{T}\frac{\triangle}{w}\frac{L}{\ell}}\right)$ によって決まるがこの値はだいたい巨大船で次の程度のものと推定される。

$$\frac{w}{\triangle}\fallingdotseq 001 \quad , \quad \beta=3\sim5$$

この値を使用して固有値 $k\ell$ の変化量を求めた結果、図4.23および表4.7が得られた。実船の β は4.0近傍にあると考えられるが表4.7によれば $\beta=4$ の近傍ではもとの固有値からの変化率が±5％前後であり、またその時の2つのpeakの比 N_2/N_1 は約1.12となることがわかる。

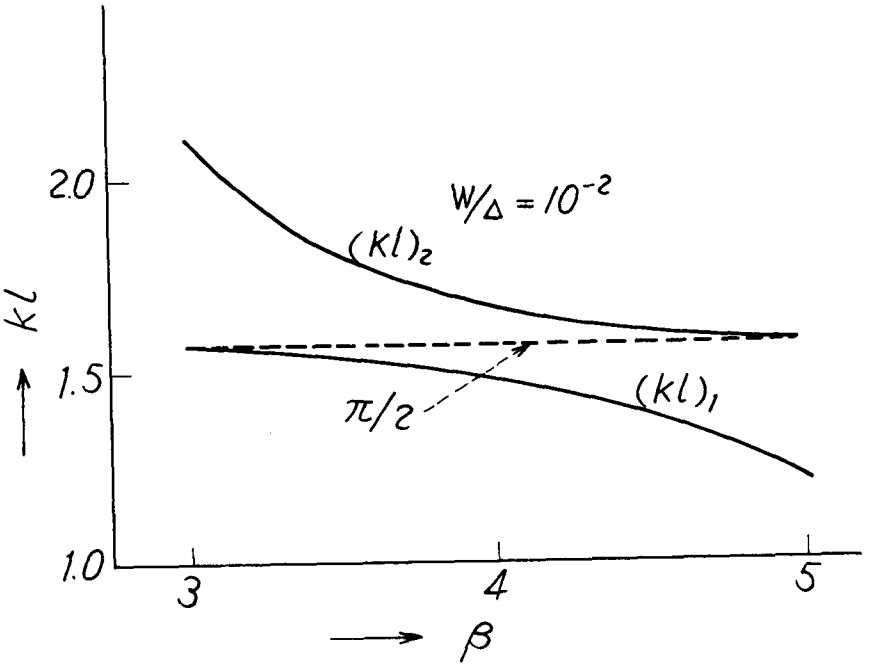


図4.23　β と $k\ell$ の変化量

表 4.7　β と $k\ell$ の変化量

β	$(k\ell)_1$	$(k\ell)_2$	N_2/N_1
3.00	1.57　(1.00)	2.12　(1.36)	1.36
3.25	1.55　(0.99)	1.95　(1.24)	1.25
3.50	1.53　(0.98)	1.79　(1.14)	1.16
3.75	1.51　(0.97)	1.73　(1.10)	1.13
4.00	1.48　(0.94)	1.66　(1.05)	1.12
4.25	1.45　(0.92)	1.64　(1.03)	1.12
4.50	1.39　(0.89)	1.61　(1.02)	1.15
4.75	1.32　(0.84)	1.59　(1.01)	1.20
5.00	1.22　(0.78)	1.57　(1.00)	1.28

3.2.3　実船実験との比較

船体縦振動と上部構造前後振動の関連を実験的に検証するため著者は数隻の船に対して系統的な実船実験を実施した。〔66〕本節では一例としてその関係を示すと共に前節にのべた定性的検討にもとづき、両者の振動モード曲線の比較検討を行なう。〔17〕

実験供試船はL×B×D＝164m59×23m57×12m73の主寸法をもつAft BridgeのDWT　21,900^{LT} Oil tankerであり、Light Conditionの状態において2 ton Exciterを上部構造の頂部に設置し前後方向に起振を行なった。実験結果を図424に示す。計測はExciterによって発生する力の方向を同時計測して応答加速度の位相の関係をも求めた。計測結果によれば上部構造においてpeakは515cpm、544cpm、575cpmの3つが得られており、船尾における縦振動の計測結果にも同様のpeakが得られている。一方上部構造頂部と船体上甲板後部における位相関係は515cpmでは同相、544cpmでは90°おくれ位相575cpmでは反相となっている。上部構造および船体のModeは515cpmでは上部構造全体が同相振動する1次型を示すのに対して575cpmではBridge topとUpper Deckでは反相になり中間に1つのNodeを有する2次型を示している。船体の縦振動はいずれも1つのNodeを有する1節振動型が現われている。

いま、本船のように実験より求められたpeakが同程度の大きさのものが2つあり、どちらが船体縦振動によるものか、上部構造前後振動によるものか見分けるのが困難な場合がある。ここではこの2つのpeakを入れかえた場合、両者の共振曲線、Mode Curveにどのような影響が現われるかを調べて見る。

本船の場合、検討の対象となる2つのpeakは次のものである。

515 cpm , 575 cpm

これらはいずれも船体縦振動と上部構造前後振動とが連成して現われたpeakであるが、以下の検討はこの連成が共振曲線および共振型曲線におよぼす影響の定性的な検討であるので、実情とは多少異なるがまず連成しない場合の固有振動数として上記の2つの固有振動数を仮定し、これから部材寸法などを逆に定め、これを用いて（4.8）式より連成固有振動数などを求めることにした。

まず連成なしの固有振動数を対象とする2つのpeakの低い方の値が上部構造前後振動固有振動数、高い方の値が船体縦振動1節固有振動数として次のように仮定する。

$N_{S_1} = 515$ cpm

$N_{L_1} = 575$ cpm

この値を満足するように均一梁としての梁の諸数値を求めれば次のようになる。

$L = 165\,m$　　$\ell = 15\,m$

$T = 6.1852 \times 10^7$ ton　　$S = 2.7064 \times 10^5$ ton

$\triangle = 10{,}000$ ton　　$w = 150$ ton

これらの数値を使用して連成固有振動数は（4.8）式を解くことによって次のように計算される。

$\overline{N_{S_1}} = 496$ cpm

$\overline{N_{L_1}} = 594$ cpm

したがって連成効果により、その固有振動数は4％程度影響されることがわかる。また船尾および上部構造頂部の共振曲線および振動モードは（3.10）式より図4.25に示したように求められる。図中各peakにおけるMode曲線は船首における値を1とした場合について示したものである。

次にこの2つのpeakを逆にした場合について同様に計算する。数値は次に示す通りである。

$N_{L_1} = 515$ cpm

$N_{S_1} = 575$ cpm

$L = 165\,m$　　$\ell = 15\,m$

$T = 6.1852 \times 10^7$ ton　　$S = 2.7064 \times 10^5$ ton

$\triangle = 12466$ ton　　$w = 120$ ton

この場合、連成固有振動数は次の値となる。

$$\overline{N_{L1}} = 498\ \mathrm{cpm}$$

$$\overline{N_{S1}} = 590\ \mathrm{cpm}$$

前と同様に共振曲線およびMode Curveは図4.26に示したようになる。

この2つの場合を比較すれば上部構造に現われる振動の位相関係の傾向はほぼ同じである。ただ2つのpeakの間で振幅が0になる点が存在するがその位置がいずれの場合も船体縦振動のpeakの位置に近づいている。いいかえれば、上部構造の共振曲線で上部構造前後振動のpeakよりも縦振動によるpeakの方が鋭いpeakができることになる。ただしこの計算では減衰は無視しているのでpeakの高さについては比較できない。船体の方の共振曲線はどちらの場合も全く同じ位相関係および同じ程度の大きさであるのでこれより見分けるのは困難である。次にMode Curveはこの2つのpeakに対してどちらの場合も最初に現われるpeakが上部構造は1次型、後のpeakが2次型を示している。しかし明らかに船体の振幅に対して上部構造固有振動数に対応するものの方が上部構造の振動が大きく現われることがわかる。これは前述したy_ℓ/y_0が上部構造固有振動数の場合が大きくなるのと同じことである。先に図4.24に示した実験とこれまで述べた定性的傾向とを比較して見ると、上部構造において計測された2つのpeak以下または以上の位相関係は同じであるが、2つのpeak間では完全な位相の逆転は見られない。ただ最初のpeakをすぎて次の小さなpeakに行くまでの範囲では90°ずれの位相となっている。

船体の位相関係も700cpm以上で乱れるまでは計算と全く同じ傾向を示している。実験のMode Curveは明らかに575cpmのpeakの時の方が全体的に上部構造の相対振幅（y_ℓ/y_0）は大きく、またBridgeで計測した共振曲線のpeakは515cpmの方が鋭いpeakとなっていることから判断して575cpmが上部構造前後振動にもとづく連成固有振動数のpeakであると推定される。しかしこの計算は減衰等を無視した簡単なモデルによる定性的なものであるので、1つの見安を与えるだけのもので一概には断定できない。実験的にこれを確かめるためにはBallast Conditionを変えた実験をもう1度行なえばよく、その時、船体縦振動にもとづく連成固有振動数は船の排水量が変化するため大きく変わるが、上部構造にもとづく固有振動数は前述の計算で数%の影響を受けるだけにとどまるものと思われる。

防振対策上の見地から見て本船の場合のように515cpmが例へblade frequencyに完全に一致していたとしても、船体縦振動にもとづくものであるとわかれば、上部構造を補強することなく、船のBallast Conditionを変えることによって容易に共振状態を脱する事が出

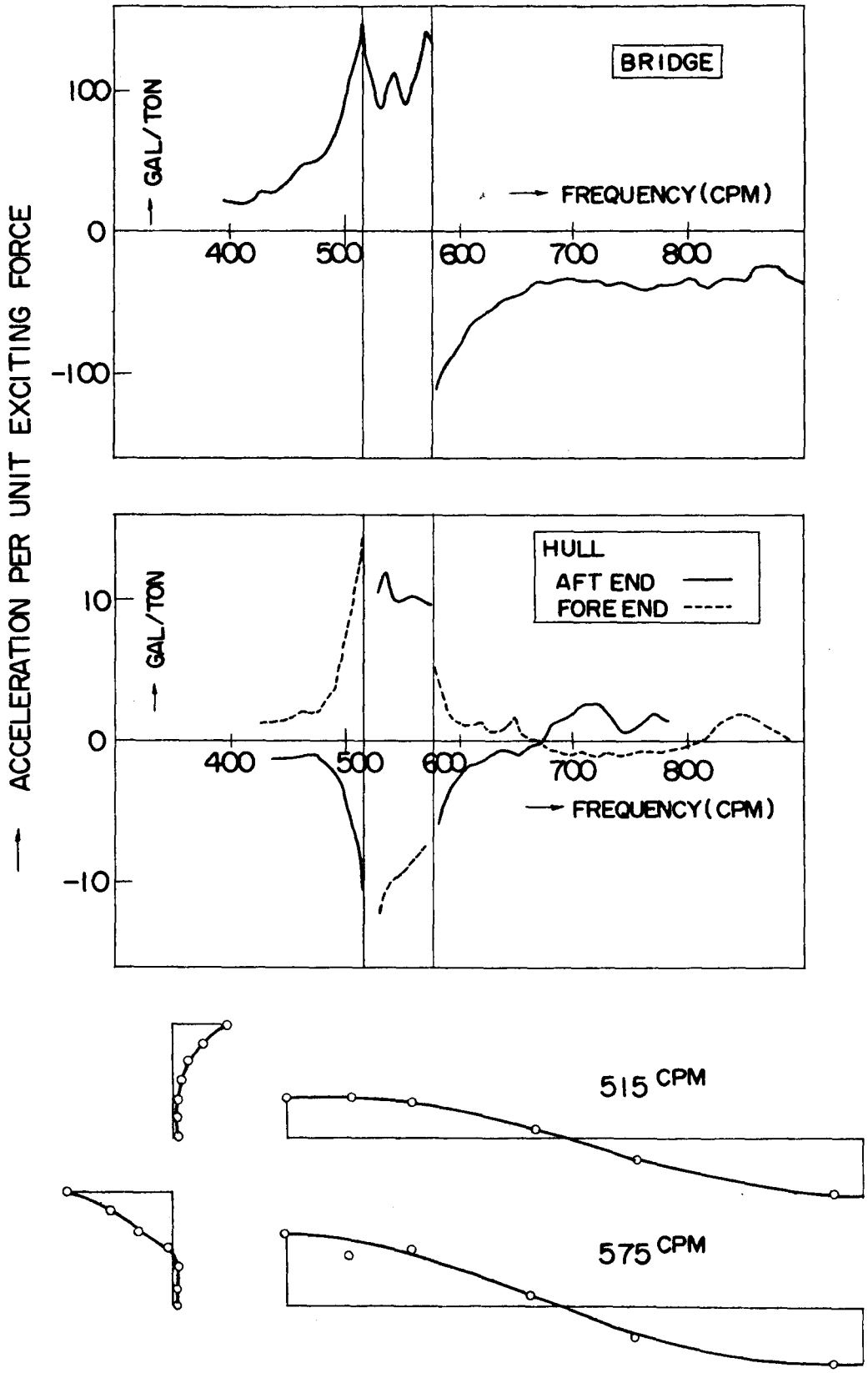


図 4.2 4　実験より得られた共振曲線および振動モード

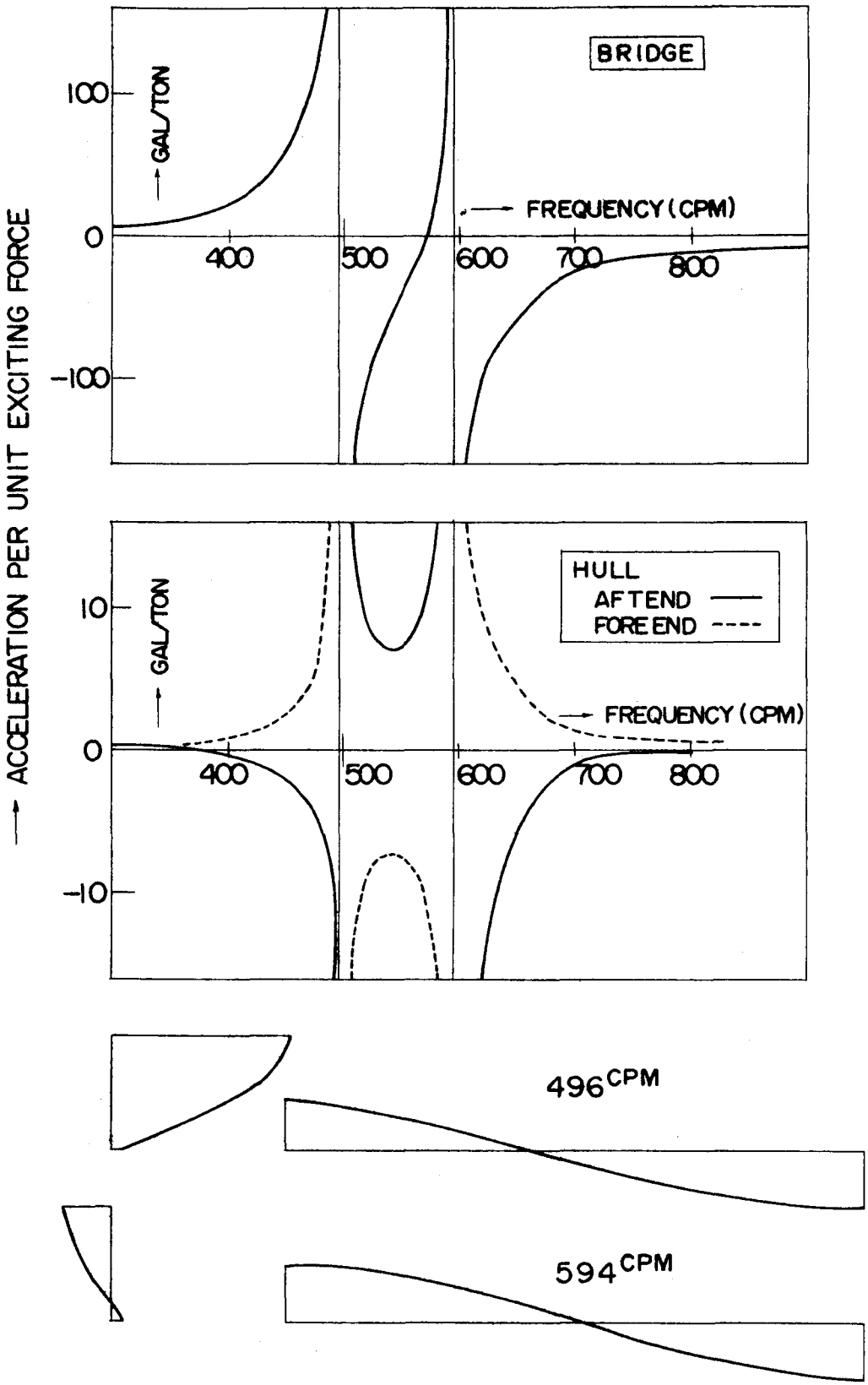


図 4.2 5　計算結果（N_{S_1}＝515 cpm，N_{L_1}＝575 cpmの場合）

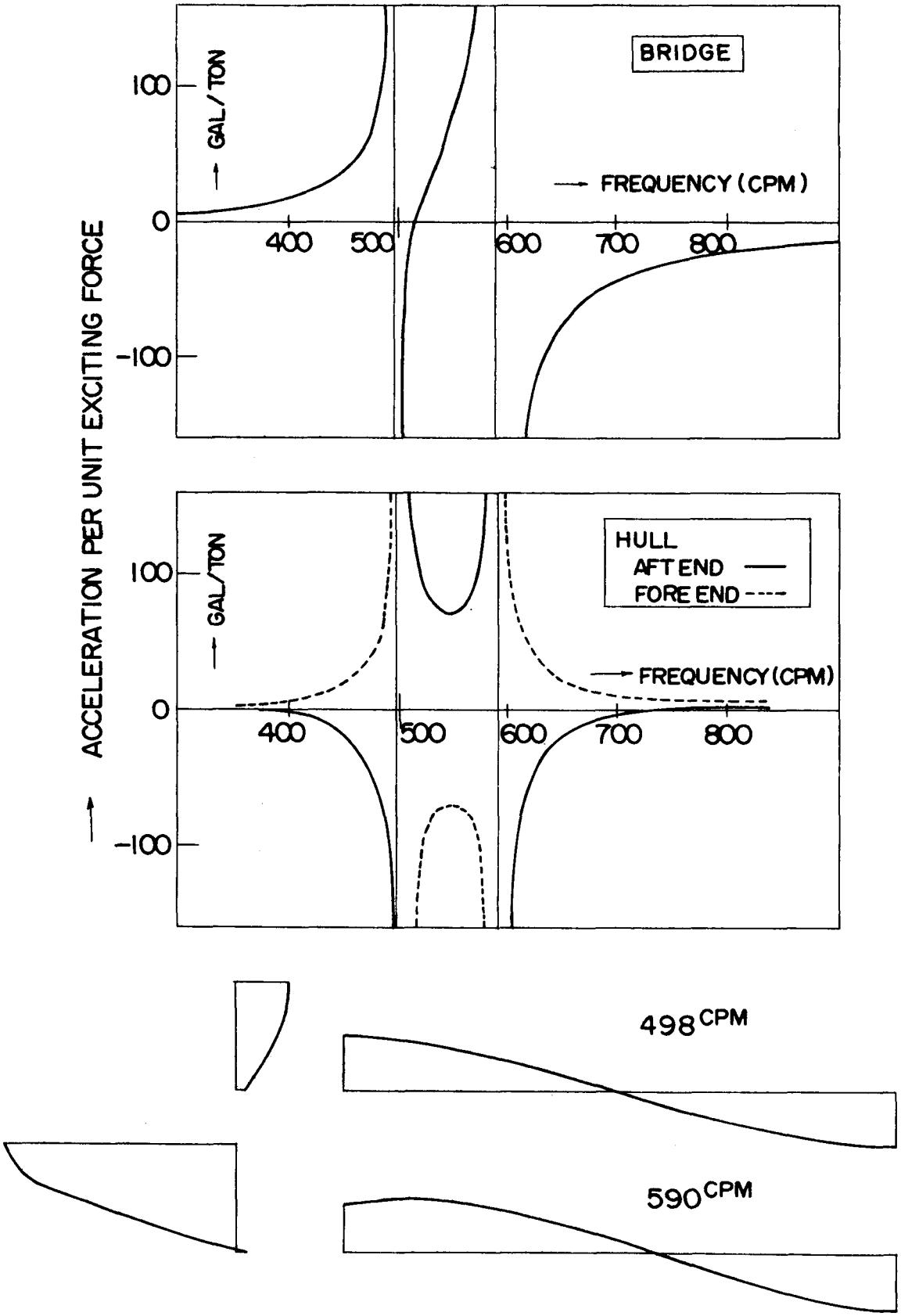


図4.26　計算結果（N_{L_1}＝515cpm，N_{S_1}＝575cpmの場合）

来るわけである。

3.3　船体上下振動と上部構造前後振動の関連の定性的検討

船体縦振動との連成振動の場合と同様に船体上下振動との連成振動を簡単なmodelについて定性的検討を行なう。

この場合上部構造はその基部において船体上下振動の回転による強制変位を受けるのでここでは実際とは状況が多少異なるが、上部構造および船体はいずれも曲げ振動を行なうものとして取り扱う。

いま、図4.27に示したように座標をとる事にすればこの振動系の固有値方程式は次式となる。

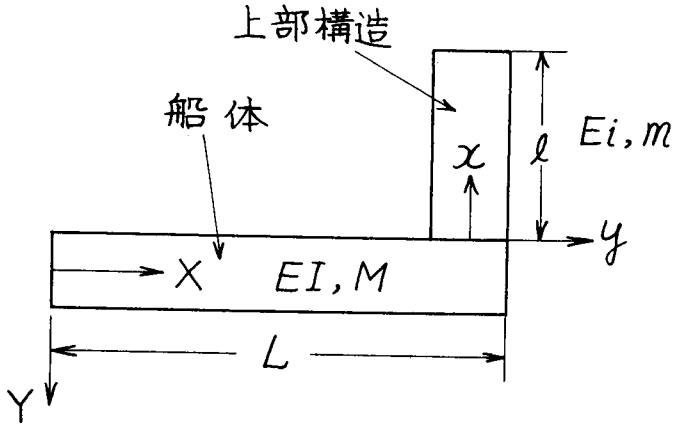


図4.27　連成振動のmodel化（船体上下振動）

$$\frac{1}{\alpha \cdot KL}\ \frac{\cosh KL\cos KL - 1}{(\sinh KL\cos KL + \cosh KL\sin KL)}$$

$$= \frac{k\ell\ (\sinh k\ell + \sin k\ell)}{1 + \cosh k\ell \cos k\ell} \qquad (4.11)$$

ここに、　$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell}{L}\sqrt{\frac{i}{I}\frac{m}{M}}$

$$K^4 = \frac{M\omega^2}{EI}\ ,\qquad k^4 = \frac{m\omega^2}{Ei}$$

L：船の長さ　　，　ℓ：上部構造の高さ

M：船体単位長さ当りの質量

m：上部構造単位長さ当りの質量

EI，Ei：船体および上部構造の曲げ剛性

いま、定性的な傾向を調べるため次の数値を採用する。

$L = 200\,m$　　$\ell = 15\,m$

$EI = 40 \times 10^8$ ton-m²　　$Ei = 5 \times 10^7$ ton-m²

$Mg = 400$ ton/m　　$mg = 20$ ton/m

この時連成なしの均一梁としての船体上下固有振動数は次のようになる。

$N_{V2} = 53$ cpm

$N_{V6} = 713$ cpm

また上部構造の固有振動数は次の値となる。

$N_S = 745$ cpm

連成固有振動数の解の存在を示す曲線は（4.11）式の図式解法より図4.28のようになる。図4.28より明らかなようにこの場合、上部構造および船体6節固有振動数は連成のために次のように変化する。

$\overline{N_{V6}} = 670$ cpm

$\overline{N_{S1}} = 752$ cpm

したがって連成効果より上部構造の固有値は4～5％程度の影響を受ける事がわかる。この図から明らかなように一般に船体振動の何節かの固有振動数が上部構造の固有振動数に一致した時一番大きな影響を受ける。また船体の固有振動数の数が多いため近いもののみ比較的大きな影響を受けるが他のものは殆んど影響を受けないと考えてよい。この影響の程度は船体の縦振動との連成効果とほぼ同じ order であると考えてもよいものと思われる。

3.4　船体振動と上部構造前後振動の連成固有振動数の計算法

3.4.1　連成振動モデル

本節では電子計算機を用いて正確な船体縦振動および船体上下振動と上部構造前後振動との連成固有振動数の計算法について述べる。振動系は図4.29に示したように船体主構造はM個の stepped beamからなり、P番目と（P＋1）番目梁の境界位置にN層の上部構造

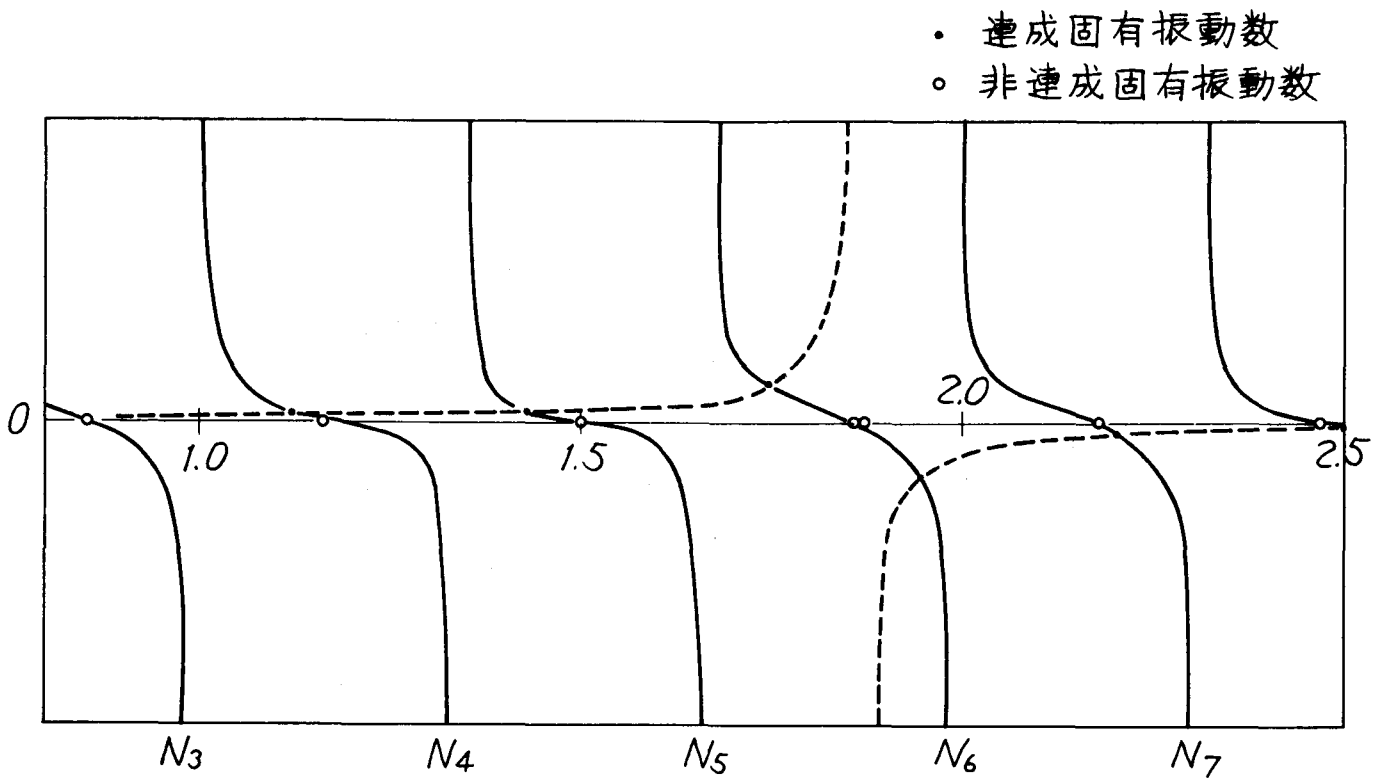


図4.28 固有値方程式の解

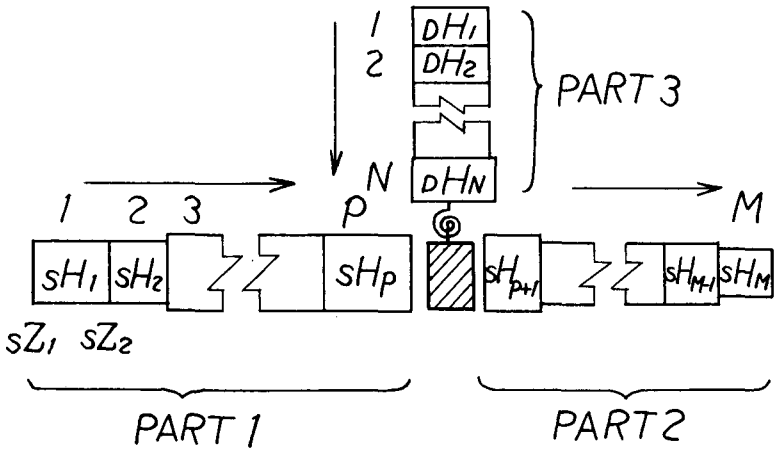


図4.29 船体と上部構造との連成振動のmodel

が存在するものとする。上部構造はその甲板位置に質量が集中するLumped massとして取り扱い、船体との結合部において回転バネ支持されているものとする。本節で使用する記号として船体主構造部を表わすものに添字S、上部構造を表わすものに添字Dをつけることとする。

3.4.2　船体縦振動と上部構造前後振動の連成固有振動数

Transfer Matrix Methodを使用した計算法で取り扱う。

船体縦振動のtransfer matrixは次のように求められる。

$$
{}_{S}\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \cos k_i \ell_i & \sin k_i \ell_i / k_i A_i E \\ -k_i A_i E \sin k_i \ell_i & \cos k_i \ell_i \end{bmatrix} \qquad (4.12)
$$

$$
(i = 1, 2, 3, \cdots, M)
$$

ここに、　$k_i = \omega \sqrt{\dfrac{\mu_i}{A_i E}}$

ℓ_i, μ_i, A_i：船体主構造のi番目梁の長さ、単位長さ当りの質量および断面積

一方、上部構造のi層目の甲板におけるpoint transfer matrixとiと$(i+1)$番目の甲板間のfield transfer matrixを組合せたものをi層目のtransfer matrixと考えれば次のように求められる。

$$
{}_{D}\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} 1-w(\ell_i a - b\ell_i^3) & \ell_i & -3b\ell_i^2 & (\ell_i a - b\ell_i^3) \\ 3bw\ell_i^2 & 1 & -6b\ell_i & -3b\ell_i^2 \\ -w\ell_i & 0 & 1 & \ell_i \\ -w & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.13)
$$

$$
(i = 1, 2, 3, \cdots, N)
$$

ここに、　$b = 1/6EI_i$

$a = 1/k' A_i G$

$w = M_i \omega^2$

$M_i, k' A_i G, EI_i$ ：i番目梁の質量、剪断剛性、および曲げ剛性

これらのtransfer matrixと境界点におけるstate vectorとの関係は次のようになる。

$$
{}_{S}\mathbf{Z}_i^R = {}_{S}\mathbf{H}_i \cdot {}_{S}\mathbf{Z}_i^L
$$

$$
(i = 1, 2, 3, \cdots, M) \qquad (4.14)
$$

$$
{}_{D}\mathbf{Z}_i^R = {}_{D}\mathbf{H}_i \cdot {}_{D}\mathbf{Z}_i^L
$$

$$
(i = 1, 2, 3, \cdots, N)
$$

一方、図4.29に示したような3つの部分に対して次の連続条件が成立する。

$$
\begin{aligned}
{}_{S}Z^{L}_{i+1} &= {}_{S}Z^{R}_{i} \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,P-1) \\
{}_{S}Z^{L}_{i+1} &= {}_{S}Z^{R}_{i} \qquad (i=P+1,P+2,\cdots,M-1) \\
{}_{D}Z^{L}_{i+1} &= {}_{D}Z^{R}_{i} \qquad (i=1,2,3,\cdots\cdots,N-1)
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

(4.14)式および(4.15)式よりこれら3つの部分に対して中間のstate vectorを消去すれば次の関係が求められる。

part 1に対して、 ${}_{S}Z^{L}_{P} = {}_{S}H_{A}\cdot {}_{S}Z^{R}_{1}$ (4.16)

part 2に対して、 ${}_{S}Z^{L}_{M} = {}_{S}H_{F}\cdot {}_{S}Z^{R}_{P+1}$

part 3に対して、 ${}_{D}Z^{L}_{N} = {}_{D}H\cdot {}_{D}Z^{R}_{1}$

ここに、
$$
\begin{aligned}
{}_{S}H_{A} &= {}_{S}H_{P}\cdot {}_{S}H_{P-1}\cdot\cdots\cdots {}_{S}H_{1} \\
{}_{S}H_{F} &= {}_{S}H_{M}\cdot {}_{S}H_{M-1}\cdot\cdots\cdots {}_{S}H_{P+1} \\
{}_{D}H &= {}_{D}H_{N}\cdot {}_{D}H_{N-1}\cdot\cdots\cdots {}_{D}H_{1}
\end{aligned}
$$

いまP点における変位および力の平衡条件は図4.30より次のように求められる。

$$
\begin{aligned}
y^{L}_{N} &= u^{L}_{P} = u^{R}_{P+1} \\
Q^{L}_{N} + T^{R}_{P+1} &= T^{L}_{P}
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

ここに、 ${}_{S}Z_{i} = \{ u_{i}, T_{i} \}$

${}_{D}Z_{i} = \{ y_{i}, \theta_{i}, M_{i}, Q_{i} \}$

また、上部構造は基部において回転バネ支持されているので次式が成立する。

$$M^{L}_{N} = \beta \cdot \theta^{L}_{N} \tag{4.18}$$

ここに、 β ：基部における回転バネ定数

上部構造頂部におけるstate vectorは境界条件を考慮すれば次のようになる。

$${}_{D}Z_{1} = \{ y_{1}, \theta_{1}, 0, 0 \} \tag{4.19}$$

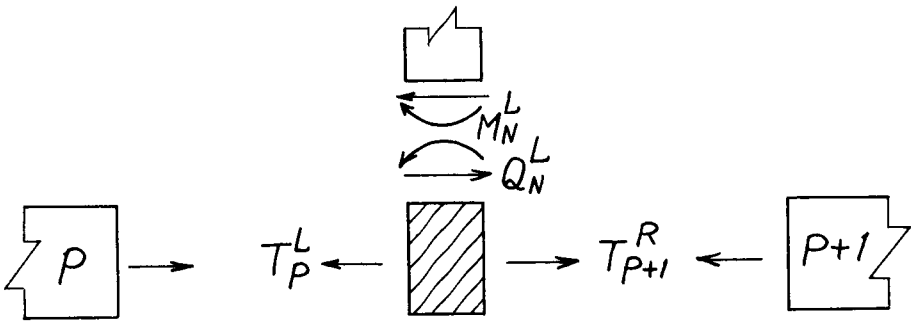


図4.30　結合部における力の平衡（船体縦振動との連成）

（4.16）式、（4.17）式、（4.18）式および（4.19）式より次の関係が求まる。

$$ {}_S\mathbf{Z}_{P+1}^R = \mathbf{P}_L \cdot {}_S\mathbf{Z}_P^L \tag{4.20} $$

ここに、 $\mathbf{P}_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -C & 1 \end{bmatrix}$

$$ C = \frac{\alpha\, h_{41} + h_{42}}{\alpha\, h_{11} + h_{12}} $$

$$ \alpha = \frac{\beta\, h_{22} - h_{32}}{h_{31} - \beta\, h_{21}} $$

$$ {}_D\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix} $$

（4.16）式および（4.20）式より系全体のtransfer matrixは次のように求められる。

$$ \begin{aligned} {}_S\mathbf{Z}_M^L &= {}_S\mathbf{H}_F \cdot \mathbf{P}_L \cdot {}_S\mathbf{H}_A \cdot {}_S\mathbf{Z}_1^R \\ &\equiv \mathbf{H}_L \cdot {}_S\mathbf{Z}_1^R \end{aligned} \tag{4.21} $$

船体主構造の両端におけるstate vectorは境界条件を考慮することにより次のごとくになる。

$$ {}_{S}Z_{M}^{L} = \{ u_{M}, 0 \} $$

$$ {}_{S}Z_{1}^{R} = \{ u_{1}, 0 \} $$

これを（4.2 1）式に代入すれば固有値方程式として次式が得られる。

$$ [\,0\,,\,1\,] \cdot H_{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = H_{12} = 0 \qquad (4.2\ 2) $$

3.4.3　船体上下振動と上部構造前後振動の連成固有振動数

船体上下振動のtransfer matrixは第1編第2章で述べたように求められ、前節と同様な手順により（4.1 6）式に相当する次式が成立する。

part 1において　$ {}_{S}Z_{P}^{L} = {}_{S}H_{A} \cdot {}_{S}Z_{1}^{R} $

part 2において　$ {}_{S}Z_{M}^{L} = {}_{S}H_{F} \cdot {}_{S}Z_{P+1}^{R} $　(4.2 3)

part 3において　$ {}_{D}Z_{N}^{L} = {}_{D}H \cdot {}_{D}Z_{1}^{R} $

ただし、この場合、state vectorおよびtransfer matrixはすべて4次のvectorおよび（4×4）matrixとなる。

いま、P点における変位および力の平衡は図4.3 1に示したように次のように求められる。

$$ {}_{S}y_{P+1}^{R} = {}_{S}y_{P}^{L} \quad , \quad {}_{D}y_{N}^{L} = 0 $$

$$ {}_{S}\theta_{P+1}^{R} = {}_{S}\theta_{P}^{L} \quad , \quad {}_{D}\theta_{N}^{L} = \frac{1}{\beta}\,{}_{D}M_{N}^{L} + {}_{S}\theta_{P}^{R} \qquad (4.2\ 4) $$

$$ {}_{S}M_{P+1}^{R} = {}_{S}M_{P}^{R} - {}_{D}M_{N}^{R} + d\,{}_{S}Q_{N}^{R} $$

$$ {}_{S}Q_{P+1}^{R} = Q_{P}^{L} $$

ここに、d：船体断面の中性軸と上部構造基部甲板間の距離

これらの関係と（4.1 9）式の上部構造頂部における境界条件より次の関係が求められる。

$$ {}_{S}Z_{P+1}^{R} = P_{V} \cdot {}_{S}Z_{P}^{L} \qquad (4.2\ 5) $$

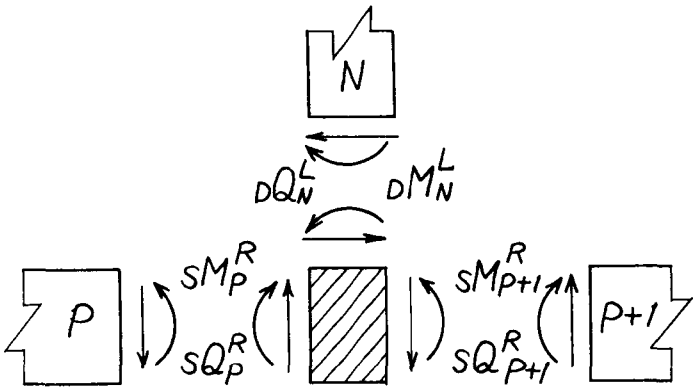


図 4.3 1　結合部における力の平衡（船体上下振動との連成）

ここに、　$\mathbf{P}_V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$f = \frac{\beta\ (d\alpha_4 - \alpha_3)}{\beta\alpha_2 - \alpha_3}$$

$$\alpha_1 = -\ h_{12} / h_{11}$$

$$\alpha_2 = h_{21} \cdot \alpha_1 + h_{22}$$

$$\alpha_3 = h_{31} \cdot \alpha_1 + h_{32}$$

$$\alpha_4 = h_{41} \cdot \alpha_1 + h_{42}$$

（4.2 3）式、（4.2 5）式より系全体のtransfer matrixは次のようになる。

$$_S\mathbf{Z}_M^L = {}_S\mathbf{H}_F \cdot \mathbf{P}_V \cdot {}_S\mathbf{H}_A \cdot {}_S\mathbf{Z}_1^R$$

$$\equiv \mathbf{H}_V \cdot {}_S\mathbf{Z}_1^R \qquad (4.2\ 6)$$

船体上下振動の自由ー自由の境界条件に対してstate vectorは次のようになる。

$$_S\mathbf{Z}_M^L = \{\ {}_Sy_M,\ {}_S\theta_M,\ 0,\ 0\ \} \qquad (4.2\ 7)$$

$$_S\mathbf{Z}_1^R = \{\ {}_Sy_1,\ {}_S\theta_1,\ 0,\ 0\ \}$$

（4.27）式を（4.26）式に代入すれば固有値方程式として次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{H}_V \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad (4.28)$$

以上、連成固有振動数の計算法のみを示したが、第1編で述べたように減衰を考慮した複素 transfer matrix を使用することによって応答の計算式も同様に導く事ができる。

3.5 上部構造前後振動の応答

船体の上部構造内部には、起振源となるものが存在せず上部構造の前後振動の起振力は船体主構造との結合部において船体縦振動および船体上下振動にもとづく前後変位および強制回転として作用するものと考えられる。本節ではこのように船体主構造より基部位置において強制変位を受ける時の上部構造前後振動の応答について考察を行なう。

3.5.1 強制振動の基礎方程式

上部構造前後振動の振動系は2Lで取り扱ったのと同じモデル（図4.2）であるが、減衰の影響を考慮して構造減衰が作用するものと仮定する。

この時、この振動系の運動方程式は次式で表わされる。

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} = 0 \qquad (4.29)$$

ここに、 $\mathbf{X} = \{ X_1, X_2, \cdots, X_N \}$，絶対変位 vector

$\mathbf{x} = \{ x_1, x_2, \cdots, x_N \}$，弾性変位 vector

$\mathbf{K} = \Phi^{-1}$ ，stiffness matrix

$\mathbf{D} = \frac{c}{\omega}\mathbf{K}$ ，damping matrix

c：減衰係数

ω：円振動数

まず、船体上下振動による強制変位は図4.32に示したように船体の中性軸に関する回転変位 θ_S として与えられる。したがって上部構造の基部の位置においては $\ell\theta_S e^{i(\omega_V t - \varphi_V)}$ なる強制前後変位と $\theta_S e^{i(\omega_V t - \varphi_V)}$ なる強制回転が与えられることになる。ゆえに、船体上下振動により上部構造が剛体的に振動する時の剛体変位 vector は次式で表わされる。

$$\mathbf{X}_V = \theta_S \cdot \mathbf{H} e^{i(\omega_V t - \varphi_V)} \cdot \mathbf{N} + \ell\,\theta_S e^{i(\omega_V t - \varphi_V)} \cdot \mathbf{1} \qquad (4.30)$$

ここに、 $\mathbf{1} = \{ 1, 1, \cdots, 1 \}$

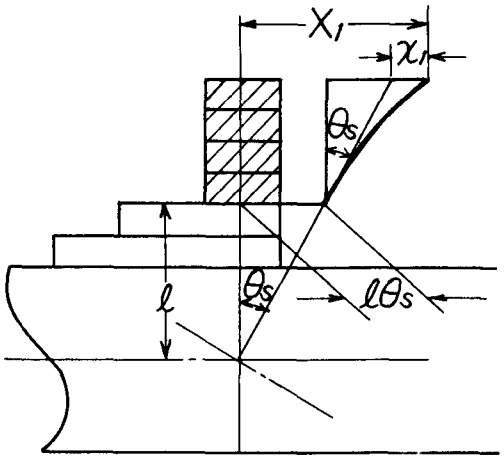


図 4.3 2　船体上下振動による強制変位

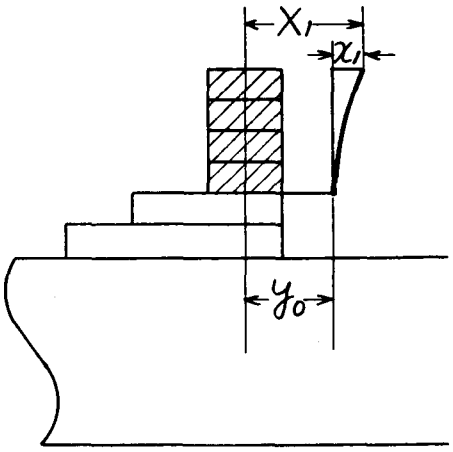


図 4.3 3　船体縦振動による強制変位

$$\mathbf{N} = \{ N, N-1, \cdots, 2, 1 \}$$

一方、船体縦振動による強制変位は図 4.3 3 に示したように、$y_0 e^{i(\omega_L t - \varphi_L)}$ が作用し、船体縦振動による剛体変位 vector は次式で表わされる。

$$\mathbf{X}_L = y_0 e^{i(\omega_L t - \varphi_L)} \cdot \mathbf{1} \tag{4.3 1}$$

これらの船体上下および縦振動が同時に作用する時の絶対変位 vector は次のようになる。

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_L + \mathbf{X}_V + \mathbf{x} \tag{4.3 2}$$

いま、簡単のため、縦振動および上下振動の強制振動数は等しいものとし、また位相差は縦振動を基準とし、それに対する船体上下振動の位相のずれを φ で表わすものとする。

（4.3 0）式、（4.3 1）式を（4.3 2）式に代入すれば次式が得られる。

$$\mathbf{X} = y_0 \left[\mathbf{A}_R + i \mathbf{A}_I \right] e^{iwt} + \mathbf{x} \tag{4.3 3}$$

ここに、　$\mathbf{A}_R = (1 + \eta \cos\varphi)\ \mathbf{1} + \xi \cos\varphi\ \mathbf{N}$

$$\mathbf{A}_I = -\sin\varphi \left[\eta\ \mathbf{1} + \xi\ \mathbf{N} \right]$$

$$\eta = \frac{\ell \theta_S}{y_0}, \quad \xi = \frac{\theta_S H}{y_0}$$

$$\varphi = \varphi_V - \varphi_L$$

(4.33) 式を (4.29) 式に代入すれば次の微分方程式が得られる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}+\frac{c}{\omega}\mathbf{K}\dot{\mathbf{x}}+\mathbf{K}\mathbf{x}=\omega^2 y_0\mathbf{M}\left[\mathbf{A}_R+i\,\mathbf{A}_I\right]e^{iwt} \tag{4.34}$$

(4.34) 式で表わされる方程式の強制振動の解を複素数の形で次のようにおく。

$$\mathbf{x}=\left[\mathbf{a}_R+i\,\mathbf{a}_I\right]\cdot e^{iwt} \tag{4.35}$$

(4.35) 式を (4.34) 式に代入すれば解は次のように求まる。

$$\mathbf{a}_R=\omega^2 y_0\ \mathbf{Q}_R \tag{4.36}$$

$$\mathbf{a}_I=\omega^2 y_0\ \mathbf{Q}_I$$

ここに、$\begin{Bmatrix}\mathbf{Q}_R\\ \mathbf{Q}_I\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{S}_R & -\mathbf{S}_I\\ \mathbf{S}_I & \mathbf{S}_R\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{Bmatrix}\mathbf{U}\ \mathbf{A}_R\\ \mathbf{U}\ \mathbf{A}_I\end{Bmatrix}$

$$\mathbf{S}_R=\mathbf{I}_N-\omega^2\mathbf{U}$$

$$\mathbf{S}_I=c\ \mathbf{I}_N$$

$$\mathbf{U}=\boldsymbol{\Phi}\mathbf{M}$$

いま、(4.35) 式は次のように書き表わす事もできる。

$$x_j=r_j\cdot e^{i(\omega t-\lambda_j)} \tag{4.37}$$

$$(j=1,2,3,\cdots,N)$$

ここに、 $r_j=\omega^2 y_0\sqrt{(Q_R)_j^2+(Q_I)_j^2}$

$$\lambda_j=\tan^{-1}\left(-\frac{(Q_I)_j}{(Q_R)_j}\right)$$

(4.33) 式，(4.35) 式，(4.36) 式より絶対加速度vectorは次のようになる。

$$\ddot{\mathbf{X}}=-\omega^2 y_0\mathbf{B}\,e^{i\omega t} \tag{4.38}$$

ここに、 $\mathbf{B}=\mathbf{B}_R+i\ \mathbf{B}_I$

$$\mathbf{B}_R=\mathbf{a}_R+\omega^2\ \mathbf{Q}_R$$

$$\mathbf{B}_I=\mathbf{a}_I+\omega^2\ \mathbf{Q}_I$$

これより基部に対する j 甲板の最大振動振幅比は次式で表わされる。

$$\left|\frac{\ddot{X}_j}{\omega^2 y_0}\right|=\sqrt{(B_R)_j^2+(B_I)_j^2} \tag{4.39}$$

$$\lambda_j = \tan^{-1}\left(-\frac{(B_I)_j}{(B_R)_j}\right)$$

$$j = 1, 2, 3, \cdots, N$$

3.5.2　応答計算に必要な諸数値

前節において示した計算で上部構造前後振動の応答に関係するパラメーターは次の通りである。

$$\alpha = \frac{\ell}{H} \quad , \quad \beta = \frac{L\,\theta_S}{y_0} \quad , \quad \gamma = \frac{H}{L}$$

$$c \quad , \quad \varphi$$

実際の上部構造についてこれらの値を考察する。なお（4.33）式のη ξはこれらと次の関係にある。

$$\eta = \gamma\,\alpha\,\beta$$

$$\xi = \gamma\,\beta$$

また$\beta = 0$の時、$\eta = \xi = 0$となり、前後変位だけの強制変位による場合に相当する。

(1)　$\alpha = \ell / H$

船体上下振動の曲げの中性軸の位置がほぼ船の深さの半分にあるとすればαの値は近似的に次式で与えられる。

$$\alpha = N_T - N + \frac{D}{2H} \tag{4.40}$$

ここに、　N_T ：上部構造の全層数

N ：上部構造の振動体の層数

H ：甲板間高さ

D ：船の深さ

（4.40）式を使用してαの値を上部構造のtype別に求めれば巨大船に対してほぼ表4.8に示したような値となる。

表4.8　αおよびγの値

Type	α	γ
A	4.16	0.181
B	6.98	0.126
C	5.46	0.183
D	4.21	0.086

(2) $\beta = \dfrac{L\theta_S}{y_0}$

この値は船体から伝達される2つの強制変位の割合を表わすパラメーターであり、振動数の関数として求められるものである。

いま、簡単のために船体を均一梁として縦振動および剪断振動と考えた上下振動の応答式よりこの値を求めれば次のようになる。

$$\beta = \frac{L\theta_S}{y_0} = \frac{LAE}{S} \cdot \frac{F_V}{F_L} \cdot f(\omega)$$

ここに、 $f(\omega) = \dfrac{q\ (\cos P\ell_S - \cot PL_S \sin P\ell_S)}{(\sin q\ell_S + \cot qL_S \cos q\ell_S)}$

AE ：船体の伸び剛性

S ：船体の剪断剛性

$P = \sqrt{\dfrac{\mu}{S}} \cdot \omega_r$, $q = \sqrt{\dfrac{\mu'}{AE}} \cdot \omega_L$

μ, μ' ：上下振動および縦振動の単位長さ当り質量

F_V, F_L ：船体船尾位置における上下方向および前後方向の起振力

L_S, ℓ_S ：船の長さおよび船尾より上部構造基部までの位置

第1編で述べた減衰を考慮した船体振動の応答の計算をすれば、さらに正確なβの値が理論的には計算出来るが、この中に含まれる起振力F_V, F_Lの値の評価には未知な点が多く、定量的な計算は困難なものと思われる。

(3) $\gamma = \dfrac{H}{L}$

これは上部構造の寸法により決まる量であり、上部構造のtype別に求めれば表4.8に示したようになる。

(4) 減衰係数，c

上部構造の減衰係数としては構造減衰を考慮しているが、この減衰係数は1自由度系の簡単なモデルの場合、固有振動数の近辺においていわゆる対数減衰率と次の関係にある。

$$c = \delta/\pi$$

いま、上部構造前後振動の実船実験から得られた共振曲線より求めた減衰率を表4.9に示す。この表から見てわかるようにδ/πの値はだいたい0.03～0.08の間にあるものと思われる。

表 4.9　上部構造の減衰率（δ/π）

	1. st		2 nd	
	EXCITER	RUNNING	EXCITER	RUNNING
A	～	0.057	—	—
B	—	—	0.045	0032
D	0.027	0.032	0.046	0.070
E	0.045	—	—	—
F	0.029	—	0.076	—
G	0.067	0.048	—	—
H	0.080	—	0.036	—
I	0.044	—	—	—

(5)　位相差　φ

これは2方向の起振外力の位相差を表わすものであり、この位相差の影響によって上部構造は例えば図4.37に示したような強制変位を受けることになり、当然上部構造の応答も位相差の影響を受けることになる。しかしこのφの値はプロペラ起振力の位相や船体主構造の振動特性により左右されるので、その推定は定量的には困難である。

3.5.3　上部構造前後振動の応答の定性的検討

上部構造の前後振動の応答に影響をおよぼすパラメーターは3.5.2に示した通りであるが、これらの値のうち特にβ，φの値は推定するのがむづかしい。したがってここではこれらのパラメータによって応答がどのように左右されるかを調査する。その例として表4.10に示したような上部構造を有する船を供試船にえらび、定性的傾向の検討を行なう。

まず、$\beta=0$，$\varphi=0$（前後強制変位のみの場合）の共振曲線およびMode Curveの変化の状況を図4.34に示す。固有振動数より低い振動数に対しては全上部構造は同相の振動をするが、固有振動数より高い領域では上部構造の中間にNodeが存在し、振動数が高くなるにつれ、上の方にNodeが移動することがわかる。

次に減衰係数の影響を調べるために$\delta/\pi=0.03$，0.055，0.07と変えた場合の共振曲線の変化を調べた。計算結果を図4.35に示す。これより明らかなように応答振幅は大きく影響を受け、peakにおける振幅は$\delta/\pi=0.08$と0.07とで約半分程度になることがわかる。

次に$\beta=0$（縦変位のみ）の状態よりβが増加したときその応答におよぼす影響を調査する。

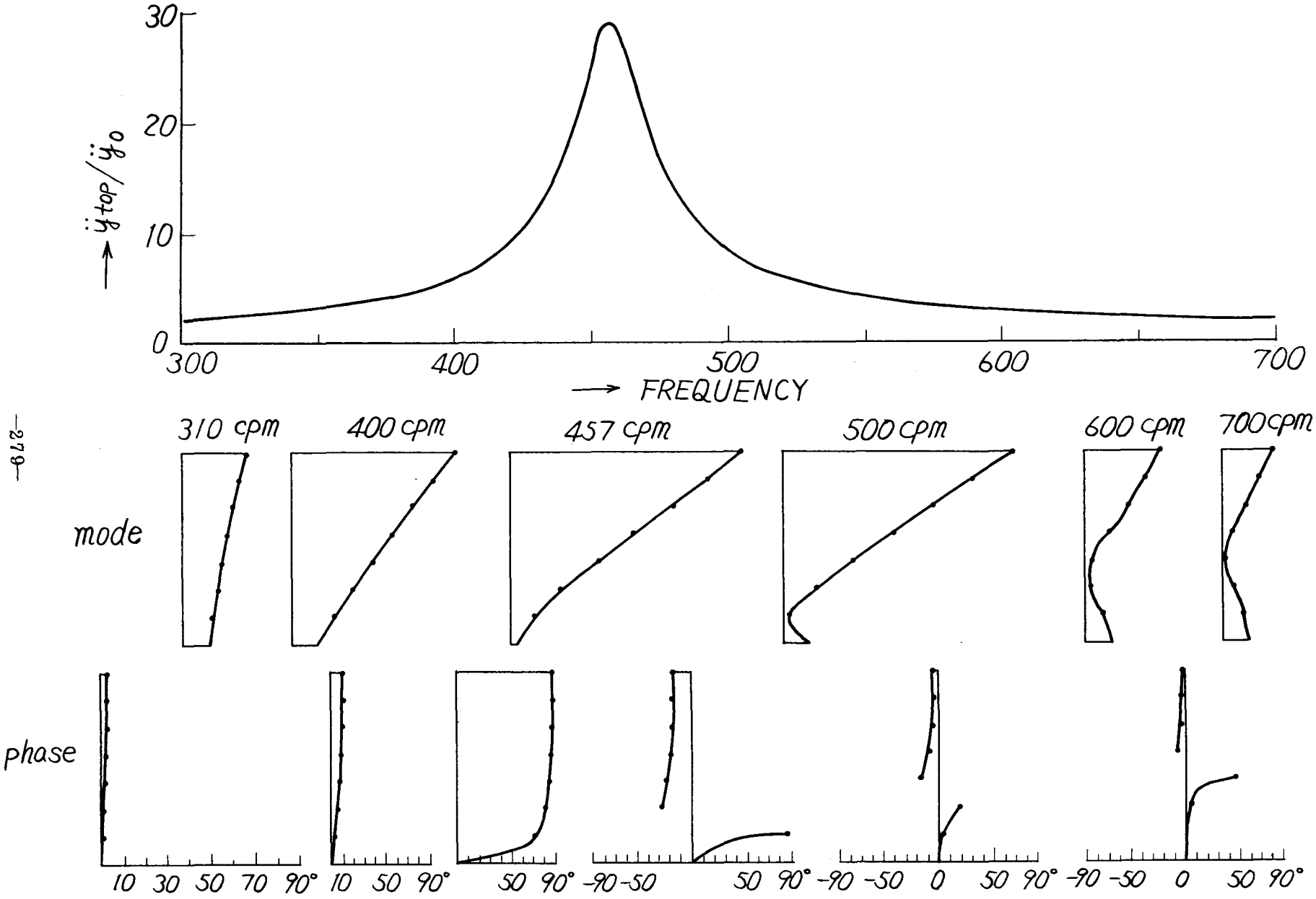


図4.34 共振曲線および共振型曲線

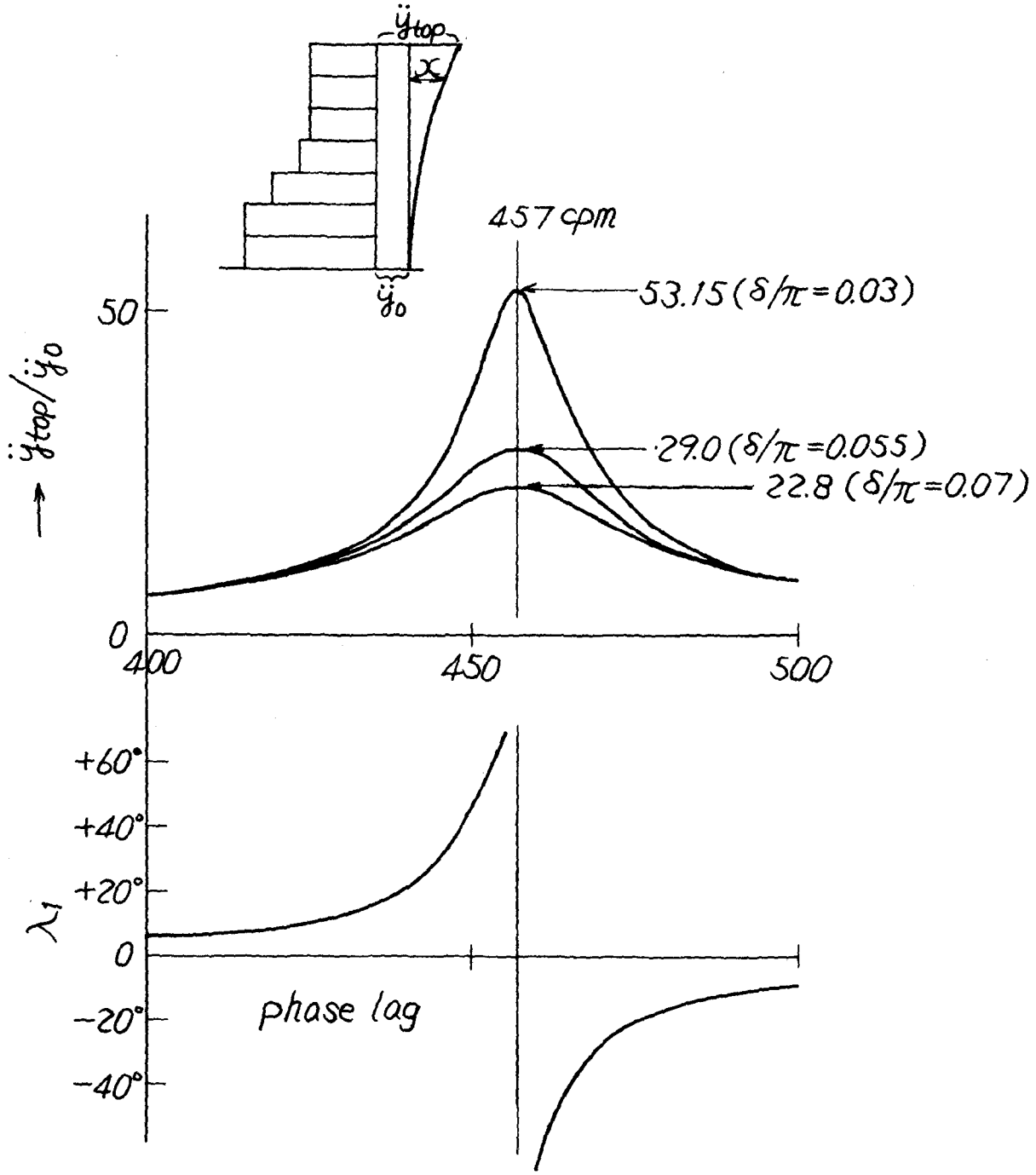


図4.35 減 衰 係 数 の 影 響

表4.10 供試船諸数値

要目	数値	要目	数値
N	7	K (TON/CM³)	630.0
H	2M600		
L	13M500	f (CPM) *	457
$\alpha = \ell/H$	4.19		
$\gamma = H/L$	0.193	$c = \delta/\pi$ *	0.055
$\gamma' = NH/L$	1.356		

層＼要目	W (TON)	A (CM²)	I (CM²) ×10⁷
1	24.84	544	15.622
2	38.86	1068	23.576
3	21.70	1096	22.367
4	41.10	1244	67.118
5	28.13	1448	113.753
6	73.86	2805	268.550
7	104.71	3471	423.820

＊ 起振機実験結果より求めたもの

計算結果を図4.36に示す。δ/πを横軸にとればβの増加にしたがって応答の増加して行く様相がわかる。またβを横軸にとれば減衰に無関係に振幅は比例して増加して行く事がわかる。

次に前後変位と回転変位との位相差が応答におよぼす影響を調べる。

いま、前後変位　$y = y_0 \cos\omega t$

回転変位　$\theta = \theta_s \cos(\omega t - \varphi)$

の強制変位を受けた場合の上部構造の振動の様相を図4.37に示す。図中、上部構造の右方向移動および右傾斜の符号を正にとっている。peakにおける上部構造頂部と基部における振幅比を図4.38に示す。明らかに$\varphi = 0$（位相差なし）の場合が一番振幅は大きく$\varphi = \pm 180°$のとき最も小さくなるがその差はこの場合⅓程度減少するだけであることがわかる。

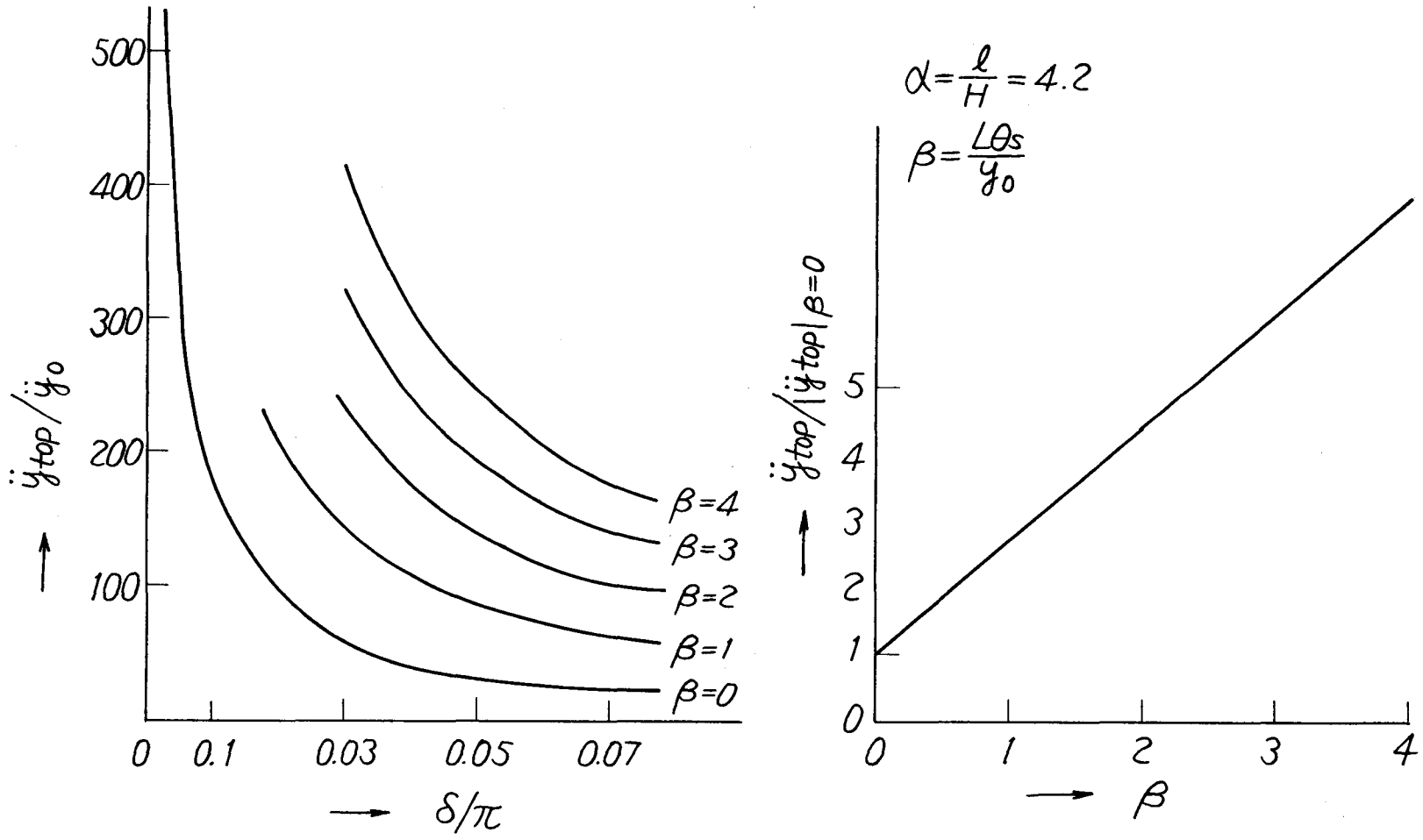

500
400
300
200
100
$\ddot{y}_{top}/\ddot{y}_0$
0
0.1
0.03
0.05
0.07
δ/π
$\beta=4$
$\beta=3$
$\beta=2$
$\beta=1$
$\beta=0$
$\alpha=\frac{l}{H}=4.2$
$\beta=\frac{L\theta_s}{y_0}$
$\ddot{y}_{top}/|\ddot{y}_{top}|_{\beta=0}$
5
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4
β

図4.36 β による影響

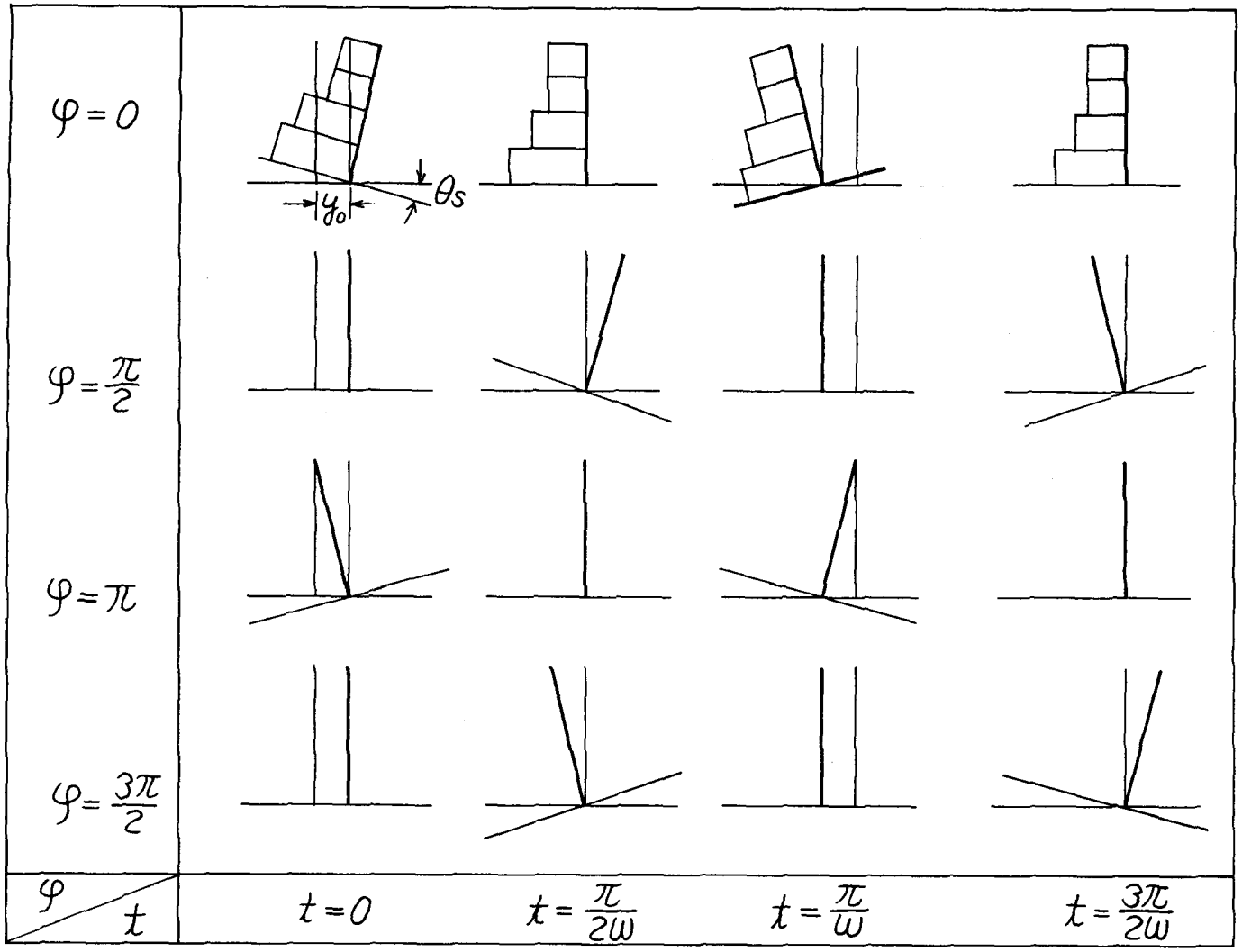


図 4.3 7　位相差のある場合の上部構造前後振動の様相

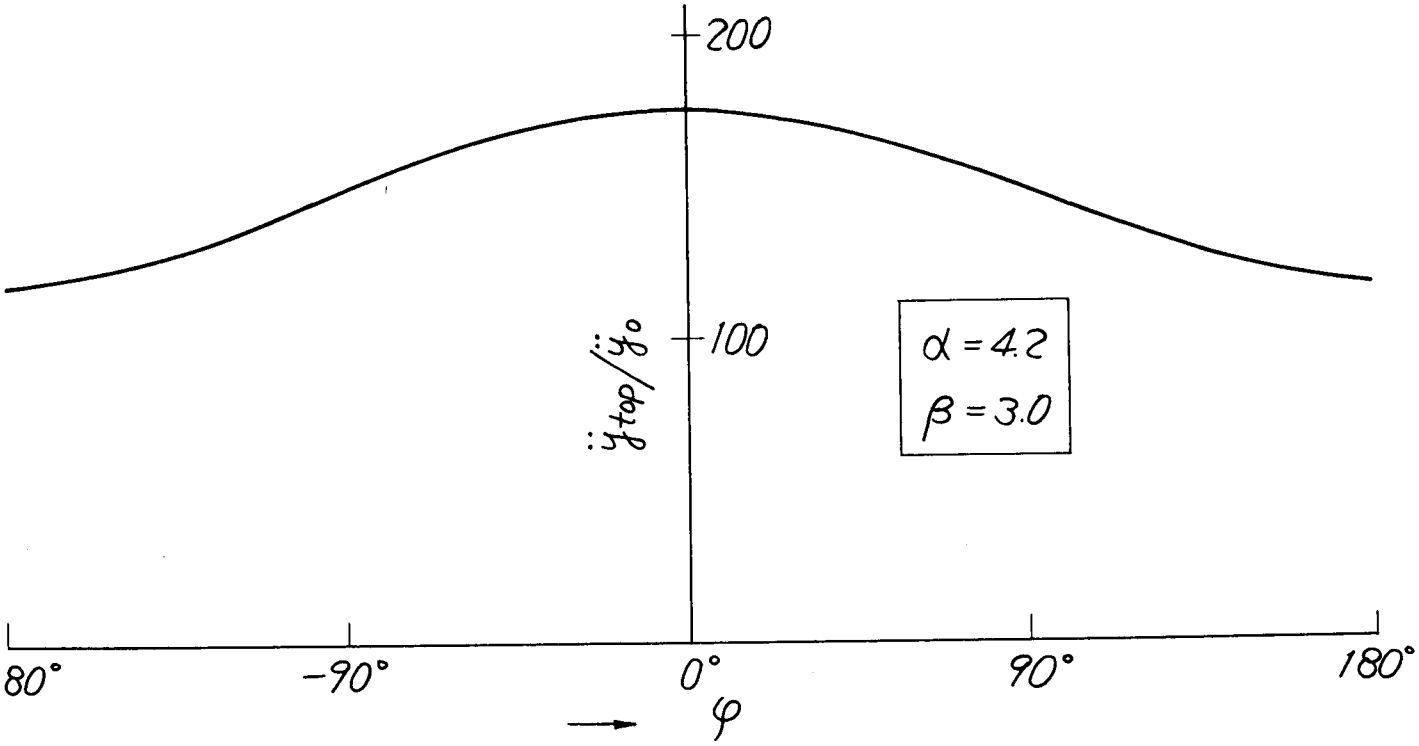


図 4.3 8　位相差による影響

第 4 章　上部構造前後振動と Dogger および煙突の振動との関連

4.1　上部構造前後振動と Dogger の振動との関連

上部構造の航海船橋甲板に設けられている Dogger は船の運航上必要な場所であるが位置的に上部構造の頂部近くにあり比較的質量が大きいものであるので、Dogger 自身の振動のみならず上部構造の前後振動におよぼす影響が懸念される。特に巨大船においては船体の幅に比較して上部構造の幅が相対的に狭くなる傾向があり、その結果 Dogger が長くなりその固有振動数が blade frequency 近くにまで低下する場合が考えられる。本節では局部振動体としての Dogger が上部構造前後振動におよぼす影響の定性的実験的考察を行なう。

4.1.1　上部構造前後振動とDoggerの振動の定性的考察

いま、簡単のため図4.39に示したように上部構造を均一な断面を有する片持ち剪断梁と見なし、その中間に局部振動体が存在する振動系を考える。

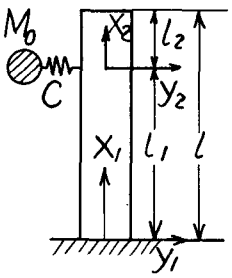


図4.39　上部構造とDoggerの連成モデル

このような振動系の固有値方程式は次式で与えられる。

$$\cos k\ell = R \sin k\ell_1 \cos k\ell_2 \tag{4.41}$$

ここに、　$k\ell = \sqrt{\dfrac{\mu}{S}} \cdot \omega$　,　$R = \dfrac{K_2}{kS}$

$$K_2 = \frac{\omega^2}{\sigma^2 - \omega^2} \cdot C$$

$\sigma = \sqrt{\dfrac{C}{m_0}}$　：局部振動体の固有振動数

m_0, C：局部振動体の質量およびバネ定数

ℓ_1　：基部から局部振動体までの距離

ℓ　：梁の長さ

$\ell_2 = \ell - \ell_1$

μ, S：梁の単位長さ当り質量および剪断剛性

いま、局部振動体の固有円振動数σ（$=\sqrt{C/m_0}$）が上部構造の二次固有円振動数λ_2（$=\dfrac{3\pi}{2\ell}\sqrt{\dfrac{S}{\mu}}$）の$\eta$倍であるとすれば

$$e = \frac{\omega}{\sigma} = \frac{2k\ell}{3\pi\eta}$$

となるのでRは次の値と書きかえられる。

$$R = \xi \cdot k\ell / \left\{ 1 - \left(\frac{2k\ell}{3\pi\eta}\right)^2 \right\} \qquad (4.4\ 2)$$

ここに、　$\xi = m_0 / \mu\ell$ ：局部振動体と上部構造の質量比

したがって、ξ，η，ℓ，ℓ_1等の値をパラメーターとして（4.4 1）式より連成固有振動数を求めることができる。

いま、仮りに$\xi = 0.1$，$\ell_1/\ell = 0.8$および1.0として$\eta = \frac{1}{2} \sim \frac{4}{3}$の各場合について固有値の変化を求めた結果図4.4 0、表4.1 1、表4.1 2が得られた。図4.4 0は$\xi = 0.1$，$\eta = 1.0$，$\ell_1 = \ell$の場合の連成固有値の存在範囲を示したものであるがこの場合$k\ell = 3\pi/2$を中心として固有値が2つ現われている。表4.1 1，表4.1 2によれば、局部振動体の存在はそれと振動数の近い振動型の固有値に大きな影響を与え、また局部振動体の位置が頂部に近い方が固有値の低下率は大きいことがわかる。局部振動体のある場合の連成固有振動数に対する最低次固有振動数の比については表4.1 3に示したようになっており、ηの値が小さい程N_2/N_1は小さくなっている。

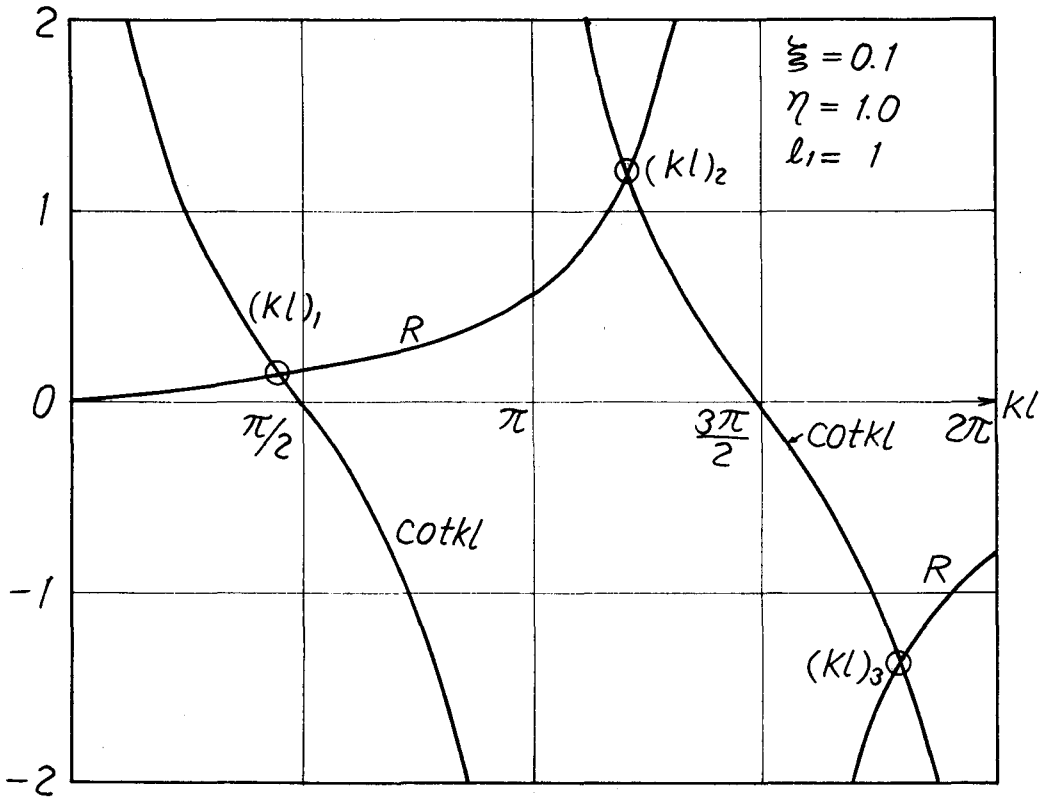


図 4.4 0　局部振動体のある場合の$k\ell$

表 4.11　局部振動体のある場合の $k\ell$

$\ell_1/\ell=0.8$

		$(k\ell)_1$	$(k\ell)_2$	$(k\ell)_3$
$\xi=0$		1.57	4.70	7.85
$\xi=1.0$	$\eta=4/3$	1.50　(095)	4.53　(0.96)	6.75　(0.86)
	$\eta=1$	1.48　(0.94)	4.28　(0.91)	5.40　(0.69)
	$\eta=2/3$	1.46　(0.93)	3.38　(072)	4.79　(0.61)
	$\eta=1/2$	1.39　(0.89)	2.60　(0.55)	4.77　(0.60)

表 4.12　局部振動体のある場合の $k\ell$

$\ell_1/\ell=1.0$

		$(k\ell)_1$	$(k\ell)_2$	$(k\ell)_3$
$\xi=0$		1.57	4.70	7.85
$\xi=1.0$	$\eta=4/3$	1.46　(0.93)	4.04　(0.86)	6.28　(0.80)
	$\eta=1$	1.45　(0.92)	3.84　(0.82)	5.58　(0.71)
	$\eta=2/3$	1.39　(0.89)	3.14　(0.67)	4.98　(0.63)
	$\eta=1/2$	1.36　(0.87)	2.55　(0.54)	4.88　(0.62)

表 4.13　局部振動体ある場合の N_n/N_1

η	N_2/N_1		N_3/N_1	
	$\ell_1/\ell=0.8$	$\ell_1/\ell=1.0$	$\ell_1/\ell=0.8$	$\ell_1/\ell=1.0$
4/3	3.00	2.77	4.50	4.30
1	2.89	2.65	3.65	3.85
2/3	2.38	2.62	3.28	3.58
1/2	1.87	1.75	3.43	3.58
0	3.00		5.00	

一方、上部構造の頂部に起振力$F_0 e^{i\omega t}$が作用するときの応答曲線は次式で表わされる。

$$y_1 = \frac{\sin kx_1}{\cos k\ell - R\sin k\ell_1 \cos k\ell_2} \frac{F_0}{kS} e^{i\omega t}$$

$$y_2 = \frac{\sin k(\ell_1 + x_2) - R\sin k\ell_1 \sin kx_2}{\cos k\ell - R\sin k\ell_1 \cos k\ell_2} \frac{F_0}{kS} e^{i\omega t} \qquad (4.4\ 3)$$

また、局部振動体の振幅は次式で表わされる。

$$\xi = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \omega^2} \cdot y_2 \Big|_{x_2=0} \qquad (4.4\ 4)$$

したがって、(4.4 4) 式より上部構造と局部振動体の位相の関係は次のようになることがわかる。

$\frac{\omega}{\sigma} < 1$ のとき　ξ と $y_2\Big|_{x_2=0}$ は同位相

$\frac{\omega}{\sigma} > 1$ のとき　ξ と $y_2\Big|_{x_2=0}$ は逆位相

いま一例として $\ell_1/\ell = 1.0$, $\xi = 0.1$ の場合の ω と σ との関係を示せば図 4.4 1のごとくであり、1次振動（上部構造最低次固有振動数）では両者は同位相であるが2次振動（Doggerの固有振動数）では本図の場合 $\eta < 2/3$ で両者は逆位相、$\eta > 2/3$ で同位相となることがわかる。

4.1.2　上部構造前後振動とDoggerの振動の実験的考察

まず、実験より求めた上部構造とDoggerとの振動位相の関係は図 4.4 2に示したような傾向をもつ。すなわち本図によればDoggerの位相は上部構造の振動モード位相と無関係にほぼ 7 5 0 cpmを境にして両者の位相が逆になっていることがわかる。

次に振動数の上昇にともなって両者の位相関係がどうなるかを調べたものが図4.4 3および図 4.4 4である。これらの図は一例としてF船の場合を示したものであるが、この場合、両者の位相関係を最上部甲板との関係で定めることにすれば、ほぼ 7 3 0 cpmでまたDoggerの取り付けられている甲板との関係で定めれば、ほぼ 8 9 0 cpmを境にして位相が逆転することがわかる。

また、Dogger自身の振動型を調べて見ると図4.4 5のごとくである。この図は航海船橋甲板の船体中心線における振幅を基準としてその振動モード曲線を示したものであるが、Dogger端部の振幅は低振動数の場合中心線のそれと大差がないが、振動数の上昇に伴なっ

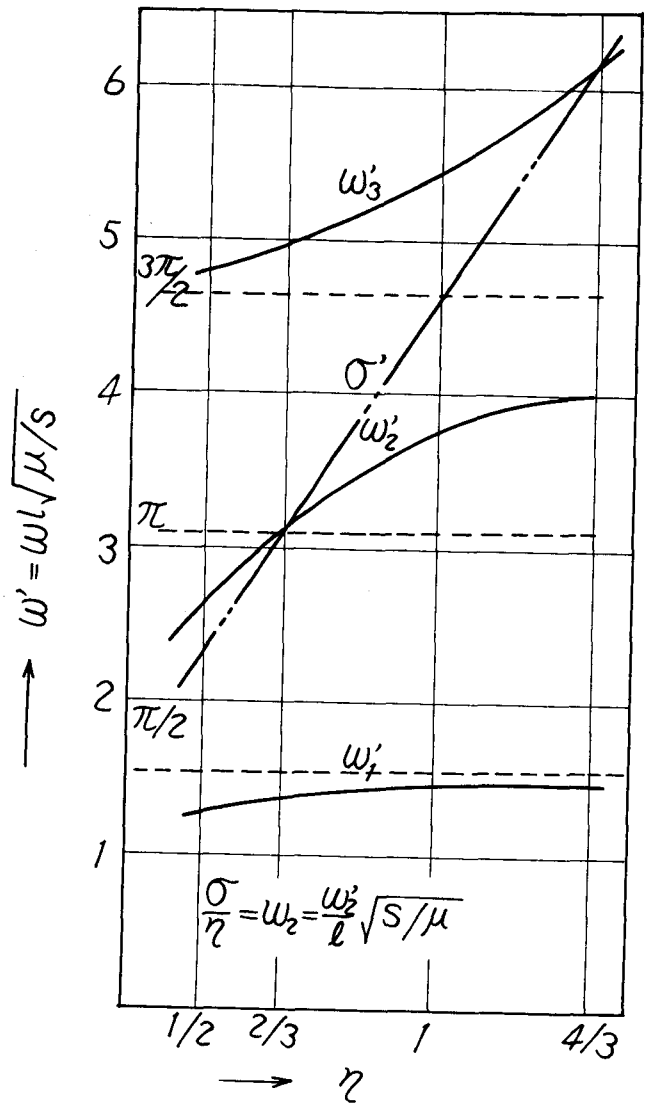


図4.4 1　局部振動体と上部構造の振動数の関係

て振幅が大きくなり、位相が逆となる高振動数では中心線の振幅に比して極めて大きくなることがわかる。このような一連の実験結果は前節で行なった簡単なモデルによる定性的検討結果と良く合致している。この供試船の場合のようにDoggerの固有振動数が上部構造の最低次固有振動数よりかなり高い場合には上部構造前後振動の固有振動数におよぼす影響は小さいが、巨大船になりDoggerの固有振動数が低下し、上部構造前後振動の最低

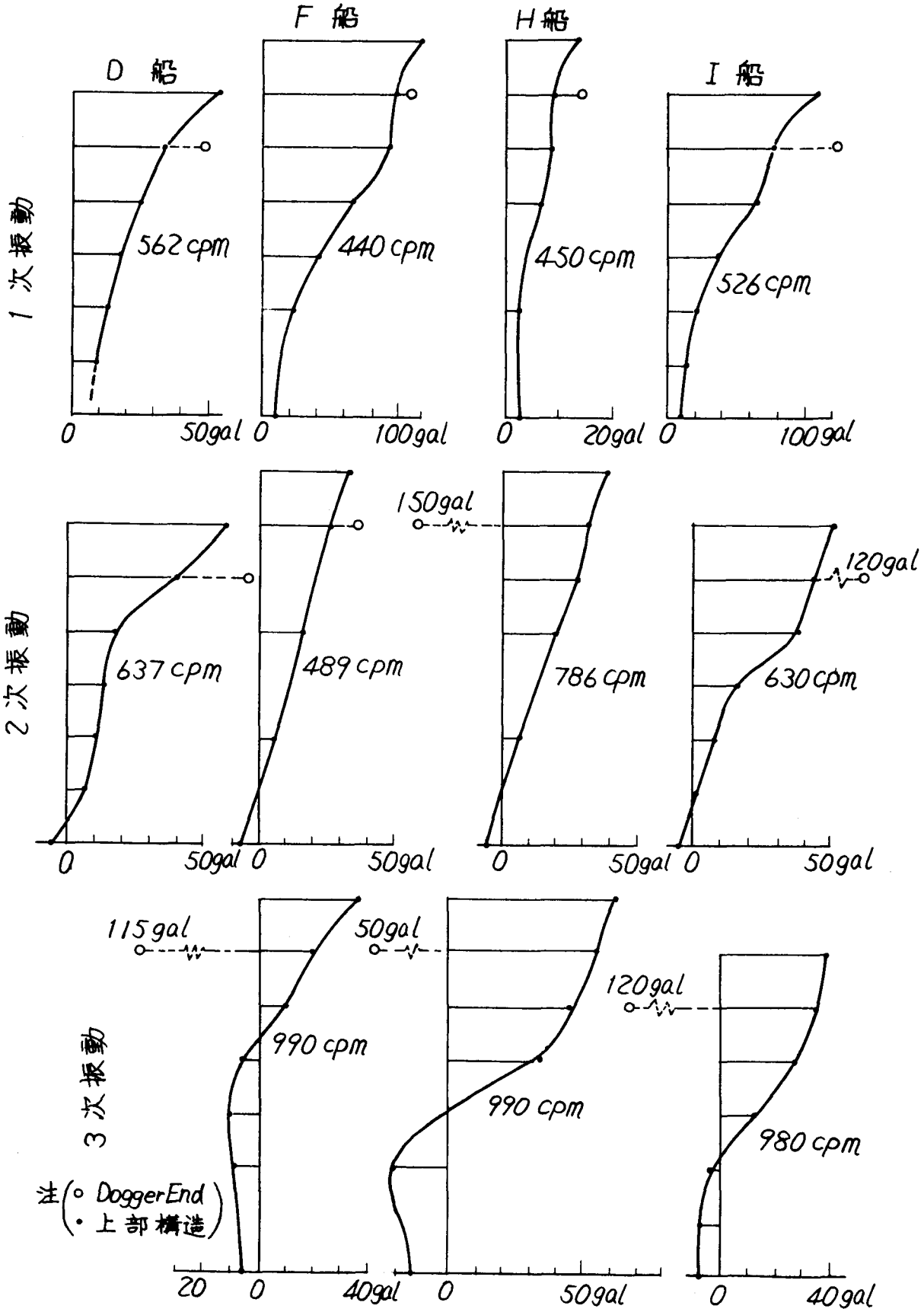


図 4.4 2　上部構造とDogger Endとの振動位相

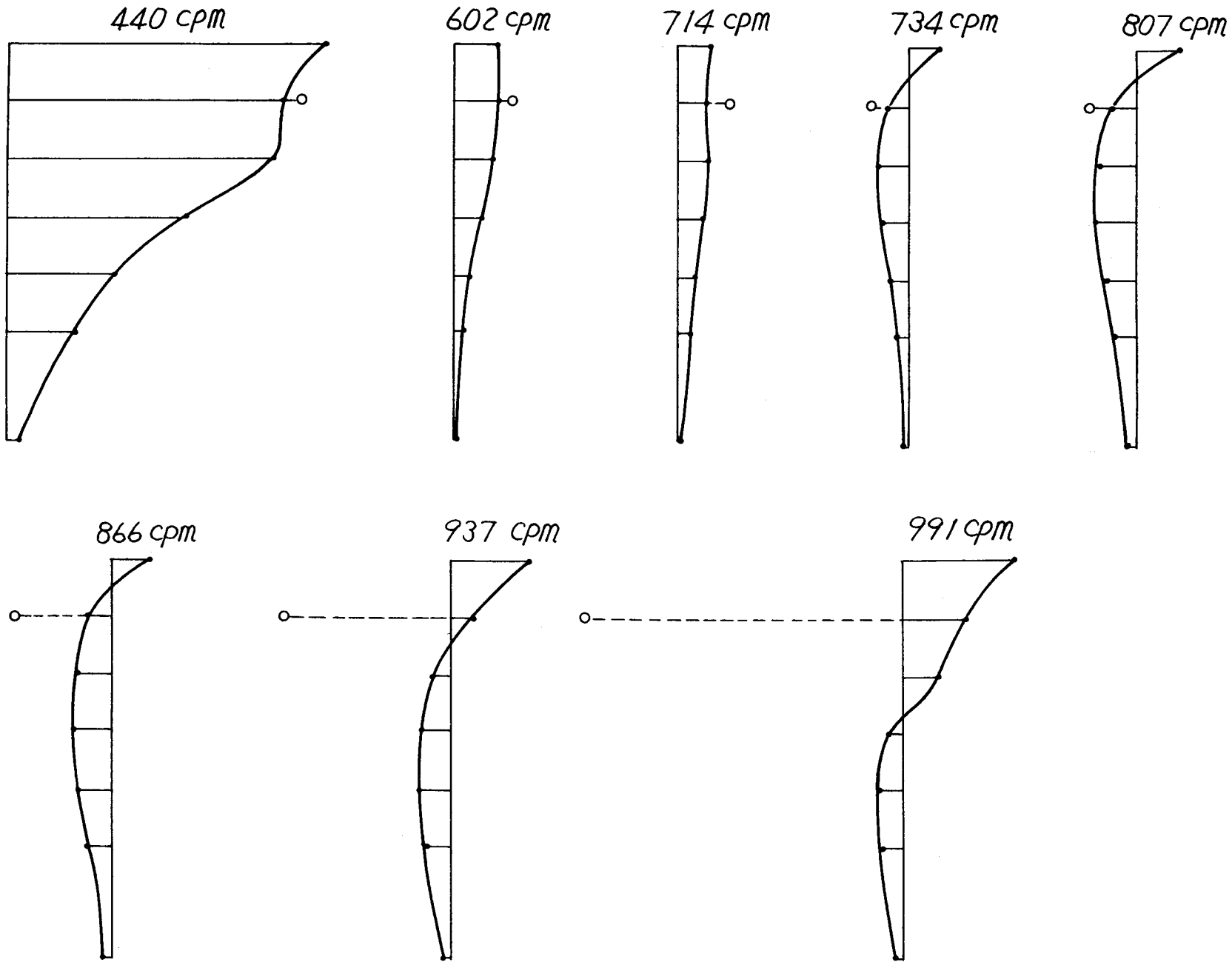


図 4.4 3　上部構造およびDogger のMode の変化（F 船）

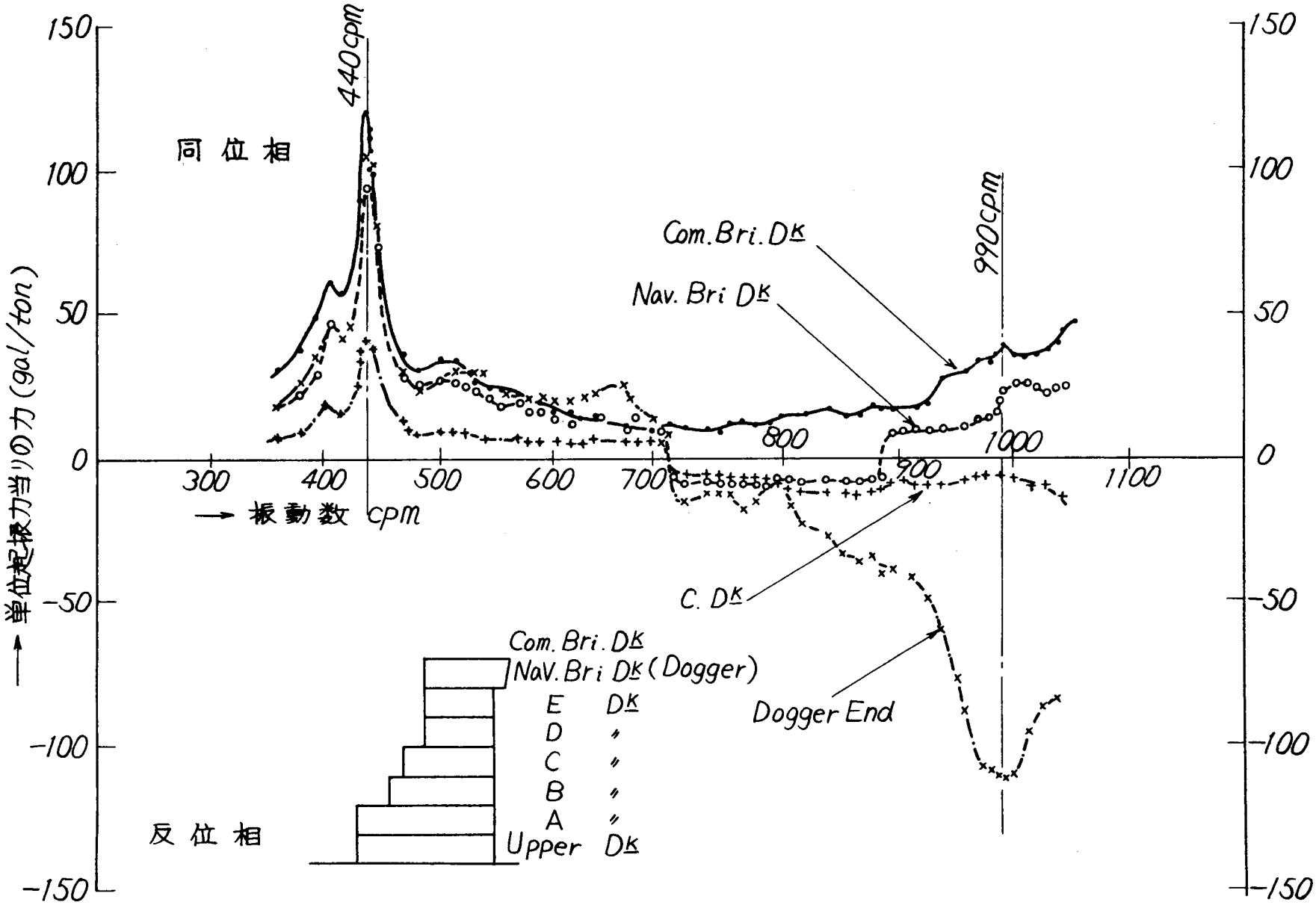


図4.4.4 上部構造各部の振動位相（F船）

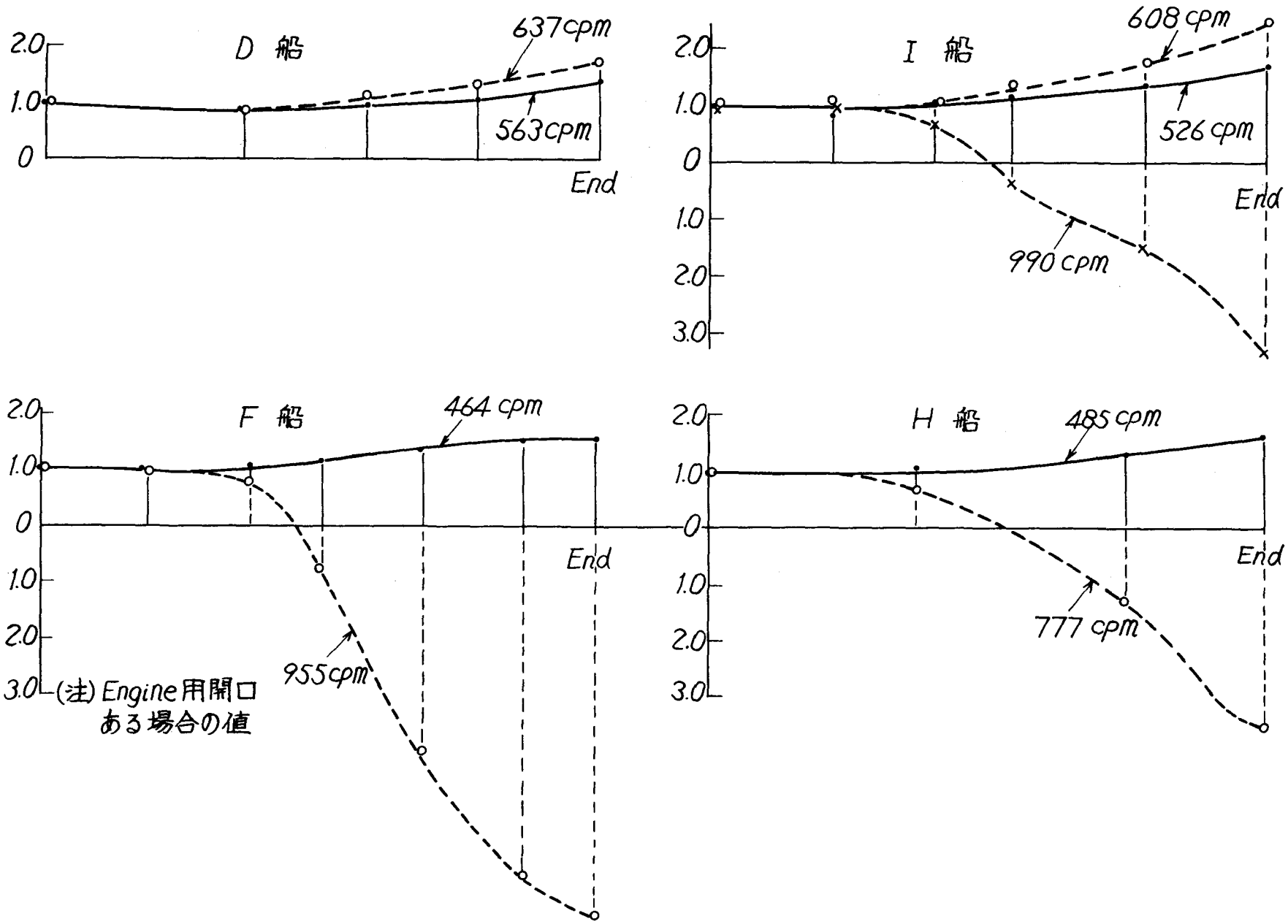


図 4.4 5 Dogger の Mode Curve

次固有振動数に近づけばこれらの連成の影響を考慮し、両者の固有振動数をさける防振対策が必要である。

4.1.3　Doggerの固有振動数の簡易計算法

Doggerは形状的に図4.4 6に示したように船側に行くにしたがって細くなったいわゆるTaper Beamであり、断面形状は凵字型の開断面であるのでその前後振動は正確には捩り－曲げ連成振動として取り扱う必要があるものと思われる。その理論計算法は船体の水平曲げ捩り連成振動の計算法と同等に取り扱うことが出来るが〔67〕この場合Doggerと上部構造との結合部における固着度およびDoggerのtypeによっては中間に設けられているpillorやbracketの影響等を考慮しなければならないものと思われる。ここでは簡単のために数隻の実験をもとにした簡易計算式を示すのみに留める。

$$f = \frac{C}{\ell^2}\sqrt{\frac{I}{A}} \qquad (4.4\ 5)$$

ここに、I，A：Dodger基部の断面二次モーメントおよび断面積

C：αによってきまる実験定数（図4.4 7参照）

$\alpha = h_1/h_2$

h_1, h_2：Dodgerの基部および端部における幅

ℓ：Doggerの長さ

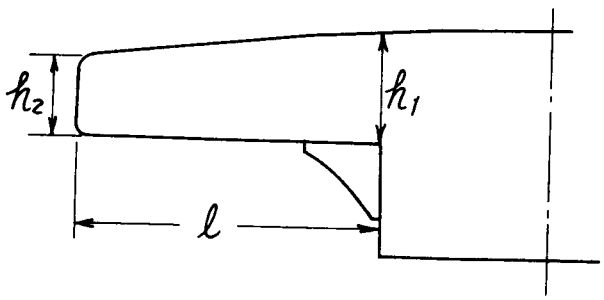


図4.4 6　Doggerの形状

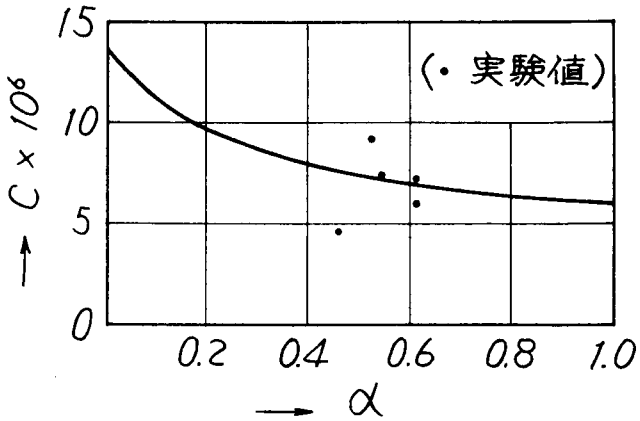


図4.4 7　実験定数，C

4.2　上部構造前後振動と煙突の振動との関連

4.2.1　上部構造前後振動における上部構造と煙突との関係

上部構造と煙突とは近接して配置されるのが普通であり、上部構造の前後振動と煙突とは切り離して考えるわけにはいかない。すなわち第2章において取り扱った近似計算法でもその相互関係をはっきり区別して取り扱っているのはその理由にもとづいている。つまり図4.12におけるA typeは上甲板上に煙突と上部構造が独立して並んでいる形式のものであり、煙突と上部構造とは直接的には連成振動系でない。何故なら船体が弾性変形を行なわず振動を伝達するだけであれば両者の間に連成効果はないからである。ただ煙突が共振状態にあるとき船体主構造を介してその振動が上部構造前後振動を引き起こす可能性があるので上部構造のみならず煙突の固有振動数も船体の起振外力から避ける必要がある。その連成振動系としては図4.48に示したように船体も含めた3つの梁の連成振動を考える必要があるものと思われるがその連成効果は第3章で述べた定性的な検討結果とほとんど変わりなく上部構造前後振動の固有振動数におよぼす影響は高々5%以内に留まるものと思われる。

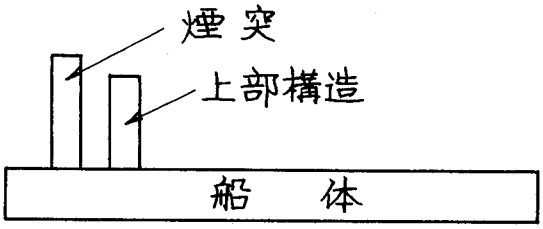


図4.48　船体、上部構造および煙突の連成振動系

次にB typeおよびC typeも本質的な考え方においてはA typeと同じである。すなわち、上部構造の振動体の部分と煙突とは並列に同じ甲板上に位置しており、それ以下の甲板は船体主構造の一部であると見なす事ができるからである。

次にD typeのように上部構造と煙突が一体となった形式のものに対しては構造的に見て上部構造と煙突とを切り離して取り扱う必要はない。すなわち、このtypeにおいては煙突はもはや上部構造の一部であり、上部構造前後振動の計算の際に、その質量および剛性も含めて考慮すればよい。このような構造は一般的に言って煙突が上部構造のBracketの役割を果たすことになるので上部構造の固有振動数は高く、その意味において煙突の存在は上部構造の振動に対して有効であるという事ができる。このように煙突の存在は上部構造前後振動と重要

な関係にありその計算の際十分注意しなければならない。

4.2.2　上部構造前後振動と煙突の連成振動の一例

上部構造と煙突とは前節に述べたように船体主構造を含めて考えると連成振動系となるが、一般には連成振動として考えなくてもよい。本節では上部構造と煙突との連成振動の例として図4.49に示したように両者をbracingでつないだ構造にした場合興味ある連成効果を示すことがわかったので、その定性的、実験的考察について述べる。

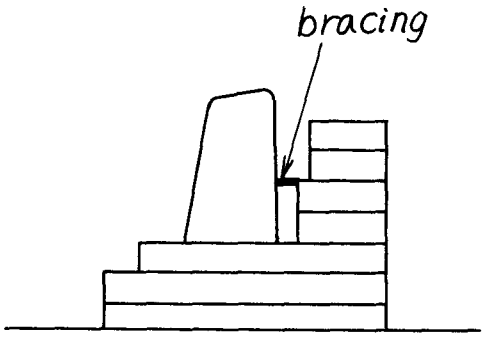


図4.49 上部構造と煙突の連成振動の例

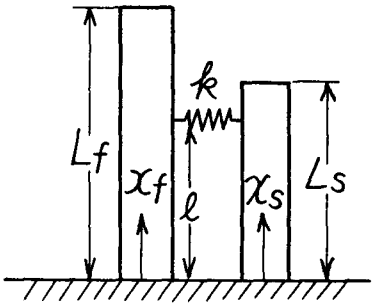


図4.50　model化した振動系

(A)　定性的検討

いま、上述した構造を図4.50に示したように2本の剪断梁がその中間においてバネでつながれた振動系にモデル化して考える。

この振動系の固有値方程式は次のようになる。

$$\varepsilon_s + \gamma\,\varepsilon_f + \varepsilon_c = 0 \qquad (4.46)$$

ここに、$\varepsilon_s = (\tan P_s L_s + \cot P_s \ell)\sin^2 P_s \ell$

$$\varepsilon_f = (\tan P_f L_f + \cot P_f \ell)\sin^2 P_f \ell$$

$$\gamma = \frac{S_s P_s}{S_f P_f} = \sqrt{\sigma s}$$

$$\varepsilon_c = \nu P_s L_s$$

$$\nu = S_s / kL_s$$

$$\sigma = \mu_s / \mu_f \quad , \quad s = S_s / S_f$$

$$P_s^2 = \frac{\mu_s}{S_s}\omega^2 \quad , \quad P_f^2 = \frac{\mu_f}{S_f} = \omega^2$$

μ_s, μ_f ：上部構造および煙突の単位長当りの質量

S_s, S_f ：上部構造および煙突の剪断剛性

L_s, L_f ：上部構造および煙突の長さ

k ：上部構造と煙突とをつなぐバネ定数

煙突と上部構造が剛なバネ（$k \to \infty$）でつながれている時は $\nu = 0$ となり $\varepsilon_c = 0$ である。

上部構造と煙突が連成しない時（$k \to 0$）のそれぞれの固有振動数は次式で与えられる。ただしここではどちらも最低次固有振動数を対象とする。

$$ {}_0f_s = \frac{15}{L_s}\sqrt{\frac{S_s}{\mu_s}} $$

$$ {}_0f_f = \frac{15}{L_s}\sqrt{\frac{S_f}{\mu_f}} $$

いま、定性的な検討を行なうために、次のようなパラメータを使用する。

$$ h = \frac{L_f}{L_s} \quad , \quad \xi = \frac{\ell}{L_s} \quad , \quad q = \frac{{}_0f_f}{{}_0f_s} $$

$$ \Omega_s = P_s L_s \quad , \quad \zeta = \frac{\Omega}{\Omega_s} \quad \text{(無次元化振動数)} $$

$\Omega_s = \frac{\pi}{2}$ のとき上部構造の固有値、$\Omega_f = \frac{\pi}{2} q$ のとき煙突の固有値に相当する。

(1) $h = 1$, $\xi = 1$ （図 4.5 1 参照）の場合

$$ \tan\Omega + \gamma \tan\frac{\Omega}{q} + \nu\Omega = 0 \qquad (4.47) $$

上式で特に $\nu = 0$ （$k \to \infty$）および $\gamma = 1$ とおけば連成固有値は次のようになる。

$$ \zeta_1 = \frac{\Omega_1}{\Omega_s} = \frac{2}{1 + \frac{1}{q}} $$

$$ \zeta_2 = \frac{\Omega_2}{\Omega_s} = \frac{4}{1 + \frac{1}{q}} \quad (= 2\zeta_1) \qquad (4.48) $$

連成固有値と連成なしの固有値の関係を $q = f_f / f_s$ を横軸にとり図 4.5 2 に示す。この図より $0.5 < q < 1.5$ の範囲で連成なし固有値よりいずれも連成固有値は高くなり、ことに第 2 固有値は大幅に上昇することがわかる。また（4.47）式におい

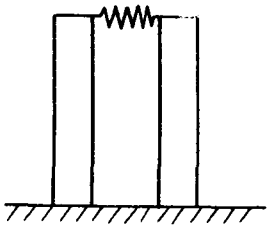


図4.5 1　$\ell = L_f = L_s$ の場合

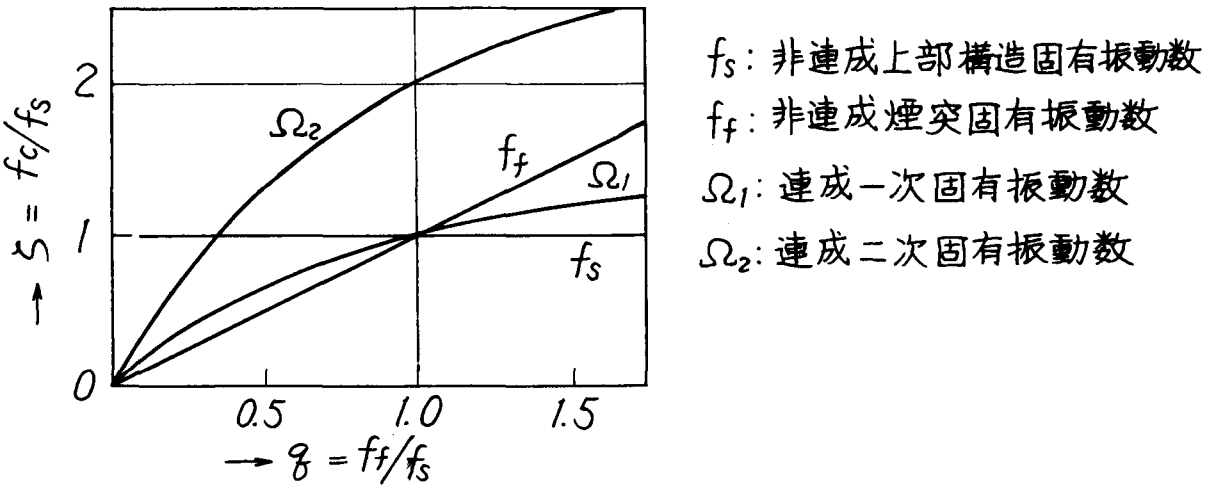


図4.5 2　連成固有値（$\gamma = \sqrt{\sigma S} = 1$，$\nu = 0$）

て $\nu = 0$ のとき γ の影響を調べれば図4.5 3に示したようになる。また ν の影響は図4.5 4に示したようになり $k \to \infty$（$\nu = 0$）の時に（4.4 4）式の値、$k = 0$（$\nu \to \infty$）の時はそれぞれ単独の固有値に近づくことがわかる。

(2)　ξ の影響

$\xi = \ell / L_s$ はbracingをつける位置を表わすパラメータである。$h = 1$，$q = 0.6$ の場合の計算例を図4.5 5に示す。$h = 1$ の時 $\xi = 1$ および $1/2$ で同じ効果となり 0.6～0.8の範囲で連成固有値は連成なしの場合より大きく上昇することがわかる。

(3)　hの影響

$h = 1.0$，1.5，2.0の計算結果を図4.5 6(i)、(ii)および(iii)に示す。この図より明ら

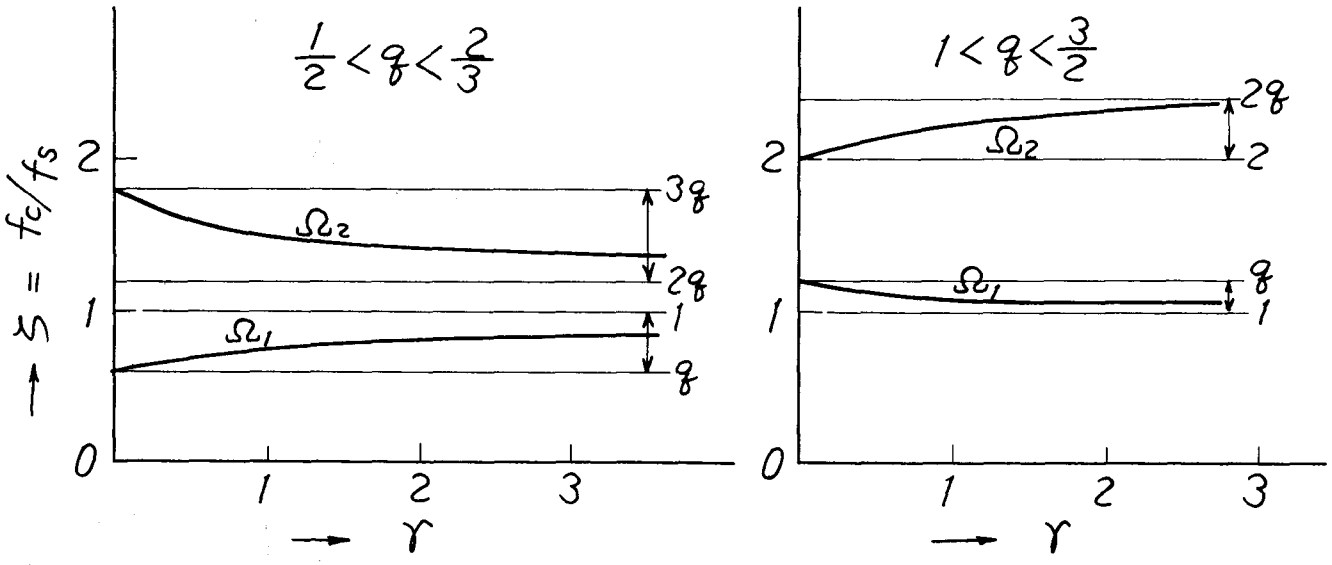


図 4.5 3　連成固有値におよぼすγの影響

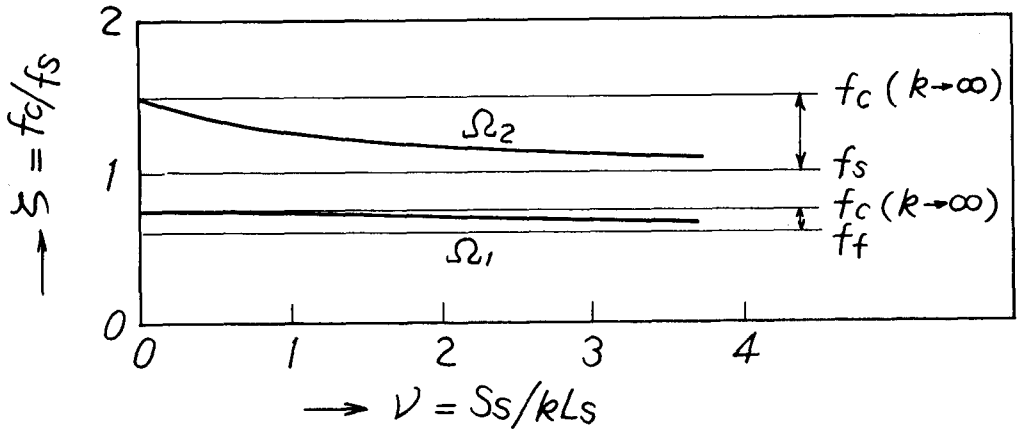


図 4.5 4　結合部バネの影響

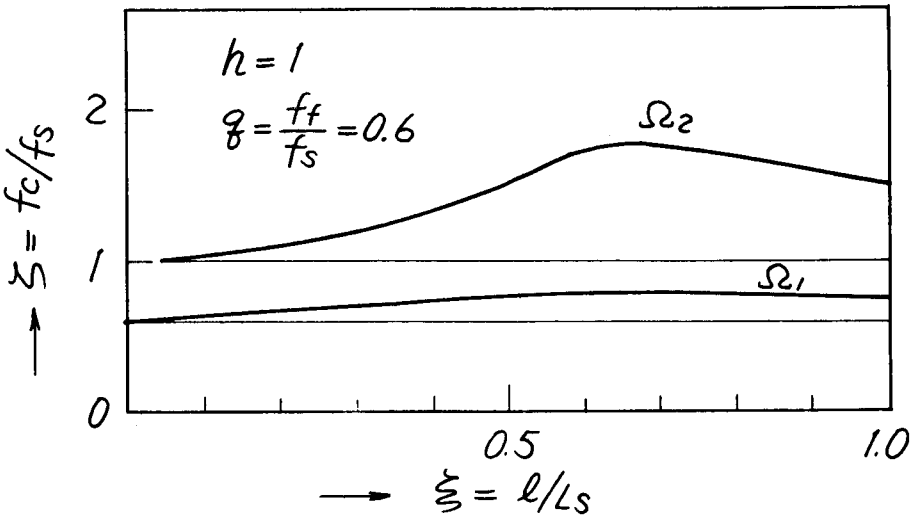


図4.55　結合位置の影響

かなように、1次連成固有振動数より一般に2次固有振動数の方が大きく影響を受け、$\xi = 0.8$ の場合には1.5～2.0倍程度第2固有値が高くなることがわかる。

(B)　実船実験との比較検討

上部構造と煙突との連成振動の影響を調査するために実船実験を実施した。実験結果を図4.57に示す。供試船は図中に示したごとく上部構造の分類ではB typeに属するものであり3層の振動体部分を有するものである。まずbracingなしの実験では図4.57の上図から明らかなように煙突および上部構造前後振動の固有振動数として次の値が得られた。

$$f_f = 440\ \mathrm{cpm} \quad , \quad f_s = 565\ \mathrm{cpm}$$

ゆえに、この場合その比は次のようになる。

$$q = \frac{f_f}{f_s} = 0.779$$

次に図4.57の下図に示したように上部構造の基部甲板より1層上の位置にbracingをとりつけた場合の実験結果ではその連成固有振動数として次の値が得られた。

$${}_c f_1 = 460\ \mathrm{cpm} \quad , \quad {}_c f_2 = 615\ \mathrm{cpm}$$

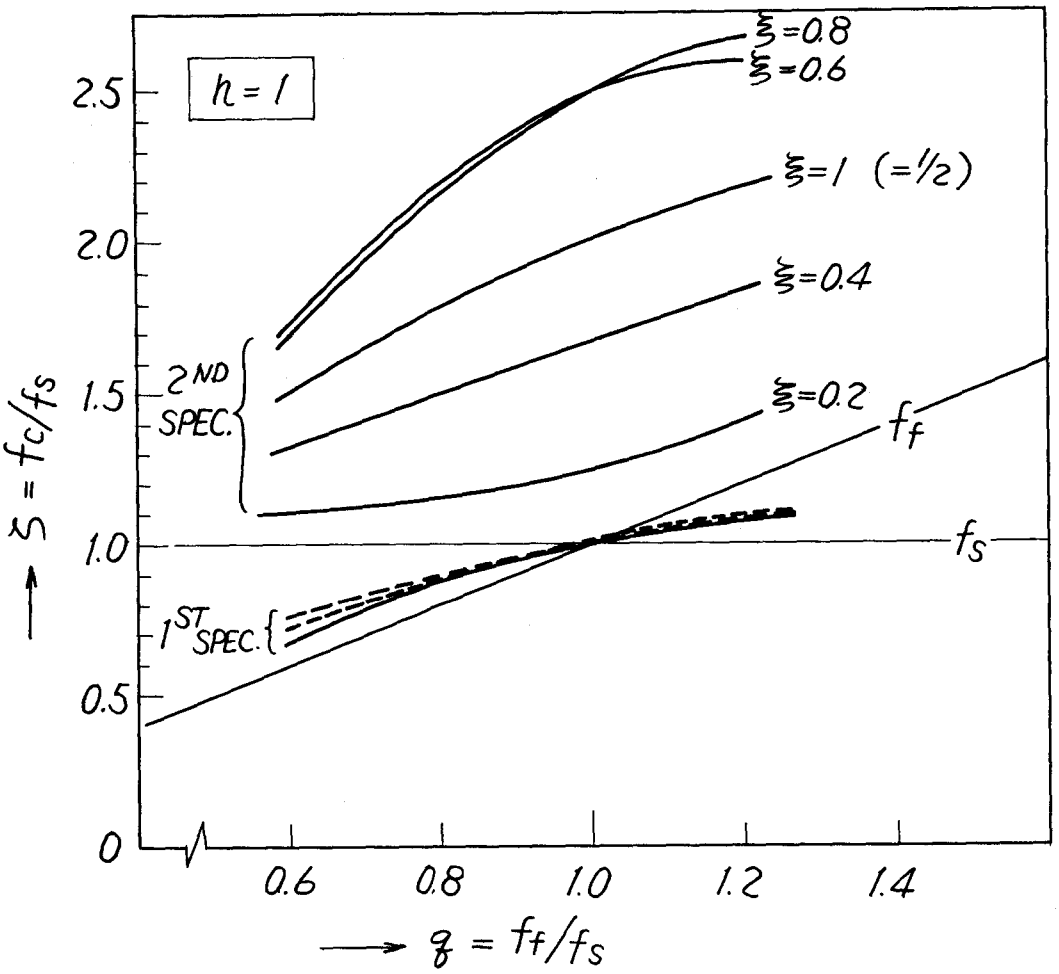


図4.5 6(j) 連成固有値におよぼす高さの影響（h＝1）

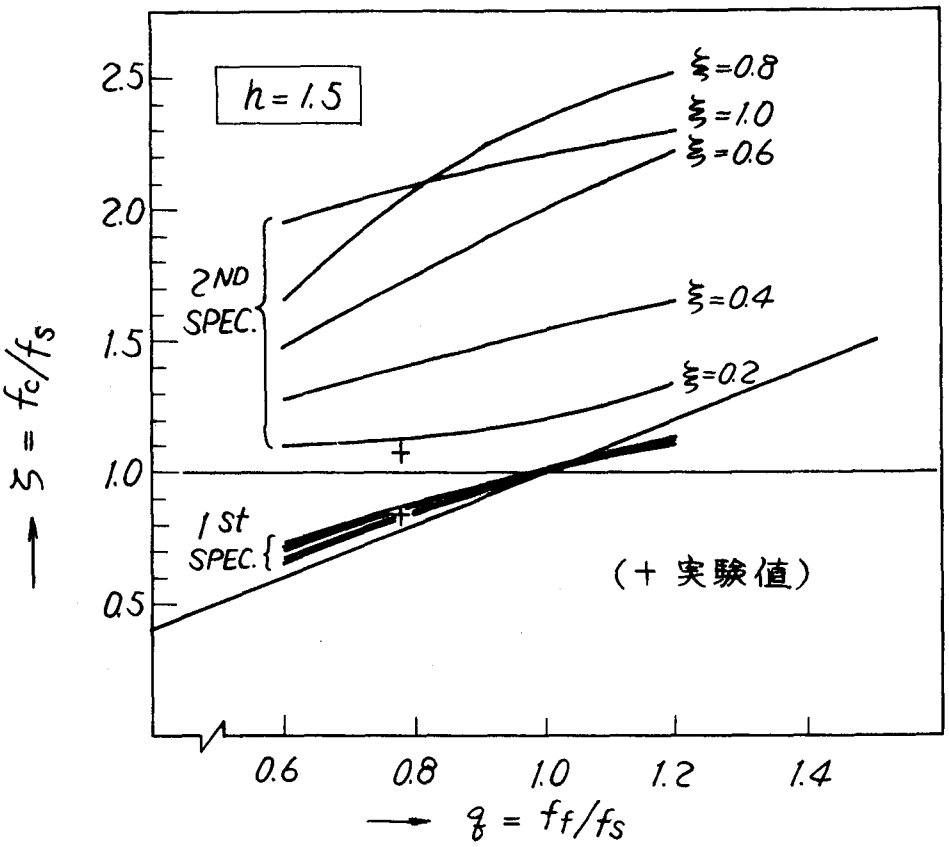


図 4.5 6(ii) 連成固有値におよぼす高さの影響（h＝1.5）

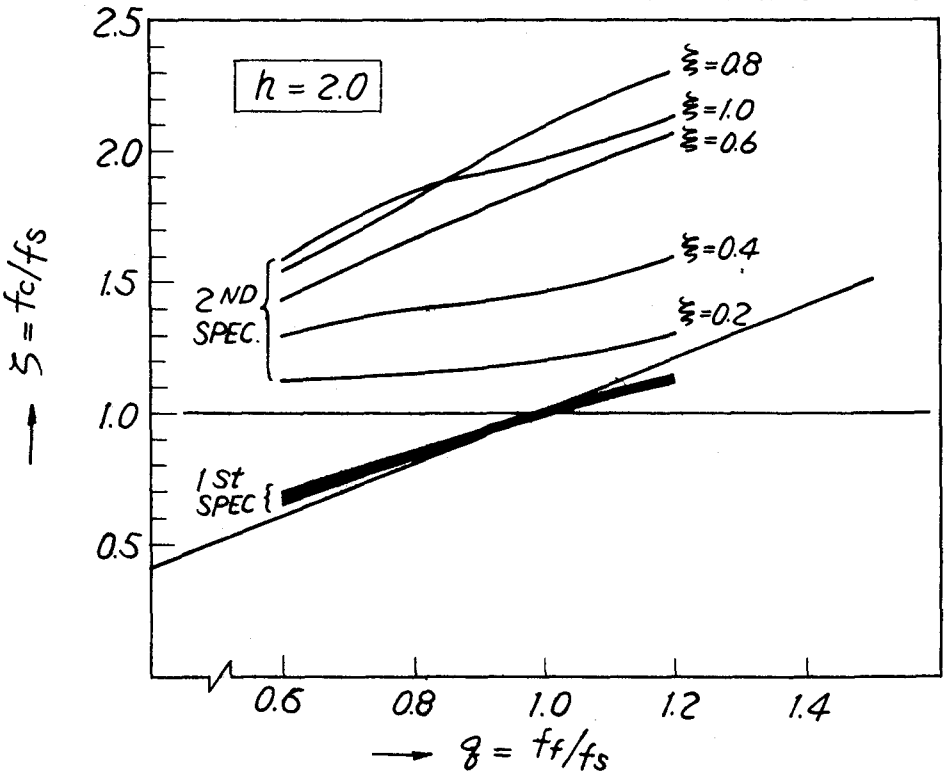


図 4.5 6(iii) 連成固有値におよぼす高さの影響（h＝2）

この値より無次元化振動数は次のようになる。

$$\zeta_1 = 0.814 \quad , \quad \zeta_2 = 1.080$$

本船の場合パラメータの値はほぼ

$$\xi \doteqdot \frac{1}{3} \qquad h \doteqdot 1.4$$

であるので図4.5 6(ii)の曲線を近似的に採用し実験値をPlotすれば図中十字印で示したごとくになる。ζ_2の連成率が低いのは図4.5 6(ii)は$\nu = 0$、すなわちbracingを剛とした場合の計算値であるが、実船ではbracingがある程度弾性を持ち、しかも取り付け部における煙突およびDeckの断面変形をも考慮すれば見掛けのバネ定数も低下するためのνの影響（図4.5 4参照）に起因するものと考えられる。このような点を考慮すれば、この実験は前述した定性的傾向とよく合致する。

(C) 煙突の振動に関連した上部構造の防振対策の一例

上述した供試船は5翼プロペラ、常用回転数90rpmのタービン船である。したがって、blade frequencyは450cpmとなり、丁度煙突の固有振動数と共振したため上部構造前後振動を発生して問題となった例である。図4.5 7の上図から明らかなように煙突のpeak時に上部構造の方もかなり大きなpeakが存在している。このように上部構造の前後振動を防止するためには両者の固有振動数を避けなければならないことは前述した通りである。本船の場合、煙突の基部を補強することにより煙突の固有振動数を上昇さす防振対策がなされた。

いま、上部構造前後振動の防振対策の一例として(A)で述べた性質を利用することが考えられる。すなわち上部構造と煙突とをつなぐことによって両者の固有振動数は共に上昇するが、特に高い方の固有振動数は大きく上昇する。このような補強を行なうにはいくつかの条件が必要であるが、特に就航船において振動が問題となった場合の補強対策としては、工作的にも、材料的にも非常に容易に補強が可能であるのが特徴である。

例えば先の例において本船が常用回転数112rpmのdiesel主機搭載船であったとすれば、本船のblade frequencyは560cpmとなり、図4.5 7から明らかなように、上部構造の前後振動との共振を避けねばならないことになる。そこで、本船の場合、煙突の固有振動数が上部構造のものより低く、約120cpmの差があり、bracingを入れる事により1次固有値がblade frequencyの範囲まで上昇しないこと、また位置的にこのような工作が可能である事等を勘案すれば、bracingを入れる補強対策を採用する

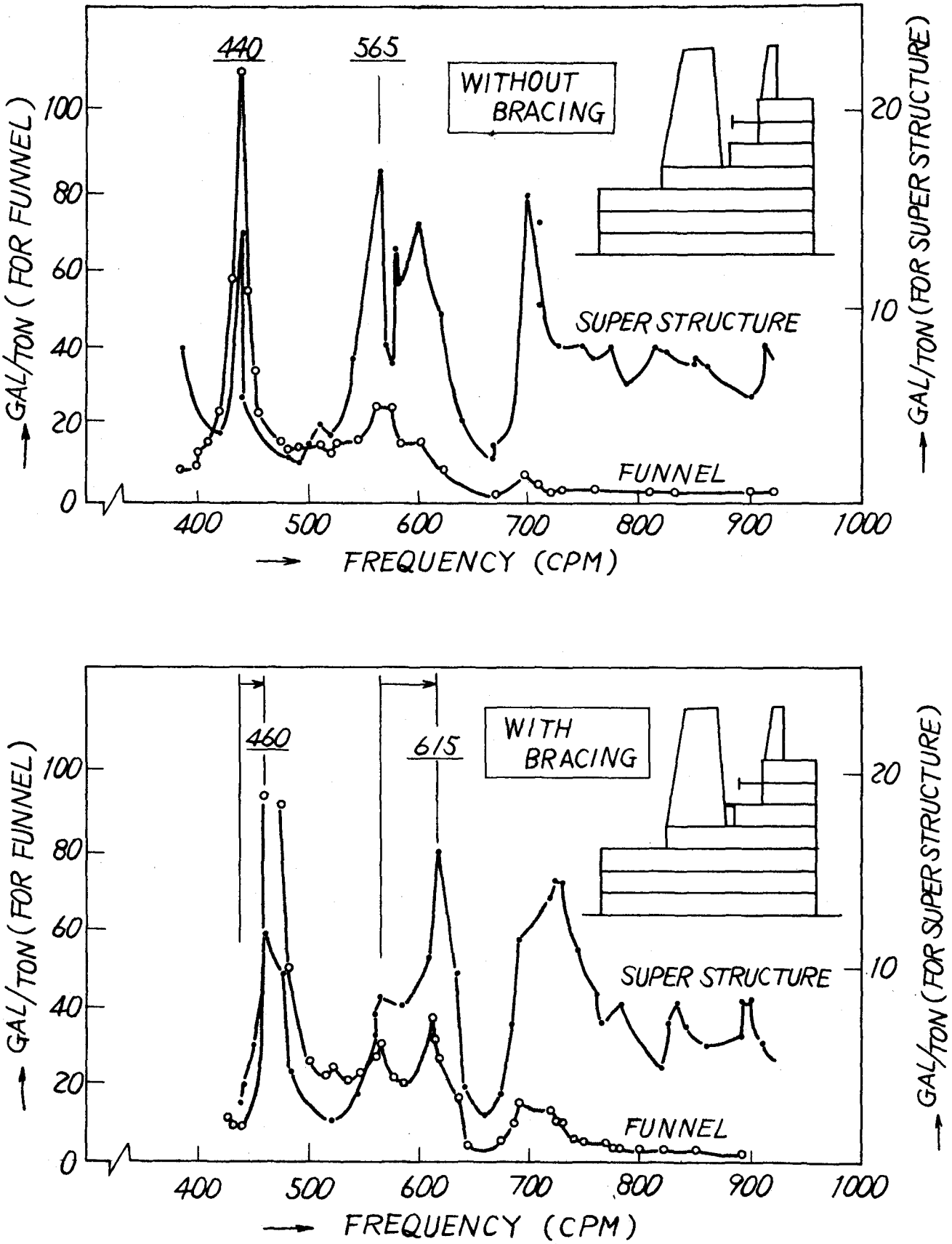


図 4.57 実験値と計算値の比較

ことが可能であることがわかる。本船の例では実験的に簡易なbracingが取りつけらえただけであるが2次固有値は50cpm上昇し一応共振範囲を脱していることがわかる。

第5章　上部構造前後振動の防振対策

5.1　防振対策の必要性

上部構造の前後振動の防振対策は大別して初期設計時における防振と竣工船において不幸にして上部構造の振動が発生した時の防振対策との2通りに分けることができる。前者ではまず第2章で述べた方法にもとづき上部構造前後振動の固有振動数の計算を行ない、対象船の起振振動数との共振を避ける必要がある。プロペラおよび主機による起振振動数としてはこれまでの振動計測の実績より判断して表4.14に示した振動数を対象とすれば十分であるものと思われる。そして計算誤差や航行時におけるプロペラracingの影響、船体振動との連成効果等を考慮して、表4.14に示した起振外力振動数の0.85～1.15倍の振動数範囲を避ければ上部構造の振動発生は回避出来るものと思われる。

表4.14　上部構造前後振動に対する起振振動数

起　振　源	振動数　z：プロペラ翼数　N：主機の常用回転数（rpm）
主機からのもの（ただしディージル船のみ）	気筒数 4　N，2N，4N 5　N，2N，5N 6　2N，6N 7　N，2N，7N 8　N，4N，8N 9　N，2N，6N，9N 10　N，5N，10N 12　6N，12N
プロペラからのもの	z×N，2z×N

初期設計時において共振の可能性があることがわかった時の対策としては種々の方法が考えられるが一番固有振動数に大きな影響を与える要素は構造的な連続性をよくすることである。すなわち上部構造の周壁を構成する side wall や front wall 等の甲板位置におけるくいちがいおよび上部構造基部の不連続構造はその固有振動数を大きく低下させるので構造用部材の再配置および補充がこの場合の防振対策として最も効果的なものと思われる。とに角、この時点における防振対策は工作や材料的な問題はあっても比較的容易にしかも広範囲な対策を講ずることができ、要は計算法の精度の問題に絞られて来る。

この他防振対策として第3章で述べたように Dogger や Funnel の固有振動数も計算し、上部構造と同様に共振を避けておく必要があることは言うまでもなく、これらが共振すれば上部構造前後振動を発生する事になりかねない。

日立造船㈱においてはこのような主旨のもとに上部構造の前後振動の防振対策を数年前から初期設計の時点において検討し、実施しているため大きな振動を生じた船は殆んどないと言ってよい。しかし外国で建造された船等で就航後上部構造の振動が生ずる例もしばしばあり、これらに対する防振対策も必要であるものと考えられる。本章ではこのような意味での上部構造前後振動の防振対策に対する考え方を述べるとともに、基部バネ定数の改善による防振対策の一例を示す事にする。

5.2 防振対策の考え方

5.2.1 防振対策法の分類

就航船において上部構造の前後振動の問題が生じた場合まずその原因が何であるかを調査する必要がある。というのは必ずしも上部構造の前後振動の固有振動数が表 4.14 に示したような起振振動数に一致したからであるとは断言出来ないからである。

前節の例のように上部構造のすぐ近辺にある煙突のような局部振動体が上部構造前後振動を引き起している場合もあるし、Whipping のような船体振動が原因になっていることもある。また乗組員の振動に対する感覚は心理的な面を多分に含み、種々の事情が重なって問題化する場合も多い。それは単なる航海計器等の局部振動の問題である場合もある。〔68〕このような場合には勿論それに叶った防振対策を補こさねばならない。

本節では、このような場合は除外し、上部構造の固有振動数が例えば blade frequency のような避けられない起振振動数と共振しているということがわかった時、どのような防振対策法があるかということについて述べる。

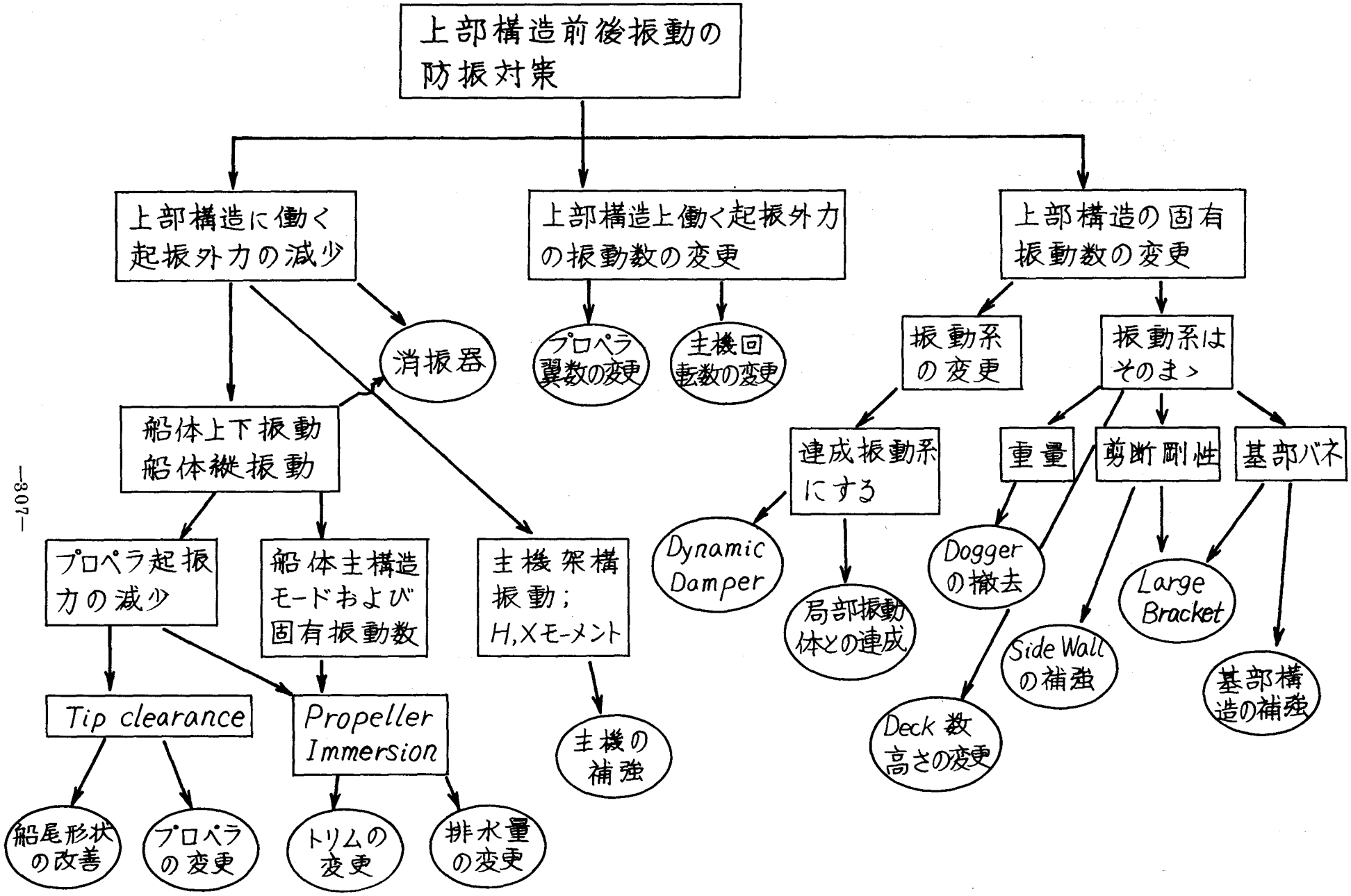


図4.58 防振対策の流れ

この防振対策の大体の流れを図4.58に示す。まず方法を大きく分ければ次の3つに分類出来る。

(1) 上部構造に働く起振外力の減少

(2) 上部構造に働く起振外力の振動数の変更

(3) 上部構造の固有振動数の変更

この3点より防振対策の考え方を述べる。

5.2.2 上部構造に働く起振外力の減少

上部構造内部には起振外力は存在せず、上部構造に働く起振外力はすべて船体主構造を介して上部構造に伝達される性質のものである。言い換えれば上部構造の前後振動は船体振動の応答であるということができる。したがってたとえ上部構造の固有振動数が起振外力の振動数に一致し共振状態になっても、起振外力そのものの値を小さくする事によって上部構造の振動を許容範囲以内におさめることが可能であるという考え方が成立する。勿論これは上部構造の減衰係数等の因子が微妙に影響をおよぼすものと思われる。すなわちこの場合起振外力は基部における回転変位および縦変位でありこれは船体主構造の船体上下振動および船体縦振動に起因するものである。したがって船体振動防止の考え方がそのまま採用出来る他、3.5において述べたように上下振動と縦振動の位相差を利用する方法等も考えられる。これらの具体的な実施法は図4.58に示した通りであるが、これらの方法に基づくものの多くが理論的にその程度を推定することが難しく、実験的に色々とやって見て効果があれば採用するといった方法による補強対策になるが、船体主構造のモードや固有振動数の変更は工事を伴うことなく容易に実施出来るのでよく試みられ、案外成功した例も多い様である。

5.2.3 上部構造に働く起振外力の振動数の変更

上部構造の固有振動数をそのままに据置き起振外力の振動数を変更してやろうという考え方にもとづいたものである。この方法の実施法はもしblade frequencyによる共振であればプロペラ翼か主機回転数を変更することまた主機による共振なら主機回転数の変更ということになる。同一主機で主機回転数を変更することは容易であるが、馬力・スピード等の問題が関係して来る。プロペラまたは主機の変更はcostの面からも問題があるものと思われる。

5.2.4 上部構造の固有振動数の変更

この方法は大きく分けて次の2通りに分ける事ができる。

(1) 上部構造の振動系を他の振動系と連成させ、連成振動系として上部構造の固有振動数

を変更する。

(2) 上部構造の振動系は変えないがこれに影響をおよぼす種々の因子を変えることによって上部構造の固有振動数を変更する。

まず(1)の方法には、4.3.3(d)に述べたfunnelとの連成、doggerとの連成、dynamic damperの採用等種々の新しい方法が考えられる。しかし実験的研究が少ないこと、実施例が殆んどない等で実船上部構造の防振に採用された例は少ないようである。

(2)の方法では上部構造の重量、剪断剛性、基部構造の変更が3つの大きな対策である。この対策では一般にやむを得ない場合を除き、固有振動数は高くすることが望ましいので、重量の減少、剪断剛性、基部バネ定数の増加が補強のねらいとなる。これらの具体的対策法は図4.58に示した通りである。この中でLarge Bracketの増設は上部構造の前後振動の防止としては効果的な方法である。これは多くの船で実施され実績がある補強対策の1つである。

図4.58に示した数々の方法の他にもいくつかの可能な方法が考えられる。例えば上部構造の減衰係数を増加さす方法についてはここでは取り扱っていない。しかしここに述べた方法を一つあるいは組合せて用いれば、上部構造の前後振動はほぼ完全に防止出来るであろうと考えられる。どの方法を採用するかは補強効果、補強に要するcost、工事の可能性、方法の信頼性等の関連また船の運航性能がどうしてもこれらの補強より優先するので、その方面とのかね合い等を検討し決定しなければならない問題である。

5.3 防振対策実施例

本節においては、上部構造前後振動の防振対策の一例としてLarge Bracketおよび基部構造の補強を行なった船に対して、その補強効果を確かめる目的で実験を行なった結果について述べる。

本船は表4.2に示したA船であり、常用回転数(108 rpm)近辺で激しい振動が発生するとの報告があり調査の結果上部構造の固有振動数がblade frequencyと共振していることが判明した*。そのため表4.15に示したような部材を上部構造に挿入し補強を行なうことになった。補償ドック時を利用して行なわれた補強工事時に工事の進展に伴なって遂次起振機実験を行ない、基部バネ定数の変化と固有振動数との関係について調査することにした。しかし残念ながら工期の関係で補強部材の取り付けが系統的には実施出来なかったため、工事の中間における

* 当時は上部構造の前後振動がまだ問題になっていなかったため設計時における防振対策は実施していなかった。

表4.15　上部構造補強工事概要

場　　所	補　強　部　材	重量(t)
Nav.Bridge DK	5.2m×5.1m×12.7mm Large BKT	5.8
Bridge DK	両舷 Steel wall,Pillar 増設	1.8
Boat DK	左舷 Pillar,右舷 Steel wall 増設	1.4
Upper DK	Pillar 増設	0.3
	計	9.3

表4.16　補強工事による固有振動数の変化

実験日	計算値		実験値		補強工事の進捗
	f (cpm)	K (t/cm)	f (cpm)	K (t/cm)	
39.11.	540	215	525	200	—
40. 5.18	540	215	558	243	(Dogger に Stay)
40. 5.20	593	280	576	256	Large BKT を除く全部材仮付
40. 5.22	660	393	680	432	BKT を除く全部材溶接
40. 5.24	673	418	680	432	Large BKT 仮付
40. 5.26	685	443	715	530	全部材取付終了

(注) 39.11と40.5.18との間の補強工事について詳細不明、Dogger に Stay を取り付けたのみと聞いている。したがって両者のK－valueの計算値は同じとした。

実験は2日間隔で実施したが、その結果を上部構造前後振動の計算値、Kの計算値等とともに取りまとめて示せば表4.16のごとくである。ただし工事中間のKの値については仮付けした補強部材の有効性をいくらにとるかが問題であるが、ここでは仮りに50％有効として計算を行なっている。補強前と補強後の起振機実験より得られた共振曲線を図4.59に示す。実験結果から見て明らかなように上部構造の固有振動数はほぼ計算通り上昇さすことができ、この防振対策は見事に成功したことがわかる。

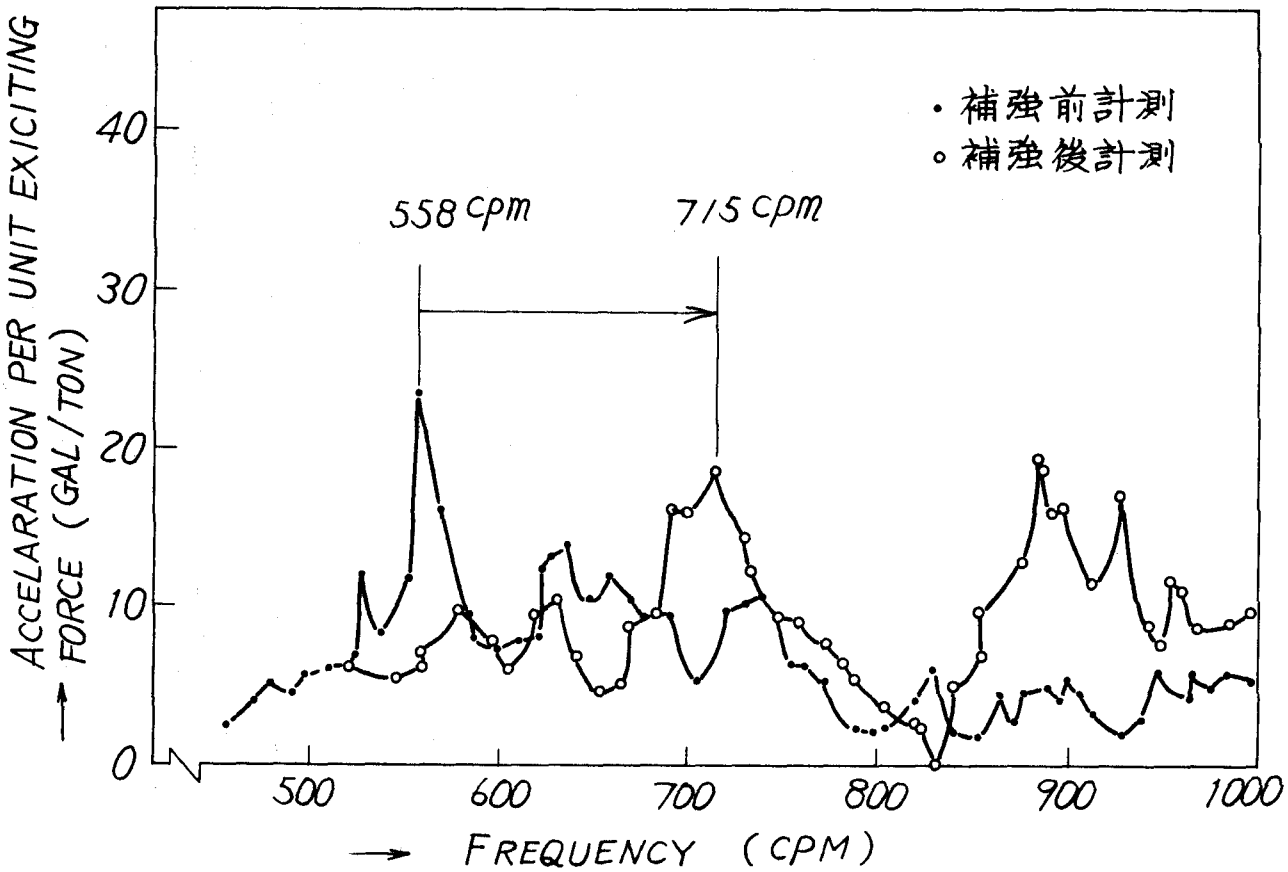


図 4.5 9　補強前後の上部構造の共振曲線

第6章　結　　言

本編では巨大船の局部振動として最も重要と思われる船尾船橋楼を有する巨大船の上部構造の前後振動の問題について理論的実験的研究を行なった。

第2章において上部構造前後振動固有振動数の計算法について述べた。すなわち、

(1) 上部構造前後振動の固有振動数を基部において回転バネ支持され甲板位置に集中質量を有する変断面片持梁と見なしその剪断、曲げおよび剛体回転変形を考慮して求める計算法を導いた。

また上部構造の側壁に波板を使用した場合の固有振動数に与える影響を検討し次の結論を得た。

(2) 静的模型実験により波板の剪断剛性は防撓板に比較して約３０％低下する。しかし固有振動数におよぼす影響は基部の固着条件などのため必ずしも剪断剛性に比例して低下せず検討の対象とした船では固有振動数にして約１０％低下することがわかった。

また、上部構造前後振動の実船実験を行ない、その振動の性状を実験的に明らかにした。実験より得られた２，３の性状は次の通りである。

(3) 上部構造の前後振動では層数によって異なるが４００cpm～８００cpmの近傍にそれぞれpeak群が見られる。これらのpeakはblade frequencyと共振の可能性がある。

(4) 上部構造前後振動のmode curveはいずれも片持梁の１次型の形状を示すが基部甲板においても前後方向の振動変位が認められ、２，３番目のpeakでは上部構造上層と逆位相になる。

また電子計算機による計算値と実船の起振機実験より得られた実験値を２６隻の船の上部構造について比較を行なった。その結果、

(5) その誤差が１０％以内のものが全体の５２％、２０％以内にあるものが全体の７２％であり、必ずしも良好な結果であるとは言えないが上部構造の複雑な構造を考慮すればやむを得ないものと思われる。

また、これらの実船実験の結果をもとにして、設計段階で簡便に使用出来る簡易計算法を求めた。この簡易計算値と実験値とを比較すると次のようなことがわかった。

(6) その誤差が１０％以内のものが全体の７０％、残りはすべて２０％以内におさまっており、良い精度を示す。

しかし、もともとこの簡易計算法はこれらの実験結果をもとにしたものであるので精度の向上も当然であると考えられる。そこでこれらの実験船以外の建造船に対して適用した比較では次

のようになった。

(7) １０％以内の誤差におさまるものが全体の５５％、その他は大体２０％以内の誤差範囲に入っており、かなり良い精度で計算出来ることがわかった。

第３章においては船体振動と上部構造前後振動の関連について述べた。まず船体および上部構造を簡単な均一梁と見なした定性的な検討結果より次の結論を得た。

(8) 船体振動が上部構造前後振動の固有振動数におよぼす影響は船体振動（縦および上下振動）の固有振動数と上部構造のものが一致した時最も大きい影響を与える。しかしその程度は高々５％内外である。

また、実船実験結果との比較結果より、

(9) 実船実験より得られたmode curveの傾向は上述の定性的検討と良く一致し、船体振動と上部構造の前後振動との連成振動の様相をよく説明出来ることがわかった。

また、船体縦振動と上部構造前後振動の関連を示す例として実船実験により上部構造の共振曲線に同程度の大きさのpeakが２つ得られた場合、上部構造の固有振動数を見分ける方法として、

(10) 上部構造のmode curveにおいて一般に頂部と基部との振幅比が大きい方が上部構造にもとづく固有振動数であり、上部構造の頂部の共振曲線において船体縦振動にもとづくpeakの方が上部構造にもとづくものより鋭いpeakを示すことがわかった。

さらに、定量的な連成固有振動数を計算する方法として、

(11) 船体主構造および上部構造をstepped beamと見なし船体縦振動および船体上下振動と上部構造前後振動の連成固有振動数をTransfer Matrix Methodにより計算する方法を示した。

また、上部構造基部において船体振動による強制前後変位および強制回転変位を受ける場合の

(12) 減衰を考慮した上部構造の振動応答の計算法を示し、減衰係数、強制力の位相差等の応答におよぼす影響を検討した。

第４章においてはまず上部構造前後振動におよぼすDoggerの影響について理論的実験的考察を行なった。その結果、

(13) 局部振動体としてのDoggerとの連成効果は実験より求められた位相関係、固有振動数の低下をよく説明出来る事がわかった。

次に上部構造前後振動の固有振動数の計算における煙突の取り扱いについての考察を行なうとともに、両者の連成振動の一例として、

(14) bracingにより両者をつなぐことによって、両者は連成振動系となり、煙突、上部構造にもとづく固有振動数は一次固有値はあまり変化しないが、二次固有値は大きく上昇させることがわかった。

この現象を実験的に検証するとともに防振対策の一つとして利用出来ることを示した。

第5章においては上部構造前後振動の防振対策の一般的な考え方について述べた。竣工船において振動問題が生じた場合の防振対策として

(15) 本質的には(a)起振外力の減少 (b)起振振動数の変更 (c) 固有振動数の変更、の三つをもとにした種々の具体的な防振対策法を示した。

さらに、その実施例の一つとしてLarge Bracketをつけることにより防振対策を行なった船に対して補強工事にあわせて実験を行ない計算値と比較し補強効果を確認した。

謝　　辞

本論文をまとめるに当って御指導頂いた大阪大学工学部　八木順吉教授、松浦義一教授、また研究の実施に当って終始変らぬ御指導を頂いた日立造船㈱技術研究所　広渡智雪博士、また実船実験の実施に御協力頂いた日立造船㈱技術研究所、因島工場、堺工場の関係者各位に厚くお礼申し上げます。

参　考　文　献

〔1〕 Laursen,H.I.,Shubinski,R.P.and Clough,R.W.,Dynamic Matrix Analysis of Framed Structures,Proceedings,Fourth US Natl. Congress of Applied Mechanics,ASCE,Vol.1, 1962

〔2〕 Holzer,H., Die Berechnung der Drehschwingungen,Springer Verlag OHG,Berlin, Germany, 1921

〔3〕 Myklestad,N.O., A New Method of Calculating Natural Modes of Uncoupled Bending Vibration of Airplane Wings and Other Types of Beams, Journal of Aeronautical Sciences, Vol.II, 1944.

〔4〕 Prohl,M.A., A General Method for Calculating Critical Speeds of Flexible Rotors, Journal of Applied Mechanics,Vol.12, No.3, 1945

〔5〕 Adams,E.J. and Welch,A.R., Calculation of Flexural Critical Frequencies of Ship Hulls by Prohl's Method, TMB Report 582, 1947

〔6〕 Mathewson,A.W., Calculation of the Normal Vertical Flexural Modes of Hull Vibration by the Digital Process, TMB Report 706, 1950

〔7〕 Mc Goldrick,R.T., Comparison between Theoritically and Experimen—

tally Determined Natural Frequencies and Modes of Vibration of Ship, TMB Report 906, 1954

〔8〕 Leibowitz,R.C. and Kennard, E.H., Theory of Freely Vibrating Non-uniform Beams, Including Methods of Solution and Application to Ships, TMB Report 1317., 1961

〔9〕 Neubert,V.H., Hahn,H.T.and Lee,H., Lumped Parameter Beams Based on Impedance Methods, Proceedings of the ASCE,Vol.96, No.EM1, 1970

〔10〕 Ohtaka,K., Hibino,F.and Ohji,M., A Study of Vertical Vibration of Ships.(1 st & 2nd report),造船協会論文集 第116号(1965), 第119号 (1966)

〔11〕 Pestel,E.C.and Lickie,F.A., Matrix Methods in Elastomechanics, Mc Graw - Hill, 1963.

〔12〕 柴田 碧,遷移行列法による構造物の振動解析,マトリックス構造解析法講座－9および10,JSSC誌,Vol.3,4 No.24,26, 1968.

〔13〕 柴田 碧,遷移行列法による振動解析－数値計算の精度維持について－,日本鋼構造協会第3回大会研究集会,マトリックス構造解析講演論文集,1969.

〔14〕 松浦義一,剪断の影響を考慮した両端自由梁の屈曲振動,関西造船協会誌第94号, 1959.

〔15〕 Archer,J.S., Consistent Mass Matrix for Distributed Mass Systems,Journal of the ASCE,Vol.89,No.ST4,1963.

〔16〕 Ramsden,J.N.and Stoker,J.R., Mass Condensation: A Semi-Automatic Method for Reducing the Size of Vibration Problems,International Jour.for Numerical Methods in Engineering, Vol.1, 1969.

〔17〕 日本造船研究協会,船体機関の振動防止対策に関する実験研究報告書(その一), 第94研究部会,研究資料No.60-1 (1967),No.71-1 (1968),No.91 (1969)

〔18〕 永元隆一他,船体固有振動数の計算法、西部造船協会会報 第35号, 1968

〔19〕 大高勝夫,香川恍二, 船体縦振動の研究(その一),造船学会論文集 第123号,

1968

〔20〕 McGoldrick,R.T., Ship Vibration, TMB Report 1451, 1960.

〔21〕 Chopra,A.K., HydrodynamicPressures on Dams during Earthquakes, Proc.A.S.C.E., 93 EM6, 1967.

〔22〕 Zienkiewicz,O.C., and Cheung,Y.K., Finite Elements in the Solution of Field Problems,The Engineer,1965.

〔23〕 藤野 勉, 有限要素法による流体力学解析, 日本鋼構造協会, マトリックス構造解析講演論文集, 1969

〔24〕 広渡智雪, 松本瓦平, 流体中の弾性体の振動, 日本鋼構造協会, マトリックス構造解析講演論文集, 1969.

〔25〕 松本瓦平, 有限要素法による三次元付加水質量の検討, 日立造船社内研究報告書. 技研－1523,

〔26〕 鬼頭史城, 矩形水漕壁の接水振動について, 造船協会論文集 第106号

〔27〕 土木学会, 本州四国連絡橋技術調査報告書, 付属資料

〔28〕 Taylor,J.Lockwood, Some Hydrodynamical Inertia Coefficients. Phil.Mag. Vol.9, 1930.

〔29〕 鬼頭史城, 円形水槽中における弾性棒の振動について, 造船協会誌 第352号

〔30〕 Lamb,H., Hydrodynamics (6th edition), Dover Publications, 1932

〔31〕 Lewis,F.M., The Inertia of the Water Surrounding a Vibrating Ship, SNAME, 1929.

〔32〕 熊井豊二, 船体上下振動付加質量の三次元修正値について (第一報) —楕円筒の振動におけるJ—造船協会論文集第112号

〔33〕 一色 浩, 前田久明, 本質的に無限領域が問題となる場合の偏微分方程式の境界値問題の数値積分法について, 日本鋼構造協会STAN委員会資料

〔34〕 松浦義一, 川上 肇, 有限要素法による船体振動の付加質量および付加慣性モーメントの計算, 造船学会論文集第124号

〔35〕 Kruppa,C., Beitrag zum Problem der Hydrodynamischen Trägheisgrößen bei elastischen Schiffsswingungen.Schiffstechnik, 1962

〔36〕 熊井豊二, 船体上下振動の三次元付加水質量の一推定法について, 西部造船会会報

第３２号

〔37〕 Matsumoto,K., Application of Finite Element Method to Added Virtual Mass of Ship Hull Vibration (1st Report), 日本造船学会論文集第127号

〔38〕 Kumai,T., Some Notes on the Virtual Mass Associated with Vertical Vibration of Ships., European Shipbuilding No.5,1962

〔39〕 Joosen,W.P.A. and Sparenberg,J.A., On the Longitudinal Reduction Factor for the Added Mass of Vibrating Ships with Rectangular Cross-Section. Netherland's Research Centre T.N.O., Report No.40S, 1961.

〔40〕 Zienkiewicz,O.C.and Cheung,Y.K., The Finite Element Method in Structural and Continum Mechanics,McGraw Hill, 1967

〔41〕 吉識雅夫，川井忠彦， 平板の曲げ振動および座屈問題に対するエネルギー法の一般的適用法について(I)，造船協会論文集 第117号

〔42〕 松本亙平，小幡良男，石浜高明， 有孔板，三角形板の振動，日立造船㈱社内報告書 技研－１５８５．

〔43〕 栖原寿郎， 箱型梁の振動実験，構造委員会西部地区部会資料２３，３３，３４

〔44〕 末次一誠，藤井克哉， 船底振動について，関西造船協会誌第111号，１９６３

〔45〕 山越道郎，大沼 覚， 船体振動と船底振動との連成について，造船協会論文集 第１１８号，１９６５．

〔46〕 Ohtaka,K.and Ohyama,T., Vertical Vibration of Ships Coupled with Bottom Vibration, 造船学会論文集第１２６号，１９６９．

〔47〕 熊井豊二， 横断面の剛性を考慮した巨大船の船体上下振動について，西部造船会会報 第３３号，１９６７．

〔48〕 Ohtaka,K., Kagawa,K.and Yamamoto,T., Higher Mode Virtical Vibration of Giant Tanker (1st Report) 日本造船学会論文集 第１２５号，１９６９．

〔49〕 清水茂俊，佐藤正視， 格子構造の剪断振動，西部造船会会報第３７号，１９６９．

〔50〕 松本亙平， 箱桁と考えた船体振動，日立造船㈱社内報告

〔51〕 松本亙平， 巨大船の特異振動，日立造船技報 Vol.31,No.3 １９７０．

〔52〕 松本亙平， 巨大船のNon-Beam Vibrationについて，造船学会論文集第125号，1969．

〔53〕 熊井豊二， 荷油の有効振動質量について，造船協会論文集第117号，1965．

〔54〕 秋田好雄他， 制水隔壁の剪断剛性について，造船学会論文集第123号，1968．

〔55〕 山越道郎，香川恍二， ウィングタンクの剪断変形，西部造船会会報第29号，1965．

〔56〕 山口勇男， 船体横強度近似計算法について（第2報），造船協会論文集第109号，1961

〔57〕 日本造船研究協会編， 巨大船の船体横強度に関する研究，第83研究部会，研究資料第66号

〔58〕 三菱重工業㈱長崎研究所，剪断振動をする梁についての一考察，SR94，V26-11

〔59〕 熊井豊二，二重底振動の付加慣性質量が船体固有振動数に及ぼす影響について，西部造船会会報第39号，1970．

〔60〕 Draijer,C., Dynamic Phenomena on Board Large Tankers,International Shipbuilding Progress,Vol.10,No,112.

〔61〕 広渡智雪，松本亙平 上部構造の前後振動に関する研究，造船協会論文集第119号，1966．

〔62〕 広渡智雪，松本亙平，加道博章， 上部構造の前後振動に関する研究（続報），造船学会論文集第125号，1969．

〔63〕 松本亙平， 船楼の固有振動数の計算法，振動委員会資料 V－22－3 (b)

〔64〕 白石隆義， コルゲート・プレートの剪断剛性，造船協会論文集第115号

〔65〕 関西造船協会編， 造船設計便覧（改訂版），海文堂，1968，p525．

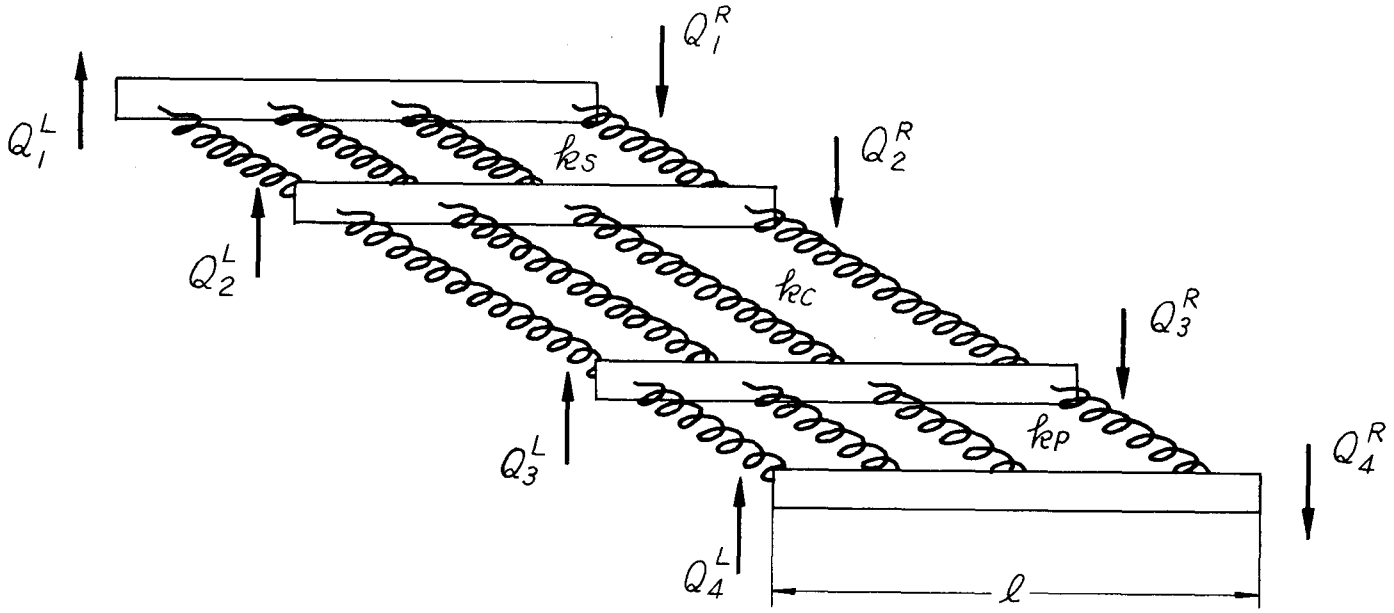
〔66〕 松本亙平， 船体縦振動と上部構造前後振動の関連について，SR94，V26-9，1967．

〔67〕 松浦義一他， 長大倉口船の捩り一曲げ連成固有振動数の研究，（第1報）～（第4報），関西造船協会誌第127号，第129号，第131号，1968．

〔68〕 Hirowatari,T., Matsumoto,K.and Kadoh,H.,Vibration Measurement of M.V.Haverton, 日立造船㈱社内報告，1969．

付録1　Field transfer matrix

tank 部において、たがいに分布バネでつながれた4本の剪断梁の運動方程式は次式で表わされる。（図A．1）



図A．1　tank部のfield transfer matrix

$$
\left.
\begin{aligned}
&m_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + k_s\ (y_1 - y_2) = S_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \\
&m_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} - k_s\ (y_1 - y_2) + k_c\ (y_2 - y_3) = S_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \\
&m_3 \frac{\partial^2 y_3}{\partial t^2} - k_c\ (y_2 - y_3) + k_p\ (y_3 - y_4) = S_3 \frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} \\
&m_4 \frac{\partial^2 y_4}{\partial t^2} - k_p\ (y_3 - y_4) = S_4 \frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2}
\end{aligned}
\right\} \text{------- (A．1)}
$$

ここに、　y_i　：i 番目梁のたわみ

m_i　：i 番目梁の単位長さ当り質量

S_i　：i 番目梁の剪断剛性

k_s, k_c, k_p：各梁間の分布バネ定数

$y_j = Y_j e^{i\omega t}$ ($j=1,2,3,4$) とおき、(A．1) 式に代入し、得られた連立微分方程式の解を $Y_j = A_j e^{\lambda x}$ ($j=1,2,3,4$) とおく。さらに船体構造の対称性より、$m_1=m_4$, $m_2=m_3$, $S_1=S_4$, $S_2=S_3$, $k_s=k_p$ とおけば解を対称型、逆対称型振動に分離して取り扱うことができる。すなわち、連立微分方程式の特性方程式は次式になる。

$$\left.\begin{array}{ll} \text{対称型：} & \begin{vmatrix} \tau_1 & k_s \\ k_s & \tau_2 + k_c \end{vmatrix} = 0 \\ \text{逆対称型：} & \begin{vmatrix} \tau_1 & k_s \\ k_s & \tau_2 - k_c \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right\} \text{----------} \quad (A.2)$$

ここに、 $\tau_1 = S_1 \lambda^2 + m_1 \omega^2 - k_s$

$\tau_2 = S_2 \lambda^2 + m_2 \omega^2 - (k_s - k_c)$

(A．2) 式を λ について解けば一般に次の重二次方程式が得られる。

$$\lambda^4 + 2\Phi\lambda^2 + \Psi = 0 \quad \text{----------} \quad (A.3)$$

対称型：$2\Phi = q_1^2 + q_2^2 - r_1^2 - r_{12}^2$

$\Psi = q_1^2 q_2^2 - r_{12}^2 q_1^2 - r_1^2 q_2^2$

逆対称型：$2\Phi = q_1^2 + q_2^2 - r_1^2 - r_{12}^2 - 2r_2^2$

$\Psi = q_1^2 q_2^2 - (r_{12}^2 + 2r_2^2) q_1^2 - r_1^2 q_2^2 + 2r_1^2 r_2^2$

ここに、 $q_1^2 = \dfrac{m_1}{S_1}\omega^2$, $q_2^2 = \dfrac{m_2}{S_2}\omega^2$, $r_1^2 = \dfrac{k_s}{S_1}$

$r_{12}^2 = \dfrac{k_s}{S_2}$, $r_2^2 = \dfrac{k_c}{S_2}$

(A．3) 式の λ^2 は 2 実根を持つが、その根の符号によって解の形が変わるのでそれぞれの場合に分けて計算する。

(1) $\Phi < 0$, $\Psi > 0$

λ^2 は正根を 2 つ持ち、解の形は次式となる。

$$\left.\begin{array}{l} Y_1 = A_1^{(1)} \cosh \lambda_1 x + A_1^{(2)} \sinh \lambda_1 x + A_1^{(3)} \cosh \lambda_2 x + A_1^{(4)} \sinh \lambda_2 x \\ Y_2 = A_2^{(1)} \cosh \lambda_1 x + A_2^{(2)} \sinh \lambda_1 x + A_2^{(3)} \cosh \lambda_2 x + A_2^{(4)} \sinh \lambda_2 x \end{array}\right\} \text{-------} \quad (A.4)$$

ここに、 $\lambda_1 = \sqrt{\sqrt{\Phi^2 - \Psi} - \Phi}$

$\lambda_2 = \sqrt{-\sqrt{\Phi^2 - \Psi} - \Phi}$

(A．4) 式の係数間には次の関係がある。

$$\left.\begin{array}{ll} A_2^{(i)} = d_1 A_1^{(i)} & (i=1,2) \\ A_2^{(i)} = d_2 A_1^{(i)} & (i=3,4) \end{array}\right\} \text{----------} \quad (A.5)$$

ここに、 $d_1 = 1 - (\lambda_1^2 + q_1^2) / r_1^2$

$d_2 = 1 - (\lambda_2^2 + q_1^2) / r_1^2$

(A．4) 式および (A．5) 式よりこの範囲の tank部の state vector は次の形となる。

$$Z = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Q_1 \\ Y_2 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \lambda_1 x & \sinh \lambda_1 x & \cosh \lambda_2 x & \sinh \lambda_2 x \\ S_1 \lambda_1 \sinh \lambda_1 x & S_1 \lambda_1 \cosh \lambda_1 x & S_1 \lambda_2 \sinh \lambda_2 x & S_1 \lambda_2 \cosh \lambda_2 x \\ d_1 \cosh \lambda_1 x & d_1 \sinh \lambda_1 x & d_2 \cosh \lambda_2 x & d_2 \sinh \lambda_2 x \\ S_2 d_1 \lambda_1 \sinh \lambda_1 x & S_2 d_1 \lambda_1 \cosh \lambda_1 x & S_2 d_2 \lambda_2 \sinh \lambda_2 x & S_2 d_2 \lambda_2 \cosh \lambda_2 x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^{(1)} \\ A_1^{(2)} \\ A_1^{(3)} \\ A_1^{(4)} \end{bmatrix}$$

$$\equiv [\Gamma(x)] \cdot \mathbf{A} \quad \text{----------} \quad (A.6)$$

他の範囲も同様にして次のように計算できる。

(2) $\Psi < 0$ （正根，負根１つずつ）

$$Y_1 = A_1^{(1)} \cosh \lambda_1 x + A_1^{(2)} \sinh \lambda_1 x + A_1^{(3)} \cos \lambda_2 x + A_1^{(4)} \sin \lambda_2 x$$

$$Y_2 = A_2^{(1)} \cosh \lambda_1 x + A_2^{(2)} \sinh \lambda_1 x + A_2^{(3)} \cos \lambda_2 x + A_2^{(4)} \sin \lambda_2 x$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\sqrt{\Phi^2 - \Psi} - \Phi}$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\sqrt{\Phi^2 - \Psi} + \Phi}$$

$$d_1 = 1 - (\lambda_1^2 - q_1^2) / r_1^2$$

$$d_2 = 1 + (\lambda_2^2 - q_1^2) / r_1^2$$

$$[\Gamma(x)] = \begin{bmatrix} \cosh \lambda_1 x & \sinh \lambda_1 x & \cos \lambda_2 x & \sin \lambda_2 x \\ S_1 \lambda_1 \sinh \lambda_1 x & S_1 \lambda_1 \cosh \lambda_1 x & -S_1 \lambda_2 \sin \lambda_2 x & S_1 \lambda_2 \cos \lambda_2 x \\ d_1 \cosh \lambda_1 x & S_1 \lambda_1 \sinh \lambda_1 x & d_2 \cos \lambda_2 x & d_2 \sin \lambda_2 x \\ S_2 d_1 \lambda_1 \sinh \lambda_1 x & S_2 d_1 \lambda_1 \cosh \lambda_1 x & -S_2 d_2 \lambda_2 \sin \lambda_2 x & S_2 d_2 \lambda_2 \cos \lambda_2 x \end{bmatrix}$$

(3) $\Phi > 0$, $\Psi > 0$ （負根２つ）

$$Y_1 = \overset{(1)}{A_1}\cos\lambda_1 x + \overset{(2)}{A_1}\sin\lambda_1 x + \overset{(3)}{A_1}\cos\lambda_2 x + \overset{(4)}{A_1}\sin\lambda_2 x$$

$$Y_2 = \overset{(1)}{A_2}\cos\lambda_1 x + \overset{(2)}{A_2}\sin\lambda_1 x + \overset{(3)}{A_2}\cos\lambda_2 x + \overset{(4)}{A_2}\sin\lambda_2 x$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\Phi - \sqrt{\Phi^2 - \Psi}}$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \Psi}}$$

$$d_1 = 1 + (\lambda_1^2 - q_1^2) / r_1^2$$

$$d_2 = 1 + (\lambda_2^2 - q_1^2) / r_1^2$$

$$[\Gamma(x)] = \begin{bmatrix} \cos\lambda_1 x & \sin\lambda_1 x & \cos\lambda_2 x & \sin\lambda_2 x \\ -S_1\lambda_1\sin\lambda_1 x & S_1\lambda_1\cos\lambda_1 x & -S_1\lambda_2\sin\lambda_2 x & S_1\lambda_2\cos\lambda_2 x \\ d_1\cos\lambda_1 x & d_1\sin\lambda_1 x & d_2\cos\lambda_2 x & d_2\sin\lambda_2 x \\ -S_2 d_1\lambda_1\sin\lambda_1 x & S_2\lambda_1 d_1\cos\lambda_1 x & -\lambda_2 S_2 d_2\sin\lambda_2 x & S_2 d_2\lambda_2\cos\lambda_2 x \end{bmatrix}$$

$x=0$, $x=\ell$ における state vector をそれぞれ $\mathbf{Z}^L$, $\mathbf{Z}^R$ で表わすと、(A．6) 式より次式で表わされる。

$$\mathbf{Z}^L = [\Gamma(0)] \cdot \mathbf{A}$$

$$\mathbf{Z}^R = [\Gamma(\ell)] \cdot \mathbf{A}$$

この２式より $\mathbf{A}$ を消去すれば、tank部の field transfer matrix、$\mathbf{H}$ は次式で求まる。

$$\mathbf{Z}^R = [\Gamma(\ell)] \cdot [\Gamma(0)]^{-1} \cdot \mathbf{Z}^L$$

$$\equiv \mathbf{H} \cdot \mathbf{Z}^L$$

後部または前部における field transfer matrix も同様にして次式のように求まる。

対 称 型 ： $_a\mathbf{H}$ または $_f\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \cos p\ell & \sin p\ell / Sp \\ -Sp\sin p\ell & \cos p\ell \end{bmatrix}$

逆対称型 ： $_a\mathbf{H}$ または $_f\mathbf{H}$

$$= \begin{bmatrix} \cosh r\ell & \sinh r\ell / Sr \\ Sr\sinh r\ell & \cosh r\ell \end{bmatrix} \qquad \left(0 < \omega < \sqrt{\frac{2k_s}{m}}\right)$$

$$\begin{bmatrix} \cos r\ell & \sin r\ell / Sr \\ -Sr\sin r\ell & \cos r\ell \end{bmatrix} \qquad \left(\sqrt{\frac{2k_s}{m}} \leqq \omega\right)$$

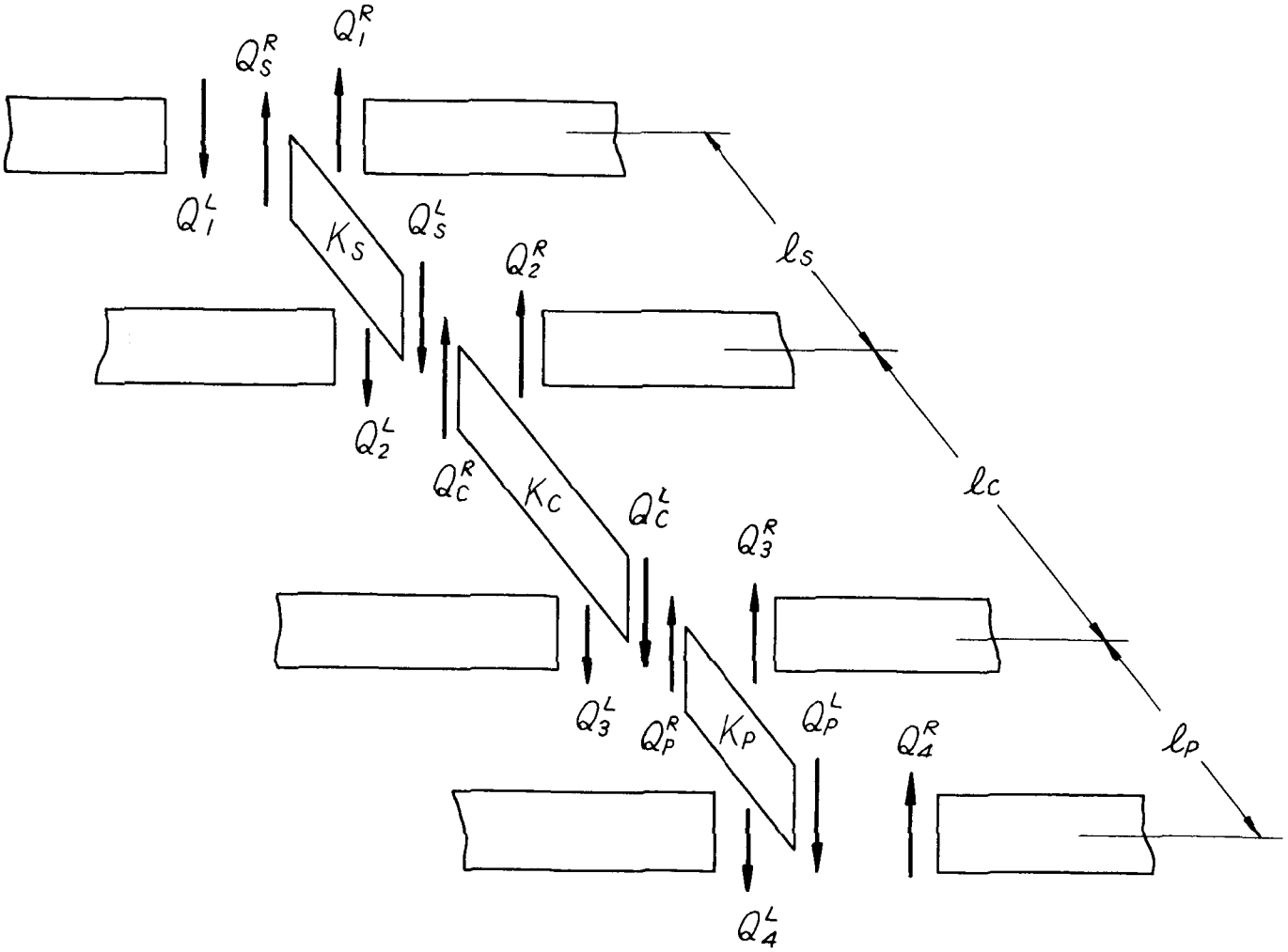
ここに、 $p = \sqrt{\frac{m}{S}}\omega$

$$r = \sqrt{\left|\frac{2k_s}{S} - \frac{m\omega^2}{S}\right|}$$

付録2　Point transfer matrix

tank部における横隔壁は船側外板および縦通隔壁と交叉し、3つの部分に分かれる。この3つの剪断バネの変位と剪断力の関係は次式で表わされる。（図A．2）

$$\left.\begin{aligned} Q_S^L &= Q_S^R = K_S\ (Y_S^L - Y_S^R) \\ Q_C^L &= Q_C^R = K_C\ (Y_C^L - Y_C^R) \\ Q_P^L &= Q_P^R = K_P\ (Y_P^L - Y_P^R) \end{aligned}\right\} \text{----------} \quad (A.7)$$



図A．2　tank部のpoint transfer matrix

剪断力のつり合いから次式が求まる。

$$\left.\begin{aligned} Q_1^R &= Q_1^L - Q_S^R \\ Q_2^R &= Q_2^L - Q_C^R + Q_S^L \\ Q_3^R &= Q_3^L + Q_P^R - Q_C^L \\ Q_4^R &= Q_4^L - Q_P^L \end{aligned}\right\} \text{----------} \quad (A.8)$$

またたわみの連続条件より

$$\left.\begin{aligned} Y_1^R &= Y_1^L = Y_S^R \\ Y_2^R &= Y_2^L = Y_S^L = Y_C^R \\ Y_3^R &= Y_3^L = Y_C^L = Y_P^R \\ Y_4^R &= Y_4^L = Y_P^L \end{aligned}\right\} \text{----------} \quad (A.9)$$

船の対称性より対称型、逆対称型振動に分離して取扱うことができ、(A.7)，(A.8)，(A.9) 式よりタンク部のpoint transfer matrixは次のように求められる。

$$Z^R = T \cdot Z^L \quad \text{----------} \quad (A.10)$$

対称型：$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ K_S & 1 & -K_S & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -K_S & 0 & K_S & 1 \end{bmatrix}$

逆対称型：$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ K_S & 1 & -K_S & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -K_S & 0 & 2K_C+K_S & 1 \end{bmatrix}$

同様にして、後部または前部のpoint transfer matrixは次のように求められる。

対称型：　${}_aT$または${}_fT = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

逆対称型：　${}_aT$または${}_fT = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2K_d & 1 \end{bmatrix}$

ここに、　K_d：隔壁の剪断バネ定数