Okano, Hatsuo
Osaka Math. J.
11 (1959), 187–212.

Sur les Intégrales (E. R.) et ses Applications

Par Hatsuo OKANO

La notion de l'intégrale (*E. R.*) a été introduite par Prof. K. Kunugi[1], en utilisant la théorie de l'espace rangé[2], et elle a été généralisée par M. T. Ikegami[3] de sorte qu'elle s'applique aux fonctions définies dans les groupes topologiques localement compacts.

Dans la présente Note, nous allons premièrement étudier plus généralement l'intégration (*E. R.*) des fonctions définies dans l'ensemble abstrait muni d'une mesure de Radon[4]. Par là nous pouvons voir que la définition de l'intégrale (*E. R.*) ne dépend seulement que la notion de la mesure.

Pour fixer les idées, considérons un ensemble X muni d'une mesure non négative μ de Radon telle que X soit mesurable et $\mu(X) < \infty$. Désignons par $\boldsymbol{L}$ la famille de toutes les fonctions sommables c.-à-d. intégrables prises au sens de Radon pour μ. Étant donnés un nombre positif γ et un ensemble mesurable A, désignons par $V(\gamma, A)$ la famille de toutes les fonctions sommables $f(x)$ jouissant de deux conditions suivantes : (i) $|f(x)| \leqq \gamma$ presque partout dans A ; (ii) $\left|\int_X f(x)\, d\mu(x)\right| \leqq \gamma$. Alors, le système de voisinages $\{V(\gamma, A)\}$ de 0 donne une structure uniforme complète[5] sur le groupe additif $\boldsymbol{L}$. Mais, $\boldsymbol{L}$ n'est pas complet comme un espace rangé. Nous obtenons la définition de l'intégrale (*E. R.*) en traitant $\boldsymbol{L}$ comme un espace rangé.

---

1) K. Kunugi : Application de la méthode des espaces rangés à la théorie de l'intégration. I, Proc. Japan Acad. **32** (1956), 215–220. Voir aussi K. Kunugi : Sur une généralisation de l'intégrale, Fundamental and Applied Aspects of Mathematics **1** (1959), 1–30.

2) K. Kunugi : Sur les espaces complets et régulièrement complets. I, Proc. Japan Acad. **30** (1954), 553–556. Voir aussi T. Shirai : A remark on the ranked space. II, ibid., **33** (1957), 139–142 ; H. Okano : Some operations on the ranked spaces, I, ibid., 172–176.

3) T. Ikegami : A note on the integration by the method of ranked spaces, Proc. Japan Acad. **34** (1958), 16–21.

4) Cf. H. Okano : (*E. R.*)-integral of Radon-Stieltjes type, Proc. Japan Acad. **34** (1958), 580–584. Quant à l'intégration (*E. R.*) de fonctions à valeurs vectorielles, voir H. Okano : L'intégration des fonctions à valeurs vectorielles d'après la méthode des espaces rangés, ibid. **35** (1959), 77–82.

5) Voir A. Weil : Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale, Paris, 1937.

Dans le § 1, nous traitons la complétion de l'espace $\boldsymbol{L}$.

Au § 2, nous définissons les intégrales (*E. R.*), et en donnons les propriétés essentielles.

Au § 3, nous étudions les operateurs intégraux $K\cdot f$ définis par

$$(K\cdot f)(x) = (E.\ R.)\int_a^b K(x, y)f(y)dy,$$

où $f(x)$ est intégrable (*E. R.*) et $K(x, y)$ assez régulière, et s'applique à une généralisation d'un théorème de Fatou et aux équations intégrales.

Le cas du noyau singulier sera discuté dans les notes prochaines.

§ 1. Complétion de l'espace vectoriel rangé.

Dans ce §, nous allons introduire la notion des espaces vectoriels rangés. Cette notion est plus restreinte que celle des espaces rangés, mais celle-là est utile à l'étude sur la complétion.[6]

Selon la notion définie dans les Notes précédentes,[2] le rang de l'espace rangé est donné par les nombres ordinaux, mais, au cas où l'indicateur[7] de l'espace serait ω_0, il nous semble assez commode de considérer le rang donné par les nombres réels.

Définition de l'espace rangé.— Étant donné un espace R où la topologie est donnée par un système de voisinages satisfaisant aux axiomes (A), (B) de F. Hausdorff[8], on dit qu'il est un espace rangé si, pour tout nombre positif γ, il existe une famille des voisinages $\mathfrak{V}_\gamma$ qui satisfait à la condition : (a) Pour tout voisinage $v(p)$ du point p et pour tout nombre positif γ, il existe un nombre positif γ', $\gamma'<\gamma$, tel qu'il existe un voisinage $u(p)$ de point p appartenant à la famille $\mathfrak{V}_{\gamma'}$ et qui est contenu dans $v(p)$. Un voisinage d'un point p sera dit de rang γ, s'il appartient à la famille $\mathfrak{V}_\gamma$.

Une suite monotone décroissant de voisinages

$$v_0(p_0)\supseteq v_1(p_1)\supseteq\cdots\supseteq v_n(p_n)\supseteq\cdots,\ v_n(p_n)\in\mathfrak{V}_{\gamma_n},$$

est dite fondamentale si elle satisfait à trois conditions suivantes :

(i) $\gamma_0\geqq\gamma_1\geqq\cdots\geqq\gamma_n\cdots$; (ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=0$; (iii) $p_{2n}=p_{2n+1}$ et $\gamma_{2n}>\gamma_{2n+1}$.

Un espace rangé sera dit complet si, pour toute suite fondamentale $\{v_n(p_n)\}$, on a $\bigcap\limits_n v_n(p_n)\neq 0$.

6) Cf. K. Kunugi: Sur les espaces complets et régulièrement complets. II, III, Proc. Japan Acad. **30** (1954), 553–556, ibid., **31** (1955), 49–53; H. Okano: On the completion of the ranked spaces, ibid., **33** (1957), 338–340.

7) Voir K. Kunugi: Sur une généralisation de l'intégrale, cité dans 1), p. 3.

8) F. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre, p. 213, Leipzig, 1914.

Définition de l'espace vectoriel rangé.— Soit K le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes. Étant donné un espace vectoriel R à gauche sur K, on dit qu'il est un espace vectoriel rangé à gauche sur K s'il est un espace rangé et s'il existe en outre un ensemble partiellement ordonné Λ, muni d'un ordre $\lambda < \lambda'$, satisfaisant aux conditions suivantes :

[1] Pour toute suite finie ou infinie $\{\lambda_n\}$ d'éléments de Λ, il existe un élément $\lambda \in \Lambda$ tel que $\lambda = \bigwedge_n \lambda_n (= \inf_n \lambda_n)$;

[2] Pour toute nombre positif γ et pour tout élément $\lambda \in \Lambda$, il existe un sous-ensemble $V(\gamma, \lambda)$ de R qui satisfait aux conditions suivantes ;

[2. 1] Si $\gamma' \leqq \gamma$, on a $V(\gamma', \lambda) \subseteq V(\gamma, \lambda)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$;

[2. 2] Si $\lambda' > \lambda$, on a $V(\gamma, \lambda') \subseteq V(\gamma, \lambda)$ pour tout γ ;

[2. 3] Pour tout nombre positif γ, il existe un nombre positif γ' tel que $V(\gamma', \lambda) + V(\gamma', \lambda)$[9] $\subseteq V(\gamma, \lambda)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$;

[2. 4] Si $|c| \leqq 1$, $c \in K$, on a $cV(\gamma, \lambda)$[9] $\subseteq V(\gamma, \lambda)$ pour tout γ et pour tout λ ;

[2. 5] La famille $\{V(\gamma, \lambda) + p\}$, $0 < \gamma < \infty$, $\lambda \in \Lambda$, forme un système fondamental de voisinages du point p ;

[3] Pour tout nombre positif γ, il existe un sous-ensemble résiduel[10] Λ_γ de Λ satisfaisant aux conditions suivantes :

[3. 1] Si $\gamma' \leqq \gamma$, on a $\Lambda_{\gamma'} \subseteq \Lambda_\gamma$;

[3. 2] Pour toute suite finie ou infinie $\{\lambda_n\}$ telle que $\lambda_n \in \Lambda_{\gamma_n}$, si $\sum_n \gamma_n < \infty$, on a $\bigwedge_n \lambda_n \in \Lambda_{\sum_n \gamma_n}$;

[3. 3] Si $p \notin V(\gamma, \lambda)$, alors il existe un nombre positif γ' tel que $V(\gamma, \lambda) \bigwedge (\bigvee_{\lambda' \in \Lambda_{\gamma'}} V(\gamma', \lambda') + p) = 0$;

[3. 4] Si $p \neq 0$, alors il existe un nombre positif γ tel que

$$p \notin \bigvee_{\lambda \in \Lambda_\gamma} V(\gamma, \lambda) ;$$

[3. 5] $\mathfrak{V}_\gamma$ est la famille de tous les voisinages $V(\gamma, \lambda) + p$, $p \in R$, tels que $\lambda \in \Lambda_\gamma$.

On dit que $(\Lambda, \Lambda_\gamma, V(\gamma, \lambda))$ définit la structure de rang de l'espace vectoriel rangé R.

Étant donnés deux espaces vectoriels rangés R_1 et R_2 munis de structures $(\Lambda^1, \Lambda^1_\gamma, V_1(\gamma, \lambda_1))$ et $(\Lambda^2, \Lambda^2_\gamma, V_2(\gamma, \lambda_2))$ respectivement, on ecrit

9) $V+V$ désigne l'ensemble de tous les points $p=q+r$ tel que $q \in V$, $r \in V$. cV désigne l'ensemble de tous les points cp tels que $p \in V$.

10) Un sous-ensemble Λ' d'un ensemble partiellement ordonné Λ est dit résiduel si, pour tout élément λ de Λ, il existe un élément λ' de Λ' tel que $\lambda < \lambda'$ et tel que $\lambda' < \mu$ entraine $\mu \in \Lambda'$.

$R_1 \simeq R_2$ s'il existe un isomorphisme[11] θ de Λ^1 sur Λ^2 tel que $\theta(\Lambda^1_\gamma) = \Lambda^2_\gamma$ pour tout γ, et s'il existe en outre une application linéaire biunivoque φ de R_1 sur R_2 telle que $\varphi(V_1(\gamma, \lambda)) = V_2(\gamma, \theta(\lambda))$ pour tout γ et pour tout λ.

Soit S un sous-ensemble linéaire d'un espace vectoriel rangé R muni d'une structure $(\Lambda, \Lambda_\gamma, V(\gamma, \lambda))$. Alors, S muni de la structure $(\Lambda, \Lambda_\gamma, V(\gamma, \lambda) \frown S)$ sera dit un sous-espace vectoriel rangé de R.

Soient R_1 et R_2 deux espaces vestoriels rangés munis de structures $(\Lambda^1, \Lambda^1_\gamma, V_1(\gamma, \lambda_1))$ et $(\Lambda^2, \Lambda^2_\gamma, V_2(\gamma, \lambda_2))$ respectivement. Désignons par $\Lambda^1 \times \Lambda^2$ le produit cardinal[12] de Λ^1 et Λ^2. L'espace vestoriel rangé $R_1 \times R_2$[13] muni de la structure $(\Lambda^1 \times \Lambda^2, \Lambda^1_\gamma \times \Lambda^2_\gamma, V_1(\gamma, \lambda_1) \times V_2(\gamma, \lambda_2))$ s'appelle le produit de R_1 et R_2. Pour que le produit $R_1 \times R_2$ soit complet, il faut et il suffit que chacun des espaces R_i soit complet.

Exemple 1.1. Soit R un espace de Banach muni d'une norme $\|p\|$. Dans ce cas, Λ se réduit à un élément. Désignons par $V(\gamma)$ l'ensemble de tous les points tels que $\|p\| \leqq \gamma$. Alors, R est un espace vectoriel rangé complet.

Exemple 1.2. Soit X un ensemble muni d'une mesure non négative μ telle que X soit mesurable et $\mu(X) < \infty$. Désignons par $\boldsymbol{M}$ la famille de toutes les fonctions mesurables pour μ, identifiant deux fonctions qui ne sont pas différentes que sur un ensemble de mesure nulle[13bis]. Étant donnés un ensemble mesurable A et un nombre positif γ, posons $V(\gamma, A) =$ la totalité des fonctions mesurables $f(x)$ telles que $|f(x)| \leqq \gamma$ presque partout dans A. Λ est l'ensemble de tous les ensembles mesurables A où l'ordre $A < B$ est défini par la relation d'inclusion $A \subseteq B$. Λ_γ est un sous-ensembles de Λ qui consiste en tous les ensembles A tels que $\mu(X - A) < \gamma$. Alors, $\boldsymbol{M}$ est un espace vectoriel rangé complet.

Exemple 1.3. Sous la même hypothèse que Exemple 1.2, désignons par $\boldsymbol{L}$ la famille de toutes les fonctions sommables c.-à-d. intégrables au sens pris de Radon pour la mesure μ, identifiant deux fonctions qui ne sont pas differentes que sur un ensemble de mesure nulle. Pour tout nombre positif γ et pour tout ensemble mesurable A, désignons par $V(\gamma, A)$ la totalité des fonctions sommables $f(x)$ satisfaisant aux conditions suivantes: (i) $|f(x)| \leqq \gamma$ presque partout dans A: (ii)

11) Voir p. ex. G. Birkhoff: Lattice theory, New York, 1940, p. 3.

12) Voir p. ex. G. Birkhoff, loc. cit., p. 7.

13) $A \times B$ désigne l'ensemble produit de A et B.

13bis) Nous dirons "fonction mesurable", sous-entendant celle à valeurs reélles ($\neq \pm\infty$).

$\left|(R)\int_X f(x)d\mu(x)\right|$[14] $\leqq \gamma$. Λ et Λ_γ sont définis de la même manière que Exemple 1. 2. Alors, $\boldsymbol{L}$ est un espace vectoriel rangé. Mais, à quelques exceptions trivials près, il n'est pas complet tandis que $V(\gamma, A)$ donne une structure uniforme complète sur $\boldsymbol{L}$. L'étude de la complétion de $\boldsymbol{L}$ est le but principal de ce §.

Complétion de l'espace vectoriel rangé.— Soit R un espace vecteriel rangé sur K muni d'une structure $(\Lambda, \Lambda_\gamma, V(\gamma,\lambda))$. Désignons par R^* la famille de toutes les suites de points $\{p_n\}$ telles qu'il existe une suite de nombres positifs $\{\gamma_n\}$ et celle d'éléments de Λ $\{\lambda_n\}$ satisfaisant aux conditions suivantes:

(1. 1) $\gamma_{n+1} \leqq \gamma_n/2$ pour tout n;

(1. 2) $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \cdots$ et $\lambda_n \in \Lambda_{\gamma_n}$ pour tout n;

(1. 3) $V(\gamma_0, \lambda_0) + p_0 \supseteq V(\gamma_1, \lambda_1) + p_1 \supseteq \cdots \supseteq V(\gamma_n, \lambda_n) + p_n \supseteq \cdots$;

(1. 4) $V(\gamma_{n+1}, \lambda) + V(\gamma_{n+1}, \lambda) \subseteq V(\gamma_n, \lambda)$ pour tout n et pour tout λ.

Alors, on a le

Lemme 1. 1. *R^* est un ensemble linéaire*: (i) *Si* $\{p_n^1\} \in R^*$ *et* $\{p_n^2\} \in R^*$, *on a* $\{p_n^1 + p_n^2\} \in R^*$; (ii) *Si* $c \in K$ *et* $\{p_n\} \in R^*$, *on a* $\{cp_n\} \in R^*$.

Démonstration. (i) En vertu de l'hypothèse, pour chaque indice i, il existe deux suites $\{\gamma_n^i\}$, $\{\lambda_n^i\}$ satisfaisant aux conditions (1. 1)-(1. 4). Posons $\gamma_n = \mathrm{Min}(\gamma_{n-2}^1, \gamma_{n-2}^2)$ et $\lambda_n = \lambda_n^1 \wedge \lambda_n^2$. Alors, trois suites $\{p_n^1 + p_n^2\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{\lambda_n\}$ satisfont en commun aux conditions (1. 1)-(1. 4). Donc, on a $\{p_n^1 + p_n^2\} \in R^*$. (ii) Si $\{p_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{\lambda_n\}$ satisfont aux (1. 1)-(1. 4), et si m est un entier positif tel que $|c| \leqq 2^m$, alors $\{cp_n\}$, $\{\gamma_{n-m-1}\}$, $\{\lambda_n\}$ satisfont aux conditions (1. 1)-(1. 4). Donc, on a $\{cp_n\} \in R^*$, c.q.f.d..

Étant données deux suites de points $\{p_n^1\}$, $\{p_n^2\}$, appartennant à R^*, nous allons écrire $\{p_n^1\} \sim \{p_n^2\}$ si, pour chaque indice $i (i=1, 2)$, il existe une suite de nombres positifs $\{\gamma_n^i\}$ et celle d'éléments de Λ $\{\lambda_n^i\}$ satisfaisant aux conditions (1. 1)-(1. 4) et telles que, pour tout n, il existe $m = m(n)$ tel qu'on ait

(1. 5) $\lambda_n^1 < \lambda_m^2$,

(1. 6) $V(\gamma_n^1, \lambda_n^1) + p_n^1 \supseteq V(\gamma_m^2, \lambda_m^2) + p_m^2$.

Alors, on a le

14) $(R)\int f(x)\,d\mu(x)$ $((L)\int f(x)\,dx)$ désigne l'intégrale de Radon (celle de Lebesgue) d'une fonction $f(x)$.

Lemme 1.2. *La relation $\sim$ est une relation d'équivalence qui est compatible*[15] *avec la structure linéaire de R^*.*

Démonstration. D'abord, on a facilement $\{p_n\}\sim\{p_n\}$. De la même considération que Lemme 1.1., on peut d'ailleurs démontrer deux propositions suivantes: (i) Si $\{p_n^i\}\sim\{q_n^i\}$, $i=1, 2$, on a $\{p_n^1+p_n^2\}\sim\{q_n^1+q_n^2\}$; (ii) Si $c\in K$ et $\{p_n\}\sim\{q_n\}$, on a $\{cp_n\}\sim\{cq_n\}$. Cela posé, supposons que $\{p_n\}\sim\{q_n\}$. Alors, on a $\{p_n-q_n\}\sim\{0\}$. Donc, $\{q_n-p_n\}\sim\{0\}$. Par suite, on a $\{q_n\}\sim\{p_n\}$. Enfin, supposons que $\{p_n\}\sim\{q_n\}$ et $\{q_n\}\sim\{r_n\}$. Alors, on a $\{p_n+q_n\}\sim\{q_n+r_n\}$. Donc, on a $\{p_n\}\sim\{r_n\}$, c.q.f.d..

Or, désignons par $\hat{R}$ l'ensemble de classe d'équivalence suivant la relation $\{p_n\}\sim\{q_n\}$. Alors, d'après le Lemme 1.2., $\hat{R}$ est un espace vectoriel sur K. Nous allons maintenant introduire sur $\hat{R}$ une structure de rang de sorte que $\hat{R}$ devienne un espace vectoriel rangé. Pour tout nombre positif γ et pour tout élément $\lambda\in\Lambda$, désignons par $\hat{V}(\gamma, \lambda)$ la totalité des classes d'équivalence qui contiennent au moins une suite $\{p_n\}\in R^*$ telle que $p_n\in V(\gamma, \lambda)$ pour tout n.

Lemme 1.3. $(\Lambda, \Lambda_\gamma, \hat{V}(\gamma, \lambda))$ *définit une structure de rang sur $\hat{R}$.*

Démonstration. Les conditions [1]-[3], [3.3] exceptée, résultent immédiatement de la définition de $\hat{V}(\gamma, \lambda)$. Nous allons donc montrer que $\hat{V}(\gamma, \lambda)$ satisfait à la condition [3.3]. Soient γ^* un nombre positif, λ^* un élément de Λ, $\hat{u}$ une classe appartenant à $\hat{R}$. Supposons que, pour tout nombre positif γ, il existe un élément $\lambda=\lambda(\gamma)\in\Lambda_\gamma$ tel qu'on ait

$$\hat{V}(\gamma^*, \lambda^*) \cap (V(\gamma, \lambda)+\hat{u}) \neq 0\,, \tag{1.7}$$

Puisque $(\Lambda, \Lambda_\gamma, V(\gamma, \lambda))$ satisfait aux conditions [1]-[3], nous pouvons choisir une suite de nombres positifs $\{\gamma_i\}$, $i=0, 1, \cdots$, telle qu'on ait

(1.8) $\gamma_{i+1}<\gamma_i/2$ pour tout i,

(1.9) $V(\gamma_{i+1}, \lambda)+V(\gamma_{i+1}, \lambda)\subseteq V(\gamma_i, \lambda)$ pour tout i et pour tout λ. Posons $\lambda_i=\lambda(\gamma_i)$. Alors, en vertu de (1.7), pour tout i, il existe une classe $\hat{u}_i$ telle que

$$\hat{u}_i\in\hat{V}(\gamma^*, \lambda^*) \cap (\hat{V}(\gamma_i, \lambda_i)+\hat{u})\,.$$

Donc, par la définition de $\hat{V}(\gamma, \lambda)$, il existe, pour tout i, deux suites de points $\{p_n^i\}$, $\{\bar{p}_n^i\}$ jouissant des conditions suivantes:

$$\{p_n^i\}\in\hat{u}_i\,; \tag{1.10}$$

15) Voir p. ex. N. Bourbaki: Eléments de Mathématique, Livre I, Théorie des ensembles, Chap. II, Théorie des ensembles, Paris, 1954.

(1. 11) $$p_n^i \in V(\gamma^*, \lambda^*) \text{ pour tout } n;$$

(1. 12) $$\{\bar{p}_n^i\} \in \hat{u};$$

(1. 13) $$p_n^i - \bar{p}_n^i \in V(\gamma_i, \lambda_i) \text{ pour tout } n.$$

Puisque $\{\bar{p}_n^0\} \in R^*$, il existe deux suites $\{\gamma_n^0\}$, $\{\lambda_n^0\}$ jouissant des conditions (1. 1)-(1. 4) et telles que

(1. 14) $$\gamma_n^0 < \gamma_n .$$

De plus, puisque $\{\bar{p}_n^i\} \sim \{\bar{p}_n^0\}$, pour tout $i(i=1, 2, \cdots)$, il existe une suite de nombres positifs $\{\gamma_n^i\}$ et celle d'éléments de Λ $\{\lambda_n^i\}$ jouissant de deux conditions suivantes : (i) $\{\bar{p}_n^0\}$, $\{\gamma_n^i\}$ et $\{\lambda_n^i\}$ satisfont en commun aux conditions (1. 1)-(1. 4) ; (ii) Pour tout n, il existe un indice M tel que $M < m$ entraîne $\bar{p}_m^i \in V(\gamma_n^i, \lambda_n^i) + \bar{p}_n^0$. D'autre part, puisque $\{\bar{p}_n^{i+1}\} \sim \{\bar{p}_n^i\}$, pour tout $i(i=0, 1, 2, \cdots)$ il existe une suite de nombres positifs $\{\bar{\gamma}_n^i\}$ et celle d'éléments de Λ $\{\bar{\lambda}_n^i\}$ jouissant de deux conditions suivantes : (i) $\{\bar{p}_n^i\}$, $\{\bar{\gamma}_n^i\}$ et $\{\bar{\lambda}_n^i\}$ satisfont en commun aux conditions (1. 1)-(1. 4) ; (ii) Pour tout n, il existe un indice M tel que $M < m$ entraîne $\bar{p}_m^{i+1} \in V(\bar{\gamma}_n^i, \bar{\lambda}_n^i) + \bar{p}_n^i$.

Cela posé, par induction, nous pouvons choisir deux suites monotones croissantes de entiers positifs $\{n_i\}$, $\{k_i\}$ en sorte qu'ellles satisfassent aux conditions suivants.

(1. 15) $$\gamma_{k_i}^i < \text{Min}\,(\gamma_i, \gamma_{i+1}^0, \gamma_{k_{i-1}}^{i-1});$$

(1. 16) $$\bar{\gamma}_{n_i}^i < \text{Min}\,(\gamma_i, \bar{\gamma}_{n_{i-1}}^{i-1});$$

(1. 17) $$\bar{p}_{n_i}^i \in (V(\bar{\gamma}_{n_{i-1}}^{i-1}, \bar{\lambda}_{n_{i-1}}^{i-1}) + \bar{p}_{n_{i-1}}^{i-1}) \wedge (V(\gamma_{k_i}^i, \lambda_{k_i}^i) + \bar{p}_{k_i}^0).$$

Posons $\lambda_i^* = (\bigwedge_{j=1}^{\infty} \lambda_j) \wedge (\bigwedge_{j=1}^{\infty} \bar{\lambda}_{n_j}^j)$ et $\gamma_i^* = \gamma_{i-3}$. Alors, on a $\sum_{j=i}^{\infty} \gamma_j + \sum_{j=i}^{\infty} \bar{\gamma}_{n_j}^j < \gamma_i^*$. Par suite, d'après [3. 2] on a $\lambda_i^* \in \Lambda_{\gamma_i^*}$.

D'autre part, en vertu de (1. 13) et (1. 17), on a

$$\begin{aligned} p_{n_{i+1}}^{i+1} - p_{n_i}^i &= p_{n_{i+1}}^{i+1} - \bar{p}_{n_{i+1}}^{i+1} + \bar{p}_{n_{i+1}}^{i+1} - \bar{p}_{n_i}^i + \bar{p}_{n_i}^i - p_{n_i}^i \\ &\subseteq V(\gamma_{i+1}, \lambda_{i+1}) + V(\bar{\gamma}_{n_i}^i, \bar{\lambda}_{n_i}^i) + V(\gamma_i, \lambda_i) \\ &\subseteq V(\gamma_{i-2}, \lambda_i^*). \end{aligned}$$

Donc, $V(\gamma_{i+1}^*, \lambda_{i+1}^*) + p_{n_{i+1}}^{i+1} \subseteq V(\gamma_i^*, \lambda_i^*) + p_{n_i}^i$. Par suite, on a $\{p_{n_i}^i\} \in R^*$.

Nous allons saintenant démontrer que $\{p_{n_i}^i\} \in \hat{u}$. Posons $\lambda_i' = \lambda_i^* \wedge (\bigwedge_{j=i}^{\infty} \lambda_j^0) \wedge (\bigwedge_{j=i}^{\infty} \lambda_{k_j}^j)$ et $\gamma_i' = \gamma_{i-5}$. Alors, nous pouvons sans peine voir que $\{\bar{p}_i^0\}$, $\{\gamma_i'\}$, $\{\lambda_i'\}$ satisfont aux condition (1. 1)-(1. 4). D'autre part, en vertu de (1. 13) et (1. 17), on a

$$p^i_{n_i}-\bar{p}^0_i = p^i_{n_i}-\bar{p}^i_{n_i}+p^i_{n_i}-\bar{p}^0_{k_i}+\bar{p}^0_{k_i}-\bar{p}^0_i$$
$$\leqq V(\gamma_i, \lambda_i)+V(\gamma^i_{k_i}, \lambda^i_{k_i})+V(\gamma^0_i, \lambda^0_i)$$
$$\leqq V(\gamma_{i-2}, \lambda'_i)\,.$$

Donc, on a $V(\gamma^*_i, \lambda^*_i)+p^i_{n_i}\leqq V(\gamma'_i, \lambda'_i)+\bar{p}^0_i$. Par suite on a $\{p^i_{n_i}\}\sim\{\bar{p}^0_i\}\in\hat{u}$. D'autre part, en vertu de (1.11), on a $p^i_{n_i}\in V(\gamma^*, \lambda^*)$ pout tout i.

Par conséquent, $\hat{u}$ appartient à $\hat{V}(\gamma^*, \lambda^*)$, c.q.f.d..

Lemme 1.4. *$\hat{R}$ est complet.*

Démonstration. Soit $\{\hat{V}(\gamma_n, \lambda_n)+\hat{u}_n\}$ une suite fondamentale. Alors, il existe une suite monotone croissante d'entiers positifs $\{n_i\}$ jouissant des conditions suivantes ;

(1.18) $\gamma_{n_{i+1}}<\gamma_{n_i}/2$ pour tout i:

(1.19) $\hat{V}(\gamma_{n_{i+1}}, \lambda)+\hat{V}(\gamma_{n_{i+1}}, \lambda)\leqq\hat{V}(\gamma_{n_i}, \lambda)$ pour tout i et pour tout λ.

Pour tout i, par induction, nour pouvons d'ailleurs choisir une suite $\{p^i_k\}\in\hat{u}_{n_i}$ telle que, pour tout k, on ait

$$p^{i+1}_k-p^i_k\in V(\gamma_{n_i}, \lambda_{n_i})\,. \tag{1.20}$$

Il existe en outre une suite de nombres positifs $\{\gamma^i_k\}$ et celle d'éléments de $\Lambda\,\{\lambda^i_k\}$ satisfaisant aux conditions (1.1)-(1.4). Et, (1.1) montre que, pour tout i, il existe un indice $k(i)$ tel que

$$\gamma^i_{k(i)}<\gamma_{n_i}\,. \tag{1.21}$$

Nous allons d'abord montrer que la suite $\{p^i_{k(i)}\}$ appartient à R^*. Posons $\lambda^*_i=(\bigwedge\limits_{j=i}^{\infty}\lambda_{n_j})\wedge(\bigwedge\limits_{j=i}^{\infty}\lambda^j_{k(j)})$ et $\gamma^*_i=\gamma_{n_{i-2}}$. Alors, on a $\lambda^*_i\in\Lambda_{\gamma^*_i}$. Cela posé, en vertu de (1.20) et (1.21), on a

$$p^{i+1}_{k(i+1)}\in V(\gamma_{n_i}, \lambda_{n_i})+p^i_{k(i+1)}$$
$$\leqq V(\gamma_{n_i}, \lambda_{n_i})+V(\gamma^i_{k(i)}, \lambda^i_{k(i)})+p^i_{k(i)}$$
$$\leqq V(\gamma_{n_{i-1}}, \lambda^*_i)+p^i_{k(i)}\,.$$

Donc, on a $V(\gamma^*_{i+1}, \lambda^*_{i+1})+p^{i+1}_{k(i+1)}\leqq V(\gamma^*_i, \lambda^*_i)+p^i_{k(i)}$. Par suite, on a $\{p^i_{k(i)}\}\in R^*$.

Ensuite, désignons par $\hat{u}$ la classe à laquelle $\{p^i_{k(i)}\}$ appartient, et montrons que $\hat{u}\in\bigcap\limits_n(\hat{V}(\gamma_n, \lambda_n)+\hat{u}_n)$. Si $m\geqq k(i)$, en vertu de (1.18)-(1.21), on a

$$p^i_m-p^m_{k(m)} = p^i_m-p^i_{k(m)}+p^i_{k(m)}-p^{i+1}_{k(m)}+\cdots+p^{m-1}_{k(m)}-p^m_{k(m)}$$
$$\leqq V(\gamma^i_m, \lambda^i_m)+V(\gamma_{n_i}, \lambda_{n_i})+\cdots+V(\gamma_{n_{m-1}}, \lambda_{n_{m-1}})$$
$$\leqq V(\gamma^*_i, \lambda^*_i)\,.$$

On a donc $\hat{u}_{n_i} - \hat{u} \in \hat{V}(\gamma_i^*, \lambda_i^*)$ pour tout i, ainsi $n < n_i$ entraîne $(\hat{V}(\gamma_n, \lambda_n) + \hat{u}_n) \bigwedge (\hat{V}(\gamma_i^*, \lambda_i^*) + \hat{u}) \neq 0$. Par suite, on a $\hat{u} \in \hat{V}(\gamma_n, \lambda_n) + \hat{u}_n$ pour tout n, c.q.f.d..

Étant donné un point p de R, désignons par $\hat{p}$ la classe qui contient la suite $\{p_n = p\}$. Alors, l'application $\varphi: p \to \varphi(p) = \hat{p}$ est une application linéaire biunivoque de R dans $\hat{R}$ telle que $\varphi(V(\gamma, \lambda)) = \hat{V}(\gamma, \lambda) \bigwedge \varphi(R)$. Le rang, induit sur $\varphi(R)$ par celui de $\hat{R}$, a donc la même structure que celui de R.

De plus, $\varphi(R)$ est partout dense dans $\hat{R}$ au sens suivant: Pour tout classe $\hat{u} \in \hat{R}$, il existe une suite fondamentale $\{\hat{V}(\gamma_n, \lambda_n) + \hat{u}_n\}$ telle que $\hat{u}_n \in \varphi(R)$ et $\hat{u} \in \bigwedge_n (\hat{V}(\gamma_n, \lambda_n) + \hat{u}_n)$. En effet, considérons une suite $\{p_n\}$ qui est contenue dans $\hat{u}$. Alors, il existe une suite de nombres positifs $\{\gamma_n\}$ et celle d'éléments de $\Lambda\{\lambda_n\}$ satisfaisant aux conditions (1.1)-(1.4). Posons $p_{2n}^* = p_{2n+1}^* = p_{2n}$, $\gamma_n^* = \gamma_{n-2}$, $\lambda_n^* = \bigwedge_{m=n}^{\infty} \lambda_m$. Alors, $\{\hat{V}(\gamma_n^*, \lambda_n^*) + \hat{p}_n^*\}$ est une suite fondamentale telle que $\hat{u} \in \bigwedge_n (\hat{V}(\gamma_n^*, \lambda_n^*) + \hat{p}_n^*)$.

En résumé, on a le

Théorème 1. *Étant donné un espace vectoriel rangé R, $\hat{R}$ est un espace vectoriel rangé complet tel qu'il existe un sous-espace partout dense de $\hat{R}$ (au sens pris plus haut) qui a la même structure de rang que R.*

Complétion de $\boldsymbol{L}$.— Dans le but de exclure quelques exceptions triviales, nous allons supposer que la mesure μ jouisse de la condition suivante:

(*) Pour tout nombre positif ε, il existe un ensemble mesurable A tel que $0 < \mu(A) < \varepsilon$.

D'abord, pour toute suite $u = \{f_n\} \in \boldsymbol{L}^*$, nous pouvons facilement voir que $f_n = f_n(x)$ tend vers un fonction $f(x)$ presque partout dans X, et $(R)\int_X f_n(x)d\mu(x)$ tend vers un nombre réel p. Posons $J(u) = f$ et $I(u) = p$. Alors, l'application T: $T(u) = (J(u), I(u))$ est une application linéaire de $\boldsymbol{L}^*$ dans le produit de $\boldsymbol{M}$ et l'espace de nombres réels $\boldsymbol{R}$[16].

Nous allons maintenant montrer que $T(\boldsymbol{L}^*) = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{R}$. Soient f une fonction mesurable et p un nombre réel. Alors, d'après l'hypothèse (*), il existe une suite monotone croissante d'ensembles mesurables

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$$

16) Dorénavant, nous allons désigner par $\boldsymbol{R}$ l'espace vectoriel rangé de nombres réels muni de la structure donnée en Exemple 1.1.

telle que $0<\mu(X-A_n)<2^{-n}$ et f soit sommable sur chacun des ensembles A_n. Définissons une fonction $f_n(x)$ par

$$f_n(x)=\begin{cases} f(x) & \text{pour } x\in A_n \\ \dfrac{p-(R)\int_{A_n} f(x)d\mu(x)}{\mu(X-A_n)} & \text{pour } x\in X-A_n\,. \end{cases}$$

Alors, en posant $u=\{f_n\}$, on a $J(u)=f$ et $I(u)=p$. Par suite, l'application T est une application linéaire de $\boldsymbol{L}^*$ sur $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{R}$.

D'autre part, par la définition de $V(\gamma, A)$ dans $\boldsymbol{L}$, il résulte immédiatement que, pour que $u\sim 0$, il faut et il suffit qu'on ait à la fois $J(u)=0$ et $I(u)=0$. L'application $\hat{T}(\hat{u})=T(u)$, $u\in\hat{u}$, est donc une application linéaire biunivoque de $\hat{\boldsymbol{L}}$ sur $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{R}$.

Cela posé, nous pouvons sans peine voir que $\hat{\boldsymbol{L}}\simeq\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{R}$.

§ 2. Définition et propriétés générales des intégrales (*E. R.*).

Soit X un ensemble muni d'une mesure non négative μ telle que X soit un ensemble mesurable de mesure finie et satisfaisant à la condition (*). L'énoncé de § **1** montre que le produit $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{R}$ est un espace vectoriel rangé complet dans lequel $\boldsymbol{L}$ est partout dense au sens pris plus haut. Dans $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{R}$, nous allons désigner simplement par $V(\gamma, A)$ l'ensemble $V(\gamma, A)\times V(\gamma)$. Nous pouvons facilement voir que, pour que $V(\gamma', A')+(f', p')\subseteq V(\gamma, A)+(f, p)$, il faut et il suffit qu'on ait à la fois $\mu(A-A')=0$, $|p-p'|\leqq\gamma-\gamma'$ et $|f(x)-f'(x)|\leqq\gamma-\gamma'$ presque partout dans A. Donc, on a le

Lemme 2. 1. *Pour que $\{V(\gamma_n, A_n)+(f_n, p_n)\}$ est fondamentale, il faut et il suffit qu'on ait*

(2. 1) $\gamma_0\geqq\gamma_1\geqq\cdots\geqq\gamma_n\geqq\cdots$

(2. 2) $\lim_{n\to\infty}\gamma_n=0\,,$

(2. 3) $\mu(A_n-A_{n+1})=0$ *pour tout n,*

(2. 4) $\mu(X-A_n)<\gamma_n$ *pour tout n.*

(2. 5) $|f_{n+1}(x)-f_n(x)|\leqq\gamma_n-\gamma_{n+1}$ *presque partout dans A_n pour tout n,*

(2. 6) $|p_{n+1}-p_n|\leqq\gamma_n-\gamma_{n+1}$ *pour tout n,*

(2. 7) $f_{2n}(x)=f_{2n+1}(x)$ *presque partout dans X et $p_{2n}=p_{2n+1}$,*

(2. 8) $\gamma_{2n}>\gamma_{2n+1}\,.$

Il en résulte de plus que, pour toute suite fondamentale $\{V(\gamma_n, A_n)+(f_n, p_n)\}$, pour que $(f, p)\in\bigcap_n(V(\gamma_n, A_n)+(f_n, p_n))$, il faut et il suffit qu'on ait à la fois $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ presque partout dans X et $\lim_{n\to\infty} p_n=p$.

Définition des intégrales (*E. R.*).— Étant donnée une autre mesure ν qui est équivalente à μ c.-à-d. ν est absolument continue par rapport à μ et vice versa, une suite fondamentals $\{V(\gamma_n, A_n)+(f_n, p_n)\}$ est dite qu'elle jouisse de la propriété $P^*(\nu)$, si elle satisfait aux conditions suivantes :

(1*) $f_n(x)$ est sommable pour μ ;

(2*) $$p_n = (R)\int_X f_n(x)d\mu(x)\,;$$

(3*) Il existe deux suites monotones décroisantes de nombres positifs $a(n)$ et $\phi(n)$ jouissant des conditions suivantes :

(3*. 1) $$\lim_{n\to\infty} a(n) = 0\,;$$

(3*. 2) $$\lim_{n\to\infty} \phi(n) = 0\,;$$

(3*. 3) $\nu(X-A_n)\leqq a(n)$ pour tout n ;

(3*. 4) Il existe un nombre $k>1$ (indépendant de n) qui satisfait à l'inégalité $ka(n+1)\geqq a(n)$ pour tout n ;

(3*. 5) Quels que soient m, n entiers positifs, pour tout ensemble mesurable A tel que $\nu(A)\leqq ma(n)$, on a $(R)\int_A |f_n(x)|\,d\mu(x)<m\phi(n)$.

Lemme 2. 2. *Soit* $\{V(\gamma_n, A_n)+(f_n, p_n)\}$ *une suite fondamentale jouissant de la propriété* $P^*(\nu)$. *Si* $(f, p)\in \bigcap_n (V(\gamma_n, A_n)+(f_n, p_n))$, *alors* $f(x)$ *est sommable sur chacun des ensembles* A_n *et on a de plus*

(2. 9) $$p = \lim_{n\to\infty} (R)\int_{A_n} f(x)d\mu(x)\,.$$

Démonstration. En vertu du lemme 2. 1., on a $|f(x)-f_n(x)|\leqq\gamma_n$ presque portout dans A_n. $f(x)$ est donc sommable sur A_n. De plus (2. 9) résulte de l'inégalite

$$\begin{aligned}\left|p-(R)\int_{A_n} f(x)d\mu(x)\right| &\leqq \left|p-(R)\int_X f_n(x)d\mu(x)\right| \\ &+(R)\int_{X-A_n} |f_n(x)|\,d\mu(x)+(R)\int_{A_n} |f(x)-f_n(x)|\,d\mu(x) \\ &\leqq \gamma_n+\phi(n)+\mu(X)\gamma_n\,.\end{aligned}$$

Lemme 2. 3. *Soient* $a_1(n)$, $a_2(n)$ *deux suites monotones décroissantes de nombres positifs satisfaisant aux conditions suivantes* : (i) $\lim_{n\to\infty} a_i(n)=0$; (ii) *Pour chaque indice* i, *il existe un nombre* $k_i>1$ (*indépendant de* n)

tel que $k_i a_i(n+1) \geqq a_i(n)$ *pour tout* n. *Alors, il existe deux suites d'entiers positifs* n_j^1, n_j^2 *jouissant des conditions suivantes*:

(2.10) $n_j^i < n_{j+1}^i$ *pour tout* j;

(2.11) *Si* j *est pair, alors* n_j^i *est aussi pair*;

(2.12) *Si* j *est impair, alors on a* $n_j^i = n_{j-1}^i + 1$;

(2.13) $(k_1k_2)^3 a_i(n_{j+1}^i) \geqq a_i(n_j^i)$ *pour tout* j;

(2.14) $a_i(n_j^i) \leqq (k_1k_2)^3 a_{i'}(n_j^{i'})$ *pour tout* $j(i, i'=1, 2)$.

Démonstration. Désignons par n_{2j}^i le plus petit entier pair des n tels que $a_i(n) < (k_1k_2)^{-3j}\,\mathrm{Min}\,(a_1(0), a_2(0))$, et posons $n_{2j+1}^i = n_{2j}^i + 1$.

Lemme 2.4. *Soient* $u_1 = \{V(\gamma_n^1, A_n^1) + (f_n^1, p_n^1)\}$, $u_2 = \{V(\gamma_n^2, A_n^2) + (f_n^2, p_n^2)\}$ *deux suites fondamentales jouissant de la propriété* $\mathrm{P}^*(\nu)$. *Alors, il existe une autre* $\{V(\gamma_n, A_n) + (f_n, p_n)\}$ *telle qu'on ait à la fois* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n^1(x) + \lim_{n\to\infty} f_n^2(x)$ *presque partout dans* X *et* $\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} p_n^1 + \lim_{n\to\infty} p_n^2$.

Démonstration. Remarquons d'abord que, puisque u_i jouisse de la propriété $\mathrm{P}^*(\nu)$, il existe, pour chaque indice i, deux suites monotones décroissantes de nombres réels $a_i(n)$, $\phi_i(n)$ jouissant des conditions (3*.1)-(3*.5). En vertu du Lemme 2.3, il existe deux suites d'entiers positifs n_j^1, n_j^2 satisfaisant aux conditions (2.10)-(2.14). Posons $\gamma_j = \gamma_{n_j^1}^1 + \gamma_{n_j^2}^2$, $A_j = A_{n_j^1}^1 \cap A_{n_j^2}^2$, $f_j(x) = f_{n_j^1}^1(x) + f_{n_j^2}^2(x)$ et $p_j = p_{n_j^1}^1 + p_{n_j^2}^2$. Alors, $\{V(\gamma_j, A_j) + (f_j, p_j)\}$ satisfait à l'exigence du lemme. En effet, en vertu des (2.10)-(2.12) et Lemme 2.1., on peut facilement voir qu'elle est une suite fondamentale. Ensuite, posons $a(j) = a_1(n_j^1) + a_2(n_j^2)$ et $\phi(j) = 2(k_1k_2)^3(\phi_1(n_j^1) + \phi_2(n_j^2))$. Alors, en vertu de (2.14), on a $a(j) \leqq 2(k_1k_2)^3 a_1(n_j^1)$ et $a(j) \leqq 2(k_1k_2)^3 a_2(n_j^2)$. Donc, et $\nu(A) \leqq ma(j)$, on a

$$(R)\int_A |f_j(x)|\,d\mu(x) \leqq (R)\int_A |f_{n_j^1}^1(x)|\,d\mu(x) + (R)\int_A |f_{n_j^2}^2(x)|\,d\mu(x)$$
$$\leqq m2(k_1k_2)^3(\phi_1(n_j^1) + \phi_2(n_j^2)) = m\phi(j)\,.$$

Par conséquent, $\{V(\gamma_n, A_n) + (f_n, p_n)\}$ est une suite fondamentale jouissant de la propriété $\mathrm{P}^*(\nu)$.

Lemme 2.5. *Soient* c *un nombre réel*, $\{V(\gamma_n, A_n) + (f_n, p_n)\}$ *une suite fondamentale jouissant de la propriété* $\mathrm{P}^*(\nu)$. *Alors, il existe une autre* $\{V(\gamma_n^*, A_n^*) + (f_n^*, p_n^*)\}$ *telle que* $\lim_{n\to\infty} f_n^*(x) = c \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *presque partout et* $\lim_{n\to\infty} p_n^* = c \lim_{n\to\infty} p_n$.

Démonstration est immédiate.

Or, considérons deux suites fondamentales $\{V(\gamma_n, A_n) + (f_n, p_n)\}$,

$\{V(\beta_n, B_n)+(g_n, q_n)\}$ jouissant de la propriété $P^*(\nu)$. Alors, les Lemmes 2. 2, 2. 4 et 2. 5 montrent bien que, si $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} g_n(x)$ presque partout, on a $\lim_{n\to\infty} p_n=\lim_{n\to\infty} q_n$. En effet, en vertu des Lemmes 2. 4 et 2. 5, il existe une autre suite fondamentale $\{V(\gamma_n, C_n)+(h_n, r_n)\}$ jouissant de la propriété $P^*(\nu)$ et telle qu'on ait $\lim_{n\to\infty} h_n(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)-\lim_{n\to\infty} g_n(x)=0$ et $\lim_{n\to\infty} r_n= \lim_{n\to\infty} p_n-\lim_{n\to\infty} q_n$. D'aprés le Lemme 2. 2, on a $\lim_{n\to\infty} r_n=0$.

Donc, s'il existe une suite fondamentale $\{V(\gamma_n, A_n)+(f_n, p_n)\}$ jouissant de la propriété $P^*(\nu)$ et telle que $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ presque partout, nous pouvons définir l'intégrale $(E.\ R.\ \nu)$ de $f(x)$ par

$$(E.\ R.\ \nu)\int_X f(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} p_n (= \lim_{n\to\infty} (R)\int_X f_n(x)d\mu(x)).$$

La fonction $f(x)$ est dite intégrable $(E.\ R.\ \nu)$ pour μ et $\{V(\gamma_n, A_n)+ (f_n, p_n)\}$ (ou $\{V(\gamma_n, A_n)+(f_n, p_n);\ a(n),\ \phi(n),\ k\}$) s'appelle une suite génératrice de $f(x)$. Dans le cas où $\nu=\mu$, $f(x)$ sera dite simplement intégrable $(E.\ R.)$ et l'intégrale de $f(x)$ est désignée par $(E.\ R.)\int_X f(x)d\mu(x)$.

Si $f(x)$ est sommable, alors celle est intégrable $(E.\ R.\ \nu)$ et on a

$$(E.\ R.\ \nu)\int_X f(x)d\mu(x) = (R)\int_X f(x)d\mu(x).$$

En vertu des Lemmes 2. 4 et 2. 5, on a immédiatement le

Théorème 2. *Soient c_1, c_2 deux nombres réels. Si $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont intégrables $(E.\ R.\ \nu)$, alors $\sum_{i=1}^{2} c_i f_i(x)$ est aussi intégrable $(E.\ R.\ \nu)$ et on a*

$$(E.\ R.\ \nu)\int_X \sum_{i=1}^{2} c_i f_i(x)d\mu(x) = \sum_{i=1}^{2} c_i (E.\ R.\ \nu)\int_X f_i(x)d\mu(x).$$

Intégration sur les sous-ensembles.— Soit X^* un sous-ensemble mesurable de X muni des mesures μ^* et ν^* induites par μ et ν respectivement. Alors, on a le

Théorème 3. *Soit $f^*(x)$ une fonction définie sur X^*. Définissons une fonction $f(x)$ définie sur X par*

$$f(x) = \begin{cases} f^*(x) & \text{pour} \quad x\in X^* \\ 0 & \text{pour} \quad x\in X-X^*. \end{cases}$$

Alors, pour que $f^*(x)$ soit intégrable $(E.\ R.\ \nu^*)$ pour μ^*, il faut et il suffit que $f(x)$ soit intégrable $(E.\ R.\ \nu)$ pour μ.

Démonstration. Supposons d'abord que $f(x)$ soit intégrable $(E.\ R.\ \nu)$.

Alors, il existe une suite génératrice $\{V(\gamma_n, A_n)+(f_n, p_n)\,;\, a(n), \phi(n)\}$ de $f(x)$. Posons $\gamma_n^* = \gamma_n$, $A_n^* = X^* \bigwedge A_{2[n/2]+1}$[17] et $p_n^* = p_n$. S'il existe un indice n tel que $\mu(X^* - A_n^*) = 0$, $f^*(x)$ est sommable et donc intégrable $(E.\ R.\ \nu^*)$. Si $\mu(X^* - A_n^*) > 0$ pour tout n, posons

$$f_n^*(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{pour } x \in A_n^* \\ f_n(x) + \dfrac{1}{\mu(X^* - A_n^*)}(R)\displaystyle\int_{X-X^*} f_n(x)d\mu(x) & \text{pour } x \in X^* - A_n^*\,. \end{cases}$$

Alors, en vertu de Lemme 2.1, $\{V(\gamma_n^*, A_n^*)+(f_n^*, p_n^*)\}$ est une suite fondamentale.

Or, d'une part, $(R)\displaystyle\int_{X^*} f_n^*(x)d\mu^*(x) = (R)\int_X f_n(x)d\mu(x) = p_n^*$ et d'autre part, $\nu^*(A) \leqq ma(n)$ entraîne que

$$\begin{aligned}(R)\int_A |f_n^*(x)|\,d\mu^*(x) &\leqq (R)\int_{A\cap A_n^*} |f_n^*(x)|\,d\mu^*(x) + (R)\int_{X^*-A_n^*} |f_n^*(x)|\,d\mu^*(x) \\ &\leqq (R)\int_A |f_n(x)|\,d\mu(x) + (R)\int_{X-A_n^*} |f_n(x)|\,d\mu(x) + (R)\int_{A_n^*-X^*} |f_n(x)|\,d\mu(x) \\ &< m(2\phi(n) + \mu(X)\gamma_n)\,,\end{aligned}$$

donc, $\{V(\gamma_n^*, A_n^*)+(f_n^*, p_n^*)\,;\, a(n),\ 2\phi(n)+\mu(X)\gamma_n\}$ est une suite génératrice de $f^*(x)$.

La démonstration de l'inverse est immédiate.

Changement de la mesure.— Étant données deux mesures μ, μ', si μ est absolument continue par rapport à μ', on désigne par $\dfrac{d\mu}{d\mu'}$ la dérivée au sens pris de Radon-Nikodym. Si μ est équivalente à μ', alors on a $\dfrac{d\mu}{d\mu'}\dfrac{d\mu'}{d\mu} = 1$ presque partout.[18]

Théorème 4. *Soit X un ensemble muni de trois mesures μ, μ' et ν qui sont deux à deux équivalentes. Alors, pour qu'une function $f(x)$ soit intégrable $(E.\ R.\ \nu)$ pour μ, il faut et il suffit que $f(x)\dfrac{d\mu}{d\mu'}(x)$ soit intégrable $(E.\ R.\ \nu)$ pour μ'. Et, de plus, on a*

$$(E.\ R.\ \nu)\int_X f(x)d\mu(x) = (E.\ R.\ \nu)\int_X f(x)\frac{d\mu}{d\mu'}(x)d\mu'(x)\,.$$

Démonstration. D'abord, supposons que $f(x)$ soit intégrable $(E.\ R.\ \nu)$

17) Pour un nombre réel p, $[p]$ désigne l'entier m tel que $p \geq m > p-1$.

18) Voir p. ex. P. R. Halmos: Measure Theory, New York, 1950.

pour μ. Alors, il existe une suite génératrice $\{V(\gamma_n, A_n)+(f_n, p_n)\,;\, a(n), \phi(n)\}$ de $f(x)$. Posons $A'_n = A_{2[n/2]+1}$. Alors, $f(x)$ est sommable sur chacun des ensembles A'_n. Si $\mu(X-A'_n)>0$ pour tout n, définissons une fonction $f'(x)$ par

$$f'_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \in A'_n \\ f_n(x) + \dfrac{1}{\mu(X-A'_n)}(R)\displaystyle\int_{A'_n}(f_n(x)-f(x))d\mu(x) & \text{pour } x \in X-A'_n, \end{cases}$$

et posons $f^*_n(x) = f'_n(x)\dfrac{d\mu}{d\mu'}$. Alors, on a $(R)\int_X f^*_n(x)d\mu'(x) = (R)\int_X f'_n(x)d\mu(x) = (R)\int_X f_n(x)d\mu(x) = p_n$. Ensuite, $\nu(A) \leqq ma(n)$ entraîne que

$$\begin{aligned}(R)\int_A |f^*_n(x)|\,d\mu'(x) &= (R)\int_A |f'_n(x)|\,d\mu(x) \\ &\leqq (R)\int_{A\cap A'_n} |f'_n(x)|\,d\mu(x) + (R)\int_{X-A'_n} |f'_n(x)|\,d\mu(x) \\ &\leqq (R)\int_{A\cap A'_n} |f_n(x)|\,d\mu(x) + (R)\int_{A\cap A'_n} |f_n(x)-f(x)|\,d\mu(x) \\ &\quad + (R)\int_{X-A'_n} |f_n(x)|\,d\mu(x) + (R)\int_{A'_n} |f_n(x)-f(x)|\,d\mu(x) \\ &< m(2\phi(n)+2\mu(X)\gamma_n)\,.\end{aligned}$$

D'autre part, puisque $\mu(X-\bigcup_n A'_n)=0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mu'(X-A'_n) = \mu'(X-\bigcup_n A'_n) = 0\,.$$

Par conséquent, en posant $\gamma^*_n = \gamma_n + \mu'(X-A'_n)$, $\{V(\gamma^*_n, A_n)+(f^*_n, p_n)\}$ est une suite génératrice de $f(x)\dfrac{d\mu}{d\mu'}$ par rapport à μ'. De plus, on a

$$(E.\ R.\ \nu)\int_X f(x)\frac{d\mu}{d\mu'}\,d\mu'(x) = \lim_{n\to\infty} p_n = (E.\ R.\ \nu)\int_X f(x)d\mu(x)\,.$$

Inversement, supposons que $f(x)\dfrac{d\mu}{d\mu'}$ soit intégrable (*E. R.* ν) pour μ'. Alors, en vertu de l'énoncé plus haut, $f(x)\dfrac{d\mu}{d\mu'}\dfrac{d\mu'}{d\mu} = f(x)$ est intégrable (*E. R.* ν) pour μ, c.q.f.d..

En posant $\mu'=\nu$, le Théorème 4 explique que la théorie des intégrales (*E. R.* ν) (généralisées par ν) se réduit à celle des intégrales (*R. E.*) au sens usuel (c.-à-d. $\nu=\mu$). En particulier, il montre que, dans le cas d'une variable réelle, la généralisation donnée par Prof. K. Kunugi[19] et la notre sont coïncidentes.

---

19) K. Kunugi: Sur une généralisation de l'intégrale, cité dans 1), §4. Généralisation.

Cas d'une variable réelle.— Nous allons maintenant considérer le cas où X serait un intervalle fermé $[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$, et μ serait la mesure de Lebesgue, et $\nu = \mu$.

Or, nous allons désigner par $\boldsymbol{J}([a, b])$ la famille de toutes les fonctions intégrables $(E. R.)$ sur $[a, b]$ qui admettent des suites génératrices $\{V(\gamma_n, A_n) + (f_n, p_n)\}$ satisfaisant à la condition:

$$\left|(L)\int_a^c (f_{n+1}(x) - f_n(x))dx\right| \leqq \gamma_n - \gamma_{n+1} \qquad \text{pour tout } c \in A_n. \tag{2.15}$$

Alors, de la même considération du Théorème 1, $\boldsymbol{J}([a, b])$ est une ensemble linéaire.

Si $f(x) \in \boldsymbol{J}([a, b])$, l'intégrale $(E. R.)$ indéfinie $F(x) = (E. R.)\int_a^x f(t)dt$ et $f(x)$ peut être définie presque partout dans $[a, b]$, et, si en outre $\{V(\gamma_n, A_n) + (f_n, p_n)\}$ est une suite génératrice de $f(x)$ satisfaisant à la condition (2.15), on a, en posant $F_n(x) = (L)\int_a^x f_n(t)dt$,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) \quad \text{presque partout.} \tag{2.16}$$

De plus, Lemme 2.3 montre que, si $f(x) \in \boldsymbol{J}([a, b])$, il existe une suite génératrice $\{V(\gamma_n, A_n) + (f_n, p_n)\}$ de $f(x)$ telle que

$$\mu([a, b] - A_n) < 2^{-n} \tag{2.17}$$

et qui satisfait à la condition (2.15).

Cela posé, on a le

Lemme 2.6. *Si $f(x) \in \boldsymbol{J}([a, b])$ et si $\{V(\gamma_n, A_n) + (f_n, p_n)\}$ est une suite génératrice de $f(x)$ satisfaisant aux conditions* (2.15) *et* (2.17), *alors on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (L)\int_a^b |F_{n+1}(x) - F_n(x)|\,dx < \infty\,. \tag{2.18}$$

Démonstration. En vertu de la condition (3*), il existe deux suites monotones décroissantes de nombres positifs $a(n)$ et $\phi(n)$ jouissant des conditions (3*.1)-(3*.5). Alors, on a

$$\begin{aligned}(L)\int_a^b |F_{n+1}(x) - F_n(x)|\,dx &= (L)\int_a^b \left|(L)\int_a^x (f_{n+1}(t) - f_n(t))dt\right| dx \\ &\leqq (L)\int_{A_n} \left|(L)\int_a^x (f_{n+1}(t) - f_n(t))dt\right| dx \\ &\quad + (L)\int_{[a,b]-A_n} \left\{(L)\int_a^b |f_{n+1}(t) - f_n(t)|\,dt\right\} dx\end{aligned}$$

$$\leqq (b-a)(\gamma_n-\gamma_{n+1})+2^{-n}\left\{(L)\int_{A_n}\left|f_{n+1}(t)-f_n(t)\right|dt\right.$$
$$\left.+(L)\int_{[a,b]-A_n}|f_{n+1}(t)|\,dt+(L)\int_{[a,b]-A_n}|f_n(t)|\,dt\right\}$$
$$\leqq (b-a)(\gamma_n-\gamma_{n+1})$$
$$+2^{-n}\{(b-a)(\gamma_n-\gamma_{n+1})+(k+1)\phi(n+1)+\phi(n)\}\,, \qquad \text{c.q.f.d..}$$

Donc, d'après le théorème de Beppo-Levi[20], on a le

Théorème 5. *Si* $f(x)\in \boldsymbol{J}([a, b])$, *alors l'intégrale indéfinie* $F(x)$ *de* $f(x)$ *est une fonction sommable sur* $[a, b]$.

D'après ce théorème, on peut facilement voir que, si $f(x)$ admet une suite génératrice satisfaisant à la condition (2. 15) et telle que A_n soit ouvert, $F(x)$ est dérivable presque partout dans $[a, b]$ et on a $F'(x)=f(x)$ presque partout.

Lemme 2. 7. *Si* $f(x)\in \boldsymbol{J}([a, b])$, *et si* $\varphi(x)$ *satisfait à la condition de Lipschitz*[21], *alors* $f(x)\varphi(x)$ *est intégrable* (*E. R.*) *sur* $[a, b]$. *Si* $\{V(\gamma_n, A_n)+(f_n, p_n)\}$ *est une suite génératrice de* $f(x)$ *satisfaisant aux conditions* (2. 15) *et* (2. 17), *on a*

$$(2.19) \qquad (E.\ R.)\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \lim_{n\to\infty}(L)\int_a^b f_n(x)\varphi(x)dx\,.$$

Démonstration. D'abord, intégrant par parties, on a

$$\left|(L)\int_a^b \varphi(x)(f_{n+1}(x)-f_n(x))dx\right| \leqq |\varphi(b)|\left|(L)\int_a^b (f_{n+1}(x)-f_n(x))dx\right|$$
$$+(L)\int_a^b |\varphi'(x)|\left|(L)\int_a^x (f_{n+1}(t)-f_n(t))dt\right|dx$$
$$\leqq |\varphi(b)|(\gamma_n-\gamma_{n+1})+(\sup_{a\leqq x\leqq b}|\varphi'(x)|)(L)\int_a^b |F_{n+1}(x)-F_n(x)|\,dx\,.$$

Dons, d'après le Lemme 2. 6, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|(L)\int_a^b \varphi(x)(f_{n+1}(x)-f_n(x))dx\right| < \infty\,.$$

En posant $\gamma_n^* = (1+\sup_{a\leqq x\leqq b}|\varphi(x)|)\gamma_n+\sum_{m=n}^{\infty}\left|(L)\int_a^b \varphi(x)(f_{m+1}(x)-f_m(x))\,dx\right|$, $\left\{V(\gamma_n^*, A_n)+(f_n\varphi,\ (L)\int_a^b f_n(x)\varphi(x)\,dx)\right\}$ est donc une suite génératrice de $f(x)\varphi(x)$, c.q.f.d..

20) Voir p. ex. F. Riesz et B. Sz.-Nagy: Leçons d'Analyse Fonctionnelle, Budapest, 1952.

21) Dans la suite, nous dirons simplement "condition de Lipschitz", sous-entendant celle qui est d'ordre 1.

Théorème 6. *Si $f(x) \in \boldsymbol{J}([a, b])$, et si $\varphi(x)$ satisfait à la condition de Lipschitz, alors l'intégrale (E. R.) de $f(x)\varphi(x)$ peut se calculer par parties :*

$$(E.\ R.)\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = F(b)\varphi(b)-(L)\int_a^b F(x)\varphi'(x)\,dx\,,$$

où $F(x)=(E.\ R.)\int_a^x f(t)\,dt$[22].

Démonstration. Soit $\{V(\gamma_n, A_n)+(f_n, p_n)\}$ une suite génératrice de $f(x)$ satisfaisant aux condition (2.15) et (2.17). Alors, en posant $F(x)= (E.\ R.)\int_a^x f(t)\,dt$ et $F_n(x)=(L)\int_a^x f_n(t)\,dt$, on a $\lim_{n\to\infty} F_n(x)\varphi'(x)=F(x)\varphi(x)$ presque partout. D'autre part, le Lemme 2.6 montre que $\sum_{n=0}^{\infty}(L)\int_a^b |F_{n+1}(x)\varphi'(x)- F_n(x)\varphi'(x)|\,dx<\infty$. Par suite, en vertu du théorème de Beppo-Levi, on a

$$(L)\int_a^b F(x)\varphi'(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}(L)\int_a^b F_n(x)\varphi'(x)\,dx\,.$$

Donc, utilisant le Lemme 2.7, on a

$$\begin{aligned}(E.\ R.)\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}(L)\int_a^b f_n(x)\varphi(x)dx\\ &= \lim_{n\to\infty}\varphi(b)(L)\int_a^b f_n(x)dx-\lim_{n\to\infty}(L)\int_a^b F_n(x)\varphi'(x)\,dx\\ &= F(b)\varphi(b)-(L)\int_a^b F(x)\varphi'(x)\,dx\,, \qquad \text{c.q.f.d..}\end{aligned}$$

Exemple 2.1. Soit $f(x)$ une fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{2^{n+1}(2^{n+1}x-3)\log\dfrac{|2^{n+1}x-3|}{2}} \quad \text{pour} \quad 2^{-n}<x\leq 2^{-n+1} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)\,.$$

Alors, on a $f\in\boldsymbol{J}([0, 1])$, et $(E.\ R.)\int_0^1 f(x)\,dx=0$.

Exemple 2.2. E une somme d'un nombre fini d'intervalles fermés $[a_i, b_i]$ $(i=1, 2, \cdots, m)$: $E=\bigcup_{i=1}^{m}[a_i, b_i]$. Posons

$$H'_n(E) = \bigcup_{i=1}^{m}\left(\frac{a_i+b_i}{2}-\frac{b_i-a_i}{2^{2n+1}},\ \frac{a_i+b_i}{2}+\frac{b_i-a_i}{2^{2n+1}}\right)^{23)}$$

22) Cf. S. Nakanishi : L'intégrale (*E. R.*) et la théorie des distributions, Proc. Japan Acad., **34** (1958), 565–570, Proposition 1 ; H. Okano : Multiplication of (*E. R.*)-integrable functions, ibid., 585–586, Theorem 2.

23) (a, b) désigne un intervalle ouvert.

pour tout entier positif n. Et mettons

$$
\begin{aligned}
&H_1(E) = H'_1(E)\,, \\
&H_n(E) = H'_n(E - \bigcup_{i=1}^{n-1} H_i(E)) && \text{pour } n \geqq 2\,, \\
&H(E) = E - \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n(E)\,, \\
&H_{n_1 n_2 \cdots n_k}(E) = H'_{n_k}(H_{n_1 n_2 \cdots n_{k-1}}(E)) && \text{pour } k \geqq 2\,, \\
&H^*_n(E) = H(\bigcup_{n_1+\cdots+n_k=n} H_{n_1\cdots n_k}(E)) && \text{pour } n \geqq 1\,.
\end{aligned}
$$

Posons $I=[0, 1]$. Alors, on a $\mu(H^*_n(I))>0$ pour tout n. Considérons une fonction $f(x)$ définie par

$$
f(x) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{n\mu(H^*_n(I))} & \text{pour } x \in H^*_n(I) \ (i=1, 2, 3, \cdots) \\ 0 & \text{pour } x \in I - \bigcup_{n=1}^{\infty} H^*_n(I)\,. \end{cases}
$$

Alors, la fonction $f(x)$ appartient à $\boldsymbol{J}(I)$, et son intégrale $(E. R.)$ $\int_0^1 f(x)dx$ est égale à $\log 2$. Quelque soit I_0 un sous-intervalle de I, $f(x)$ n'est pas sommable sur I_0.

§ 3. Applications des intégrales (*E. R.*).

Tout d'abord, commençons par condidérer l'

Intégrale de Poisson.— Étant donnée une fonction $f(\theta)$ sommable sur $[-\pi, \pi]$, on sait[24] que l'intégrale de Poisson

$$
u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} (L) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2} f(\theta)\,d\theta
$$

définit une fonction harmonique à l'intérieur du cercle-unité, et si en point θ_0 l'intégrale indéfinie $F(\theta)$ de $f(\theta)$ admet une dérivée $F'(\theta_0)$, tend vers $F'(\theta_0)$ quand le point (r, φ) se rapproche du point $(1, \theta_0)$, passant entre deux cordes au point $(1, \theta_0)$.

Dans la suite, nous allons montrer qu'il est valable sous la seule condition que $f(\theta)$ appratienne à $\boldsymbol{J}([-\pi, \pi])$.

Soit $f(\theta)$ une fonction appartenant à $\boldsymbol{J}([-\pi, \pi])$. Alors, d'après le Lemme 2.7, nous pouvons définir une fonction $g(z)$ d'une variable complexe z, $|z|<1$, par

---

24) P. Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Mat., **30** (1906). Voir aussi G. C. Evans: The logarithmic potential, Amer. Math. Soc. Col. Pub. VI, 1929.

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}(E.\ R.)\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} f(\theta)\,d\theta\,^{25)}.$$

Nous allons maintenant montrer que $g(z)$ est holomorphe pour $|z|<1$. En effet, posons

$$g_1(z) = \frac{1}{\pi}(E.\ R.)\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z)^2} f(\theta)\,d\theta\,.^{25)}$$

Alors, en vertu du Théorème 6, on a

$$\begin{aligned} &\left|\frac{g(z+h)-g(z)}{h} - g_1(z)\right| \\ &\leqq \frac{|h|}{\pi}\left|(E.\ R.)\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z-h)(e^{i\theta}-z)^2} f(\theta)\,d\theta\right| \\ &\leqq \frac{|h|}{\pi}\left\{\left|\frac{1}{(1+z+h)(1+z)^2}\right|\left|(E.\ R.)\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta\right|\right. \\ &\qquad \left. +(L)\int_{-\pi}^{\pi} |F(\theta)|\left|\frac{d}{d\theta}\left(\frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z-h)(e^{i\theta}-z)^2}\right)\right| d\theta\right\}, \end{aligned}$$

où $F(\theta)=(E.\ R.)\int_{-\pi}^{\theta} f(t)\,dt$.

Donc, on a $g'(z)=g_1(z)$.

Puisque la fonction $u(r, \varphi)$ définie par

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}(E.\ R.)\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)} f(\theta)\,d\theta \tag{3.1}$$

est la partie réelle de $g(z)$, elle est une fonction harmonique pour $|r|<1$.

Ensuite nous allons démontrer le théorème de Fatou :

Théorème 7. *Soit $f(\theta)$ une fonction appartenant à $\boldsymbol{J}([-\pi, \pi])$. Si en point θ_0 l'intégrale $(E.\ R.)$ indéfinie $F(\theta)$ de $f(\theta)$ admet une dérivée $F'(\theta_0)$, alors la fonction $u(r, \varphi)$ définie par (3.1) tend vers $F'(\theta_0)$ quand le point (r, φ) se rapproche du point $(1, \theta_0)$, passant entre deux cordes au point $(1, \theta_0)$.*[26]

Démonstration. Remarquons d'abord que, d'après le théorème usuel de Fatou, nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que $\theta_0=0$ et $F(0)=F'(0)=0$. D'ailleurs, l'hypothèse du théorème est équivalente au fait qu'il existe un nombre positif N tel que

25) L'intégrale $(E.\ R.)$ d'une fonction à valeurs complexes $f(x)=g(x)+i\,h(x)$ est définie par $(E.\ R.)\int f(x)\,dx=(E.\ R.)\int g(x)\,dx+i(E.\ R.)\int h(x)\,dx$.

26) Cf. H. Okano : Une généralisation d'un théorème de Fatou concernant l'intégrale de Poisson, Proc. Japan Acad. 35 (1959) 461-464.

(3. 2) $$|\varphi| < N(1-r).$$

Posons

(3. 3) $$F(\theta) = \theta\eta(\theta).$$

Alors, $\lim_{\theta\to 0}\eta(\theta)=0$. Ainsi, étant donné un nombre positif ε, il existe un nombre positif λ tel qu'on ait

(3. 4) $$|\eta(\theta)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad |\theta| < \lambda.$$

De plus, il existe un nombre positif M (indépendant de θ) tel que,

(3. 5) $$\text{si } \frac{\lambda}{2} \leqq |\theta-\varphi| \leqq \pi, \quad \left|\frac{1}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}\right| < M.$$

Posons $K=\mathrm{Min}\left(1, \dfrac{\varepsilon}{1+M^2}, \dfrac{\lambda}{2N}\right)$.

D'autre part, d'après le Théorème 6, on a

$$\begin{aligned}|u(r, \varphi)| \leqq & \frac{1-r^2}{2\pi(1+r^2+2r\cos\varphi)}\left|(E.\,R.)\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d(\theta)\right| \\ & +\frac{1}{2\pi}\left|(L)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2r(1-r^2)\sin(\varphi-\theta)}{(1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta))^2}F(\theta)d\theta\right|,\end{aligned}$$

où $F(\theta)=(E.\,R.)\int_{-\pi}^{\theta} f(t)\,dt$.

D'abord, $|re^{i\varphi}-1| < K$ entraîne $0 \leqq \dfrac{1-r^2}{1+r^2+2r\cos\varphi} \leqq 2(1-r) < 2\varepsilon$. Donc, en posant

$$\begin{aligned}(L)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2r(1-r^2)\sin(\varphi-\theta)}{(1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta))^2}F(\theta)d\theta &= \int_{-\pi}^{\varphi-\lambda/2}+\int_{\varphi-\lambda/2}^{\varphi+\lambda/2}+\int_{\varphi+\lambda/2}^{\pi} \\ &= I_1+I_2+I_3,\end{aligned}$$

on a $|u(r, \varphi)| \leqq \dfrac{1}{2\pi}\left(2\varepsilon\left|(E.\,R.)\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta\right|+|I_1|+|I_2|+|I_3|\right)$ pour $|re^{i\varphi}-1| < K$.

Or, $|re^{i\varphi}-1| < K$ entraîne $|I_1|+|I_3| < 4\varepsilon\int_{-\pi}^{\pi}|F(\theta)|\,d\theta$ d'après (3. 5). Ensuite, posons $t=\theta-\varphi$, alors on a, en vertu de (3. 3),

$$\begin{aligned}I_2 &= (L)\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2}\frac{2r(1-r^2)\sin t}{(1+r^2-2r\cos t)^2}(t+\varphi)\,\eta(t+\varphi)dt \\ &= (L)\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2}\frac{2r(1-r^2)\sin t}{(1+r^2-2r\cos t)^2}t\eta(t+\varphi)\,dt \\ &\quad +(L)\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2}\frac{2r(1-r^2)\sin t}{(1+r^2-2r\cos t)^2}\varphi\eta(t+\varphi)\,dt \\ &= I_2^1+I_2^2.\end{aligned}$$

Puisque $|t+\varphi| \leqq |t|+|\varphi| \leqq \frac{\lambda}{2}+N(1-r)<\lambda$ d'après (3.2), en vertu de (3.4), on a $|\eta(t+\varphi)|<\varepsilon$. Donc, on a

$$|I_2^1| \leqq 2\varepsilon \int_0^{\pi} \frac{2r(1-r^2)\sin t}{(1+r^2-2r\cos t)^2} t\,dt$$
$$\leqq \frac{4\pi r\varepsilon}{1+r} \leqq 4\pi\varepsilon .$$

D'autre part, on a, en vertu de (3.2),

$$|I_2^2| \leqq 2\varepsilon|\varphi|(1-r^2) \int_0^{\pi} \frac{2r\sin t}{(1+r^2-2r\cos t)^2} dt$$
$$\leqq 4N\varepsilon(1-r)^2\left(\frac{1}{(1-r)^2}-\frac{1}{(1+r)^2}\right) \leqq 4N\varepsilon .$$

Par suite, $|re^{i\varphi}-1|<K$ entraîne l'inégalité

$$|u(r, \varphi)| \leqq \frac{\varepsilon}{\pi}\left\{\left|(E.\,R.)\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta\right| + 2(L)\int_{-\pi}^{\pi} |F(\theta)|\,d\theta + 2\pi + 2N\right\} .$$

Par conséquent, on a $\lim\limits_{\substack{r \to 1 \\ |\varphi|<N(1-r)}} u(r, \varphi)=0,$ c.q.f.d..

Opérateurs intégraux (*E. R*).— Dorénavant, supposons que $K(x, y)$ soit une fonction définie et ayant des dérivées continues dans un domaine $\alpha<x<\beta$, $\alpha<y<\beta$. Si $f(x) \in \boldsymbol{J}([a, b])$, $\alpha<a<b<\beta$, alors, en vertu du Lemme 2.7, $K(x, y)f(y)$ est intégrable (*E. R.*) sur $[a, b]$. Donc, nous pouvons définir un opérateur $K\cdot f$ par

$$(K\cdot f)(x) = (E.\,R.)\int_a^b K(x, y)f(y)dy .$$

Alors, en vertu du Théorème 6, on peut sans peine voir que $(K\cdot f)(x)$ est une fonction continue dans l'intervalle (α, β).

Si la multiplication $f(x)g(x)$ de deux fonctions $f(x)$, $g(x)$ est intégrable (*E. R.*) sur $[a, b]$, définissons une forme bilinéaire (f, g) par

$$(f, g) = (E.\,R.)\int_a^b f(x)g(x)dx .$$

Ensuite, posons $K^*(x, y)=K(y, x)$. Alors, on a le

Lemme 3.1. *Soit $g(x)$ une fonction sommable sur $[a, b]$, $f(x) \in \boldsymbol{J}([a, b])$. Alors, on a $(K\cdot f, g)=(f, K^*\cdot g)$.*

Démonstration. Soit $\{V(\gamma_n, A_n)+(f_n, p_n)\}$ une suite génératrice de

f satisfaisant aux conditions (2.15) et (2.17). Posons

$$F_n(x) = (L)\int_a^x f_n(t)dt\,, \quad F(x) = (E.\,R.)\int_a^x f(t)\,dt\,,$$

et mettons

$$M = \sup_{a \leq x \leq b,\, a \leq y \leq b}\left(|K(x, y)|,\ \left|\frac{\partial}{\partial y}K(x, y)\right|\right).$$

Alors, d'après le Théorème 6, on a

$$|(K\cdot(f-f_n), g)| \leq M(L)\int_a^b |g(x)|\,dx\left\{\left|(E.\,R.)\int_a^b (f(y)-f_n(y))dy\right| \right.$$
$$\left. +(L)\int_a^b |F(y)-F_n(y)|\,dy\right\}.$$

Donc, en vertu du Lemme 2.6, on a $\lim_{n\to\infty}(K\cdot(f-f_n), g)=0$.

D'ailleurs, puisque $(K^*\cdot g)(x)$ jouit de la condition de Lipschitz dans $[a, b]$, on a $\lim_{n\to\infty}(f_n-f, K^*\cdot g))=0$ d'après le Lemme 2.7.

Par conséquent, d'après le théorème de Fubini, on a

$$(K\cdot f, g)-(f, K^*\cdot g) = (K\cdot(f-f_n), g)+(f_n-f, K^*\cdot g) = 0\,, \qquad \text{c.q.f.d..}$$

Or, désignons par **1** l'opérateur identique. Alors, pour un nombre réel λ quelconque, l'opérateur $\mathbf{1}-\lambda K$ est une application de $\boldsymbol{J}([a, b])$ dans lui-même. Nous allons maintenant démontrer le théorème de Fredholm.

Théorème 8. *Pour que* $\mathbf{1}-\lambda K$ *admette un opérateur inverse, il faut et il suffit que* $\frac{1}{\lambda}$ *ne soit pas une valeur propre de K.*

Démonstration. D'abord choisissons deux systèmes linéairement indépendants de fonctions ayant des dérivées continues dans l'intervalle

$$(\alpha, \beta):\ \alpha_1(x),\ \alpha_2(x),\ \cdots,\ \alpha_m(x)\,;\ \beta_1(y),\ \beta_2(y),\ \cdots,\ \beta_m(y)\,,$$

telles qu'on ait

$$(L)\int_a^b\int_a^b |\lambda K(x, y)-\sum_{i=1}^m \alpha_i(x)\beta_i(y)|^2\,dx\,dy < 1\,.$$

Posons

$$K_1(x, y) = \lambda K(x, y)-\sum_{i=1}^m \alpha_i(x)\beta_i(y)\,,$$
$$K_1^1(x, y) = K_1(x, y)\,,$$
$$K_1^n(x, y) = (L)\int_a^b K_1(x, t)K_1^{n-1}(t, y)dt \quad \text{pour } n \geq 2\,.$$

Alors, la série de Neumann

$$\Gamma_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_1^n(x, y)$$

définit une fonction définie et ayant des dérivées continues dans l'intervalle (α, β).

Cela préparé, en vertu du Lemm 3. 1, l'équation

$$(1-\lambda K)\cdot\varphi = f$$

se réduit à la formule[27]

$$\varphi(x) = f(x)+(E.\ R.)\int_a^b \Gamma_1(x, y)f(y)\,dy$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\rho_i(\alpha_i(x)+(L)\int_a^b \Gamma_1(x, y)\alpha_i(y)\,dy)$$

presque partout, avec

$$\rho_j-\sum_{i=1}^{m}\rho_i\left\{(L)\int_a^b \alpha_i(x)\beta_j(x)\,dx+(L)\int_a^b\int_a^b \Gamma_1(x, y)\alpha_i(y)\beta_j(x)\,dxdy\right.$$
$$= (E.\ R.)\int_a^b (\beta_j(x)+(L)\int_a^b \Gamma_1(y, x)\beta_j(y)\,dy)f(x)\,dx$$
$$(j=1, 2, 3, \cdots, m), \qquad \text{c.q.f.d.}^{27)}.$$

Nous allons maintenant passer à l'étude d'un opérateur K défini par un noyau $K(x, y)$ ayant des dérivées continues à second ordre.

Lemme 3. 2. *Si $K(x, y)$ a des dérivées continues à second ordre, alors $(K\cdot f)(x)$ est une fonction à dérivées continues, et on a*

$$\frac{d}{dx}(K\cdot f)(x) = (K_x\cdot f)(x)\ ^{28)}.$$

Démonstration. Posons $F(y)=(E.\ R.)\int_a^y f(t)dt$. Alors, en vertu du Théorème 6, on a

$$(K_x\cdot f)(x)=F(b)\frac{\partial}{\partial x}K(x, b)-(L)\int_a^b F(y)\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}K(x, y)dy,$$

et en outre

$$(K\cdot f)(x) = (E.\ R.)\int_a^b f(y)\,dy\,K(x, b)-(L)\int_a^b F(y)\frac{\partial}{\partial y}K(x, y)\,dy.$$

---

27) Cf. la méthode de E. Schmidt: Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen, II, Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung, Math. Ann. **64** (1907), 161–174.

28) $K_x\cdot f$ désigne l'opérateur définie par le noyau

$$\frac{\partial}{\partial x}K(x, y):\ (K_x\cdot f)(x)=(E.\ R.)\int_a^b f(y)\frac{\partial}{\partial x}K(x, y)\,dy.$$

Donc, on a

$$\frac{d}{dx}(K\cdot f)(x) = (E.\,R.)\int_a^b f(y)\,dy\,\frac{\partial}{\partial x}K(x, b)$$
$$-(L)\int_a^b F(y)\,\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}K(x, y)\,dy$$
$$= (K_x\cdot f)(x)\,, \qquad \text{c.q.f.d..}$$

Théorème 9. *Sous la même hypothèse que le Lemme* 3.2, *quelques soient* $f\in \boldsymbol{J}([a, b])$, $g\in \boldsymbol{J}([a, b])$, *on a* $(K\cdot f, g)=(f, K^*\cdot g)$.

Démonstration. Soient $\{V(\alpha_n, A_n)+(f_n, p_n)\}$ et $\{V(\beta_n, B_n)+(g_n, q_n)\}$ deux suites génératratrices de f et g respectivement qui satisfont aux conditions (2.15) et (2.17). Alors, d'après le théorème de Fubini, on a

$$(K\cdot f, g)-(f, K^*\cdot g) = (R\cdot f, g-g_n)+(K\cdot(f-f_n), g_n)$$
$$+(f_n, K^*\cdot(g_n-g))+(f_n-f, K^*\cdot g)\,.$$

D'abord, puisque $(K\cdot f)(x)$ et $(K^*\cdot g)(x)$ satisfont à la condition de Lipschitz dans l'intervalle $[a, b]$, on a, d'après le Lemme 2.7,

$$\lim_{n\to\infty}(K\cdot f, g-g_n) = 0,\quad \lim_{n\to\infty}(f_n-f, K^*\cdot g) = 0\,. \tag{3.6}$$

Ensuite, nous allons démontrer que $\lim_{n\to\infty}(K\cdot(f-f_n), g_n)=0$. Pour cela, mettons

$$M = \sup_{a\leqq x\leqq b,\ a\leqq y\leqq b}\left(|K(x, y)|,\ \left|\frac{\partial}{\partial x}K(x, y)\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial y}K(x, y)\right|,\ \left|\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}K(x, y)\right|\right),$$

et posons

$$F_n(x) = (L)\int_a^x f_n(t)\,dt,\quad F(x) = (E.\,R.)\int_a^x f(t)\,dt,\quad G_n(x) = (L)\int_a^x g_n(t)\,dt\,.$$

Alors, d'après le Lemme 2.6, on a

$$\lim_{n\to\infty}(L)\int_a^b |F(x)-F_n(x)|\,dx = 0\,. \tag{3.7}$$

et d'ailleurs il existe un nombre positif N tel qu'on ait

$$\left|(L)\int_a^b g_n(x)\,dx\right| < N,\quad (L)\int_a^b |g_n(x)|\,dx < N \quad \text{pour tout } n\,. \tag{3.8}$$

Or, d'après le Lemme 3.2, intégrant par parties, on a

$$|(K\cdot(f-f_n), g_n)| \leqq \left|(L)\int_a^b g_n(x)\,dx\right|\,|(K\cdot(f-f_n))(b)|$$
$$+(L)\int_a^b |(K_x\cdot(f-f_n))(x)|\,|G_n(x)|\,dx\,.$$

Mais, en vertu du Théorème 6, on a

$$|(K\cdot(f-f_n))(b)| \leqq |K(b, b)| \left|(E.\ R.)\int_a^b f(y)\,dy - (L)\int_a^b f_n(y)\,dy\right|$$
$$+ (L)\int_a^b \left|F(y)-F_n(y)\right| \left|\frac{\partial}{\partial y}K(b, y)\right| dy$$
$$\leqq M(\alpha_n + (L)\int_a^b |F(y)-F_n(y)|\,dy) .$$

De la même manière, pour tout x, $a \leqq x \leqq b$, on a

$$|(K_x\cdot(f-f_n))(x)| \leqq M(\alpha_n + (L)\int_a^b |F(y)-F_n(y)|\,dy) .$$

Par suite, d'après (3. 7) et (3. 8), on a

$$\lim_{n\to\infty} (K\cdot(f-f_n), g_n) = 0 . \tag{3. 9}$$

Enfin, de la même considération, on a

$$\lim_{n\to\infty} (f_n, K^*\cdot(g_n-g)) = 0 . \tag{3. 10}$$

(3. 6), (3. 9), (3. 10) montrent bien que $(K\cdot f, g)-(f, K^*\cdot g)=0$, c.q.f.d..

(Reçu le 17 septembre, 1959)