

Title	電磁力を利用した二次元物体周りの流場制御に関する基礎的研究
Author(s)	日夏, 宗彦
Citation	大阪大学, 1988, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/87
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

電磁力を利用した二次元物体周りの流場制御に関する基礎的研究

目 次

ページ

第 1 章 緒論	1
第 2 章 支配方程式	3
2.1 電磁流体方程式	3
2.2 誘導磁場の大きさの評価	5
2.3 本研究で用いた支配方程式とその無次元化	6
2.4 第 2 章の結論	7
第 3 章 レイノルズ数が 10^2 程度の二次元層流場における数値計算	9
3.1 緒言	9
3.2 近似因数分解法による定式化	9
3.3 数値計算	14
3.3.1 厳密解による計算スキームのチェック	14
3.3.2 二次元拡大管流れの流場制御の計算	15
3.3.3 楕円柱周りの流場制御の計算	17
3.3.4 翼型周りの流場制御の計算	20
3.4 第 3 章の結論	23
第 4 章 レイノルズ数が 10^4 程度の二次元層流場における数値計算	24
4.1 緒言	24
4.2 近似因数分解法による定式化	24
4.3 計算領域と境界条件	26
4.4 数値計算	27
4.4.1 格子間隔と数値粘性項の評価	27
4.4.2 翼型周りの流場制御の計算	29
4.5 第 4 章の結論	31

第5章	レイノルズ数が 10^6 程度の二次元乱流場における数値計算	3 2
5.1	緒言	3 2
5.2	電磁力の影響を考慮した $k - \varepsilon$ 方程式による定式化	3 2
5.2.1	基礎仮定と k -方程式の導出	3 2
5.2.2	ε -方程式の導出	3 5
5.2.3	無次元化	3 8
5.3	近似因数分解法による定式化	3 9
5.4	平行平板間流れの流場制御の計算	4 3
5.4.1	定式化	4 3
5.4.2	計算領域と境界条件	4 5
5.4.3	平行平板間流れの計算	4 6
5.5	翼型周り流れの流場制御の計算	4 8
5.5.1	一般の二次元流れに対する $k - \varepsilon$ 方程式の境界条件	4 9
5.5.2	近似因数分解法におけるスweepについて	5 2
5.6	$k - \varepsilon$ 法による翼型周り流場の計算結果の評価	5 2
5.7	電磁力による翼型周り乱流場の流場制御の計算	5 4
5.8	第5章の結論	5 6
第6章	結論	5 7
	謝辞	5 9
	参考文献	6 0
	主な記号	6 4
付録-1	(5.35)式, (5.41)式に現れる係数行列の表示	6 5
付録-2	磁気レイノルズ数が大きいときの考察	6 8
	図表一覧	7 4
	図表	8 4

第1章 緒論

流体力学的効率の向上を目的とした流場制御に関する研究は、今日まで多くの研究者によってなされてきた。これら多くの研究の成果として、例えば、船舶の分野では船首尾のバルブやダクトプロペラなど、航空分野では翼におけるボルテックスジェネレーターや境界層吸い込み、多段フラップや前縁スラットなどが挙げられよう。しかしながらこれらは境界層吸い込みを除き、主として付加物によって流場の制御を行おうとするものであった。

一方、電磁力 (Lorentzの力) を利用して船舶を推進させる電磁推進の調査が Phillips¹⁾ や、山口ら²⁾ によって行われ、また北野ら³⁾ は模型船を用いた電磁推進法の研究を行った。その結果、海水の電気抵抗が非常に大きいため、推進効率は非常に小さいこと、また電磁推進に要求される磁場の強さは非常に大きいことなどが明らかにされ、それらは電磁推進船の実用化に大きな支障となるものであった。しかしながら、近年の低温工学や超伝導工学の進歩は目をみはるものがあり、今までは実現が困難とされてきた強磁場の発生やその工学への応用が可能となりつつある。

このような状況を考え、著者は電磁力を利用した流場制御技術の可能性を評価することにした。船舶の推進手段としての電磁力の利用は推進効率の悪さが問題となるが、部分的な流場の制御には利用できるのではないかと考えたからである。研究の手法は、主としてCFD (Computational Fluid Dynamics; 数値流体力学) によった。CFDは流場の支配方程式を直接数値計算によって解こうとするもので、近年の計算機の大型化、高速化に伴って各方面で急速に発展している分野である。

一般に電磁流体力学上の実験は、コストが非常にかかり、また流場計測用のプローブが電磁場を乱さないように配慮せねばならないなど、実験そのものも難しい。このような場合でも、CFDによればパラメータを変えるだけでいろいろな状況をシミュレートすることができ、かつ流場に関する多くの情報が得られるので、非常に有力な手段となる。

本研究では、流場は二次元に限定する。第2章では流体が電気抵抗の非常に大きい海水であることを考慮したときの支配方程式を導き、第3章では、二次元拡

大管流れ、楕円柱周りの流れ及び翼型周りの流れを使って、レイノルズ数が200程度の流れの電磁力を利用した流場制御法の計算とその評価を行った。第4章では、翼型周りの流れを使ったレイノルズ数が 10^4 程度の層流の場合の計算とその評価を行った。さらに第5章では、乱流場における電磁力を利用した流場制御法の計算とその評価を行うために、電磁力の影響を考慮した乱流場の定式化を行った。さらに得られた式について、平行平板間流れと翼型周りの流れをシミュレートして乱流場の流場制御法の評価を行った。最後に得られた結論を述べた。

第2章 支配方程式

2.1 電磁流体方程式^{4), 5)}

本論では、伝導性流体は海水に限って考える。これは海水は非常に電気抵抗が大きいので、後に示すように支配方程式の取り扱いが非常に容易になるからである。まず電磁場を利用して海水の流れを制御しようとするときの基礎方程式を考える。電気伝導性の粘性流体が電磁場中を運動するとき、流体は、ナビエ-ストークスの方程式とマックスウェルの方程式を同時に満足するように運動する。このとき、ナビエ-ストークスの方程式には電磁力による外力項が付加される。このようにして得られる厳密な形の方程式系は複雑であって、普通、電磁流体力学的近似⁴⁾とよばれる近似を行って扱い易くしている。それらは、

- 1) 流体の運動速度は光速に比べて非常に小さく、準定常電流の仮定が成り立つ。
- 2) 流体は電氣的に中性と見なすことができ、電荷移動による対流電流は伝導電流に比べて無視できる。

これらの仮定は、海水が電磁場中を運動するような状況では非常に良い近似になっている。このとき、支配方程式は電磁流体方程式(MHD方程式)と呼ばれ、次のように書かれる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \quad (2.1)$$

ここに \mathbf{u} は速度ベクトル、 p は圧力、 ν は動粘性係数、 ρ は流体密度、 \mathbf{j} は電流密度ベクトル、 \mathbf{B} は磁束密度ベクトルである。また、 \cdot は内積、 \times は外積を表す。流体は非圧縮として扱えるので、連続の式は次のようになる。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.2)$$

\mathbf{j} と \mathbf{B} は、電場を \mathbf{E} とすると、以下の関係を満たす。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2.6)$$

(2.3)式から(2.6)式はそれぞれファラデーの法則、アンペールの法則、磁場のソ

レノイダル条件、それに電荷保存則を示している。 \mathbf{j} は、多くの場合オームの法則を満たす。すなわち

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (2.7)$$

ここで、 μ は透磁率、 σ は電気伝導度である。

(2.4)式と(2.7)式を(2.3)式に代入すると、

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\mu \sigma} \Delta \mathbf{B} \quad (2.8)$$

が得られる。(2.8)式はいわゆる誘導方程式で、粘性流体力学における渦度方程式と同様の形をしている。この類推から、 $1/(\mu \sigma)$ は磁気粘性率と呼ばれ、また

$$R_m \equiv \mu \sigma U L \quad (2.9)$$

で示される R_m は磁気レイノルズ数と呼ばれている。

一般に、電磁流体の運動は、(2.1), (2.2), (2.4)及び(2.8)式を連立させて未知数である流速と圧力及び磁場を解き、得られた流速と磁場から電場を計算して解析される。このとき、流体が静止しているときに印加された電磁場は、流体の運動により歪み(変形)を受ける。この電磁場と流場の関係は流体の電気抵抗の大きさによって大きく変化する。

流体の電気抵抗が零のとき ($\sigma = \infty$) は、(2.8)式の拡散項は落ち、この結果磁場は拡散することなく流れとともに移動する。この状態は磁場の流体への凍りつき (frozen in) であり、流場と磁場は非常に強い拘束条件で互いに結ばれている。この理想MHD (magnetohydrodynamic) 状態は、たとえば磁場によるプラズマの閉じ込めの際の安定性を論じるときに非常に重要である。理想MHD状態ではプラズマの安定性解析は理論的な解析評価が可能で、例えば Kruskal と Shafranov の安定条件 (縦磁場による安定条件) や Suydam の安定条件 (磁場のシアによる安定条件) などが知られている。

しかし、流体の電気抵抗が零でなくなると磁場は拡散するために、上記のプラズマの安定条件は成り立たなくなる。つまり、近接する二つの磁気面が干渉しあって互いに接触したり (magnetic reconnection)、磁気面が二つに分断したり (magnetic tearing) するため、理想MHD状態では安定であったプラズマ閉じ込めの

磁場配位は変形し、不安定な磁場配位に移行する。このようなプラズマ閉じ込めにおける磁場の変形などを理論的に解析する事は困難で、今日では、(2.1) - (2.8)式を直接、数値的にシミュレーションすることによって研究がなされており、数値解析による MHD の研究の中核を成している。

一方、流体の電気抵抗が無限大の状態では、(2.8)式は磁場に関するラプラスの方程式に縮退し、磁場は流場と連成せずに独立して決定される。このような流場は電磁力を単に外力として考慮するだけで決定できるので、通常の MHD の解析に比べるとはるかに簡単になる。

本研究で想定している流体は海水で、それは電気伝導度が非常に小さい。そこで次節で、海水が印加電磁場中を運動するときの電磁場に与える影響を考察する。

2.2 誘導磁場の大きさの評価

ここでは海水が印加電磁場中を運動したときの誘導磁場の大きさについて考える。誘導磁場は、外部から印加される電流によって誘導されるものと、印加磁場中を伝導流体が運動することにより生じる誘導電流が誘起するものの2つに分けられる。

印加磁場中を伝導流体が運動すると、流場には $\sigma(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$ なる誘導電流が流れる。この電流は、

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu\sigma \mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (2.10)$$

を満たすように誘導磁場を誘導する。いま誘導される磁場の大きさを B_i 、印加磁場の大きさを B_0 、代表速度を U 、代表長さを L とすると(2.10)式から

$$\frac{B_i}{B_0} = \mu\sigma UL \equiv R_m \quad (2.11)$$

のように表される。

(2.11)式は磁気レイノルズ数で、誘導磁場と印加磁場の比を表している。海水における $1/(\mu\sigma)$ は $2 \times 10^5 \text{ m}^2/\text{sec}$ 程度⁵⁾であって、 UL を $1 \text{ m}^2/\text{sec}$ 程度とすると磁気レイノルズ数のオーダーは $0(10^{-5})$ 程度となる。これは海水の電気抵抗が非常に大きいことに基づいている。今、100m程度の物体がその周囲に1 tesla

(1 tesla = 10^4 Gauss) 程度の磁場を印加して 10m/sec 程度の速度で航走したとき、誘導される磁場の強さは 10^{-2} tesla程度、すなわち印加磁場の1%程度となる。従って船舶流体力学で対象とする流れの範囲では、誘導磁場の大きさは十分無視できる大きさである。

つぎに印加電場による電流が作る誘導磁場の大きさについて考える。(2.4)式より誘導磁場の大きさは、

$$\nabla \times \mathbf{B} \approx \mu_0 \mathbf{E} \approx E_0 \times 10^{-5} \text{ (volt sec)/m}^3 \quad (2.12)$$

となる。今、 1 m^2 程度の領域に 10^3 volt/m 程度の電流を印加したとき、(2.12)式を領域内で積分すると印加電流領域近傍に誘導される磁場の大きさは、 10^{-2} tesla程度と評価できる。これより、印加電場をこの程度に抑えていれば、印加電流による誘導磁場も印加磁場に比べて実用上は無視しても差し支えないであろう。本研究の主たる目的は、電磁力によって海水による流場の制御をすることが可能かどうかを評価することにあるので、誘導磁場の寄与が印加磁場のそれに比べて実用的に無視できる程度(たとえば誘導磁場が印加磁場の数パーセント程度)なら、簡単のために誘導磁場は無視し、磁場は既知数として扱ってよいと思われる。そこで本研究では、誘導磁場の影響は全て無視することにする。このとき定常問題では磁場は静磁場として扱うことができるので、数値計算は非常に簡単になる。

磁場を作る電流(コイルに流す電流など)は、流体中には存在しないものと考えているので、磁場分布は(2.4)、(2.5)式から明らかなようにラプラスの式を満たす。すなわち、磁場分布を求めることは、ポテンシャル問題を解くことと同じになる。ここでは磁荷を適当に分布させて、印加する磁場分布の計算を行った。さらに、物体と流体の境界で磁場の屈折を考えると磁場分布の計算が非常に面倒になるので、本論では簡単のために、流れの中に置かれている物体の透磁率は流体のそれと等しいと仮定した。この仮定は、例えば磁石を覆う翼表面部分をFRPなどの非磁性体で作成すれば十分成り立つもので、実用的にも問題無いと思われる。

2.3 本研究で用いた支配方程式とその無次元化

2.2で述べたように磁場は既知数として扱える。さらに特に二次元問題で、かつ物体表面が不導体の場合について考えると、電場も印加領域を決定すれば陽的

に与えることが出来る。このとき、解くべき支配方程式は

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} + \frac{\sigma}{\rho}(\mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} \quad (2.13)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \quad (2.14)$$

であり、未知数は \mathbf{u} 、 p である。(2.13)式からわかるように、電磁力 $(\mathbf{u}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}$ の項は流速と磁場が直交するとき最大になり、しかもその方向は流速の方向と逆になっている。すなわち、流場は磁場の存在によって抑制されるようになる。

これらを次に示す無次元変数で無次元化する。

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}^* U, \quad p = p^* \rho U^2, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}^* L, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}^* B_0, \quad t = t^* L/U, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}^* U B_0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

*は無次元変数を表す。このとき、(2.13)、(2.14)式はそれぞれ

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \frac{1}{Re}\Delta\mathbf{u} + \frac{Ha^2}{Re}(\mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} \quad (2.16)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \quad (2.17)$$

となる。但し簡単のため、*は省略した。Re, Haはそれぞれ、

$$Re = UL/\nu \quad (2.18)$$

$$Ha = \sqrt{\sigma/\rho\nu} LB_0 \quad (2.19)$$

で定義されるレイノルズ数とハルトマン数である。ハルトマン数は無次元磁場強さを示すもので、電磁力と粘性力の比の平方根に等しい。

(2.16)、(2.17)式が本研究で用いた支配方程式で、これを適当な境界条件のもとで解けば流場に関する情報が得られる。

2.4 第2章の結論

伝導流体として海水を考えたときの、電磁場中での運動の支配方程式を導いた。一般には電磁流体が印加電磁場中を運動すると、流体の運動と電磁場は相互に影響しあって、電磁場は歪みを受ける。しかし海水のように電気伝導度が非常に小

さい流体を電磁力によって流場制御を行ううえでは、実用上、誘導磁場は印加磁場に比べて無視してよいことを示した。このことから、定常問題では磁場は静磁場として扱うことができ、数値計算の上で問題が非常に簡単化されることがわかった。さらに二次元問題では、物体表面が不導体とすれば電場についてもあらかじめ与えておくことができるので、最終的には、速度と圧力のみが未知数となり、これについて解けばよいことを示した。

3.1 緒言

この章では主として、レイノルズ数が200程度の流れを扱う。対象とする流れは、内部流れの例として二次元拡大管流れ（以下拡大管流れと称する）を、また外部流れの例として楕円柱周りの流れと翼型周りの流れを取り上げて、それぞれの流れにおいて電磁力による流場制御のシミュレーションを行った。

3.2 では数値解析法に付いて述べ、3.3 では拡大管流れ、楕円柱周りの流れ、それに翼型周りの流れそれぞれに対して電磁力を利用した流場制御法の計算を示し、考察を行った。3.4 ではこの章の結論を示した。

3.2 近似因数分解法による定式化

本研究では、数値解析スキームとして、主として航空工学の分野で開発され、よく用いられている近似因数分解法（Implicit Approximate Factorization; IAF法）^{6),7)}を用いた。このスキームは、各未知数に対してそれぞれ時間微分項が必要なため、連続の式(2.17)式はこのままでは扱えない。そこで(2.17)式を次に示す(3.2)式のように変形して、(2.16)式と連立させて解くことにする。

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \frac{1}{Re}\Delta\mathbf{u} + \frac{Ha^2}{Re}(\mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \beta(\mathbf{V}\cdot\mathbf{u}) = 0 \quad , \quad \beta > 0 \quad (3.2)$$

解が定常になれば、(3.2)式の $\partial p/\partial t$ は0となって、連続の式は満たされる。(3.1), (3.2)式をベクトル表示すると、

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{L}\mathbf{q}_x + \mathbf{M}\mathbf{q}_y = \mathbf{H}(\mathbf{q}_{xx} + \mathbf{q}_{yy}) + \mathbf{S}\mathbf{q} + \mathbf{C} \quad (3.3)$$

ここに $\mathbf{q} = [u, v, p]^T$ で、 u, v は直角座標 (x, y) 系における x 方向、 y 方向の速度成分を表す。また係数マトリックスはそれぞれ、

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} u & 0 & 1 \\ 0 & u & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & v & 1 \\ 0 & \beta & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1/Re & 0 & 0 \\ 0 & 1/Re & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \frac{Ha^2}{Re} \begin{pmatrix} -B_Y^2 & B_X B_Y & 0 \\ B_X B_Y & -B_X^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \frac{Ha^2}{Re} \begin{pmatrix} -E_Z B_Y \\ E_Z B_X \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

となる。

次に、物体適合座標系を導入して(3.3)式を変形する。物体適合座標を

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \quad (3.5)$$

とすると、 x, y に関する微分演算は

$$\begin{aligned} \partial_x &= a\partial_\xi + b\partial_\eta \\ \partial_y &= c\partial_\xi + d\partial_\eta \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\partial_{xx} = a^2\partial_{\xi\xi} + 2ab\partial_{\xi\eta} + b^2\partial_{\eta\eta} + (aa_\xi + ba_\eta)\partial_\xi + (ab_\xi + bb_\eta)\partial_\eta$$

$$\partial_{yy} = c^2\partial_{\xi\xi} + 2cd\partial_{\xi\eta} + d^2\partial_{\eta\eta} + (cc_\xi + dc_\eta)\partial_\xi + (cd_\xi + dd_\eta)\partial_\eta$$

$$a = Jy_\eta, \quad b = -Jy_\xi, \quad c = -Jx_\eta, \quad d = Jx_\xi, \quad J = 1/(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)$$

のように変形される。(3.6)式を(3.3)式に適用すると、(3.3)式は

$$\begin{aligned} q_t + \mathbf{A}q_\xi + \mathbf{B}q_\eta &= \mathbf{H}(\hat{a}q_{\xi\xi} + \hat{b}q_{\xi\eta} + \hat{c}q_{\eta\eta} + \hat{d}q_\xi + \hat{e}q_\eta) \\ &+ \mathbf{S}q + \mathbf{C} \end{aligned} \quad (3.7)$$

となる。ここに、

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= a\mathbf{L} + c\mathbf{M}, \quad \mathbf{B} = b\mathbf{L} + d\mathbf{M} \\ \hat{a} &= a^2 + c^2, \quad \hat{b} = 2(ab + cd), \quad \hat{c} = b^2 + d^2 \\ \hat{d} &= aa_\xi + ba_\eta + cc_\xi + dc_\eta, \quad \hat{e} = ab_\xi + bb_\eta + cd_\xi + dd_\eta \end{aligned} \quad (3.8)$$

である。

時間微分はパデの差分表示式を用いて、

$$q_t = \frac{1}{\Delta t} \frac{\Delta}{1 + \Delta} q^n, \quad q^{t=n+1} = q^{t=n} + \Delta q^{t=n} \quad (3.9)$$

とオイラーの陰解法で差分する。Δtは時間刻みを表し、ΔはΔtだけ進んだときの物理量の変化量を表す。このとき、時間微分の打ち切り誤差はO(Δt)である。

(3.9)式を(3.7)式に代入すると、

$$\begin{aligned}
 & \Delta q^n + \Delta t \{ \Delta(\mathbf{A}q_\xi)^n + \Delta(\mathbf{B}q_\eta)^n - \hat{a}\Delta(\mathbf{H}q_{\xi\xi})^n - \hat{b}\Delta(\mathbf{H}q_{\xi\eta})^n \\
 & \quad - \hat{c}\Delta(\mathbf{H}q_{\eta\eta})^n - \hat{d}\Delta(\mathbf{H}q_\xi)^n - \hat{e}\Delta(\mathbf{H}q_\eta)^n - \Delta(\mathbf{S}q)^n \} \\
 & = -\Delta t \{ \mathbf{A}q_\xi^n + \mathbf{B}q_\eta^n - \mathbf{H}(\hat{a}q_{\xi\xi}^n + \hat{b}q_{\xi\eta}^n + \hat{c}q_{\eta\eta}^n + \hat{d}q_\xi^n + \hat{e}q_\eta^n) \\
 & \quad - \mathbf{S}q^n - \mathbf{C} + (\omega_\xi q_{\xi\xi\xi\xi}^n + \omega_\eta q_{\eta\eta\eta\eta}^n)/16 \} , \quad 0 < \omega_\xi, \omega_\eta < 1
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

のようになる。ここで数値安定性を確保するために、右辺最終項の4階微分項を人工的に付加している。また、右肩上のnはt = nΔtでの物理量を意味している。(3.10)式には非線形項があるので、これを次のように局所的に線形化する。

$$\begin{aligned}
 \Delta(\mathbf{A}q_\xi)^n & \doteq \Delta\mathbf{A} \cdot q_\xi^n + \mathbf{A} \cdot \Delta q_\xi^n = \hat{\mathbf{A}} \cdot \Delta q^n + \mathbf{A} \cdot \Delta q_\xi^n \\
 \Delta(\mathbf{B}q_\eta)^n & \doteq \Delta\mathbf{B} \cdot q_\eta^n + \mathbf{B} \cdot \Delta q_\eta^n = \hat{\mathbf{B}} \cdot \Delta q^n + \mathbf{B} \cdot \Delta q_\eta^n
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

ただし、

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} au_\xi & cu_\xi & 0 \\ av_\xi & cv_\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} bu_\eta & du_\eta & 0 \\ bv_\eta & dv_\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

これより、(3.10)式は

$$\begin{aligned}
 & \{ 1 + \Delta t(-\mathbf{S} + \hat{\mathbf{A}} + \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial \xi} - \mathbf{H}\hat{d} \frac{\partial}{\partial \xi} - \mathbf{H}\hat{a} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}) \\
 & \quad + \Delta t(\hat{\mathbf{B}} + \mathbf{B} \frac{\partial}{\partial \eta} - \mathbf{H}\hat{e} \frac{\partial}{\partial \eta} - \mathbf{H}\hat{c} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}) \} \cdot \Delta q^n \\
 & = -\Delta t \{ \mathbf{A}q_\xi^n + \mathbf{B}q_\eta^n - \mathbf{H}(\hat{a}q_{\xi\xi}^n + \hat{b}q_{\xi\eta}^n + \hat{c}q_{\eta\eta}^n + \hat{d}q_\xi^n + \hat{e}q_\eta^n) \\
 & \quad - \mathbf{S}q^n - \mathbf{C} + (\omega_\xi q_{\xi\xi\xi\xi}^n + \omega_\eta q_{\eta\eta\eta\eta}^n)/16 \} + \Delta t \mathbf{H}\hat{b}(\Delta q)_{\xi\eta}^{n-1}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

のようになる。ここで、右辺最終項の交差微分項は陽的に表現した。次に左辺を近似的に因数分解する。すなわち、

$$\begin{aligned}
& \{1 + \Delta t(-S + \hat{\mathbf{A}} + \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial \xi} - \mathbf{Hd} \frac{\partial}{\partial \xi} - \mathbf{Ha} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2})\} \\
& \{1 + \Delta t(\hat{\mathbf{B}} + \mathbf{B} \frac{\partial}{\partial \eta} - \mathbf{He} \frac{\partial}{\partial \eta} - \mathbf{Hc} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2})\} \cdot \Delta q^n \\
& = -\Delta t\{\mathbf{A}q_\xi^n + \mathbf{B}q_\eta^n - \mathbf{H}(\hat{a}q_{\xi\xi}^n + \hat{b}q_{\xi\eta}^n + \hat{c}q_{\eta\eta}^n + \hat{d}q_\xi^n + \hat{e}q_\eta^n) \\
& - \mathbf{S}q^n - \mathbf{C} + (\omega_\xi q_{\xi\xi\xi\xi}^n + \omega_\eta q_{\eta\eta\eta\eta}^n)/16\} + \Delta t \hat{\mathbf{Hb}}(\Delta q)_{\xi\eta}^{n-1}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

のように書く。このとき、近似因数分解することによる誤差項は $O(\Delta t^2)$ である。(3.14)式の左辺は ξ のみの微分演算子と η のみの微分演算子の積であるので、次のように書くことができる。

$$[\mathbf{X}] \cdot [\mathbf{Y}](\Delta q) = \mathbf{RHS} \tag{3.15}$$

ここに演算子 $[\mathbf{X}]$ 、 $[\mathbf{Y}]$ および \mathbf{RHS} (以下、右辺を意味する) は、それぞれ

$$\begin{aligned}
[\mathbf{X}] &= \{1 + \Delta t(-S + \hat{\mathbf{A}} + \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial \xi} - \mathbf{Hd} \frac{\partial}{\partial \xi} - \mathbf{Ha} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2})\} \\
[\mathbf{Y}] &= \{1 + \Delta t(\hat{\mathbf{B}} + \mathbf{B} \frac{\partial}{\partial \eta} - \mathbf{He} \frac{\partial}{\partial \eta} - \mathbf{Hc} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2})\} \\
\mathbf{RHS} &= -\Delta t\{\mathbf{A}q_\xi^n + \mathbf{B}q_\eta^n - \mathbf{H}(\hat{a}q_{\xi\xi}^n + \hat{b}q_{\xi\eta}^n + \hat{c}q_{\eta\eta}^n + \hat{d}q_\xi^n + \hat{e}q_\eta^n) \\
& - \mathbf{S}q^n - \mathbf{C} + (\omega_\xi q_{\xi\xi\xi\xi}^n + \omega_\eta q_{\eta\eta\eta\eta}^n)/16\} + \Delta t \hat{\mathbf{Hb}}(\Delta q)_{\xi\eta}^{n-1}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

のように表される。(3.15)式はADI(Alternating Direction Implicit)法のようにして

$$\begin{aligned}
[\mathbf{X}]\Delta q^* &= \mathbf{RHS} \\
[\mathbf{Y}]\Delta q &= \Delta q^*
\end{aligned} \tag{3.17}$$

と分けて解くことができる。

つぎに、(3.17)式を数値的に解くために、空間微分を次の3点の中心差分に置き換える。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} (E_{\xi}^{+1} - E_{\xi}^{-1}) \\
\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} &= (E_{\xi}^{+1} - 2E_{\xi}^0 + E_{\xi}^{-1}) \\
\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} &= (E_{\xi}^{-2} - 4E_{\xi}^{-1} + 6E_{\xi}^0 - 4E_{\xi}^{+1} + E_{\xi}^{+2})
\end{aligned} \tag{3.18}$$

これを(3.16)式に適用すると、 ξ -スイープ、 η -スイープとして、それぞれ

ξ -sweep

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{ij} \Delta q_{i-1,j}^* + \mathbf{K}_{ij} \Delta q_{i,j}^* + \mathbf{L}_{ij} \Delta q_{i+1,j}^* &= \mathbf{RHS}_{ij} \\
\mathbf{J}_{ij} &= -\frac{1}{2} [\mathbf{A} + \mathbf{H}(2\hat{a} - \hat{d})] \cdot \Delta t \\
\mathbf{K}_{ij} &= \mathbf{I} + [-\mathbf{S} + \hat{\mathbf{A}} + 2\hat{\mathbf{H}}\mathbf{a}] \cdot \Delta t \\
\mathbf{L}_{ij} &= \frac{1}{2} [\mathbf{A} - \mathbf{H}(2\hat{a} + \hat{d})] \cdot \Delta t
\end{aligned} \tag{3.19}$$

\mathbf{I} : the identity matrix

η -sweep

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{ij} \Delta q_{i,j-1}^* + \mathbf{K}_{ij} \Delta q_{i,j}^* + \mathbf{L}_{ij} \Delta q_{i,j+1}^* &= \Delta q_{ij}^* \\
\mathbf{J}_{ij} &= -\frac{1}{2} [\mathbf{B} + \mathbf{H}(2\hat{c} - \hat{e})] \cdot \Delta t \\
\mathbf{K}_{ij} &= \mathbf{I} + [\hat{\mathbf{B}} + 2\hat{\mathbf{H}}\mathbf{c}] \cdot \Delta t \\
\mathbf{L}_{ij} &= \frac{1}{2} [\mathbf{B} - \mathbf{H}(2\hat{c} + \hat{e})] \cdot \Delta t
\end{aligned} \tag{3.20}$$

が得られる。これらの式の左辺は適当な境界条件を用いると、3重ブロック対角行列になるのでこれを反転させると $\Delta q^{t=n}$ が解かれる。

$q^{t=n}$ に、求めた $\Delta q^{t=n}$ を加えると、一時間刻み進んだときの $q^{t=n+1}$ が得られる。この操作を、 q の適当な初期条件から出発して収束するまで繰り返す。

3.3 数値計算⁸⁾

3.3.1 厳密解による計算スキームのチェック

まず始めに、スキームのチェックを行うために、厳密解が知られている流れを計算した。電磁流体力学で、厳密解が知られている流れの一つにハルトマンの流れと呼ばれるものがある。これは2枚の無限平行平板にはさまれた一様な流れに一様磁場が平板と流れに垂直に、また電場は平板に平行に、かつ流れに直交するように印加されているときの流れである。(Fig. 3-1参照) このとき流れの厳密解は⁴⁾、

$$u = \left(\frac{\alpha}{\sigma B_0} z - \frac{E}{B_0} \right) \left\{ 1 - \frac{\cosh(Ha \cdot y/h)}{\cosh(Ha)} \right\}, \quad \alpha = -\frac{dp}{dx} \quad (3.21)$$

で与えられる。ここに、 B_0 は印加磁場の強さ、 E は印加電場の強さである。

この流れを数値的に計算するために、流場を z 方向(流れの方向)に5分割、 y 方向(壁に垂直な方向)に30分割して、数値計算を行った。圧力勾配は $\alpha = 1$ とし、レイノルズ数は1とした。ここで代表長さとして代表速度は平行平板間の半幅と、磁場を印加していないときの平板間中央部の速度をとった。境界条件は

$$\text{x-sweep ; } \frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{dp}{dx} = \text{given} \quad (3.22)$$

$$\text{y-sweep ; } u = 0, \quad \frac{dp}{dy} = 0 \quad (3.23)$$

とした。印加電磁場の強さは

(a), $Ha = E = 0$ 、すなわち通常のポアズイユ流れの場合、

(b), $Ha = 2, E = 0$ の場合、

(c), $Ha = 2$ とし、電場は単位長さあたりの平行平板間の総電流和が0となるように決定した場合(ハルトマンの条件)

の3状態とした。(b)および(c)はそれぞれshort circuit condition、open circuit conditionとよばれ⁵⁾、Fig. 3-2に示すように矩型水路両端の電極板を短絡および開放したものに対応している。

Fig. 3-3(a), (b), (c)に上記の(a), (b), (c)に対応する流速分布の計算結果を示し

た。実線は厳密解、四角印は数値解である。3状態とも厳密解と数値解の一致は非常によく、方程式が精度よく解かれていることが確かめられた。

3.3.2 二次元拡大管流れの流場制御の計算

次に内部流れの代表的なものとして拡大管流れを取り上げ、内部流の電磁力を利用した流場制御の計算を行った。ここで用いた拡大管は、拡大管下面が

$$y = a \tanh(bx) + c \quad (3.24)$$

で表され、拡大管上面は直線となる形状である。Fig. 3-4には座標系を、Fig. 3-5には数値計算に用いた格子を示した。格子分割数は(49x25)である。

Fig. 3-5で、拡大管中央部上下面にある丸印は、磁場分布の計算に用いた磁極の位置である。N極は下面に、S極は上面に配置し、磁極の強さの分布は両端で0になる正弦分布とした。Fig. 3-6にここで用いた磁場分布を示す。磁場強さは最大値で正規化した。電場は拡大管全面に一様に印加した。

計算では $Re=200$ とした。ここで代表長さは拡大管入口の幅とした。境界条件は次のように設定した。

$$\xi\text{-sweep} : \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 ; \frac{\partial p}{\partial \xi} = -0.01 \text{ (inlet)}, \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} = 0 \text{ (outlet)} \quad (3.25)$$

$$\eta\text{-sweep} : u = 0, \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0 \quad (3.26)$$

電磁場の強さの組合せはTable 3.1のようにした。

収束判定条件は $\Delta q(\max)/q(\max) = 1.0^{-5}$ とした。計算時間は、富士通FACOM M 180 II ADを用いて一回の繰返し計算に約2.4秒、約500回の繰返し計算で収束した。

計算結果を次に示す。まず始めに流場の様子について考察する。Table 3.1に示した全ての場合について示すのは冗長となるので、電磁力によって流場が制御されている代表例のみ示すことにする。Fig. 3-7(a), (b), (c), (d)には、電磁場が印加されていないときの流速分布、圧力分布、渦度分布それに流線を示した。図中、実線は正值を、破線は負値を表す。また、渦度は反時計回りが正であり、圧力は拡大管入口下壁での値を基準にとった。拡大管出入口で流速分布は放物線形にな

っている。拡大管中央部では流れの剥離が生じている。Fig. 3-8(a), (b), (c), (d)には、 $Ha=4$ 、 $E=0$ のときの流速分布、電磁力分布、圧力分布それに渦度分布を示した。(b)より電磁力は拡大管中央部において、流れを抑えようとする方向に働いているのがわかる。流速分布図ではわかりにくい渦度分布を見れば明らかのように、磁場の影響のために拡大管中央部で剥離が消えている。これは、拡大管中央部で電磁力によって流速の大きい部分が上流側に押し戻され、そのために剥離域であった拡大管下部に流れが回り込んだためと考えられる。磁場の印加のみでこのような流場制御ができた理由として、内部流れでは、大きな磁場を流路全域に印加することが容易であること、また流路が制限されているためなどが考えられる。

電磁力が流れを抑えるように正の電場を印加したときの結果がFig. 3-9(a), (b), (c), (d)で、 $Ha=4$ 、 $E=0.5$ としたものである。Fig. 3-8と同じく流速、電磁力、圧力、渦度の各分布を示してある。やはりFig. 3-8と同じく剥離は生じていない。しかし圧力分布には変化がみられ、流路のいたるところで負の圧力勾配になっている。これはレイノルズ数が小さいときの流れに似ている。

一方、電磁力の向きが流れと逆になるようにするだけならば、小さい磁場で大きな電場を印加することでも実現できる。このようにして得られたのがFig. 3-10で、 $Ha=0.1$ 、 $E=5000$ の結果である。やはり、流れの剥離は生じていない。しかし、大きな逆向きの電磁力のために、流量が減っていることが速度分布から認められ、等圧力線の間隔も非常に密になっている。このような圧力分布の大きな変化は、MHD方程式における電磁力項の作用が圧力勾配項に直接、大きな影響を及ぼしているためと考えられる。

いま、直感的に電磁場の大きさをつかみ易くするために、具体的な数値をあてはめてみる。拡大管入口の幅を1 cmとすると、代表速度の大きさは2 cm/s程度となる。このとき、 $Ha=4$ は大略6 tesla程度の磁場強さに対応する。また、 $E=0.5$ は0.06v/m程度の電場強さとなり、この場合は非常に大きな磁場と非常に小さな電場を印加していることになる。一方、 $Ha=0.1$ 、 $E=5000$ では、0.16tesla、16v/m程度となり実用的な値になっている。

計算結果を積分すると、流量、拡大管に作用する摩擦抵抗および圧力抵抗を求めることが出来る。さらに電磁力を流路全域で面積分すると電磁力の反作用によ

る抵抗が求まる。拡大管に作用する抵抗は、拡大管出入口の運動量差と圧力差を計算することでも求まるので、計算の精度評価の意味でこれも計算した。結果をTable 3.2に示す。抵抗値は $\rho U^2 L$ で無次元化した。運動量積分による抵抗値と抵抗成分和による値との一致は非常に良く、精度よく計算されていることが確かめられた。

Fig. 3-11には、電場がないときの、磁場強さと拡大管にかかる全抵抗の関係を示した。磁場の強さを2倍にすると抵抗増加量は4倍になっている。Fig. 3-12は流量と磁場強さの関係を示した。今回用いた程度の磁場強さでは、流量は磁場強さによらずほぼ一定である。さきに述べたように最も大きな磁場強さが、6tesla程度という非常に大きな磁場強さに対応することを考えると、海水に対しては、現実的には流量は磁場強さによらず一定であると考えてよいであろう。

次に、電場と流量の関係をFig. 3-13に示す。流量は電場強さに対し線形的に変化しているのがわかる。この結果は流量の制御法の一つとして、電場を変化させる方法が使えることを示唆している。電場と拡大管に働く抵抗の関係をFig. 3-14に示した。電場強さと抵抗の間には線形的な関係があることがわかる。抵抗が負になっているところは、拡大管が推進器として働いていることを示している。

3.3.3 楕円柱周りの流場制御の計算

外部流れの代表として、まずこの節では鈍い物体を考え、その例として長軸：短軸 = 3 : 1 の楕円柱周りの流れを取り上げた。次節では流線形物体の代表である翼周りの流れを取り扱う。Fig. 3-15に座標系を示す。また格子分割の様子をFig. 3-16に示した。格子系はO-グリッドで、計算は簡単のために流れの対称性を考えて楕円柱より上半部のみとした。なお、本プログラムを用いて $Re = 40$ における円柱周りの流れの計算を行い、実験結果と比較した。その結果、計算値と実験値は良好な一致を示したことを確認している。格子分割数は(49x45)である。

磁場分布計算のための磁荷は、物体内側に物体表面から法線方向に1格子分の距離だけ折り返した点に配置した。磁場分布は2つのタイプを考えた。1つは楕円体上半部全面にN極を、下半部全面にS極を分布させて求めたもの(以下タイプAと呼ぶ)、他の1つは磁極を物体後半部にのみ分布させて求めたもの(タイプBと呼ぶ)である。Fig. 3-17(a)、(b)に、それぞれタイプA、タイプBの磁場分

布を示す。磁場強さは磁極からの距離に反比例して弱くなるため、内部流れのときと異なって、物体付近にのみ磁場強さが大きく、流場遠方まで十分大きな磁場は印加されていない。このことは、磁場のみによる電磁力 $(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$ によって流場制御を行うことは不利であることを示唆している。このため、広範囲に大きな電場を印加して、 $(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ によって流場制御をすることを考えた。ここでは電場は流場全域に印加した。

境界条件は、以下のように与えた。

$$\xi\text{-sweep} : \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0, \quad v = 0 \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \eta\text{-sweep} & : u = 1, \quad v = p = 0 \quad (1 \leq \xi \leq I_{px}) \\ (\text{top boundary}) & \\ & \frac{\partial q}{\partial \eta} = 0 \quad (I_{px} < \xi \leq I_{max}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\eta\text{-sweep} : u = v = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0 \\ (\text{bottom boundary})$$

ここで、 I_{px} は、計算領域外端で、一様流の条件を与える領域と、 $\partial/\partial \eta = 0$ の条件を与える領域の境の ξ 座標の値を意味し、本計算では40とした。計算では一様流と楕円柱長さを基準として $Re=200$ とした。

Fig. 3-18には、電磁場がないときの通常の粘性流の結果を示した。楕円柱後半部には大きな剥離領域が認められる。圧力係数は淀み点で1.0で、下流に行くに従って急激に負に変化し、楕円体の大半の領域で負になっている。

電磁場を印加したときの結果について述べる。まず、 $Ha=1.0$ 、 $E=-1000$ のときの結果を示す。Fig. 3-19(a), (b)は、磁場タイプA、Bにおける電磁力の分布、また、Fig. 3-20(a), (b)には、それぞれの圧力分布を示した。磁場タイプAでは、電磁力は物体先端の淀み点付近で流れを押しよける方向に、また物体後端では流れを引き込む方向に働いている。磁場タイプBでは、印加磁場領域が物体後半に限られているため淀み点付近での押しよけ効果はなく、後端部での引き込み効果だけが認められる。この影響は圧力分布に顕著に現れ、磁場タイプAでの圧力分布は物体前半部で圧力が負、後半部では逆に正になっている。これより、圧力による抵抗は、負となり推力として作用していることがわかる。磁場タイプBでは、

淀み点での電磁力の押しのけ効果がないため、先端付近で正の圧力域がみられる。このように、圧力分布は電磁場の影響によって、通常の粘性流れの場合とはかなり異なった様相を示すことがわかる。

Fig. 3-21(a), (b)、Fig. 3-22(a), (b)には、磁場タイプ A, B における渦度分布と流線を示した。剝離点の位置が電磁力のために下流側にずれていることが認められる。しかし速度場全体をみると、物体のごく近傍の渦度、流線がわずかに変化している程度で、一般的には、通常の粘性流れのときと比べてほとんど変化していない。つまり、ここで用いたような鈍い物体周りの流れに電磁場を作用させたとき、付加された電磁力の影響は、ほとんどが圧力勾配項と釣り合っ、対流項には余り影響を及ぼさないものと考えられる。

印加電場の方向を逆にしたときの結果をつぎに示す。印加電場を逆にすると、上に述べた場合とまったく逆になる。Fig. 3-23(a), (b)、Fig. 3-24(a), (b)、Fig. 3-25(a), (b)、Fig. 3-26(a), (b)には、それぞれ、 $Ha=1.0$ 、 $E=1000$ で磁場タイプ A, B における電磁力分布、圧力分布、渦度分布それに流線を示した。電磁力は先端の淀み点付近ではさらに流れを物体の方に引き寄せようとし、後端では流れを排除するように働いている。このため、圧力分布結果は、物体先端では通常の粘性流れに比べて更に圧力が高く、後端ではさらに低くなっており、圧力抵抗がかなり増加していることがわかる。剝離点の位置は上流側に少しずれているが速度場全体の様子は、この場合も通常の粘性流れと比べてほとんど変化がない。

拡大管流れのときと同じく物体表面に沿って圧力と摩擦応力の積分を行って、楕円柱に作用する圧力抵抗と摩擦抵抗を求めた。また、電磁力も領域積分して、電磁力の反作用による抵抗を計算した。Fig. 3-27には、全抵抗と電場の関係を示した。電場の変化に対して抵抗が線形的に変化しているのがわかる。抵抗増加の割合は、印加する磁場の領域の大きさに比例していることが理解される。電場強さが負になるにつれて抵抗は減少し、やがて推力を発生する様になる。Fig. 3-28は電場強さと摩擦抵抗の関係を示した。全抵抗の大きな変化からみると、摩擦抵抗はほとんど変化していないと言ってよい。これは、先に述べたように、電磁力の影響がほとんど対流項に影響していないことに対応している。Fig. 3-29は電場と圧力抵抗の関係を、またFig. 3-30には電場と電磁力による抵抗の関係を示した。両者とも電場の変化に対して、線形的に変化している。また圧力抵抗成分と電磁

力抵抗成分の大きさは、ほぼ同じくらいであることがわかる。

理解しやすいように上記計算に対して具体的な数値を当てはめてみる。楕円柱の長さを1cmとすると流速は2cm/s程度となる。このときHa=1.0は1.6tesla程度で、E=-1000は-32v/m程度に対応する。

3.3.4 翼型周りの流場制御の計算

前節では鈍い物体周りの流場制御について数値計算を行ったが、ここでは流線形物体周りの流れの制御について考える。流れの対象は数値計算によく用いられているNACA0012翼型を取り上げて、電磁力の揚抗力に及ぼす影響を調べた。翼型周りの流れを計算するため、格子系はC-グリッドを用いた。C-グリッドを用いたときの計算法を以下に述べる。

座標系はFig. 3-31に示すようにとる。これを計算領域に変換するとFig. 3-32のようになる。翼表面は $\eta = 1, i_s \leq \xi \leq i_e$ に対応する。計算領域は、次のようになる。

$$\begin{array}{ll}
 \eta = 1 & \text{のとき} \quad 2 \leq \xi \leq i_s - 1 \\
 2 \leq \eta \leq j_{\max} - 1 & \text{のとき} \quad 2 \leq \xi \leq i_{\max} - 1 \\
 2 \leq \xi \leq i_s - 1 & \text{のとき} \quad 1 \leq \eta \leq j_{\max} - 1 \quad \dots (a) \\
 i_s \leq \xi \leq i_e & \text{のとき} \quad 2 \leq \eta \leq j_{\max} - 1 \\
 i_e + 1 \leq \xi \leq i_{\max} - 1 & \text{のとき} \quad 2 \leq \eta \leq j_{\max} - 1, \text{ただし}(a)\text{に接続して} \\
 & \text{考える。}
 \end{array}$$

本研究では、 $i_{\max} = 121, j_{\max} = 35, i_s = 21, i_e = 101$ とした。

境界条件は

$$\begin{array}{ll}
 \xi = 1, \xi = i_{\max} & \text{において} \quad \partial / \partial \xi = 0 \\
 \eta = j_{\max} & \text{において} \quad u = 1, v = 0, p = 0 \\
 \eta = 1, i_s \leq \xi \leq i_e & \text{において} \quad u = 0, \partial p / \partial \eta = 0
 \end{array}$$

である。

計算の手順は、

- (1) $\eta = 1$ のとき $2 \leq \xi \leq i_s - 1$ まで ξ -スイープを行い、
- (2) $2 \leq \eta \leq j_{\max} - 1$ では $2 \leq \xi \leq i_{\max} - 1$ まで ξ -スイープを行う。なお、 $\eta = 1, i_e + 1 \leq \xi \leq i_{\max} - 1$ の計算点は $\eta = 1, 2 \leq \xi \leq i_s - 1$ のそれ

と同一であるからスイープする必要はない。

つぎに η -スイープであるが、

(3) $2 \leq \xi \leq i_s - 1$ のときは、点 $(\xi, \eta(i_{\max}-1))$ から点 (ξ, η_1) までと、点 $(\xi(i_{\max}+1-i), \eta_2)$ から点 $(\xi(i_{\max}+1-i), \eta(j_{\max}-1))$ までとを連結して一回のスイープにまとめる。

(4) $i_s \leq \xi \leq i_e$ のときは、 $2 \leq \eta \leq j_{\max} - 1$ までスイープする。

ここで注意することは、 η -スイープにおける手順(3)のときである。このときの係数行列は次に示すように

$$\left(\begin{array}{cccc} \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ L_{ij} & K_{ij} & J_{ij} & \\ & & & \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ & & J_{i'j} & K_{i'j} & L_{i'j} \\ & & & & \\ & & & & \cdot \\ & & & & \cdot \\ & & & & \cdot \end{array} \right) \quad i' = i_{\max} + 1 - i \quad (3.29)$$

となり、 $(\xi, \eta(i_{\max}-1))$ から (ξ, η_1) までの係数行列の要素の順序を入れ換えることである。

計算に用いた格子をFig. 3-33に示す。迎角は5度とした。格子分割は ξ 方向に121分割、 η 方向に35分割である。 η 座標は物体近傍で等比数列的に密集させてあり、最小間隔は0.005である。ただし、翼弦長は1.0である。磁場分布は翼後半部 ($i_s+2 \leq \xi \leq i_s+22$ 、および $i_e-22 \leq \xi \leq i_e-2$) に、翼表面から法線方向内側に最小格子間隔だけ折り返したところに、背面にN極、正面にS極の磁荷を分布させて求めた。こうして得られた磁場分布をFig. 3-34に示す。図からわかるように、磁場の強さは翼から離れると急速に減少するため、楕円柱のときと同様、磁場のみによる電磁力 $(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$ を利用することは考えず、電場と磁場の積で得られる電磁力を主に利用することで、流場制御を行うように考えた。このため計算では、磁場の強さは一状態のみとした。また電場は、電磁力が流れを下流に引き込む方向に作用するように、負の電場を $72 \leq \xi \leq 107$ 、 $1 \leq \eta \leq 20$ の範囲で囲まれる

翼後部背面上方にのみ印加した。

Fig. 3-35(a), (b), (c)に $Re=200$ における電磁場を印加しないときの流速分布、渦度分布、圧力分布を示す。同様にFig. 3-36(a), (b), (c)、Fig. 3-37(a), (b), (c)には、それぞれ、 $Re=200$, $Ha=1.0$, $E=-500$ の場合と $Re=200$, $Ha=1.0$, $E=-1000$ の場合の流速分布、渦度分布、圧力分布を示す。電磁場を印加しない通常の粘性流では、翼背面において剥離は生じていない。翼背面の境界層の厚さが非常に大きく、渦度の拡散領域が非常に大きくなっているのがわかる。電磁場を印加すると、電磁力で流れが下流に引き込まれるために、翼背面の圧力が急速に低下する。しかしながら流場の様子は圧力場の変化ほど激しく変化していない。これも楕円柱周りの流れのときと同じく、電磁力項が対流項に大きな影響を与えていないものと考えられる。圧力の変化をわかり易く見るためにFig. 3-38(a), (b), (c)に、それぞれ電磁場が印加されていないとき、 $Ha=1$, $E=-500$ のとき、 $Ha=1$, $E=-1000$ のときの翼表面に沿う圧力分布を示した。電磁力の作用のために翼背面の圧力の負値が急激に増している。電磁力の影響による圧力低下は、翼前縁で流れが回り込むことによる圧力の低下よりも大きいのがわかる。

Fig. 3-39には、印加電場強さと翼に働く揚力の関係を、Fig. 3-40には印加電場強さと翼抗力の変化を示した。揚抗力は慣用に従いすべて $(1/2)\rho U^2 L$ (L = 翼弦長)で無次元化した。摩擦力による揚力はほとんどない。圧力による揚力は電場強さに比例して増加している。電磁力の反作用による揚力も電場強さに比例して増加しており、 $E=-1000$ のときでは全揚力は、電磁場が印加されていないときに比較して約2倍の増加となっている。一方、翼抗力は電場強さの変化に対して、摩擦力による抗力と圧力による抗力の和がほとんど変化していない。これは、電磁力が流体を後方に引き込むことにより摩擦抗力が増加する反面、翼前縁近傍の圧力が低下するため推力が増加し、結果としてこれらが打ち消し合うためである。しかし電磁力の反作用による抗力は推力として作用しているために、結局全抵抗は電磁場を印加すると減少することがわかる。

理解しやすいように、上記計算に対して具体的な数値を当てはめてみる。 $Re=200$ であるから翼弦長を1cmとすると流速は2cm/s程度となり、このとき $Ha=1.0$ は1.6tesla程度の磁場強さ、 $E=-1000$ は-32v/m程度の電場強さに対応する。

3.4 第3章の結論

この章ではレイノルズ数が 10^2 程度の流場を電磁力によって流場制御したときのシミュレーションを行い、結果を考察をした。その結果、拡大管流れのように、流場全体に大きな磁場を印加することが可能で、流場自身が空間的に制限されているような場合は、磁場のみの印加や電磁力の印加によって流場の制御が可能であることがわかった。拡大管に作用する抵抗の増加は磁場の強さの自乗に比例すること、また電場強さと抵抗には比例関係があることがわかった。拡大管を過ぎる流量は、入口の圧力勾配を一定にしたとき、磁場の大きさにはほとんどよらないが、電場強さと比例関係があることがわかった。

外部流れでは、楕円柱のような鈍い物体の場合、電磁力の作用によっても速度場はほとんど変化しないことが明らかとなった。しかし圧力場は大きく変化し、このため物体の全抵抗に大きな影響を及ぼすことがわかった。さらに、電磁力が下流側に働くように電磁場を印加すると、推力が生じることを示した。また、全抵抗はほぼ圧力抵抗と電磁力抵抗に二分され、それらは、それぞれ印加電場強さと比例関係にあることがわかった。同じ電場強さでは、印加磁場領域が広いほど抵抗が大きく、これは磁場領域の広さに大略比例している。

翼型周りの流れの場合も楕円柱のときと同様、電磁力の影響は圧力場に大きく作用し、流場は余り変化していない。しかし電磁場を印加することで揚力が増加し抗力が減少すること、またそれらの変化は印加する電場強さに比例して変化することがわかった。

第4章 レイノルズ数が 10^4 程度の二次元層流場における数値計算

4.1 緒言

第3章では、レイノルズ数が200程度の緩やかな流れに対して、電磁力を利用した流場制御の評価を行った。しかしながら、船舶工学的興味からいえば高いレイノルズ数流れの方が興味深い。そこでこの章では、レイノルズ数が 10^4 程度の翼型周りの流れに対してその評価を行うことにする。流れの対象は、3.3.4と同じくNACA0012翼型を用いて、レイノルズ数が大きいときの電磁力の揚抗力に及ぼす影響を調べた。以下、4.2では、レイノルズ数が大きくなることによるスキームの変更について、4.3では境界条件について、さらに4.4では格子間隔と数値粘性項の評価及び翼型周り流れの数値計算の結果とその考察を行い、最後にこの章の結論を述べた。

4.2 近似因数分解法による定式化

この章で用いる基礎方程式は(3.3), (3.4)式である。しかし前章と異なりレイノルズ数の大きな流れを数値的に解くためには、より薄い境界層を捉えるために格子間隔を物体近傍でより細かくせねばならない。また基礎方程式の拡散項が小さくなるため、3章で示した方法では数値的に安定して解くことが難しくなる。ここでは、4階の人工粘性項を陰的に付加し、空間差分に5点の中央差分を用いたスキーム¹⁰⁾で解くことにする。

基礎方程式(3.3)式を(3.5)式で示される物体適合座標を用いて変形すると

$$q_t + Aq_\xi + Bq_\eta = H(\hat{a}q_{\xi\xi} + \hat{b}q_{\xi\eta} + \hat{c}q_{\eta\eta} + \hat{d}q_\xi + \hat{e}q_\eta) - \omega_\xi q_{\xi\xi\xi\xi} - \omega_\eta q_{\eta\eta\eta\eta} + Sq + C \quad (4.1)$$

となる。ここで(3.7)式と異なり、4階の人工粘性項を(4.1)式右辺に人工的に付加している。ただし、 ω_ξ, ω_η は正定数である。

時間差分は、3章と同じくオイラーの陰解法による。

$$q_t = \frac{1}{\Delta t} \frac{\Delta}{1 + \Delta} q^n, \quad q^{t=n+1} = q^{t=n} + \Delta q^{t=n} \quad (4.2)$$

このとき(4.1)式は

$$\begin{aligned}
 & \Delta q^n + \Delta t \{ \Delta(\mathbf{A}q_\xi)^n + \Delta(\mathbf{B}q_\eta)^n - \hat{a}\Delta(\mathbf{H}q_{\xi\xi})^n - \hat{b}\Delta(\mathbf{H}q_{\xi\eta})^n - \hat{c}\Delta(\mathbf{H}q_{\eta\eta})^n \\
 & \quad - \hat{d}\Delta(\mathbf{H}q_\xi)^n - \hat{e}\Delta(\mathbf{H}q_\eta)^n - \Delta(\mathbf{S}q)^n + \omega_\xi \Delta(q_{\xi\xi\xi\xi})^n + \omega_\eta \Delta(q_{\eta\eta\eta\eta})^n \} \\
 & = -\Delta t \{ \mathbf{A}q_\xi^n + \mathbf{B}q_\eta^n - \mathbf{H}(\hat{a}q_{\xi\xi}^n + \hat{b}q_{\xi\eta}^n + \hat{c}q_{\eta\eta}^n + \hat{d}q_\xi^n + \hat{e}q_\eta^n) - \mathbf{S}q^n \\
 & \quad + \omega_\xi q_{\xi\xi\xi\xi}^n + \omega_\eta q_{\eta\eta\eta\eta}^n - \mathbf{C} \} \tag{4.3}
 \end{aligned}$$

となる。(4.3)式を(3.11), (3.12)式と同じく局所的に線形化し、さらに近似因数分解を施すと、最終的に

$$\begin{aligned}
 & \{ 1 + \Delta t(-\mathbf{S} + \hat{\mathbf{A}} + \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial \xi} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{d} \frac{\partial}{\partial \xi} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{a} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \omega_\xi \frac{\partial^4}{\partial \xi^4}) \} \\
 & \{ 1 + \Delta t(\hat{\mathbf{B}} + \mathbf{B} \frac{\partial}{\partial \eta} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{e} \frac{\partial}{\partial \eta} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{c} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \omega_\eta \frac{\partial^4}{\partial \eta^4}) \} \cdot \Delta q^n \\
 & = -\Delta t \{ \mathbf{A}q_\xi^n + \mathbf{B}q_\eta^n - \mathbf{H}(\hat{a}q_{\xi\xi}^n + \hat{b}q_{\xi\eta}^n + \hat{c}q_{\eta\eta}^n + \hat{d}q_\xi^n + \hat{e}q_\eta^n) - \mathbf{S}q^n \\
 & \quad + \omega_\xi q_{\xi\xi\xi\xi}^n + \omega_\eta q_{\eta\eta\eta\eta}^n - \mathbf{C} \} + \Delta t \hat{\mathbf{H}}\mathbf{b}(\Delta q)_{\xi\eta}^{n-1} \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

が得られる。

空間差分は5点の中央差分を用いる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{1}{12} (E_\xi^{-2} - 8E_\xi^{-1} + 8E_\xi^+ - E_\xi^{+2}) \\
 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} &= \frac{1}{12} (-E_\xi^{-2} + 16E_\xi^{-1} - 30E_\xi^0 + 16E_\xi^+ - E_\xi^{+2}) \\
 \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} &= (E_\xi^{-2} - 4E_\xi^{-1} + 6E_\xi^0 - 4E_\xi^+ + E_\xi^{+2})
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

これを(4.4)式に代入して整理し、 ξ -スイープと η -スイープに分けて書くと

ξ -sweep

$$\mathbf{J}_{ij} \Delta q_{i-2,j}^* + \mathbf{K}_{ij} \Delta q_{i-1,j}^* + \mathbf{L}_{ij} \Delta q_{i,j}^* + \mathbf{M}_{ij} \Delta q_{i+1,j}^* + \mathbf{N}_{ij} \Delta q_{i+2,j}^* = \mathbf{f}_{ij}$$

$$\mathbf{J}_{ij} = \frac{1}{12} [\mathbf{A} + \mathbf{H}(\hat{a} - \hat{d}) + 12\omega_\xi \mathbf{I}] \cdot \Delta t$$

$$\mathbf{K}_{ij} = -\frac{2}{3}[\mathbf{A} + \mathbf{H}(2\hat{a} - \hat{d}) + 6\omega_{\xi}\mathbf{I}] \cdot \Delta t \quad (4.6)$$

$$\mathbf{L}_{ij} = \mathbf{I} + [-\mathbf{S} + \hat{\mathbf{A}} + \frac{5}{2}\mathbf{H}\hat{a} + 6\omega_{\xi}\mathbf{I}] \cdot \Delta t$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \frac{2}{3}[\mathbf{A} - \mathbf{H}(2\hat{a} + \hat{d}) - 6\omega_{\xi}\mathbf{I}] \cdot \Delta t$$

$$\mathbf{N}_{ij} = -\frac{1}{12}[\mathbf{A} - \mathbf{H}(\hat{a} + \hat{d}) - 12\omega_{\xi}\mathbf{I}] \cdot \Delta t$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{ij} = & -\Delta t \{ \mathbf{A}q_{\xi}^n + \mathbf{B}q_{\eta}^n - \mathbf{H}(\hat{a}q_{\xi\xi}^n + \hat{b}q_{\xi\eta}^n + \hat{c}q_{\eta\eta}^n + \hat{d}q_{\xi}^n + \hat{e}q_{\eta}^n) \\ & - \mathbf{S}q^n + \omega_{\xi}q_{\xi\xi\xi\xi}^n + \omega_{\eta}q_{\eta\eta\eta\eta}^n - \mathbf{C} \} + \Delta t \mathbf{H} \hat{\mathbf{b}} (\Delta q)_{\xi\eta}^{n-1} \end{aligned}$$

η -sweep

$$\mathbf{J}_{ij} \Delta q_{i,j-2} + \mathbf{K}_{ij} \Delta q_{i,j-1} + \mathbf{L}_{ij} \Delta q_{i,j} + \mathbf{M}_{ij} \Delta q_{i,j+1} + \mathbf{N}_{ij} \Delta q_{i,j+2} = \Delta q_{ij}^*$$

$$\mathbf{J}_{ij} = \frac{1}{12}[\mathbf{B} + \mathbf{H}(\hat{c} - \hat{e}) + 12\omega_{\eta}\mathbf{I}] \cdot \Delta t \quad (4.7)$$

$$\mathbf{K}_{ij} = -\frac{2}{3}[\mathbf{B} + \mathbf{H}(2\hat{c} - \hat{e}) + 6\omega_{\eta}\mathbf{I}] \cdot \Delta t$$

$$\mathbf{L}_{ij} = \mathbf{I} + [\hat{\mathbf{B}} + \frac{5}{2}\mathbf{H}\hat{c} + 6\omega_{\eta}\mathbf{I}] \cdot \Delta t$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \frac{2}{3}[\mathbf{B} - \mathbf{H}(2\hat{c} + \hat{e}) - 6\omega_{\eta}\mathbf{I}] \cdot \Delta t$$

$$\mathbf{N}_{ij} = -\frac{1}{12}[\mathbf{B} - \mathbf{H}(\hat{c} + \hat{e}) - 12\omega_{\eta}\mathbf{I}] \cdot \Delta t$$

のようになる。この方程式の左辺は、適当な境界条件を用いることで5重ブロック対角行列になるので、やはり容易に解くことができる。この計算を解が収束するまで繰り返す。

4.3 計算領域と境界条件

翼型周りの流場計算法は原理的に3.3.4で述べたとおりでありC-グリッドを用いて行う。しかしこの章では5点の中心差分を用いているので、それに伴って境界条件を若干変更する必要がある。ここで用いる計算領域をFig. 4-1に示した。物体表面は $\eta = 1$, $i_s \leq \xi \leq i_e$ に対応する。計算領域は次のようになる。

$\eta = 1$ のとき $3 \leq \xi \leq i_{s-1}$
 $2 \leq \eta \leq j_{\max} - 2$ のとき $3 \leq \xi \leq i_{\max} - 2$
 $3 \leq \xi \leq i_{s-1}$ のとき $1 \leq \eta \leq j_{\max} - 2 \dots (a)$
 $i_s \leq \xi \leq i_e$ のとき $2 \leq \eta \leq j_{\max} - 2$
 $i_e + 1 \leq \xi \leq i_{\max} - 2$ のとき $2 \leq \eta \leq j_{\max} - 2$, ただし (a) と接続して
 考える。

境界条件は、5点中央差分をとっているため3.3.4で示したままでは条件が不足するので、次のようにする。

$\xi = 1, \xi = i_{\max}$ において $\partial / \partial \xi = \partial^2 / \partial \xi^2 = 0$,
 $\eta = j_{\max}$ において $u = 1, v = 0, p = 0, \partial / \partial \eta = 0$
 $\eta = 1, i_s \leq \xi \leq i_e$ において $u = 0, \partial p / \partial \eta = 0, \partial^2 / \partial \eta^2 = 0$

である。ただし、物体表面上では物体より内側に仮想の格子点を設けて直線的に外挿した (Fig. 4-1参照)。 計算手順は3.3.4で示した通りである。

4.4 数値計算¹¹⁾

4.4.1 格子間隔と人工粘性項の評価

高レイノルズ数流れを精度良く計算するためには物体近傍で格子を細かくする必要がある。また、この章で用いるスキームには4階の人工粘性項が陰的に入っている。このために、解の格子の大きさに対する依存性や人工粘性項の大きさが解に与える影響などをあらかじめ調べておく必要がある。3章では厳密解が存在する流れを計算することでスキームの精度チェックが行えたが、レイノルズ数が高い流れでは解析的に厳密解を得ることは難しく、精度チェックには数値実験的手法に頼らざるを得ないと思われる。

まず数値解の格子間隔の依存性を調べるために、Fig. 4-2、4-3に示す最小格子間隔が0.005 (メッシュAと呼ぶ) と0.002 (メッシュBと呼ぶ) の2つのタイプの格子を取り上げて、計算結果の比較を行った。これらの格子はC-グリッドで、 ξ 方向に121分割、 η 方向に35分割してある。また、迎角は0度である。 η 座標は物体近傍で等比数列的に密集させてある。次に人工粘性項の解に対する影響を調べるために、それぞれの格子に対して、人工粘性項の係数 $\omega \equiv \omega_{\xi} = \omega_{\eta}$ を2.5と

5 の 2 通りを与えて、そのときの解の様子も調べた。また計算では $Re = 10^4$ とした。収束判定条件は $\Delta u(\max)/u(\max) = 1.0 \cdot 10^{-5}$ とした。計算時間は富士通 FACOM M180 II AD を用いて一回の繰り返し計算に約 30 秒を要し、メッシュ B のとき $\Delta t = 0.2$ で 500 回程度の繰り返し計算で収束した。

Fig. 4-4(a), (b) にメッシュ A を用いたときの、 $\omega = 2.5$ と $\omega = 5$ における翼表面の圧力分布を示す。 ω の変化によって圧力のピークの部分に少し変化が見られる。 $\omega = 5$ の結果の方が、ピークがなだらかになっており解が拡散的になっている。Fig. 4-5(a), (b) は、Fig. 4-4(a), (b) と同じ状態における渦度分布である。翼後半部の渦度の符号を詳しく見ると剥離は計算されていないことが知られる。

一方、メッシュ B を用いたときの、 $\omega = 2.5$ と 5 における翼表面圧力分布を Fig. 4-6(a), (b) に示す。この格子では ω が異なっても圧力分布は変化していない。Fig. 4-7(a), (b) にこのときの渦度分布を示すが、これを見ると翼後半部で流れが剥がれているのが認められる。剥離点の位置は、 $\omega = 2.5$ のとき前縁より 87% 弦長後方、 $\omega = 5$ で 89% 弦長後方で、 ω の変化に対して 2% の差があった。 $Re = 10^4$ での迎角 0 度の NACA0012 翼型周りの流れは、Mehta¹²⁾、児玉¹³⁾ によって計算が行われている。これらの結果は、ともに前縁から 84% 弦長後方の位置に流れの剥離点が計算されている。Fig. 4-8 には、メッシュ B を用いたときの翼表面圧力結果と Mehta および 児玉 の計算結果とを比較した。なお、児玉は本論の計算で用いた格子より細かい格子で計算を行っている。今回得られた結果は彼らの結果に比べて、前縁淀み点の圧力が小さいこと、剥離点の位置が 3-5% 後縁寄りであることが認められる。一方、Mehta と 児玉 の計算結果では剥離点の位置が一致しており、十分正しく計算されているものと思われる。今回の計算結果と Mehta らの結果の差は、格子間隔の大きさによるものと思われる。しかしながら、全体的には今回の結果と他の結果との一致は良い。

メッシュ A とメッシュ B での渦度分布を比較すると、メッシュ B の方が渦度流出領域が大きい。すなわち粗い格子を用いて流場を計算すると、見かけ上レイノルズ数が小さくなることが理解される。格子間隔を変化させることで生ずる渦度流出域の差と、同じ格子を用いて ω を変化させたときに生ずる渦度流出域の差を比較すると、格子間隔を変化させたときの方がその差は大きい。すなわち、格子を粗くする方が ω を大きく取るよりも流場が拡散的になることがわかる。以上か

ら、 $Re=10^4$ の場合では、メッシュAの格子間隔は粗すぎると判断できる。そこでこれ以降、メッシュBと同じ最小格子間隔を有する格子を用いて計算することにした。 ω は計算の効率化を考えると大きい方が望ましいので $\omega=5$ とした。

4.4.2 翼型周りの流場制御の計算¹¹⁾

磁場分布および電場分布の与え方は3.3.4と全く同じとした。磁場の強さは3.3.4でも述べたように翼から離れると急速に減少するため、磁場のみによる電磁力を流場の制御に利用することは考えず、電場と磁場の積で得られる電磁力を主に利用することで流場制御を行うように考えた。このため、磁場の強さは $Ha=12.64$ で一定とし、電場の強さを $E=-50$ から $E=-200$ まで変化させて数値計算を行った。計算に用いた格子をFig. 4-9に示す。迎角は5度である。

Fig. 4-10(a), (b), (c)には、電磁場のないときの翼型周りの流速分布、渦度分布、圧力分布を示す。翼背面で大きな層流剥離を起こしているのがわかる。翼前縁付近の淀み点では圧力係数が1.0で、下流に行くに従って急速に圧力が下がり翼両面で負圧域になっている。

次に電磁場を印加したときの結果について述べる。まず、磁場のみ印加したときの結果であるが、このときは電磁場を印加しない通常の粘性流れと解が一致した。これは3.3.4で述べたように翼表面から離れると磁場の強さが急激に減少するため、電磁力項 $(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \ Ha^2/Re$ が流場にはほとんど影響を与えていないからである。

電場を印加したときの結果を以下に示す。Fig. 4-11(a), (b), (c)からFig. 4-14(a), (b), (c)にはそれぞれ $Ha=12.64$ で、 E が $-50, -100, -150, -200$ のときの流速分布、渦度分布それに圧力分布を示した。電場を印加していくと剥離域は少しずつ小さくなって行き、 $E=-150$ では流れの剥離は認められず翼に沿って流れている。圧力分布をみると電場を印加するに従って翼背面の圧力が低くなっている。また翼正面側でも負圧の大きさが小さくなっているのがわかる。これらをわかり易くするため、翼面圧力分布として示したのがFig. 4-15(a), (b), (c), (d), (e)で、順に $E=0, -50, -100, -150, -200$ で書いてある。電場を印加するにつれて翼背面負圧のピークが大きくなっているのがわかる。また翼後端の圧力が電場の印加とともに負から正へと変化し、それに伴って翼正面の圧力が正の方向に大きくなっている

様子がよくわかる。ただ負圧のピークが大きくなるため、キャビテーションとの問題が関わって来ることが予想される。なお、翼背面圧力分布で屈曲がみられるが、これは電磁力の分布がこの付近から急激に大きくなっているためである。これを示すため電磁力分布をFig. 4-16に示した。この図は $E = -100$ の場合であるが、 \mathbf{ExB} の項が $(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$ に比べて圧倒的に大きいため E が他の値の場合でも分布の様子はほとんど変わらない。

前章と同じく翼表面の圧力と摩擦応力を積分して揚力と抗力を求めた。また電磁力を空間積分して電磁力の反作用による揚力と抗力も計算した。まず始めに揚力と電場の関係を述べる。Fig. 4-17に電場の強さと揚力及び揚力成分の関係を示した。図からわかるように、揚力はほとんど表面圧力積分による成分で決まっている。電磁力の反作用による揚力成分は電場強さと比例関係にあり、電磁力による流場への影響は (\mathbf{ExB}) 項が支配的で、 $(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$ の項はほとんど影響を及ぼしていないことがここでも理解される。電場の強さが0から-100付近までは、電場の強さと揚力の関係は線形的である。これは第3章の結果と同じである。しかし電場の強さをさらにあげて行くと、この線形関係は崩れ非線形的関係に変化し、翼背面に生じていた剥離が消えている。すなわち、電磁力項が方程式の非線形項である対流項に大きく影響を及ぼし始めたために電場強さと揚力が非線形的になるものと思われる。ちなみに電磁力項の大きさは、3.3.4節及びこの節の両者共にそのオーダーは $Ha^2(\mathbf{ExB})/Re = O(1)$ となっている。しかし $Re = 10^4$ の流れでは $Re = 200$ の流れに比べて、方程式における拡散項の寄与が相対的に小さくなるためにこのような差が生じるものと思われる。

次に抗力と電場強さについて考察する。Fig. 4-18に抗力及びその成分と電場強さの関係を示した。摩擦応力に起因する抗力成分と表面圧力による抗力成分はほぼ同じ大きさであるが、電場強さが大きくなるにつれて、摩擦応力による成分がまさってくる。これは速度分布図を見れば明らかなように、翼背面で剥離が消滅していることや、流体が下流側に引きずられていることによる。一方、翼前縁の圧力が低下するために推力が増加するので、結果的にはこれら両者の和はほとんど一定である。一方、電磁力の反作用による抵抗は負となっており推力として作用しているのがわかる。この電磁力成分による推力は、電場強さと比例関係にある。この推力の大きさは $E = -200$ では摩擦応力による抗力成分を上回っており、

全抗力を結果的に減少させる重要な働きをしている。

理解し易いように電磁場の大きさを有次元化してみる。いま、翼弦長を10cmとすると $Re = 10^4$ から、一様流速は10cm/s程度となる。このとき磁場強さは $Ha = 12.64$ が 2 tesla程度に対応する。電場強さは、 $E = -200$ が40v/m程度に対応する。

4.5 第4章の結論

レイノルズ数が 10^4 のときの翼型周りの流場を数値シミュレーションし、電磁力が流場に及ぼす影響を調べた。この結果、翼がその周りに電磁場を印加して流体中を進むとき、翼背面に生じていた流れの剥離が電磁力の印加によって消滅することを示した。電場強さを増して行くと、揚力は最初電場強さに比例して増加し、さらに電場強さが大きくなると非線形的に変化するようになることがわかった。 Re が200程度の低レイノルズ数流れのときに印加した電磁力と無次元値で同程度の電磁力でも、 Re が 10^4 のときは電場強さと揚力に非線形性が現れている。これは拡散項（粘性項）の影響が相対的に小さくなったためである。全抗力は電磁力の反作用による推力の効果のために減少することを示した。これらの結果を考慮すると、例えば、翼の前進速度が十分に取れないようなときでも電磁力の印加によって揚力の増加を図ることが可能と思われる。ただし、今回のような方法で揚力の増加に電磁力を利用した場合、翼背面の負圧のピークが大きくなるので、新たにキャビテーションの問題については別に考える必要があることは言うまでもない。

5.1 緒言

第4章までは、すべて層流流れに対して電磁力による流場制御のシミュレーションとその評価を行ってきた。しかし、船舶流体力学では現実の問題となる流場は乱流場であるのが普通であって、層流が実現されている流場は限られた場合であると考えられる。そこで、この章では乱流場に対して電磁力がどのように作用するのかを調べ、乱流場の電磁力による流場制御法について考察する。電磁力が乱流場にどのような影響を与えるか、ということについての実験的な研究はあまりなく^{14), 15), 16)}、この方面の実験的な研究が如何に困難かを物語っている。それでもごく最近になって、レーザー流速計を用いた精力的な研究¹⁷⁾がされつつある。一方、理論的に電磁場が乱流に及ぼす影響を調べようとするとき、電磁場の影響を考慮した適当な乱流モデルを作ることが必要になる。最も簡単なモデル化がいわゆる0方程式乱流モデルであり、Brouillette¹⁸⁾、須藤ら¹⁹⁾の研究がこれである。0方程式モデルは、乱流の特徴を表す渦動粘性係数が速度分布と結び付けられており、乱流の情報は速度場を通して得られることになる。

一方、Kitamuraら²⁰⁾は2方程式モデルの代表である $k-\varepsilon$ モデルを用いて、平行平板間流れの解析を行っている。2方程式モデルを用いると、電磁場が速度場を抑制するハルトマン効果と磁場が乱れを吸収する効果を分離して扱うことができるので、電磁場の乱流場に及ぼす影響をより細かく解析できるものと思われる。

この章では、一般の二次元乱流場に対して、電磁場の影響を考慮した $k-\varepsilon$ 方程式を導く。得られた方程式を用いて平行平板間流れを計算し、実験値と比較考察してモデル化及び定式化の正当性を確かめる。そのうち、翼型周りの流場制御シミュレーションを行い、電磁力を用いた二次元乱流場の流場制御について評価する。なお、磁気レイノルズ数が大きいときの $k-\varepsilon$ 方程式は最近、Yoshizawaによって定式化されている。本研究で用いた $k-\varepsilon$ 方程式との相違を示すために付録-2にYoshizawaの研究の概略を示した。

5.2 電磁力の影響を考慮した $k-\varepsilon$ 方程式による定式化^{21), 22)}

5.2.1 基礎仮定と k -方程式の導出

第2章で述べたように、海水のように電気伝導度が非常に小さい流体が電磁場中を運動するとき、誘導磁場は印加磁場に比べて無視できる。従って、電磁場中を海水が乱れをともなって流れるとき、速度の乱れ成分が誘導する磁場は無視できる。さらに印加磁場に乱れ成分がないと仮定すると、磁場の乱動成分は考えなくてよいことになる。また印加電場も乱動成分はないものと仮定する。このとき、速度、圧力、磁場、電場はそれぞれ、その定常成分と変動成分とに分解して、

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}', \quad p = \bar{p} + p', \quad \bar{\mathbf{u}}' = 0, \quad \bar{p}' = 0, \quad \mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}}, \quad \mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}} \quad (5.1)$$

のように書くことができる。ここでバー記号は時間平均成分を、プライム記号は変動成分を表す。流場の支配方程式(2.13)式はテンソル表示して

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\sigma}{\rho} \varepsilon_{ijk} E_j B_k + \frac{\sigma}{\rho} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} u_l B_m B_k \quad (5.2)$$

のように書く。添字はテンソルの総和規則に従うものとする。 ε_{ijk} は交代テンソルで添字 $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ が偶置換のとき1, 奇置換のとき-1, それ以外で0である。(5.1)式を(5.2)式に代入して時間平均をとると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial(\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j} + \frac{\sigma}{\rho} \varepsilon_{ijk} E_j B_k \\ &+ \frac{\sigma}{\rho} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} \bar{u}_l B_m B_k \end{aligned} \quad (5.3)$$

となる。(5.3)式右辺第3項はレイノルズ応力項である。(5.2)式から(5.3)式を引くと、変動成分に対する方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial(\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j} - u'_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i + u'_i) \\ &+ \frac{\sigma}{\rho} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} u'_l B_m B_k \end{aligned} \quad (5.4)$$

レイノルズ応力の輸送方程式は(5.4)式に p 方向成分の速度変動 u'_p を乗じて変形

すると得られる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\overline{u'_i u'_p})}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial(\overline{u'_i u'_p})}{\partial x_j} &= \frac{1}{\rho} \overline{p'} \left(\frac{\partial u'_p}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_p} \right) - \overline{u'_j u'_p} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u}_p}{\partial x_j} \\
 &- 2\nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u'_p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_p}) - \frac{1}{\rho} (\delta_{ij} \overline{u'_p} + \delta_{pj} \overline{u'_i}) \overline{p'} - (\overline{u'_i u'_j u'_p}) \right) \\
 &+ \frac{\sigma}{\rho} B_m B_k (\overline{u'_p u'_l} \epsilon_{ijk} + \overline{u'_i u'_l} \epsilon_{pjk}) \epsilon_{jlm}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

この式にクロネッカー記号 δ_{ip} を乗じると、乱動エネルギー $\overline{(u'_i u'_i)}/2 \equiv k$ に関する式が得られる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} &= \nu_T \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\sigma}{\rho} B_i B_j \right) - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \\
 &- \frac{4}{3} \frac{\sigma}{\rho} C_a B_j^2 k
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

ここで勾配拡散仮説による次のようなモデルを用いた。²³⁾

$$-(\overline{u'_i u'_j}) = \nu_T \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \tag{5.7}$$

$$-\frac{2}{\rho} \overline{p' u'_j} - \overline{u'_i u'_i u'_j} = \frac{2\nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \tag{5.8}$$

また(5.6)式右辺第2項の ϵ は乱動エネルギーの散逸率で、レイノルズ数が十分大きいとき、この過程は等方的とみなされ次のように定義される。

$$\nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} = \epsilon \tag{5.9}$$

また ν_T は渦動粘性係数で

$$v_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad C_\mu = \text{constant} \quad (5.10)$$

で表現される。

(5.6)式最終項は、磁場の影響によって乱動エネルギーが吸収されることを示している。ここで、この項には実験定数Caを乗じてある。磁場による乱れの吸収過程が完全に等方的であれば、この定数は1と考えられるが、磁場はその方向と垂直な変動速度成分のみ減衰させるために、乱れの吸収過程は本質的に非等方的と考えられる。係数Caはその補正を行うためである。Kitamuraら²⁰⁾によれば、この値は3/8となる。

ここでは圧力速度相関項と速度の3次相関項は、(5.8)式のようにモデル化している。しかし、これらの項は乱動エネルギーの再配分項と考えられることや電磁場による乱動エネルギーの吸収過程が非等方的であることを考えると、(5.8)式右辺にはなんらかの磁場の影響が入ってくるものと思われる。しかし、どのような形のモデル式を与えればよいのか現在のところ明らかでないので、ここでは従来のモデル化に従い、磁場の影響は考えないことにする。

5.2.2 ε -方程式の導出

次に ε に対する方程式を導く。 ε の式は変動成分の方程式(5.4)を x_p で微分したあと、 $2\nu \partial u_i' / \partial x_p$ を乗じて時間平均を取ると求まる。

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon}{Dt} = & -2\nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_p} \frac{\partial u_j'}{\partial x_p} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u_j' \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_p} \right)^2} + \frac{2}{\rho} \overline{\frac{\partial u_j'}{\partial x_p} \frac{\partial p'}{\partial x_p}} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \\ & - 2\nu^2 \overline{\left(\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j \partial x_p} \right)^2} - 2\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_p} \left(\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_p'}{\partial x_j}} + \overline{\frac{\partial u_j'}{\partial x_p} \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}} \right) - 2\nu \overline{u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_p}} \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_p \partial x_j} \\ & + \frac{2\nu\sigma}{\rho} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_p} \frac{\partial (u_l' B_m B_k)}{\partial x_p}} \end{aligned} \quad (5.11)$$

この式は ε に対する厳密な形の輸送方程式である。しかしこの形のままで計算する事が困難なので、これをモデル化する。HanjalićとLaunder²³⁾は数値計算をする上で非常に有効なモデル化を示した。ここでもそれにならってモデル化を

行う。それによると、(5.11)式右辺のそれぞれの項は次のようにモデル化されている。

$$- 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_p} \frac{\partial u'_j}{\partial x_p} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} - 2\nu^2 \overline{\left(\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_p} \right)^2} = - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (5.12)$$

$$- \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u'_j \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_p} \right)^2} + \frac{2}{\rho} \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_p} \frac{\partial p'}{\partial x_p}} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \quad (5.13)$$

$$- 2\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_p} \left(\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_p}{\partial x_j}} + \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_p} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} \right) = C_1 \frac{\varepsilon}{k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_p} \nu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_p} + \frac{\partial \bar{u}_p}{\partial x_i} \right) \quad (5.14)$$

$$2\nu \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_p}} \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_p \partial x_j} = 2\nu C_3 \overline{\left(\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_p \partial x_j} \right)^2} = \text{higher order term (can be neglected)} \quad (5.15)$$

(5.11)式右辺最終項は、電磁力による項で次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \frac{2\nu\sigma}{\rho} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_p} \frac{\partial (u'_l B_m B_k)}{\partial x_p}} &= - \frac{2\sigma}{\rho} \varepsilon B_k^2 - \frac{2\nu\sigma}{\rho} \frac{\partial k}{\partial x_p} \frac{\partial (B_k^2)}{\partial x_p} \\ &+ \frac{2\nu\sigma}{\rho} \left(\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_p} \frac{\partial u'_k}{\partial x_p}} B_i B_k + \overline{u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_p} \frac{\partial (B_i B_k)}{\partial x_p}} \right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

さらにレイノルズ数が十分高いときは、(5.16)式右辺第3項は次のように書かれる²³⁾。

$$2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_p} \frac{\partial u'_k}{\partial x_p}} = \frac{2}{3} \delta_{ik} \varepsilon \quad (5.17)$$

(5.16), (5.17)をまとめると、電磁力による項は

$$\begin{aligned} \frac{2\nu\sigma}{\rho} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_p} \frac{\partial (u'_l B_m B_k)}{\partial x_p}} &= - \frac{4}{3} \frac{\sigma}{\rho} \varepsilon B_k^2 - \frac{2\nu\sigma}{\rho} \frac{\partial k}{\partial x_p} \frac{\partial (B_k^2)}{\partial x_p} \\ &+ \frac{2\nu\sigma}{\rho} \overline{u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_p} \frac{\partial (B_i B_k)}{\partial x_p}} \end{aligned} \quad (5.18)$$

と書かれる。

ところで、(5.12)から(5.15)までのモデル化であるが、ある意味で非常に直感的であり、今までそれぞれの項に対して理論的な意味付けは行われなかった。しかし最近、Yoshizawa²⁴⁾が 2-Scale Direct-Interaction Approximation Theoryと呼ばれる手法を使って、初めてk-方程式とε-方程式の関係を理論的に説明した。それによると渦動粘性の仮定が成り立つとしたとき、kの実質微分とεの実質微分には次のような関係が成り立つ。

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = C_\gamma \frac{\varepsilon}{k} \frac{Dk}{Dt} \quad , \quad C_\gamma = \text{constant} \quad (5.19)$$

つまり、k-方程式とε-方程式は共に同じ型の輸送方程式を取ることがわかる。従って、ε-方程式の各項はk-方程式の各項に対応するように現れる。このとき、k-方程式の電磁場による項((5.6)式右辺第4項)に対応するε-方程式の電磁場による項は、(5.18)式右辺第1項に相当している。しかし本論で用いたk-方程式からは(5.18)式右辺第2項以下は説明できない。ただ、(2.14)式で用いた無次元式を用いて無次元化すると、

$$(5.16) \text{式} \text{の} \text{右} \text{辺} = - \frac{4}{3} \frac{Ha^2}{Re} B_k^2 \varepsilon + O\left(\frac{1}{Re} \frac{Ha^2}{Re}\right) \quad (5.20)$$

となるので、レイノルズ数が十分高いことを考えると、

$$(5.16) \text{式} \text{の} \text{右} \text{辺} = - \frac{4}{3} \frac{Ha^2}{Re} C_b B_k^2 \varepsilon \quad (5.21)$$

のように書いてもよいであろう。そこで、本論では(5.21)式を用いることにする。また(5.21)式には、k-方程式の電磁力項で現れた経験定数に対応する形でやはり定数Cbを乗じている。この値も実験値で最適化して決める必要がある。k-方程式と同じく、Kitamuraら²⁰⁾によるとこの値は3/4に対応する。

以上の考察より、モデル化されたε-方程式は、(5.11)式に(5.12)-(5.15)式と(5.21)式を用いて次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon}{Dt} = & -C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(v + \frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_1 \frac{\varepsilon}{k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} v_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \\ & - \frac{4}{3} \frac{\sigma}{\rho} C_b B_j^2 \varepsilon \end{aligned} \quad (5.22)$$

5.2.3 無次元化

無次元変数は(2.15)式と同じく以下の定義によった。

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* U, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}^* L, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}^* B, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}^* UB, \quad p = p^* \rho U^2, \quad v_T = v_T^* UL \quad (5.23)$$

これより、無次元化された運動方程式及びk-ε方程式は、次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = & - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x_i} \\ & + \frac{Ha^2}{Re} \varepsilon_{ijk} (E_j B_k + \varepsilon_{jlm} \bar{u}_l B_m B_k) \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = & v_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{Ha^2}{Re} B_i B_j \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{v_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \\ & - \varepsilon - \frac{4}{3} \frac{Ha^2}{Re} C_a B_j^2 k \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_1 \frac{\varepsilon}{k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} v_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \\ & - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} - \frac{4}{3} \frac{Ha^2}{Re} C_b B_j^2 \varepsilon \end{aligned} \quad (5.26)$$

ただし簡単のため*は省略した。これらの式に現れる係数、 C_μ , σ_k , σ_ε , C_1 及び C_2 は実験結果より最適化されて決まる定数である。従来のk-εモデルで用いられる定数値には電磁場の影響は考慮されていないので、そのまま用いるのは適当でないと考えられる。しかしこれらの値を最適化するのに十分な電磁場中の乱流に関する実験結果はないので、ここでは従来の値を用いた。すなわち、

$$C_{\mu} = 0.09, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_{\epsilon} = 1.3, \quad C_1 = 1.44, \quad C_2 = 1.92 \quad (5.27)$$

である。(5.24)-(5.26)式が解くべき方程式である。ただし、(5.24)式では圧力勾配項は k の勾配項と連成している。一般に外部流では、 k は物体近傍に非常に集中した分布を持つ。このために(5.24)式を用いて外部流れを計算すると、圧力分布が物体近傍で歪みを受ける。そこで本論では、(5.24)式の波線で示した項は無視して計算した。これはレイノルズ応力のうち法線方向成分を無視したことと同じで、いわゆる境界層近似に対応する。

5.3 近似因数分解法による定式化

(5.24)式を未知数の各成分に対して分けて書くと次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (u - 2 \frac{\partial v_T}{\partial x}) \frac{\partial u}{\partial x} + (v - \frac{\partial v_T}{\partial y}) \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v_T}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x} \\ = (\frac{1}{Re} + v_T) (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + \frac{Ha^2}{Re} (-E_z B_y + v B_x B_y - u B_y^2) \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + (u - \frac{\partial v_T}{\partial x}) \frac{\partial v}{\partial x} + (v - 2 \frac{\partial v_T}{\partial y}) \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v_T}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial y} \\ = (\frac{1}{Re} + v_T) (\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}) + \frac{Ha^2}{Re} (E_z B_x + u B_x B_y - v B_x^2) \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \beta (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) = 0 \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + (u - \frac{1}{\sigma_k} \frac{\partial v_T}{\partial x}) \frac{\partial k}{\partial x} + (v - \frac{1}{\sigma_k} \frac{\partial v_T}{\partial y}) \frac{\partial k}{\partial y} + 2 \frac{Ha^2}{Re} B_x B_y (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) v_T \\ + 2 \frac{Ha^2}{Re} (B_x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + B_y^2 \frac{\partial v}{\partial y}) v_T = (\frac{1}{Re} + \frac{v_T}{\sigma_k}) (\frac{\partial^2 k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 k}{\partial y^2}) + G - \epsilon \\ - \frac{4}{3} \frac{Ha^2}{Re} C_a (B_x^2 + B_y^2) k \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + (u - \frac{1}{\sigma_{\epsilon}} \frac{\partial v_T}{\partial x}) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + (v - \frac{1}{\sigma_{\epsilon}} \frac{\partial v_T}{\partial y}) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \quad (5.32)$$

$$= (\frac{1}{Re} + \frac{v_T}{\sigma_{\epsilon}}) (\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial y^2}) + C_1 G \frac{\epsilon}{k} - C_2 \frac{\epsilon^2}{k} - \frac{4}{3} \frac{Ha^2}{Re} C_b (B_x^2 + B_y^2) \epsilon$$

$$G = \{ 2(u_x^2 + v_y^2) + (u_y + v_x)^2 \} v_T = \{ -4(u_x \cdot v_y) + (u_y + v_x)^2 \} v_T$$

(5.28), (5.29)式中の波線部分は、前節で述べたように計算では省略した。Gはエネルギー生成項である。(5.28)-(5.32)式が解くべき式である。しかしながら、この式にはkとεに対する多項式項があって、この式のまま直接解くと、kやεが計算途中で負になることがあり、これらが一度負になると計算は発散する。この困難を解消するために、Kodama²⁵⁾は次に示すような指数表示式

$$k = \exp(m) , \quad \varepsilon = \exp(n) \quad (5.33)$$

を与えてkとεの正值性を保証し、kとεを解く代わりにmとnを解く方法を提案した。(5.33)式の関係とYoshizawaが示した関係である(5.19)式を考えると、 $m = \log(k)$ と $n = \log(\varepsilon)$ は、同じオーダーの方程式の解になっているのがわかるので、数値計算の精度の上で非常に有効な方法と思われる。

(5.33)式によって変数変換すると、 v_T およびその微分項、kおよびεの微分項は次のように書かれる。

$$v_T = C_\mu \exp(2m-n) ,$$

$$\frac{\partial v_T}{\partial y} = v_T \left(2 \frac{\partial m}{\partial y} - \frac{\partial n}{\partial y} \right) , \quad \frac{\partial k}{\partial y} = k \frac{\partial m}{\partial y} , \quad \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} = k \left\{ \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial m}{\partial y} \right)^2 \right\}$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} = k \frac{\partial m}{\partial t} , \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial n}{\partial t} \quad \text{etc.} \quad (5.34)$$

(5.33), (5.34)式を用いて支配方程式(5.28)-(5.32)式を変形し、さらにベクトル表示すると

$$q_t + \mathbf{L}q_x + \mathbf{M}q_y = \mathbf{H}(q_{xx} + q_{yy}) + \mathbf{S}q + \mathbf{T} + \mathbf{C} \quad (5.35)$$

のように表される。ここで未知数qは $q = [u, v, p, m, n]^T$ で、係数行列は付録-1に示した。この式に対して、物体適合座標(ξ, η)を導入して、3.2で行ったと同様の座標変換を施すと、(5.35)式は

$$q_t + \mathbf{A}q_\xi + \mathbf{B}q_\eta = \mathbf{H}(\hat{a}q_{\xi\xi} + \hat{b}q_{\xi\eta} + \hat{c}q_{\eta\eta} + \hat{d}q_\xi + \hat{e}q_\eta) - \omega_\xi q_{\xi\xi\xi\xi} - \omega_\eta q_{\eta\eta\eta\eta} + \mathbf{S}q + \mathbf{T} + \mathbf{C} \quad (5.36)$$

のようになる。やはり(4.1)式と同じく、数値安定性を得るために4階の人工粘性項を陰的に加えている。

この式に対して、時間微分に関してオイラーの陰解法を用いると

$$\begin{aligned} \Delta q^n + \Delta t \{ & \Delta(\mathbf{A}q_\xi)^n + \Delta(\mathbf{B}q_\eta)^n - \hat{a}\Delta(\mathbf{H}q_{\xi\xi})^n - \hat{b}\Delta(\mathbf{H}q_{\xi\eta})^n - \hat{c}\Delta(\mathbf{H}q_{\eta\eta})^n \\ & - \hat{d}\Delta(\mathbf{H}q_\xi)^n - \hat{e}\Delta(\mathbf{H}q_\eta)^n - \mathbf{S}\Delta q^n + \omega_\xi\Delta(q_{\xi\xi\xi\xi})^n + \omega_\eta\Delta(q_{\eta\eta\eta\eta})^n \\ & - \Delta\mathbf{T} \} = -\Delta t \{ \mathbf{A}q_\xi^n + \mathbf{B}q_\eta^n - \mathbf{H}(\hat{a}q_{\xi\xi}^n + \hat{b}q_{\xi\eta}^n + \hat{c}q_{\eta\eta}^n + \hat{d}q_\xi^n + \hat{e}q_\eta^n) \\ & - \mathbf{S}q^n - \mathbf{T} - \mathbf{C} + \omega_\xi q_{\xi\xi\xi\xi}^n + \omega_\eta q_{\eta\eta\eta\eta}^n \} \end{aligned} \quad (5.37)$$

のようになる。

次に非線形項を局所的に線形化する。このとき \mathbf{T} に関しては全て陽的に扱う。すなわち、 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} に関して、

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{A}q_\xi)^n & \doteq \Delta\mathbf{A}\cdot q_\xi^n + \mathbf{A}\cdot\Delta q_\xi^n = \hat{\mathbf{A}}\cdot\Delta q^n + \mathbf{A}\cdot\Delta q_\xi^n \\ \Delta(\mathbf{B}q_\eta)^n & \doteq \Delta\mathbf{B}\cdot q_\eta^n + \mathbf{B}\cdot\Delta q_\eta^n = \hat{\mathbf{B}}\cdot\Delta q^n + \mathbf{B}\cdot\Delta q_\eta^n \end{aligned} \quad (5.38)$$

ただし

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} au_\xi & cu_\xi & 0 & \underline{2akm_\xi/3} & 0 \\ av_\xi & cv_\xi & 0 & \underline{2ckm_\xi/3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ am_\xi & cm_\xi & 0 & 0 & 0 \\ an_\xi & cn_\xi & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} bu_\eta & du_\eta & 0 & \underline{2bkm_\eta/3} & 0 \\ bv_\eta & dv_\eta & 0 & \underline{2dkm_\eta/3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ bm_\eta & dm_\eta & 0 & 0 & 0 \\ bn_\eta & dn_\eta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

と変形している。ここで波線部は(5.24)式右辺第4項に対応する項で省略した。

\mathbf{H} に関しては

$$\Delta(\mathbf{H}q_{\xi\xi})^n \doteq \mathbf{H}\Delta q_{\xi\xi}^n \quad (5.40)$$

とする。乱流項 \mathbf{T} は、次のように変形される。

$$\Delta T = T_1 \Delta q + T_2 \Delta q_\xi + T_3 \Delta q_\eta \quad (5.41)$$

ここで、 T_1 , T_2 , T_3 は付録-1に示した。

以上より(5.34)式は

$$\begin{aligned} & \{1 + \Delta t(-S - T_1 + \hat{A} + A \frac{\partial}{\partial \xi} - T_2 \frac{\partial}{\partial \xi} - Hd \frac{\partial}{\partial \xi} - Ha \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \omega_\xi \frac{\partial^4}{\partial \xi^4}) \\ & + \Delta t(\hat{B} + B \frac{\partial}{\partial \eta} - T_3 \frac{\partial}{\partial \eta} - He \frac{\partial}{\partial \eta} - Hc \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \omega_\eta \frac{\partial^4}{\partial \eta^4})\} \cdot \Delta q^n \\ & = -\Delta t \{Aq_\xi^n + Bq_\eta^n - H(\hat{a}q_{\xi\xi}^n + \hat{b}q_{\xi\eta}^n + \hat{c}q_{\eta\eta}^n + \hat{d}q_\xi^n + \hat{e}q_\eta^n) - Sq^n \\ & - C - T + \omega_\xi q_{\xi\xi\xi\xi}^n + \omega_\eta q_{\eta\eta\eta\eta}^n\} + \Delta t Hb(\Delta q)_{\xi\eta}^{n-1} \end{aligned} \quad (5.42)$$

のように表される。ただし右辺最終項の交差微分項は陽的に表現した。

(5.42)式を近似因数分解すると、

$$\begin{aligned} & \{1 + \Delta t(-S - T_1 + \hat{A} + (A - T_2 - Hd) \frac{\partial}{\partial \xi} - Ha \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \omega_\xi \frac{\partial^4}{\partial \xi^4})\} \\ & \{1 + \Delta t(\hat{B} + (B - T_3 - He) \frac{\partial}{\partial \eta} - Hc \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \omega_\eta \frac{\partial^4}{\partial \eta^4})\} \cdot \Delta q^n \\ & = -\Delta t \{Aq_\xi^n + Bq_\eta^n - H(\hat{a}q_{\xi\xi}^n + \hat{b}q_{\xi\eta}^n + \hat{c}q_{\eta\eta}^n + \hat{d}q_\xi^n + \hat{e}q_\eta^n) - Sq^n \\ & - C - T + \omega_\xi q_{\xi\xi\xi\xi}^n + \omega_\eta q_{\eta\eta\eta\eta}^n\} + \Delta t Hb(\Delta q)_{\xi\eta}^{n-1} \end{aligned} \quad (5.43)$$

のように表される。

空間差分には(4.5)式で示した5点差分を用いて離散化する。このようにして最終的に離散化された式は、 ξ -スイープ、 η -スイープそれぞれ次のようになる。

ξ -sweep

$$\begin{aligned} & J_{ij} \Delta q_{i-2,j}^* + K_{ij} \Delta q_{i-1,j}^* + L_{ij} \Delta q_{i,j}^* + M_{ij} \Delta q_{i+1,j}^* + N_{ij} \Delta q_{i+2,j}^* = f_{ij} \\ & J_{ij} = \frac{1}{12} [A - T_2 + H(\hat{a} - \hat{d}) + 12\omega_\xi I] \cdot \Delta t \\ & K_{ij} = -\frac{2}{3} [A - T_2 + H(2\hat{a} - \hat{d}) + 6\omega_\xi I] \cdot \Delta t \\ & L_{ij} = I + [-S - T_1 + \hat{A} + \frac{5}{2}Ha + 6\omega_\xi I] \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \frac{2}{3}[\mathbf{A} - \mathbf{T}_2 - \mathbf{H}(2\hat{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{d}}) - 6\omega_\xi \mathbf{I}] \cdot \Delta t$$

$$\mathbf{N}_{ij} = -\frac{1}{12}[\mathbf{A} - \mathbf{T}_2 - \mathbf{H}(\hat{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{d}}) - 12\omega_\xi \mathbf{I}] \cdot \Delta t$$

$$\mathbf{f}_{ij} = -\Delta t \{ \mathbf{A} \mathbf{q}_\xi^n + \mathbf{B} \mathbf{q}_\eta^n - \mathbf{H}(\hat{\mathbf{a}} \mathbf{q}_{\xi\xi}^n + \hat{\mathbf{b}} \mathbf{q}_{\xi\eta}^n + \hat{\mathbf{c}} \mathbf{q}_{\eta\eta}^n + \hat{\mathbf{d}} \mathbf{q}_\xi^n + \hat{\mathbf{e}} \mathbf{q}_\eta^n) - \mathbf{S} \mathbf{q}^n - \mathbf{C} - \mathbf{T} + \omega_\xi \mathbf{q}_{\xi\xi\xi\xi}^n + \omega_\eta \mathbf{q}_{\eta\eta\eta\eta}^n \} + \Delta t \mathbf{H} \mathbf{b} (\Delta \mathbf{q})_{\xi\eta}^{n-1}$$

η -sweep

$$\mathbf{J}_{ij} \Delta \mathbf{q}_{i,j-2} + \mathbf{K}_{ij} \Delta \mathbf{q}_{i,j-1} + \mathbf{L}_{ij} \Delta \mathbf{q}_{i,j} + \mathbf{M}_{ij} \Delta \mathbf{q}_{i,j+1} + \mathbf{N}_{ij} \Delta \mathbf{q}_{i,j+2} = \Delta \mathbf{q}_{ij}^*$$

$$\mathbf{J}_{ij} = \frac{1}{12}[\mathbf{B} - \mathbf{T}_3 + \mathbf{H}(\hat{\mathbf{c}} - \hat{\mathbf{e}}) + 12\omega_\eta \mathbf{I}] \cdot \Delta t$$

$$\mathbf{K}_{ij} = -\frac{2}{3}[\mathbf{B} - \mathbf{T}_3 + \mathbf{H}(2\hat{\mathbf{c}} - \hat{\mathbf{e}}) + 6\omega_\eta \mathbf{I}] \cdot \Delta t$$

$$\mathbf{L}_{ij} = \mathbf{I} + [\quad \quad \quad \hat{\mathbf{B}} + \frac{5}{2} \hat{\mathbf{H}} \mathbf{c} + 6\omega_\eta \mathbf{I}] \cdot \Delta t$$

(5.45)

$$\mathbf{M}_{ij} = \frac{2}{3}[\mathbf{B} - \mathbf{T}_3 - \mathbf{H}(2\hat{\mathbf{c}} + \hat{\mathbf{e}}) - 6\omega_\eta \mathbf{I}] \cdot \Delta t$$

$$\mathbf{N}_{ij} = -\frac{1}{12}[\mathbf{B} - \mathbf{T}_3 - \mathbf{H}(\hat{\mathbf{c}} + \hat{\mathbf{e}}) - 12\omega_\eta \mathbf{I}] \cdot \Delta t$$

これを、適当な境界条件のもとで解くと解が求まる。この計算を適当な初期値から出発して収束するまで繰り返す。

5.4 平行平板間流れの流場制御の計算

5.4.1 定式化

まず始めに、ここで用いたモデル方程式の妥当性を調べるために、平行平板間流れを解いた。そのときの座標系をFig. 5-1に示した。また、磁場による k と ε の吸収項の係数 C_a, C_b は、先に示したKitamuraらが提案した値を用いた。

平行平板間流れでは、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \text{given}, \quad v = 0 \quad (5.46)$$

のような関係が成り立つので、未知数は u, k, ε だけになる。また方程式は y 方向 (η 方向) のみの式に縮退して、(5.36)式は

$$q_t + (d\mathbf{E} - \hat{e}\mathbf{H})q_\eta = \hat{c}\mathbf{H}q_{\eta\eta} + \mathbf{M}q + \mathbf{T} + \mathbf{C} - \omega_\eta q_{\eta\eta\eta\eta} \quad (5.47)$$

のようになる。ここで、次の座標変換を用いている。

$$\partial_Y = (1/y_\eta) \partial_\eta \equiv d\partial_\eta, \quad \partial_{YY} = (1/y_\eta^2) \partial_{\eta\eta} - (y_{\eta\eta}/y_\eta^3) \partial_\eta \equiv \hat{c}\partial_{\eta\eta} + \hat{e}\partial_\eta \quad (5.48)$$

また、係数行列は

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial v_T}{\partial Y} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sigma_k} \frac{\partial v_T}{\partial Y} - \frac{v_T}{\sigma_k} \frac{\partial m}{\partial Y} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sigma_k} \frac{\partial v_T}{\partial Y} - \frac{v_T}{\sigma_k} \frac{\partial m}{\partial Y} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} v_T & 0 & 0 \\ 0 & v_T/\sigma_k & 0 \\ 0 & 0 & v_T/\sigma_\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ \exp(-m) \cdot G - \exp(n-m) \\ C_1 \exp(-m) \cdot G - C_2 \exp(n-m) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -Ha^2 B^2 / Re & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -\partial p / \partial x - Ha^2 B^2 / Re \\ -(4/3) Ca \cdot Ha^2 B^2 / Re \\ -(4/3) Cb \cdot Ha^2 B^2 / Re \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

のようになる。時間に関してオイラーの陰的差分を施すと

$$\Delta q_\eta^n + \Delta t [\Delta (d\mathbf{E} - \hat{e}\mathbf{H}) q_\eta^n + (d\mathbf{E} - \hat{e}\mathbf{H}) \Delta q_\eta^n - \Delta (\hat{c}\mathbf{H}) q_{\eta\eta}^n - (\hat{c}\mathbf{H}) \Delta q_{\eta\eta}^n \\ - \mathbf{M} \Delta q_\eta^n - \Delta \mathbf{T} + \omega_\eta \Delta q_{\eta\eta\eta\eta}^n] = -\Delta t [(d\mathbf{E} - \hat{e}\mathbf{H}) q_\eta^n - \hat{c}\mathbf{H} q_{\eta\eta}^n - \mathbf{M} q_\eta^n \\ - \mathbf{T} - \mathbf{C} + \omega_\eta q_{\eta\eta\eta\eta}^n] \quad (5.50)$$

となる。線形化は、前節と同様に乱流項 \mathbf{T} のみ部分的に陰的に扱って、

$$\Delta(\hat{dE} - \hat{eH}) = \Delta(\hat{cH}) = 0 \quad (5.51)$$

$$\Delta \mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \Delta q^n + \mathbf{T}_2 \Delta q_\eta^n \quad (5.52)$$

とする。ただし、 \mathbf{T}_1 、 \mathbf{T}_2 は

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_\mu d^2 u_\eta^2 e^{m-n} + e^{n-m} & -C_\mu d^2 u_\eta^2 e^{m-n} - e^{n-m} \\ 0 & C_1 C_\mu d^2 u_\eta^2 e^{m-n} + C_2 e^{n-m} & -C_1 C_\mu d^2 u_\eta^2 e^{m-n} - C_2 e^{n-m} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2C_\mu d^2 u_\eta e^{m-n} & 0 & 0 \\ 2C_1 C_\mu d^2 u_\eta e^{m-n} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.53)$$

これより (5.50) 式は、

$$\begin{aligned} & \{ \mathbf{I} + \Delta t [-(\mathbf{T}_1 + \mathbf{M}) + (\hat{dE} - \hat{eH} - \mathbf{T}_2) \frac{\partial}{\partial \eta} - (\hat{cH}) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \omega_\eta \frac{\partial^4}{\partial \eta^4}] \} \Delta q^n \\ & = -\Delta t [(\hat{dE} - \hat{eH}) q_\eta^n - \hat{cH} q_{\eta\eta}^n - \mathbf{M} q^n - \mathbf{T} - \mathbf{C} + \omega_\eta q_{\eta\eta\eta\eta}^n] \end{aligned} \quad (5.54)$$

これを5点中央空間差分を用いて離散化すると、最終的に

$$\mathbf{J}_j \Delta q_{j-2}^n + \mathbf{K}_j \Delta q_{j-1}^n + \mathbf{L}_j \Delta q_j^n + \mathbf{M}_j \Delta q_{j+1}^n + \mathbf{N}_j \Delta q_{j+2}^n = \text{RHS of eq. (5.54)} \quad (5.55)$$

となる。これを解が収束するまで繰り返して解く。

5.4.2 計算領域と境界条件

Fig. 5-2に計算領域を示した。壁から2点、平行平板間中央2点は境界条件によ

って与えられ、それ以外の点が計算点である。境界条件は平板間中央部では対称条件を、壁での境界条件は、流速分布に対しては対数則

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B, \quad \kappa=0.41, \quad B = 5.5 \quad (5.56)$$

$$u^+ = u/u_\tau, \quad y^+ = \text{Re} \cdot y \cdot u_\tau$$

を、 κ 及び ε に対しては乱流の局所平衡条件から導かれる次の関係式²⁶⁾

$$\kappa = u_\tau^2 / \sqrt{C_\mu}, \quad \varepsilon = u_\tau^3 / (\kappa y) \quad (5.57)$$

を用いた。対数則は簡単のために、圧力勾配の影響を考慮していない式を用いた。ここで u_τ は $(\tau_w/\rho)^{1/2}/U$ で定義される無次元化した摩擦速度である。

(5.56), (5.57)式を用いると、壁付近の Δu , Δm , Δn はそれぞれ

$$\Delta u = \left\{ \frac{1}{\kappa} \ln(\text{Re} \cdot y \cdot u_\tau) + B + \frac{1}{\kappa} \right\} \Delta u_\tau, \quad \Delta m = \frac{2}{u_\tau} \Delta u_\tau, \quad \Delta n = \frac{3}{u_\tau} \Delta u_\tau \quad (5.58)$$

と書ける。(5.58)式より、(5.55)式で得られる係数行列は閉じられる。

計算の手順は次の通りである。

- (1) 初期値 u_τ と (u, κ, ε) を与える。
- (2) (5.57), (5.58)式と平板間中央部対称条件を用いて Δq を解く。
- (3) 計算で得られた $j=3$ での流速 u_3 から、対数則(5.56)を逆に解いて u_τ を求める。その後、(2)に戻る。

この手順を解が収束するまで繰り返す。

5.4.3 平行平板間流れの計算

計算に用いた格子は、壁での最小格子間隔が0.003で、壁付近で等比数列的に密集させた。平板間の半幅は1.0である。まず、計算手法の妥当性を調べるために、Brouillette¹⁴⁾らの実験と同じ条件の流れを計算した。Brouilletteらの実験では、平均流速を代表速度、水力直径を代表長さとして、レイノルズ数が 1.8×10^5 であり、計算でもこれと同じとした。ここで水力直径とは、 $2a \times 2b$ の矩型断面をもつ水路では $4ab/(a+b)$ で定義される (Fig. 3-2参照)。従って、数値計算を行った平行平板間流れでは、 b を無限大と考えると、その水力直径は $4a$ となる。 Brouill

etteらの実験は、絶縁体で囲まれた長方形流路に、直交磁場を印加したところに伝導流体を流している。従って、流れと磁場に直交するように生じる電場の強さは、ハルトマンの条件で決定される。数値計算では、単位長さ当りの水路内で誘導される電流の総電流量が0となるように、計算の各時間ステップで電場強さを逐一更新して与えた。圧力勾配は平均流速が1になるように決定した。

Fig. 5-3に今回の計算で得られた流速分布と、Brouilletteらの実験結果の比較を示した。図では対数則で表示している。実験結果と今回の計算結果との一致は非常に良い。印加磁場強さが大きくなるにつれて壁面付近の流速は増加し、壁から離れたところでは、ハルトマン効果によって減速している様子がよくシミュレートされている。図で示した $Ha=184$ は、海水が幅50cmの平行平板間の水路を流れるときを想定したとき3 tesla程度、幅5cmの水路を想定すると30tesla程度になることから、非常に大きな磁場強さに対応していることがわかる。従ってこの範囲で実験結果をよく表していれば、今回の計算法の妥当性を示すのに十分と考えられる。

次に乱流平行平板間流れと電磁場との関係を調べる。これより以下では第3章のハルトマン流れと同じく、電磁場がないときの平板間中央部の流速を代表速度に、平板間半幅を代表長さにとって、 Re は 2.75×10^5 とした。また圧力勾配は -1.33×10^{-3} で一定とした。まず磁場の影響を見るために $E=0$ として、 $Ha^2/Re=0, 1 \times 10^{-4}, 5 \times 10^{-4}, 1 \times 10^{-3}, 5 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-2}$ の各状態を計算した。これらの磁場強さは、平板間の半幅を0.1mとするとそれぞれ、0, 0.83, 1.86, 2.62, 5.87, 8.30tesla程度に対応する。Fig. 5-4(a), (b), (c), (d), (e), (f)にその結果を順に示した。図中の $u_0, k_0, \varepsilon_0, \nu_{T0}$ は、すべて電磁力を印加していないときの、 u, k, ε, ν_T の最大値である。Fig. 5-4(a)には電磁場が印加されていないときの実験値²⁷⁾も示した。電磁場が印加されていないとき、実験値と計算値の一致は非常によい。磁場を印加していくと、ハルトマン効果による流速の減速と、磁場影響による k と ε の減衰が計算されている。磁場強さを増して行くと、 ν_T が減少し層流化されて行く様子がわかる。

これらの結果より得られた壁面摩擦抵抗係数、電磁力の反作用による抵抗と磁場の関係をFig. 5-5に、また流量と磁場強さの関係をFig. 5-6に示した。磁場強さの増加とともに、摩擦抵抗は減少し電磁力による抵抗は増加している。しかしそ

の和は一定で、圧力勾配による抵抗と釣り合っている。これらは理論的には釣り合うことから、正しく計算されているのがわかる。流量は磁場の増加にともなって非線形的に減少している。

次に電場との関係を見る。Fig. 5-7(a), (b), (c), (d)には、 $Ha^2/Re = 1.0 \times 10^{-4}$ 、 $dp/dx = -1.33 \times 10^{-3}$ で、 E がそれぞれ-10, -5, 5, 10と変化させたときの結果である。負の電場を印加すると、電磁力は流れを加速する方向に働くために、流速は大きくなっている。このため、とくに壁付近で速度勾配が大きくなる。この結果、(5.25), (5.26)式中の乱動エネルギー生成項が大きくなり、磁場の乱動抑制効果をしのぐようになる。このため k と ε は、通常の乱流場の際の結果に比べて大きくなり、 ν_T も大きくなっている。電場の方向を逆転させると電磁力は流れを抑制する方向に働くので生成項の大きさは小さくなり、 k 、 ε ともに小さくなる。

以上の結果より、電場強さと摩擦抵抗係数及び流量の関係を調べた。Fig. 5-8には電場強さと摩擦抵抗及び電磁力の反作用による抵抗の関係を、Fig. 5-9には電場と流量の関係を示した。電場強さの変化と摩擦抵抗及び電磁力による抵抗の変化は線形的である。また、それらの和は一定で、圧力勾配による抵抗と釣り合っており、合理的な結果となっている。流量は電場の増加に対してわずかに非線形的に変化している。層流状態ではハルトマンの流れに対応し、このとき電場と流量は線形的に変化する。

5. 5 翼型周り流れの流場制御の計算

流れの中に物体が置かれたとき、物体形状によっては物体表面上に流れの剝離点や付着点が存在する場合がある。剝離点や付着点付近では、壁面近傍の流速が非常に小さくなり、壁面摩擦速度が小さくなる。このとき、壁面での境界条件として5.4.2で示したような、単に対数則と局所平衡の仮定を用いる方法では、(5.58)式からわかるように Δm や Δn が非常に大きな値となって、 m 、 n に対する予測の仕方が不適切となる。特に剝離点や付着点を越えるときは、両側で速度の符号が逆転するために、 Δm と Δn は近接した2点でそれぞれ異符号の非常に大きな値を与えられることになる。このために解かれた k と ε は、不連続的に変化する可能性が生じ、解を発散させる要因となる。そこでこのような困難を克服するために新しい境界条件の取扱いを考えることにする。

5.5.1 一般の二次元流れに対するk-ε方程式の境界条件²⁹⁾

剥離点や付着点付近では壁面近傍の流速が小さく、摩擦速度も小さくなる。このため、(5.56)式で定義される壁からの無次元距離 y^+ は、幾何学的に同じ距離であっても、剥離点などの近傍ではより小さい値をとる。このことから、剥離点近傍の流速分布は、通常境界層の内層付近と同じ形の分布になるものと考えて良いであろう。つまり、壁面に沿った境界層速度分布形状の変化は、 y^+ が大略30以上の対数則に従う領域から y^+ が5以下の内層領域まで、滑らかに接続された速度分布式を用いれば表現できる。また k と ε は y^+ が大きいときは局所平衡の仮定を、 y^+ が小さいときは内層領域で成り立つ条件式を使い分け、かつ両者が遷移層で滑らかに変化するような表式を用いればよい。

具体的に流速、 k 、及び ε について、本論で用いた境界条件について詳述する。まず流速について述べる。これよりしばらくは u は壁面接線方向速度を表すものとし、また壁面法線方向速度成分は物体近傍で0とみなす。Spaldingは、遷移領域から内層領域まで滑らかに接続された u^+ と y^+ の関係式

$$y^+ = u^+ + e^{-kB} \left\{ e^{ku^+} - 1 - ku^+ - \frac{(ku^+)^2}{2} - \frac{(ku^+)^3}{6} \right\} \quad (5.59)$$

を与えた。この式は、境界層内速度分布を、遷移層から内層にかけて非常に良く表現した式として知られている。そこで本研究では、この式を用いることにする。ただし、(5.59)式は y^+ が十分大きくなったとき対数則に漸近する表示式であるため、有限な y^+ では、対数則によって得られる u^+ と (5.59)式で与えられる u^+ は異なった値となる。十分発達した乱流状態では流場は対数則を満たすので、本研究では、次のように y^+ の大きさによって場合分けを行った。

まず、 y^+ が30以下のときは(5.59)式による表示式を用いる。このとき u と y が与えられると、(5.59)式からニュートン法を用いて u_τ が計算される。逆に u_τ と y が与えられると u が計算される。

Δu は、(5.59)式を

$$F(u, u_\tau) = y^+ - u^+ - e^{-kB} \left\{ e^{ku^+} - 1 - ku^+ - \frac{(ku^+)^2}{2} - \frac{(ku^+)^3}{6} \right\} = 0 \quad (5.60)$$

のように変形した後、(5.60)式を陰関数微分すると

$$\Delta u = - \frac{\partial F / \partial u_{\tau}}{\partial F / \partial u} \Delta u_{\tau} \equiv A_j(u_j, y_j, u_{\tau}) \Delta u_{\tau}, \quad j=2,3,4 \quad (5.61)$$

のように書ける。ここで j は壁面からの計算点の位置を表し、 $j=2,3$ は壁面近傍の2点で境界条件によって決定される点、 $j=4$ は壁面より3点目で、これより計算領域となる。なお、 $j=1$ は壁面上の点である。(5.61)式から Δu_{τ} を消去すると、 Δu に対する境界条件式

$$\Delta u_j = \frac{A_j}{A_4} \Delta u_4, \quad j=2,3 \quad (5.62)$$

が得られる。

一方、 y^+ が60以上のときは、5.4.2で示した対数則

$$\frac{u}{u_{\tau}} = \frac{1}{\kappa} \ln(\text{Re} \cdot y \cdot u_{\tau}) + B, \quad \kappa=0.41, \quad B=5.5 \quad (5.63)$$

$$\Delta u_j = \frac{B_j}{B_4} \Delta u_4, \quad B_j = \frac{1}{\kappa} \ln(\text{Re} \cdot y_j \cdot u_{\tau}) + B + \frac{1}{\kappa}, \quad j=2,3$$

を用いる。 y^+ が30から60の間は、Spaldingの式による値と対数則による値を余弦関数を用いて滑らかに接続した。すなわち

$$u = u_S(y^+) + \{u_L(y^+) - u_S(y^+)\} \{1 - \cos(\frac{y^+ - 30}{30} \pi)\} / 2 \quad (5.64)$$

と表した。

ここに示した条件は、物体表面上での滑りなしの条件を厳密に満たしていない。このため、例えば翼前縁付近のように、非常に大きい負の圧力勾配が存在するような所では、流速が急激に大きくなり解を発散させる恐れがある。そこで便宜的に壁面近傍の流速が一様流の1.5倍以上になったときは

$$\Delta u_3 = \frac{2}{3} \Delta u_4, \quad \Delta u_2 = \frac{1}{3} \Delta u_4 \quad (5.65)$$

として滑りなしの条件を与えた。この条件も(5.64)式にならって、壁面近傍流速が1.2倍以上から1.5倍以下の範囲を、対数則による条件と滑りなしの条件が余弦関数によって滑らかに接続されるようにした。

上記に示した境界条件の場合分けには壁面より2点目の格子点での y^+ を用いた。

以上の議論は壁面接線方向速度成分について述べたものであるが、接線速度を x, y 方向に射影したものが u, v となるので、 u, v に対しても今まで述べてきた形がそのまま利用できる。

次に k と ε に対する境界条件について述べる。まず対数則速度分布と粘性底層速度分布との交差点、すなわち $y^+ = 10.8$ より y^+ が小さいときは、内層における条件式

$$k = \alpha y^2 \quad \alpha = \text{const.}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0 \quad (5.66)$$

を用いた。ただし連立方程式を閉じさせるための境界条件は、

$$\Delta m = \Delta n = 0 \quad (5.67)$$

のように簡単に扱い、(5.66)式は、方程式を解いた後の各点での値を決定するときの条件とした。 y^+ が30より大きいときは局所平衡の仮定

$$k = u_\tau^2 / \sqrt{C_\mu}, \quad \varepsilon = u_\tau^3 / (\kappa y) \quad (5.68)$$

$$\Delta u = \left\{ \frac{1}{\kappa} \ln(\text{Re} \cdot y \cdot u_\tau) + B + \frac{1}{\kappa} \right\} \Delta u_\tau, \quad \Delta m = \frac{2}{u_\tau} \Delta u_\tau, \quad \Delta n = \frac{3}{u_\tau} \Delta u_\tau$$

を用いた。 y^+ が10.8と30の間にあるときは(5.64)式にならって、2つの条件を滑らかに接続した。

(5.68)式は Δm , Δn が Δu_τ で関係づけられている。さらに Δu_τ は接線方向の速度の増分と関係づけられている。そこで一般の二次元流では、次のように変形した。すなわち、(5.68)式を

$$\Delta m_x(j) = A_j x_t \Delta u_4, \quad \Delta m_y(j) = A_j y_t \Delta v_4, \quad j = 2, 3$$

$$A_j = 1 / \left\{ \frac{1}{\kappa} \ln(\text{Re} \cdot y_j \cdot u_\tau) + B + \frac{1}{\kappa} \right\} \quad (5.69)$$

のように書いて、 Δm の境界条件を Δu と Δv に関連付けて解いた。ただし、 x_t と y_t は壁面の接線ベクトルである。

5.5.2 近似因数分解法におけるスweepについて

$k-\varepsilon$ 法による翼型周りの計算領域をFig. 5-10に示す。壁面境界条件に対数則などを用いているため、 η 方向のスweepのときは翼表面付近の2点は計算領域から外れるため、ここでの Δq は計算されない。このため、方程式に含まれる Δq の微分は翼表面近傍では片側差分をとった。 ξ 方向のスweepでは翼近傍の2点も計算領域とした。これは、翼後縁で連立方程式を閉じさせるとき、そこでの適切な境界条件が与えられないからである。その他は第4章で述べた方法と同じである。

5.6 $k-\varepsilon$ 法による翼型周り流場の計算結果の評価

上記の手法を用いて、NACA0012翼型の迎角5度、レイノルズ数が 10^6 における流場を計算した。 Δt は0.002とし、4階人工粘性係数は20とした。レイノルズ数が高いため、翼表面近傍の η 方向の格子の最小間隔は0.0002とした。収束判定条件は、 $\Delta u_{\max}/u_{\max}=1.0^{-4}$ とした。計算時間は、sun3/110(FPA装備)を用いて一回の繰り返し計算に約2分、1300回程度の繰り返し計算で収束した。Fig. 5-11に翼表面に沿う圧力分布を示した。この図には、同じ状態を、Baldwin-Lomaxの0方程式モデルを用いて児玉が計算した結果¹³⁾も示した。両者を比較すると、全体的な傾向はあっているが、翼前縁での負圧のピークが $k-\varepsilon$ モデルによる方が鈍くなっており、また翼正面で負圧域が大きくなっている。この理由の一つに、0方程式モデルでは層流と乱流の遷移判定がなされており、翼前縁付近は層流状態で計算されているのに対し、 $k-\varepsilon$ モデルでは全域で乱流状態として計算されていることが考えられる。4階人工粘性係数は児玉の計算では5としているが、今回の計算では20とかなり大きくとった。この差の解に与える影響も考えられるので、平行平板間流れの計算でこの係数を5と20にして計算した。そのとき流速と摩擦係数の結果は1.6%程度の差があった程度で、係数値の差は大きく解に影響を及ぼさないことを確かめた。このことから、Fig. 5-11に示した今回の結果と0方程式モデルの結果の差は、やはり乱流遷移の影響が大きいと思われる。

$k-\varepsilon$ 法で得られた渦粘性係数を、Cebeci-Smithが提案した渦粘性係数の実験式による値と比較した。結果をFig. 5-12に示す。Cebeci-Smithのモデルは、薄い境界層では実験値を良く表しているモデルとして知られている。Cebeci-Smithのモデルでは境界層厚さを与える必要がある。ここでは簡単のため、翼表面から η 軸に沿って離れて行ったとき、最初の流速極大値点を境界層外端とした。図には翼両面について、それぞれ翼後縁から31.1%翼弦長前方、及び78.3%翼弦長前方の位置での結果を示した。渦粘性の分布域は、 $k-\varepsilon$ 法で計算した方が翼表面に集中し、壁面から離れたところでは $k-\varepsilon$ 法による結果は0方程式による結果より小さい。しかし、渦粘性係数のピークは両者で非常に良くあっている。

計算された圧力と摩擦力を積分して、揚力係数と抗力係数を計算した。まず揚力係数について示す。 $k-\varepsilon$ 法により得られた揚力係数は0.416であった。兎玉による0方程式モデルの結果は0.500、またAbbottらの実験値³⁰⁾では0.57であるから、今回の方法は実験値の73%程度しか推定されていない。これは、先に述べたように、翼全域で乱流状態として計算しているために、負圧のピークが十分鋭く捉えられていないことや、翼正面の負圧域が大きく計算されているからである。次に翼抗力について示す。本計算で得られた翼抗力係数は0.039、0方程式モデルでは0.015、実験値では0.008であった。本計算による翼抗力係数は、迎角5度の状態では、摩擦力による成分と圧力による成分とはほぼ同じ値であった。今回の計算は翼周り全域の流場で乱流としているため、0方程式の結果に比べ摩擦力が大きく評価されているものと考えられる。また圧力分布も両者で異なっており、これらが0方程式モデルによる結果との差になっている。 $k-\varepsilon$ モデルに乱流遷移の影響を考慮することは今後の重要な課題であり、また精度の良い揚抗力の推定には不可避の問題である。また、本論で用いた速度の境界条件には圧力勾配の影響は考慮されていない。このような条件を用いて、翼前縁付近のような急激な圧力変化が存在する流場を解いたとき、どの程度影響があるのかわからない。翼表面での境界条件の改良も今後の課題である。

以上、本方法によって得られた結果の特徴について調べた。本方法では、力の推定には精度上の問題が残されていることがわかった。しかし、本論文の目的である、電磁力によって流場がどのように制御されるかを調べるには、本手法でも十分達せられると判断した。次節に電磁力を作用させたときの、乱流場の翼型周り

の結果について述べる。

5.7 電磁力による翼型周り乱流場の流場制御の計算³¹⁾

翼型周りの乱流場の、電磁力による流場制御の計算を行った。迎角は10度とした。計算に使用した格子をFig. 5-13に示した。印加磁場は第4章で示した磁極位置と全く同様の配置で計算した。電場の印加領域は、やはり第4章と同じく翼背面に限り、 $72 \leq \xi \leq 107$ 、 $1 \leq \eta \leq 25$ で囲まれる範囲とした。ただし第4章では η の範囲を20までとしたが、この章の計算では、使用する座標が η 方向に強く密集させてあるため25とした。

無次元磁場強さ Ha は126.4の一定とした。これは $Re=10^6$ のとき、一様流が1 m/s、翼弦長が1 mとしたとき、2 tesla程度に対応する。無次元電場強さは-200, -400, -600それに-800とした。このとき電磁力項 $(E+u \times B) \times B \times Ha^2 / Re$ のオーダーは最大値で0(10)程度になる。また無次元電場強さが-100は、上記の状態では-200 V/m程度となる。以下に結果を示す。

Fig. 5-14(a), (b)には、電磁力が作用していないときの流速分布と圧力分布を示す。流れの剥離は生じていない。Fig. 5-15(a), (b)からFig. 5-18(a), (b)に、それぞれ E を-200から-800まで変化させたときの、流速分布と圧力分布を示した。大きな電磁場を印加したとき、翼後縁から流体がジェット状に吹き出ている様子がよくわかる。圧力分布を見ると、前縁付近で負圧が大きくなっているのがわかる。この様子は翼表面に沿う圧力分布をみればわかりやすい。そこで、Fig. 5-19(a)に電磁場がないとき、Fig. 5-19(b), (c), (d), (e)にそれぞれ、 E が-200, -400, -600, -800のときの翼表面圧力分布を示した。電磁力が流体を翼後縁部に引き込むために翼背面で負圧域が大きくなっており、電磁力が作用している箇所に圧力の不連続がみられる。また翼正面側の正圧力も少し大きくなっている。これらの傾向は層流状態のときと同じである。

電磁力の印加によって、翼表面摩擦応力係数がどのような変化をするかを示したのがFig. 5-20である。翼正面側は、電磁力が印加されていないので摩擦応力係数はほとんど変化しない。しかし、翼背面側は、電磁力が印加されている領域で摩擦力が増加しているのがわかる。これは、電磁力によって流体が翼後縁側に引き込まれているためである。摩擦応力は、印加電磁力の強さが大きくなるに従い大

きくなっている。

計算結果を積分して揚力と抗力を計算した。Fig. 5-21に揚力係数と印加電場強さの関係を示した。摩擦力による揚力係数成分は非常に小さいことが乱流の場合でもいえる。印加電場の強さを大きくして行くと、揚力が大きくなることが示されている。ここで、電場強さが-600付近から揚力の増え方が鈍くなっているのは、4.4.2で述べたように、電磁力の影響が支配方程式の非線形項である対流項に大きく作用しているためと思われる。しかし層流状態で示されたような大きな揚力の利得は得られず、外部乱流場を電磁力によって制御することの困難さが理解される。ただ $Re=10^4$ の層流状態では、電磁場が印加されていないときは翼背面で流れの剥離が生じており、これが電磁力の印加により消滅するという流場の大きな変化があった。乱流状態では、電磁力が印加されていないときでも流れの剥離が生じていないために、層流状態ほど大きな電磁力の流場に与える影響を示すことはできなかった。

次に、抗力について述べる。Fig. 5-22に抗力係数と印加電場強さの関係を示した。電場強さを大きくすると、流体が翼後縁に引っ張られるために、摩擦力による抗力が増加している。しかし、圧力による抗力が電場強さの増加にともなって減少しており、圧力と摩擦力による抗力の和は、電場強さの変化に関係なくほぼ一定である。このことは層流状態のときにも見られた傾向である。電磁力による力は推力として働いているため、全体としての翼抗力は電場強さの増加とともに減少し、 $E=-800$ ではほぼ0に近くなっている。

最後に電磁力による流場制御の容易さ、困難さについて考察する。電磁力による流場制御の容易さ、困難さは、流体の運動方程式における電磁力項の他の項への寄与で決まる。 $Re=200$ の層流の場合、電磁力の印加に対して圧力場は大きく変化しているが流場はそれほど大きな変化をしていない。これは、粘性力が大きいために、電磁力は主として圧力勾配項に影響を及ぼしたためと考えられる。一方、 $Re=10^4$ の場合は、翼背面で流れが剥離しているために流速と電磁力の向きが逆であることや、剥離域では粘性項と対流項の寄与があまり大きくないことなどから、電磁力によって流速分布に大きな変化をもたらしたものと考えられる。乱流の場合は境界層が薄く、壁面から少し離れると対流項が十分大きな割合を占めるようになり、壁付近ではレイノルズ応力勾配項（(5.24)式右辺第三項）は電磁力項と

比べて同程度となる。換言すれば、壁から離れたところでは流体は大きな運動量を持ち、壁から近いところでは壁面の粘着条件による強い束縛を受ける。このような理由で乱流状態では、流場の制御が困難であったと考えられる。このことは、層流の場合でも剥離が消滅した後は、流場の変化の度合いが減少したことに対応すると思われる。しかし乱流状態でも剥離が生じていれば、そこでは対流項とレイノルズ応力による寄与は小さくなると考えられるので、電磁力によって大きな流場の変化が生じると期待される。

5.8 第5章の結論

この章では、乱流場の電磁力による流場制御の数値シミュレーションを行うために、電磁力の影響を含んだ $k-\varepsilon$ 方程式を導いた。 $k-\varepsilon$ 方程式では、電磁場が速度場を抑制するハルトマン効果と、磁場が乱れを吸収する効果を分離して扱うことができるので、電磁場の乱流場に及ぼす影響をより細かく解析できると考えられる。一方、取り扱いの簡単な Ω 方程式モデルは、乱流の特徴を表す渦動粘性係数が速度分布と結び付けられているため、乱流の情報は速度場を通してのみ得られるだけであり、 $k-\varepsilon$ 方程式に比べて汎用性は少ない。

本論で導いた式を評価するため、簡単な平行平板間流れについて計算し、実験結果と比較したところ、良い一致を得た。そこで、一般の二次元乱流場にも適用出来るように境界条件を整備して、電磁力による二次元翼型周りの乱流場の流場制御シミュレーションを行った。その結果、 $k-\varepsilon$ 法によって翼型周りの乱流場を計算することは、揚抗力の推定精度に問題が残されているものの、電磁力の作用で翼背面の圧力が低下することや、電磁力の印加領域で摩擦応力が大きくなることを示した。この結果、揚力は増加し、全体としての翼抗力が減少することを示した。ただし、層流状態のときに得られたほど大きな揚力の増加は得られず、電磁力を利用して乱流場を制御することは層流場の制御に比べて困難であることがわかった。

第6章 結論

本研究は、電磁力の流場制御に対する応用について、その可能性、及び印加された電磁力と流れの変化の様子などを、CFD技術を利用しつつ、明らかにしたものである。以下に得られた結論を示す。

- 1) 海水のように電気伝導度が小さい流体が、印加電磁場中を運動するときの流体の運動方程式を導いた。このとき、誘導磁場は印加される磁場に比べて無視できるために、定常問題では磁場は静磁場として扱うことができ、問題が非常に単純化される。さらに二次元問題では電場についてもあらかじめ与えておくことができるので、最終的には速度と圧力のみが未知数となり、これについて解けばよいことを示した。
- 2) まず始めにレイノルズ数が 10^2 程度の流場を、内部流と外部流の二つの場合を取り上げ、それぞれ電磁力によって流場制御したときのシミュレーションを行い、結果を考察をした。その結果、拡大管流れのように流場全体に大きな磁場を印加することが可能で、流場自身が空間的に制限されているような場合は、海水のように電気伝導度が非常に小さい流体でも、磁場のみの印加や電磁力の印加によって流場の制御が可能であることがわかった。拡大管に作用する抵抗は磁場の強さの自乗に比例すること、また電場強さと抵抗には比例関係があることがわかった。拡大管を過ぎる流量は、入口の圧力勾配を一定にしたとき磁場の大きさにはほとんどよらないが、電場強さとは比例関係があることがわかった。
- 3) レイノルズ数が 10^2 程度の流れでも、外部流れでは電磁力の作用によっても速度場はほとんど変化しないことが、楕円柱周りの計算結果からわかった。これは磁場が物体から離れると急速に減衰するためである。しかし圧力場は大きく変化し、このため物体の全抵抗に大きな影響を及ぼすことがわかった。さらに、電磁力が下流側に働くように電磁場を印加すると推力が生じることを示した。また、全抵抗はほぼ圧力抵抗と電磁力抵抗に二分され、それらは、印加電場強さと比例関係にあることを示した。同じ電場強さでは、印加磁場領域が広いほど抵抗が大きく、これは磁場領域の広さに大略比例している。

翼型周りの流れの場合も楕円柱のときと同様、電磁力の影響は圧力場に大きく

作用し、流場はあまり変化していない。しかし電磁場を印加することで揚力が増加し抗力が減少することがわかった。またそれらの変化は、印加する電場強さに比例して変化することがわかった。

4) さらにレイノルズ数が 10^4 のときの翼型周りの層流の流場を数値シミュレーションし、電磁力が流場に及ぼす影響を調べた。この結果、翼がその周りに電磁場を印加して進むとき、電磁力の印加によって翼背面に生じていた流れの剥離を消すことができた。電場強さを増して行くと、揚力は最初電場強さに比例して増加し、さらに電場強さが大きくなると非線形的に変化するようになることがわかった。低レイノルズ数流れのときに印加した電磁力と同程度の電磁力でも、電場強さと揚力に非線形性が現れている。これは相対的に拡散項（粘性項）の影響が小さくなったためである。全抗力は電磁力の反作用による推力の効果のために減少することを示した。これらの結果を考慮すると、例えば、翼の前進速度が十分に取れないような場合でも揚力の増加を図ることが可能と思われる。

5) 乱流場の電磁力による流場制御の数値シミュレーションを行うために、電磁力の影響を含んだ $k-\varepsilon$ 方程式を導いた。 $k-\varepsilon$ 方程式は θ 方程式モデルに比べて汎用性が高く、電磁場が速度場を抑制するハルトマン効果と、磁場が乱れを吸収する効果を分離して扱うことができるので、電磁場の乱流場に及ぼす影響をより細かく解析できると考えられる。

本論で導いた式を評価するため、簡単な平行平板間流れについて計算し、実験結果と比較したところ、良い一致を得た。そこで、一般の二次元乱流場にも適用出来るように境界条件を整備して、電磁力による二次元翼型周りの乱流場の流場制御シミュレーションを行った。その結果、電磁力の作用で翼背面の圧力が低下することや、電磁力の印加領域で摩擦応力が大きくなることを示した。この結果、揚力は増加し、全体としての翼抗力が減少することを示した。ただし、層流状態のときに得られたほど大きな揚力の増加は得られず、電磁力を利用して乱流場を制御することは層流場の制御に比べて困難であることがわかった。

謝辞

本論文を終えるにあたり多くの諸先生、諸先輩の終始変わらぬ暖かい御指導、御教示を賜ったことに心より感謝の意を表したい。

大阪大学工学部 田中一朗教授には、本論文をまとめるにあたり多くの熱心な御指導と御教示を賜った。ここに記して感謝の意を表します。大阪大学工学部 三宅裕教授ならびに渡辺健二教授には、本論文をまとめるにあたって貴重な御討論を賜った。ここに記して感謝致します。船舶技術研究所前部長 田中拓博士には、本研究の動機と研究遂行の機会、それに終始変わらない御指導と暖かい激励を頂戴しました。ここに謝意を表します。

本研究は運輸省海上技術安全局の「船舶流場制御調査研究会」（座長 横浜国立大学丸尾孟名誉教授）のなかで行われた。研究会委員の諸先生方には多くの貴重な御討論を頂いた。ここに厚く感謝致します。慶應義塾大学棚橋隆彦教授には、MHDに関する理論を御教授下さった。深く謝意を表します。

東京大学生産技術研究所吉澤徹助教授には、第5章の乱流問題の定式化に際して貴重な御教示を頂いた。記して謝意を表します。

船舶技術研究所児玉良明博士には、本研究の最初から理論面、数値計算面で非常に多くの御指導と御教示を頂いた。とくに、本研究の中核を成すCFD技術に関して、それまでCFDの知識と経験のなかった著者に懇切丁寧に御指導を下さった。ここに厚く感謝します。

船舶技術研究所CFDグループのメンバーには、数値計算上の問題点などに多くの有益な御討論を頂戴した。メンバーの諸氏に感謝いたします。

第2章から第4章で行った計算には富士通FACOM M180 II ADを、第5章の計算にはワークステーションsun3-110 (FPA装備) を用いたことを記します。

参考文献

- 1) Phillips, O.M., "The Prospects for Magnetohydrodynamic Ship Propulsion", Journal of Ship Research, March, (1962)
- 2) 山口一, 加藤洋治, "電磁推進に関する文献調査及び一考察", 第9回推進性能委員会公開資料, 3月, (1986)
- 3) 北野稔, 岩田章, 佐治吉郎, "超伝導マグネットによる電磁推進の基礎理論 I, II" 神戸商船大学紀要 第2類 第26号, (1978)
- 4) 今井功, 桜井明, "電磁流体力学", 岩波講座現代物理学, 岩波書店, (1959)
- 5) Hughes, W.F., Young, F.J., "The Electromagnetodynamics of Fluids", Jhon Wiley & Sons Inc., (1966)
- 6) Beam, R.M., Warming, R.F., "An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations", AIAA Journal Vol.16, No.4, April, (1978)
- 7) Kodama, Y., "Computation of the Two-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations for Flow Past a Circular Cylinder Using an Implicit Factored Method", Papers of Ship Research Institute Vol.22, No.4, July, (1985)
- 8) Hinatsu, M., Kodama, Y., "Numerical Simulation of Flow Controlled by MHD Effect (2-D Laminar Flow)", Journal of the Kansai Society of Naval Architects, Japan No.201, June, (1986)
- 9) 日夏宗彦, "船体周りの流場制御シミュレータへのCFDの応用", 昭和61年度(第48回)船舶技術研究所研究発表会講演集, 11月, (1986)

- 1 0) Kodama, Y., "Computation of 3-D Incompressible Navier-Stokes Equations for Flow Around a Ship Hull Using an Implicit Factored Method", Proceedings of Osaka Colloquium on Ship Viscous Flow, (1985)
- 1 1) 日夏宗彦 "電磁力による二次元翼型周りの流場制御に関する研究" 船舶技術研究所報告, 第24巻, 5号, 9月, (1987)
- 1 2) Steger, J.L., "Implicit Finite Difference Simulation of Flow about Arbitrary Two-Dimensional Geometries", AIAA Journal, Vol.16, No.7, July, (1978)
- 1 3) 児玉良明、"渦粘性モデルを用いた二次元翼型まわり高レイノルズ数流れに関するナビエ-ストークス方程式の数値解法"、昭和60年度(第46回)船舶技術研究所研究発表会講演集, 11月, (1985)
- 1 4) Brouillette, E.C., Lykoudis, P.S., "Magneto-Fluid-Mechanic Channel Flow. I. Experiment", the Physics of Fluids, Vol.10, No.5, May, (1967)
- 1 5) 北村健三、平田賢, "直交強磁場下における液体金属の流動および熱伝達に関する研究(第1報, 長方形管内乱流に及ぼす入口磁場形状の影響)" 日本機械学会論文集(B編), 46巻, 401号, 1月, (1980)
- 1 6) 須藤浩三, 富田幸雄 "垂直磁場における液体金属の流動に関する研究(第3報, 遷移に及ぼす電磁場の影響)", 日本機械学会論文集(B編), 40巻, 332号, 4月, (1974)
- 1 7) Girshick, S.L., Kruger, C.H., "Experimental study of secondary flow in a magnetohydrodynamic channel", Journal of Fluid Mechanics, vol.170, (1986)

- 1 8) Lykoudis, P.S., Brouillette, E.C., "Magneto-Fluid-Mechanic Channel Flow. II.Theory", the Physics of Fluids, Vol.10, No.5, May, (1967)
- 1 9) 須藤浩三, 富田幸雄"垂直磁場における液体金属の流動に関する研究(第4報, 乱流の管摩擦係数)", 日本機械学会論文集(B編), 40巻, 332号, 4月, (1974)
- 2 0) Kitamura, K., Hirata, M., "Turbulent Heat and Momentum Transfer for Electrically Conducting Fluid Flowing in Two-Dimensional Channel Under Transverse Magnetic Field", Proc. 6th IHTC Vol.3, M-18, (1978)
- 2 1) 日夏宗彦, "MHD流れにおける $k-\varepsilon$ 方程式とチャンネル流れの計算例", 第2回NSTシンポジウム, 東京大学生産技術研究所, 1月, (1987)
- 2 2) Hinatsu, M., "k- ε Modeling of MHD Flow and Its Simulation of Channel Flow", Journal of the Society of Naval Architects of Japan, Vol.161, June, (1987)
- 2 3) Hanjalic, K. and Launder, B.E., "A Reynolds Stress Model of Turbulence and Its Application of Thin Shear Flow", Journal of Fluid Mechanics, Vol.52, part 4, (1972)
- 2 4) Yoshizawa, A., "Statistical modeling of a transport equation for the kinetic energy dissipation rate", Physics of Fluids, Vol.30, No.3, (1987)
- 2 5) Kodama, Y., "A Method to Assure Positiveness of k and ε in the Computation of the $k-\varepsilon$ Turbulence Model", Journal of the Society of Naval Architects of Japan, Vol.160, December, (1987)

- 26) Rodi, W., "Turbulence Models and Their Application in Hydraulics -A State of the Art Review-", June, (1980)
- 27) Laufer, J., "Investigations of Turbulent Flow in a Two-Dimensional Channel", NACA Report, 1053, (1951)
- 28) White, F., M., "Viscous Fluid Flows", McGraw-Hill, (1974)
- 29) 日夏宗彦、児玉良明, "指数表現を用いた $k-\varepsilon$ 方程式による乱流場の数値シミュレーション", 第5回航空機計算空気力学シンポジウム論文集, 航空宇宙技術研究所特別資料 SP-8, 11月, (1987)
- 30) Abbott, I. H., and Doenhoff, A. E., "Theory of Wing Sections" Dover, (1959)
- 31) 日夏宗彦, "電磁力で制御された翼型まわり乱流場の流場制御シミュレーション", 日本造船学会論文集第163号, 6月, (1988)

主な記号

\mathbf{u} : 速度ベクトル	p : 圧力
ρ : 流体密度	ν : 動粘性係数
\mathbf{B} : 磁束密度ベクトル	\mathbf{E} : 電場強さベクトル
μ : 流体の透磁率	σ : 流体の電気伝導度
\mathbf{j} : 電流密度ベクトル	U : 代表速度
L : 代表長さ	Re : レイノルズ数 = $U L / \nu$
Ha : ハルトマン数 = $(\sigma / \rho \nu)^{1/2} B L$	Rm : 磁気レイノルズ数 = $\mu \sigma U L$
(x, y) : 直交座標系	(ξ, η) : 物体適合座標系
$a, b, c, d, a, b, c, d, e$: 座標変換測度係数	
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{C}, \mathbf{T}$: 座標変換後の支配方程式の係数行列式	
$\mathbf{J}, \mathbf{K}, \mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$: 支配方程式を離散化したときの係数行列式	
Δ : 1時間刻み進んだときの変化量	
k : 乱動エネルギー	ε : 乱動エネルギー散逸率
m : $\log(k)$	n : $\log(\varepsilon)$
$\nu \tau$: 渦粘性係数	
Ca : 磁場による k の吸収係数	Cb : 磁場による ε の吸収係数
τ_w : 壁面摩擦応力	$u \tau$: 無次元摩擦速度 = $(\tau_w / \rho)^{1/2} / U$
u^+ : 無次元速度 = $u / u \tau$	y^+ : 壁面からの無次元距離 = $Re \cdot y \cdot u \tau$

付録-1 (5.35)式, (5.41)式に現れる係数行列の表示

波線部分は計算では省略した項を示す。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L} &= \begin{pmatrix} u - 2 \frac{\partial v_T}{\partial x} & - \frac{\partial v_T}{\partial x} & 1 & \frac{2}{3} k & 0 \\ 0 & u - \frac{\partial v_T}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 \frac{Ha^2 v_T}{Re k} B_x^2 & 2 \frac{Ha^2 v_T}{Re k} B_x B_y & 0 & u - \frac{1}{\sigma_k} \frac{\partial v_T}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u - \frac{1}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial v_T}{\partial x} \end{pmatrix} \\
 \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} v - \frac{\partial v_T}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - \frac{\partial v_T}{\partial x} & v - 2 \frac{\partial v_T}{\partial y} & 1 & \frac{2}{3} k & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 2 \frac{Ha^2 v_T}{Re k} B_x B_y & 2 \frac{Ha^2 v_T}{Re k} B_y^2 & 0 & v - \frac{1}{\sigma_k} \frac{\partial v_T}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v - \frac{1}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial v_T}{\partial y} \end{pmatrix} \\
 \mathbf{H} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{Re} + v_T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{Re} + v_T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Re} + \frac{1}{\sigma_k} \frac{\partial v_T}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Re} + \frac{1}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial v_T}{\partial y} \end{pmatrix} \\
 \mathbf{S} &= \begin{pmatrix} - \frac{Ha^2}{Re} B_y^2 & \frac{Ha^2}{Re} B_x B_y & 0 & 0 & 0 \\ \frac{Ha^2}{Re} B_x B_y & - \frac{Ha^2}{Re} B_x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -\frac{Ha^2}{Re} E_z B_y \\ -\frac{Ha^2}{Re} E_z B_x \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \frac{Ha^2}{Re} C_a (B_x^2 + B_y^2) \\ -\frac{4}{3} \frac{Ha^2}{Re} C_b (B_x^2 + B_y^2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \left(\frac{1}{Re} + \frac{v_T}{\sigma_k} \right) \left\{ \left(\frac{\partial m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial y} \right)^2 \right\} + \frac{G}{k} - \frac{\epsilon}{k} \\ \left(\frac{1}{Re} + \frac{v_T}{\sigma_\epsilon} \right) \left\{ \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial y} \right)^2 \right\} + C_1 \frac{G}{k} - C_2 \frac{\epsilon}{k} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{G}{k} + \frac{\epsilon}{k} & -\frac{\epsilon}{k} \\ 0 & 0 & 0 & -C_1 \frac{G}{k} + C_2 \frac{\epsilon}{k} & -C_2 \frac{\epsilon}{k} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2v_T}{k} f_1 & \frac{2v_T}{k} f_2 & 0 & f_3 & 0 \\ C_1 \frac{2v_T}{k} f_1 & C_1 \frac{2v_T}{k} f_2 & 0 & 0 & f_4 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = 2a(au_\xi + bu_\eta) + c(cu_\xi + du_\eta + av_\xi + bv_\eta)$$

$$f_2 = 2c(cv_\xi + dv_\eta) + a(cu_\xi + du_\eta + av_\xi + bv_\eta)$$

$$f_3 = 2\left(\frac{1}{Re} + \frac{v_T}{\sigma_k}\right)\{(a^2+c^2)m_\xi + (ab+cd)m_\eta\}$$

$$f_4 = 2\left(\frac{1}{Re} + \frac{v_T}{\sigma_\epsilon}\right)\{(a^2+c^2)n_\xi + (ab+cd)n_\eta\}$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2v_T}{k} f_1 & \frac{2v_T}{k} f_2 & 0 & f_3 & 0 \\ C_1 \frac{2v_T}{k} f_1 & C_1 \frac{2v_T}{k} f_2 & 0 & 0 & f_4 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = 2b(au_\xi + bu_\eta) + d(cu_\xi + du_\eta + av_\xi + bv_\eta)$$

$$f_2 = 2d(cv_\xi + dv_\eta) + b(cu_\xi + du_\eta + av_\xi + bv_\eta)$$

$$f_3 = 2\left(\frac{1}{Re} + \frac{v_T}{\sigma_k}\right)\{(b^2+d^2)m_\eta + (ab+cd)m_\xi\}$$

$$f_4 = 2\left(\frac{1}{Re} + \frac{v_T}{\sigma_\epsilon}\right)\{(b^2+d^2)n_\eta + (ab+cd)n_\xi\}$$

付録-2 磁気レイノルズ数が大きいときの考察

本研究では、磁気レイノルズ数が十分小さく、誘導磁場の影響が無視できる状態を考察した。磁気レイノルズ数が非常に小さいときは磁場は既知数としてあらかじめ与えられるので取扱いが非常に楽になる。逆に磁気レイノルズ数が非常に大きく誘導磁場の影響が無視できないときは、磁場も未知数として扱わねばならず問題が複雑になる。磁気レイノルズ数が非常に大きい流れの解析は、天体物理学やプラズマ物理学などで非常に重要な問題になっている。

層流の場合は、MHD方程式と磁場の誘導方程式を連立させて解けば、原理的には流場の様子は理解される。ただし、方程式系には見かけ上電場の項が入らないので、磁場に対する境界条件は、境界上でマックスウェルの方程式を考慮して決定される。

乱流の場合は、さらに乱流のモデル化が必要となり、これが電磁流体乱流場の把握や現象の解釈に大きな影響を与えることになる。たとえば、地球磁場の維持機構を説明するダイナモ理論では、磁気粘性による磁場の拡散に対し、どのような機構で地球磁場の維持が成されているかを問題にしている。これを層流のMHD方程式と誘導方程式のみで考えるとき、流場モデルは特殊な流れを想定する必要がある^{A-1)}。これを乱流場として考え、磁場と流場の乱動成分の相関項をモデル化することで、地球磁場の維持機構を説明しようとする研究が行われている^{A-2)}。またプラズマ工学においては、プラズマ閉じ込めの手段の一つに逆転磁場ピンチ(RFP)を利用する研究が進められている。RFPでは、大きい磁場のシアによって安定にプラズマを閉じ込めることが可能なこと、トロイダル磁場強さとポロイダル磁場強さの大きさがほぼ同程度なために強力な磁場発生装置が不要なことなど非常に大きな利点がある^{A-3)}。しかし反面、逆転磁場配位(FRC)は不安定であって、この状態をいかに維持するかが問題となる。このためには、FRCの流場の詳細な把握が必要となる。プラズマ流場では乱流状態が一般的であるので、結局、FRCの解析には適切な乱流モデルの構築が必要であろう^{A-2)}。

この節では、ごく最近Yoshizawa^{A-2)}によって行われた研究に基づいて、磁気レイノルズ数が非常に大きいときの乱流場の扱いについて述べ、問題点を調べる。支配方程式は、(2.1)式と(2.4)式を組み合わせたMHD方程式と磁場の誘導方程式

(2.8)式で、テンソル表示すると次のようになる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \Lambda \varepsilon_{ijk} (\varepsilon_{jlm} \partial_l B_m) B_k$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial B_i}{\partial x_j} = B_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\text{Rm}} \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_j^2}, \quad \Lambda = \frac{\text{Ha}^2}{\text{ReRm}}$$
(A-1)

さらにソレノイダルの条件

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial B_i}{\partial x_i} = 0$$
(A-2)

を用いると、(A-1)式は

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j - B_i B_j) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (B_i u_j - u_i B_j) = \frac{1}{\text{Rm}} \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_j^2}$$
(A-3)

のように書ける。ただし、磁場と圧力は

$$B_i \equiv B_i / \sqrt{\Lambda}, \quad p \equiv p + B_i B_i / 2$$
(A-4)

を用いて変形している。

次に、流場と圧力それに磁場を

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i, \quad B_i = \bar{B}_i + B'_i, \quad p = \bar{p} + p'$$
(A-5)

のように時間平均成分と乱動成分に分解する。バー記号は時間平均成分を、プライム記号は変動成分を表す。(A-5)式を(A-3)式に代入して時間平均をとると

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{u'_i u'_j} - \bar{B}_i \bar{B}_j - \overline{B'_i B'_j}) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2}$$

$$\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{B}_i \bar{u}_j + \overline{B'_i u'_j} - \bar{u}_i \bar{B}_j - \overline{u'_i B'_j}) = \frac{1}{\text{Rm}} \frac{\partial^2 \bar{B}_i}{\partial x_j^2}$$
(A-6)

のようなレイノルズ方程式が得られる。ここで簡単のために時間平均成分のバー記号は省略した。(A-1)式に(A-5)式を代入した式から(A-6)式を引けば乱動成分の方程式が求められる。それらは、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i' u_j' + u_i' u_j' + u_i u_j' - \overline{u_i' u_j'} - B_i' B_j' - B_i' B_j - B_i B_j' + \overline{B_i' B_j'}) \\ = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2} \end{aligned} \quad (\text{A-7})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_i'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (B_i' u_j' + B_i' u_j' + B_i u_j' - \overline{B_i' u_j'} - u_i' B_j' - u_i' B_j - u_i B_j' + \overline{u_i' B_j'}) \\ = \frac{1}{\text{Rm}} \frac{\partial^2 B_i'}{\partial x_j^2} \end{aligned}$$

のようになる。

乱動エネルギー k は、乱動速度成分によるエネルギー k_u と乱動磁場によるエネルギー k_B の和で与えられる。すなわち、

$$k = \overline{u_i' u_i'} / 2 + \overline{B_i' B_i'} / 2 \equiv k_u + k_B \quad (\text{A-8})$$

である。 k に対する輸送方程式は、速度の乱動成分の式に u_i' を、磁場の乱動成分の式に B_i' をかけたのち両式の和をとり、時間平均を施せば次のように書ける。

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P - \varepsilon + D \quad (\text{A-9})$$

ただし、 P は生成項、 ε は散逸項、 D は拡散項で、それぞれ

$$P = - (\overline{u_i' u_j'} - \overline{B_i' B_j'}) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - (\overline{B_i' u_j'} - \overline{u_i' B_j'}) \frac{\partial B_i}{\partial x_j} + B_j \frac{\partial (\overline{u_i' B_i'})}{\partial x_j} \quad (\text{A-10})$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{\text{Rm}} \left(\frac{\partial B_i'}{\partial x_j} \frac{\partial B_i'}{\partial x_j} \right) \quad (\text{A-11})$$

$$D = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[-(\overline{u_j' p'}) - \frac{1}{2}(\overline{u_i' u_i' u_j'}) - \frac{1}{2}(\overline{u_j' B_i' B_i'}) + (\overline{u_i' B_i' B_j'}) \right] \\ + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 k_u}{\partial x_j^2} + \frac{1}{Rm} \frac{\partial^2 k_B}{\partial x_j^2} \quad (A-12)$$

と書かれる。

ここで、速度と磁場の乱動成分に対するソレノイダル条件

$$\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = \frac{\partial B_i'}{\partial x_i} = 0 \quad (A-13)$$

を用いている。

実際の数値計算には、(A-9)-(A-12)式では取扱が困難でこれをモデル化する必要がある。Yoshizawa^{A-2)}は、 $Re=Rm$ の条件下で、2-Scale Direct-Interaction Approximation(TSDIA) の手法を用いて、(A-10)式から(A-12)式をモデル化している。それによると、レイノルズ応力は

$$-(\overline{u_i' u_j'} - \overline{B_i' B_j'}) = - \left[a_1 k - a_2 \frac{k}{\epsilon} \frac{Dk}{Dt} + a_3 \frac{k^2}{\epsilon^2} \frac{D\epsilon}{Dt} \right] \delta_{ij} \\ + a_4 \frac{k^2}{\epsilon} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (A-14)$$

$$-(\overline{B_i' u_j'} - \overline{u_i' B_j'}) = b_1 \frac{k^2}{\epsilon} \left(\frac{\partial B_i}{\partial x_j} - \frac{\partial B_j}{\partial x_i} \right) - b_2 \frac{k}{\epsilon} \left(B_i \frac{\partial k}{\partial x_j} - B_j \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) \\ - b_3 \frac{k^2}{\epsilon^2} \left(B_i \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} - B_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right) \quad (A-15)$$

$$\overline{u_i' B_i'} = 0 \quad (A-16)$$

のようにモデル化されている。ここで、 a_1, b_1 などは定数である。このモデル化で k -方程式の生成項は、平均場のみで表現される。また拡散項は、

$$D = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[c_1 \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[c_2 \frac{k^3}{\epsilon^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] \quad (A-17)$$

のようにモデル化されている。 c_1, c_2 は定数である。

散逸項は、 ε -方程式と連立させて未知数として扱う。そこで ε -方程式について考える。TSDIAによると、乱れの長さスケール l は、

$$l = d_1 \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} + d_2 \frac{k^{3/2}}{\varepsilon^2} \frac{Dk}{Dt} - d_3 \frac{k^{5/2}}{\varepsilon^3} \frac{D\varepsilon}{Dt} + B_j \left(d_4 \frac{k^{3/2}}{\varepsilon^2} \frac{\partial k}{\partial x_j} - d_5 \frac{k^{5/2}}{\varepsilon^3} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \quad (\text{A-18})$$

で表される。いま、渦粘性の仮定に基づくと、

$$l = d_1 \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \quad (\text{A-19})$$

の関係が満たされねばならないので、(A-18)式と(A-19)式から、 ε の式として

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = e_1 \frac{\varepsilon}{k} \frac{Dk}{Dt} - B_j \left(e_2 \frac{k^{3/2}}{\varepsilon^2} \frac{\partial k}{\partial x_j} - e_3 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \quad (\text{A-20})$$

が導かれる。ここに e_1 などは定数。この式に(A-9)式を代入すると、

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = f_1 \frac{\varepsilon}{k} P - f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} + f_3 \frac{\varepsilon}{k} D - B_j \left(f_4 \frac{\varepsilon}{k} \frac{\partial k}{\partial x_j} - f_5 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \quad (\text{A-21})$$

なる ε -方程式が導かれる。ここで f_1 などは定数。

以上で磁気レイノルズ数が非常に大きいときの k - ε 方程式が得られ、これを解けば原理的には流場解析が可能である。しかしこの k - ε 方程式には多くの係数が含まれている。TSDIAによってそれぞれの値が評価されているものの、実際にこの方程式を解いて乱流場を解析するには、基礎的な実験データによって係数値の最適値を求める必要があると思われる。また、未知数も流場、磁場、圧力、 k 及び ε で、三次元問題では未知数の数が9個になる。このため、効率の良い計算スキームの開発が必要となる。このように磁気レイノルズ数が非常に大きいときの乱流場の解析は、問題が非常に難しくなり、今後の理論的、実験的両面の研究の進歩に負うところが大きい。

参考文献

- A-1) 今井功、桜井明、”電磁流体力学”、岩波講座現代物理学、岩波書店、
(1959)
- A-2) Yoshizawa, A., ”Ensemble-mean modeling of tow-equation type in
in magnetohydrodynamic turbulent shear flow”, Physics of Fluids
31 (2), February (1988)
- A-3) 伏見康治編、”プラズマ・核融合”, 実験物理学講座 30, 共立出版,
(1979)

List of Tables

Table 3.1 Combination of strengths of applied magnetic field and electric field in duct flow simulation

Table 3.2 Numerical result of resistance components acting on duct

List of Figures

- Fig. 3-1 Coordinate system of Hartmann Flow
- Fig. 3-2 Illustration of Hartmann flow
- Fig. 3-3 Comparison between numerical solution and exact solution of Hartmann flow
- (a) Poiseuille flow
($Re = 1, dp/dx = -1$)
 - (b) Short circuit condition
($Re = 1, dp/dx = -1, Ha = 2, E = 0$)
 - (c) Open circuit condition
($Re = 1, dp/dx = -1, Ha = 2$)
- Fig. 3-4 Coordinate system of duct flow
- Fig. 3-5 Mesh division of duct flow calculation
- Fig. 3-6 Distribution of magnetic flux density in duct
- Fig. 3-7 Calculated result of duct flow in non-MHD condition($Re = 200$)
- (a) Velocity distribution
 - (b) Pressure distribution
 - (c) Vorticity distribution
 - (d) Streamlines
- Fig. 3-8 Calculated result of duct flow
($Re = 200, Ha = 4, E = 0$)
- (a) Velocity distribution
 - (b) Lorentz force distribution
 - (c) Pressure distribution
 - (d) Vorticity distribution
- Fig. 3-9 Calculated result of duct flow
($Re = 200, Ha = 4, E = 0.5$)
- (a) Velocity distribution
 - (b) Lorentz force distribution
 - (c) Pressure distribution
 - (d) Vorticity distribution

- Fig.3-10 Calculated result of duct flow
($Re = 200$, $Ha = 0.1$, $E = 5000$)
- (a) Velocity distribution
 - (b) Lorentz force distribution
 - (c) Pressure distribution
 - (d) Vorticity distribution
- Fig.3-11 Relation between strength of magnetic flux density and resistance acting on duct
- Fig.3-12 Relation between strength of magnetic flux density and flux of flow
- Fig.3-13 Relation between strength of applied electric field and flux of flow
- Fig.3-14 Relation between strength of applied electric field and resistance acting on duct
- Fig.3-15 Coordinate system of flow field around elliptic cylinder
- Fig.3-16 Mesh division for calculation of flow around elliptic cylinder
- Fig.3-17 Distribution of magnetic flux density around elliptic cylinder
- (a) Type A
 - (b) Type B
- Fig.3-18 Calculated result of flow around elliptic cylinder in non-MHD condition ($Re = 200$)
- (a) Velocity distribution
 - (b) Pressure distribution
 - (c) Vorticity distribution
 - (d) Streamlines
- Fig.3-19 Lorentz force distribution ($Ha=1.0$, $E=-1000$)
- (a) Case in magnetic field Type A
 - (b) Case in magnetic field Type B
- Fig.3-20 Pressure distribution ($Re=200, Ha=1.0, E=-1000$)
- (a) Case in magnetic field Type A
 - (b) Case in magnetic field Type B

- Fig.3-21 Vorticity distribution ($Re=200, Ha=1.0, E=-1000$)
- (a) Case in magnetic field Type A
 - (b) Case in magnetic field Type B
- Fig.3-22 Streamlines ($Re=200, Ha=1.0, E=-1000$)
- (a) Case in magnetic field Type A
 - (b) Case in magnetic field Type B
- Fig.3-23 Lorentz force distribution ($Ha=1.0, E=1000$)
- (a) Case in magnetic field Type A
 - (b) Case in magnetic field Type B
- Fig.3-24 Pressure distribution ($Re=200, Ha=1.0, E=1000$)
- (a) Case in magnetic field Type A
 - (b) Case in magnetic field Type B
- Fig.3-25 Vorticity distribution ($Re=200, Ha=1.0, E=1000$)
- (a) Case in magnetic field Type A
 - (b) Case in magnetic field Type B
- Fig.3-26 Streamlines ($Re=200, Ha=1.0, E=1000$)
- (a) Case in magnetic field Type A
 - (b) Case in magnetic field Type B
- Fig.3-27 Relation between strength of applied electric field and total resistance acting on elliptic cylinder
- Fig.3-28 Relation between strength of applied electric field and frictional resistance acting on elliptic cylinder
- Fig.3-29 Relation between strength of applied electric field and pressure resistance acting on elliptic cylinder
- Fig.3-30 Relation between strength of applied electric field and Lorentz force resistance acting on elliptic cylinder
- Fig.3-31 Coordinate system for C-grid topology
- Fig.3-32 Computational domain corresponding to C-grid topology
- Fig.3-33 Mesh division for calculation of flow around wing section (NACA0012)

- Fig.3-34 Distribution of magnetic flux density around wing section
- Fig.3-35 Calculated result of flow around wing section in non-MHD condition ($Re = 200$)
- (a) Velocity distribution
 - (b) Vorticity distribution
 - (c) Pressure distribution
- Fig.3-36 Calculated result of flow around wing section ($Re = 200, Ha = 1.0, E = -500$)
- (a) Velocity distribution
 - (b) Vorticity distribution
 - (c) Pressure distribution
- Fig.3-37 Calculated result of flow around wing section ($Re = 200, Ha = 1.0, E = -1000$)
- (a) Velocity distribution
 - (b) Vorticity distribution
 - (c) Pressure distribution
- Fig.3-38 Pressure distribution along wing surface ($Re = 200, \text{attack angle} = 5 \text{ (deg)}$)
- (a) non-MHD condition
 - (b) $Ha = 1.0, E = -500$
 - (c) $Ha = 1.0, E = -1000$
- Fig.3-39 Relation between strength of applied electric field and lift coefficient of wing
- Fig.3-40 Relation between strength of applied electric field and drag coefficient of wing
- Fig. 4-1 Computational domain for C-grid topology
- Fig. 4-2 Mesh division around wing section (NACA0012) minimum mesh space = 0.005, attack angle = 0 (deg) (Mesh A)
- Fig. 4-3 Mesh division around wing section (NACA0012) minimum mesh space = 0.002, attack angle = 0 (deg) (Mesh B)

- Fig. 4-4 Calculated pressure distribution around wing section using Mesh A
- (a) $\omega = 2.5$
 - (b) $\omega = 5.0$
- Fig. 4-5 Calculated vorticity distribution around wing section using Mesh A
- (a) $\omega = 2.5$
 - (b) $\omega = 5.0$
- Fig. 4-6 Calculated pressure distribution around wing section using Mesh B
- (a) $\omega = 2.5$
 - (b) $\omega = 5.0$
- Fig. 4-7 Calculated vorticity distribution around wing section using Mesh B
- (a) $\omega = 2.5$
 - (b) $\omega = 5.0$
- Fig. 4-8 Comparison of calculated pressure distribution along wing surface
(NACA0012, $Re = 10^4$, attack angle = 0 (deg))
- Fig. 4-9 Mesh division for calculation of flow around wing section (attack angle = 5 (deg))
- Fig.4-10 Calculated result of flow around wing section in non-MHD condition
($Re = 10^4$, attack angle = 5 (deg))
- (a) Velocity distribution
 - (b) Vorticity distribution
 - (c) Pressure distribution
- Fig.4-11 Calculated result of flow around wing section
($Re = 10^4$, attack angle = 5 (deg),
 $Ha = 12.64$, $E = -50$)
- (a) Velocity distribution
 - (b) Vorticity distribution
 - (c) Pressure distribution

Fig.4-12 Calculated result of flow around wing section
($Re = 10^4$, attack angle = 5 (deg),
Ha = 12.64, E = -100)

- (a) Velocity distribution
- (b) Vorticity distribution
- (c) Pressure distribution

Fig.4-13 Calculated result of flow around wing section
($Re = 10^4$, attack angle = 5 (deg),
Ha = 12.64, E = -150)

- (a) Velocity distribution
- (b) Vorticity distribution
- (c) Pressure distribution

Fig.4-14 Calculated result of flow around wing section
($Re = 10^4$, attack angle = 5 (deg),
Ha = 12.64, E = -200)

- (a) Velocity distribution
- (b) Vorticity distribution
- (c) Pressure distribution

Fig.4-15 Calculated pressure distribution along
wing surface ($Re = 10^4$, attack angle = 5 (deg))

- (a) case in E = 0
- (b) case in E = -50
- (c) case in E = -100
- (d) case in E = -150
- (e) case in E = -200

Fig.4-16 Lorentz force distribution around
wing section

Fig.4-17 Relation between strength of applied
electric field and lift coefficient
of wing ($Re=10^4$, attack angle = 5 (deg))

Fig.4-18 Relation between strength of applied
electric field and drag coefficient
of wing ($Re=10^4$, attack angle = 5 (deg))

Fig. 5-1 Coordinate system for turbulent
channel flow

- Fig. 5-2 Computational domain for turbulent channel flow
- Fig. 5-3 Comparison of calculated result of velocity profile of Hartmann flow with experimental data
- Fig. 5-4 Calculated result of turbulent channel flow
- (a) non-MHD condition
 - (b) $Ha^2/Re = 1.0 \times 10^4$, $E = 0$
 - (c) $Ha^2/Re = 5.0 \times 10^4$, $E = 0$
 - (d) $Ha^2/Re = 1.0 \times 10^3$, $E = 0$
 - (e) $Ha^2/Re = 5.0 \times 10^3$, $E = 0$
 - (f) $Ha^2/Re = 1.0 \times 10^2$, $E = 0$
- Fig. 5-5 Relation between strength of applied magnetic flux density and resistance acting on channel
- Fig. 5-6 Relation between strength of applied magnetic flux density and flux of flow of channel
- Fig. 5-7 Calculated result of turbulent channel flow
- (a) $Ha^2/Re = 1.0 \times 10^4$, $E = -10$
 - (b) $Ha^2/Re = 1.0 \times 10^4$, $E = -5$
 - (c) $Ha^2/Re = 1.0 \times 10^4$, $E = 5$
 - (d) $Ha^2/Re = 1.0 \times 10^4$, $E = 10$
- Fig. 5-8 Relation between strength of applied electric field and resistance acting on channel
- Fig. 5-9 Relation between strength of applied electric field and flux of flow of channel
- Fig.5-10 Computational domain
- Fig.5-11 Pressure distribution along wing surface ($Re=10^6$, k- ϵ model, attack angle = 5 (deg) non-MHD condition)
- Fig.5-12 Eddy viscosity distribution

- Fig.5-13 Mesh division (minimum space = 0.0002)
- Fig.5-14 Calculated result of flow around wing section ($Re=10^6$, attack angle = 10 (deg), k- ϵ model, non-MHD condition)
- (a) Velocity distribution
 - (b) Pressure distribution
- Fig.5-15 Calculated result of flow around wing section ($Re=10^6$, attack angle = 10 (deg), k- ϵ model, $Ha=126.4$, $E=-200$)
- (a) Velocity distribution
 - (b) Pressure distribution
- Fig.5-16 Calculated result of flow around wing section ($Re=10^6$, attack angle = 10 (deg), k- ϵ model, $Ha=126.4$, $E=-400$)
- (a) Velocity distribution
 - (b) Pressure distribution
- Fig.5-17 Calculated result of flow around wing section ($Re=10^6$, attack angle = 10 (deg), k- ϵ model, $Ha=126.4$, $E=-600$)
- (a) Velocity distribution
 - (b) Pressure distribution
- Fig.5-18 Calculated result of flow around wing section ($Re=10^6$, attack angle = 10 (deg), k- ϵ model, $Ha=126.4$, $E=-800$)
- (a) Velocity distribution
 - (b) Pressure distribution
- Fig.5-19 Pressure distribution along wing surface ($Re=10^6$, k- ϵ model, attack angle = 10 (deg))
- (a) case in non-MHD condition
 - (b) case in $Ha=126.4$, $E = -200$
 - (c) case in $Ha=126.4$, $E = -400$
 - (d) case in $Ha=126.4$, $E = -600$
 - (e) case in $Ha=126.4$, $E = -800$
- Fig.5-20 Comparison of skin friction coefficient

Fig.5-21 Relation between strength of applied electric field and lift coefficient of wing ($Re=10^6$, k- ϵ model, attack angle = 10 (deg))

Fig.5-22 Relation between strength of applied electric field and drag coefficient of wing ($Re=10^6$, k- ϵ model, attack angle = 10 (deg))

Tables

Table 3.1 Combination of strengths of applied magnetic field and electric field in duct flow simulation

Ha	0	2	4	4	4	0.4	0.4	0.1	0.1	0.1	0.1
E	0	0	0	0.5	-0.5	500	-500	2000	-2000	5000	-5000

Table 3.2 Numerical result of resistance components acting on duct

Ha	E	Q	C_f	C_p	$-C_{emf}$	$C_f + C_p - C_{emf}$	$C_T(mom)$
0	0	0.272	0.0897	0.0584	-	0.148	0.148
2	0	0.272	0.0913	0.0615	0.0066	0.159	0.159
4	0	0.273	0.0960	0.0708	0.0263	0.193	0.193
4	0.5	0.259	0.0910	0.1200	0.161	0.372	0.375
4	-0.5	0.289	0.1010	0.0218	-0.108	0.0148	0.0119
0.4	500	0.119	0.0386	0.549	1.36	1.95	1.98
0.4	-500	0.408	0.123	-0.444	-1.36	-1.68	-1.70
0.1	2000	0.235	0.0781	0.182	0.340	0.600	0.607
0.1	-2000	0.308	0.100	-0.066	-0.340	-0.306	-0.313
0.1	5000	0.178	0.0592	0.366	0.850	1.28	1.29
0.1	-5000	0.360	0.115	-0.254	-0.850	-0.989	-1.01

Q : Total flux of flow

C_f : Frictional resistance component

C_p : Pressure resistance component

$-C_{emf}$: Resistance component due to reaction of electromagnetic force

$C_T(mom)$: Total resistance calculated by momentum loss

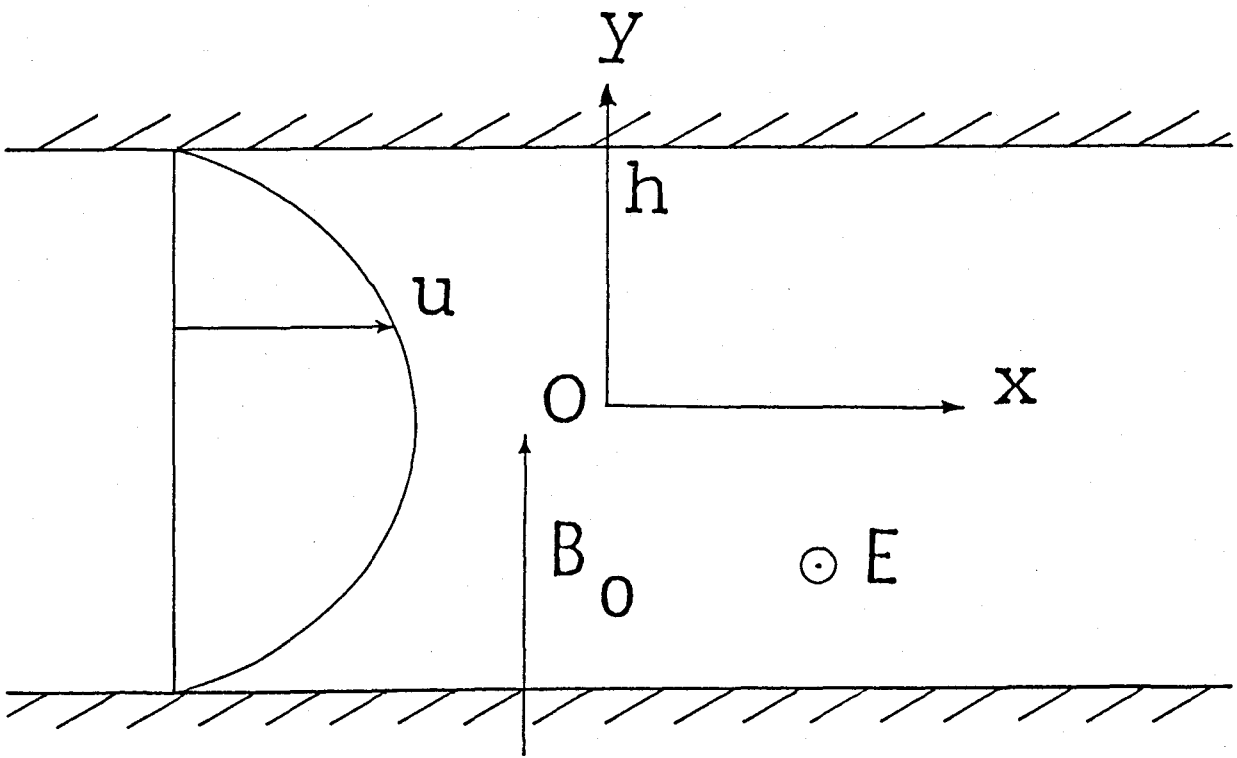
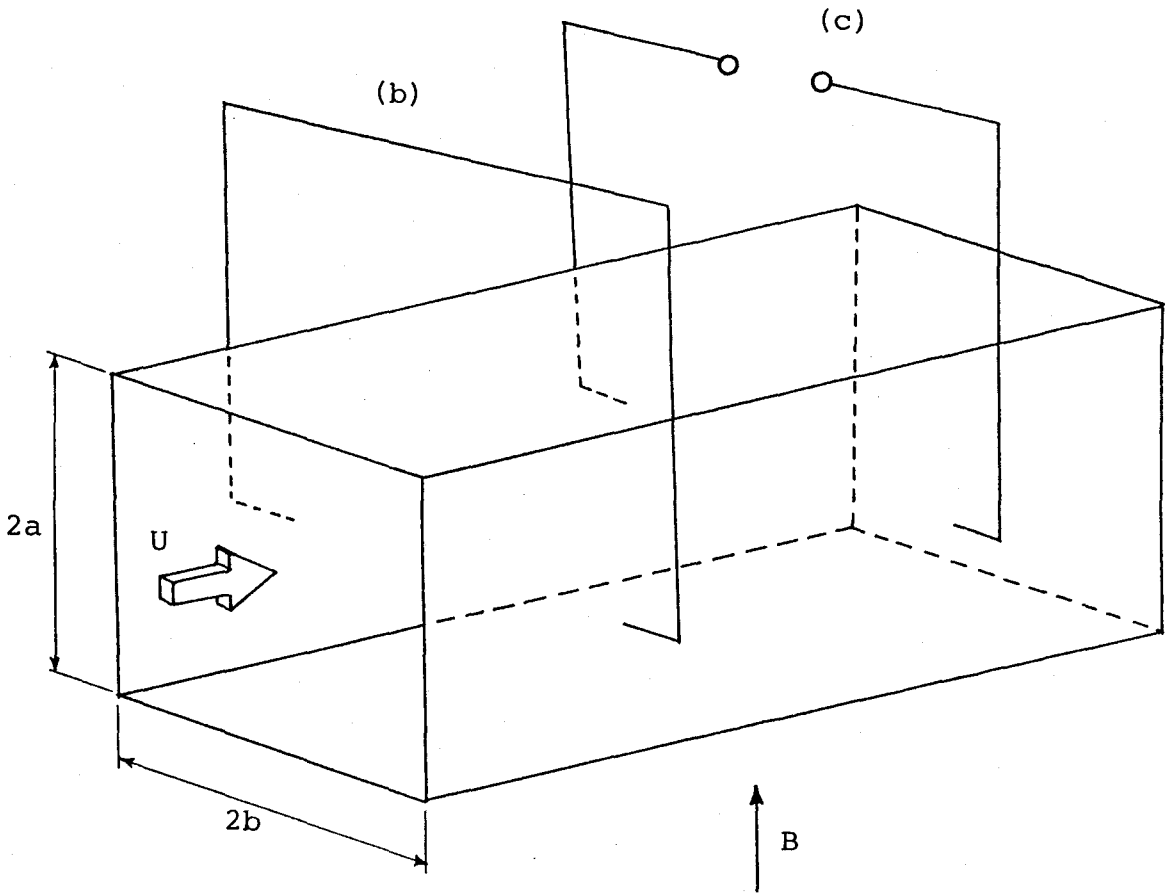


Fig. 3-1 Coordinate system of Hartmann Flow



(b) short circuit condition

(c) open circuit condition

Fig. 3-2 Illustration of Hartmann flow

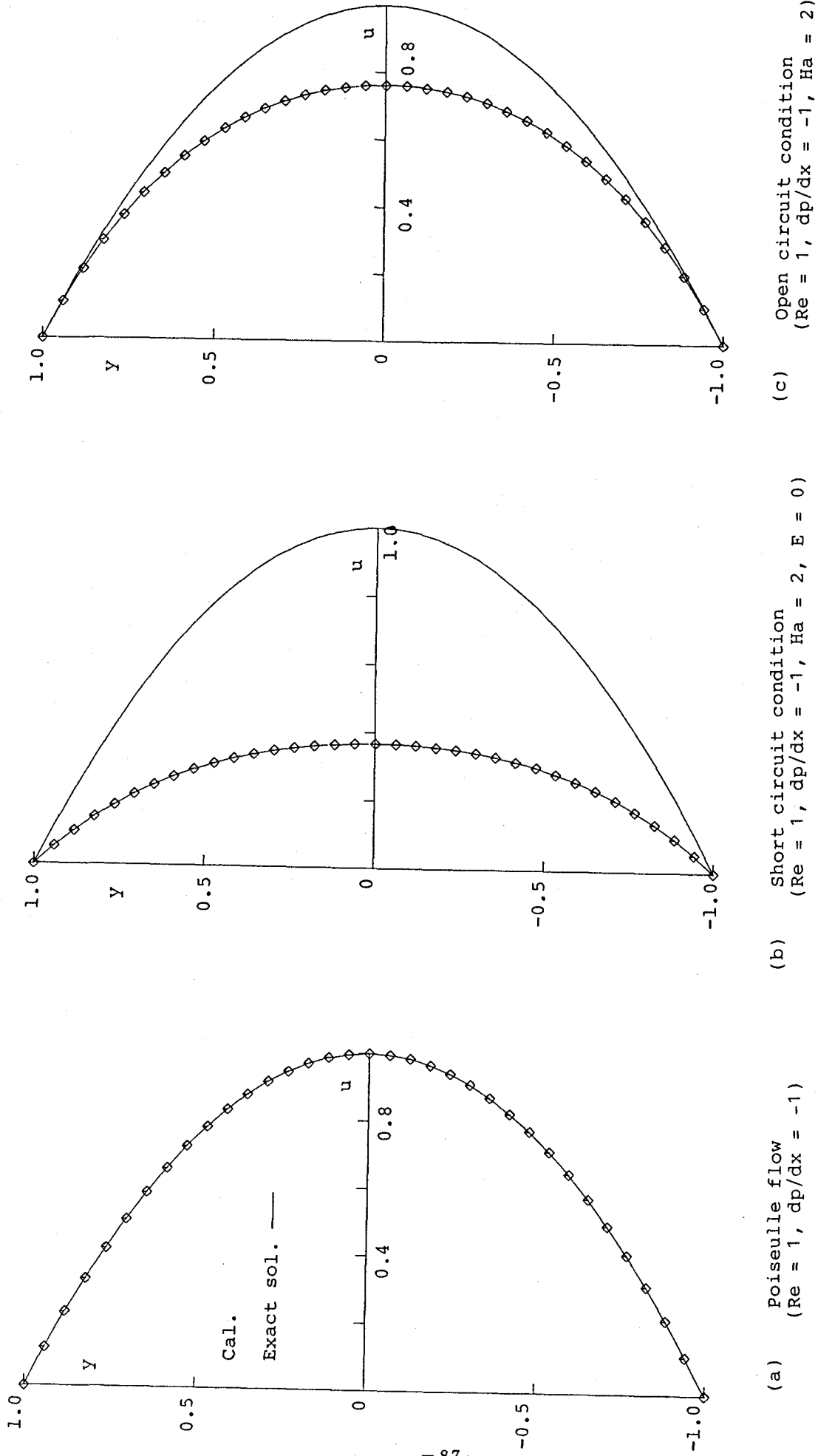


Fig. 3-3 Comparison between numerical solution and exact solution of Hartmann flow

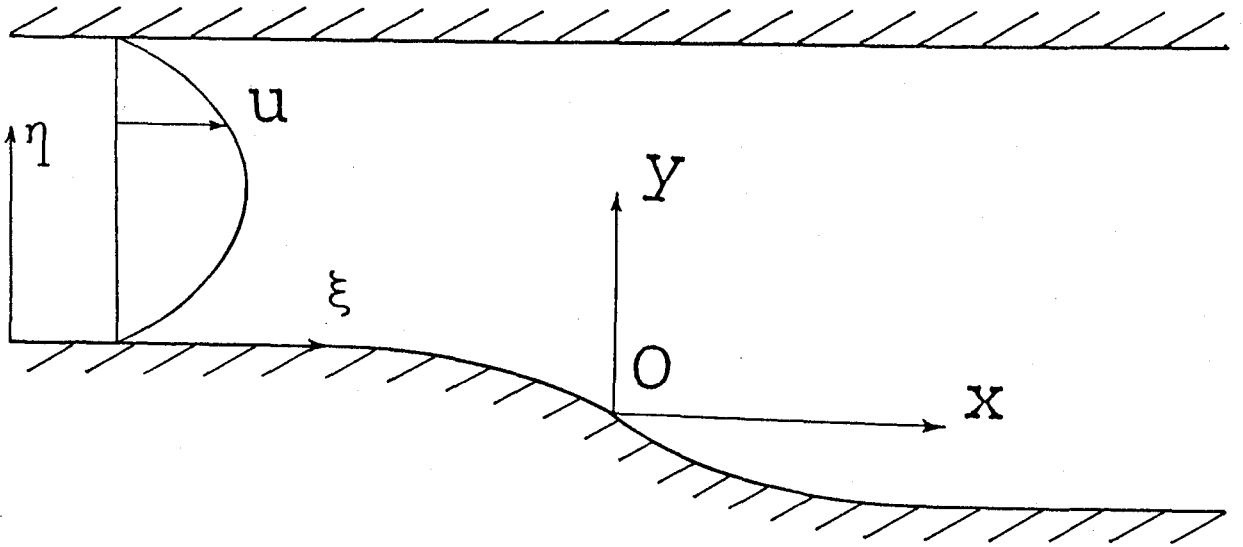


Fig. 3-4 Coordinate system of duct flow

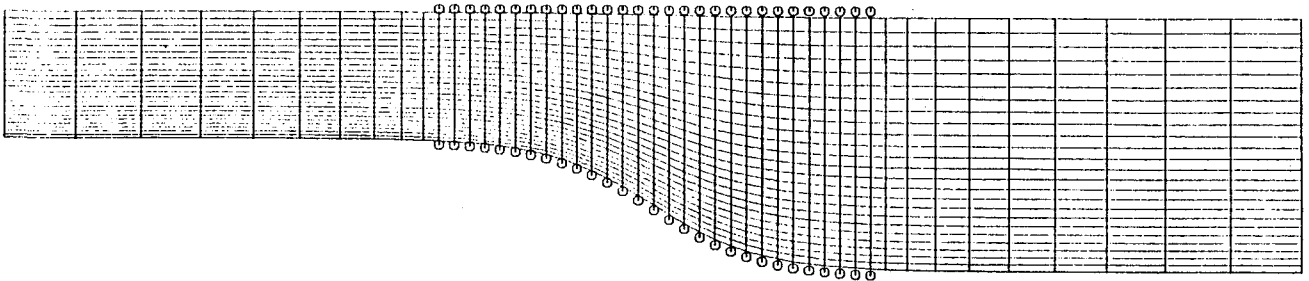


Fig. 3-5 Mesh division of duct flow calculation

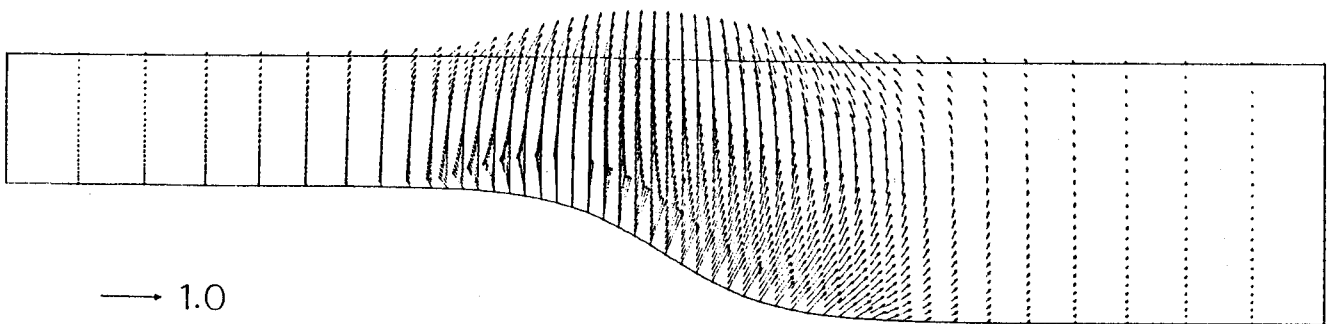
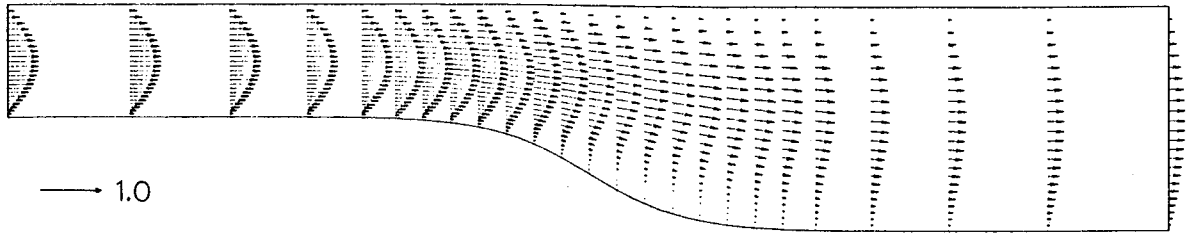
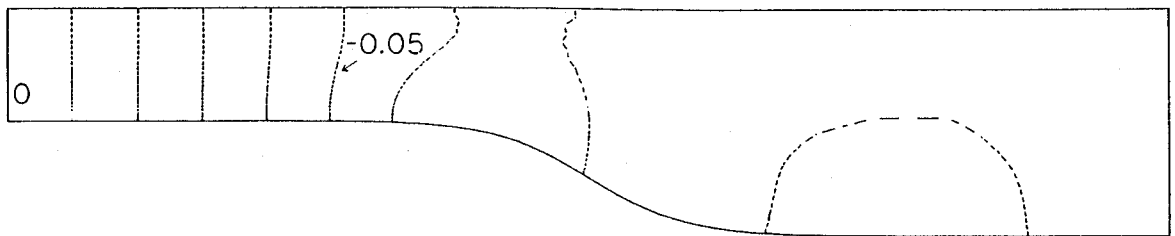


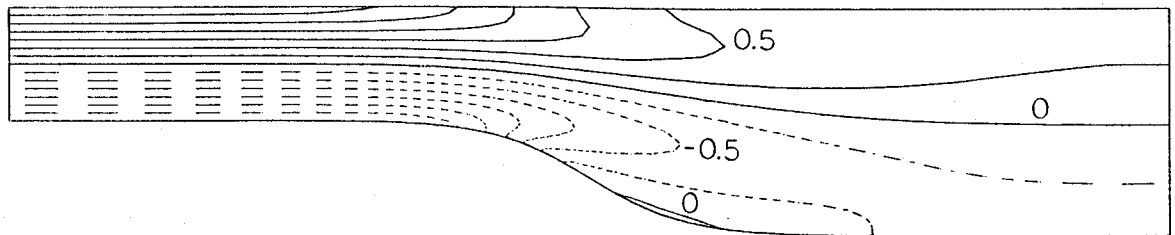
Fig. 3-6 Distribution of magnetic flux density in duct



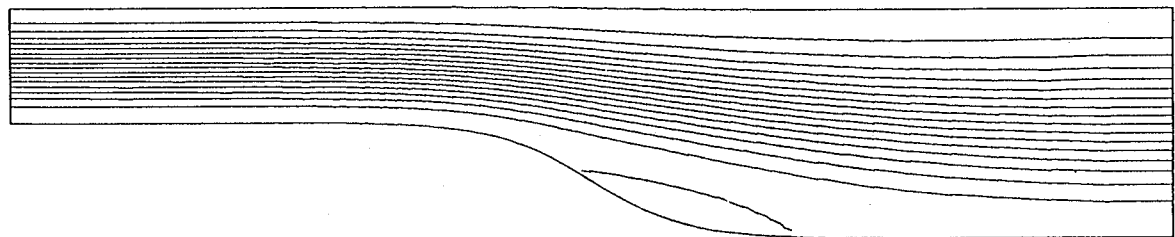
(a) Velocity distribution



(b) Pressure distribution

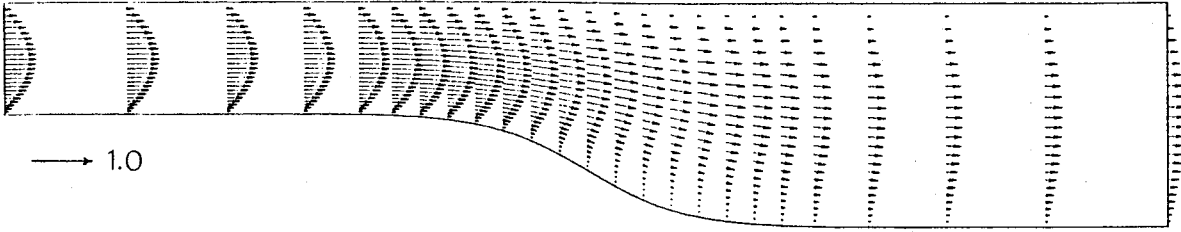


(c) Vorticity distribution

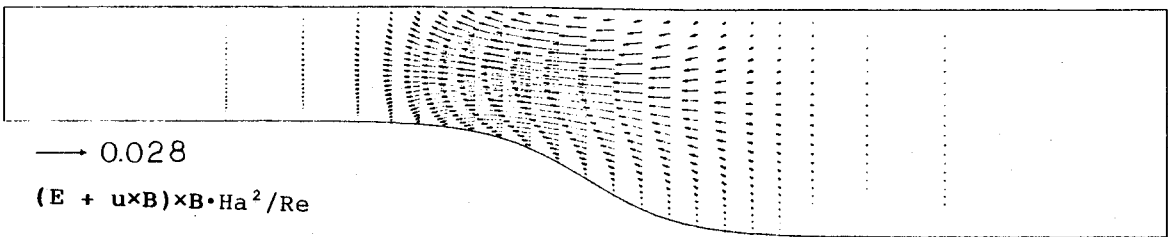


(d) Streamlines

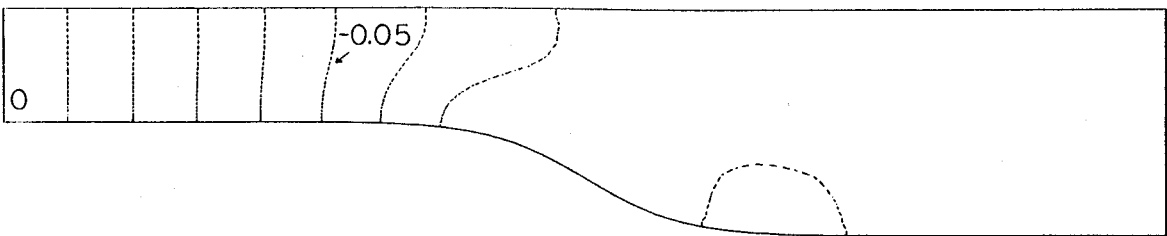
Fig. 3-7 Calculated result of duct flow in non-MHD condition($Re = 200$)



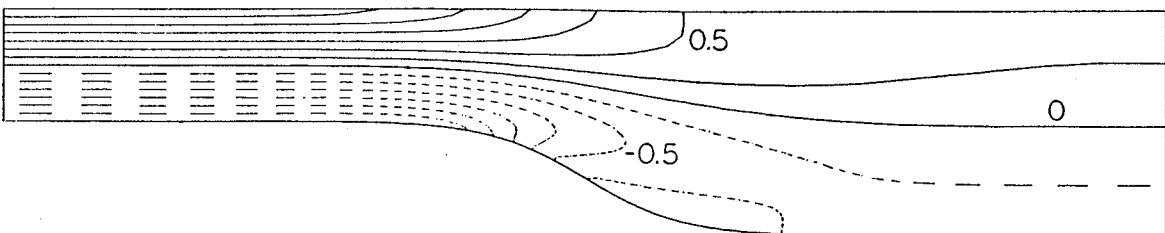
(a) Velocity distribution



(b) Lorentz force distribution

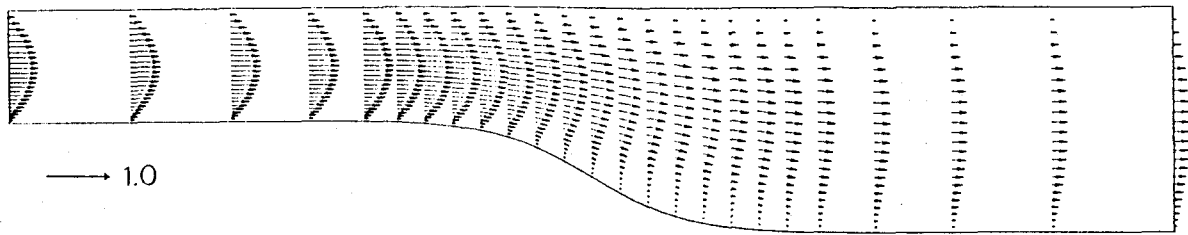


(c) Pressure distribution

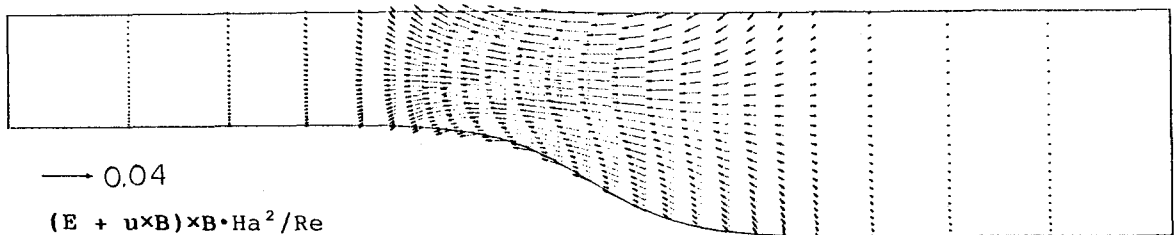


(d) Vorticity distribution

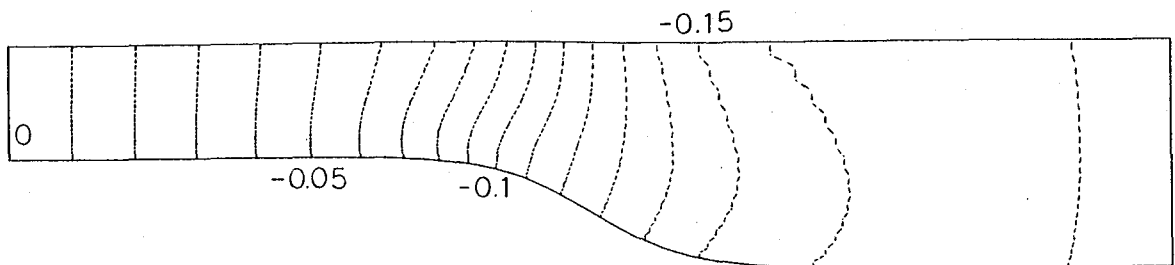
Fig. 3-8 Calculated result of duct flow
(Re = 200, Ha = 4, E = 0)



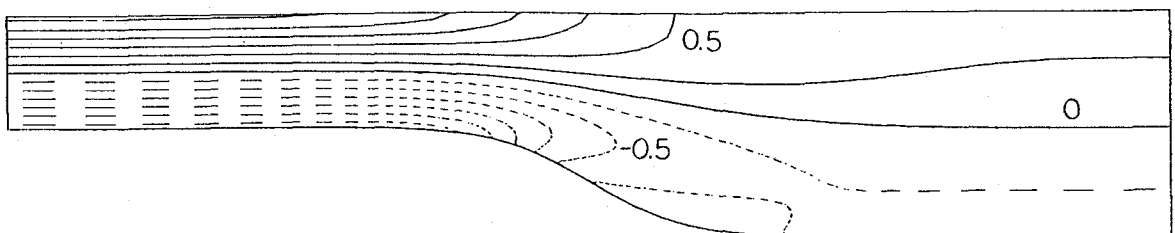
(a) Velocity distribution



(b) Lorentz force distribution

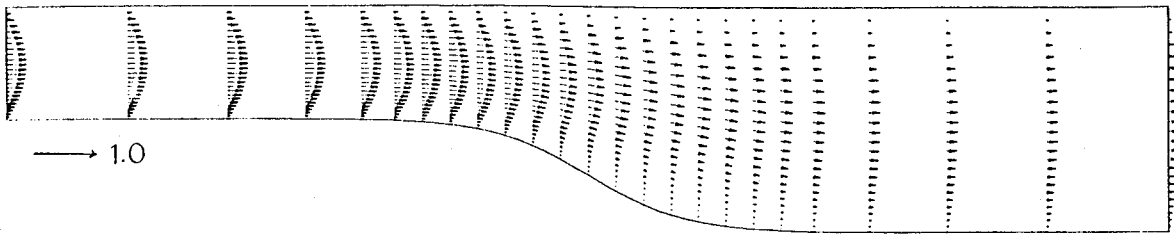


(c) Pressure distribution

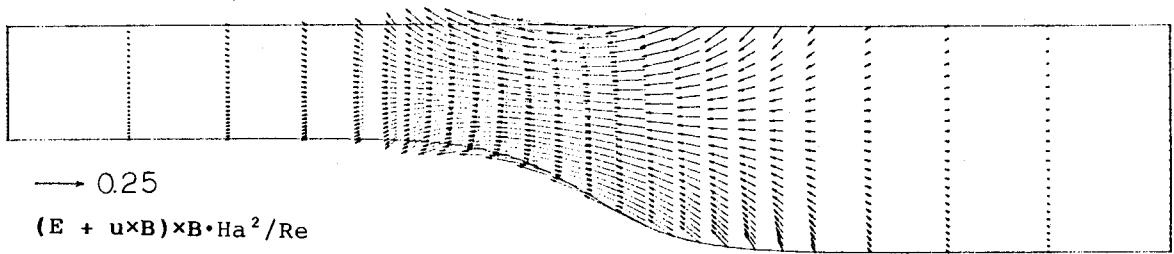


(d) Vorticity distribution

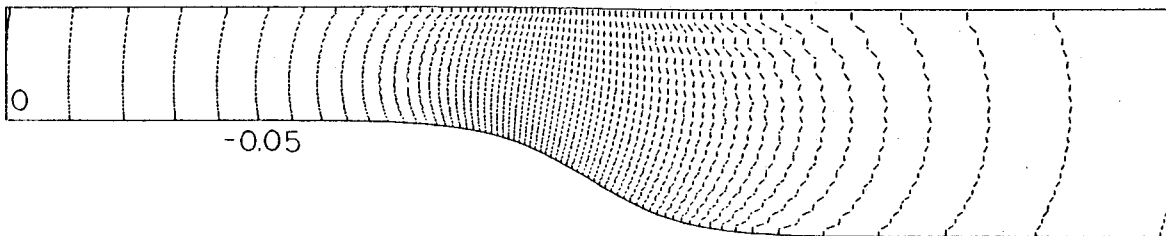
Fig. 3-9 Calculated result of duct flow
($Re = 200$, $Ha = 4$, $E = 0.5$)



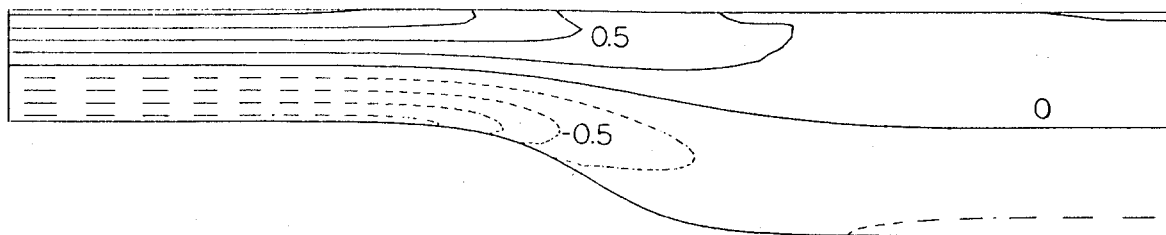
(a) Velocity distribution



(b) Lorentz force distribution



(c) Pressure distribution



(d) Vorticity distribution

Fig.3-10 Calculated result of duct flow
(Re = 200, Ha = 0.1, E = 5000)

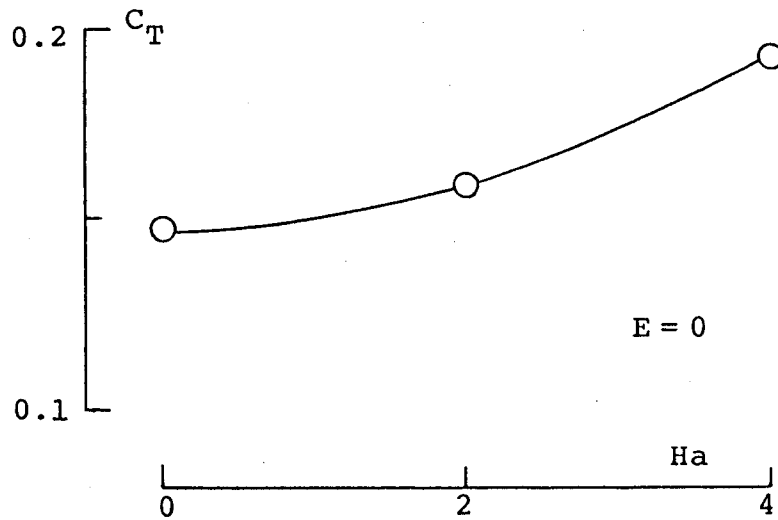


Fig.3-11 Relation between strength of magnetic flux density and resistance acting on duct

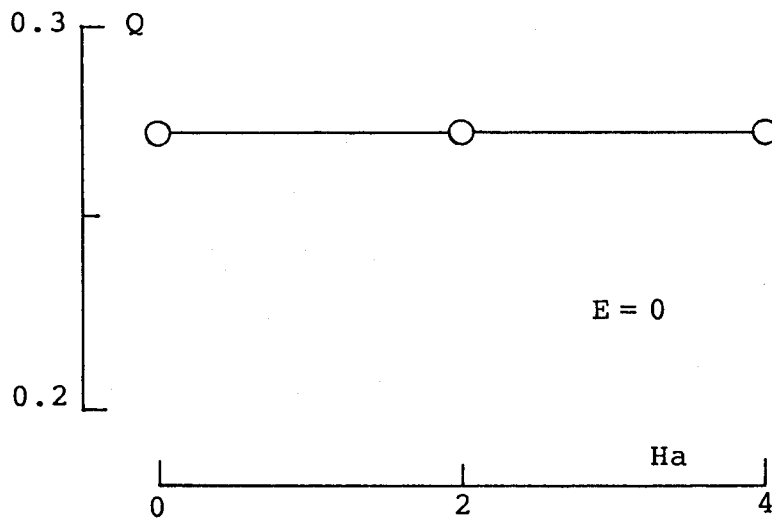


Fig.3-12 Relation between strength of magnetic flux density and flux of flow

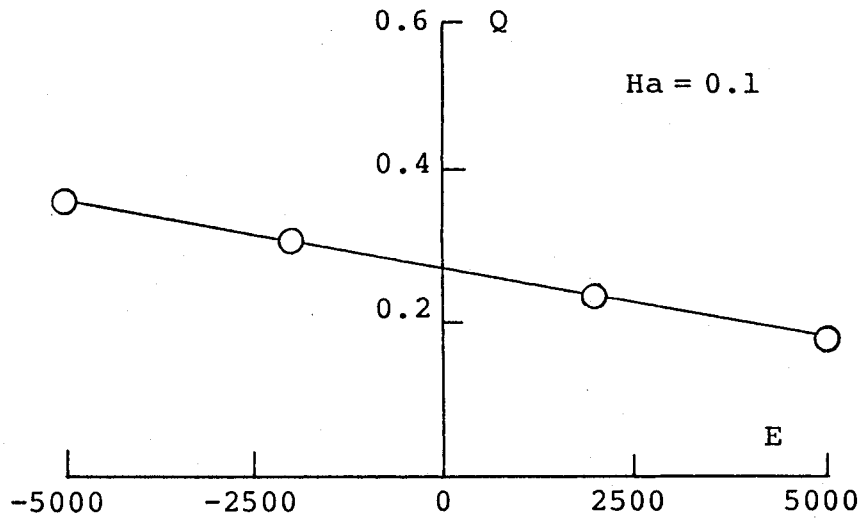


Fig.3-13 Relation between strength of applied electric field and flux of flow

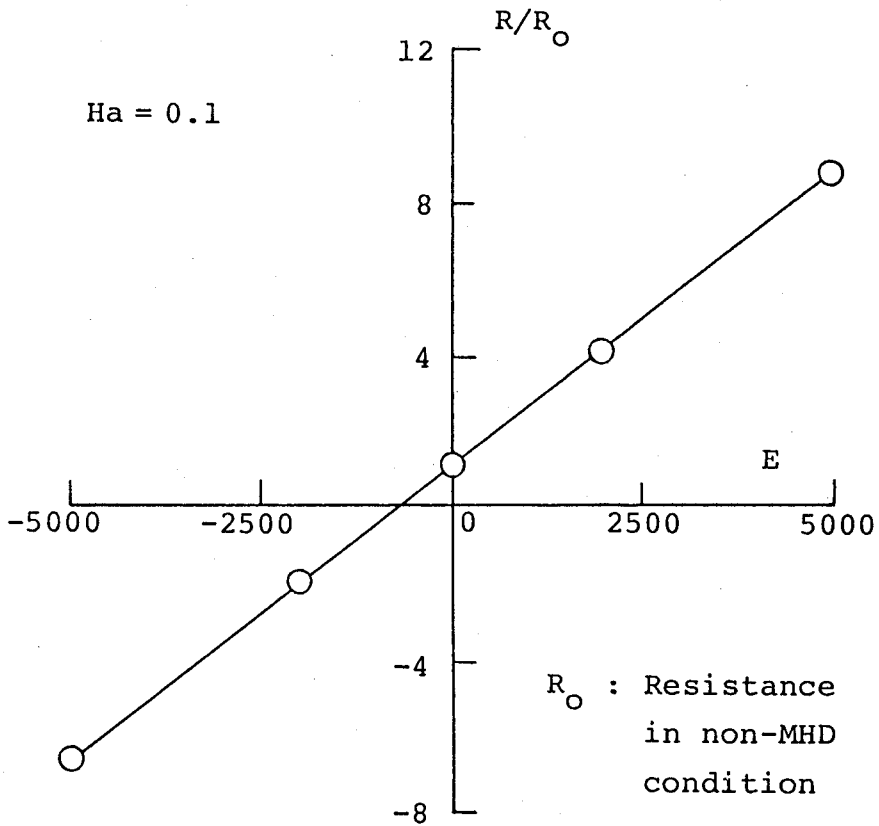


Fig.3-14 Relation between strength of applied electric field and resistance acting on duct

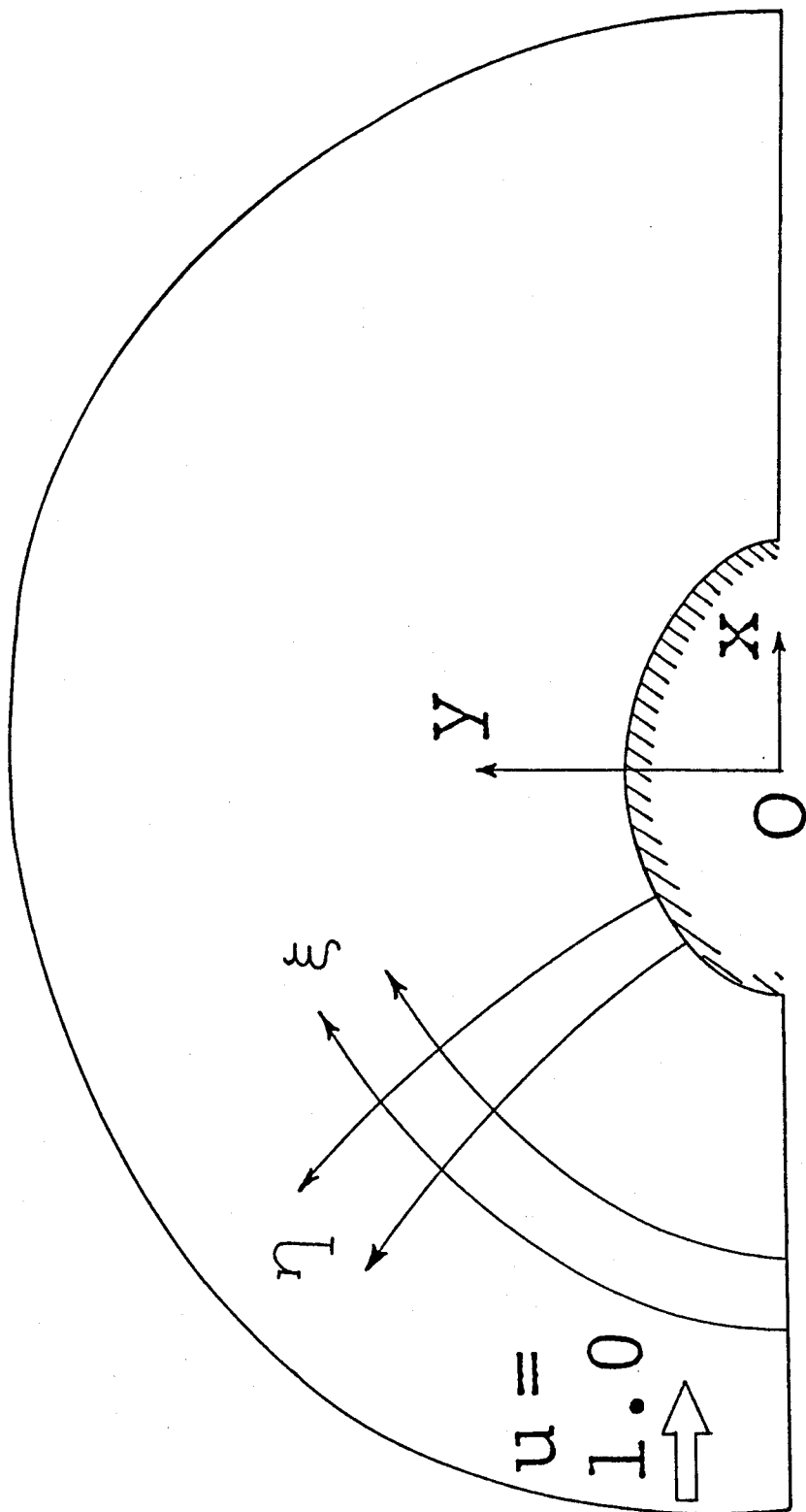


Fig.3-15 Coordinate system of flow field around elliptic cylinder

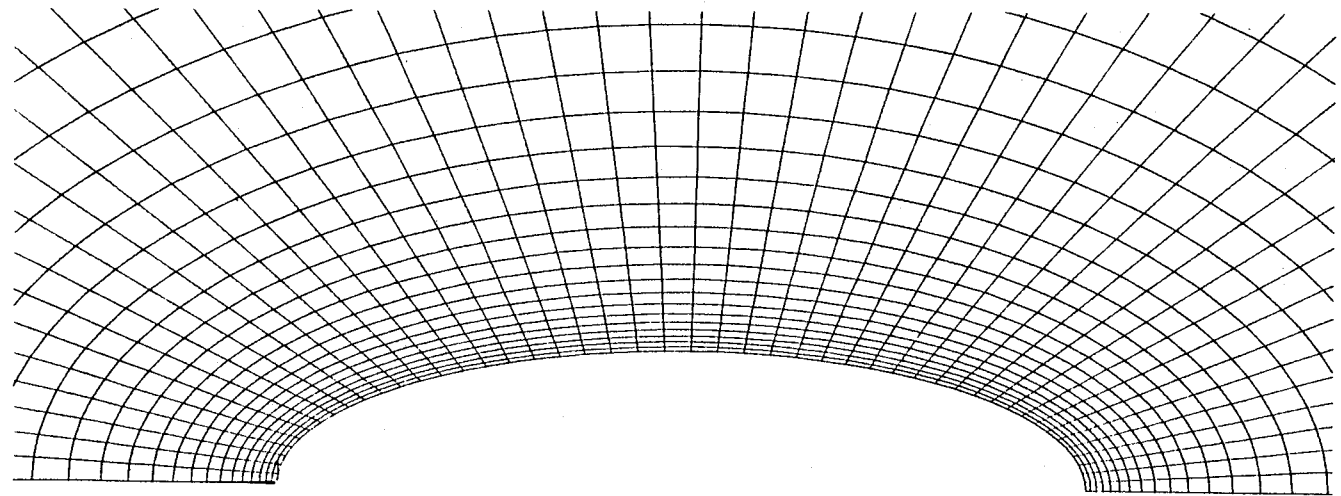
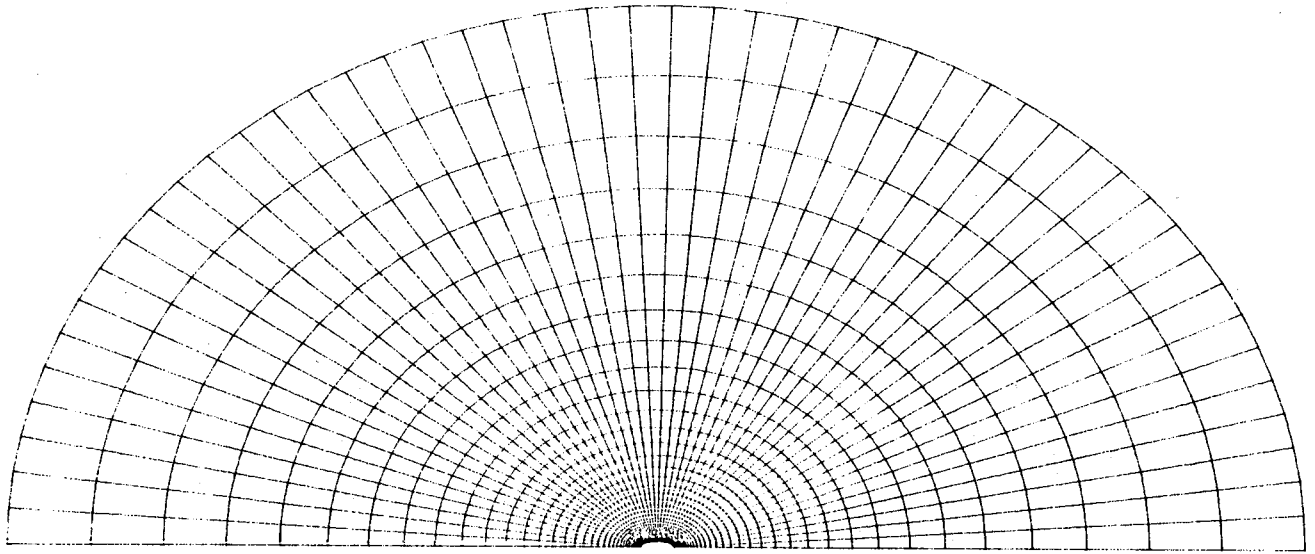
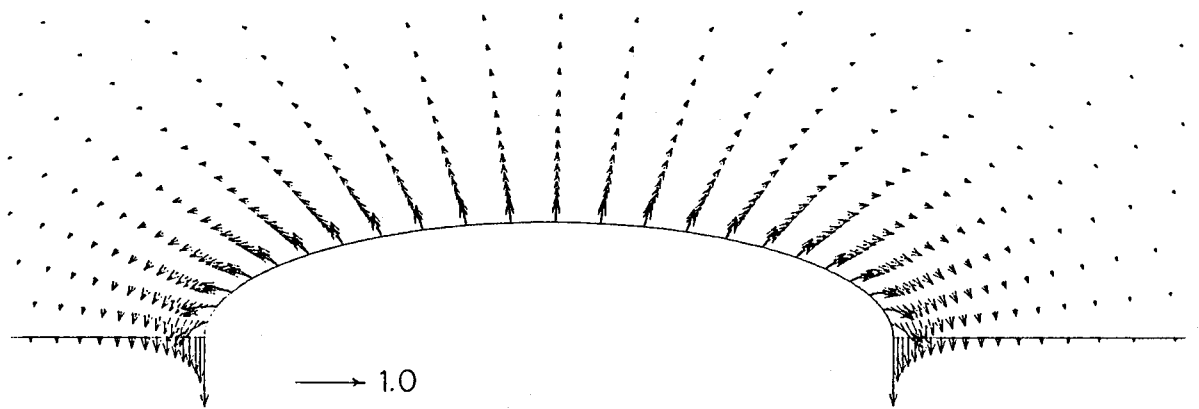
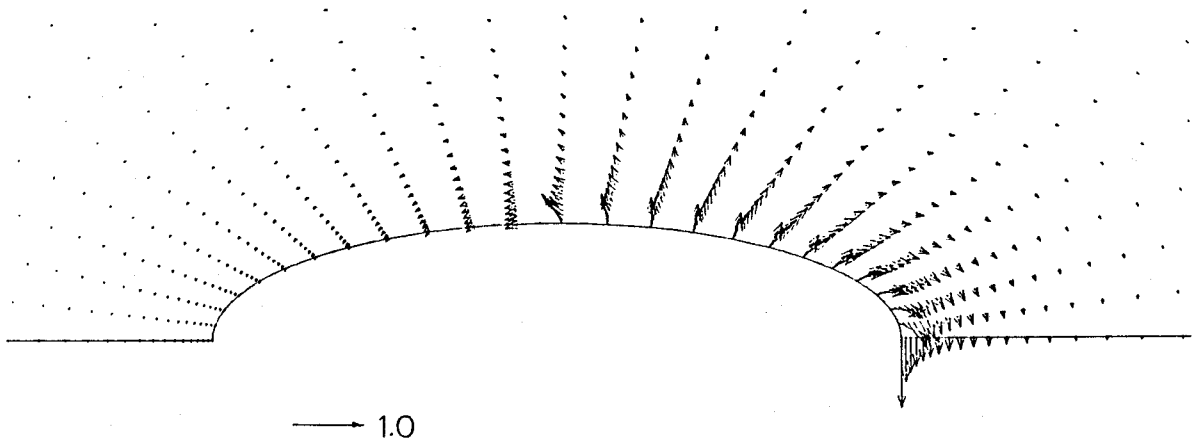


Fig.3-16 Mesh division for calculation of flow around elliptic cylinder

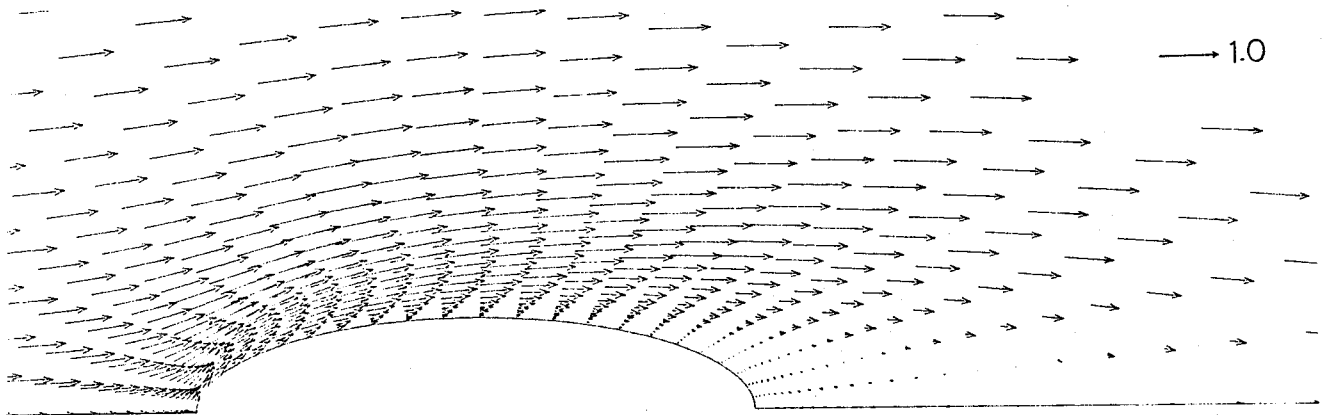


(a) Type A

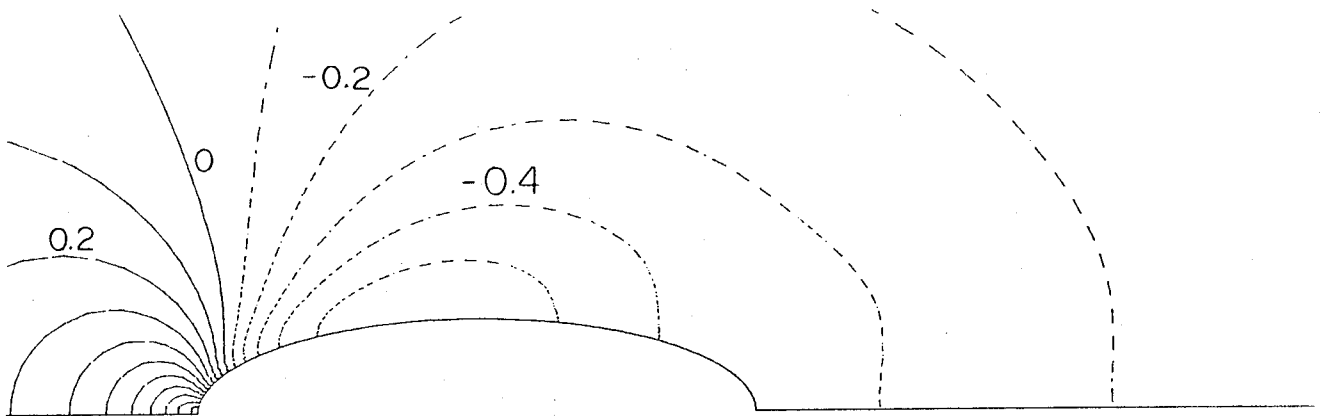


(b) Type B

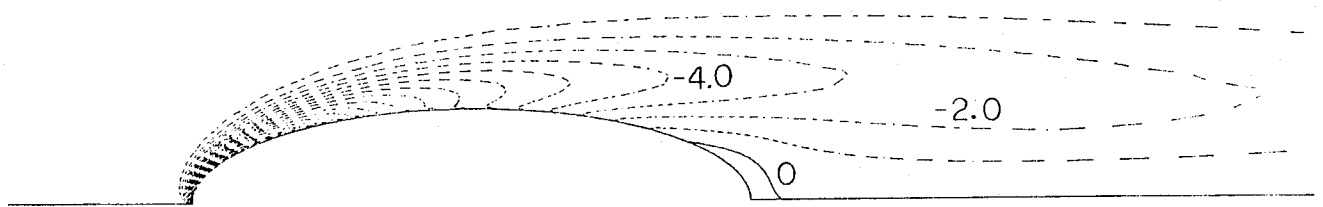
Fig.3-17 Distribution of magnetic flux density around elliptic cylinder



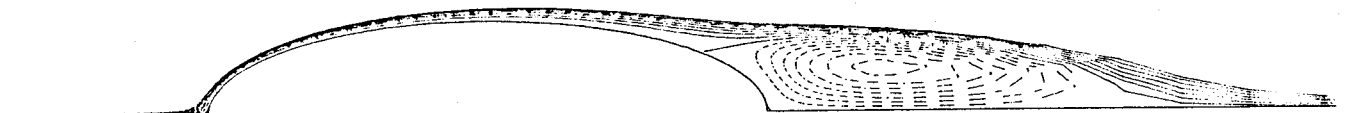
(a) Velocity distribution



(b) Pressure distribution

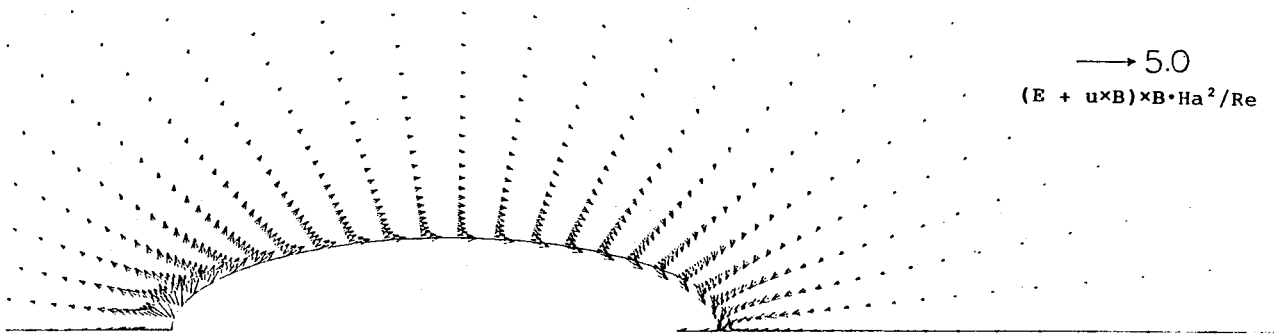


(c) Vorticity distribution

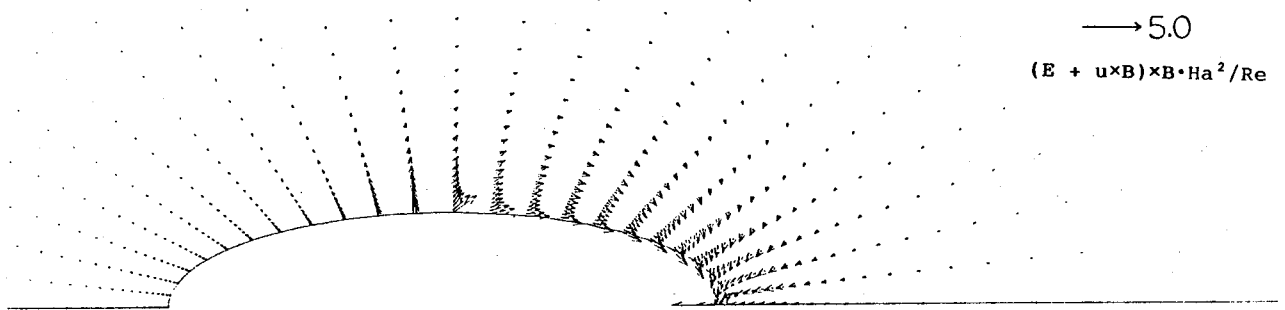


(d) Streamlines

Fig.3-18 Calculated result of flow around elliptic cylinder in non-MHD condition ($Re = 200$)

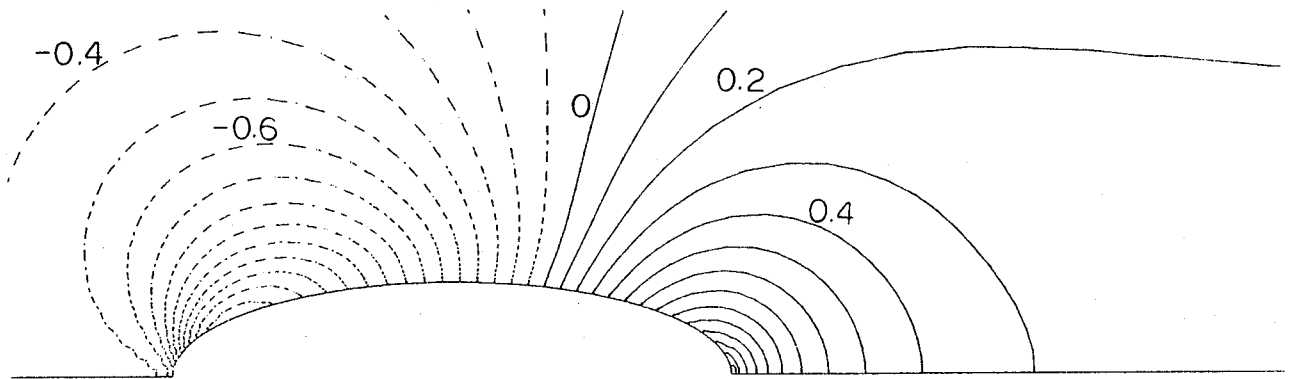


(a) Case in magnetic field Type A

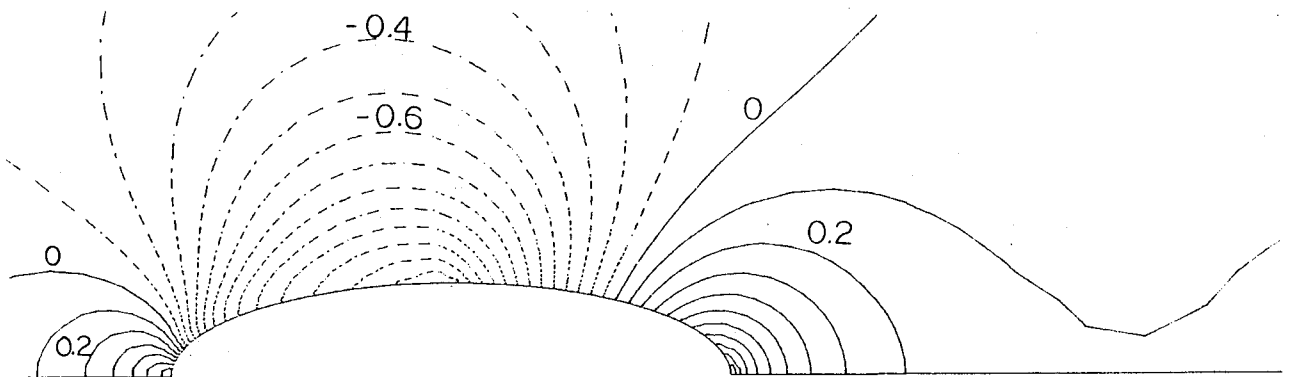


(b) Case in magnetic field Type B

Fig.3-19 Lorentz force distribution ($Ha=1.0, E=-1000$)

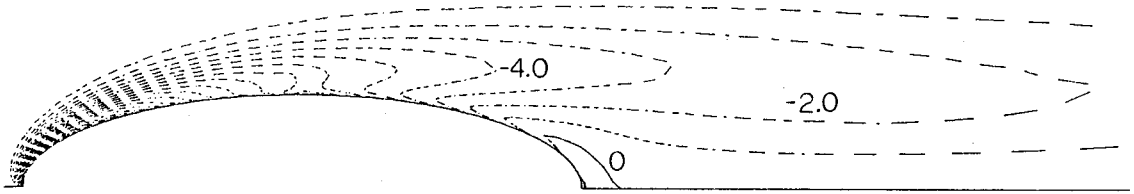


(a) Case in magnetic field Type A

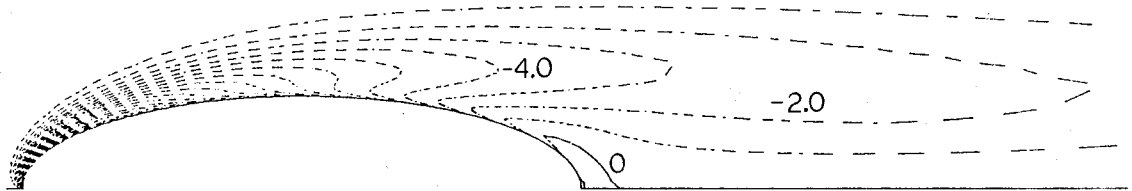


(b) Case in magnetic field Type B

Fig.3-20 Pressure distribution ($Re=200, Ha=1.0, E=-1000$)

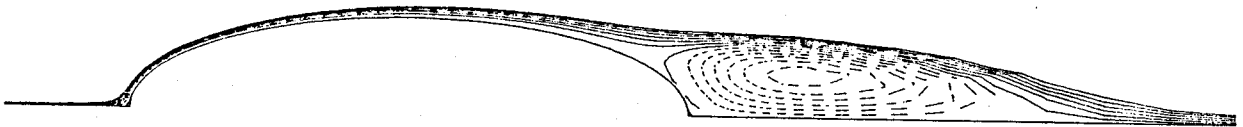


(a) Case in magnetic field Type A

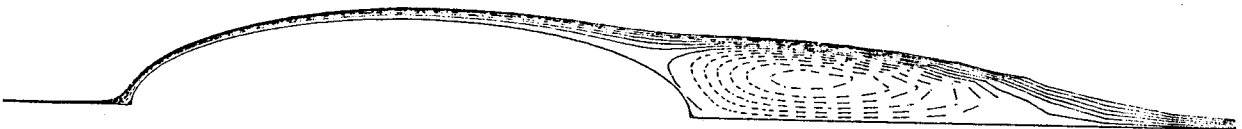


(b) Case in magnetic field Type B

Fig.3-21 Vorticity distribution ($Re=200, Ha=1.0, E=-1000$)

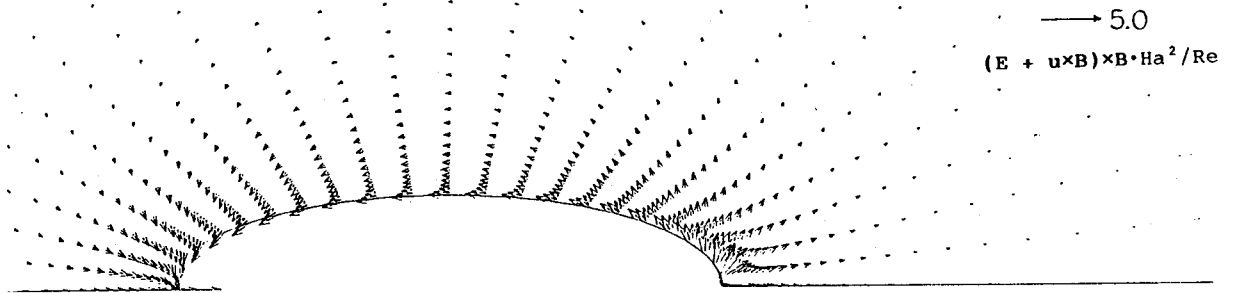


(a) Case in magnetic field Type A

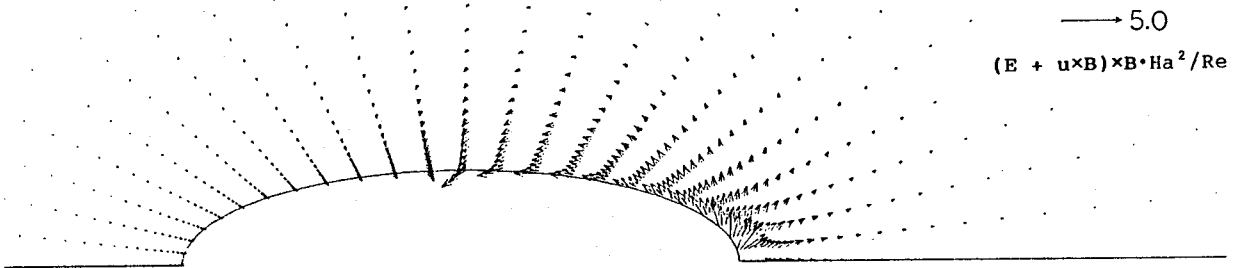


(b) Case in magnetic field Type B

Fig.3-22 Streamlines ($Re=200, Ha=1.0, E=-1000$)

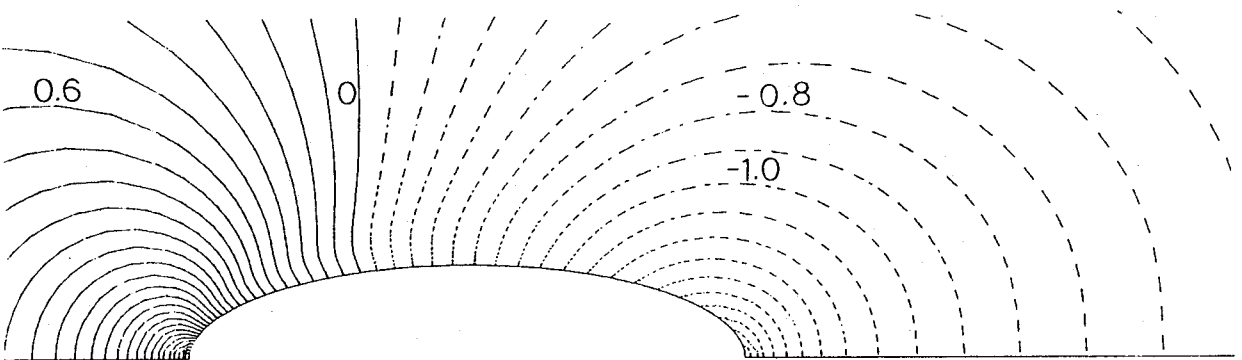


(a) Case in magnetic field Type A

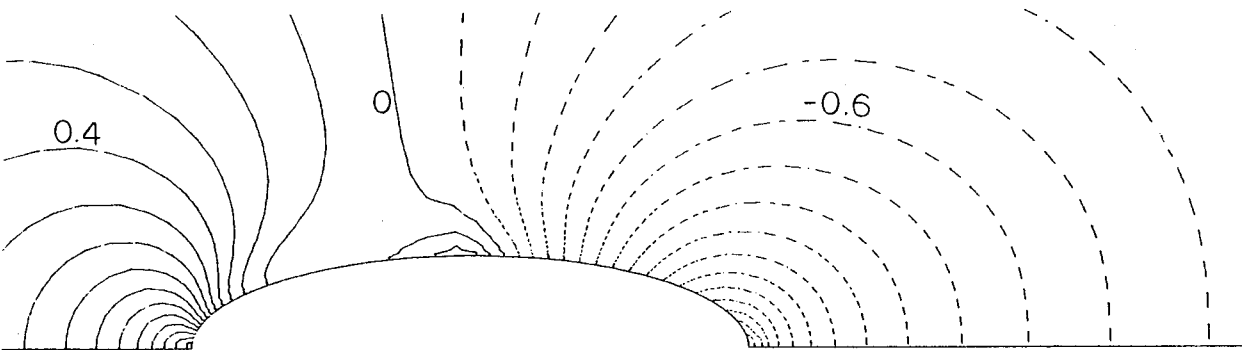


(b) Case in magnetic field Type B

Fig.3-23 Lorentz force distribution ($Ha=1.0, E=1000$)

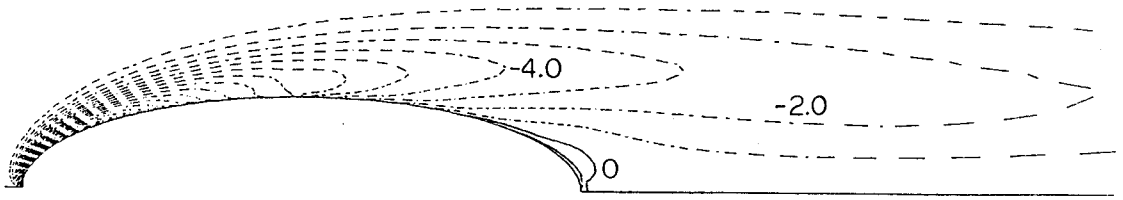


(a) Case in magnetic field Type A

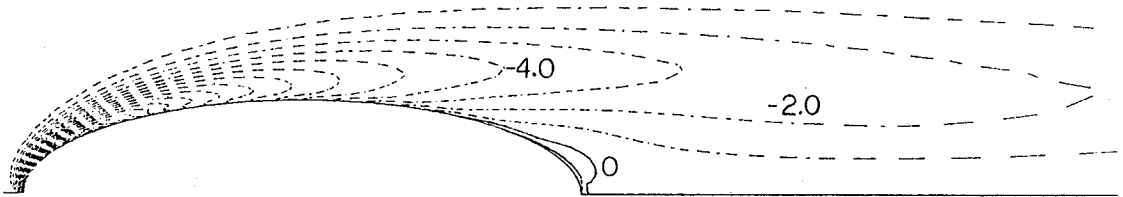


(b) Case in magnetic field Type B

Fig.3-24 Pressure distribution ($Re=200, Ha=1.0, E=1000$)



(a) Case in magnetic field Type A



(b) Case in magnetic field Type B

Fig.3-25 Vorticity distribution ($Re=200, Ha=1.0, E=1000$)



(a) Case in magnetic field Type A



(b) Case in magnetic field Type B

Fig.3-26 Streamlines ($Re=200, Ha=1.0, E=1000$)

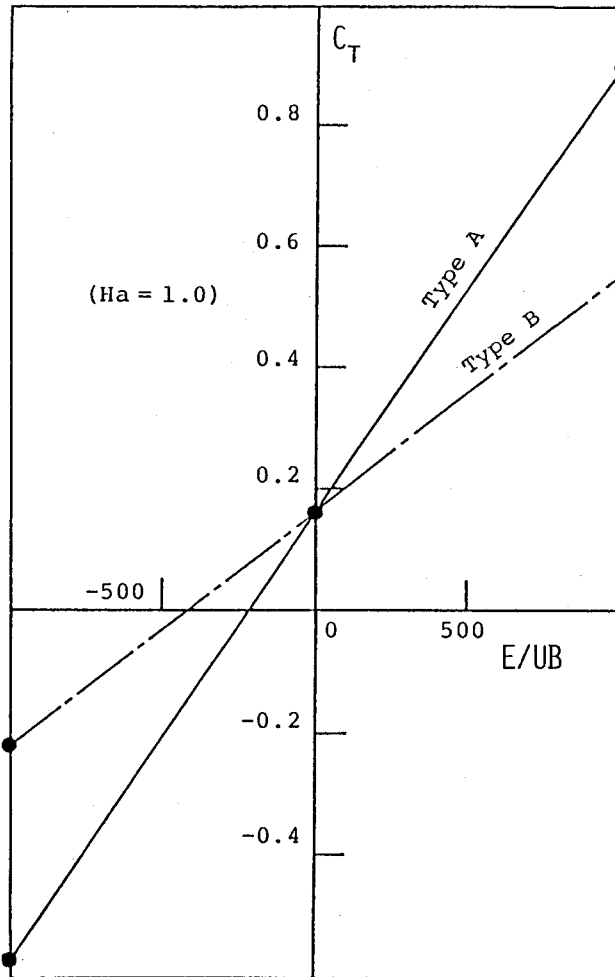


Fig.3-27 Relation between strength of applied electric field and total resistance acting on elliptic cylinder

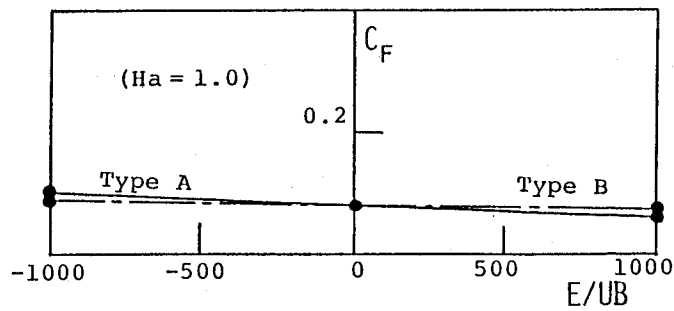


Fig.3-28 Relation between strength of applied electric field and frictional resistance acting on elliptic cylinder

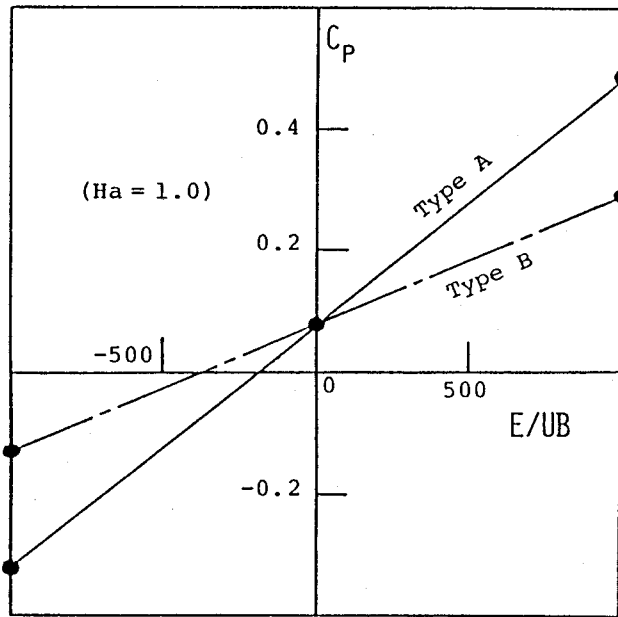


Fig.3-29 Relation between strength of applied electric field and pressure resistance acting on elliptic cylinder

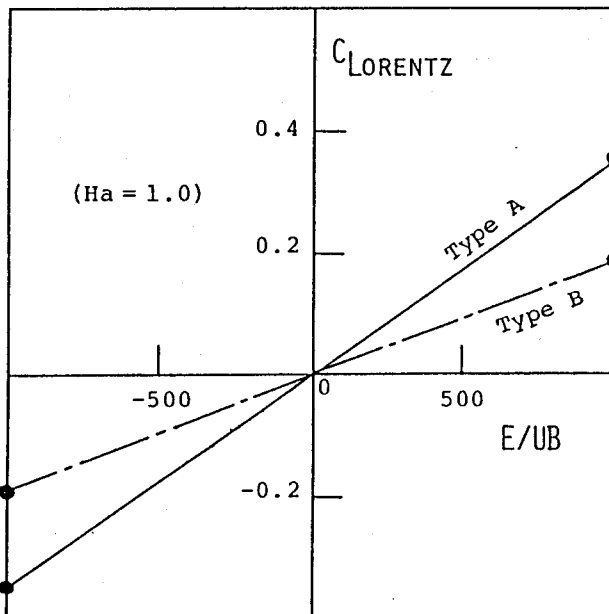


Fig.3-30 Relation between strength of applied electric field and Lorentz force resistance acting on elliptic cylinder

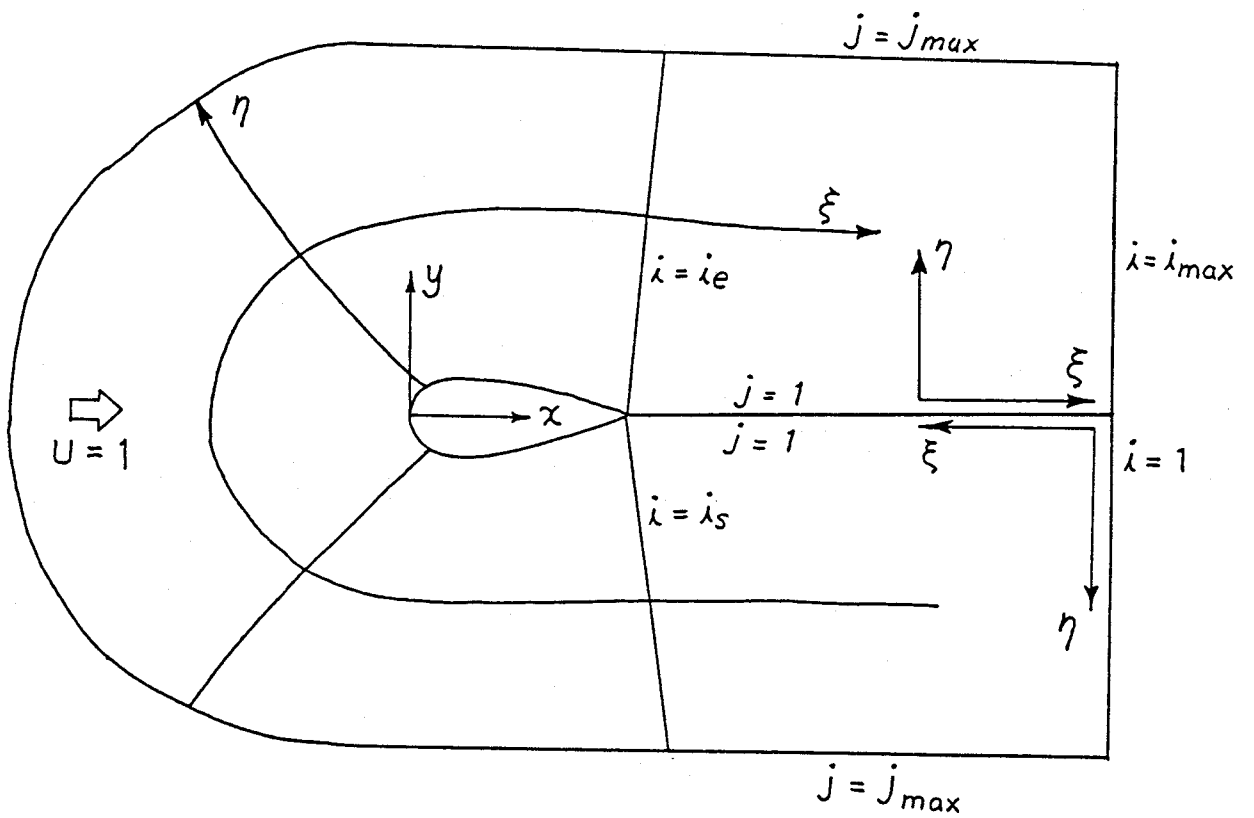


Fig.3-31 Coordinate system for C-grid topology

o : given by boundary condition

• : computational point

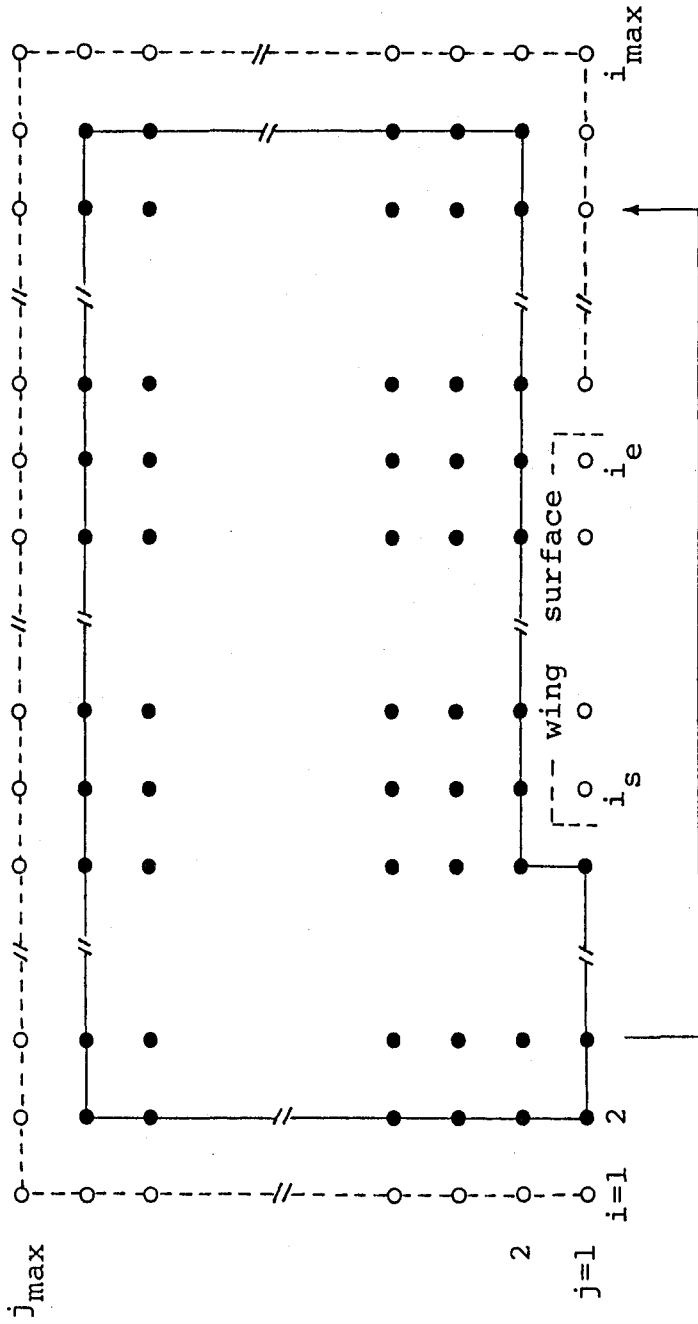


Fig. 3-32 Computational domain corresponding to C-grid topology

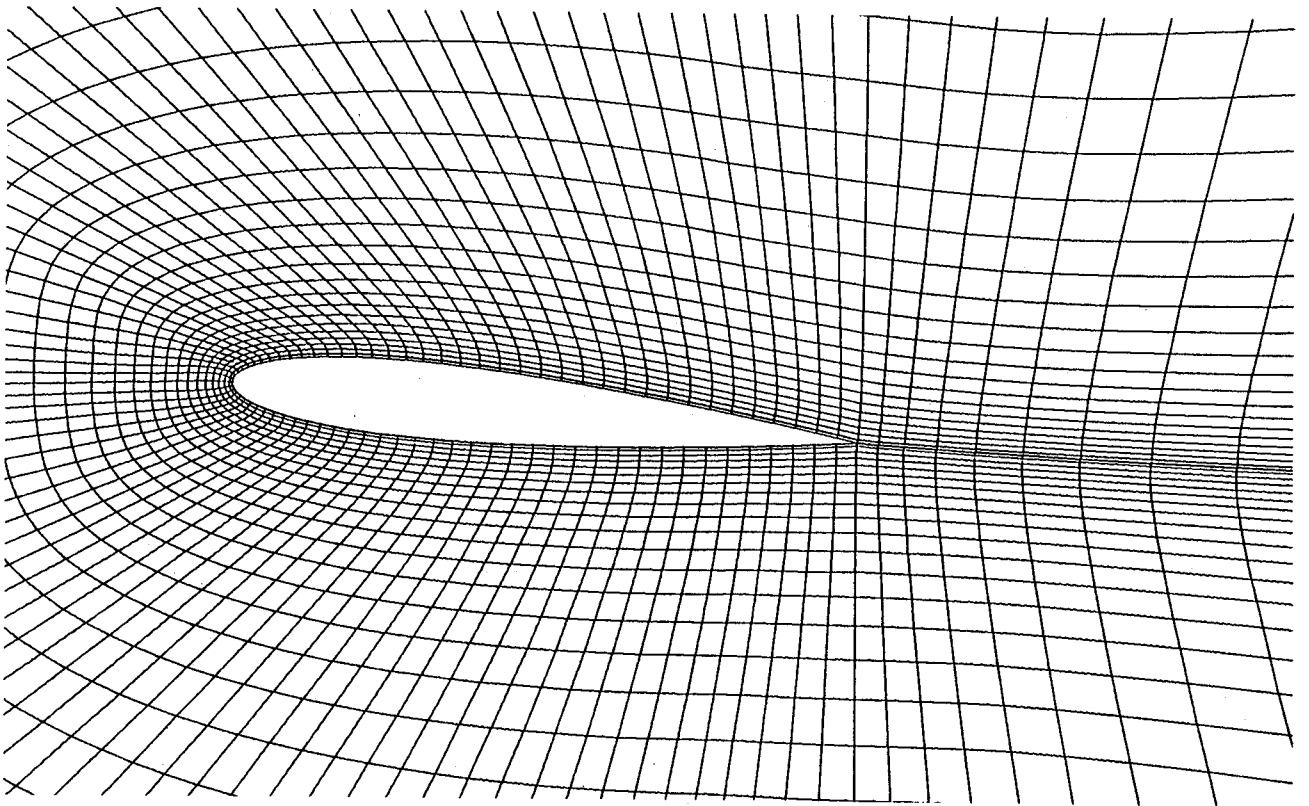


Fig.3-33 Mesh division for calculation of flow
around wing section (NACA0012)
(attack angle = 5 (deg))

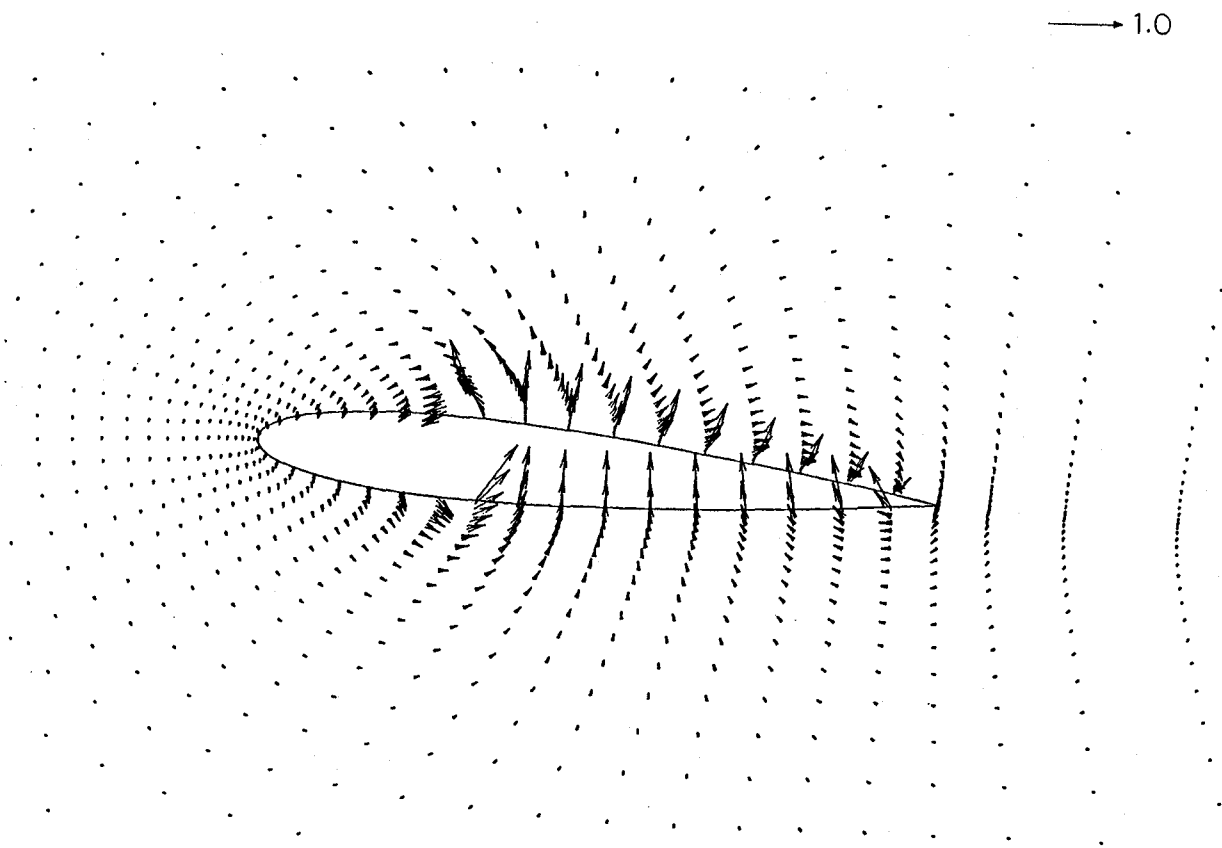
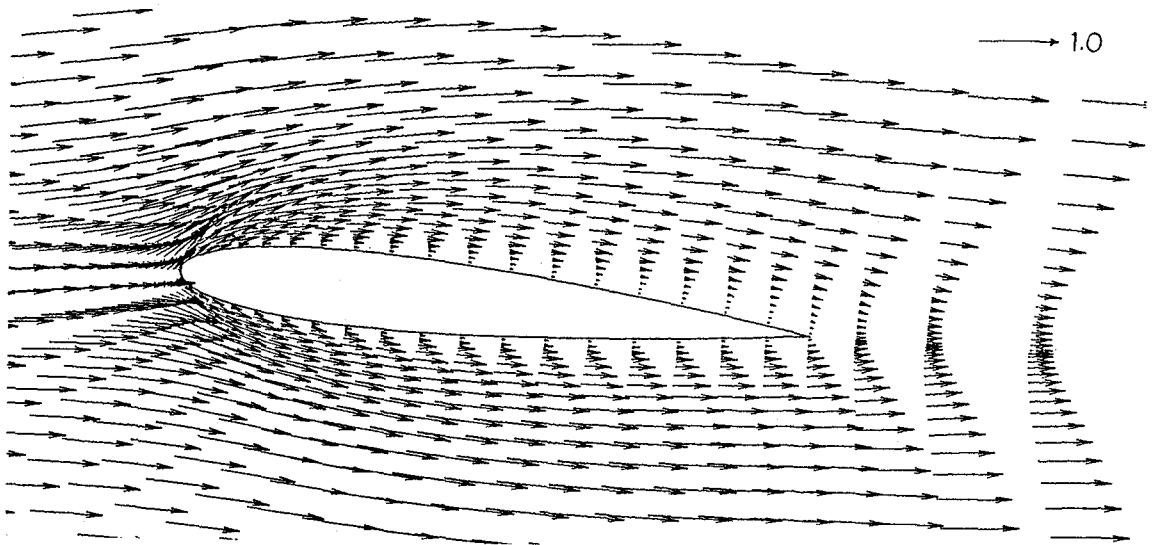
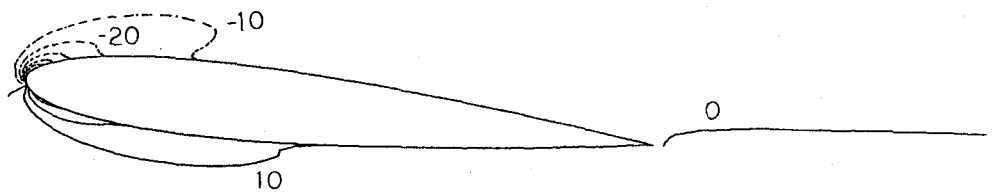


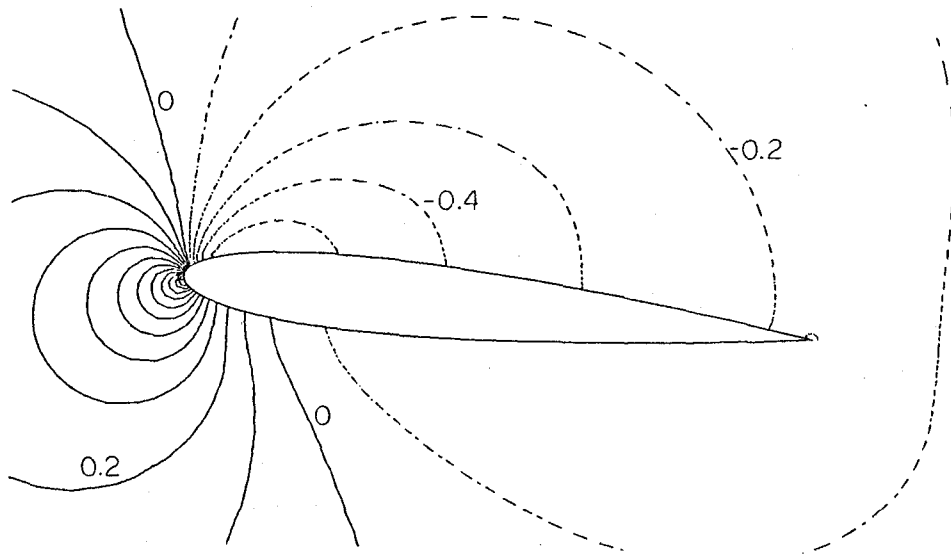
Fig.3-34 Distribution of magnetic flux density around wing section (attack angle = 5 (deg))



(a) Velocity distribution

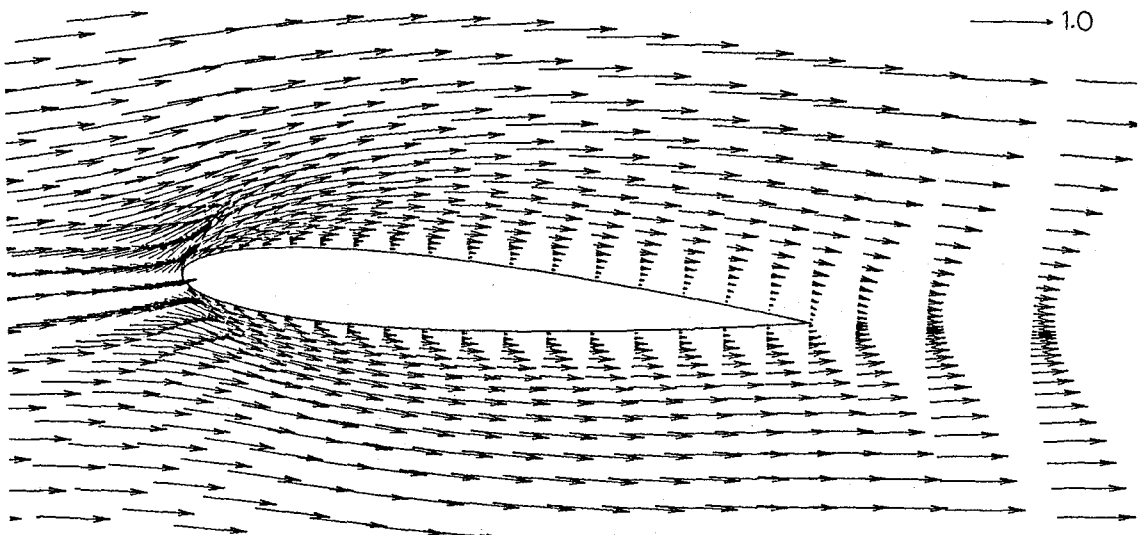


(b) Vorticity distribution

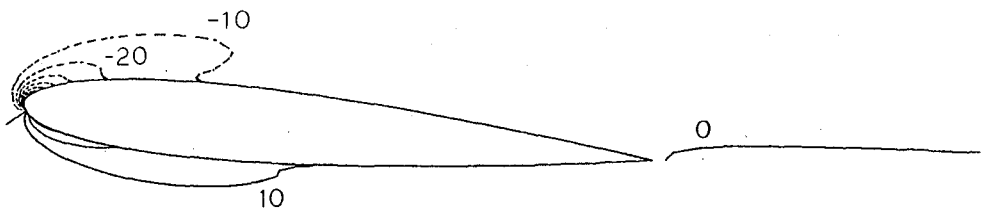


(c) Pressure distribution

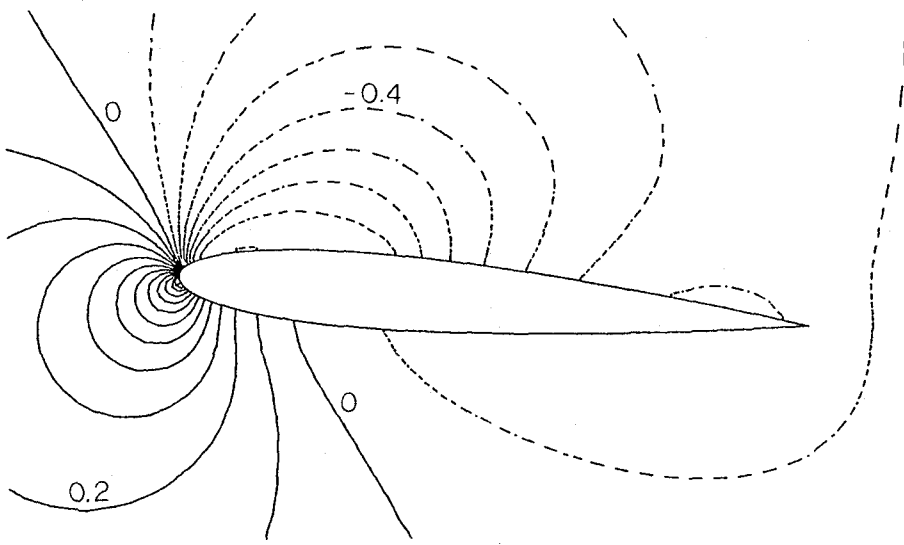
Fig.3-35 Calculated result of flow around wing section in non-MHD condition ($Re = 200$) (attack angle = 5 (deg))



(a) Velocity distribution

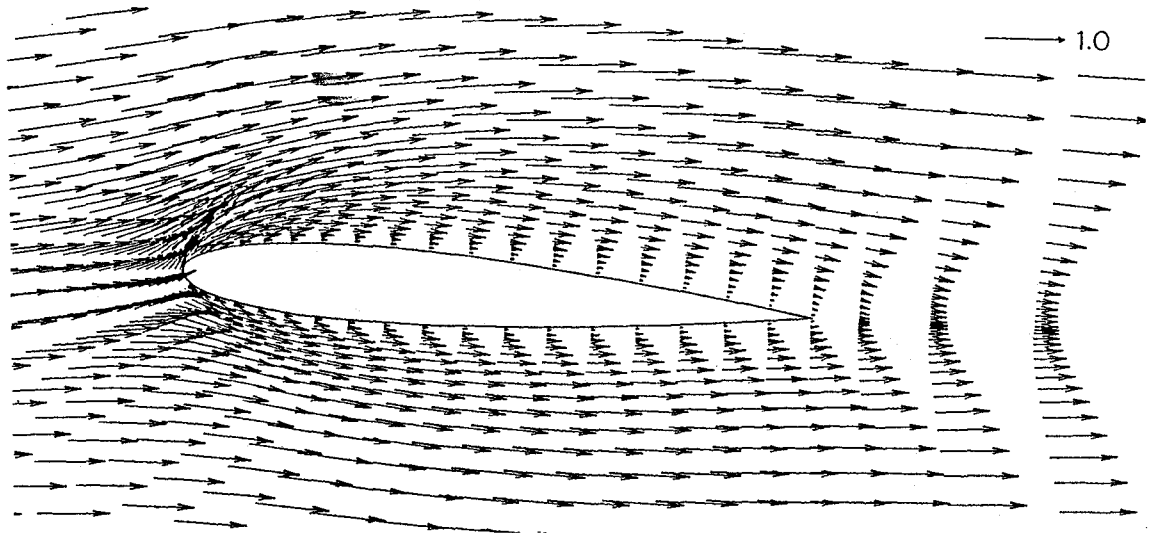


(b) Vorticity distribution

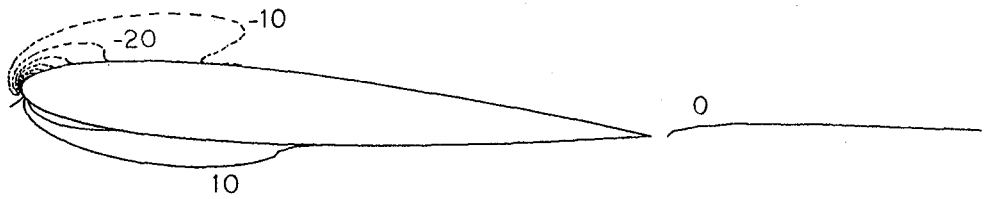


(c) Pressure distribution

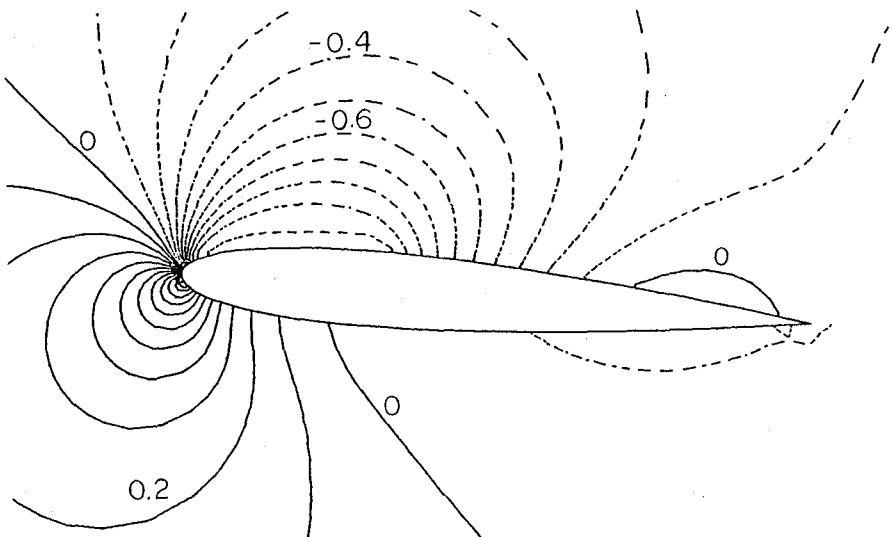
Fig.3-36 Calculated result of flow around wing section ($Re = 200$, $Ha = 1.0$, $E = -500$) (attack angle = 5 (deg))



(a) Velocity distribution

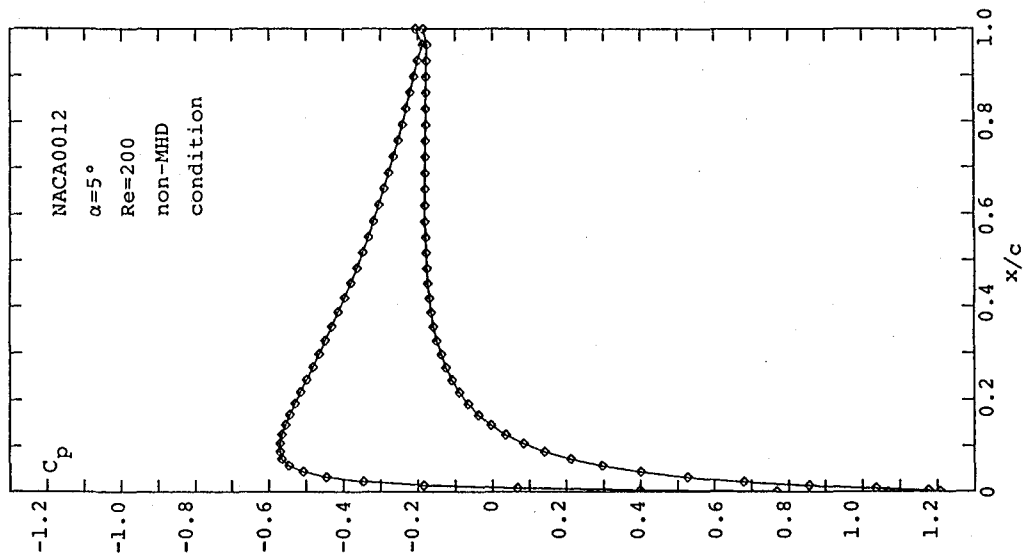


(b) Vorticity distribution

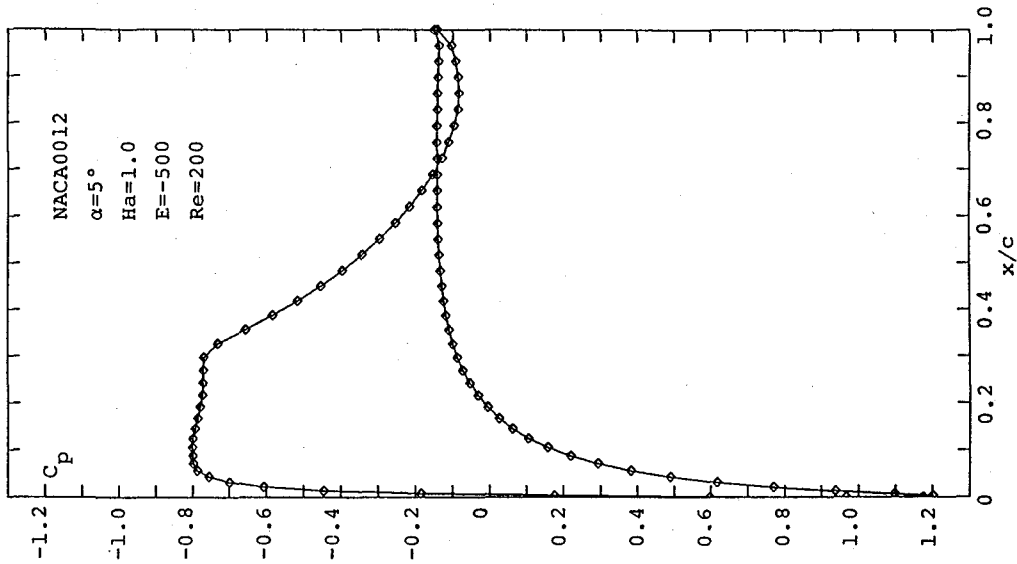


(c) Pressure distribution

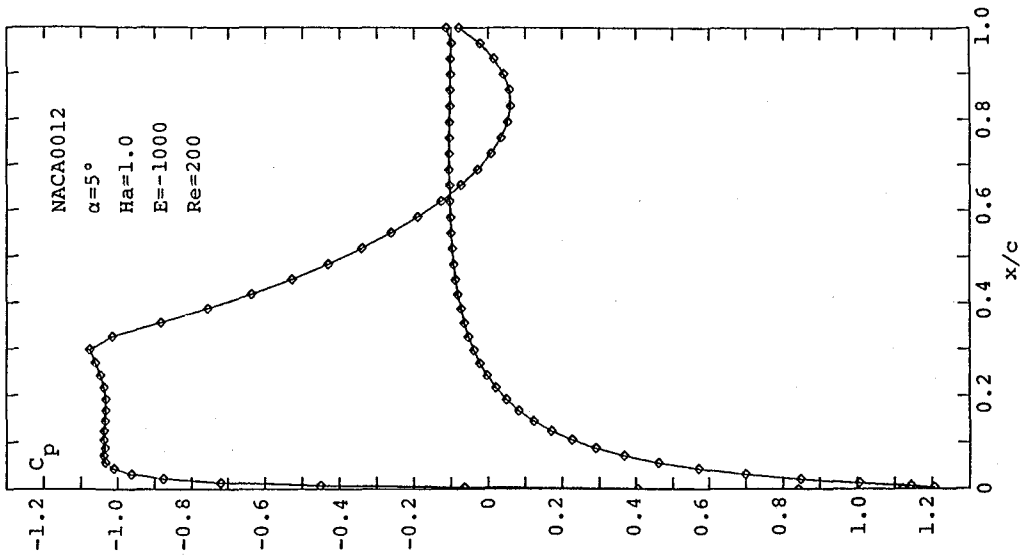
Fig.3-37 Calculated result of flow around wing section ($Re = 200$, $Ha = 1.0$, $E = -1000$) (attack angle = 5 (deg))



(a) non-MHD condition



(b) $Ha = 1.0, E = -500$



(c) $Ha = 1.0, E = -1000$

Fig.3-38 Pressure distribution along wing surface
($Re = 200$, attack angle = 5 (deg))

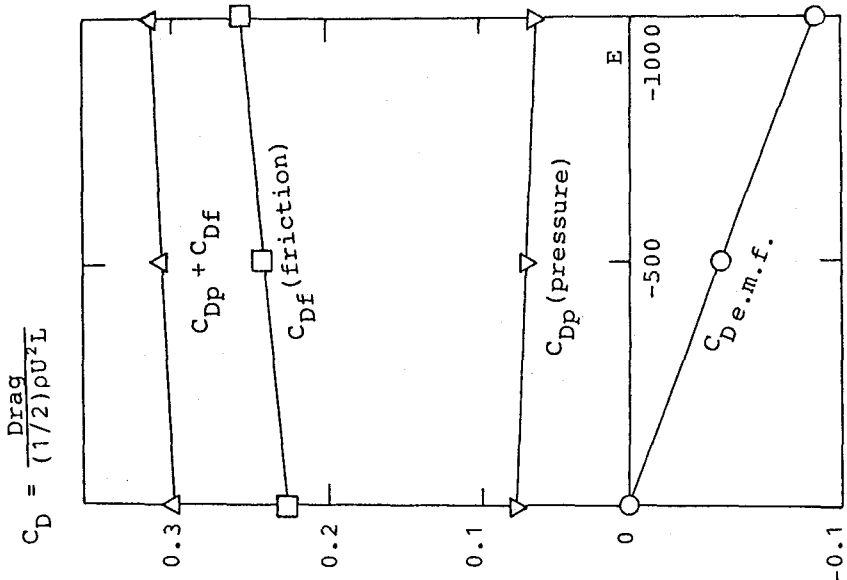


Fig.3-40 Relation between strength of applied electric field and drag coefficient of wing (Re = 200, attack angle = 5 (deg))

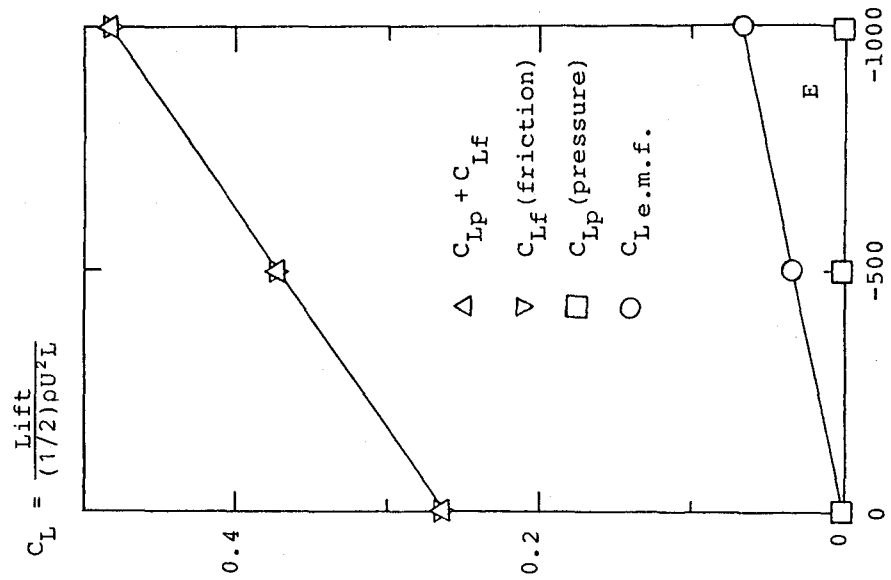


Fig.3-39 Relation between strength of applied electric field and lift coefficient of wing (Re = 200, attack angle = 5 (deg))

- : given by boundary condition
- : computational point
- ⊗ : imaginary point

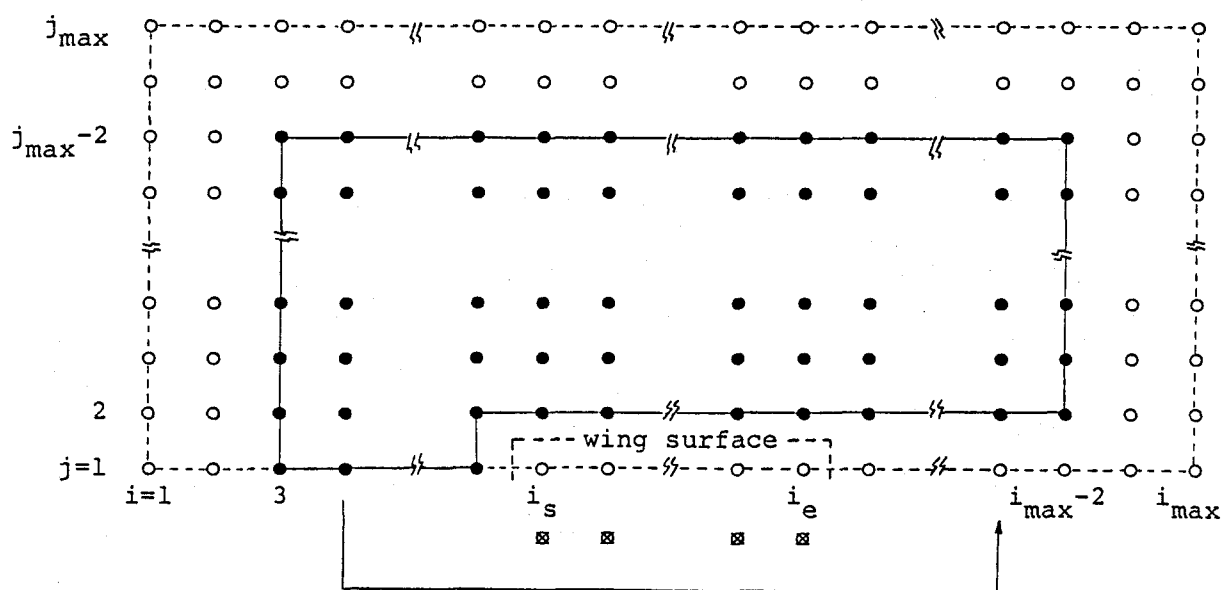


Fig. 4-1 Computational domain for C-grid topology

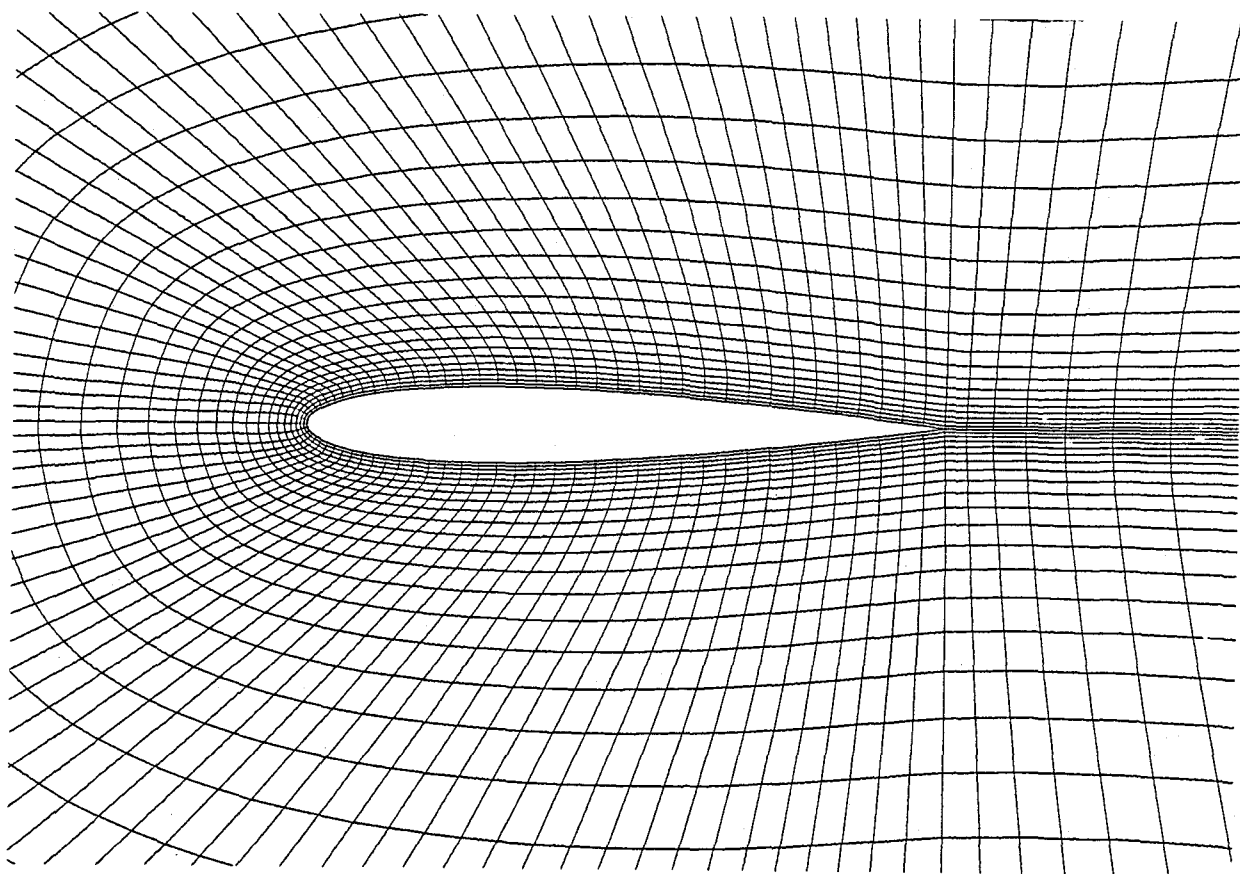


Fig. 4-2 Mesh division around wing section (NACA0012)
minimum mesh space = 0.005, attack angle = 0 (deg)
(Mesh A)

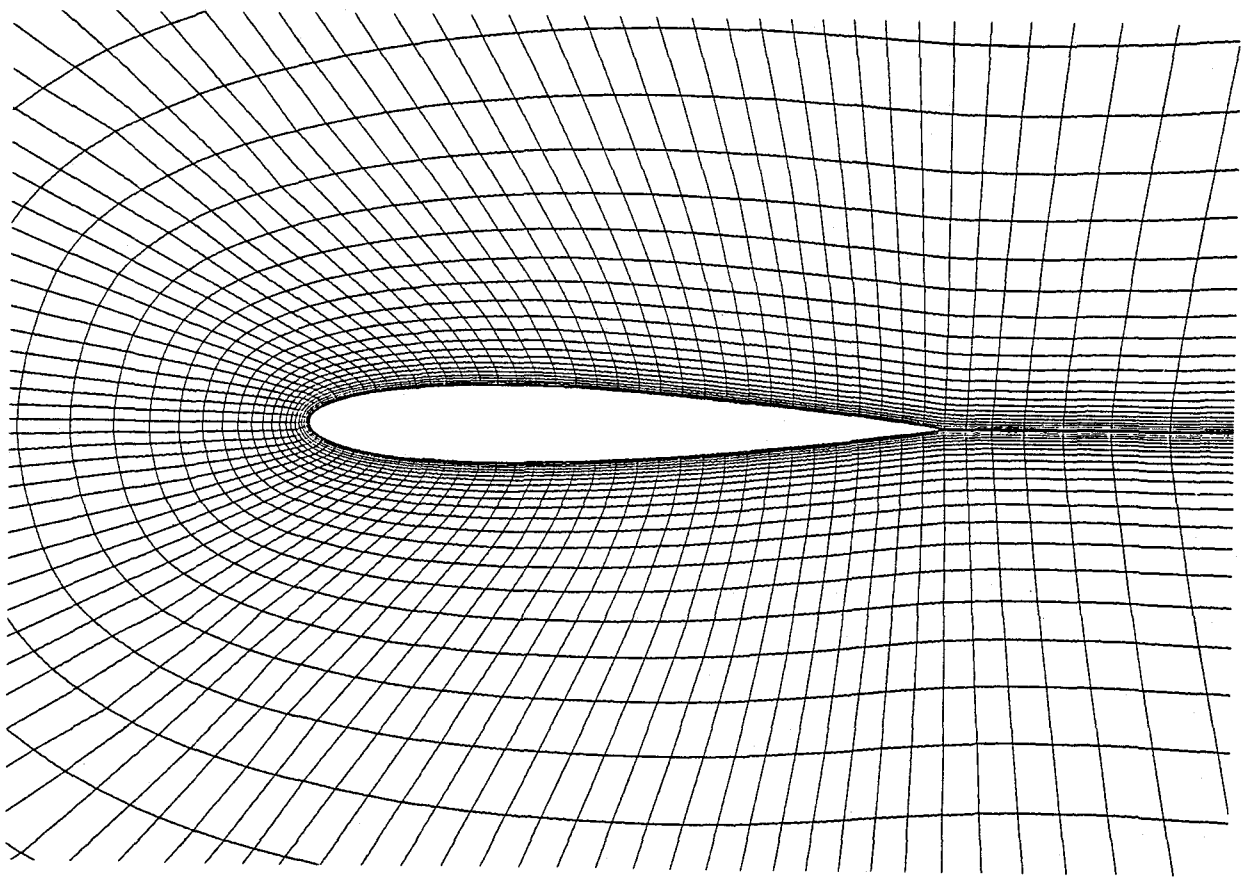
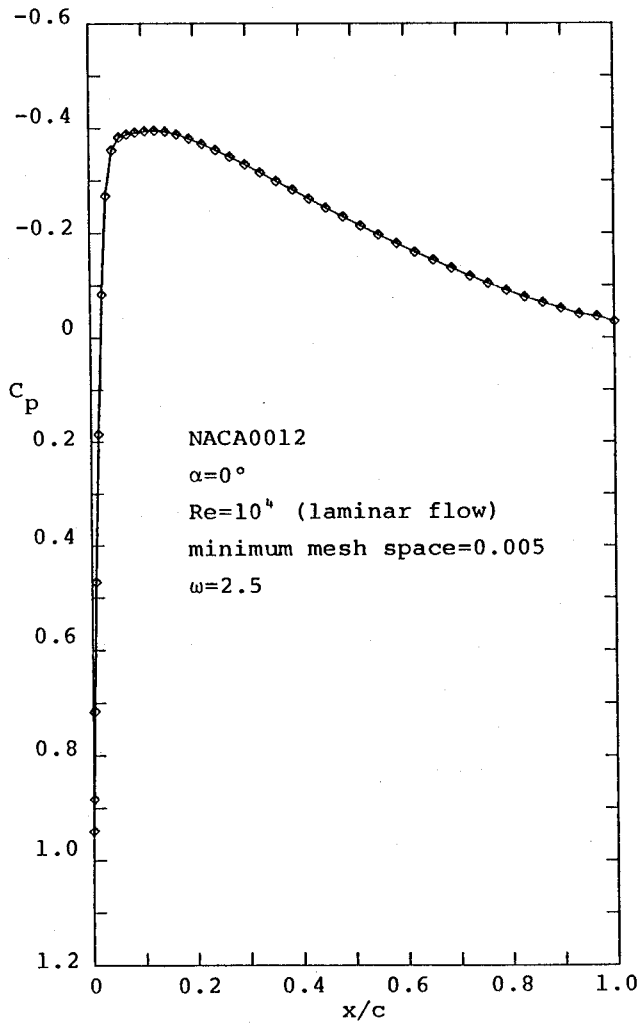
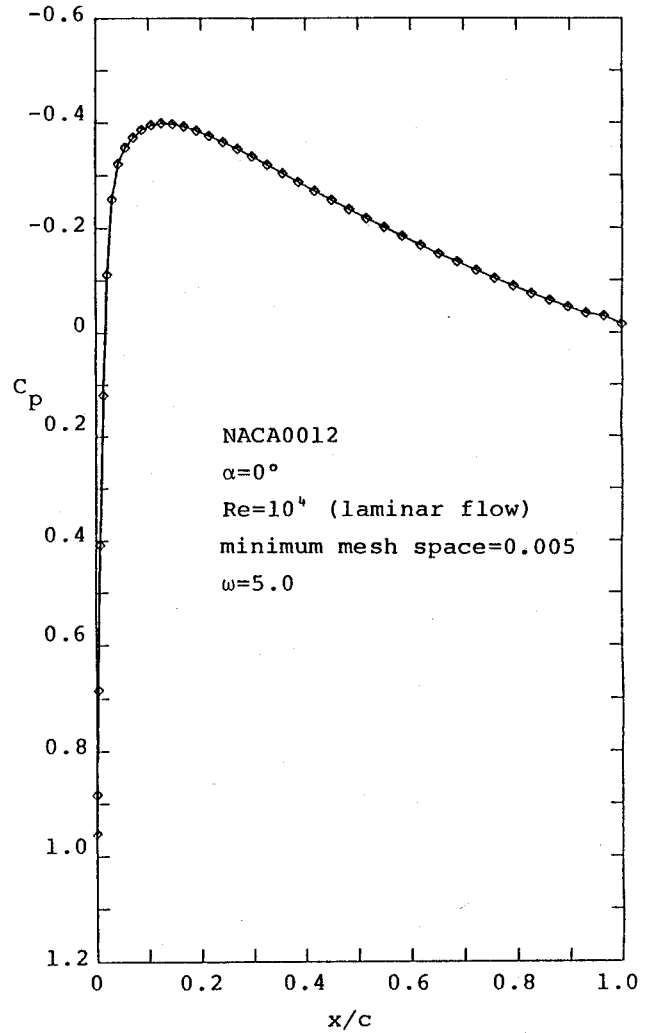


Fig. 4-3 Mesh division around wing section (NACA0012)
minimum mesh space = 0.002, attack angle = 0 (deg)
(Mesh B)

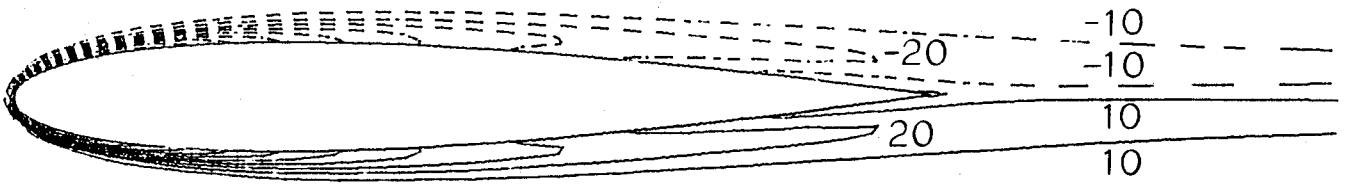


(a) case in $\omega=2.5$

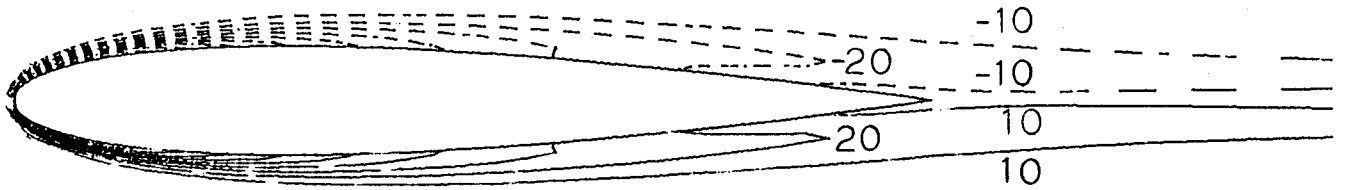


(b) case in $\omega=5.0$

Fig. 4-4 Calculated pressure distribution around wing section using Mesh A

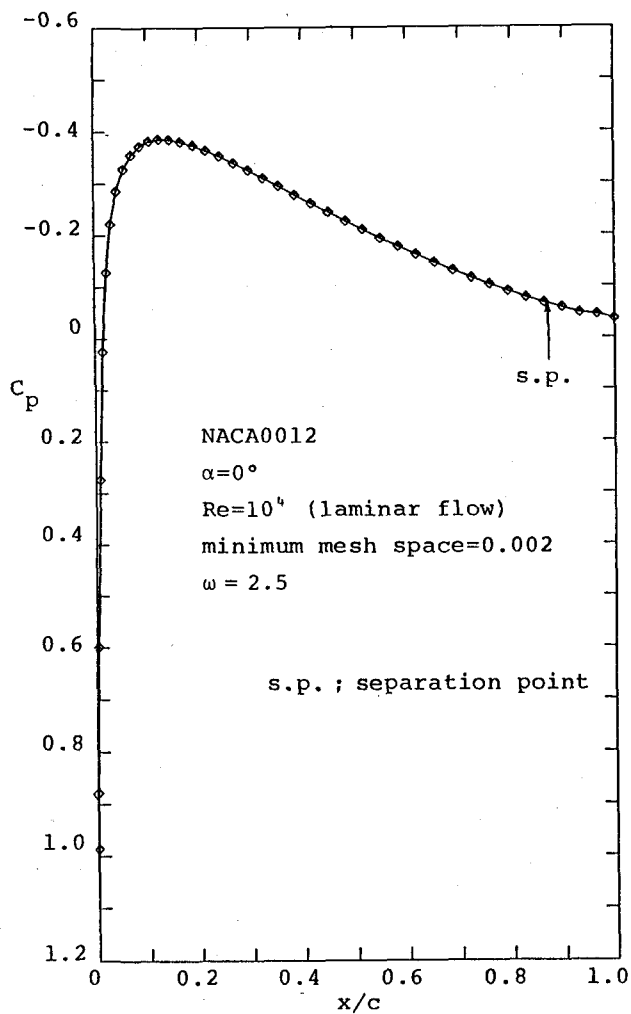


(a) case in $\omega=2.5$

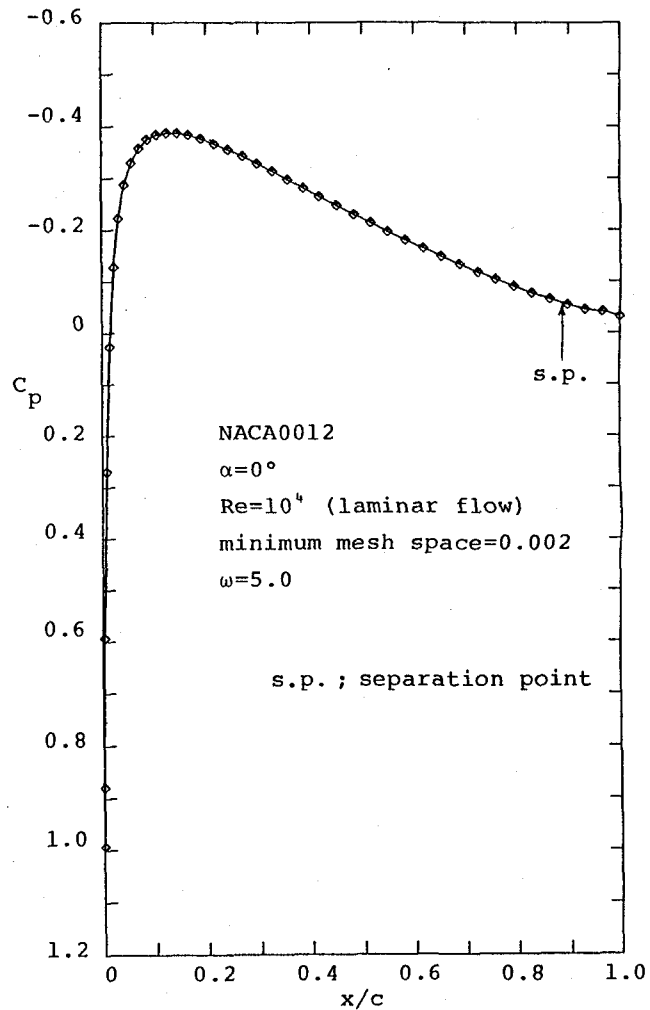


(b) case in $\omega=5.0$

Fig. 4-5 Calculated vorticity distribution around wing section using Mesh A

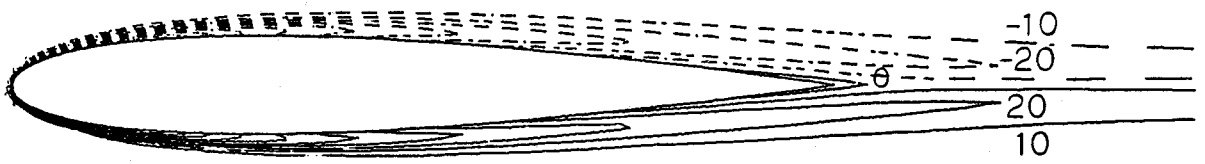


(a) case in $\omega=2.5$

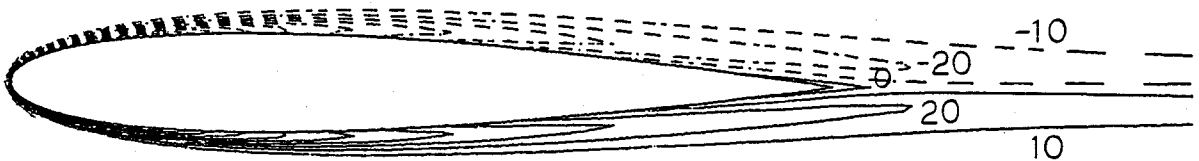


(b) case in $\omega=5.0$

Fig. 4-6 Calculated pressure distribution around wing section using Mesh B



(a) case in $\omega=2.5$



(b) case in $\omega=5.0$

Fig. 4-7 Calculated vorticity distribution around wing section using Mesh B

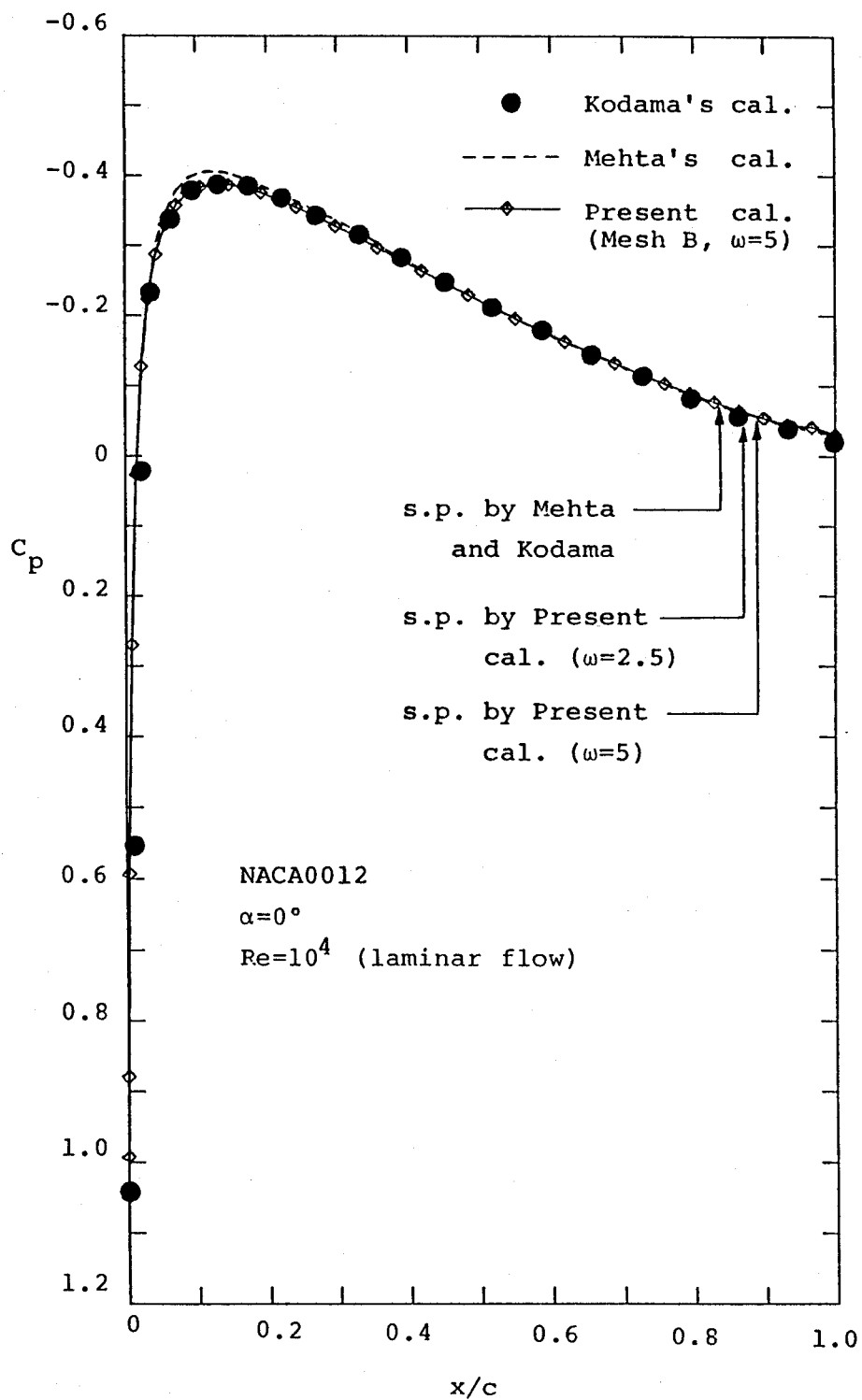


Fig. 4-8 Comparison of calculated pressure distribution
 along wing surface
 (NACA0012, $Re = 10^4$, attack angle = 0 (deg))

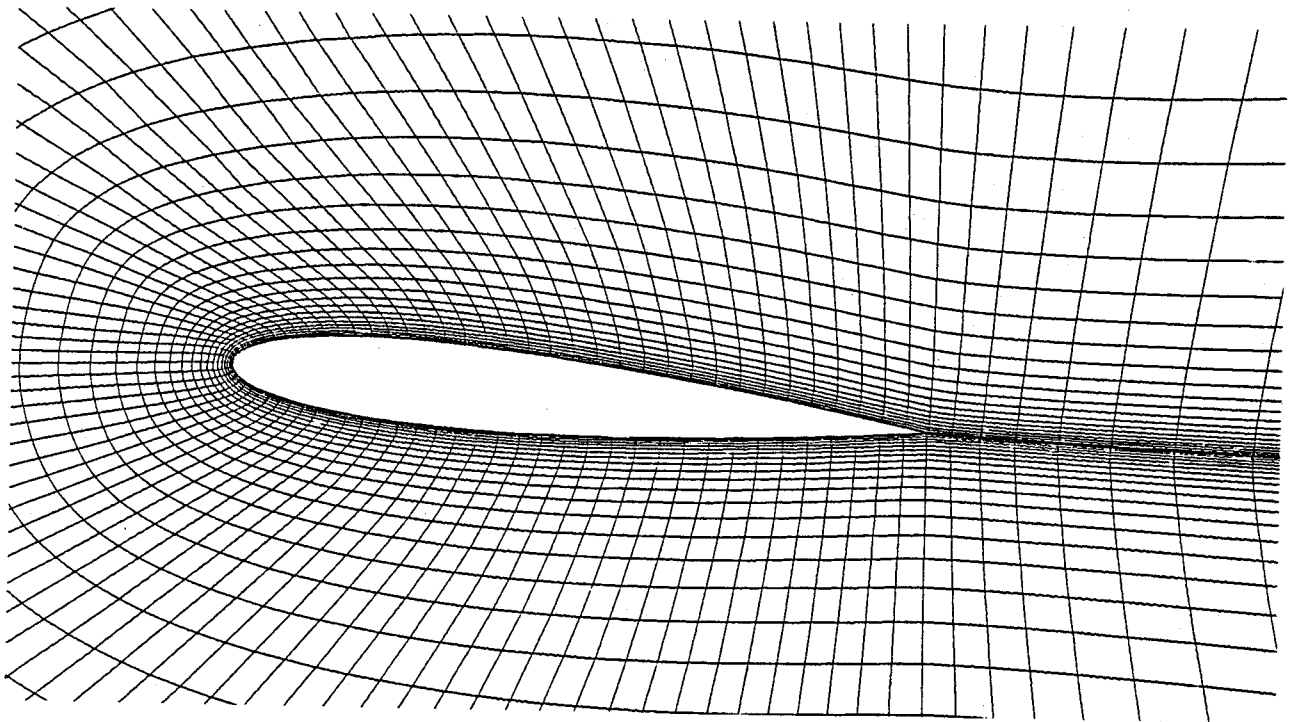
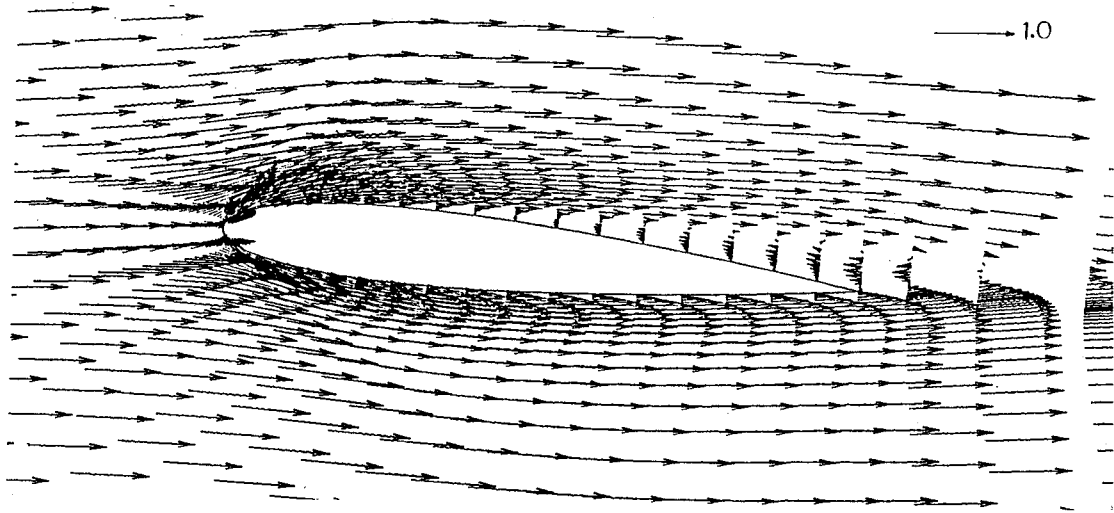
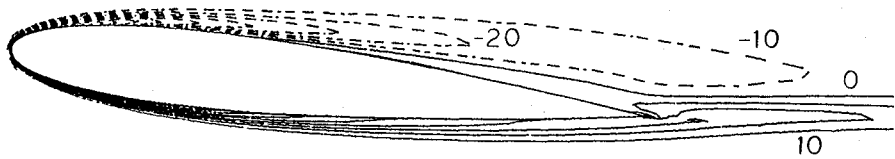


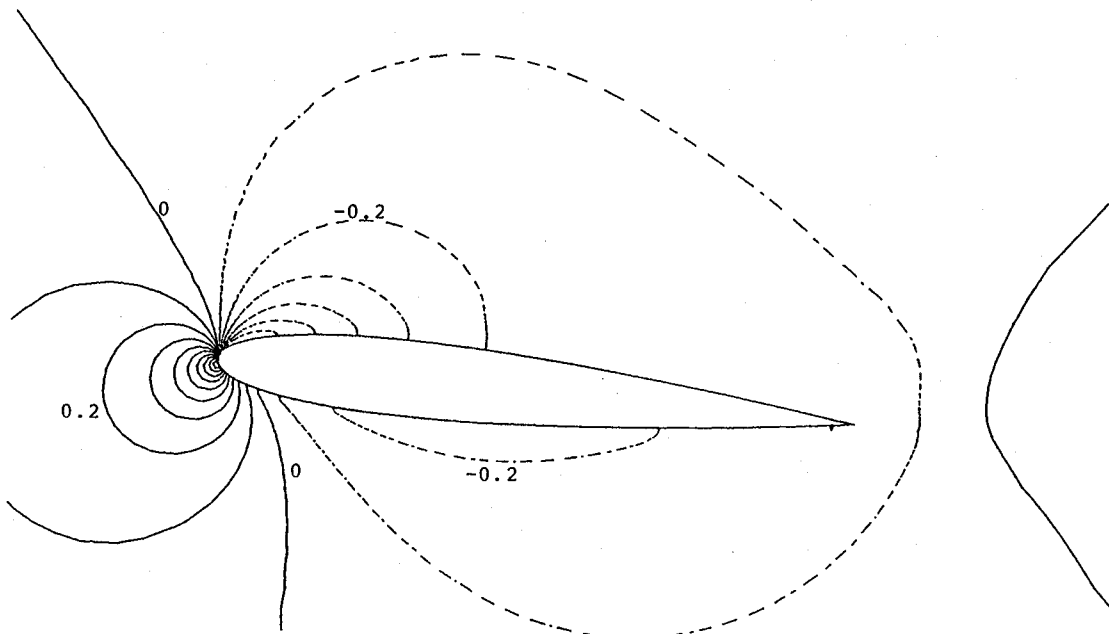
Fig. 4-9 Mesh division for calculation of flow
around wing section (attack angle = 5 (deg))



(a) Velocity distribution

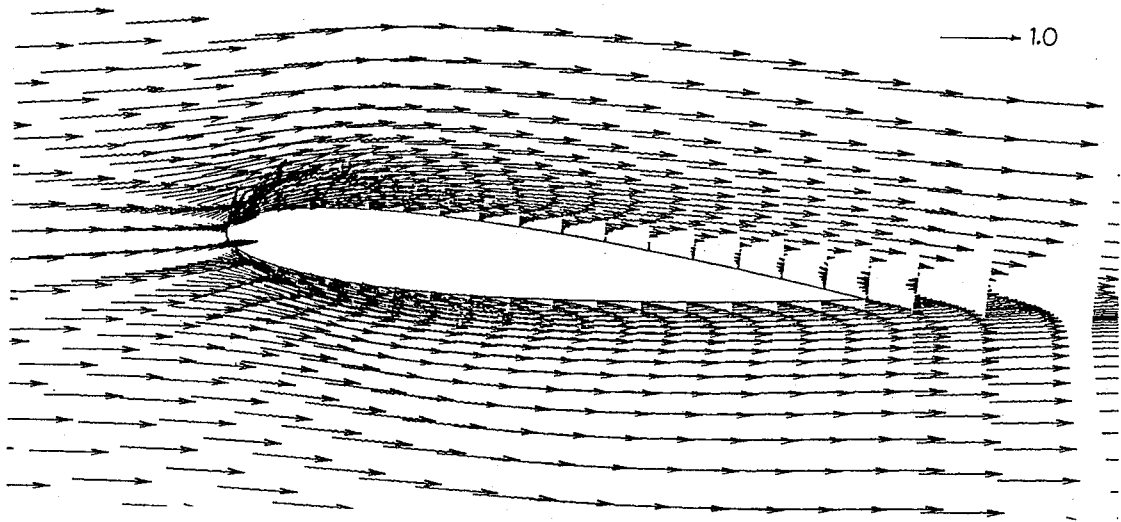


(b) Vorticity distribution

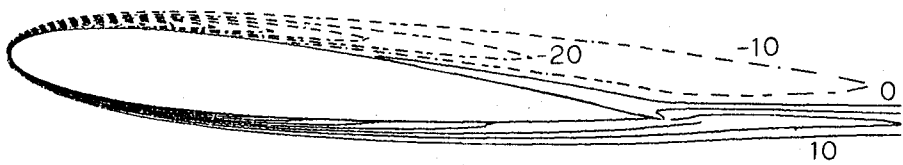


(c) Pressure distribution

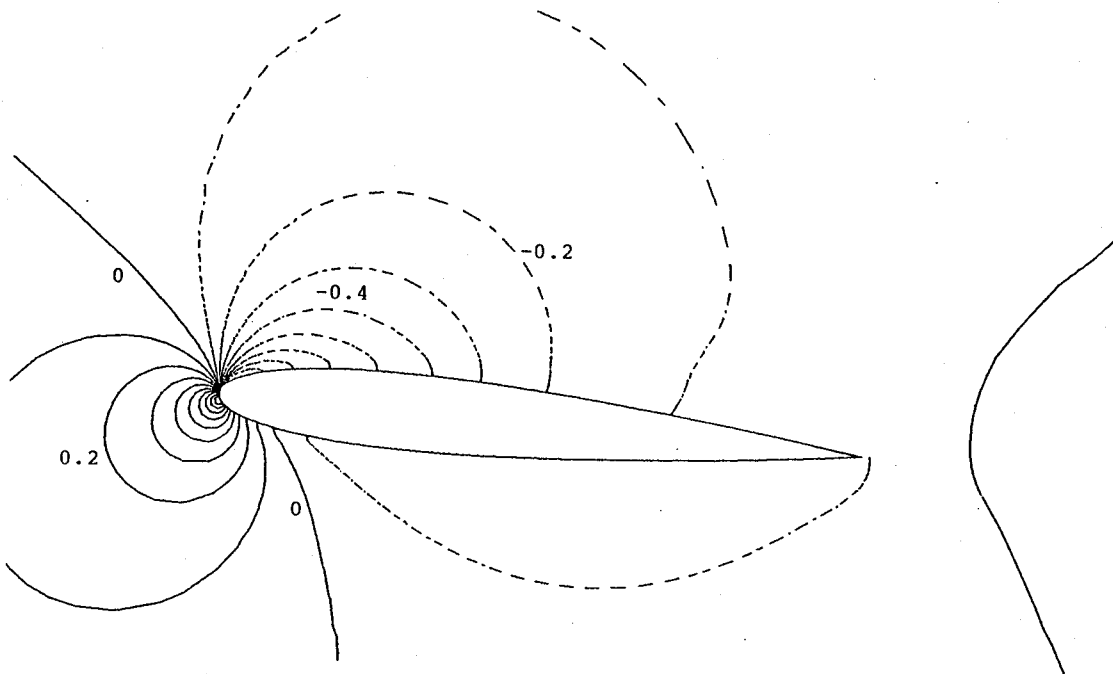
Fig.4-10 Calculated result of flow around wing section
in non-MHD condition
($Re = 10^4$, attack angle = 5 (deg))



(a) Velocity distribution

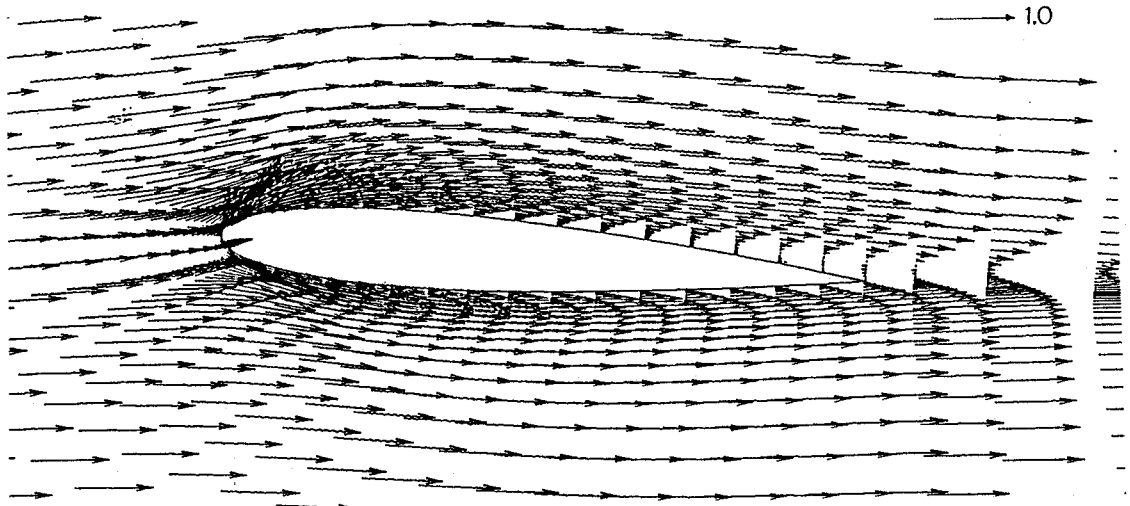


(b) Vorticity distribution

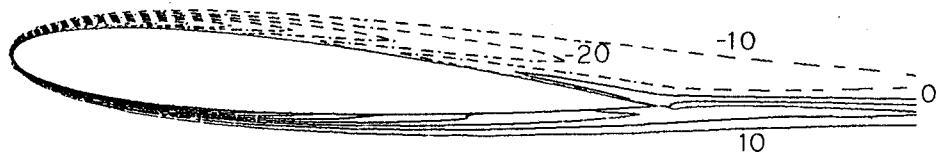


(c) Pressure distribution

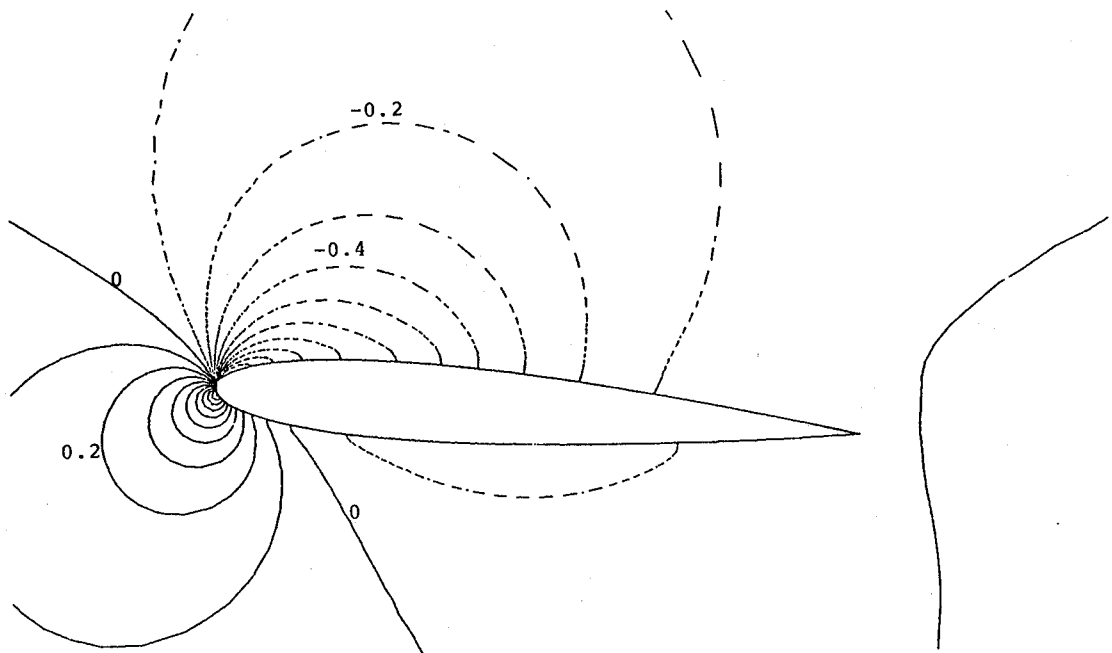
Fig.4-11 Calculated result of flow around wing section
 ($Re = 10^4$, attack angle = 5 (deg),
 $Ha = 12.64$, $E = -50$)



(a) Velocity distribution

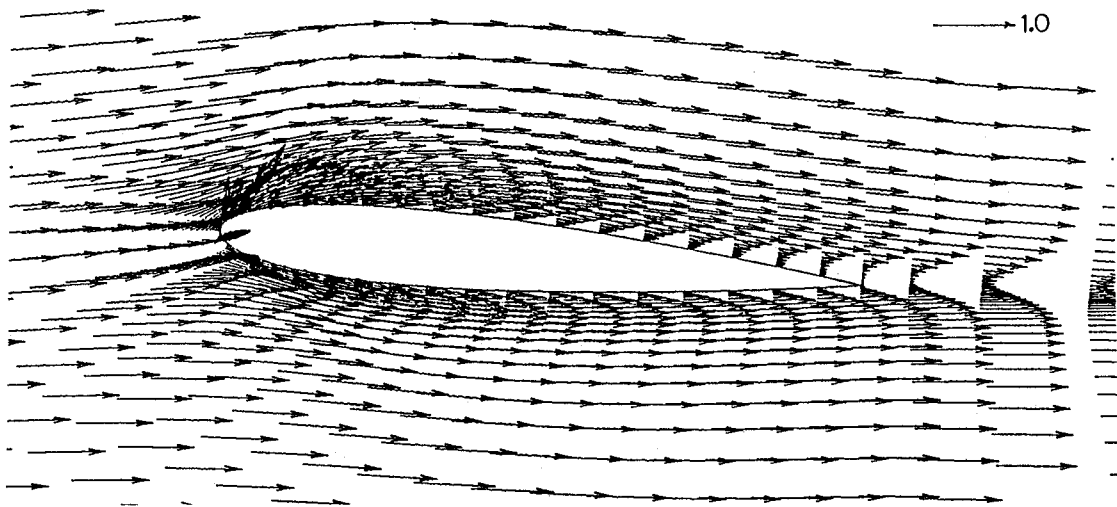


(b) Vorticity distribution

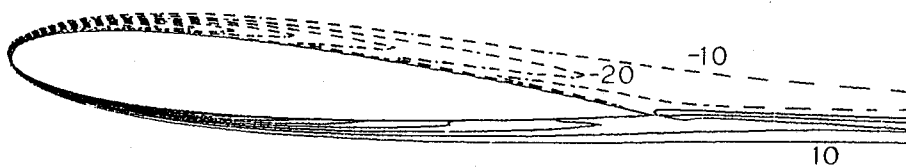


(c) Pressure distribution

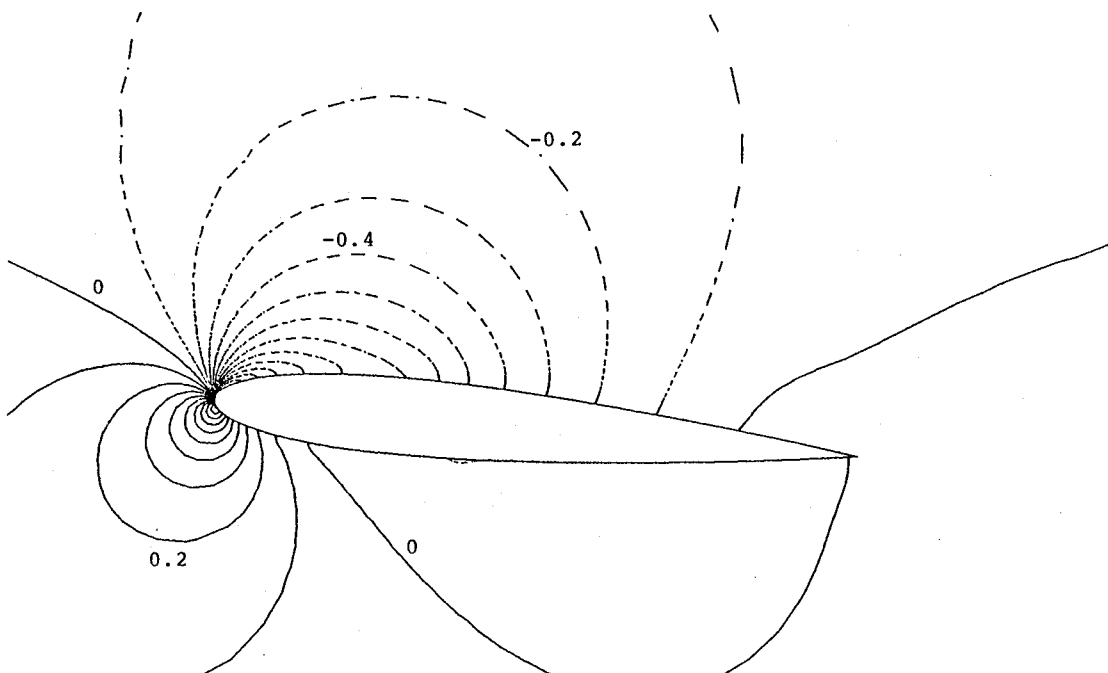
Fig.4-12 Calculated result of flow around wing section
 ($Re = 10^4$, attack angle = 5 (deg),
 $Ha = 12.64$, $E = -100$)



(a) Velocity distribution

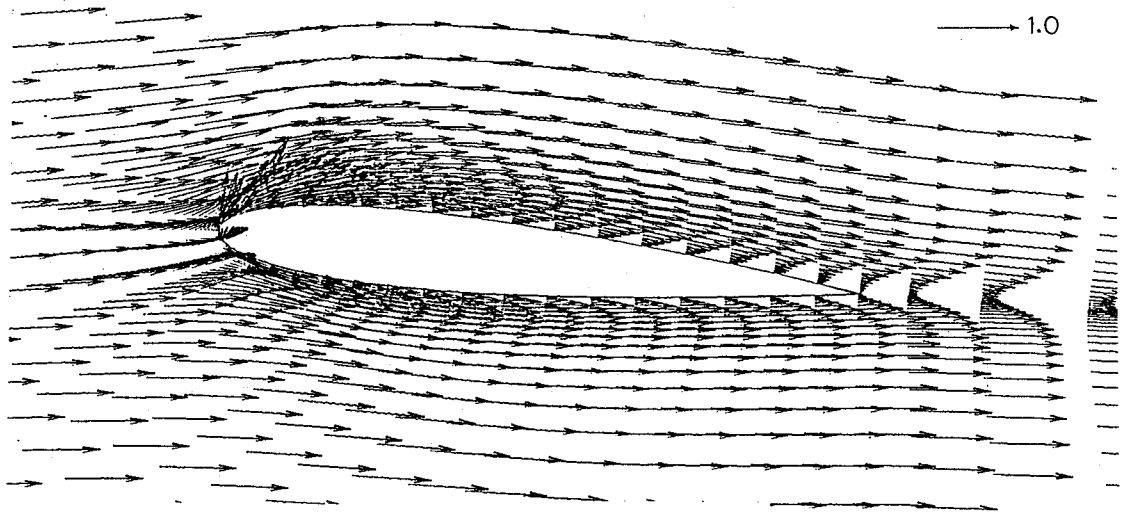


(b) Vorticity distribution

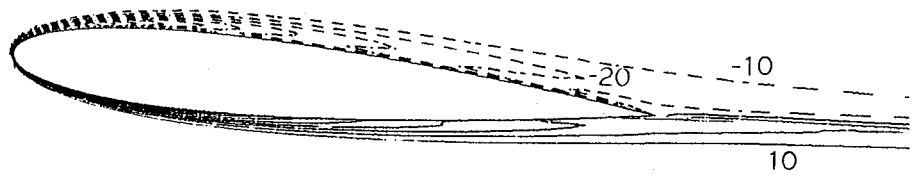


(c) Pressure distribution

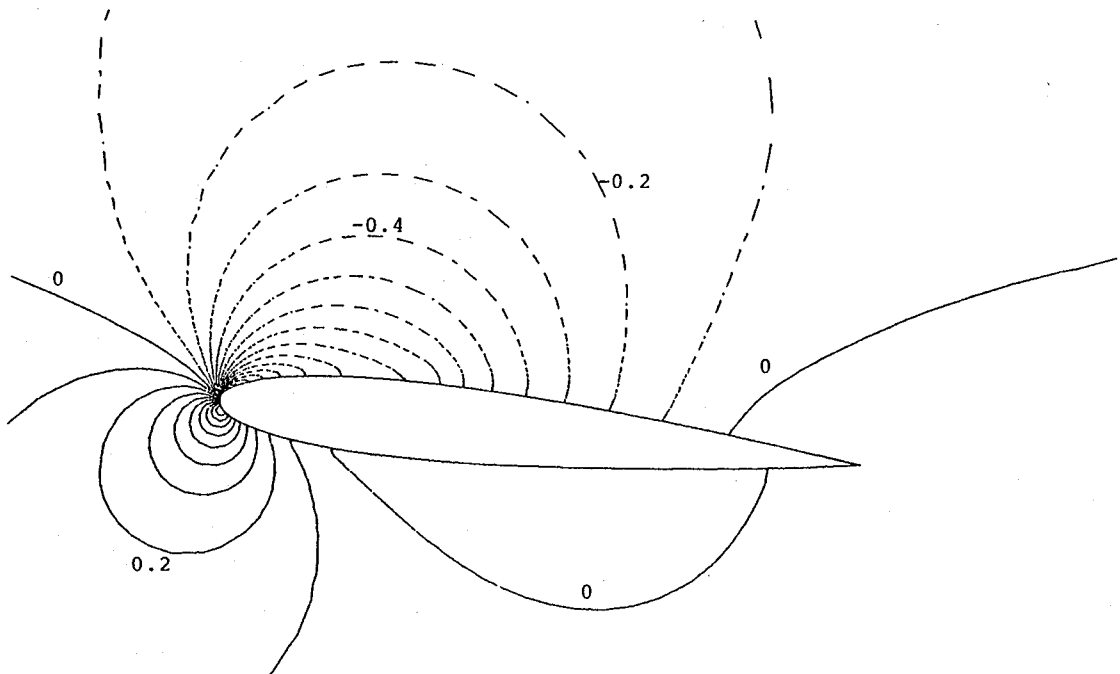
Fig.4-13 Calculated result of flow around wing section
 ($Re = 10^4$, attack angle = 5 (deg),
 $Ha = 12.64$, $E = -150$)



(a) Velocity distribution

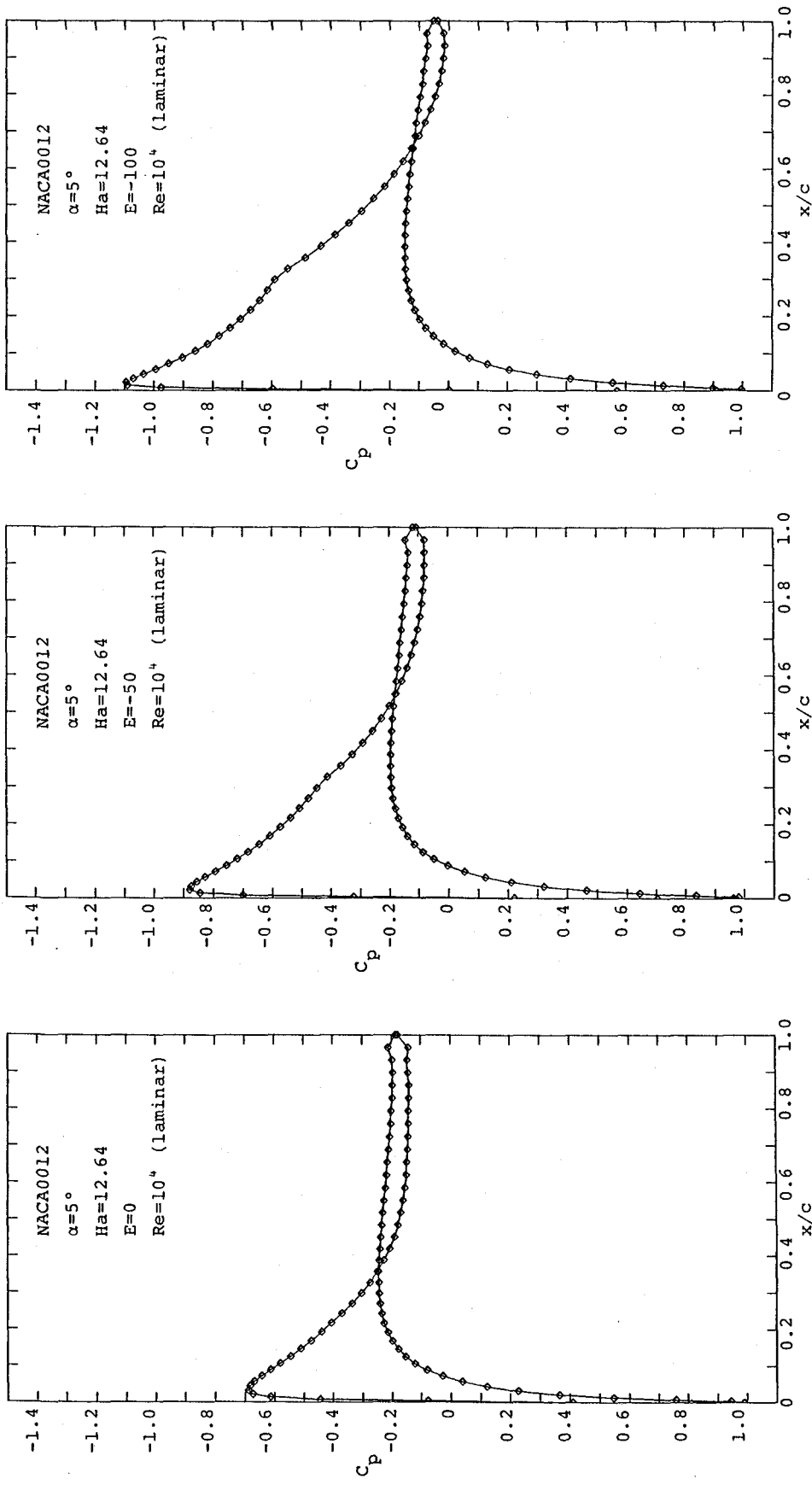


(b) Vorticity distribution



(c) Pressure distribution

Fig.4-14 Calculated result of flow around wing section
 ($Re = 10^4$, attack angle = 5 (deg),
 $Ha = 12.64$, $E = -200$)

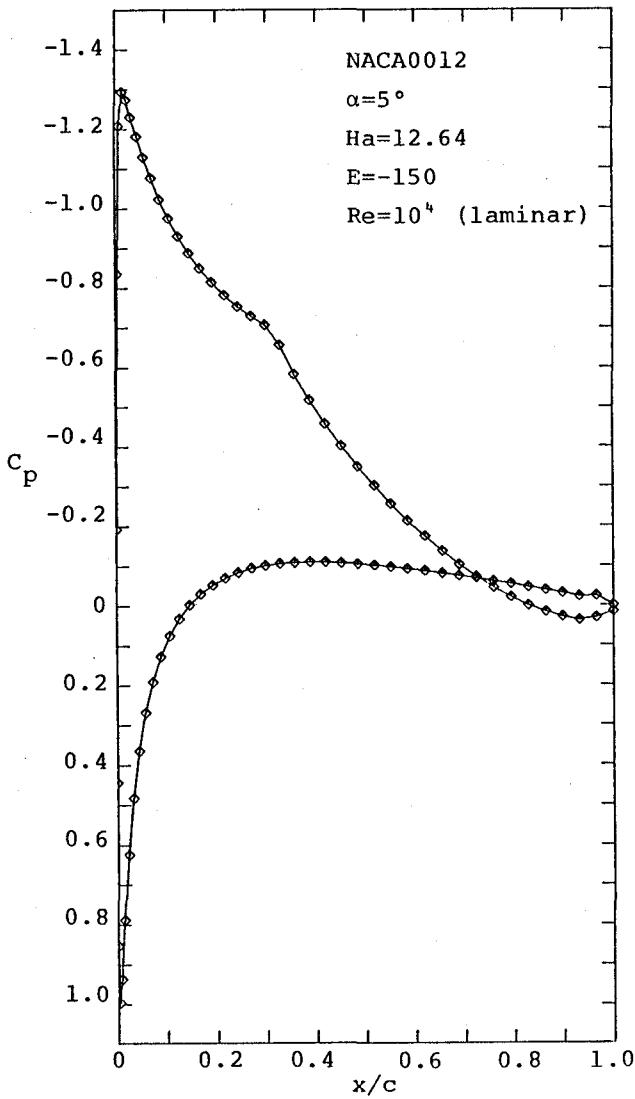


(a) case in $E=0$

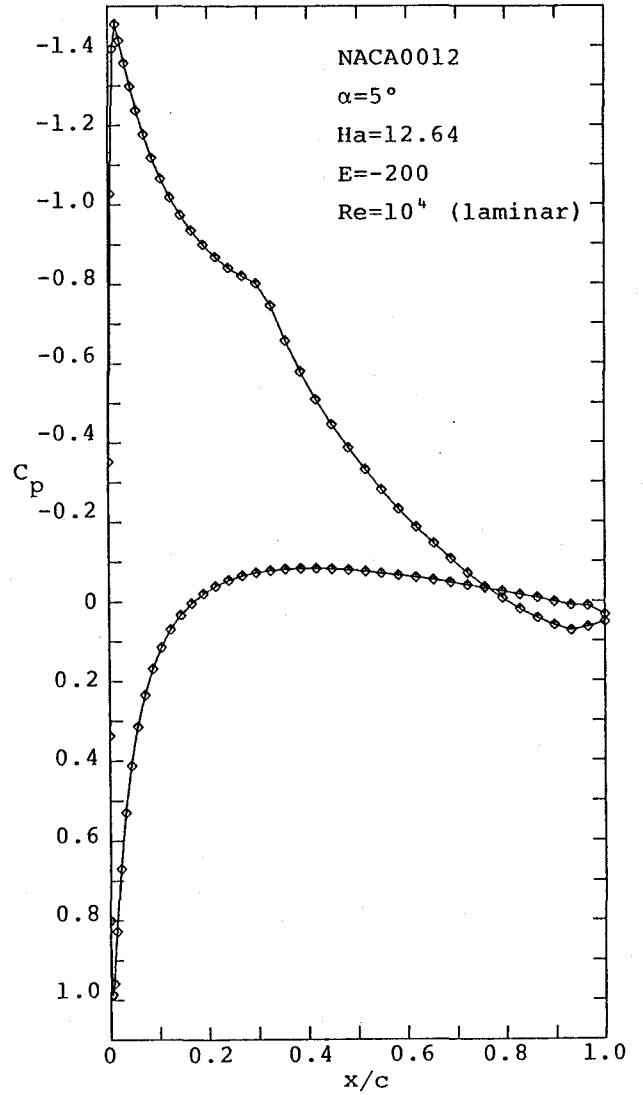
(b) case in $E=-50$

(c) case in $E=-100$

Fig.4-15 Calculated pressure distribution along wing surface ($Re = 10^4$, attack angle = 5 (deg))



(d) case in $E=-150$



(e) case in $E=-200$

Fig.4-15 Calculated pressure distribution along wing surface ($Re = 10^4$, attack angle = 5 (deg))

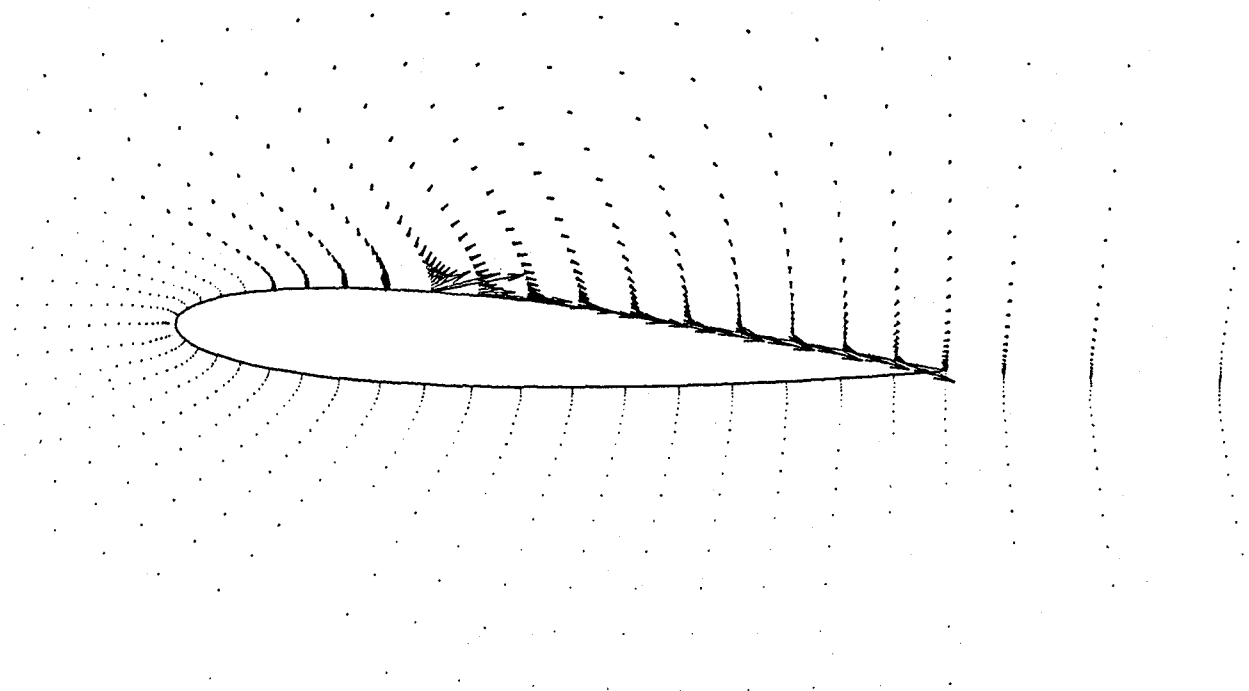


Fig.4-16 Lorentz force distribution around wing section (attack angle = 5 (deg))

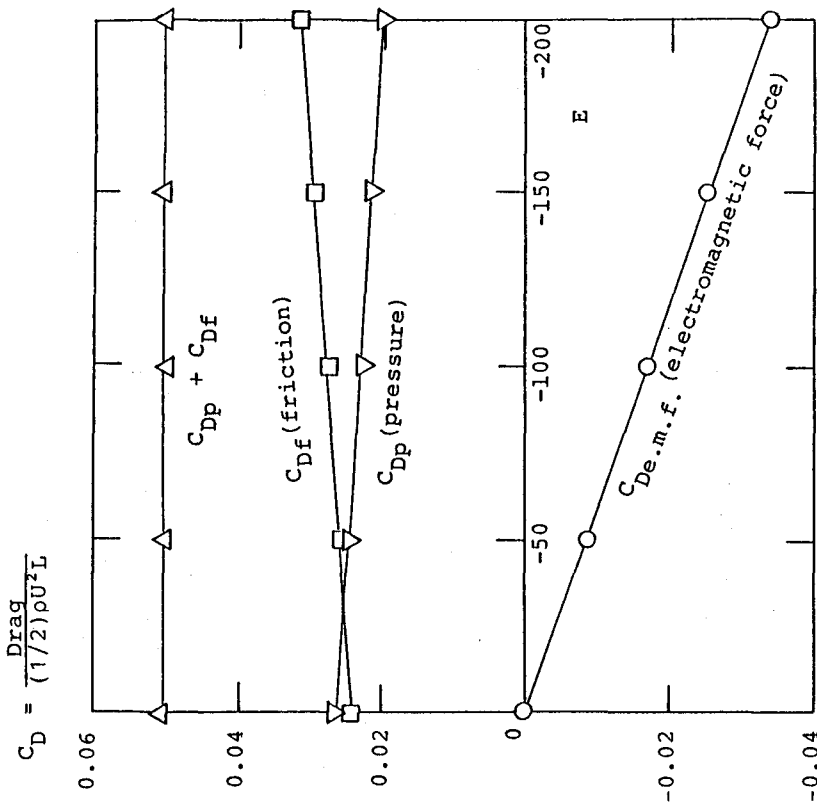


Fig. 4-18 Relation between strength of applied electric field and drag coefficient of wing ($Re=10^4$, attack angle = 5 (deg))

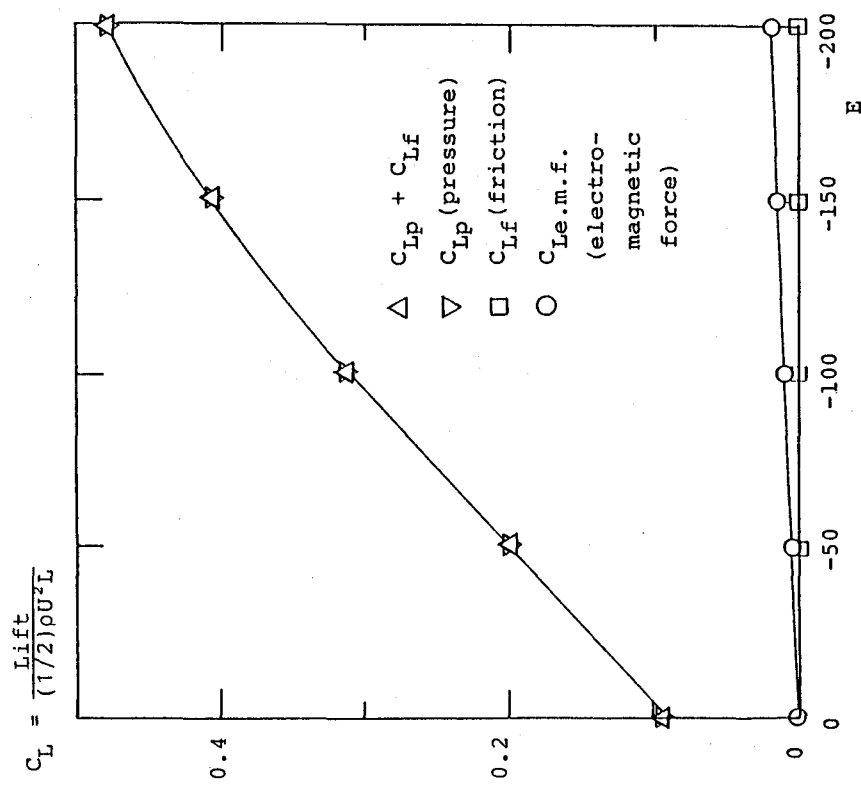


Fig. 4-17 Relation between strength of applied electric field and lift coefficient of wing ($Re=10^4$, attack angle = 5 (deg))

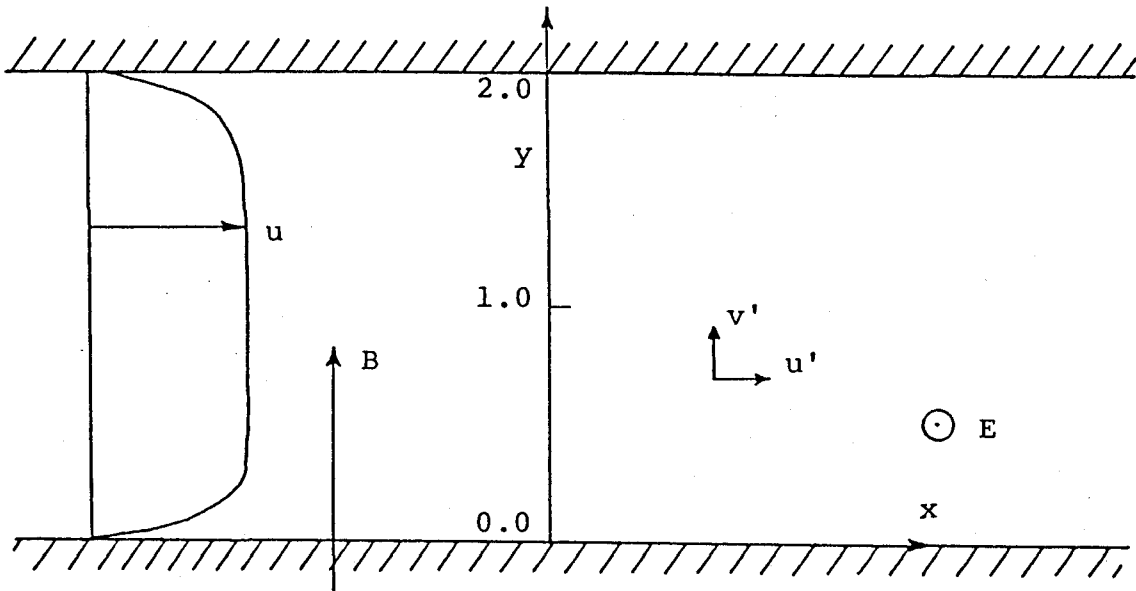


Fig. 5-1 Coordinate system for turbulent channel flow

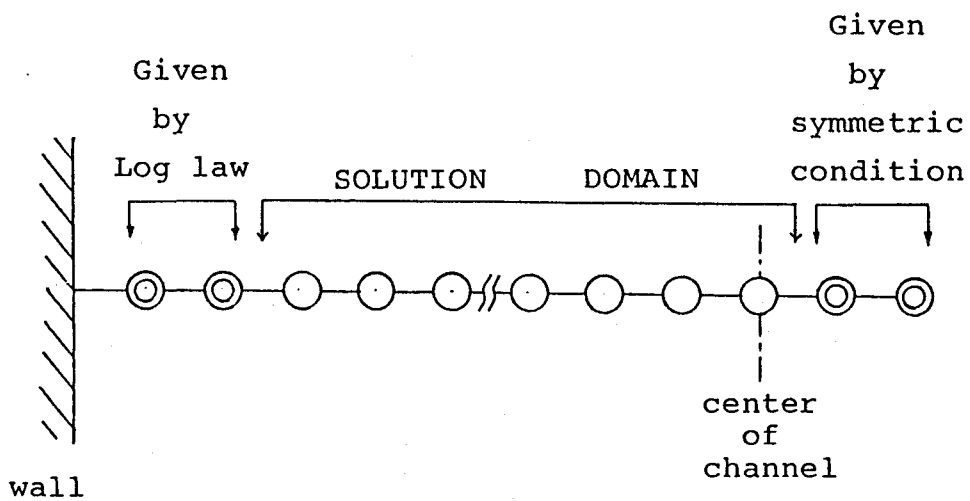


Fig. 5-2 Computational domain for turbulent channel flow

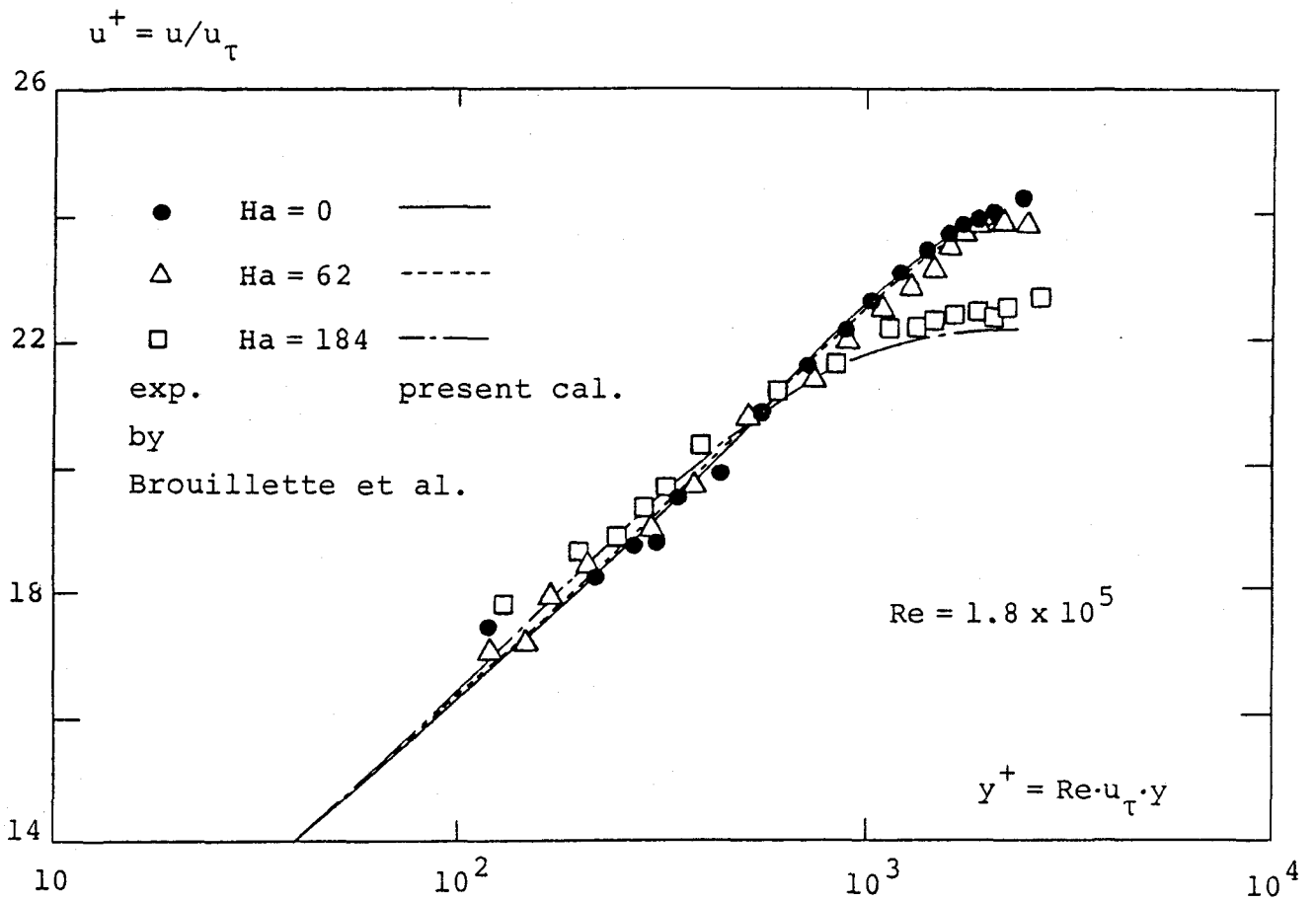
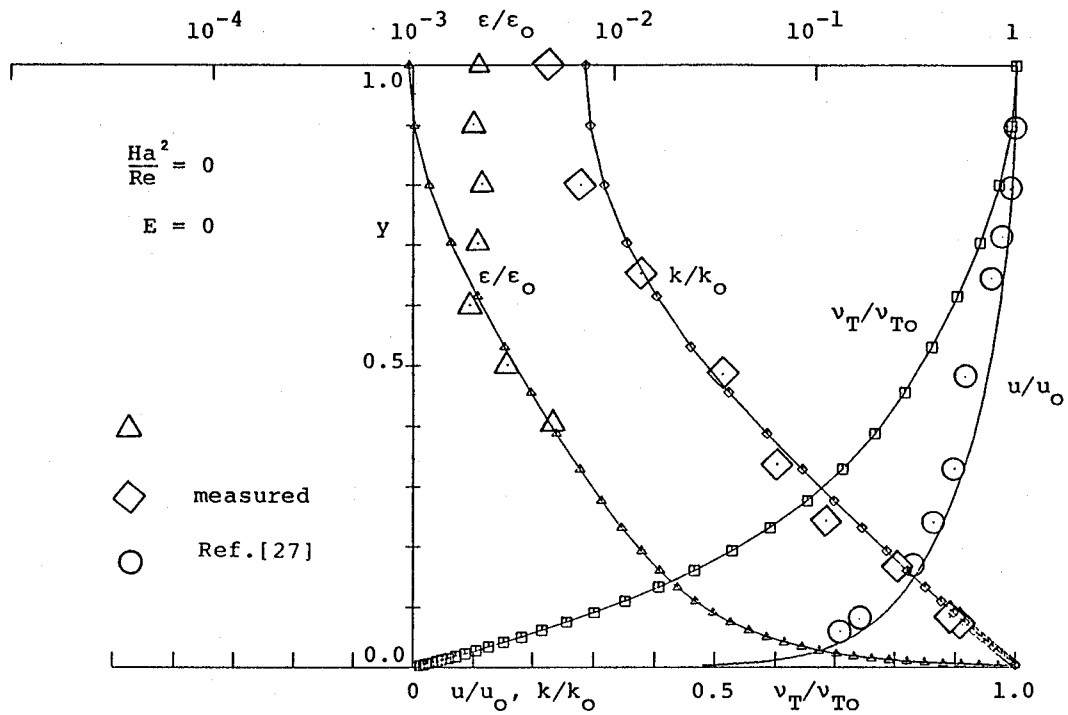
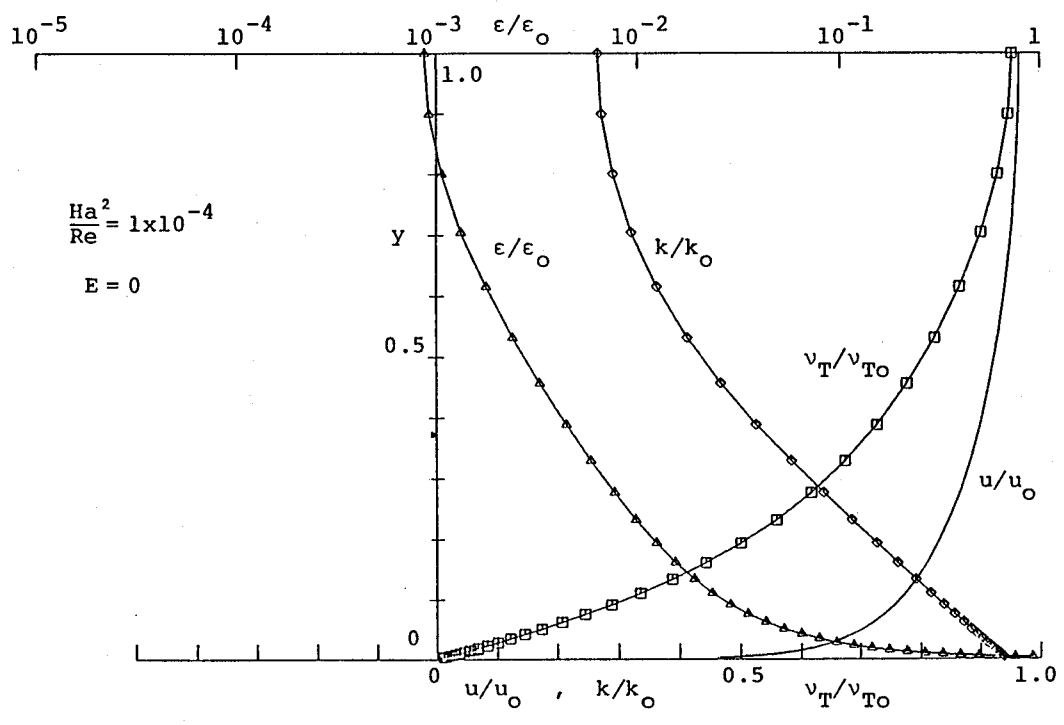


Fig. 5-3 Comparison of calculated result of velocity profile of Hartmann flow with experimental data

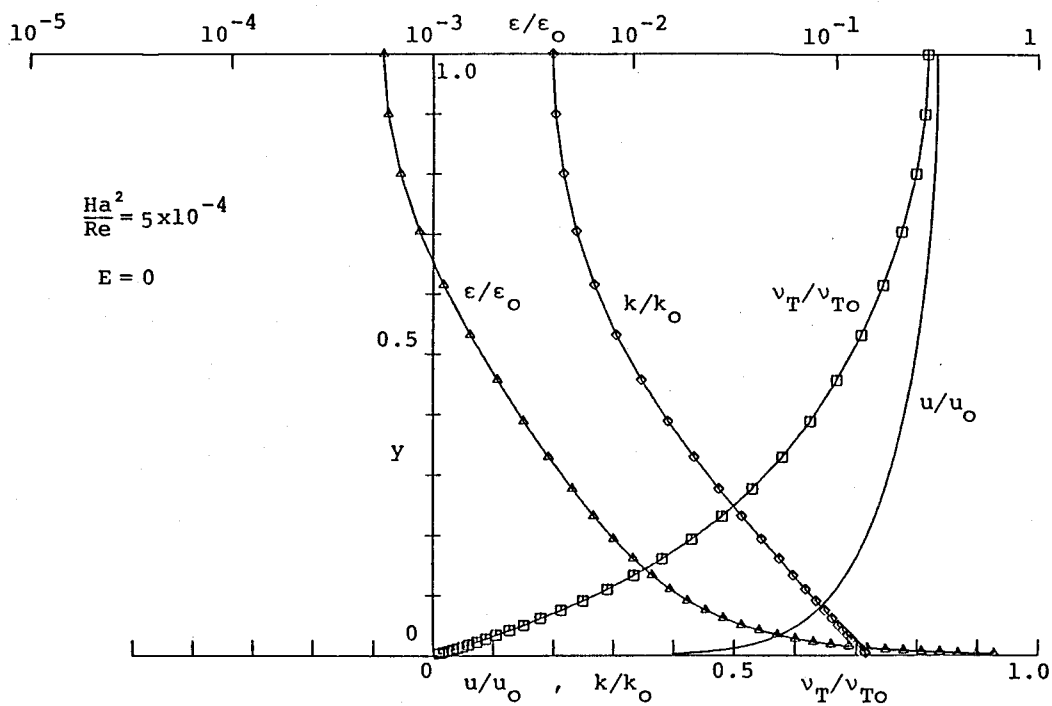


(a) non-MHD condition

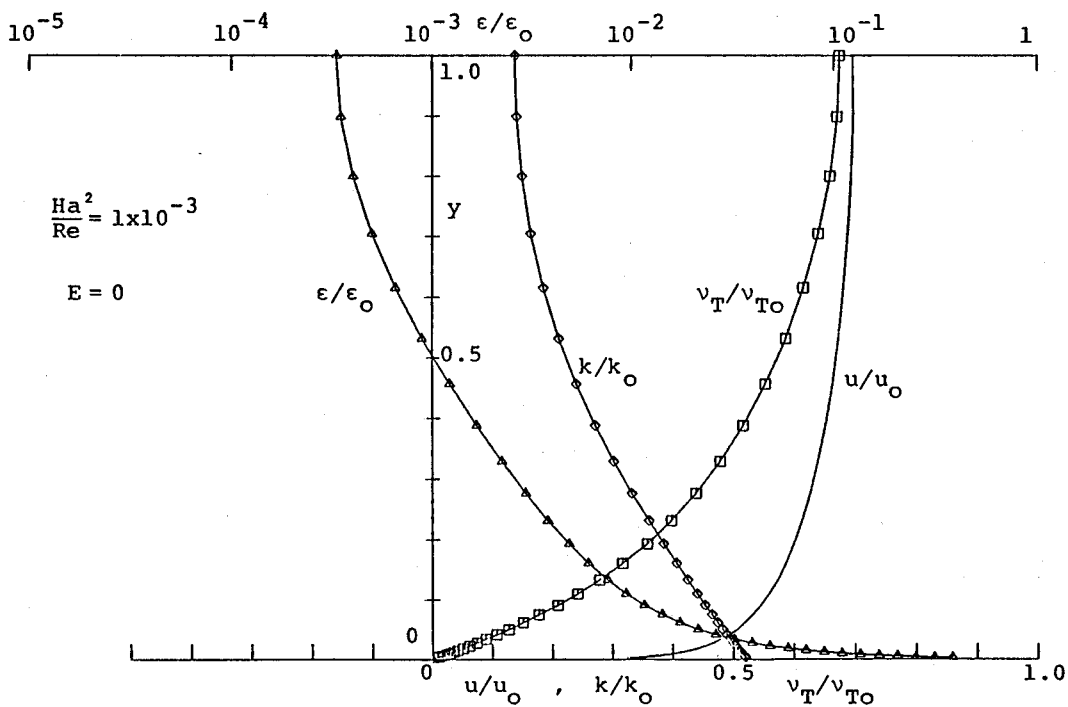


(b) $Ha^2/Re = 1.0 \times 10^4$, $E = 0$

Fig. 5-4 Calculated result of turbulent channel flow

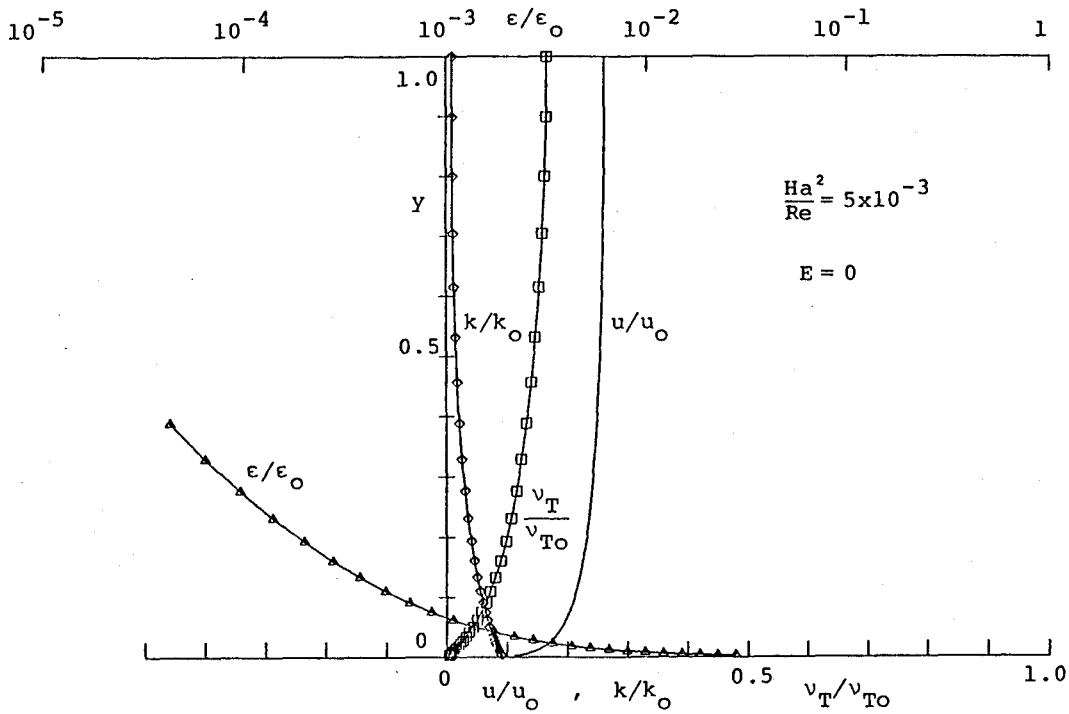


(c) $Ha^2/Re = 5.0 \times 10^4, E = 0$

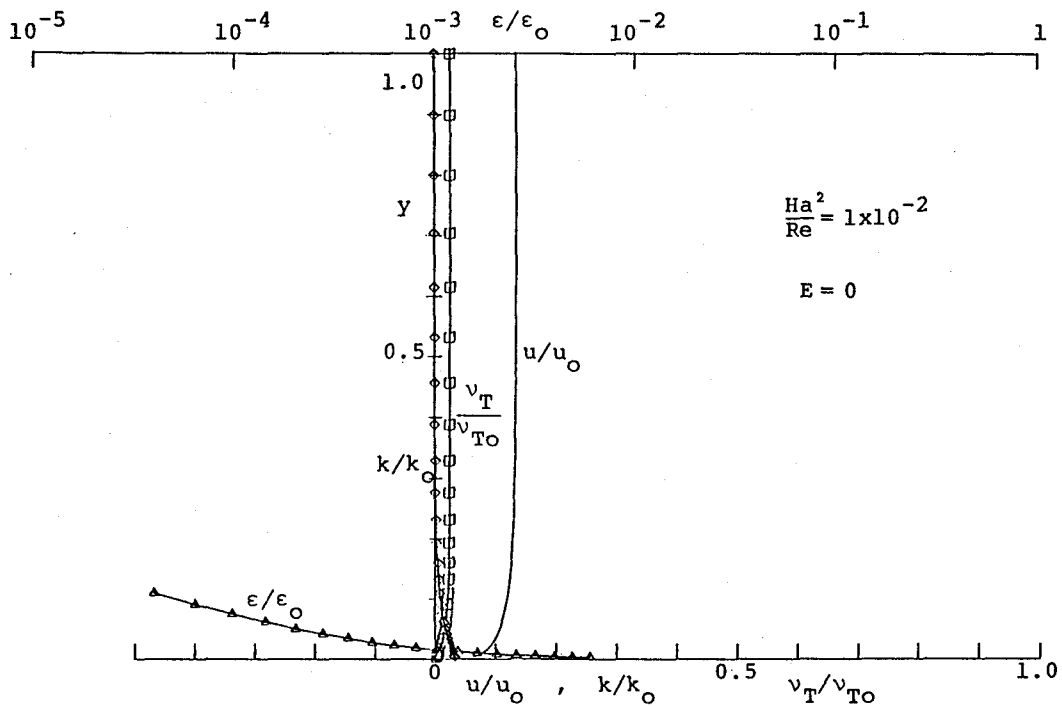


(d) $Ha^2/Re = 1.0 \times 10^3, E = 0$

Fig. 5-4 Calculated result of turbulent channel flow



(e) $Ha^2/Re = 5.0 \times 10^3$, $E = 0$



(f) $Ha^2/Re = 1.0 \times 10^2$, $E = 0$

Fig. 5-4 Calculated result of turbulent channel flow

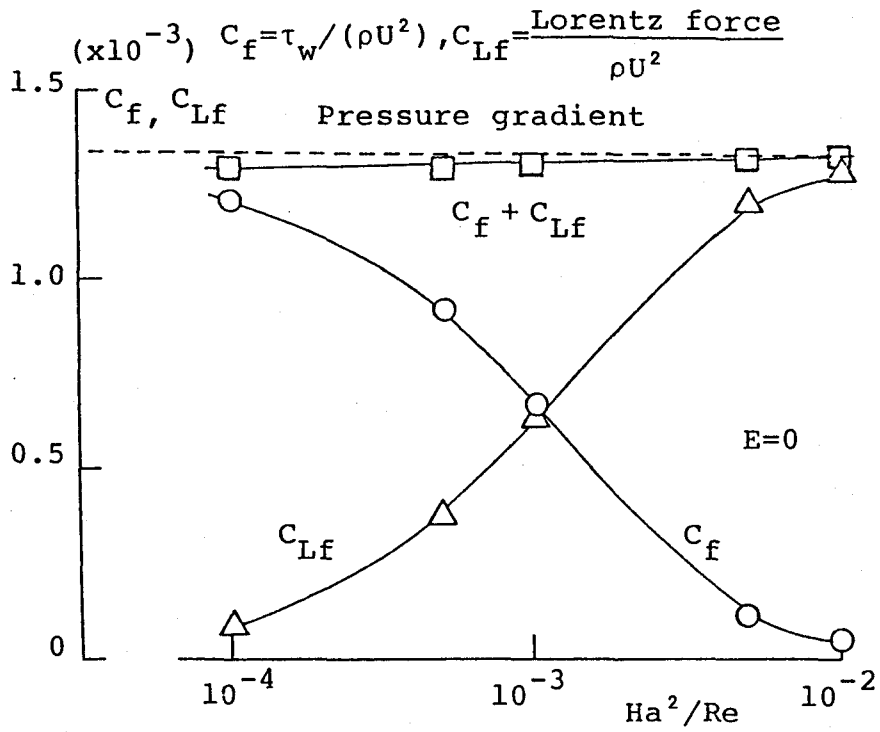


Fig. 5-5 Relation between strength of applied magnetic flux density and resistance acting on channel

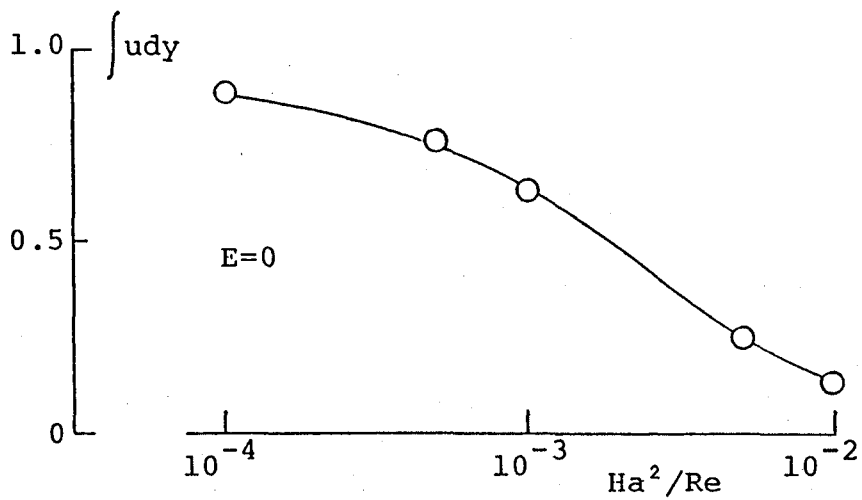
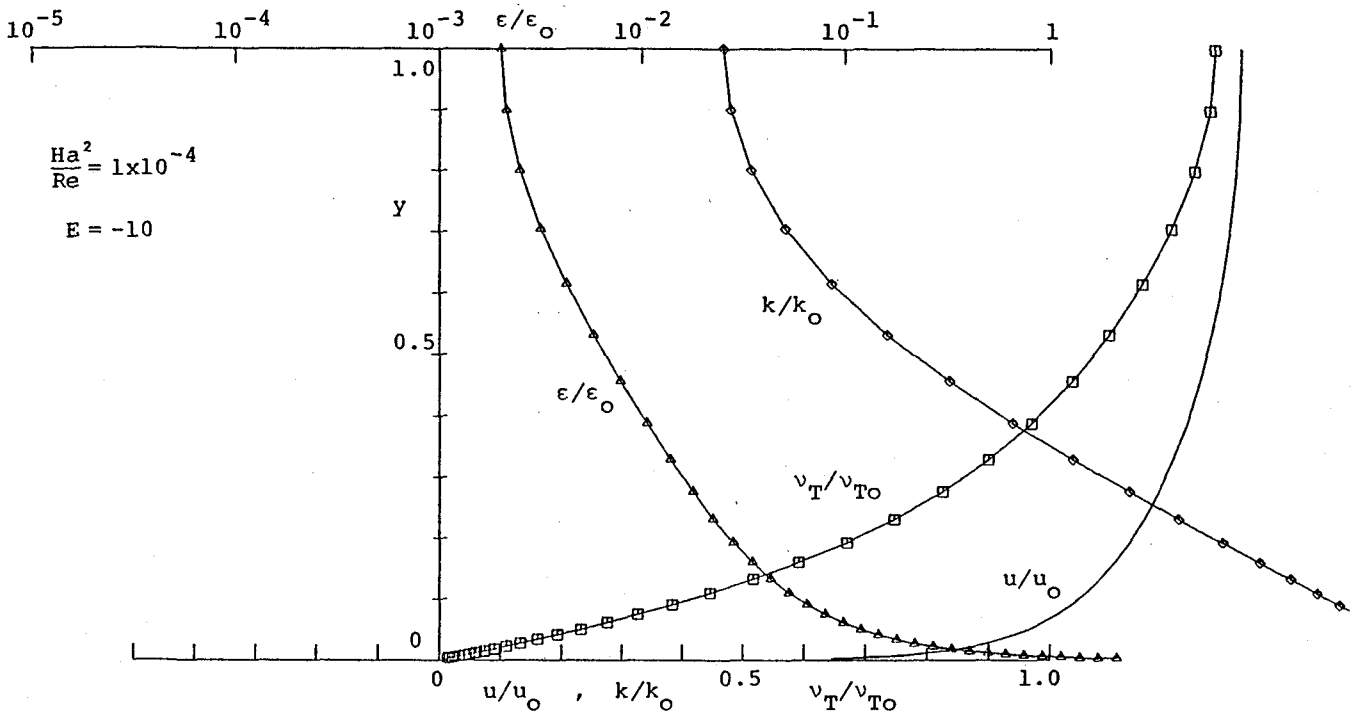
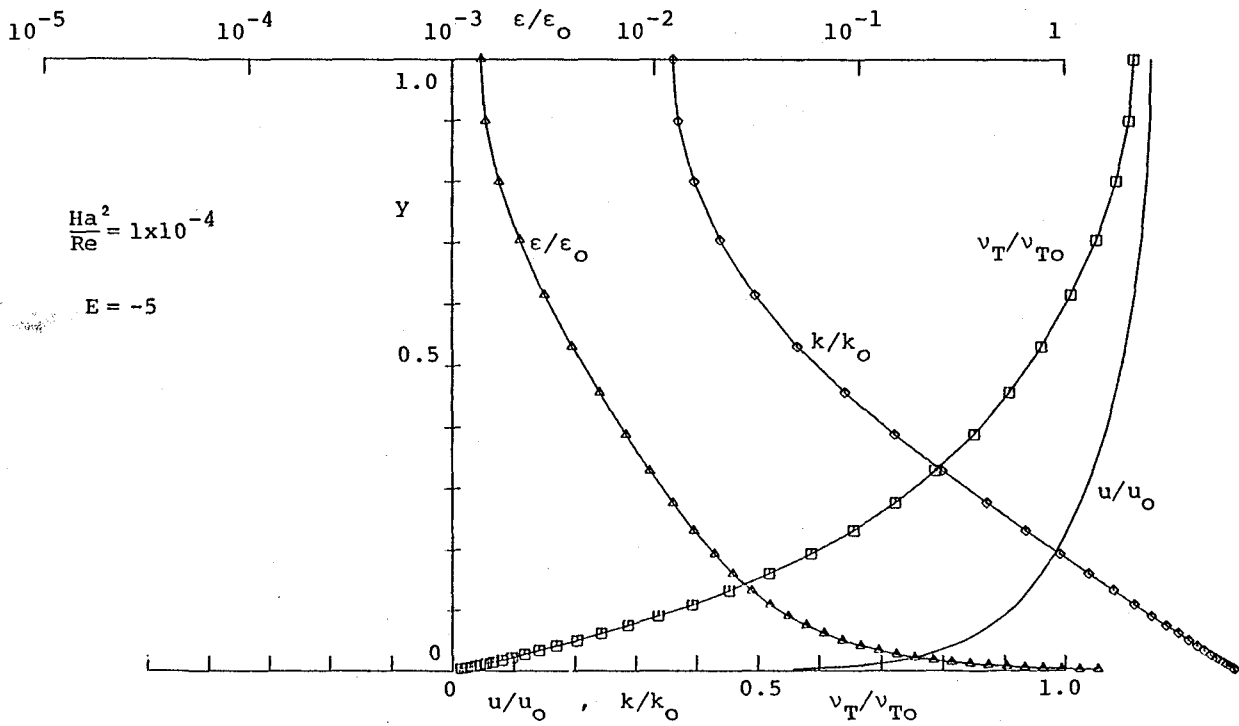


Fig. 5-6 Relation between strength of applied magnetic flux density and flux of flow of channel

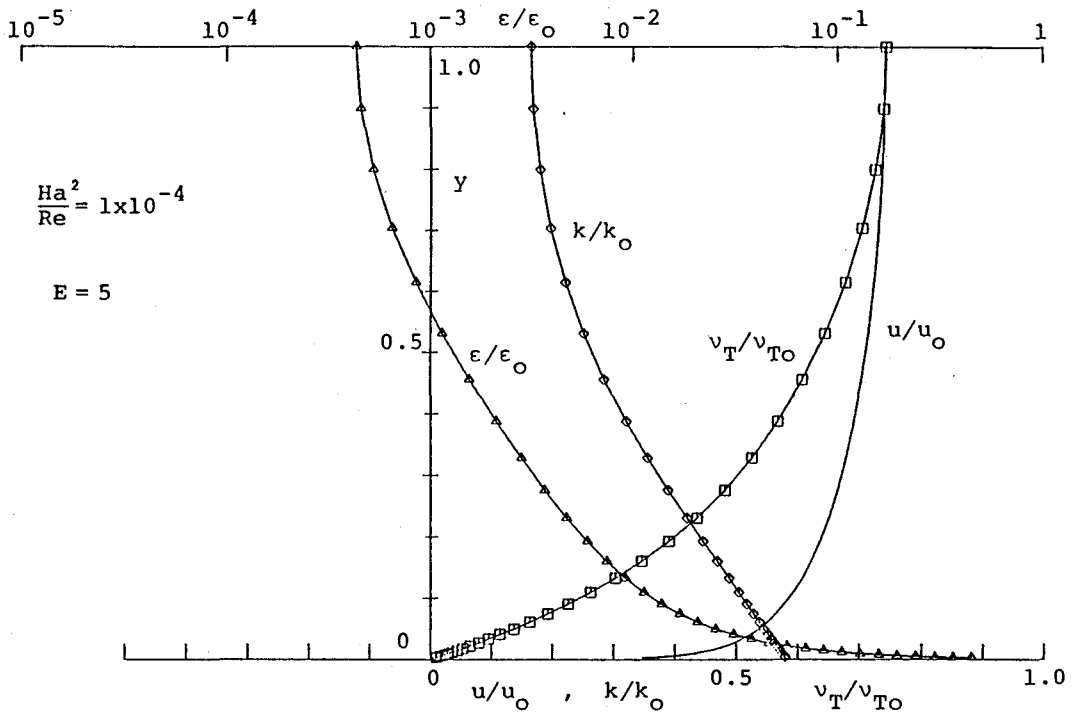


(a) $Ha^2/Re = 1.0 \times 10^4$, $E = -10$

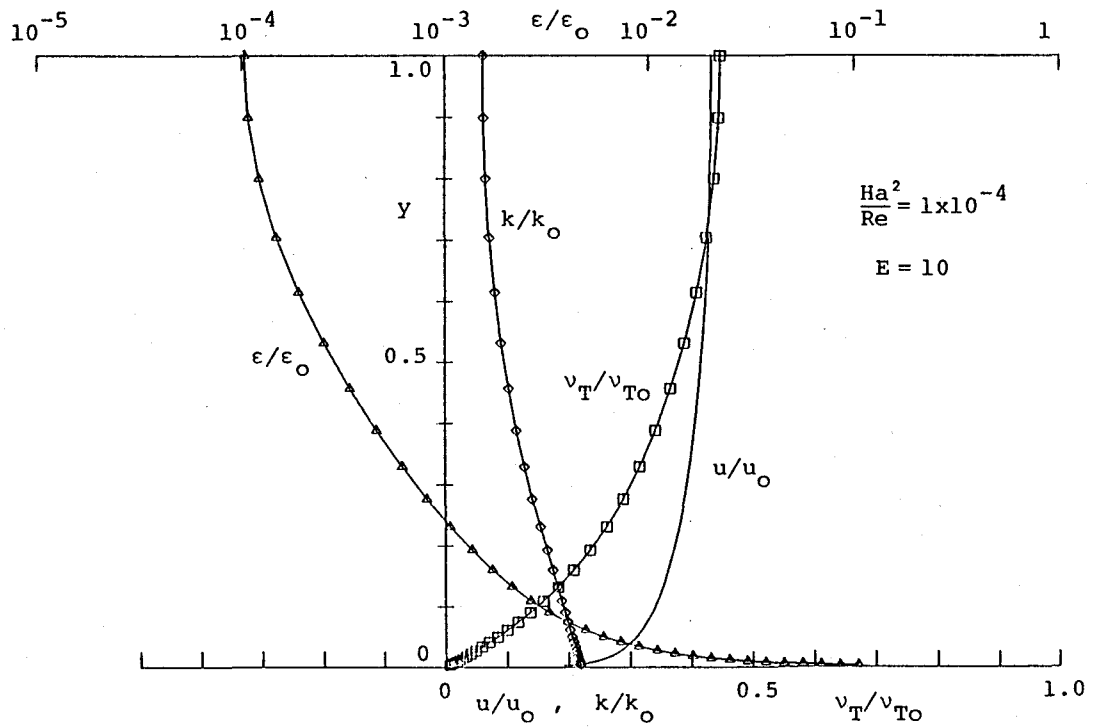


(b) $Ha^2/Re = 1.0 \times 10^4$, $E = -5$

Fig. 5-7 Calculated result of turbulent channel flow



(c) $Ha^2/Re = 1.0 \times 10^4$, $E = 5$



(d) $Ha^2/Re = 1.0 \times 10^4$, $E = 10$

Fig. 5-7 Calculated result of turbulent channel flow

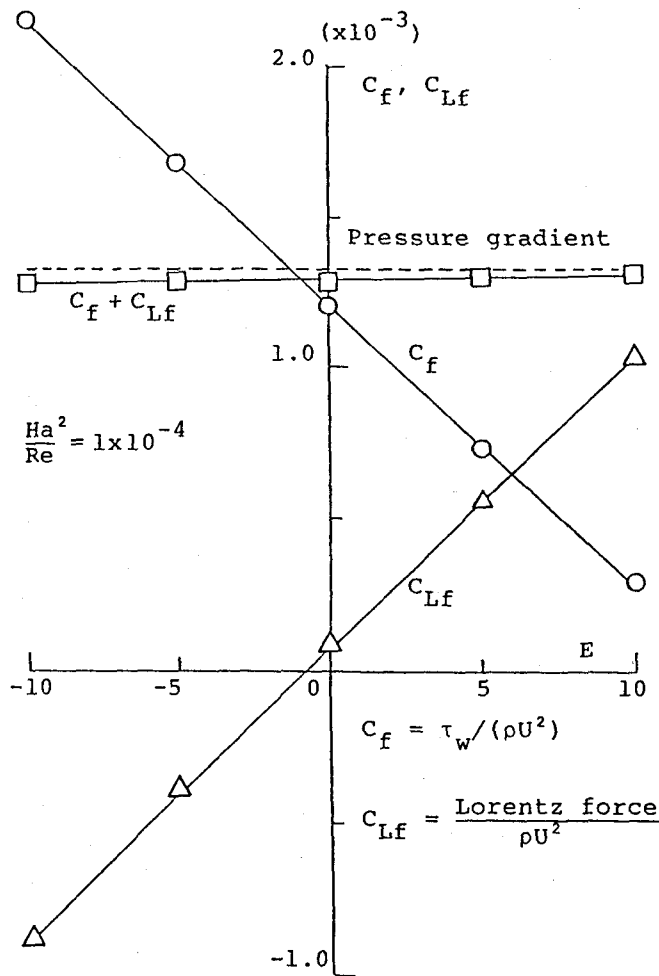


Fig. 5-8 Relation between strength of applied electric field and resistance acting on channel

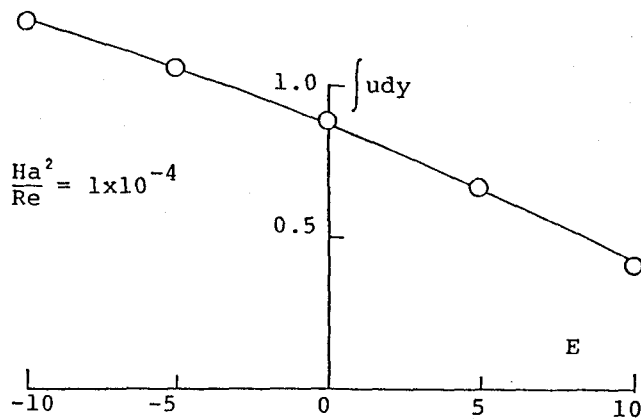


Fig. 5-9 Relation between strength of applied electric field and flux of flow of channel

○ : given by boundary condition

● : computational point

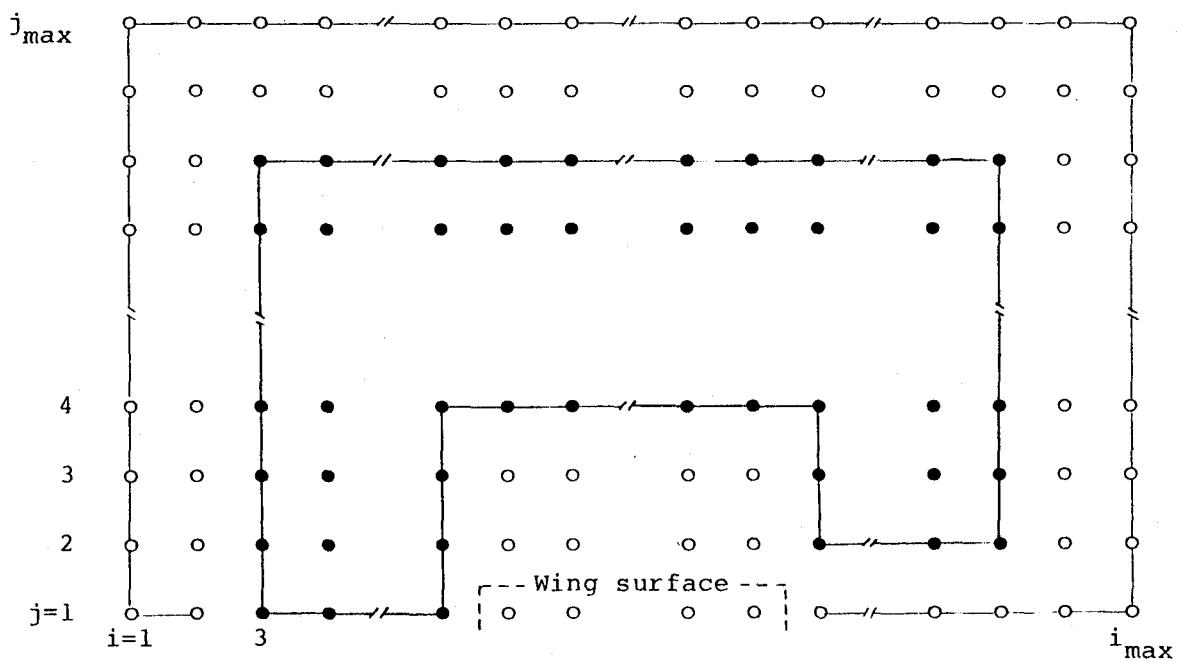


Fig. 5-10 Computational domain

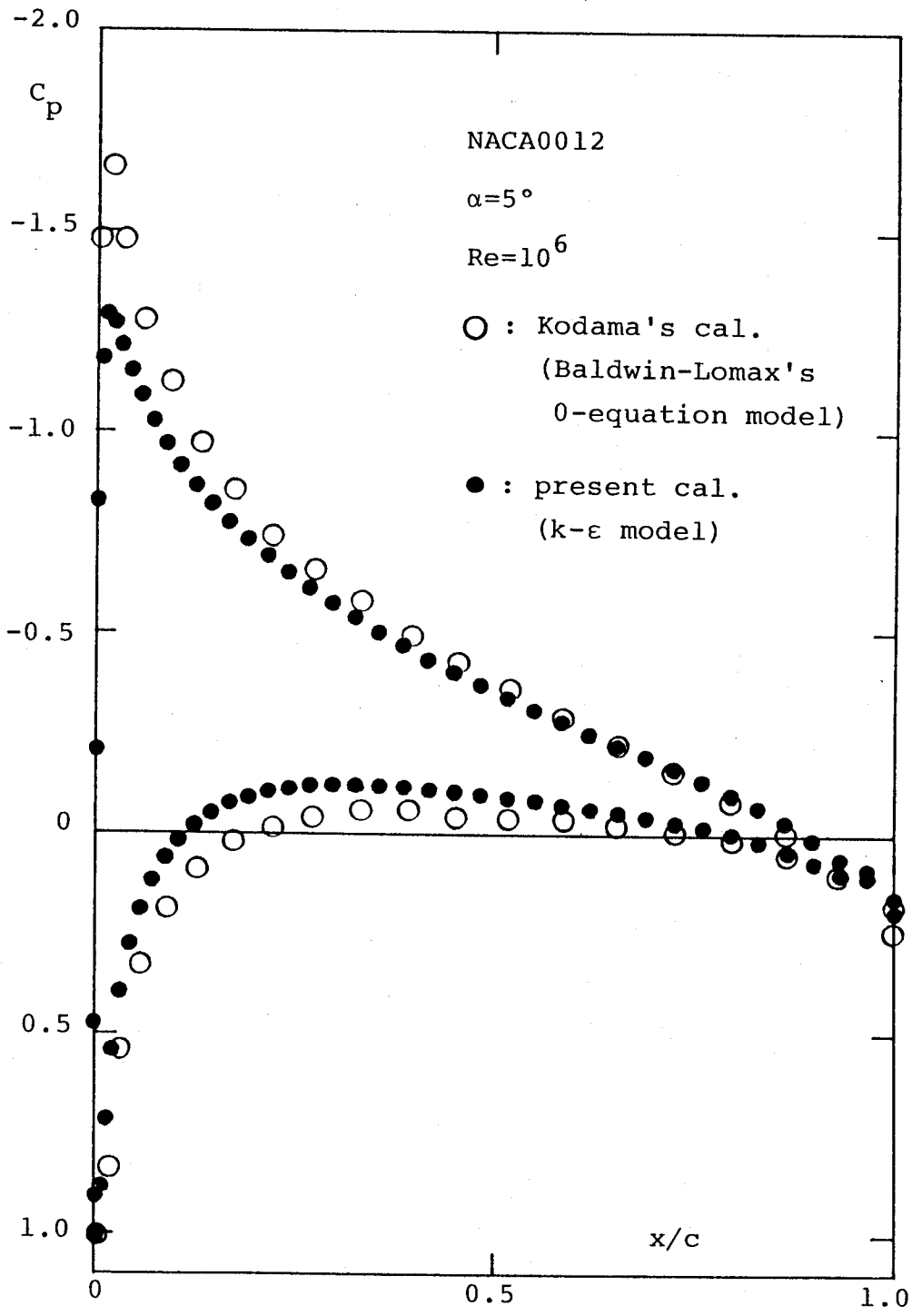


Fig.5-11 Pressure distribution along wing surface ($Re=10^6$, k- ϵ model, attack angle = 5 (deg) non-MHD condition)

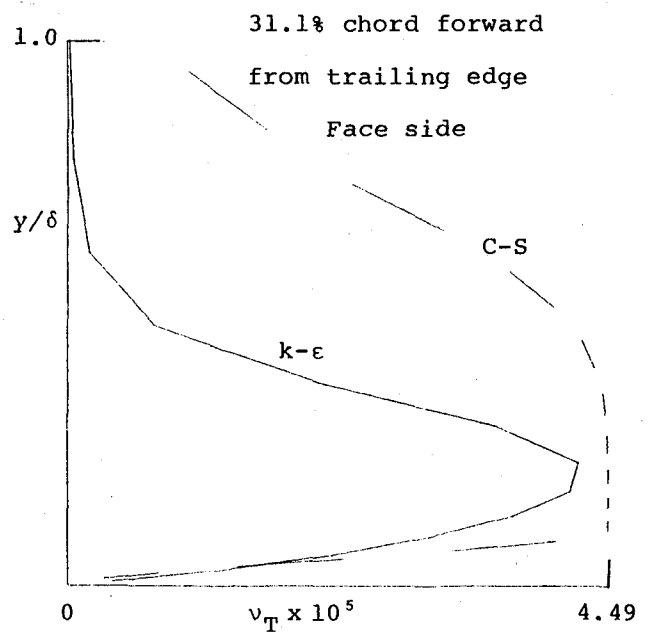
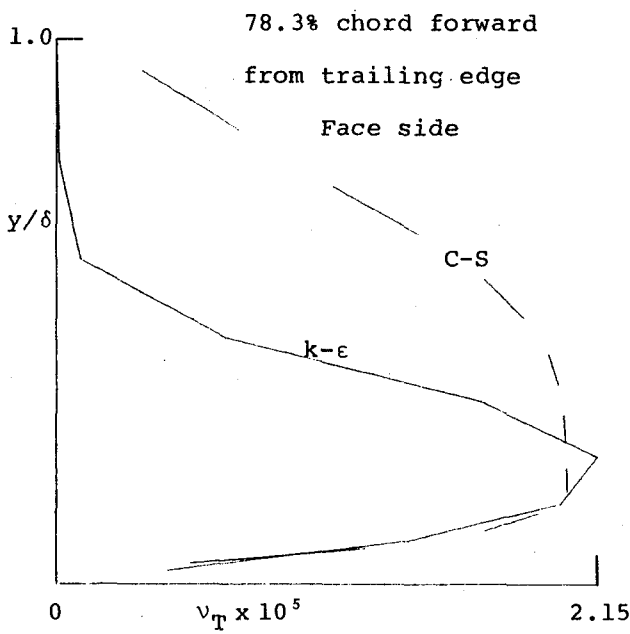
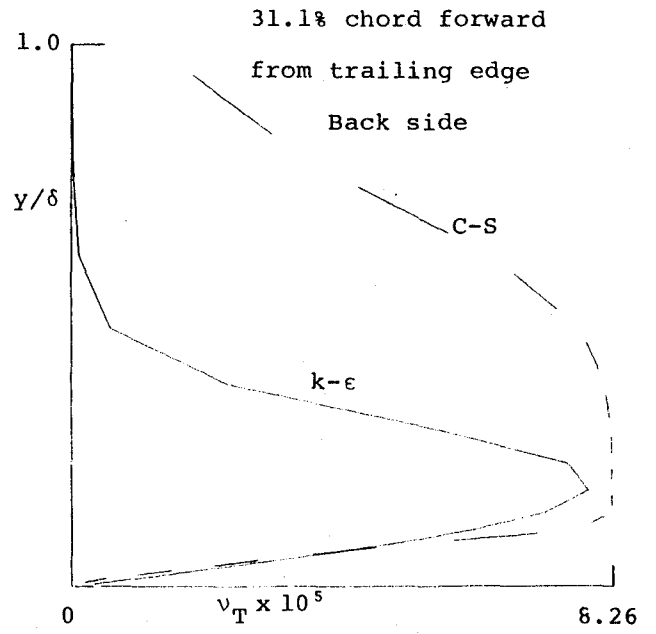
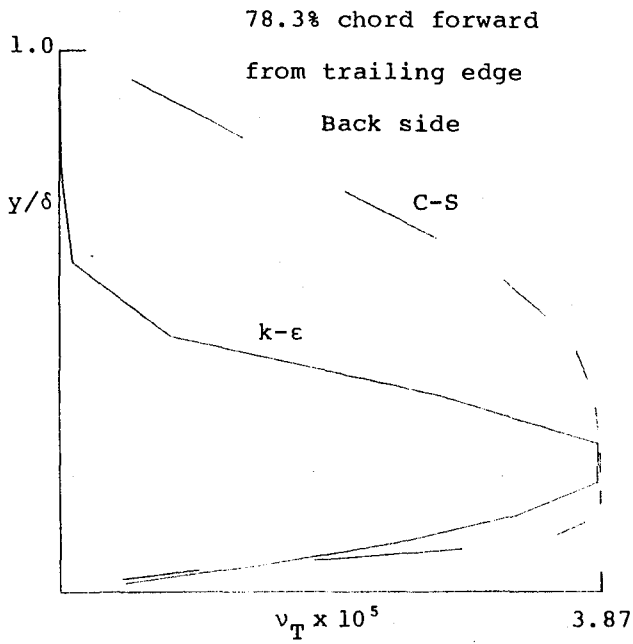


Fig.5-12 Eddy viscosity distribution

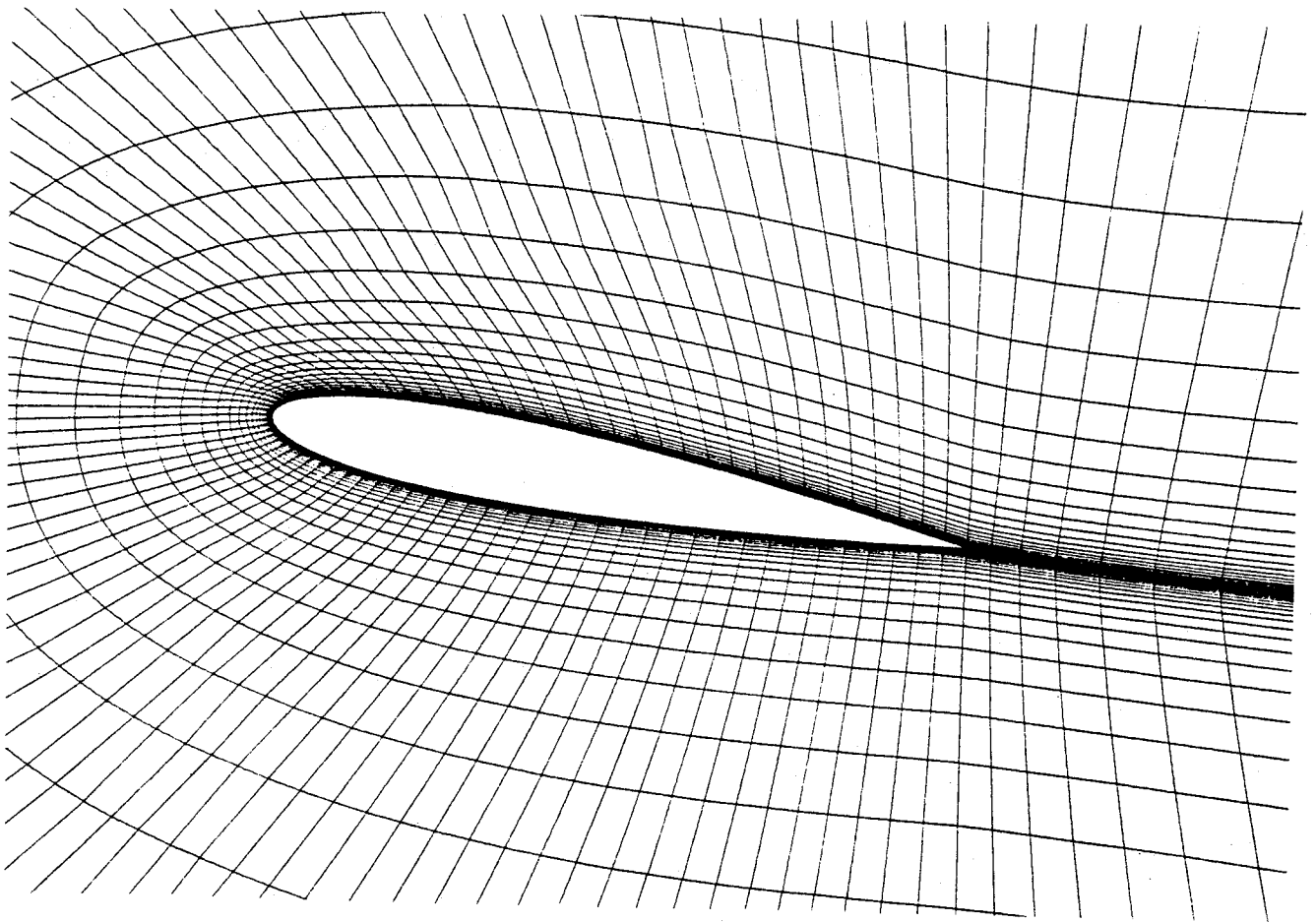
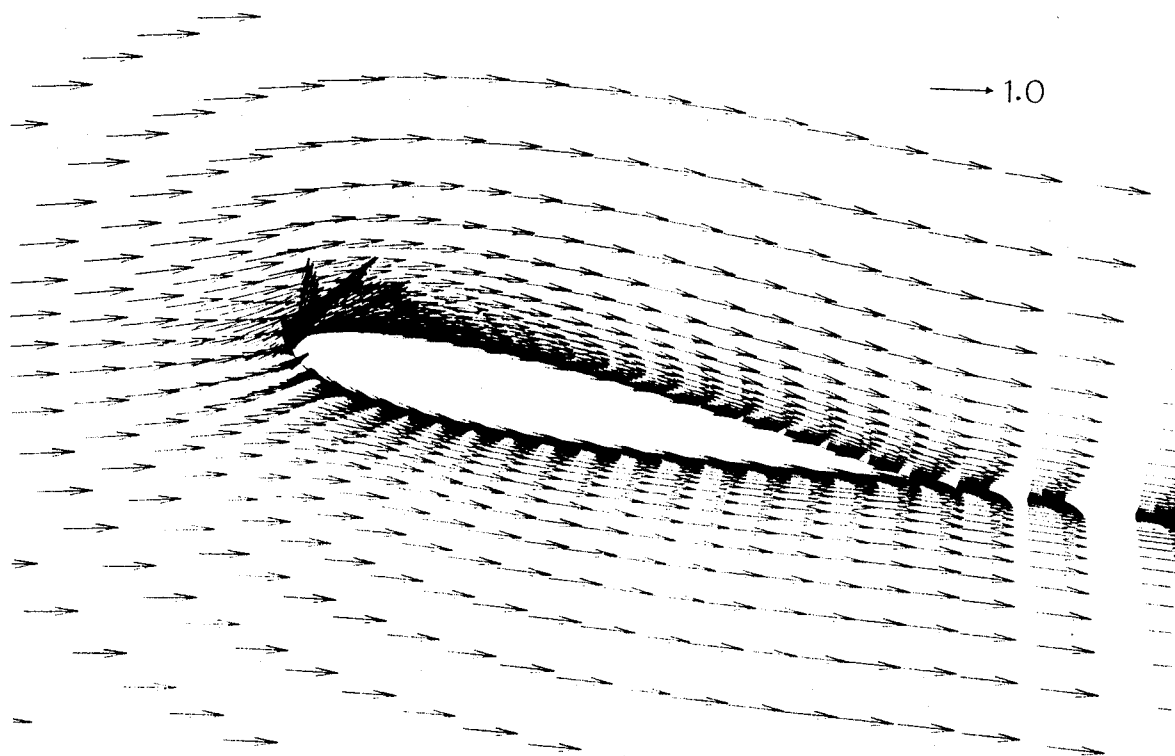
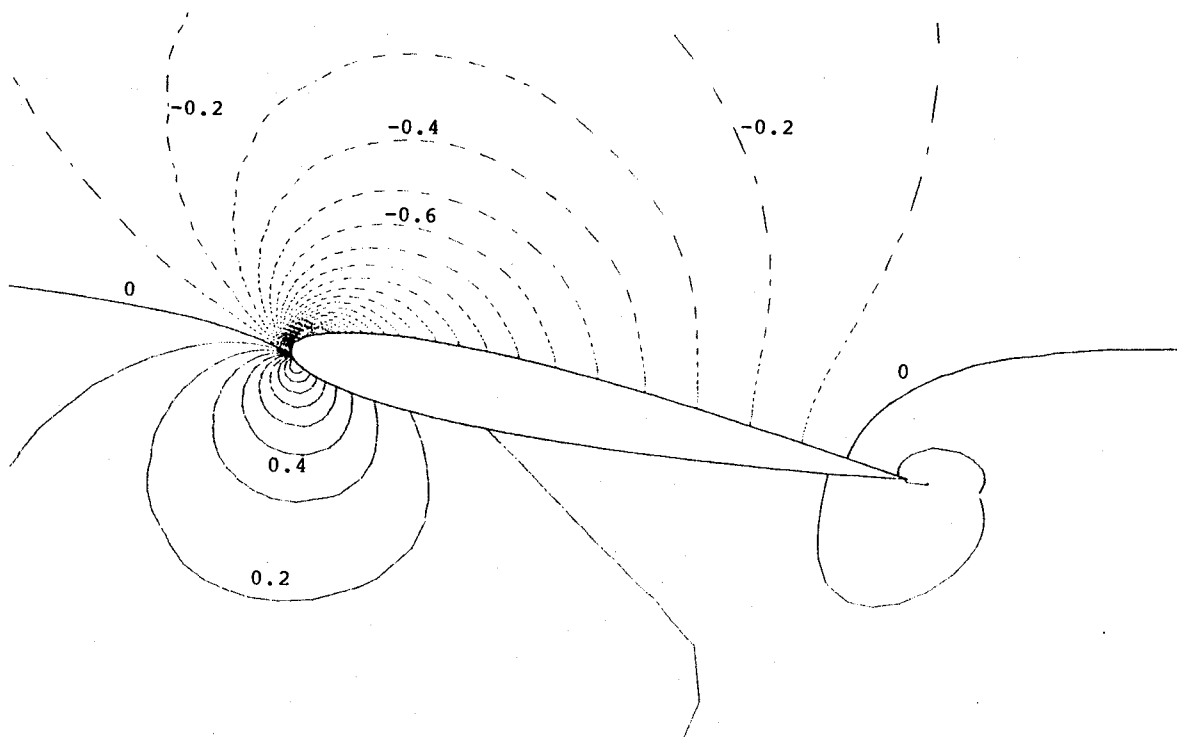


Fig.5-13 Mesh division (minimum space = 0.0002)

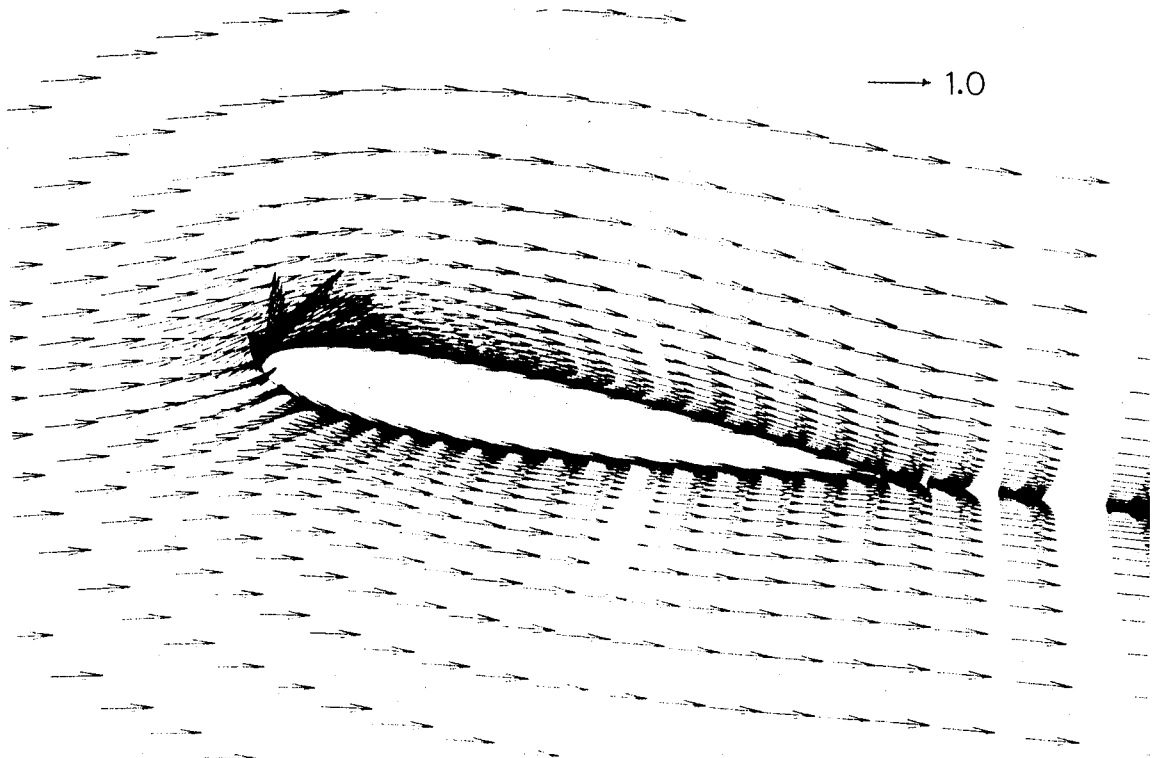


(a) Velocity distribution

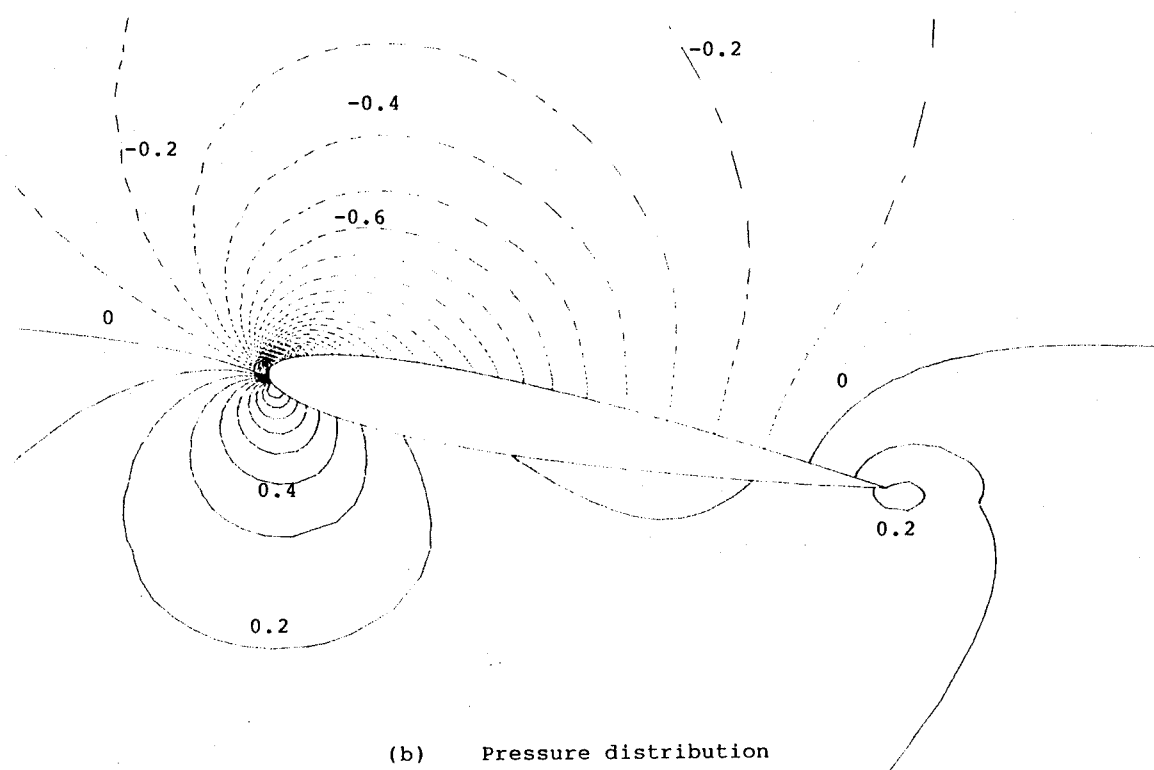


(b) Pressure distribution

Fig.5-14 Calculated result of flow around wing section ($Re=10^6$, attack angle = 10 (deg), $k-\epsilon$ model, non-MHD condition)

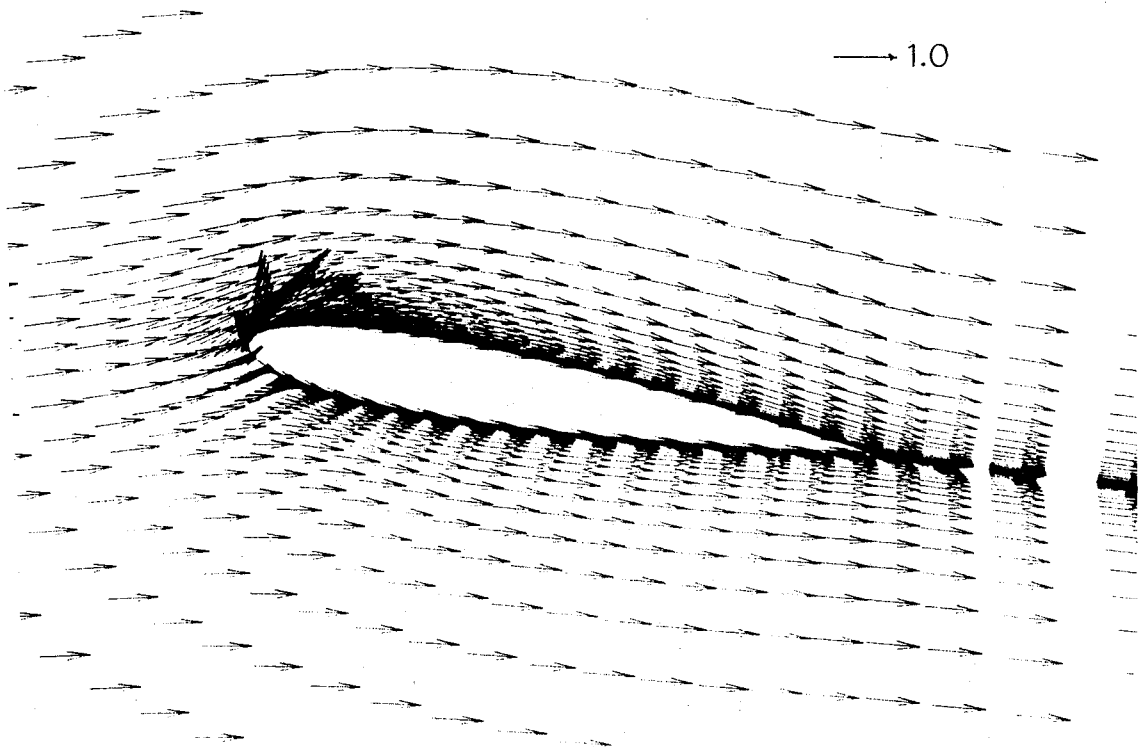


(a) Velocity distribution

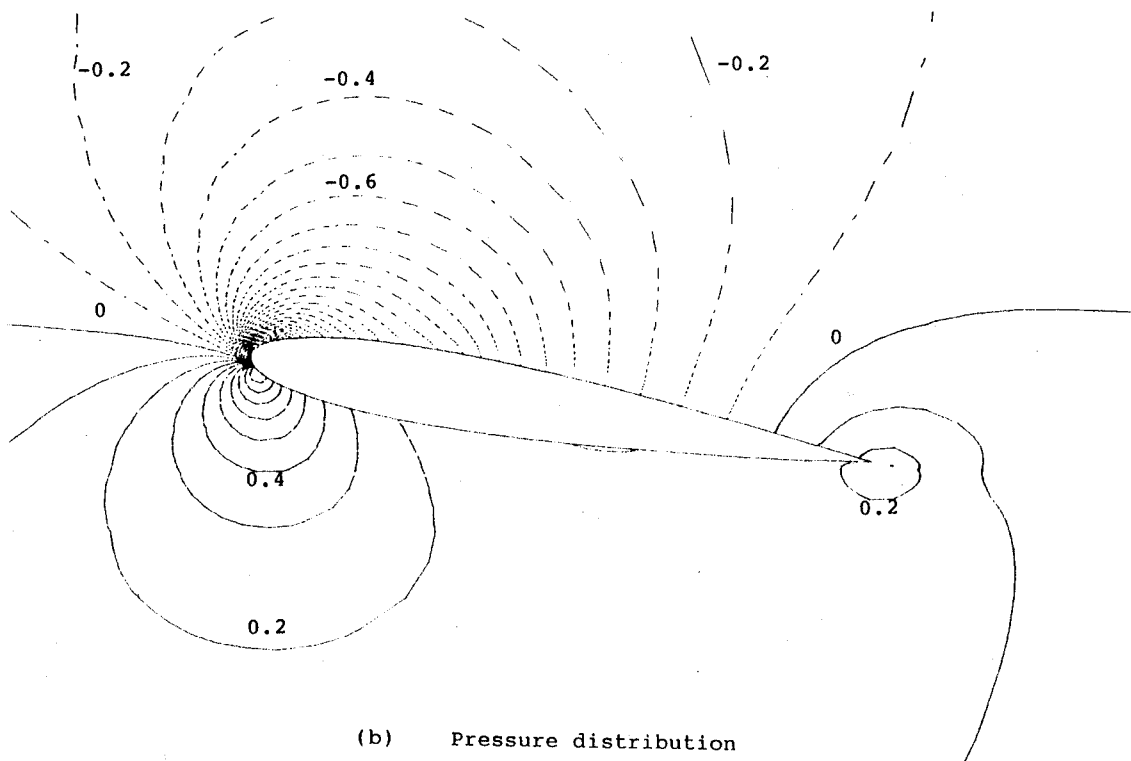


(b) Pressure distribution

Fig.5-15 Calculated result of flow around wing section ($Re=10^5$, attack angle = 10 (deg), $k-\epsilon$ model, $Ha=126.4$, $E=-200$)

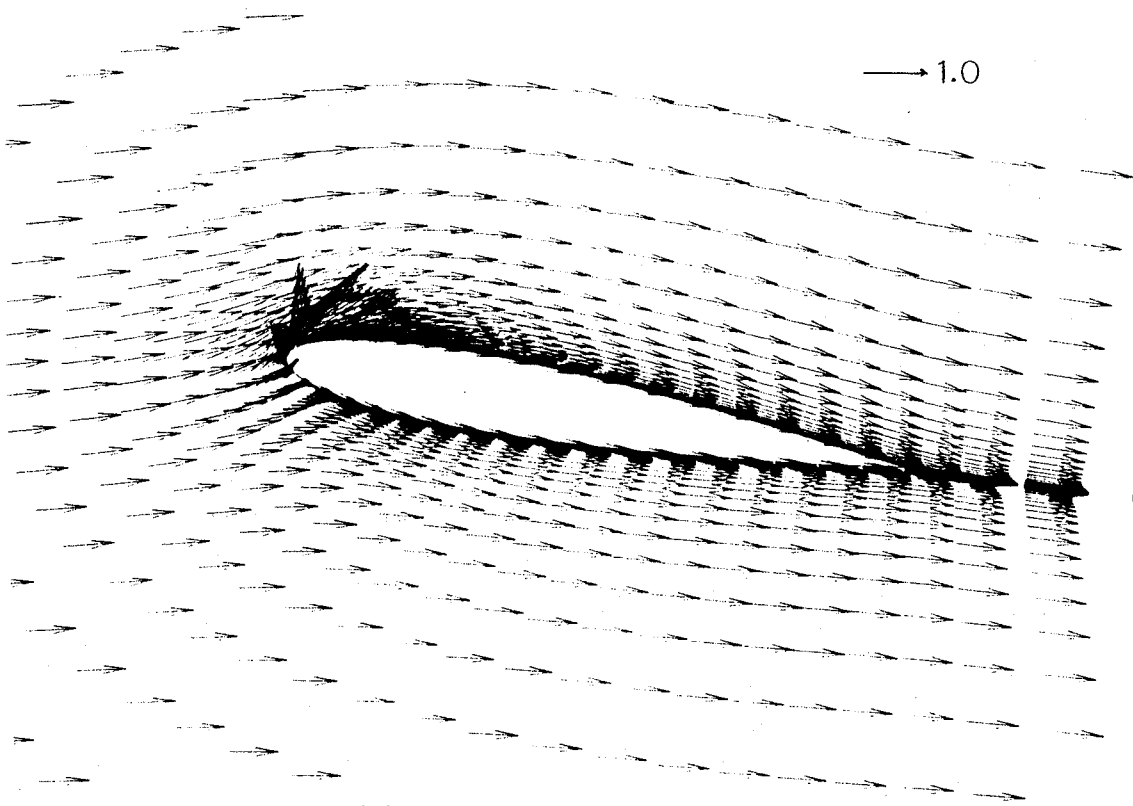


(a) Velocity distribution

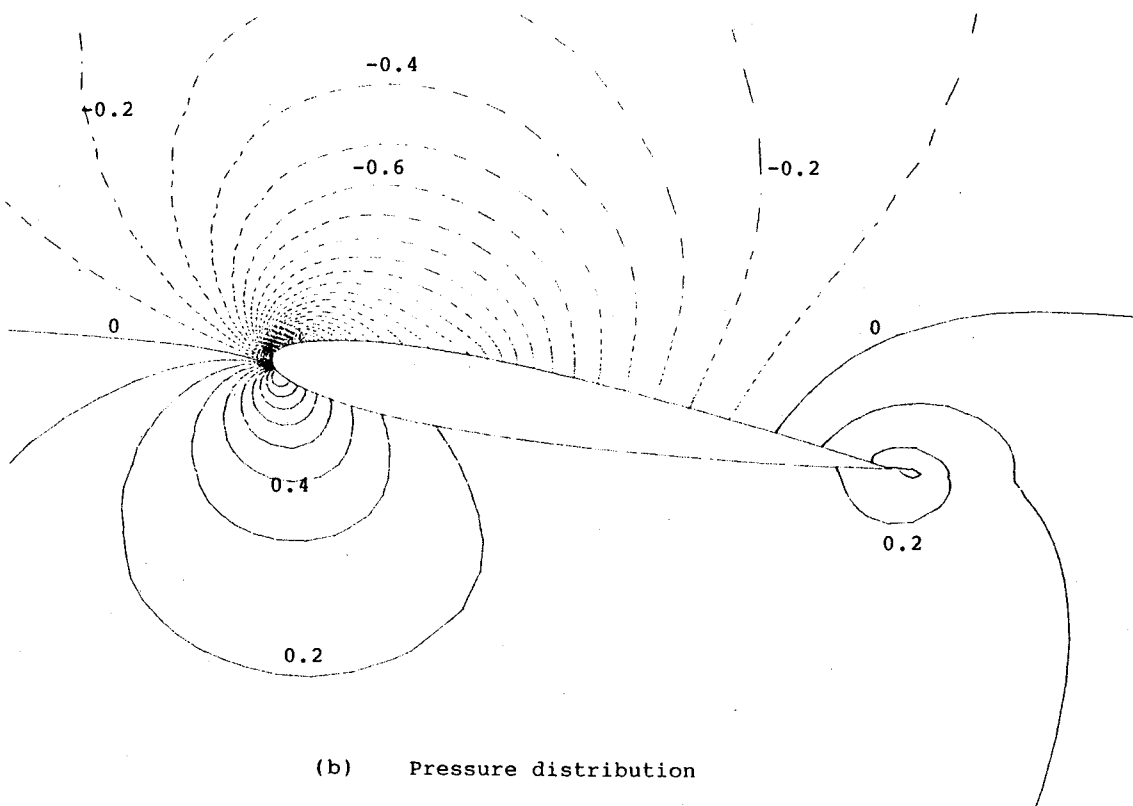


(b) Pressure distribution

Fig.5-16 Calculated result of flow around wing section ($Re=10^6$, attack angle = 10 (deg), $k-\epsilon$ model, $Ha=126.4$, $E=-400$)

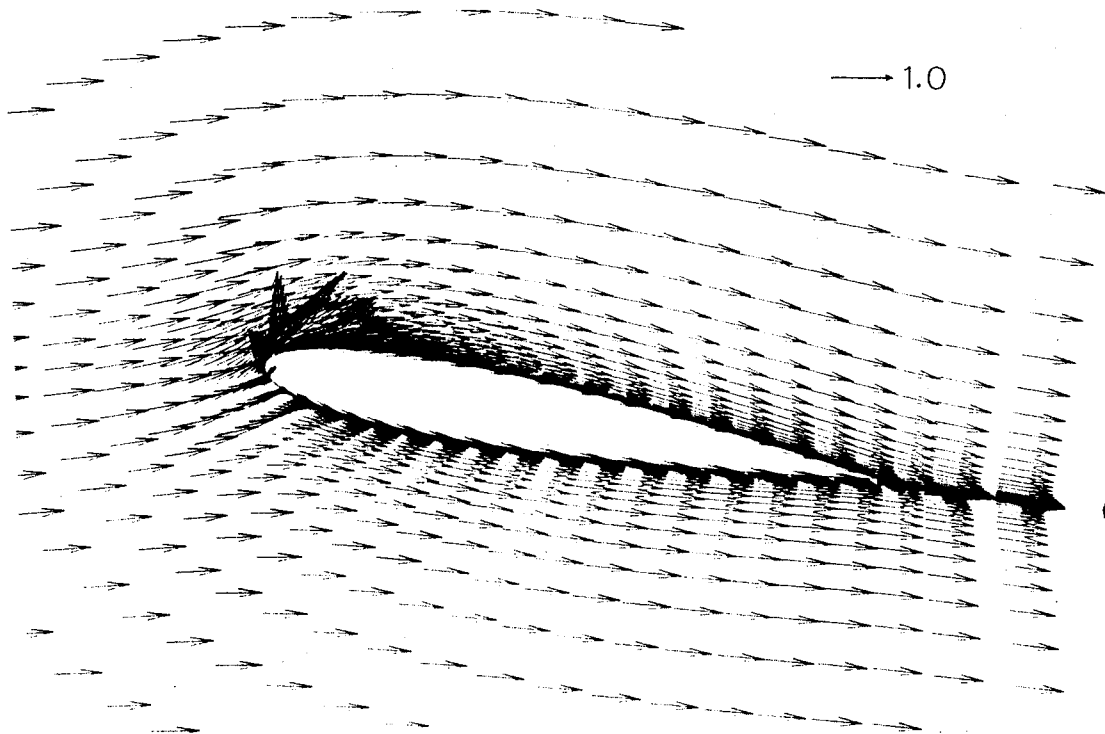


(a) Velocity distribution

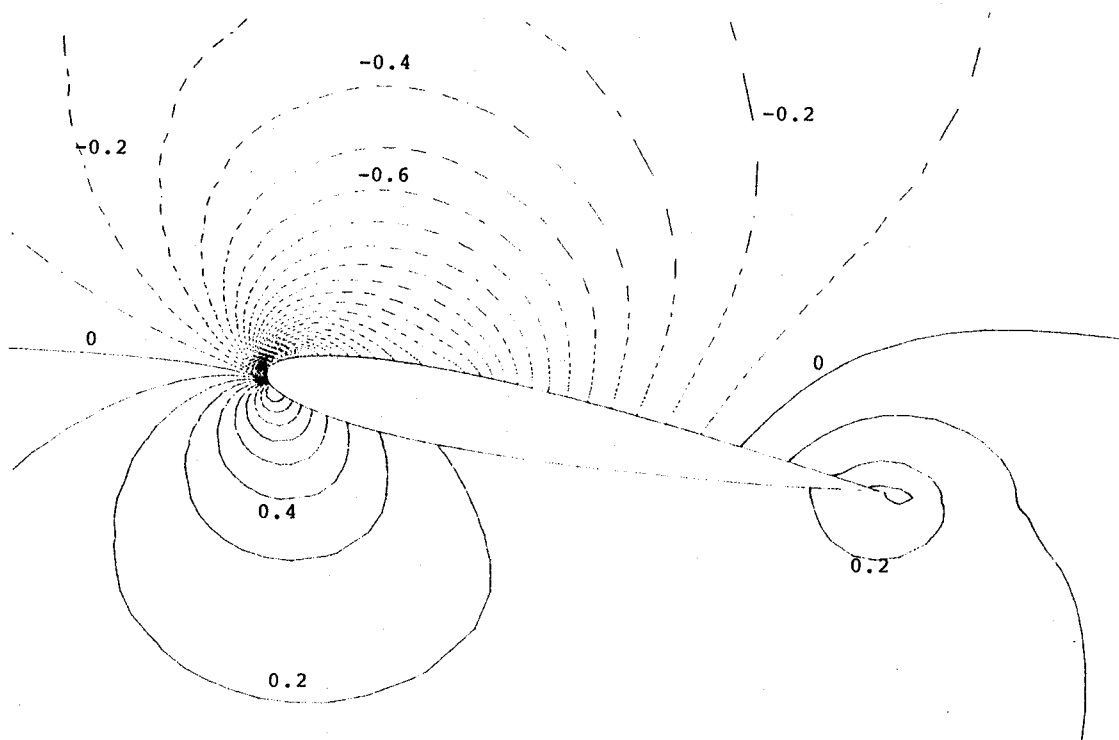


(b) Pressure distribution

Fig.5-17 Calculated result of flow around wing section ($Re=10^6$, attack angle = 10 (deg), $k-\epsilon$ model, $Ha=126.4$, $E=-600$)



(a) Velocity distribution



(b) Pressure distribution

Fig.5-18 Calculated result of flow around wing section ($Re=10^6$, attack angle = 10 (deg), $k-\epsilon$ model, $Ha=126.4$, $E=-800$)

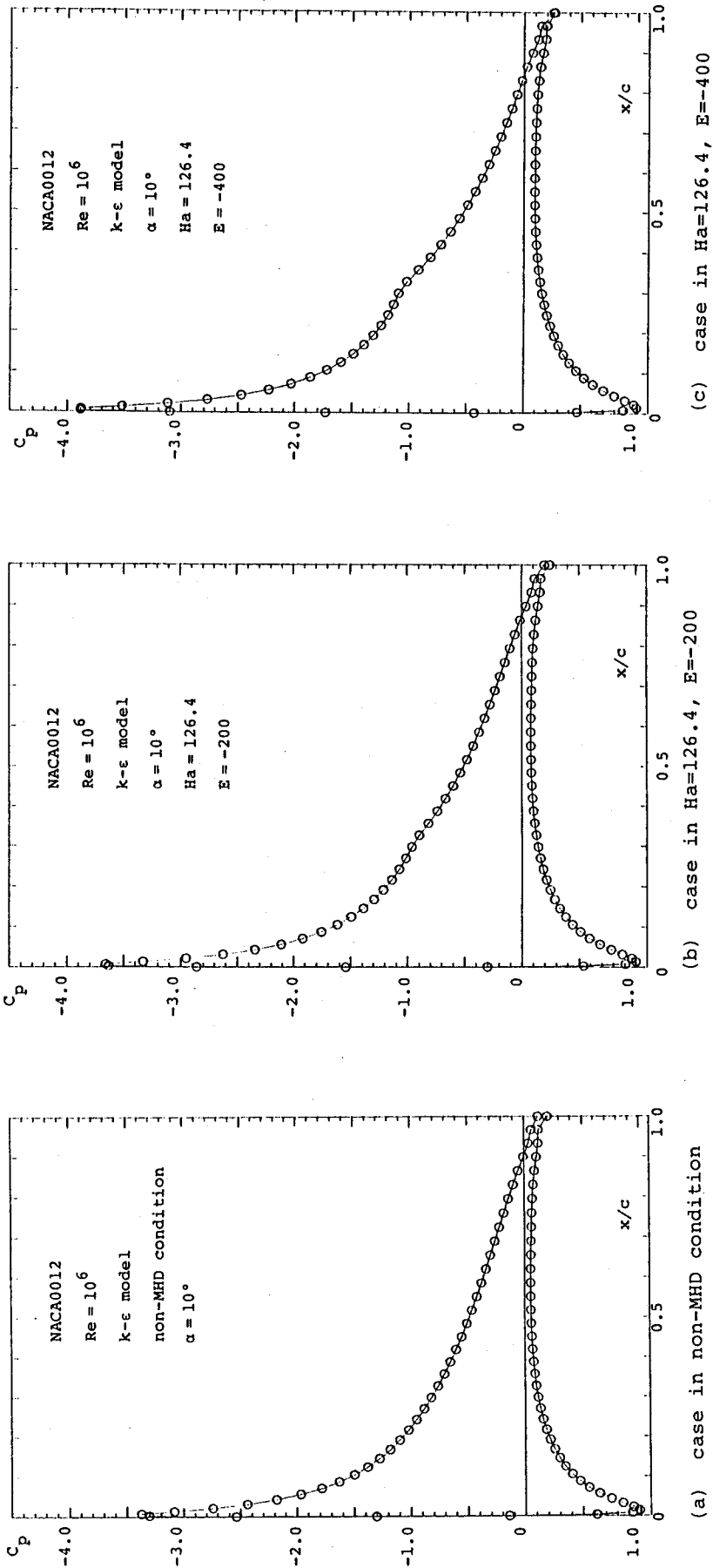
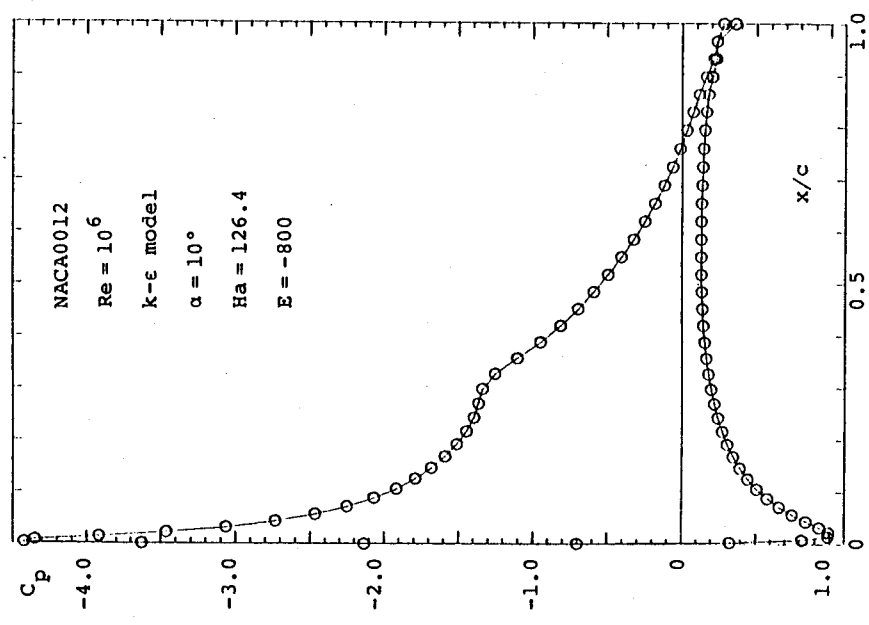
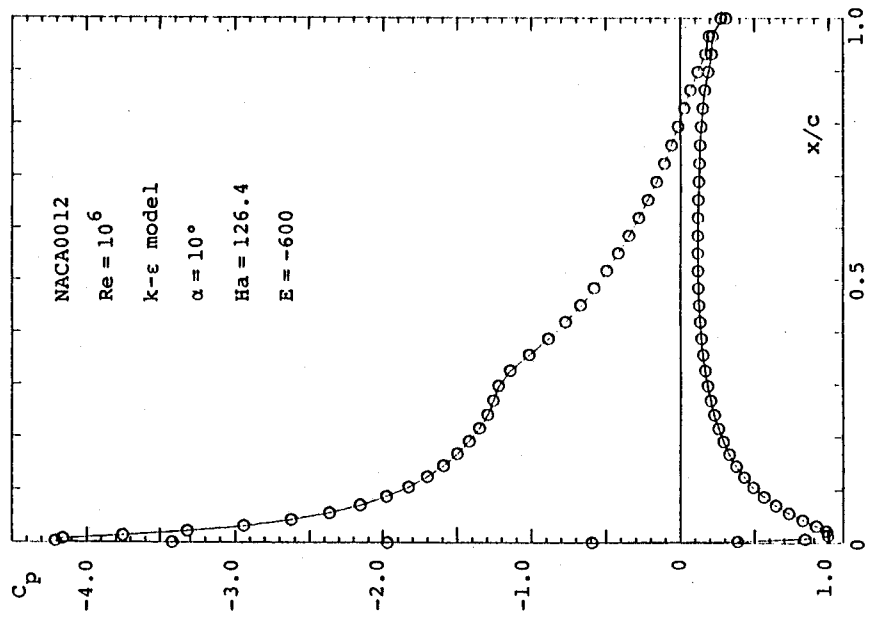


Fig.5-19 Pressure distribution along wing surface ($Re=10^6$, k- ϵ model, attack angle = 10 (deg))



(e) case in Ha=126.4, E=-800



(d) case in Ha=126.4, E=-600

Fig.5-19 Pressure distribution along wing surface (Re= 10^6 , k- ϵ model, attack angle = 10 (deg))

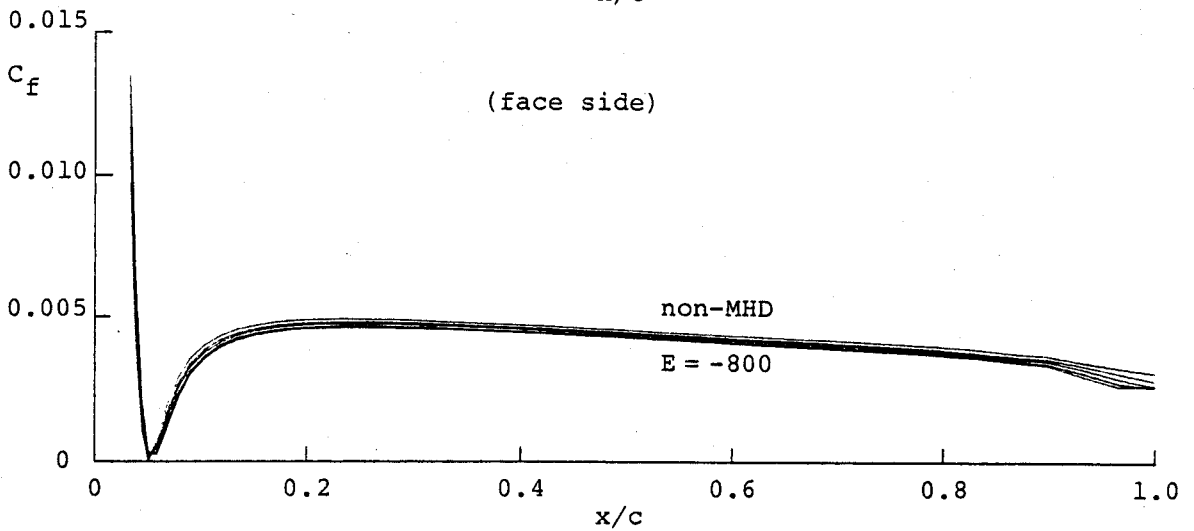
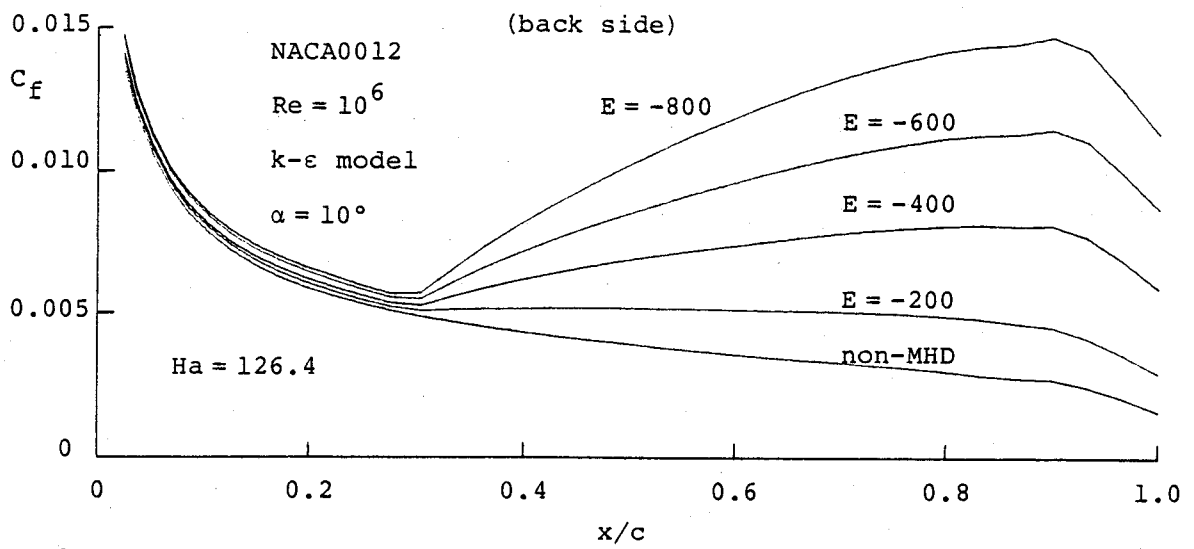


Fig.5-20 Comparison of skin friction coefficient

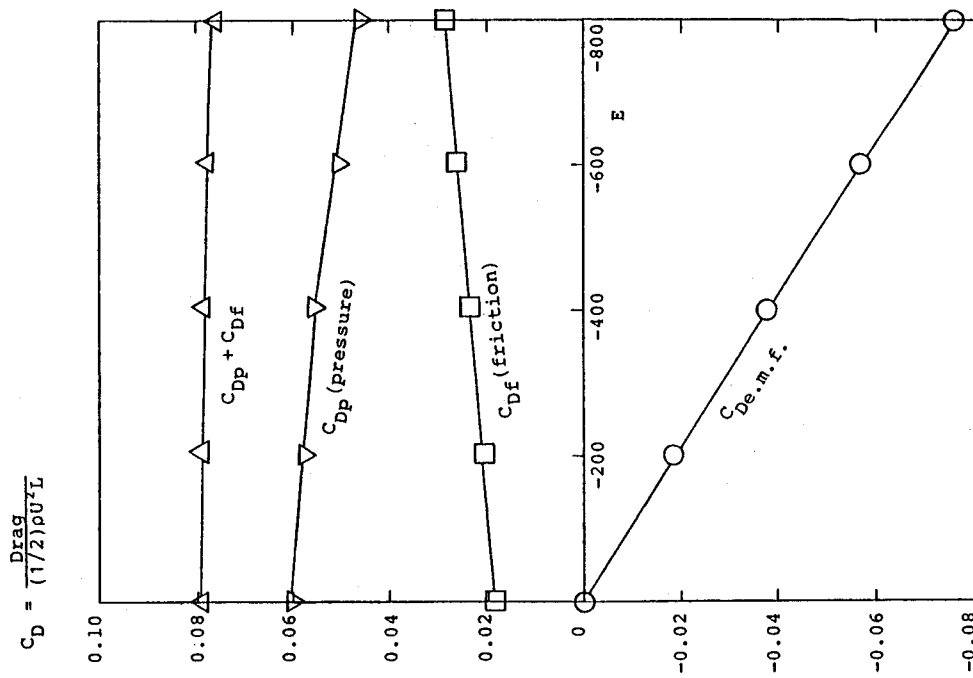


Fig.5-22 Relation between strength of applied electric field and drag coefficient of wing ($Re=10^6$, k- ϵ model, attack angle = 10 (deg))

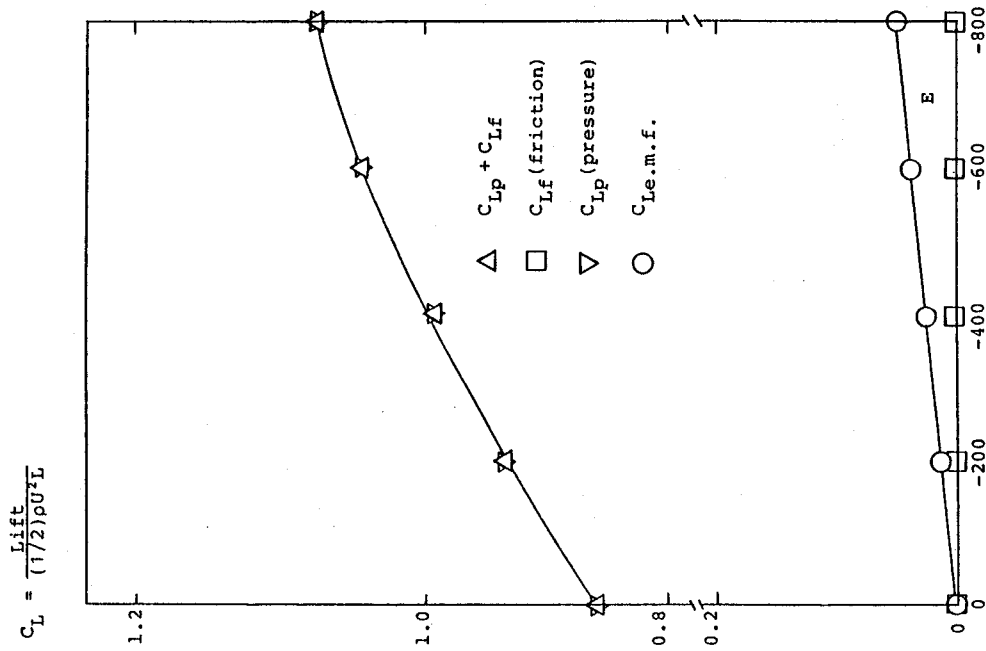


Fig.5-21 Relation between strength of applied electric field and lift coefficient of wing ($Re=10^6$, k- ϵ model, attack angle = 10 (deg))