Title	配管系の振動解析法に関する研究
Author(s)	藤川, 猛
Citation	大阪大学, 1976, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/870
rights	
Note	

配管系の振動解析法に関する研究

１９７６年8月

藤　川　　猛

配管系の振動解析法に関する研究

１９７６年8月

藤　川　　猛

目　次

緒　　　論

1．まえがき

石油化学工業の発達と電力需要の増大にともない，化学プラントや火力プラントに設置される機器，配管，装置類も大形化し，また高温高圧下で運転されるなどますますか酷な条件で使用されるようになってきた。さらに原子力工業においては放射性物質を扱う特殊性から構造安全性に対する要求はきわめて厳しく，機器類の構造設計に際しては安全性，信頼性の確保のために解析を主体とした詳細な強度の検討が必要とされている。

特にこれらのプラントで使用される配管系について考えてみた場合，設計段階において内圧，熱，自重などの静的荷重に加えて流体力や地震による振動の影響についても十分考慮しなければならない。圧力容器の設計規格としてよく使用されている ASME Code のうち原子力配管に関する部分 Sec. Ⅲ NB−3600[1]を見ても，設計時に考慮すべき事項として衝撃や地震などの動的効果の検討を義務づけている。構造設計のうちでも内圧，熱，自重など静荷重に属するものはその大きさが比較的精度よく推定できるうえに，それらの荷重によって発生する応力やひずみの算出も静的解析によることができるため，材料の許容値と比較されるべく計算された応力やひずみの精度はかなりよい。これに対して流体脈動，地震，あるいは接続機器の機械振動による力のように振動荷重に関するものは，入力となる外荷重の大きさ自体がはっきりしない場合が多く，さらに応力やひずみの算出には系の慣性力や減衰力をも考慮した動的解析が必要なことなど，一般に解析過程は複雑で精度もそれほどよくない。事実，化学プラントなどの配管系において発生するトラブルはこのような振動に関連したものがひじょうに多いが，この理由としては振動を誘起する要因の多様さ，不明り

ょうさとともに，振動解析手法の複雑さのために，発生する振動の大きさを精度よく予測するのがむずかしく，設計段階で満足な検討が行なわれていないことが原因と考えられる。

以上のように配管系の構造設計のうちでも振動の問題は重要な部分を占めるものであるにもかかわらず，静的問題に比べると設計手法およびその精度において不十分な状態にあるのが現状であり，これに対処するには許容値のとりかたとともに，加振力の評価や振動応答の算出を可能にする解析法を確立することが重要な課題である。そこで本研究ではプラントなどに設置される配管系の構造設計のうち，特に振動荷重に対する設計法を充実させることを目的として，振動の問題をディジタル電子計算機を用いて解析する方法を検討し，解析手法の確立とその実用化をめざした。

配管系の振動解析について考えるために，実際によく問題となる配管振動のおもな原因を調べてみると，小林[2]も述べているようにつぎの三つがあげられる。

(1) 管内流体の脈動による場合

(2) 配管系に接続する機器の機械振動が加振源となる場合

(3) 地震による場合

これらによる配管系の機械振動は普通強制振動と考えられるが，このうち(1)は管内流体の脈動現象により配管系に強制的な交番力が加えられる場合で，解析的には力加振の問題として扱われる。この場合機械振動の大きさを予測するには加振源である流体力の大きさを推定することが先決であり本研究では第1編において流体脈動の解析を扱う。(2)および(3)は配管系の端末点に強制的に振動が加えられる場合で，解析的には変位加振として扱われる。このとき加振入力である端末点の振動の大きさは配管に接続する外部の系の振動解析によって求めておくことになるので，配管系を対象としている本研究ではこれについては触れない。

つぎに，これらの加振入力に対して配管系の振動応答を解析する場合，運動方程式を数値積分や差分法によって直接解く方法もあるが，通常はモーダルアナリシスによって解かれることが多い。モーダルアナリシスは固有値解析と応答解析の二つの部分から成っており，固有値解析でいったん振動特性を求めたあと，これらのデータを用いて導かれたモードごとの運動方程式を解き，応答を算出する手法である。この方法の特長はいったん振動特性を算出するために，この段階で共振の可能性や耐振構造の見通しがつき，設計変更の必要性や改善のための方向づけが判断できることである。したがって前半の固有値解析だけでも定性的には動的設計が可能となり，解析を行なうに十分な意義がある。しかし構造安全性を詳細に評価するためには，具体的な加振入力が与えられたときに配管系に生じる変位，加速度、応力などの応答を定量的に算出すること，すなわち応答解析を行なうことが必要になる。モーダルアナリシスでは，この応答解析がモードごとに独立した1自由度系の問題として扱えるために，解析が容易なこと，1質点系との対応によって解の見通しが効くことなどの利点があり，これらが応答解析にモーダルアナリシスが多く使用される理由となっている。

以上のように配管系の振動解析法に関しては，加振力の解析，振動特性の解析，振動応答の解析の三段階に分けて検討するのがよいと考えられ，本研究もこれに従ってつぎの順序で検討してゆく。

(1) 流体系の脈動解析法に関する研究（加振力の解析）

(2) 機械系の固有値解析法に関する研究（振動特性の解析）

(3) 機械系の応答解析法に関する研究（振動応答の解析）

2. 従来の研究の概要

2.1 配管系の流体脈動に関する研究

管内流体の振動問題としては，速度形ポンプのサージングや弁の弾性に

起因する振動のように自励的なもの[3][4]，水撃作用による過渡的なもの[5][6][7]，および往復ポンプや圧縮機の周期的な吐出し，吸込による強制的なものなどがある。これらの流体系の振動は機械効率の低下，所要動力の増大，弁の動作不良など性能的な不利益だけでなく，機器配管系の機械振動を誘発し，疲れ破壊の原因となる。機械系の振動原因として流体系を見た場合，上述のほかにさらに気液混相流によるものやカルマン渦によるものなども考えられるが，プラントで最もよく問題になるのは往復圧縮機の吐出し，吸込行程からくる強制的な脈動現象であろう。

流体系の脈動に関する問題が検討されるようになったのは比較的新しく，藤井[8][9]は1948年に圧縮機レシーバ内に発生する脈動圧の理論式を提案し，また空気だめにつながる吐出し管系の共振の可能性とその防止法を検討した。直管と空気だめから成るような簡単な系については，固有振動数を計算して圧縮機回転数との共振を避けるとか，音響インピーダンスの検討から空気だめの容量を決定するなどの防振設計も可能であり，実際の設計業務では藤井の理論やKellogg Co. から出されている設計資料[10]程度の解析，検討が行なわれていた。しかしプラントの大形化にともない，設計段階での詳細な解析が要求されるにつれ，大谷ら[11][12][13]はこのような問題に対してアナログ計算機を用いた解析を試み，また脈動現象による機械系への加振効果についても検討した。

一方，欧米では冷凍機や圧縮機の分野で早くから脈動問題がとりあげられており，1904年のTerbeckの研究やその後のBorth，Wagenblastらの脈動による動力増加に関する報告[14]が見られる。また解析的にはアナログ計算機によるシミュレーションが盛んで，1952年にはChilton[15]らがL－C－R回路を用いた解析法を紹介しており，J. V. Hughes[16]やW. Nimitz[17]のアナログシミュレーションに関する報告もある。またアメリカなどでは専用の大形アナログ計算機を装備して圧縮機メーカからの解析依頼にこ

たえているエンジニアリング会社もある。アナログ計算機を用いて脈動解析する場合は，配管要素の特性や運転条件を変更したときの挙動が簡単に求められること，また時間領域で解析できるため脈動波形の観察や過渡応答の解析ができることなど便利な点を有している。しかし欠点としては相当大きなアナログ計算機が必要なこと，プログラミングに高度な技術を要することなどがあり，特定の限られた研究機関あるいは専門業者でないと実行できず，一般の設計者が日常業務の一部として手軽に使用することはむずかしい。これに対してディジタル計算機では，プログラムさえ完成してしまえば定まったフォーマットでデータをインプットするだけで容易に解析結果が得られるなど簡単に使用できる長所があり，脈動解析の実用化，普及化をはかるためにはディジタル計算機を利用することが望まれている。

ディジタル計算機を用いた脈動解析はまだほとんど報告されておらず，わずかに流体系の固有振動数の解析を扱った酒井らの研究[18]，および脈動応答の解析を扱ったGroverの研究[19]が見られる程度である。しかもGroverの場合には具体的な解析法が示されていない状態で，脈動応答解析に関する数値解法およびプログラミングの手法については今後さらに検討する余地が残されている。

2.2　配管系の機械振動に関する研究

機械振動の分野において振動解析としてまず行なわれるのが固有振動数などの振動特性の解析である。奥村[20]によれば単一な弾性棒のねじり振動，曲げ振動については，すでに二百年以上も前のD. Bernoulli, L. Eulerの時代にほぼ完全に解析されていたようである。しかし実用的な意味での分布質量系における最も古典的な計算法はRayleighの方法[21]であろう。Rayleighの方法を拡張し，改善するために考えだされたのがRitz[22]，Galerkin[23]，Stodola[24]らの方法であるが，これらの理論を用いても何点かで

屈曲している配管やばね支持，分岐があるような複雑な系の解析は手計算では全く不可能な状態であり，実用的には複雑な配管系でも支持間の1スパンだけをとりだして，両端固定とか支持とかの単純な境界条件で計算を行ない，固有振動数の範囲を推定する程度にとどまっていた。

理論解析によって振動特性を求める方法の限界から，数値解析を用いる方法が研究されはじめ，軸系のねじり固有振動数の数値解法として知られているHolzerの方法がMyklestad[25]によって連続はりの問題に拡張された。一方振動問題に対するマトリックス表現の応用はFrazer, Duncan, Collarらによって開発され，また伝達マトリックス的な解法はTomson, Margurre, Pestel らに試みられた。[20] 奥村も1951年ごろからこの手法を拡張，整理し1957年には一つの体系としてほぼ完成した成果を発表している。[26] 1960年代になってからの電子計算機の発達は大規模な数値計算を可能にし，マトリックスを用いた解法が実用的にも大きな意味をもつようになった。1964年には，原子力発電所の配管系の耐震設計法を研究する目的で設置された機械学会分科会において，藤井，柴田らが中心となって立体配管系の振動解析プログラムDYNAPSが開発され，現在も広く使用されている。[27][28] またこれに続く分科会において，軸対称殻体の振動特性の解析のために開発された奥村らのプログラムSHELVIA[29]，浜田らの差分法による解法[30]は内容において配管系の解析と密接な関係にある。その後平松[31][32]は小形圧縮機まわりのベンド部の多い配管系を対象にした伝達マトリックス法による解法を報告している。伝達マトリックス法は，要素内部での変位関数として解関数が使用できるためほぼ計算機の有効けた数の精度が得られること，またマトリックスの大きさが系の自由度に依存しないため小容量の計算機で処理できるなど，ひじょうに特色のある解法であり，この理論を体系化し実用化した奥村，柴田らの功績は高く評価される。

一方，静的構造解析の分野で発達してきた有限要素法が，電子計算機の

大容量化によって実用化されるにつれ，動的解析の分野にも波及してきた。有限要素法を用いて導かれた固有値方程式を大きなマトリックスで扱うこの方法は，網目状に配置された複雑な配管系に対しても取扱いが容易なこと，適当な固有値解法を選択することによって計算時間を短縮できること，静的解析や他の構造物の振動解析とも統一的に扱えること，プログラミングやデータの作成が簡単なことなどの特長があるため，最近多く使用されるようになってきている。[33][34][35][36] また有限要素法のような理論では扱いにくい複雑な系に対しては，実測された機械インピーダンスを合成して全体系の振動特性を解析する手法が有効であるが，計測技術の発達によって機械系のインピーダンスが比較的容易にまた精度よく測定できるようになるに従い，インピーダンス合成法を用いて振動解析を行なう方法も実用化されてきた。[37][38][39][40]

以上が配管系の振動特性の解析に関する従来の研究の概要であるが，設計段階で構造安全性の詳細な評価を行なうには，振動特性だけでなく予想される外力に対する振動応答を定量的に算出する必要がある。従来，この種の解析は加振力の大きさが不明確なこと，減衰量の推定がむずかしいことなどの理由によって，最近まではほとんど検討されず，動的設計としては振動特性の解析によって得られた固有振動数，振動モードの値から定性的に耐振性を評価する程度にとどまっていた。しかし原子力発電所の建設にともなう耐震設計の必要性から，前述の原子炉配管系耐震設計法研究分科会が結成され，そこでの成果[27]とそれに続く多くの研究[41][42][43][44]によってモーダルアナリシスを主体とした応答解析法が検討され，耐震設計技術指針[45]やコンビナート保安防災技術指針[46]にその内容が盛りこまれている。また最近では有限要素法による静的解析からの拡張として，これに慣性項と減衰項を付加した大次元の運動方程式を直接数値積分などで解く方法も紹介され，実用化されてきている。[47][48]

以上のように配管系の機械振動解析に関する技術はここ十数年の間に急速な発展をとげてきたが，構造設計への適用に際してはなお多くの問題を残している。たとえば振動特性の解析に関しては，現在有限要素法を用いた大マトリックス法が多く用いられているが，有限要素法を用いる場合の要素分割の程度や直管以外の配管要素の取扱いなど，モデル化の方法についてはまだ不明確な部分が残されており，固有値方程式を解く際の数値解法についても配管系の解析に適した方法を開発することが望まれている。また有限要素法の理論では扱いにくいような複雑な要素や，振動特性の形で与えられる要素については，実測または計算によって求められた振動特性を機械インピーダンスの形で表現し，インピーダンス合成法を適用して固有値解析を行なうことになるが，現在用いられているインピーダンス合成法は部分要素を結合したあとの全体系に対する固有振動数や結合点の周波数応答を求めるだけにとどまっており，つぎのステップである応答解析を行なうこととは結びついていない。それゆえインピーダンス合成法を用いた場合にも有限要素法を用いた場合と同様に，応答解析に必要なモーダル質量，モーダル減衰率が求められ，インピーダンス法と有限要素法が統一的に扱える解法が望まれている。

振動応答の解析に関しては，モーダルアナリシスによる解法が多く用いられ，特に耐震設計の分野で広く利用されている。しかし実際の配管系では多くの端末点から地震入力を受けるにもかかわらず，塔槽類や建築物などのように1入力問題として簡略的に扱うことが行なわれており，その近似方法および妥当性については明確な根拠が示されていないようである。また管内流体の圧力脈動や接続機器の振動に起因する振動問題については，あまり適用された実績がない。これは加振源である流体力や機器の振動の予測方法が十分でないことと同時に，モーダルアナリシスによる応答解析理論の適用方法およびその妥当性について，まだ十分に検討されていない

ところがあるためと考えられる。また耐震設計において，機器類の寿命中に一度くるかどうかもわからない大地震に対しては材料の塑性領域までを考慮した弾塑性応答解析を行なうのが合理的と思われるが，現状では適切な解析法がないために設計地震力や材料の許容応力に安全率を見込んだうえ，弾性解析手法を適用しているのが実情である。

3．本研究の目的とその概要

すでに述べたように配管系の構造設計においては，特に振動問題に対する配慮が重要であるにもかかわらず，解析技術の複雑さ，困難さからまだ十分な動的設計が行なわれていない状態にあり，より合理的な信頼性の高い構造設計を行なうには振動に対する解析手法を充実することが要望されている。

そこで本研究では配管系の振動問題に関する解析法をとりあげ，管内流体の圧力脈動の解析および機械系の振動特性，振動応答の解析を電子計算機を用いて数値計算する技術を研究し，配管系における動的設計法の確立とその実用化をめざした。

本研究は３編から成っている。以下に各編における研究の目的とその概要について述べる。

第１編は往復圧縮機まわりの高圧配管系などにおいてしばしば問題となる流体系の定常的な圧力振動，いわゆる脈動と呼ばれている現象の解析を扱ったものである。その目的はディジタル計算機による脈動解析法を開発することによって複雑な配管系の脈動解析を容易にし，設計段階において脈動状態の良否の判定，および機械系への加振入力の予測を可能にすることである。ここでは小容量の計算機でも解析が実行できるように，伝達マトリックス的な考えに基づいた解析理論を用いて圧縮機からの強制入力に対する脈動応答を直接算出する一解法を提案する。すなわち，最初は始端での状態量を未知数を含んだ形で設定し，つぎに各要素の伝達方程式を接

続して計算を進め，最終端での与えられた境界条件を満足させるように未知数を決定して管内の圧力と体積速度の分布を計算するものである。第1章では解析の理論とその具体的な適用法を，第2章では脈動解析の際に圧縮機との接続点で境界条件として与えられる吐出し，吸込体積速度の周波数成分の算出法を示す。

第2編は機械振動系としての機器配管系の固有値解析法について研究したものである。その目的は固有値解析によって機械系の振動特性を求め，共振の回避や耐振構造の検討など定性的な構造安全性の評価を可能にするだけでなく，つぎの第3編で述べる振動応答解析に必要な資料を提供することにある。第1章においては有限要素法を用いて剛性マトリックス，質量マトリックスを作成し，これから得られた大マトリックス表示の固有値方程式を三種の固有値計算法を適用して解く方法を示し，いくつかの計算例によってその精度を確かめる。第2章においては有限要素法では扱いにくいインピーダンス要素（あらかじめ実測または固有値解析によって求めた固有振動数，振動モードなどを用い，振動特性をインピーダンスの形で表現したもの）を含む配管系の振動特性を，インピーダンス合成法を適用して有限要素法と統一的に解析する一手法を提案し，その妥当性を検討する。

第3編は第2編で述べた有限要素法などによる固有値解析の結果を利用し，モーダルアナリシス理論を適用して機械振動応答を計算する方法を研究したものである。その目的は既知の外力が与えられた場合に，配管系に発生する変位や応力を定量的に算出することによって構造設計における動的強度の評価を可能にすることである。配管系の応答は，前述のように力加振の場合と変位加振の場合に分けて考えることができるが，第1章では力加振の場合，第2章では変位加振の場合の扱いかたを検討したものであって，マトリックスを用いて定式化した運動方程式をモーダルアナリシス

の理論を用いて解く方法について述べ，モデル配管系を用いた加振実験によってその精度と適用範囲を検討する。第3章では配管系の材料が弾塑性挙動を示す場合の応答計算法について，実用的な見地から従来の弾性解析を拡張した近似的な一解法を提案し，数値実験および鉛を用いたモデル加振実験によってその妥当性を確かめる。

記　号

1．第1編におけるおもな記号

A_n, B_n ： 体積速度の n 次のFourier係数

C_n, D_n ： 圧力の n 次のFourier係数

K ： 等価線形抵抗係数

P^*, P ： 圧力，圧力脈動振幅

P_R, P_I ： 圧力脈動振幅の実数部，虚数部

Q_R, Q_I ： 体積速度振幅の実数部，虚数部

R ： 管の摩擦係数

S ： 断面積

V ： 容積

V_e ： 吸込効率

$\dot{X}^*$, $\dot{X}$ ： 体積速度，体積速度振幅

Z_R, Z_I ： インピーダンスの実数部，虚数部

$\left.\begin{array}{l} a_i, b_i, c_i, a_i', b_i', c_i' \\ e_i, f_i, g_i, e_i', f_i', g_i' \end{array}\right\}$ ： 式（1.1.2）で表わされる係数

a ： 流体中の音速

d ： 管内径

j ： 虚数単位

k ： ω/a，オリフィス係数

l ： 管長さ，連接棒長さ

n ： 次数

r ： クランク半径

t ： 時間

x, y ： 主流における未知数

x', y' ： 支流における未知数

x_s , x_d ： 吸込弁，吐出し弁が開くときのピストン位置

α ： 減衰定数

θ ： クランク回転角

θ_s, θ_d ： 吸込弁，吐出し弁が開くときのクランク回転角

ξ ： 管の長さ方向に関する座標

ρ ： 流体の密度， r/l

ϕ ： 運転位相角

ω ： 角周波数，圧縮機の回転角速度

添字 i は分割点位置を表わす。

2. 第2編，第3編におけるおもな記号

$[B]$ ： 力変換マトリックス

$[C]$ ： 粘性減衰マトリックス

$[D]$ ： ヒステリシス減衰マトリックス，対角マトリックス

$[L]$ ： 座標変換マトリックス，下三角マトリックス

$[M]$ ： 質量マトリックス

$[N]=[\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2 \cdots\cdots \boldsymbol{N}_n]$ ： モーダルマトリックス

$[T]$ ： 変換マトリックス

$[Z]$ ： インピーダンスマトリックス

$\boldsymbol{A}$ ： 加速度振幅ベクトル

$\boldsymbol{B}$ ： ひずみモードベクトル

$\boldsymbol{F}$ ： 外力振幅ベクトル

$\boldsymbol{I}$ ： 地震感度ベクトル

$\boldsymbol{N}$ ： 固有振動モードベクトル

$\boldsymbol{N}^*$ ： 静たわみモードベクトル

$\boldsymbol{S}$ ： 部材力モードベクトル

$\boldsymbol{S}^*$ ： 静部材力モードベクトル

$\boldsymbol{X}$ ： 変位振幅ベクトル

$\boldsymbol{f}$ ： 外力ベクトル

$\boldsymbol{q}$ ： 部材力ベクトル

$\boldsymbol{x}$ ： 変位ベクトル

$\boldsymbol{x}_A$ ： 応答変位ベクトル

$\boldsymbol{x}_B$ ： 強制変位ベクトル

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{I}}$ ： 内部点ベクトル

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{II}}$ ： 端末点ベクトル

$\boldsymbol{\varphi}$ ： モーダル変位ベクトル

$\boldsymbol{\Phi}$ ： モーダル変位振幅ベクトル

A ： 加速度振幅，断面積

E ： 縦弾性係数

F ： 外力振幅

G ： 横弾性係数

I ： 断面二次モーメント

I_p ： 極断面二次モーメント，ねじり定数

Q ： 部材力振幅

V ： 速度振幅

X ： 変位振幅

a_{ij} ： 振動モード$\boldsymbol{N}_j$のi方向成分

h ： モーダル減衰率

i ： 虚数単位

l ： 長さ，加振点の数

m ： モーダル質量

n ： 自由度の数，加工硬化係数

p ： 固有角振動数

s_{ij} ： 部材力モード$\boldsymbol{S}_j$の i 方向成分

t ： 時間

x ： 変位

$\ddot{x}$ ： 加速度

z ： 変位インピーダンス

$\ddot{z}$ ： 入力加速度

Φ ： モーダル変位振幅

Ω ： 角周波数

α_{pq} ： レセプタンス

α_{jk} ： 変位励振係数

β_{jk} ： 加速度励振係数

ε ： ひずみ

η ： 損失係数

ρ ： 密度，係数

σ ： 応力

φ ： モーダル変位

ω ： 加振角周波数

添字 $_i$ は節点位置（方向）または繰り返し数を表わす。

添字 $_k$ は加振位置を表わす。

添字 $_a$ は振幅を表わす。

添字 $_{x,y,z}$ は x, y, z 方向の成分を表わす。

添字 $_j$ はモード次数を表わす。

添字 $_{max}$ は最大値を表わす。

第１編　配管系の流体脈動解析法に関する研究

第1章　脈動解析法

1.1　緒　言

近年，設計の段階で圧縮機まわり配管系の脈動問題がとりあげられ，検討されることが多くなってきた。特にアメリカでは L-C-R 回路を用いたアナログシミュレーションによって脈動解析を行なうことが盛んになっており，強制力の与えかたにしてもその方法が特許をとられているものすらある。しかしディジタル計算機を用いた解析例はほとんどなく，わずかにGrover(19)が一例を報告している程度である。

ここで述べる方法は，ディジタル計算機で脈動応答を解析する一方法であり，小容量の計算機でも処理できるように伝達マトリックスの考えを応用した手法を用いている。また，配管系にはしばしば防振用オリフィスがそう入されることがあり，これは集中的な強い減衰要素として作用するので，モーダルアナリシスによって解くのはあまり適当ではない。それゆえ，ここでは圧縮機からの体積速度変動などを入力とする強制振動方程式から直接脈動応答を算出する一種の直接解法を採用する。この方法を用いれば，かなりの要素をもつ配管系に対して，圧縮機からの吐出し，吸込により誘起される配管内各部の脈動圧力と体積速度の大きさが計算でき，安全運転に対する良否の判定，さらには機械振動系への加振力の評価が可能となる。

1.2　解析方法

管内流体の脈動状態は圧力と体積速度の二つの状態量で表わすことができ，さらに定常状態ではこれらは Fourier 級数に展開できるので，圧縮機配管系などの脈動解析においては圧縮機回転数から決まる各次数の周波数成分ごとに計算を行なうことにする。解析の方法は伝達マトリックス的な

考えに基づいている。すなわち，脈動振幅を2個の未知数と12個の係数を含む複素数で表現し，管，容量，分岐などのいくつかの要素に対して，あらかじめ導かれた伝達方程式をつなぎ合わせ，脈動状態を求めてゆく方法である。

伝達方程式の導出，境界条件の設定には，Grover[19]と同様のつぎの仮定を置く。

1）一般に脈動圧力は平均圧力に比べて小さく，平均流速も音速に比べて小さいので，微小振動理論を適用する。また伝達方程式の導出には定常 Bernoulli の理論を用いるなど準静的問題として扱う。

2）実際上問題となる周波数領域は 100Hz程度以下と十分低いので，断面急変部，ベンド部などにおいても平面波の理論が成立するものとする。

3）管内流体の状態変化は断熱変化とし，配管と流体とのエネルギー移動は考えない。また管の弾性も無視する。

4）圧縮機部の吐出し弁や吸込弁における抵抗は無視する。

計算法の概要を示すと，まず配管系に一端から始まり他端に終わる一本の計算の流れを設定し，その中を管，容量，分岐，オリフィスなどの要素に分割する。各要素に対して波動方程式，その他の条件式を解き，要素の入口と出口における圧力振幅，体積速度振幅の関係を確立しておけば，出口点での圧力および体積速度が入口点におけるそれらの値を用いて表わすことができる。したがって始端における圧力，体積速度が与えられると各要素に応じた伝達方程式を接続してゆくことにより，最終端までの脈動状態が順次求められてゆく。しかし実際には，始端における状態量はすべてわかっているわけではないから，未知な部分は x, y と置き，未知数を含んだ形で計算を進めてゆく。簡単な例をあげて説明するために，図1.1.1 のように容量と管から成る系が，一端は圧縮機につながり他端は大気中に開放してい

る場合を考える。圧縮機側から計算を始めるとして，両境界および管と容量の接続点に図のように順番に番号をつけて分割する。この例は配管系が管と容量の二つの要素から構成されていると考えている。

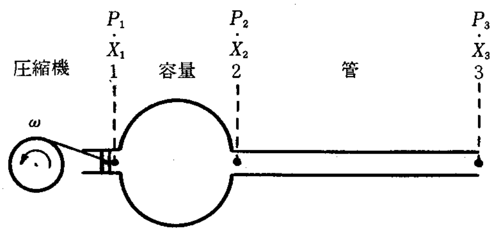


図 1.1.1　簡単な配管系の例

一般にある点の脈動の状態は圧力 P^* と体積速度 $\dot{X}^*$ とで表現でき，定常状態ではこれらは次式のようにFourier 級数で表わすことができる。

$$\left.\begin{aligned} P^* &= \frac{C_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n \cos n\omega t + D_n \sin n\omega t) \\ \dot{X}^* &= \frac{A_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (1.1.1)$$

管内脈動のうち周波数 ω の成分についてのみ着目し，これらの振幅を複素数 $P, \dot{X}$ で表わせば，**1.4** で述べるように各要素における伝達方程式はつぎのようになる。

容量に対して

$$P_2 = P_1$$
$$\dot{X}_2 = \dot{X}_1 - j(\omega V/\rho a^2) P_1$$

管に対して

$$P_3 = P_2(\cosh\alpha l \cos kl + \mathrm{j}\sinh\alpha l \sin kl) - \dot{X}_2(\sinh\alpha l \cos kl + \mathrm{j}\cosh\alpha l \sin kl)\frac{\rho a}{S}$$

$$\dot{X}_3 = -P_2(\sin\alpha l \cos kl + \mathrm{j}\cosh\alpha l \sin kl)\frac{S}{\rho a} + \dot{X}_2(\cosh\alpha l \cos kl + \mathrm{j}\sinh\alpha l \sin kl)$$

このように始端での$P_1, \dot{X}_1$がわかっていると$P_2, \dot{X}_2$が計算でき，さらにつぎの$P_3, \dot{X}_3$が求められる。ところで計算を始める際，$\dot{X}_1$についてはピストン速度，シリンダ面積などの値から周波数ωの成分に対して大きさ，位相ともにわかっているが，P_1については不明である。それゆえ

$$P_1 = x + \mathrm{j}y$$

$$\dot{X}_1 = Q_R + \mathrm{j}Q_I$$

と置いて，P_1は未知数 x，y を含　　　ゞ計算を進めてゆくことにすると，容量の出口点では

$$P_2 = (a_2x + b_2y + c_2) + \mathrm{j}(a_2'x + b_2'y + c_2')$$

$$\dot{X}_2 = (e_2x + f_2y + g_2) + \mathrm{j}(e_2'x + f_2'y + g_2')$$

の形に書ける。ここで a_2，$b_2 \cdots\cdots g_2'$ は数値的に完全に求まった係数である。さらに計算を進めると，終端での値は同様のつぎの形に書ける。

$$P_3 = (a_3x + b_3y + c_3) + \mathrm{j}(a_3'x + b_3'y + c_3')$$

$$\dot{X}_3 = (e_3x + f_3y + g_3) + \mathrm{j}(e_3'x + f_3'y + g_3')$$

一方，終端においては$\dot{X}_3$の値は不明であるが，P_3は開放端であれば零であるとわかっているから，この条件から最初に設定した未知数x, yが求められ，したがって$P_2, \dot{X}_2$なども数値として完全に定まる。

このように，計算を進めてゆく際にはある点の圧力P_i，体積速度$\dot{X}_i$は一般的につぎの形

$$\left.\begin{aligned} P_i &= (a_ix + b_iy + c_i) + \mathrm{j}(a_i'x + b_i'y + c_i') \\ \dot{X}_i &= (e_ix + f_iy + g_i) + \mathrm{j}(e_i'x + f_i'y + g_i') \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1.1.2)$$

となり，2個の未知数x, yと12個の係数 $a_i, b_i \cdots\cdots g_i'$ の結合として表わさ

れる。また1.4で示すように計算途中での伝達方程式の計算はすべて12個の係数間どうしの演算として行なわれ，未知数 x, y は表面に現われない。それに各点におけるこれらの係数は計算途中に計算機に記憶されてゆくので，配管系の最終端にきたときそこでの境界条件から未知数 x, y が定まると，任意の分割点の圧力，体積速度はその点の12個の係数を用いて式（1.1.2）より直ちに計算できる。

以上のように，最初に計算の流れを決めてしまい，始端における状態量のうち一部は未知数を置いたまま伝達方程式を用いて計算を進めてゆき，最終端にきたときにそこでの境界条件から未知数の値を求め，最後に各部の圧力，体積速度の大きさと位相を計算する。計算は圧縮機の回転数に関連した各周波数成分ごとに行ない，必要なだけの次数について同様の計算を繰り返す。

1.3 始端での取扱い

一般に配管系の端部では圧力，体積速度のうちどちらか一方が既知で，他方が不明の場合が多い。また無反射端のように音響インピーダンスの値が与えられる場合もある。いずれにしても圧力，体積速度は一般式（1.1.2）で表わされるので，おのおのの状況に応じてつぎのように係数を設定すればよい。

(1) 体積速度が与えられる場合

圧縮機の吐出し口，吸込口のように圧力は不明であるが体積速度がわかっている場合には

$$P = x + \mathrm{j}\,y$$
$$\dot{X} = Q_R + \mathrm{j}Q_I$$

で表わされる。ゆえに一般式(1.1.2)において係数をつぎのように定める。

$$\left.\begin{array}{llllll} a=1, & b=0, & c=0, & a'=0, & b'=1, & c'=0 \\ e=0, & f=0, & g=Q_R, & e'=0, & f'=0, & g'=Q_I \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.1.3)$$

(2) 圧力が与えられる場合

体積速度は不明であるが圧力がわかっている場合には

$$P=P_R+\mathrm{j}P_I$$
$$\dot{X}=x+\mathrm{j}y$$

で表わされる。ゆえに係数がつぎのように定められる。

$$\left.\begin{array}{llllll} a=0, & b=0, & c=P_R, & a'=0, & b'=0, & c'=P_I \\ e=1, & f=0, & g=0, & e'=0, & f'=1, & g'=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.1.3)'$$

開放端では圧力が零であるから$P_R=0$，$P_I=0$と置けばよい。

(3) インピーダンスが与えられる場合

長い配管の途中から計算を始める場合には，無反射端と見なしてそこでのインピーダンスZが$\rho a/S$に等しいとして扱う。一般に$Z=Z_R+\mathrm{j}Z_I$が与えられる場合には

$$P=(Z_R+\mathrm{j}Z_I)(x+\mathrm{j}y)=(Z_Rx-Z_Iy)+\mathrm{j}(Z_Ix+Z_Ry)$$
$$\dot{X}=x+\mathrm{j}y$$

と置ける。ゆえに係数がつぎのように定められる。

$$\left.\begin{array}{llllll} a=Z_R, & b=-Z_I, & c=0, & a'=Z_I, & b'=Z_R, & c'=0 \\ e=1, & f=0, & g=0, & e'=0, & f'=1, & g'=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (1.1.3)''$$

1.4 各要素における伝達方程式

(1) 管

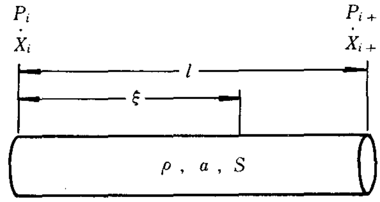


図 1.1.2 管

図1.1.2 のような一様断面をもつ長さ l の管の伝達方程式を求める。管内においては流体の密度 ρ，音速 a は一定とする。もし一定でなく漸次変化している場合には，長さを適当に分割しその区間内においては平均値をとって近似的に一定と考える。管内流体に対する力のつり合式および連続の式は

$$\rho\frac{\partial \dot{X}^*}{\partial t}+R\dot{X}^*+S\frac{\partial P^*}{\partial \xi}=0 \quad \cdots\cdots (1.1.4)$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial t}=-\frac{\rho a^2}{S}\ \frac{\partial \dot{X}^*}{\partial \xi} \quad \cdots\cdots (1.1.5)$$

両式より$\dot{X}^*$を消去すると減衰の項も考慮したつぎの波動方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 P^*}{\partial \xi^2}=\frac{R}{\rho a^2}\ \frac{\partial P^*}{\partial t}+\frac{1}{a^2}\ \frac{\partial^2 P^*}{\partial t^2} \quad \cdots\cdots (1.1.6)$$

P^*の変動を正弦的と仮定して式 (1.1.6) を解くと，一般解は A', B', A, B を任意の定数とし，$\alpha \fallingdotseq R/2a\rho$, $k \fallingdotseq \omega/a$ とすれば，つぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} P^* &= [A'e^{(\alpha+\mathrm{j}k)\xi}+B'e^{-(\alpha+\mathrm{j}k)\xi}]\,e^{\mathrm{j}\omega t} \\ &= [A\cosh\ (\alpha+\mathrm{j}k)\xi+B\ \sinh\ (\alpha+\mathrm{j}k)\xi]\,e^{\mathrm{j}\omega t} \end{aligned}$$

上式を式(1.1.5)に代入して積分すると，$\dot{X}^*$に関する解は

$$\dot{X}^*=-\frac{S}{\rho a}\ [A\ \sinh\ (\alpha+\mathrm{j}k)\xi+B\cosh\ (\alpha+\mathrm{j}k)\xi]\,e^{\mathrm{j}\omega t}$$

となる。時間に関する項 $e^{\mathrm{j}\omega t}$ を省いて振幅だけを考え，これらをP，$\dot{X}$で表わす。さらに $\xi=0$ における値を P_i，$\dot{X}_i$ とすると $A=P_i$，

$B=-\rho a\dot{X}_i / S$ となり，$\xi=l$ における値P_{i+1} ,$\dot{X}_{i+1}$ は

$$P_{i+1}=P_i\cosh(\alpha+\mathrm{j}k)l-\dot{X}_i\frac{\rho a}{S}\sinh(\alpha+\mathrm{j}k)l$$

$$\dot{X}_{i+1}=-P_i\frac{S}{\rho a}\sinh(\alpha+\mathrm{j}k)l+\dot{X}_i\cosh(\alpha+\mathrm{j}k)l$$

双曲線関数を実数部と虚数部に分解して書くと

$$\left.\begin{aligned}P_{i+1}&=(\cosh\alpha l\cos kl+\mathrm{j}\sinh\alpha l\sin kl)P_i\\&\quad-\frac{\rho a}{S}(\sinh\alpha l\cos kl+\mathrm{j}\cosh\alpha l\sin kl)\dot{X}_i\\\dot{X}_{i+1}&=-\frac{S}{\rho a}(\sinh\alpha l\cos kl+\mathrm{j}\cosh\alpha l\sin kl)P_i\\&\quad+(\cosh\alpha l\cos kl+\mathrm{j}\sinh\alpha l\sin kl)\dot{X}_i\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.7)$$

この式は管の一端における値P_i，$\dot{X}_i$を知って他端の値P_{i+1}，$\dot{X}_{i+1}$を求める形になっている。管の途中の値P_ξ，$\dot{X}_\xi$ を求めたい場合は次式のようになる。

$$\left.\begin{aligned}P_\xi&=(\cosh\alpha\xi\cos k\xi+\mathrm{j}\sinh\alpha\xi\sin k\xi)P_i\\&\quad-\frac{\rho a}{S}(\sinh\alpha\xi\cos k\xi+\mathrm{j}\cosh\alpha\xi\sin k\xi)\dot{X}_i\\\dot{X}_\xi&=-\frac{S}{\rho a}(\sinh\alpha\xi\cos k\xi+\mathrm{j}\cosh\alpha\xi\sin k\xi)P_i\\&\quad+(\cosh\alpha\xi\cos k\xi+\mathrm{j}\sinh\alpha\xi\sin k\xi)\dot{X}_i\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.8)$$

式（1.1.7）が管に対する伝達方程式であるが，圧力P，体積速度$\dot{X}$を一般式（1.1.2）で表わして代入すると，その係数間どうしの伝達方程式としてつぎの関係が得られる。

$$a_{i+1}=a_i\cosh\alpha l\cos kl-a_i'\sinh\alpha l\sin kl-e_i\frac{\rho a}{S}\sinh\alpha l\cos kl+e_i'\frac{\rho a}{S}\cosh\alpha l\sin kl$$

$$b_{i+1}=b_i\cosh\alpha l\cos kl-b_i'\sinh\alpha l\sin kl-f_i\frac{\rho a}{S}\sinh\alpha l\cos kl+f_i'\frac{\rho a}{S}\cosh\alpha l\sin kl$$

$$
\left.\begin{aligned}
c_{i+1}&=c_i\cosh\alpha l\cos kl-c_i'\sinh\alpha l\sin kl-g_i\frac{\rho a}{S}\sinh\alpha l\cos kl+g_i'\frac{\rho a}{S}\cosh\alpha l\sin kl\\
a_{i+1}'&=a_i\sinh\alpha l\sin kl+a_i'\cosh\alpha l\cos kl-e_i\frac{\rho a}{S}\cosh\alpha l\sin kl-e_i'\frac{\rho a}{S}\sinh\alpha l\cos kl\\
b_{i+1}'&=b_i\sinh\alpha l\sin kl+b_i'\cosh\alpha l\cos kl-f_i\frac{\rho a}{S}\cosh\alpha l\sin kl-f_i'\frac{\rho a}{S}\sinh\alpha l\cos kl\\
c_{i+1}'&=c_i\sinh\alpha l\sin kl+c_i'\cosh\alpha l\cos kl-g_i\frac{\rho a}{S}\cosh\alpha l\sin kl-g_i'\frac{\rho a}{S}\sinh\alpha l\cos kl\\
e_{i+1}&=-a_i\frac{S}{\rho a}\sinh\alpha l\cos kl+a_i'\frac{S}{\rho a}\cosh\alpha l\sin kl+e_i\cosh\alpha l\cos kl-e_i'\sinh\alpha l\sin kl\\
f_{i+1}&=-b_i\frac{S}{\rho a}\sinh\alpha l\cos kl+b_i'\frac{S}{\rho a}\cosh\alpha l\sin kl+f_i\cosh\alpha l\cos kl-f_i'\sinh\alpha l\sin kl\\
g_{i+1}&=-c_i\frac{S}{\rho a}\sinh\alpha l\cos kl+c_i'\frac{S}{\rho a}\cosh\alpha l\sin kl+g_i\cosh\alpha l\cos kl-g_i'\sinh\alpha l\sin kl\\
e_{i+1}'&=-a_i\frac{S}{\rho a}\cosh\alpha l\sin kl-a_i'\frac{S}{\rho a}\sinh\alpha l\cos kl+e_i\sinh\alpha l\sin kl+e_i'\cosh\alpha l\cos kl\\
f_{i+1}'&=-b_i\frac{S}{\rho a}\cosh\alpha l\sin kl-b_i'\frac{S}{\rho a}\sinh\alpha l\cos kl+f_i\sinh\alpha l\sin kl+f_i'\cosh\alpha l\cos kl\\
g_{i+1}'&=-c_i\frac{S}{\rho a}\cosh\alpha l\sin kl-c_i'\frac{S}{\rho a}\sinh\alpha l\cos kl+g_i\sinh\alpha l\sin kl+g_i'\cosh\alpha l\cos kl
\end{aligned}\right\}
$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1.1,9)$$

なお，減衰の大きさを表わす定数αとしてはR.C.Binder[49]がつぎの実験式(1.1.10)を与えており，実際の計算に際しては，μ，k_x，c_pなどからこの式を用いて計算するものとする。

$$\alpha=\frac{2}{da}\left[\frac{\omega}{2}\left(\frac{\mu}{\rho}+\frac{\varepsilon}{\rho}+\frac{k_t}{g\rho c_p}\right)\frac{1}{2\pi}\right]^{1/2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1.1.10)$$

ただし　μ ＝絶対粘度　　c_p＝定圧比熱

ε ＝うず粘度　　d ＝管内径

k_t＝熱伝導度　　g ＝重力の加速度

(2) 容量

容量とはサージタンク，スナッバ，圧縮機弁室などを意味し，その大きさを表わす諸寸法は脈動波長に比べて十分小さいものとする。容量内での圧力は一定で入口，出口ともに等しいと考えられるから，たとえば図1.1.3において $P_{i+1}=P_i$ である。

また連続の式は

$$\frac{\partial P^*}{\partial t}=-\frac{\rho a^2}{V}(\dot{X}^*_{i+1}-\dot{X}^*_i)$$

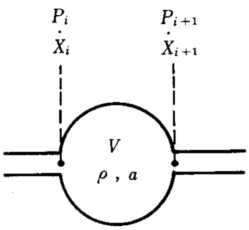


図 1.1.3 容量

角周波数が ω の成分だけを考慮し，上式を整理すると

$$\dot{X}_{i+1}=\dot{X}_i-\mathrm{j}\frac{\omega V}{\rho a^2}P_i$$

したがって容量に対する伝達方程式は次式のようになる。

$$\left.\begin{aligned}&P_{i+1}=P_i\\&\dot{X}_{i+1}=\dot{X}_i-\mathrm{j}\frac{\omega V}{\rho a^2}P_i\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.11)$$

P_i，$\dot{X}_i$ を一般式（1.1.2）で表わし，式（1.1.11）に代入すると係数間どうしの伝達方程式が次式のように求められる。

$$\left.\begin{aligned}&a_{i+1}=a_i && a'_{i+1}=a'_i\\&b_{i+1}=b_i && b'_{i+1}=b'_i\\&c_{i+1}=c_i && c'_{i+1}=c'_i\\&e_{i+1}=e_i+\frac{\omega V}{\rho a^2}a'_i && e'_{i+1}=e'_i-\frac{\omega V}{\rho a^2}a_i\\&f_{i+1}=f_i+\frac{\omega V}{\rho a^2}b'_i && f'_{i+1}=f'_i-\frac{\omega V}{\rho a^2}b_i\\&g_{i+1}=g_i+\frac{\omega V}{\rho a^2}c'_i && g'_{i+1}=g'_i-\frac{\omega V}{\rho a^2}c_i\end{aligned}\right\}.\cdots\cdots(1.1.12)$$

(3)　分岐

分岐管がある場合，分岐点での流れを図1.1.4のように設定すれば，合流の直前点と直後点における圧力と体積速度には，連続の条件よりつぎの関係式（1.1.13）が成立する。

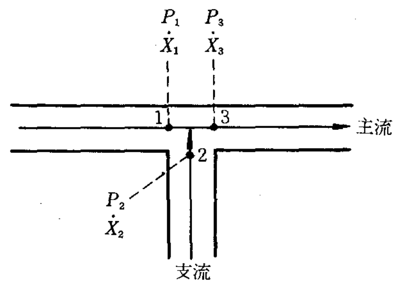


図 1.1.4　分岐

$$\left.\begin{aligned} P_3 &= P_2 = P_1 \\ \dot{X}_3 &= \dot{X}_2 + \dot{X}_1 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1.1.13)$$

なお，記号の繁雑を避けるため，この項においては添字 $_{1}$, $_{2}$, $_{3}$ をつけてそれぞれ合流直前点，支流の合流直前点，合流直後点の状態量を表わす。主流の始端から順次計算されて分岐の点1までくると，そこでの圧力 P_1，体積速度 $\dot{X}_1$ は未知数 x，y を含んだ形で式（1.1.14）のように表わされている。

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= (a_1 x + b_1 y + c_1) + \mathrm{j}(a_1' x + b_1' y + c_1') \\ \dot{X}_1 &= (e_1 x + f_1 y + g_1) + \mathrm{j}(e_1' x + f_1' y + g_1') \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1.1.14)$$

分岐点にくると主流での計算はいったん休止し，支流の端にさかのぼって新しい未知数 x'，y' をもって計算を始める。支流の最終点2までくるとそこでの値は式（1.1.15）のように表わされている。

$$\left.\begin{aligned} P_2 &= (a_2 x' + b_2 y' + c_2) + \mathrm{j}(a_2' x' + b_2' y' + c_2') \\ \dot{X}_2 &= (e_2 x' + f_2 y' + g_2) + \mathrm{j}(e_2' x' + f_2' y' + g_2') \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1.1.15)$$

$P_1 = P_2$ なる条件式(1.1.13) を用いて支流における未知数 x', y' を主流での未知数 x, y について解くと

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{(b_2'a_1 - b_2 a_1')x + (b_2'b_1 - b_2 b_1')y + b_2'(c_1 - c_2) - b_2(c_1' - c_2')}{a_2 b_2' - a_2' b_2} \\ y' &= \frac{(a_2'a_1 - a_2 a_1')x + (a_2'b_1 - a_2 b_1')y + a_2'(c_1 - c_2) - a_2(c_1' - c_2')}{a_2' b_2 - a_2 b_2'} \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (1.1.16)$$

式（1.1.16）を式（1.1.15）に代入すれば，$\dot{X}_2$が主流での未知数 x, y で表わされ，式（1.1.13）を用いると合流後の状態量 P_3，$\dot{X}_3$が x, yを含む一般式の形でつぎのように表わされる。

$$\left.\begin{aligned} P_3 &= (a_3 x + b_3 y + c_3) + \mathrm{j}\,(a_3'x + b_3'y + c_3') \\ \dot{X}_3 &= (e_3 x + f_3 y + g_3) + \mathrm{j}\,(e_3'x + f_3'y + g_3') \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (1.1.17)$$

以上の手続を実際に行なうと係数間どうしの関係として式（1.1.18）が得られる。

$$\left.\begin{aligned} & a_3 = a_1 \qquad b_3 = b_1 \qquad c_3 = c_1 \\ & a_3' = a_1' \qquad b_3' = b_1' \qquad c_3' = c_1' \\ & e_3 = \frac{e_2(b_2'a_1 - b_2 a_1')}{a_2 b_2' - a_2' b_2} + \frac{f_2(a_2'a_1 - a_2 a_1')}{a_2' b_2 - a_2 b_2'} \\ & f_3 = \frac{e_2(b_2'b_1 - b_2 b_1')}{a_2 b_2' - a_2' b_2} + \frac{f_2(a_2'b_1 - a_2 b_1')}{a_2' b_2 - a_2 b_2'} \\ & g_3 = g_2 + \frac{e_2\{b_2'(c_1 - c_2) - b_2(c_1' - c_2')\}}{a_2 b_2' - a_2' b_2} \\ & \qquad\qquad + \frac{f_2\{a_2'(c_1 - c_2) - a_2(c_1' - c_2')\}}{a_2' b_2 - a_2 b_2'} \\ & e_3' = \frac{e_2'(b_2'a_1 - b_2 a_1')}{a_2 b_2' - a_2' b_2} + \frac{f_2'(a_2'a_1 - a_2 a_1')}{a_2' b_2 - a_2 b_2'} \\ & f_3' = \frac{e_2'(b_2'b_1 - b_2 b_1')}{a_2 b_2' - a_2' b_2} + \frac{f_2'(a_2'b_1 - a_2 b_1')}{a_2' b_2 - a_2 b_2'} \\ & g_3' = g_2' + \frac{e_2'\{b_2'(c_1 - c_2) - b_2(c_1' - c_2')\}}{a_2 b_2' - a_2' b_2} \\ & \qquad\qquad + \frac{f_2'\{a_2'(c_1 - c_2) - a_2(c_1' - c_2')\}}{a_2' b_2 - a_2 b_2'} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\ (1.1.18)$$

なお，図 1.1.5のように容量の中で合流している場合には，管が合流した直後に容量があると考えても式の上では全く同じことになり，支障は起こらない。

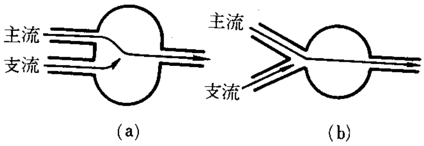


図 1.1.5　容量内での分岐

(4)　オリフィス

オリフィス前後の流れは粘性による圧力損失，圧縮性の影響，縮流の効果などを無視すれば，図1.1.6のような状態になっていると考えられる。この項では添字 $_1$, $_2$, $_3$ にてそれぞれ上流側，下流側，およびオリフィス直後の状態量を表わす。粒子速度v を導入すると，Bernoulliの式より

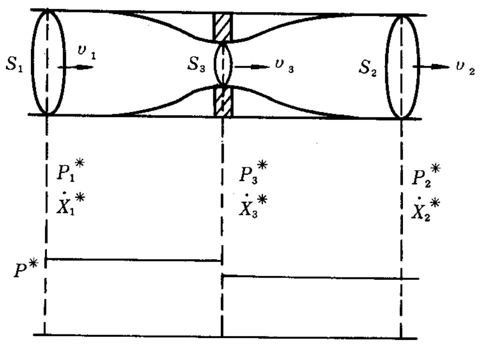


図 1.1.6　オリフィス

$$P_1^* - P_3^* = \frac{\rho}{2}(v_3^2 - v_1^2) \quad \cdots\cdots (1.1.19)$$

ところで $\dot{X}_1^* = S_1 v_1$, $\dot{X}_2^* = S_2 v_2$, $\dot{X}_3^* = S_3 v_3$ であり，また連続の式よりつぎの関係

$$\dot{X}_1^* = \dot{X}_2^* = \dot{X}_3^* \quad \cdots\cdots (1.1.20)$$

が成り立つ。さらに$P_3^* = P_2^*$と見なせるから式 (1.1.19) は次式のように書き直せる。

$$P_1^* - P_2^* = \frac{\rho}{2}\left\{\left(\frac{1}{S_3}\right)^2 - \left(\frac{1}{S_1}\right)^2\right\}\dot{X}_1^{*2} \quad \cdots\cdots (1.1.21)$$

脈動によって逆流が生じる場合を考慮すると，式(1.1.21)は一般につぎの

ように表わされる。

$$\left.\begin{array}{l} P_1^* - P_2^* = k\dot{X}_1^{*2}, \quad \mathrm{sgn}\ \dot{X}_1^* \\ \text{ただし} \quad k = \dfrac{\rho}{2}\left\{\left(\dfrac{1}{S_3}\right)^2 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{S_1}\right)^2 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{S_2}\right)^2\right\} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (1.1.22)$$

なお，上式における k の値は，式 (1.1.21) の右辺の係数を順流時および逆流時について平均したものである。また式 (1.1.22) の $\mathrm{sgn}\dot{X}_1^*$ は，$\dot{X}_1^*$ の符号が正負に変化した場合に $P_1^* - P_2^*$ も同様に符号を変えることを意味する。

式 (1.1.22) を図で表わすと 図 1.1.7 のようになる。いま，圧力および体積速度を平均成分と変動成分に分解し，P_{10}，$\triangle P_1$，$\dot{X}_{10}$，$\triangle\dot{X}$ などのようにそれぞれ記号 0，△をつけて表わすと式 (1.1.22) はつぎのようになる。

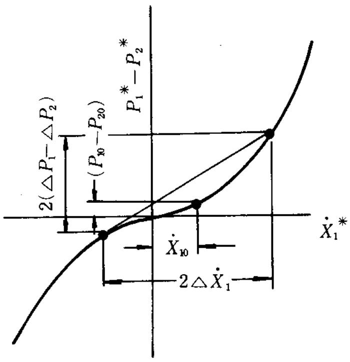


図 1.1.7　体積速度と圧力降下の関係

$$(P_{10} - P_{20}) + (\triangle P_1 - \triangle P_2) = k(\dot{X}_{10} + \triangle\dot{X}_1)^2, \ \mathrm{sgn}\dot{X}_1^*$$

変動成分に関する関係に注目すると

$$\triangle P_1 - \triangle P_2 = 2k\dot{X}_{10}\triangle\dot{X}_1 + k\triangle\dot{X}_1^2, \quad \mathrm{sgn}\dot{X}_1^* \quad \cdots\cdots\cdots (1.1.23)$$

式 (1.1.23) は右辺第 2 項があるため非線形な関係となっているが，解析上の都合からこれを線形近似し，次式の形で表現することを試みる。

$$\triangle P_1 - \triangle P_2 = K\triangle\dot{X}_1 \quad \cdots\cdots\cdots (1.1.24)$$

式 (1.1.24) のように線形化できれば，$\triangle\dot{X}_1 = \dot{X}_1 \sin\omega t$ のように正弦的に振動しているときの脈動振幅についての関係が次式のように表わされる。

$$P_1 - P_2 = K\dot{X}_1 \quad \cdots\cdots (1.1.24)'$$

ここで比例定数Kは等価な線形抵抗係数と考えられるものであり，1サイクル間に消費される振動エネルギのバランスから決定するものとする。すなわち体積速度の変動成分は近似的に単一の周波数から成ると仮定して $\triangle\dot{X}_1 = \dot{X}_1 \sin\omega t$ と置き，周期$2\pi/\omega$の区間にわたって式（1.1.24），および式（1.1.23）に対する消費エネルギを計算する。そして両者を等置することによって等価抵抗係数Kを定める。

まず，式（1.1.24）に対する1サイクル間の消散エネルギDを計算すると

$$D = \int_0^{2\pi/\omega} K\triangle\dot{X}_1 \cdot \triangle\dot{X}_1\, dt = \int_0^{2\pi/\omega} K\dot{X}_1^2 \sin^2\omega t\, dt = \frac{\pi K\dot{X}_1^2}{\omega} \quad \cdots\cdots (1.1.25)$$

つぎに，式（1.1.23）に対する1サイクル間の消散エネルギDを計算する。この場合は図1.1.7を見てわかるように，$\dot{X}_{10} = \dot{X}_1$すなわち体積速度の平均値と振幅が等しくなる点を境にして式（1.1.23）の符号が変わるので，つぎの二つの場合に分けて計算を行なう。

a) $\dot{X}_{10} \geqq \dot{X}_1$のとき

平均流が脈動振幅に比べて大きいときは流れは常に上流側から下流側へと流れ，式（1.1.23）の$\dot{X}_1^*$の符号はいつも正である。これは図1.1.7において動作状態が第1象限だけで起る場合であり，消散エネルギDは

$$D = \int_0^{2\pi/\omega} (2k\dot{X}_{10}\triangle\dot{X}_1 + k\triangle\dot{X}_1^2)\triangle\dot{X}_1\, dt = \int_0^{2\pi/\omega} (2k\dot{X}_{10}\dot{X}_1^2 \sin^2\omega t + k\dot{X}_1^3 \sin^3\omega t)\, dt = \frac{2\pi k\dot{X}_{10}\dot{X}_1^2}{\omega} \quad \cdots\cdots (1.1.26)$$

式（1.1.25）と式（1.1.26）を等置すれば，等価線形抵抗係数Kがつぎのように求められる。

$$K = 2k\dot{X}_{10} \quad \cdots\cdots (1.1.27)$$

b) $\dot{X}_{10} < \dot{X}_1$のとき

平均流に比べて脈動流が大きくなると一時的に逆流を起こすことになり，式（1.1.23）は $\dot{X}_1^*$ の符号に応じて扱いを分ける必要が生じる。これは図1.1.7において動作状態が第3象限にまで達することを意味するが，この境めの時刻は$\dot{X}_1^* \equiv \dot{X}_{10} + \dot{X}_1 \sin\omega t = 0$と置いて得られ，このときの時刻を$\tau$とすれば

$$\tau = \frac{1}{\omega}\sin^{-1}\left(-\frac{\dot{X}_{10}}{\dot{X}_1}\right) \quad \cdots\cdots (1.1.28)$$

となる。したがって消散エネルギDは

$$\left.\begin{aligned} D &= \int_0^{2\pi/\omega}(2k\dot{X}_{10}\triangle X_1 + k\triangle\dot{X}_1^2),\ \ \mathrm{sgn}\dot{X}_1^* \cdot \triangle\dot{X}_1 dt \\ &= 2\int_{-\pi/2\omega}^{\tau} -(2k\dot{X}_{10}\dot{X}_1^2\sin^2\omega t + k\dot{X}_1^3\sin^3\omega t)dt \\ &\qquad\qquad + 2\int_{\tau}^{\pi/2\omega}(2k\dot{X}_{10}\dot{X}_1^2\sin^2\omega t + k\dot{X}_1^3\sin^3\omega t)dt \\ &= \frac{4k\dot{X}_{10}\dot{X}^2}{\omega}(-\omega\tau + \cos\omega\tau\sin\omega\tau) + \frac{2k\dot{X}_1^3}{3\omega}(2\cos\omega\tau\sin^2\omega\tau + 4\cos\omega\tau) \end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots (1.1.26)'$$

この場合の等価線形抵抗係Kは式（1.1.25）と式（1.1.26)′を等置することにより次式のように求められる。

$$K = \frac{4k\dot{X}_{10}}{\pi}(-\omega\tau + \cos\omega\tau\sin\omega\tau) + \frac{4k\dot{X}_1}{3\pi}(\cos\omega\tau\sin^2\omega\tau + 2\cos\omega\tau)$$

$$\cdots\cdots (1.1.29)$$

阿部[50]，Kuhlmann[51] も上述と同様の考えかたでオリフィスを扱っている。

以上の結果により，オリフィス要素前後における圧力と体積速度の関係が近似的に式（1.1.24)′のような線形関係で与えられ，これと式（1.1.20）によって脈動振幅に対する伝達方程式がつぎのように求められる。

$$\left.\begin{aligned} P_2 &= P_1 - K\dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 &= \dot{X}_1 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (1.1.30)$$

これより，一般式（1.1.2）における係数間どうしの関係が次式のように表わされる。

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= a_1 - Ke_1 & a_2' &= a_1' - Ke_1' \\ b_2 &= b_1 - Kf_1 & b_2' &= b_1' - Kf_1' \\ c_2 &= c_1 - Kg_1 & c_2' &= c_1' - Kg_1' \\ e_2 &= e_1 & e_2' &= e_1' \\ f_2 &= f_1 & f_2' &= f_1' \\ g_2 &= g_1 & g_2' &= g_1' \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (1.1.31)$$

ただし，オリフィス部の抵抗係数Kは式（1.1.27）または式（1.1.29）で求める。式（1.1.29）から明らかなように，体積速度の平均成分 $\dot{X}_{10}$ が振幅$\dot{X}_1$より小さい場合はKの値は X_1 に依存する。それゆえ計算に際してはあらかじめ$\dot{X}_1$を推定して式（1.1.27）または式（1.1.29）よりKを求め，その結果得られた解析値が仮定した値に近いかどうかを判定し，差が大きい場合は収束するまで計算を繰り返すことになる。

1.5　終端での取扱い

計算の流れに沿って順次進めてきた伝達方程式の計算が最終端に達すると，そこでの境界条件を用いて未知数であったx, yが決定できる。各境界条件に応じてx, yを求める計算式はつぎの通りである。

(1)　体積速度が与えられる場合

圧縮機の吐出し口や吸込口では体積速度がわかっている。また閉端では体積速度は零である。一般に$X = Q_R + jQ_I$ が与えられる場合，今まで計

算してきた一般式の値と等置すると

$$\dot{X}=(ex+fy+g)+\mathrm{j}(e'x+f'y+g')=Q_R+\mathrm{j}Q_I$$

実数部，虚数部をそれぞれ等しいとおいてx，yを求めると次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{f'(Q_R-g)-f(Q_I-g')}{ef'-e'f} \\ y&=\frac{e'(Q_R-g)-e(Q_I-g')}{e'f-ef'} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (1.1.32)$$

(2) 圧力が与えられる場合

開放端のように圧力がわかっているような場合，一段的に$P=P_R+\mathrm{j}P_I$として一般式と等置すると

$$P=(ax+by+c)+\mathrm{j}(a'x+b'y+c')=P_R+\mathrm{j}P_I$$

これよりx,yを求めると次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{b'(P_R-c)-b(P_I-c')}{ab'-a'b} \\ y&=\frac{a'(P_R-c)-a(P_I-c')}{ab'-a'b} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (1.1.32)'$$

(3) インピーダンスが与えられる場合

無反射端などのように境界条件が音響インピーダンスの形で与えられる場合がある。一般的に$Z=Z_R+\mathrm{j}Z_I$の形で与えられる場合，一般式と等置すると

$$Z=\frac{P}{\dot{X}}=\frac{(ax+by+c)+\mathrm{j}(a'x+b'y+c')}{(ex+fy+g)+\mathrm{j}(e'x+f'y+g')}=Z_R+\mathrm{j}Z_I$$

これを解けばx，yがつぎのように求められる。

$$\left.\begin{aligned}x&=-\frac{(b'-Z_Rf'-Z_If)(Z_Rg-Z_Ig'-c)-(b-Z_Rf+Z_If')(Z_Rg'+Z_Ig-c')}{(b'-Z_Rf'-Z_If)(Z_Re-Z_Ie'-a)-(b-Z_Rf+Z_If')(Z_Re'+Z_Ie-a)}\\[2ex]y&=-\frac{(a'-Z_Re'-Z_Ie)(Z_Rg-Z_Ig'-c)-(a-Z_Re+Z_Ie')(Z_Rg'+Z_Ig-c')}{(a'-Z_Re'-Z_Ie)(Z_Rf-Z_If'-b)-(a-Z_Re+Z_Ie')(Z_Rf'+Z_If-b)}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (1.1.32)''$$

1.6　各点における脈動振幅の算出

ある点の圧力および体積速度の脈動振幅は，一般式（1.1.2）で示されるように2個の変数 x, y と12個の係数の結合で表わされているが，このうち12個の係数は計算の途中すべて記憶される。それゆえ最終端にきて x, y が求められると，任意の分割点の圧力は式（1.1.2）から直ちに求められる。脈動の大きさは複素数で表示されるよりも振幅の絶対値と位相で表わすほうが便利であるから，つぎの計算を行なう。

$$\left.\begin{aligned}|P|&=\sqrt{(ax+by+c)^2+(a'x+b'y+c')^2},\ \arg P=\tan^{-1}\frac{a'x+b'y+c'}{ax+by+c}\\|\dot{X}|&=\sqrt{(ex+fy+g)^2+(e'x+f'y+g')^2},\ \arg\dot{X}=\tan^{-1}\frac{e'x+f'y+g'}{ex+fy+g}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (1.1.33)$$

分岐流内においては未知数は x, y ではなく x', y' になっているが，分岐のところで計算した式（1.1.16）を用いて x', y' を求めれば，式（1.1.33）と同様の演算で分岐流内の脈動振幅を求めることができる。分割点以外の管内の任意の点の脈動振幅を求めたいときは，直前の分割点の値 P_i, $\dot{X}_i$ をとりだしこれをもとにして式（1.1.8）を計算すればよい。

1.7　計算手順

図1.1.8は計算の流れを示したもので，これを参照しながら計算手順を説明する。まず図の＊1にて圧縮機の回転角速度 ω，何次の周波数まで計算するかを示す次数 n，分割点の数 I_{LAST}，分岐数 N_{KYO} などを読み込ませる。

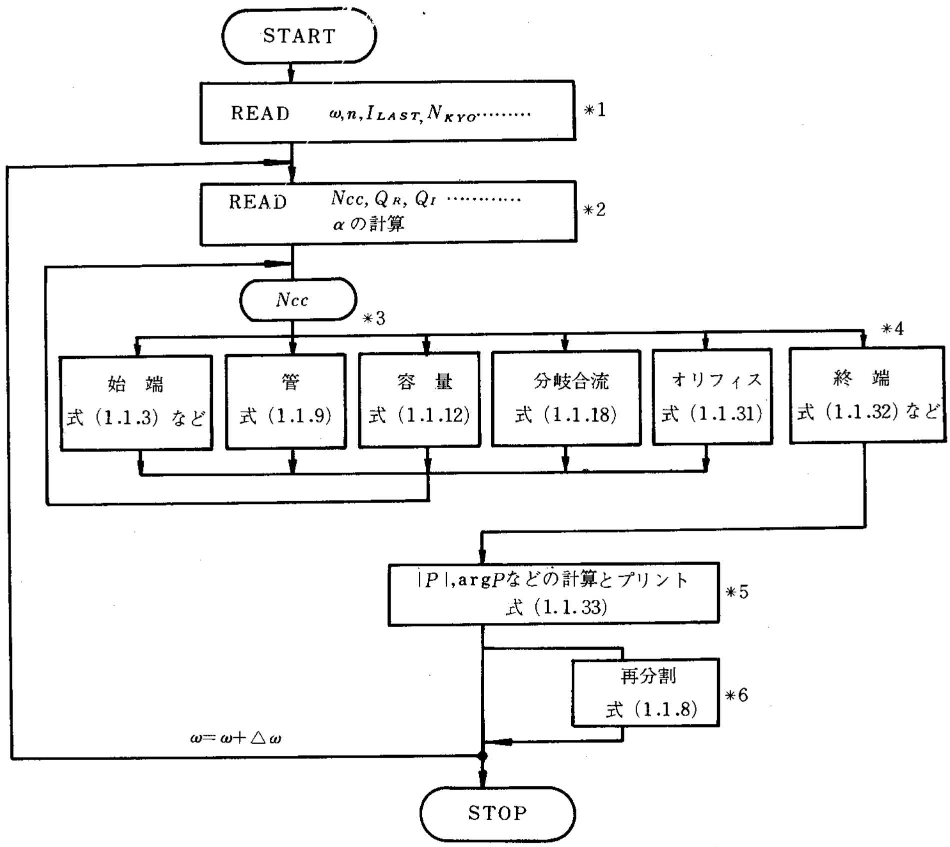


図 1.1.8 フローチャート

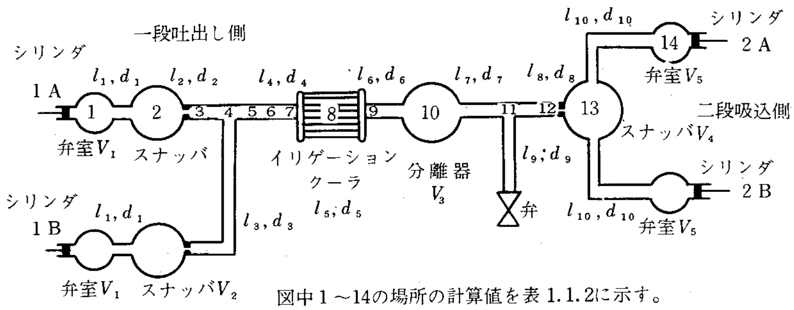
つぎの＊２では，要素の種類を判別させる制御数Nccとその要素におけるデータ，たとえば始端要素であればQ_R, Q_Iなどを，また管要素であればS, l, a, ……などを読み込ませる。（プログラム上では始端，終端も要素の一つと見なしている。）管の場合にはさらにBinderの式（1.1.10）によって減衰定数αを計算しておく。＊１，＊２で計算に必要なデータがすべて準備できたので，つぎに＊３において伝達方程式の計算を始めることになるが，まず最初の始端においてはNccにより要素の種類が始端であるとわかると，式（1.1.3），式（1.1.3)$'$ または式（1.1.3)$''$の計算をして12個の係数 a, b, …g'の値を設定する。これが終るとつぎにくる要素は何かをつぎのNccで判別し，もし管であれば式（1.1.9）の計算によって管出口の係

数 a, b, $\cdots g'$ を求める。また容量であれば式（1.1.12）の計算をする。分岐の場合はN_{CC}は始端の信号を出して式（1.1.3）〜式（1.1.3)″により新しい係数で支流の計算を始める。そして分岐の合流点に達したときに合流の計算式（1.1.18）を行ない，主流に帰って計算を進める。つぎつぎと同様の手順を実行し最終端に達すると，＊4において式（1.1.32），式（1.1.32)′または式（1.1.32)″によって x, yを計算し，また分岐がある場合は支流での x', y' を求める式（1.1.16）の計算も済ませてしまう。これですべての分割点における係数と未知数であった x, yなどが数値的に求まったので，＊5によって式（1.1.33）の計算を行なえば所要の脈動結果が得られる。

なお，解析している系がオリフィス要素を含んでいる場合には，あらかじめオリフィス取付位置での体積速度振幅を仮定して式（1.1.27）または式（1.1.29）より抵抗係数Kを算出し，式（1.1.31）の伝達方程式を用いて計算を進めてゆくものとする。こうして得られた脈動解析結果を最初に仮定した値と比較し，許容範囲内にはいっていればよいが，差がある場合には算出された体積速度を用いて抵抗係数を修正し，収束するまで計算を繰り返す。＊6はもし分割点以外の管内の詳細な脈動分布状態を知りたいときに，式（1.1.8)を用いて計算する過程を示している。以上で周波数ωに対する脈動結果が求められたが，つぎの次数の結果を求めるときにはωの数値を変えて＊2までさかのぼり，同様の演算を実行する。ただし2回目以降のデータの読み込みはωによって変わる数値だけを読み込ませればよい。FACOM 270－20を用いた場合の計算能力は，要素数最大80，オリフィス数最大10，分岐数最大16程度であり，このうち分岐は一本の主流上に分岐が出ている場合だけでなく，分岐管に分岐のある再分岐，再々分岐も可能である。

1.8　解析例

図1.1.9 はある化学工場で設置された往復圧縮機まわりの配管系のうち，一段吐出しから二段吸込にいたるラインを概念的に描いたものである。配管系の寸法と圧縮機に関する諸元を同図内に示す。



図中1～14の場所の計算値を表1.1.2に示す。

寸　法：l_1=0.25m　l_2=1.94m　l_3=3.97m　l_4=17.50m　l_5=100m
l_6=1.78m　l_7=8.9m　l_8=10.8m　l_9=3.85m　l_{10}=0.47m
$d_1=d_2=d_3=d_4$=0.237 2m　$d_5=d_9$=0.073 9m　$d_6=d_7=d_8$=0.190 9m
d_{10}=0.16m　V_1=0.113m³　V_2=0.400m³　V_3=0.856m³
V_4=0.426m³　V_5=0.046 1m³

諸条件：

一段吐出し側	二段吸込側
吸　込　圧：24kg/cm² g	吸　込　圧：71kg/cm² g
吐 出 し 圧：71　〃	体 積 効 率：75.5%
ストローク：0.356m	ストローク：0.356m
シリンダ内径：0.362m	シリンダ内径：0.219 1m
回　転　数：327rpm	回　転　数：327rpm
ロッド径：0.101 6m	ロッド径：0.101 6m

図 1.1.9　往復圧縮機配管系の例

図1.1.9 の配管系を脈動解析するにあたり，計算の流れおよび分割点を図1.1.10のように選定した。計算上は境界も一つの要素として扱うので分割点の数は39になっている。

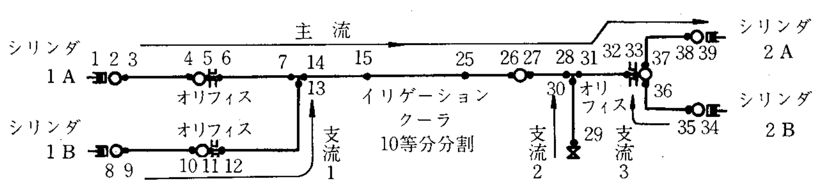


図 1.1.10　計算の流れ

イリゲーションクーラ内では温度が変化しているので，その分布を図 1.1.11に示すように指数関数的に減少するものと考え，全長を10等分して

各区間では温度一定と見なし，管の式（1．1．9）を適用した。オリフィスが3個所にそう入されており，その絞り比はすべて50%である。また管内の平均圧は流れに沿って一様であるとした。脈動解析を行なうには境界条件である圧縮機シリンダ1A，1Bの吐出しと，2A，2Bの吸込の体積速度の脈動成分を求める必要があるが，図1.1.12，図1.1.13に示すクランク軸の配置と吐出し，吸込の位相のデータをもとに第2章に述べる方法を用いて計算した値を表1.1.1に示す。

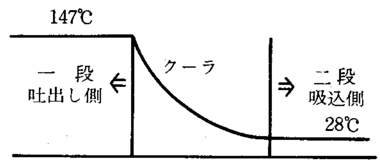


図 1.1.11　クーラ部の温度分布

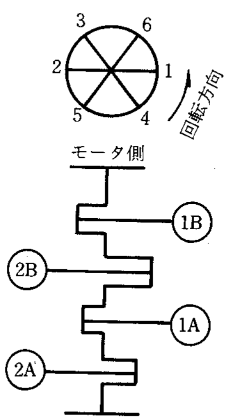


図 1.1.12　クランク軸の配置

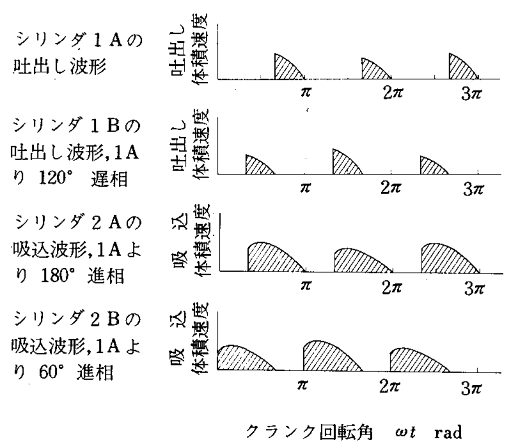


図 1.1.13　吐出し，吸込の波形

表 1.1.1　吐出し，吸込波形の周波数成分　m³/s

	一	次	二	次	三	次	四	次
	A_1	B_1	A_2	B_2	A_3	B_3	A_4	B_4
$\dot{X}_{1A}(\omega t)$	−0.007 73	0.010 29	−0.077 96	−0.249 19	0.007 46	0.002 01	−0.073 79	0.089 30
$\dot{X}_{1B}(\omega t)$	−0.005 04	−0.011 83	−0.176 81	0.192 12	0.007 46	0.002 01	−0.040 44	−0.108 56
$\dot{X}_{2A}(\omega t)$	0.005 82	−0.020 01	−0.098 58	−0.055 41	−0.002 79	0.005 10	0.018 91	−0.012 42
$\dot{X}_{2B}(\omega t)$	0.014 42	0.015 04	0.001 30	0.113 08	−0.002 79	0.005 10	0.001 30	0.022 58

圧縮機はすべて複動形である。表1.1.1は 1A 圧縮機の上死点を基準として体積速度$\dot{X}^*$を $\dot{X}^*(t) = A_0/2+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\omega t+B_n\sin n\omega t)$の形で表わしたときのFourier係数$A_n, B_n$を示したものであるが，これを$Q_R+jQ_I$の複素形に変換してインプットデータとした。以上のデータをもとに脈動解析した結果から，おもなものを表 1.1.2 に示す。

表 1.1.2 脈動解析結果

	一	次	二	次	三	次	四	次
位置	$\lvert P\rvert$ kg/cm²	$\lvert\dot{X}\rvert$ m³/s	$\lvert P\rvert$ kg/cm²	$\lvert\dot{X}\rvert$ m³/s	$\lvert P\rvert$ kg/cm²	$\lvert\dot{X}\rvert$ m³/s	$\lvert P\rvert$ kg/cm²	$\lvert\dot{X}\rvert$ m³/s
		$\times 10^{-1}$		$\times 10^{-1}$		$\times 10^{-1}$		$\times 10^{-1}$
1	0.078 2	0.257 2	0.785 0	5.222	0.021 5	0.154 5	1.299 2	2.316
2	0.078 4	0.246 6	0.760 4	7.116	0.022 8	0.032 8	1.297 6	7.416
3	0.079 5	0.246 6	0.759 6	7.116	0.022 8	0.032 8	1.297 4	7.416
4	0.078 4	0.252 2	0.504 4	7.356	0.024 6	0.011 8	0.476 6	8.440
5	0.065 2	—	0.796 0	—	0.013 5	—	0.212 0	—
6	0.045 4	—	1.004 0	—	0.019 5	—	0.382 0	—
7	0.033 8	0.258 8	0.900 2	1.624	0.019 6	0.055 1	0.473 8	0.308 2
8	0.174 5	0.178 1	1.212 2	0.690	0.047 6	0.008 2	0.431 2	0.249 2
9	0.253 6	0.156 1	0.244 4	1.352	0.017 1	0.056 8	0.056 7	0.512 6
10	0.251 0	0.173 7	0.371 2	1.247	0.014 5	0.058 8	0.052 9	0.514 4
11	0.063 6	0.957 0	0.207 4	1.189	0.074 2	0.067 6	0.105 5	0.082 1
12	0.260 0	0.845 4	0.649 0	0.174 2	0.018 5	0.144 9	0.074 9	0.162 3
13	0.264 0	0.845 4	0.647 4	0.174 2	0.019 9	0.144 9	0.076 6	0.162 3
14	0.263 6	0.409 8	0.616 0	2.182	0.046 7	0.110 6	0.060 9	0.440 6

表1.1.2では図1.1.9に示す14個所の位置における脈動圧，体積速度の値を示したが，分割点39，オリフィス数3を有するこの配管系の計算時間はFACOM 270—20を使用した場合，データの読み込み，演算，結果のプリント時間も含めて一つの周波数につき4分程度である。

この配管系の数個所について実動運転中に圧力測定を行なった。電磁オシログラフに描かれた圧力波形を周波数分析し，解析した値と比較したのが図1.1.14である。脈動圧力の大きい個所において，やや解析値が大きめに現われているが，全体的には良好な傾向を示している。

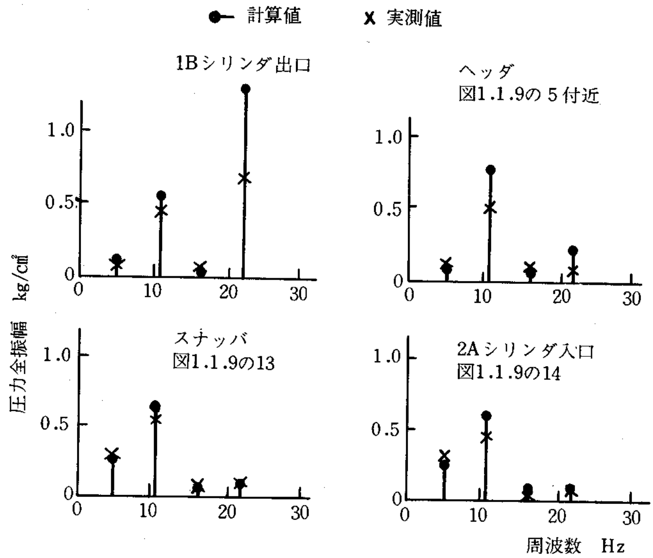


図 1.1.14　計算値と実測値との比較

1.9　脈動による機械系への加振力

配管内に脈動が生じるとそれによって機械系の振動が誘発される。脈動流が配管系に及ぼす加振力の発生機構については，K. Groth, E. Embrikらの研究をもとに大谷[13]が解説を行なっており，つぎの三種の効果をとりあげている。

(1)　ベンド部の受圧面積差によって生じる加振力

図1.1.15に示すような角度θのベンド部においては，管の外側の受圧面積が内側よりも大きいので曲率中心の外方へ向かう力が発生する。脈動の波長はベンド部寸法に比べて十分長いと考えられるからベンド部の圧力をPとすると

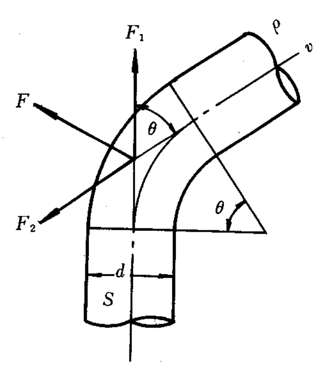


図 1.1.15　ベンド部

$$F_1 = F_2 = SP$$

となり，合力Fは次式のように表わされる。

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\theta} = 2SP\sin\frac{\theta}{2} \quad \cdots\cdots (1.1.34)$$

ただし$S = \frac{\pi}{4}d^2$である。

(2) 運動量の変化による加振力

ベンド部においては流体が速度の方向を変えるために配管に力を及ぼす。図1.1.15において，密度ρ の流体が速度v で流れると運動量の変化による力は，文献[52] などによりつぎのように表わされる。

$$F_1 = F_2 = \rho S v^2$$

$v = \dot{X}/S$ としてこれを上式に代入し，合力Fを求めると

$$F = 2\frac{\rho}{S}\dot{X}^2 \sin\frac{\theta}{2} \quad \cdots\cdots (1.1.35)$$

ところで式（1．1．35）をつぎのように書き直してみる。

$$F = 2S\left(\frac{\rho a}{S}\dot{X}\right)\sin\frac{\theta}{2} \times \left(\frac{v}{a}\right)$$

ここで（$\rho a\dot{X}/S$）は管における伝達方程式（1.1.7）を見てわかるように脈動圧力振幅Pとほぼ同程度の大きさをもち，また$v/a \ll 1$であるから，一般に式（1.1.35）は式（1.1.34）に比べてかなり小さい値となる。

(3) ブルドン効果による加振モーメント

ベンド部に圧力が加わるとブルドン管作用によってベンドの角度を開こうとするモーメントが生じる。このモーメントの大きさはベンド部の断面形状などによって異なるが，通常の配管系に用いられるような偏平率の少ない同心円状の断面を有するベンド管においては，(1)で述べた受圧面積差に

よる力と比べてその加振効果は無視できる程度である。

結局，脈動による加振力としては大谷も述べているようにベンド部における受圧面積差による力だけを考慮すればよく，その大きさは式(1.1.34)によって表わされる。

1.10　結　　言

化学プラントなどに設置される往復圧縮機まわりの配管系を対象に，流体脈動状態をディジタル電子計算機で解析する一方法を確立した。この方法を適用すればかなりの要素を含む複雑な配管系でも必要とする任意の場所の脈動圧と体積速度が容易に計算でき，設計段階において圧縮機効率や弁の動作状態に及ぼす影響度の判断，および強度面においては機械振動発生源としての加振力評価が可能になった。

さらに，この手法は消音器の透過損失や油圧配管系の伝達関数などの解析にも利用できると考えられる。

第２章　往復圧縮機との接続境界における体積速度の算出法

2.1　緒　　言

往復圧縮機まわりの配管系について脈動解析を行なう場合，境界の一つである圧縮機との接続点において境界条件を設定する必要がある。アナログ計算機を用いる場合は正弦波発振器とダイオードから成る電子回路などで圧縮機の吐出し，吸込現象をシミュレートしているが，第１章で説明したようなディジタル計算機で解析する場合には圧縮機の吐出し波形または吸込波形をFourier展開し，各周波数成分ごとの体積速度振幅をQ_R+jQ_Iのように複素数表示した形で与えねばならない。本章においてはChilton[15]が示したのと同様の考えかたによって，圧縮機回転数，シリンダ寸法，吸込圧力，吐出し圧力などの運転条件から境界条件であるQ_R，Q_Iを算出する方法について述べる。

2.2　往復圧縮機の吐出し，吸込波形

図1.2.1 は往復圧縮機の概念図とそれに対応する指圧線図を示したものである。指圧線図における区間$\overline{23}$は吸込行程，区間$\overline{41}$は吐出し行程であり，それぞれ吸込側，吐出し側の配管系とつながって強制的に体積速度変動を与える。これらの運転状態から境界条件となる体積速度変動の大きさを算定するに際し，以下の仮定を置く。

1) 吸込弁，吐出し弁はそれぞれ指圧線図における 2,3 および 4,1 において瞬間的に開閉するものとする。
2) シリンダ部と配管系部の連成効果を無視する。すなわちシリンダが配管系とつながっているときもシリンダ内の圧力は脈動の影響を受けずに一定値とし，吸込行程ではP_sに，吐出し行程ではP_dに等しいとする。
3) 弁部における流路抵抗は無視する。

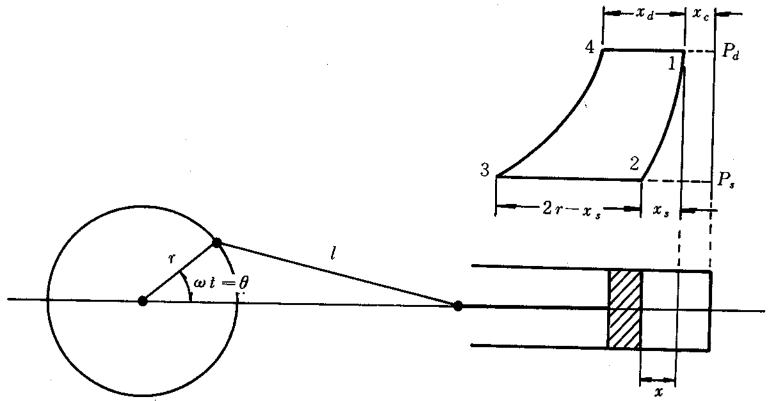


図 1.2.1　往復圧縮機の概念図と指圧線図

圧縮機の回転数が一定の場合にはピストン位置 x, ピストン速度 $\dot{x}$ は二次の調和成分までを考慮するとすれば，次式のように表わされる。

$$\left.\begin{aligned} x &= r\left\{\left(1+\frac{\rho}{4}\right)-\cos\omega t-\frac{\rho}{4}\cos 2\omega t\right\} \\ \dot{x} &= r\omega\left(\sin\omega t+\frac{\rho}{2}\sin 2\omega t\right) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1.2.1)$$

ここで　r ＝クランク半径　　　$\rho=r/l$

l ＝連接棒の長さ　　　ω ＝クランク軸の回転角速度

シリンダ内容積 V，およびピストン先端部の体積速度 $\dot{X}^*$ は $x, \dot{x}$ にシリンダ断面積 S を乗じることによって次式のように得られる。

$$\left.\begin{aligned} V(\theta) &= Sx_c+Sr\left\{\left(1+\frac{\rho}{4}\right)-\cos\theta-\frac{\rho}{4}\cos 2\theta\right\} \\ \dot{X}^*(\theta) &= -Sr\omega\left(\sin\theta+\frac{\rho}{2}\sin 2\theta\right) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots \quad (1.2.2)$$

ただし $\omega t=\theta$ と置き，体積速度はシリンダから出てゆく方向を正としている。また x_c は上死点すきまである。

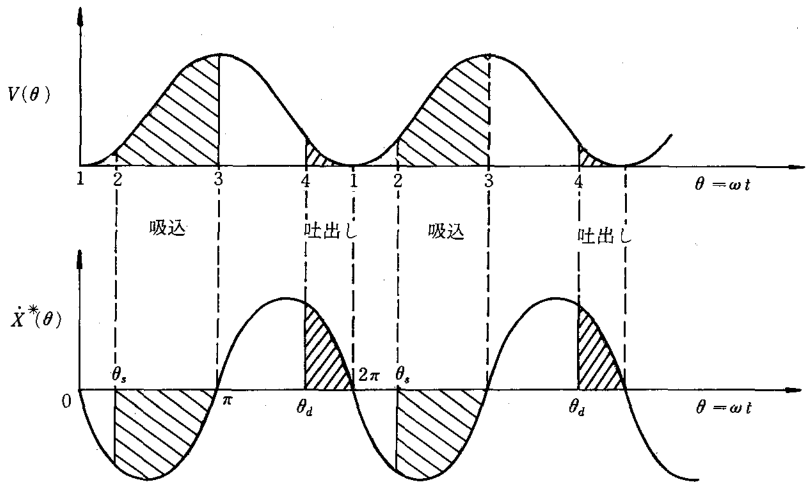


図 1.2.2　シリンダ容積と体積速度の波形

式 (1.2.2) を図示すれば図1.2.2に示すように$2\pi/\omega$を周期とする周期関数となる。ところで吸込弁の開く時期を θ_s，吐出し弁の開く時期を θ_d とすれば，図1.2.1の指圧線図を見てわかるように，シリンダが配管に接続する期間は

$$\left.\begin{array}{ll}\text{吸込のとき} & \theta_s \leqq \theta \leqq \pi \\ \text{吐出しのとき} & \theta_d \leqq \theta \leqq 2\pi\end{array}\right\} \cdots\cdots (1.2.3)$$

であり，図1.2.2において斜線で示された区間に相当する。

図1.2.2下側の図の斜線の部分が圧縮機との接続部における流体の体積速度の波形を表わしていることになり，これをFourier展開すれば境界条件としての体積速度振幅が得られる。

2.3　弁の開く時期θ_s, θ_dの算出

2.3.1　吸込弁の開く時期θ_s

圧縮機の仕様によって吸込効率V_eが与えられると，V_eの定義から図 1.2.1 における区間$\overline{23}$がつぎのように表わされる。

$$\overline{23}=2r\times V_e$$

ゆえにx_sがつぎのように求められる。

$$x_s=2r-\overline{23}=2r(1-V_e) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1.2.4)$$

x_s に対応するクランク角度 θ_s を求めるには式（1.2.1）において$x=x_s$ を満足する$\theta(=\omega t)$ を求めればよい。x, ωt の代りに x_s ，θ_sとおいて整理すると

$$\frac{\rho}{2}\cos^2\theta_s+\cos\theta_s-\left(1+\frac{\rho}{2}-\frac{x_s}{r}\right)=0$$

これを解いて

$$\left.\begin{aligned}&\theta_s=\cos^{-1}\left(\frac{2\delta_1}{1+\sqrt{1+2\rho\delta_1}}\right)\\&\text{ただし}\\&\delta_1=\left(1+\frac{\rho}{2}-\frac{x_s}{r}\right)\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1.2.5)$$

なお，式（1.2.5）より得られる θ_s は第１または第２象限（$0\leqq\theta_s\leqq\pi$）の値を採用するものとする。

2.3.2　吐出し弁の開く時期θ_d

圧縮行程の気体の状態変化はmをポリトロープ指数，P_s, P_dを吸込および吐出し圧力とするとつぎの関係がある。

$$P_s\,(2r+x_c)^m=P_d(x_d+x_c)^m$$

$$\therefore x_d=(2r+x_c)(P_s/P_d)^{1/m}-x_c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1.2.6)$$

ところで膨張行程の気体の状態変化を考えると

$$P_s\,(x_c+x_s)^m=P_d\,x_c{}^m$$

上式に式（1.2.4）を代入し整理すると，上死点すきま x_c と吸込効率 V_e との関係が次式のように得られる。

$$x_c = \frac{2r(1-V_e)}{(P_d/P_s)^{1/m}-1} \quad \cdots\cdots (1.2.7)$$

式（1.2.7）を式（1.2.6）に代入すると

$$x_d = 2rV_e(P_s/P_d)^{1/m} \quad \cdots\cdots (1.2.8)$$

この x_d に対応するクランク角度 θ_d は式（1.2.1）に $x=x_d,\ \omega t=\theta_d$ を代入することによって求められ，次式のように表わされる。

$$\left.\begin{aligned} &\theta_d = \cos^{-1}\left(\frac{2\delta_2}{1+\sqrt{1+2\rho\delta_2}}\right) \\ &\text{ただし} \\ &\delta_2 = \left(1+\frac{\rho}{2}-\frac{x_d}{r}\right) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (1.2.9)$$

なお，この場合の θ_d は第3または第4象限（$\pi \leqq \theta_d \leqq 2\pi$）での値を採用するものとする。

2.4 吐出し，吸込波形のFourier展開

図1.2.2で示される $\dot{X}^*$ の波形をFourier 解析すれば境界条件としての体積速度振幅が得られる。数値計算を統一化するため，弁の開閉時期を一般的に θ_1，θ_2 で表わす。すなわち

$$\left.\begin{array}{llll} \text{吸込の場合} & \theta_1=\theta_s & \text{式 (1.2.5)}, & \theta_2=\pi \\ \text{吐出しの場合} & \theta_1=\theta_d & \text{式 (1.2.9)}, & \theta_2=2\pi \end{array}\right\} \cdots\cdots (1.2.10)$$

このようにすると体積速度 $\dot{X}^*(\theta)$ を次式

$$\dot{X}^{*}(\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A'_n\cos n\theta+B'_n\sin n\theta) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.2.11)$$

の形で表わした場合のFourier係数A'_n, B'_nは吐出し，吸込にかかわらず次式のように表わされる。

$$\left.\begin{aligned}
A'_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\dot{X}^{*}(\theta)\cos n\theta d\theta=\frac{1}{\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}-Sr\omega(\sin\theta+\frac{\rho}{2}\sin 2\theta)\cos n\theta d\theta\\
&=-\frac{Sr\omega}{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}[\sin(n+1)\theta-\sin(n-1)\theta+\frac{\rho}{2}\sin(n+2)\theta\\
&\quad-\frac{\rho}{2}\sin(n-2)\theta]\,d\theta=-\frac{Sr\omega}{2\pi}\left[(G_{c4}-G_{c2})+\frac{\rho}{2}(G_{c5}-G_{c1})\right]\\
B'_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\dot{X}^{*}(\theta)\sin n\theta d\theta=\frac{1}{\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}-Sr\omega(\sin\theta+\frac{\rho}{2}\sin 2\theta)\sin n\theta d\theta\\
&=-\frac{Sr\omega}{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}[\cos(n-1)\theta-\cos(n+1)\theta+\frac{\rho}{2}\cos(n-2)\theta\\
&\quad-\frac{\rho}{2}\cos(n+2)\theta]d\theta=-\frac{Sr\omega}{2\pi}\left[(G_{s2}-G_{s4})+\frac{\rho}{2}(G_{s1}-G_{s5})\right]
\end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.2.12)$$

ただし，上式における$C_{c1}\sim G_{c5}$，$G_{s1}\sim G_{s5}$の値はつぎのようなものである。

$$G_{c1}=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin(n-2)\theta d\theta=-\frac{1}{n-2}\{\cos(n-2)\theta_2-\cos(n-2)\theta_1\}$$

ただし$n=2$のときは$G_{c1}=0$

$$G_{c2}=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin(n-1)\theta d\theta=-\frac{1}{n-1}\{\cos(n-1)\theta_2-\cos(n-1)\theta_1\}$$

ただし$n=1$のときは$G_{c2}=0$

$$G_{c4}=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin(n+1)\theta d\theta=-\frac{1}{n+1}\{\cos(n+1)\theta_2-\cos(n+1)\theta_1\}$$

$$G_{c5}=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin(n+2)\theta d\theta=-\frac{1}{n+2}\{\cos(n+2)\theta_2-\cos(n+2)\theta_1\}$$

$$G_{s1}=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos(n-2)\theta d\theta=\frac{1}{n-2}\{\sin(n-2)\theta_2-\sin(n-2)\theta_1\}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\text{ただし}n=2\text{のときは}G_{s1}=\theta_2-\theta_1 \\
G_{s2}=\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\ (n-1)\theta\, d\theta=\frac{1}{n-1}\{\sin(n-1)\theta_2-\sin(n-1)\theta_1\} \\
\text{ただし}n=1\text{のときは}G_{s2}=\theta_2-\theta_1 \\
G_{s4}=\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\ (n+1)\theta\, d\theta=\frac{1}{n+1}\{\sin(n+1)\theta_2-\sin(n+1)\theta_1\} \\
G_{s5}=\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\ (n+2)\theta\, d\theta=\frac{1}{n+2}\{\sin(n+2)\theta_2-\sin(n+2)\theta_1\}
\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(1.2.13)$$

2.5 位相の修正

式（1.2.12）はある圧縮機の上死点を基準にして計算した周波数成分である。配管系において2台あるいはそれ以上の圧縮機が使用されている場合には必ずしも全部の圧縮機が同位相で運転されるとは限らない。このときどれか基準の圧縮機については式（1.2.12）がそのまま適用できるが，他のものについては式（1.2.12）の値からさらに運転の位相角の修正をほどこす必要がある。

基準の圧縮機に対して運転位相角がϕだけ進んでいるものは式（1.2.11）を用いると

$$\dot{X}^*(\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{A'_n\cos n(\theta+\phi)+B'_n\sin n(\theta+\phi)\}$$

$$=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{(A'_n\cos n\phi+B'_n\sin n\phi)\cos n\theta$$

$$+(-A'_n\sin n\phi+B'_n\cos n\phi)\sin n\theta\}\cdots\cdot(1.2.11)'$$

となる。これより，位相修正したあとのFourier係数A_n, B_nがつぎのように求められる。

$$\left.\begin{array}{l}
A_n=A'_n\cos n\phi+B'_n\sin n\phi \\
B_n=-A'_n\sin n\phi+B'_n\cos n\phi
\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1.2.14)$$

2.6 境界条件の複素数表示

第1章で述べたように境界条件は複素数で与えることになっている。圧縮機と配管系の接続部における体積速度を複素数表示すると

$$
\begin{aligned}
(Q_R+jQ_I)\ e^{j\theta} &= (Q_R+j\,Q_I)(\cos\theta+j\sin\theta) \\
&= (Q_R\cos\theta-Q_I\sin\theta)+j\,(Q_I\cos\theta+Q_R\sin\theta)
\end{aligned}
\qquad \cdots\cdots (1.2.15)
$$

式 (1.2.15) の実数部の係数が式 (1.2.14) に対応するものであるから，Q_R，Q_I はつぎのように表わされる。

$$
\left.
\begin{aligned}
Q_R &= \quad A_n = A'_n\cos n\phi + B'_n\sin n\phi \\
Q_I &= -\ B_n = A'_n\sin n\phi - B'_n\cos n\phi
\end{aligned}
\right\}
\qquad \cdots\cdots (1.2.16)
$$

2.7 計算手順と計算例

図 1.2.3に圧縮機の吸込部，吐出し部における体積速度振幅を算出するための計算の流れを示す。

表 1.2.2はある圧縮機の一段吐出し口における計算結果を示したものである。計算のためのインプットデータは圧縮機仕様，気体の性質などから表 1.2.1のように与えられた。

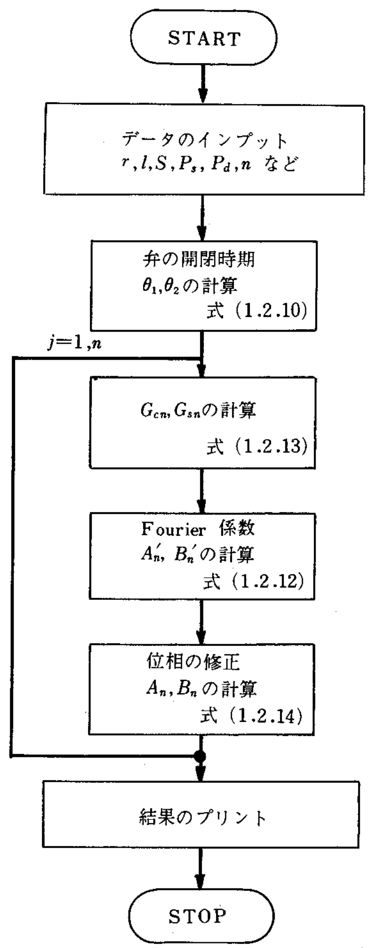


図 1.2.3　フローチャート

表 1.2.1　インプットデータ

回転角速度	ω =34.3rad/s	シリンダ径	D =0.365m
位相角	ϕ = 0°	吸込効率	V_e=72.26%
連接棒長さ	l =0.80m	吐出し圧力	P_d=35.3kg/cm^2
ストローク	$2r$ =0.356m	吸込圧力	P_s=9.30kg/cm^2
ロッド径	d =0.076m	ポリトローブ指数	m =1.31

表 1.2.2　計算結果

吐出し弁の開く時期 θ_d =−56.29°

上死点すきま x_c =0.0558m

体積速度のFourier 係数 m^3/s

次数	A'_n	B'_n
0	0.207 716	0
1	0.003 592	−0.002 673
2	0.052 274	−0.178 379
3	−0.001 312	−0.003 320
4	−0.114 547	−0.063 394
5	−0.002 136	0.000 512
6	−0.033 652	0.061 600
7	0.000 522	0.000 955
8	0.039 670	−0.003 229
9	0.000 332	−0.000 806
10	−0.021 359	−0.033 979

2.8 結　言

圧縮機まわり配管系の脈動解析を行なう際，圧縮機との接続点は体積速度が与えられる境界条件として扱われる。本章では圧縮機のピストン速度と弁の開閉時期などから吸込および吐出しの波形を推定し，これをFourier展開して各次数の体積速度の周波数成分を求める方法を示した。これによって境界条件である体積速度の算出が可能になった。なお，ここではシリンダ内の圧力脈動，弁部における流路抵抗，弁の振動などを無視しているが，これら圧縮機部分と配管系の相互作用については三橋ら[53]の研究が報告されており，特に弁が振動しやすい構造でない限り上記の影響は無視できると考えられる。

第2編　機器配管系の固有値解析法に関する研究

第1章　有限要素法による配管系の固有値解析

1.1　緒　　言

配管系に限らず機械系の振動特性は固有振動数，振動モード，モーダル質量および減衰率によって表わされ，防振対策や耐振構造の検討だけでなくモーダルアナリシスによって振動応答を算出するのにも利用される。このうち減衰量は特別な場合を除いて解析的に予測するのはむずかしいが，他の諸量は理論解析あるいは数値解析によって求めることができる。従来振動特性の解析には伝達マトリックス法がよく用いられていたが，最近では有限要素法を用いた数値解法が使用されるようになり，配管系の振動解析にも応用されはじめてきた。緒論でも述べたように有限要素法には，網目状に配置された複雑な配管系に対しても取扱いが容易なこと，計算時間が短縮できること，静的解析や他の構造物の振動解析とも統一的に扱えること，運動方程式の定式化や計算データの作成が簡単であること，などの特長があり，プログラムを作成したり利用する者にとって便利な点を多く有している。

有限要素法では，全体系をいくつかの細かい要素に分解し，各要素について節点力と節点変位の関係を導く。この力と変位の関係を全体座標系で表わし全要素について合成すれば，全体系に対する力のつり合式，すなわち固有値方程式が得られ，これを解けば固有振動数，その他の特性値が求められる。固有値方程式を数値的に解く方法としては Jacobi の回転法，Householder法，Strum法など多くの解法が紹介されているが[54][55][56]，それぞれ一長一短があり扱う対象と目的に応じて適当なものが選択され使用されている状況である。

ここでは Zienkiewicz[34]，川井[35]の理論に基づいた有限要素法によって固有値方程式を導き，これを配管系の解析に適した三種の固有値解法で解く

方法について述べる。

さらに実際の配管系を解析する際に問題となる配管要素，たとえばベンド管，付加質量，付加ばね，あるいはアングル材構造物などに対する扱いかた，および直管における要素分割の程度についても言及し，いくつかの計算例によってその精度を確かめる。

1.2 多自由度系の運動方程式と固有値方程式

図2.1.1で示されるような質量，ダンパ，ばねから成る質点系の各質点に外力f_iが作用するときの運動方程式は次式のように表わされる。

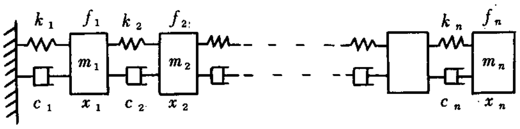


図 2.1.1 多自由度振動系

$$\left.\begin{aligned}
&m_1\ddot{x}_1+(c_1+c_2)\dot{x}_1-c_2\dot{x}_2+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=f_1\\
&m_2\ddot{x}_2-c_2\dot{x}_1+(c_2+c_3)\dot{x}_2-c_3\dot{x}_3-k_2x_1+(k_2+k_3)x_2-k_3x_3=f_2\\
&\vdots\\
&m_n\ddot{x}_n-c_n\dot{x}_{n-1}+c_n\dot{x}_n-k_nx_{n-1}+k_nx_n=f_n
\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (2.1.1)$$

ただし　m_i＝質量　k_i＝ばね定数　c_i＝減衰定数

x_i＝座標　f_i＝外力

式（2.1.1）をマトリックスで表示すると次式のようになる。

$$[M]\ddot{\boldsymbol{x}}+[C]\dot{\boldsymbol{x}}+[K]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f} \quad \cdots\cdots (2.1.2)$$

ここで

$$[M]=\begin{bmatrix} m_1 & & 0\\ & m_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m_n\end{bmatrix}\ [C]=\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0\\ -c_2 & c_2+c_3 & \\ & \ddots & -c_n\\ 0 & -c_n & c_n\end{bmatrix}\ [K]=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0\\ -k_2 & k_2+k_3 & \\ & \ddots & k_n\\ 0 & -k_n & k_n\end{bmatrix}\ \boldsymbol{f}=\begin{bmatrix} f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_n\end{bmatrix}\ \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

配管系のような連続体の場合でも有限要素法を用いれば無限自由度系から有限の自由度をもつ振動系へ置き換えることができ，その運動方程式は式(2.1.2) と同じ形のマトリックス形式で表現することができる。系の振動特性すなわち固有振動数や振動モードを求める場合には，式(2.1.2)において減衰項と外力項を省き，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{N}e^{ipt}$ と置いて得られる次式

$$[K]\boldsymbol{N}=p^2[M]\boldsymbol{N} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2.1.3)$$

を解くことが必要になる。式(2.1.3)は運動方程式(2.1.2)に対応する系の固有値方程式であって，物理的には部材の弾性力 $[K]\boldsymbol{N}$ と慣性力 $p^2[M]\boldsymbol{N}$ が完全につり合っている状態を表わしている。このような状態はある特定の振動数 p と変位形態 $\boldsymbol{N}$ の組においてのみ満たされる。そしてこの p, $\boldsymbol{N}$ が固有振動数，振動モードと呼ばれるものである。

解析しようとする配管系が与えられると，まず有限要素法などによって $[K]$, $[M]$ を作成し、つぎに固有値方程式 (2.1.3) を満足する振動数 p, 振動モード $\boldsymbol{N}$ を見つけだすことになるが，この段階の解析は固有値解析と呼ばれている。式(2.1.3)を満たす p , $\boldsymbol{N}$ の組は系の自由度の数だけ存在し，通常の配管系では数百以上にもなる。しかし，実用的には固有振動数の低いほうから，あるいはある周波数範囲内に存在するもの数個を算出すれば十分である。

1.3 有限要素法によるマトリックス $[K]$, $[M]$ の作成

配管系は直管，ベンド管，サポート，ハンガ，弁，フランジ，境界などの要素から構成されているが，振動学的にはこれらは直棒，ばね，質量などの要素に分類することができ，これらの基本要素がその取付点において他の要素と互いに力を作用しながら結合していると見なすことができる。結合点（以下これを節点と呼ぶ）における変位（または加速度）と結合点に作用する力の関係を各要素ごとに次式

$$\left.\begin{array}{ll}\text{弾性力に対して} & \boldsymbol{f}_e = \ \ [K_e]\,\boldsymbol{x}_e \\ \text{慣性力に対して} & \boldsymbol{f}_e = -[M_e]\,\ddot{\boldsymbol{x}}_e\end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.1.4)$$

のように表わせるものとすれば，系全体の変位と力の関係は上式を合成することによって式(2.1.5)のように組み立てることができる。

$$\left.\begin{array}{ll}\text{弾性力に対して} & \boldsymbol{f} = \ \ [K]\,\boldsymbol{x} \\ \text{慣性力に対して} & \boldsymbol{f} = -[M]\,\ddot{\boldsymbol{x}}\end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.1.5)$$

固有値解析では弾性力と慣性力がつり合っている状態を解析するから，式(2.1.5)の両式を等置し，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{N}\,\mathrm{e}^{ipt}$ と置けば固有値方程式(2.1.3)が得られる。したがって，この節では有限要素法により $[K_e]$，$[M_e]$ を求めて式(2.1.4)を導き，これらを合成して式(2.1.5)における $[K]$，$[M]$ を組み立てる方法について直棒要素を主体にして説明する。

1.3.1　直棒要素の部分マトリックス $[K_e]$，$[M_e]$ の作成

図2.1.2に示すように配管系の直管部を代表する直棒要素の両端節点を i，j とし，$i \rightarrow j$ 方向を z 軸とする局所座標系 $x-y-z$ を定義する。立体配管系を考える場合，節点における変位成分としては x，y，z 方向の変位 u, v, w とその軸まわりの回転角 θ_x，θ_y，θ_z の計6自由度があり，節点に作用する力の成分にも同様に x，y，z 方向の力 F_x，F_y，F_z およびその軸まわりのモーメント M_x，M_y，M_z の計6成分がある。したがって節点 i，j における変位と力をベクトル記号 $\boldsymbol{x}_i$，$\boldsymbol{x}_j$，$\boldsymbol{f}_i$，$\boldsymbol{f}_j$ で表わせば，直棒要素の場合，力と変位の関係式(2.1.4)における $\boldsymbol{f}_e$，$\boldsymbol{x}_e$ はつぎのように書くことができる。

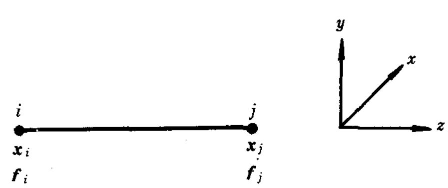


図 2.1.2　直棒要素

$$\boldsymbol{f}_e=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_i\\ \boldsymbol{f}_j\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_e=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_i\\ \boldsymbol{x}_j\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(2.1.6)$$

ここで $\boldsymbol{f}_i=\begin{bmatrix}F_x\\F_y\\F_z\\M_x\\M_y\\M_z\end{bmatrix}_i,\quad \boldsymbol{f}_j=\begin{bmatrix}F_x\\F_y\\F_z\\M_x\\M_y\\M_z\end{bmatrix}_j,\quad \boldsymbol{x}_i=\begin{bmatrix}u\\v\\w\\\theta_x\\\theta_y\\\theta_z\end{bmatrix}_i,\quad \boldsymbol{x}_j=\begin{bmatrix}u\\v\\w\\\theta_x\\\theta_y\\\theta_z\end{bmatrix}_j$

したがって，式（2.1.4）は次式のように書き直せる。

$$\left.\begin{array}{ll}\text{弾性力に対して} & \begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_i\\ \boldsymbol{f}_j\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{k}_{ii} & \boldsymbol{k}_{ij}\\ \boldsymbol{k}_{ji} & \boldsymbol{k}_{jj}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_i\\ \boldsymbol{x}_j\end{bmatrix}\\ \text{慣性力に対して} & \begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_i\\ \boldsymbol{f}_j\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\boldsymbol{m}_{ii} & \boldsymbol{m}_{ij}\\ \boldsymbol{m}_{ji} & \boldsymbol{m}_{jj}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\boldsymbol{x}}_i\\ \ddot{\boldsymbol{x}}_j\end{bmatrix}\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\quad(2.1.4)'$$

ただし　$[K_e]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{k}_{ii} & \boldsymbol{k}_{ij}\\ \boldsymbol{k}_{ji} & \boldsymbol{k}_{jj}\end{bmatrix}\quad [M_e]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{m}_{ii} & \boldsymbol{m}_{ij}\\ \boldsymbol{m}_{ji} & \boldsymbol{m}_{jj}\end{bmatrix}$

である。そしてこれから行なおうとするのは，式（2.1.4）における節点変位と節点力を関係づける部分剛性マトリックス$[K_e]$，および部分質量マトリックス$[M_e]$を具体的に定めることである。円管状断面を有する直棒の場合は縦振動，ねじり振動，曲げ振動がそれぞれ独立に生じるので，また薄肉開断面をもつ場合には曲げねじりの連成効果は無視できるとして，つぎのように分離して考えてゆく。

(1)　縦振動

棒は無限自由度の弾性体と考えられるので，両端の縦方向変位w_i, w_j

が与えられた場合でも内部の変位は任意の状態をとりうるが，問題としている周波数領域においては変位は図 2.1.3に示すように直線的に分布していると仮定し，要素内変位を両端変位w_i, w_jの2自由度で表現する。すなわち

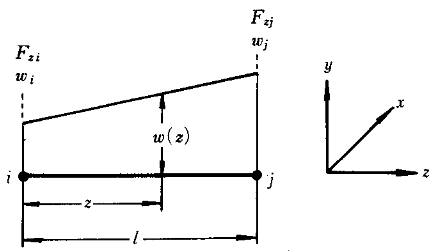


図2.1.3 縦変位の分布

$$w(z)=w_i+(w_j-w_i)z/l=[1-z/l,\ \ z/l]\begin{bmatrix} w_i \\ w_j \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.1.7)$$

この場合，要素内のひずみ$\varepsilon(z)$はつぎのように表わされる。

$$\varepsilon(z)=\frac{dw}{dz}=\frac{w_j-w_i}{l}=\frac{1}{l}[-1,\ \ 1]\begin{bmatrix} w_i \\ w_j \end{bmatrix}$$

式 (2.1.7) で表わされるような弾性変形に対する節点力を求めるために仮想仕事の原理を適用し，任意の仮想節点変位δw_i，δw_jについて内部仕事と外部仕事を求め，これらを等置する。まず内部仕事δU_1は

$$\delta U_1=\int_0^l \delta\varepsilon^{\mathrm{T}}\ \sigma A\,dz=[\delta w_i,\ \ \delta w_j]\int_0^l \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{EA}{l^2}[-1,\ \ 1]dz\begin{bmatrix} w_i \\ w_j \end{bmatrix}$$

$$=[\delta w_i,\ \ \delta w_j]\begin{bmatrix} \dfrac{EA}{l} & -\dfrac{EA}{l} \\ -\dfrac{EA}{l} & \dfrac{EA}{l} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_i \\ w_j \end{bmatrix}$$

一方，仮想節点変位に対する外部仕事δU_2は，節点力をF_{zi}，F_{zj}とするとつぎのように表わされる。

$$\delta U_2=[\delta w_i,\ \ \delta w_j]\begin{bmatrix} F_{zi} \\ F_{zj} \end{bmatrix}$$

δU_1とδU_2を等置すると，弾性力に対する節点力と節点変位の関係として次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} F_{zi} \\ F_{zj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{EA}{l} & -\dfrac{EA}{l} \\ -\dfrac{EA}{l} & \dfrac{EA}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ w_j \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.1.8)$$

つぎに，内部に分布する慣性力と等価な節点力を求める。式 (2.1.7) の 2 回微分で表わされる加速度分布状態に対する慣性力のなす仕事δT_1は

$$\delta T_1 = -\int_0^l \delta w^{\mathrm{T}} \rho A \ddot{w}\, dz = -[\delta w_i, \delta w_j] \int_0^l \begin{bmatrix} 1-z/l \\ z/l \end{bmatrix} \rho A [1-z/l, z/l]\, dz \begin{bmatrix} \ddot{w}_i \\ \ddot{w}_j \end{bmatrix}$$

$$= -[\delta w_i, \ \delta w_j] \frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{w}_i \\ \ddot{w}_j \end{bmatrix}$$

一方，等価節点力 F_{zi}， F_{zj} のなす仕事δT_2はδU_2と同じ表現式となり，δT_1とδT_2を等置すれば慣性力に対する等価節点力と節点変位の関係が次式のように求められる。

$$\begin{bmatrix} F_{zi} \\ F_{zj} \end{bmatrix} = -\frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{w}_i \\ \ddot{w}_j \end{bmatrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.1.9)$$

(2) ねじり振動

ねじり振動についても要素内の変位状態は直線的であると仮定し，変位関数として次式

$$\theta_z(z) = \theta_{zi} + (\theta_{zj} - \theta_{zi}) z/l \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.1.10)$$

を用いると，縦振動の場合と同様の手続きによって節点力と節点変位の関係がつぎのように求められる。

弾性力に対して $\begin{bmatrix} M_{zi} \\ M_{zj} \end{bmatrix} = \dfrac{GI_p}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{zi} \\ \theta_{zj} \end{bmatrix}$ ········(2.1.11)

慣性力に対して $\begin{bmatrix} M_{zi} \\ M_{zj} \end{bmatrix} = -\dfrac{\rho AlR^2}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_{zi} \\ \ddot{\theta}_{zj} \end{bmatrix}$ ····· (2.1.12)

ただし，GI_pはねじり剛性，Rは回転半径である。

(3) 曲げ振動

曲げ振動は x 軸，y 軸を断面主軸方向にとった場合，$z-x$ 面内曲げと $z-y$ 面内曲げに分離して考えることができる。$z-x$ 面内曲げを考えるときは節点変位として（u_i，θ_{yi}，u_j，θ_{yj}）を，節点力としては（F_{xi}，M_{yi}，F_{xj}，M_{yj}）を考えることになる。要素内部の変位分布を三次式で近似し，節点変位の関数として次式のように表わす。

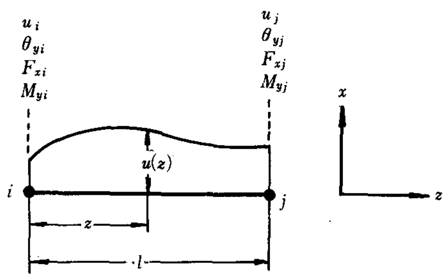


図 2.1.4 曲げ変位の分布

$$u(z) = [1, z, z^2, z^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/l^2 & -2/l & 3/l^2 & -1/l \\ 2/l^3 & 1/l^2 & -2/l^3 & 1/l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ \theta_{yi} \\ u_j \\ \theta_{yj} \end{bmatrix} \quad \cdots(2.1.13)$$

ただし，式（2.1.13）中のマトリックスは$u(z)$が両端において節点変位と一致するように設定されたものである。以上のような変位関数を用い

ると，仮想仕事の原理を用いて節点変位と節点力の関係がつぎのように求められる。

弾性力に対して

$$
\begin{bmatrix} F_{xi} \\ M_{yi} \\ F_{xj} \\ M_{yj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{12EI_y}{l^3} & & & \text{SYM.} \\ \dfrac{6EI_y}{l^2} & \dfrac{4EI_y}{l} & & \\ -\dfrac{12EI_y}{l^3} & -\dfrac{6EI_y}{l^2} & \dfrac{12EI_y}{l^3} & \\ \dfrac{6EI_y}{l^2} & \dfrac{2EI_y}{l} & -\dfrac{6EI_y}{l^2} & \dfrac{4EI_y}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ \theta_{yi} \\ u_j \\ \theta_{yj} \end{bmatrix} \cdots (2.1.14)
$$

慣性力に対して

$$
\begin{bmatrix} F_{xi} \\ M_{yi} \\ F_{xj} \\ M_{yj} \end{bmatrix} = -\rho A l \begin{bmatrix} \dfrac{13}{35} & & & \text{SYM.} \\ \dfrac{11l}{210} & \dfrac{l^2}{105} & & \\ \dfrac{9}{70} & \dfrac{13l}{420} & \dfrac{13}{35} & \\ -\dfrac{13l}{420} & -\dfrac{l^2}{140} & -\dfrac{11l}{210} & \dfrac{l^2}{105} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{\theta}_{yi} \\ \ddot{u}_j \\ \ddot{\theta}_{yj} \end{bmatrix} \cdots (2.1.15)
$$

ただし，EI_yは y 軸まわりの曲げ剛性である。

$z-y$ 面内の曲げ振動についても同様の関係が導かれる。

以上(1)，(2)，(3)で述べた縦振動，ねじり振動，曲げ振動の結果をまとめると，直棒要素両端における節点力と節点変位を結びつける式(2.1.4)のマトリックス$[K_e]$，$[M_e]$は式（2.1.16），式（2.1.17）のように表わされる。

$$
[K_e]=\begin{bmatrix}
\frac{12EI_y}{l^3} & & & & & & & & & & & \\
0 & \frac{12EI_x}{l^3} & & & & & & & & & \text{SYM.} & \\
0 & 0 & \frac{EA}{l} & & & & & & & & & \\
0 & -\frac{6EI_x}{l^2} & 0 & \frac{4EI_x}{l} & & & & & & & & \\
\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{l} & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_p}{l} & & & & & & \\
-\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & & & & & \\
0 & -\frac{12EI_x}{l^3} & 0 & \frac{6EI_x}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_x}{l^3} & & & & \\
0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & & & \\
0 & -\frac{6EI_x}{l^2} & 0 & \frac{2EI_x}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_x}{l^2} & 0 & \frac{4EI_x}{l} & & \\
\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{l} & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_p}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_p}{l}
\end{bmatrix}
\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (2.1.16)
$$

$$
[M_e]=\rho A l\begin{bmatrix}
\frac{13}{35} & & & & & & & & & & & \\
0 & \frac{13}{35} & & & & & & & & & \text{SYM.} & \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & & & & & & & & & \\
0 & -\frac{11l}{210} & 0 & \frac{l^2}{105} & & & & & & & & \\
\frac{11l}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{105} & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R^2}{3} & & & & & & \\
\frac{9}{70} & 0 & 0 & 0 & \frac{13l}{420} & 0 & \frac{13}{35} & & & & & \\
0 & \frac{9}{70} & 0 & -\frac{13l}{420} & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{35} & & & & \\
0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & & & \\
0 & \frac{13l}{420} & 0 & -\frac{l^2}{140} & 0 & 0 & 0 & \frac{11l}{210} & 0 & \frac{l^2}{105} & & \\
-\frac{13l}{420} & 0 & 0 & 0 & -\frac{l^2}{140} & 0 & -\frac{11l}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{105} & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R^2}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R^2}{3}
\end{bmatrix}
\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (2.1.17)
$$

1.3.2　$[K_e]$, $[M_e]$の局所座標系から全体座標系への変換

式（2.1.16）および式（2.1.17）は要素それぞれについて定められた局所座標系に対する節点変位と節点力の関係を示している。しかし配管系全体の力のつり合式を組み立てるためには，すべての要素に共通な座標系を定義してそれに関する力と変位の関係を導かねばならない。いま，全体の要素に共通な座標系を $x-y-z$ とし，要素個々について定められた座標系を $x'-y'-z'$ とする。以下この項ではダッシュをつけて局所座標系の量を表わす。ただし座標系のとりかたは計算の容易さを考慮してつぎのように約束する。

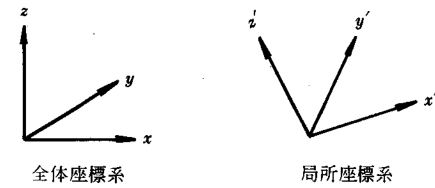


図 2.1.5　座標系

(1)　全体座標系，局所座標系ともに右手系とする。

(2)　局所座標系の z' 軸は要素の軸方向にとる。また，x' 軸は z 軸および z' 軸に垂直で，かつ $z-z'-x'$ 系が右手系を作るように定める。

このように座標系を定めると，節点変位，節点力を全体座標系から局所座標系へ変換するマトリックス$[L]$がつぎのように求められる。

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}'_i \\ \boldsymbol{x}'_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_i \\ \boldsymbol{x}_j \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}'_i \\ \boldsymbol{f}'_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_i \\ \boldsymbol{f}_j \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.1.18)$$

ただし

$$[L] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}, \qquad [\boldsymbol{\lambda}] = \begin{bmatrix} \lambda_{x'x} & \lambda_{x'y} & \lambda_{x'z} \\ \lambda_{y'x} & \lambda_{y'y} & \lambda_{y'z} \\ \lambda_{z'x} & \lambda_{z'y} & \lambda_{z'z} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.1.19)$$

ここで$[\boldsymbol{\lambda}]$は３×３のマトリックスであって，節点 i ，j の全体系に対する座標を（X_i, Y_i, Z_i），（X_j, Y_j, Z_j）とし

$$A = X_j - X_i \qquad R_1 = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$B = Y_j - Y_i \qquad R_2 = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$C = Z_j - Z_i \qquad R_3 = \sqrt{(A^2 + B^2)(A^2 + B^2 + C^2)}$$

とした場合，次式で表わされる成分をもつ。

$$\left.\begin{array}{lll} \lambda_{x'x} = -B/R_1 & \lambda_{x'y} = \ \ A/R_1 & \lambda_{x'z} = 0 \\ \lambda_{y'x} = -A\cdot C/R_3 & \lambda_{y'y} = -B\cdot C/R_3 & \lambda_{y'z} = R_1^2/R_3 \\ \lambda_{z'x} = \ \ A/R_2 & \lambda_{z'y} = \ \ B/R_2 & \lambda_{z'z} = C/R_2 \end{array}\right\} \cdots\cdots(2.1.20)$$

式（2.1.18）を式（2.1.4）′ に代入し，$[L]^{-1} = [L]^{\mathrm{T}}$ なることを考慮して整理すると式（2.1.21）が得られる。（式（2.1.4）′ における$\boldsymbol{x}_i$，$\boldsymbol{f}_i$などは局所座標系での状態量であり，式（2.1.18）における$\boldsymbol{x}_i'$，$\boldsymbol{f}_i'$などに対応する。）

$$\left.\begin{array}{l} \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_i \\ \boldsymbol{f}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} k'_{ii} & k'_{ij} \\ k'_{ji} & k'_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_i \\ \boldsymbol{x}_j \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_i \\ \boldsymbol{f}_j \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} m'_{ii} & m'_{ij} \\ m'_{ji} & m'_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}}_i \\ \ddot{\boldsymbol{x}}_j \end{bmatrix} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.1.21)$$

すなわち，局所座標系で作成された部分マトリックス$[k'_{ij}]$，$[m'_{ij}]$につぎの変換を行なえば全体座標系に対する部分マトリックスが求められる。

$$\left.\begin{array}{l} [k_{ij}] = [L]^{\mathrm{T}}[k'_{ij}]\,[L] \\ [m_{ij}] = [L]^{\mathrm{T}}[m'_{ij}][L] \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.1.22)$$

1.3.3　全体座標系マトリックス$[K]$，$[M]$の作成

式（2.1.16），式（2.1.17）および式（2.1.22）によって，直棒要素

についての全体座標系に関する節点変位と節点力の関係式が導かれる。これらの直棒要素が結合してできている配管系の剛性および質量マトリックスは，各節点での変位の連続条件，力のつり合い条件を考慮するとつぎのような手順で構成することができる。たとえば，図2.1.6のような門形配管系において節点を図のようにとり，要素(1)，(2)，(3)に対してそれぞれ部分剛性マトリックス$[k_{ij}]$，質量マトリックス$[m_{ij}]$が作られているとすると，系全体の力のつり合式はつぎのように構成される。

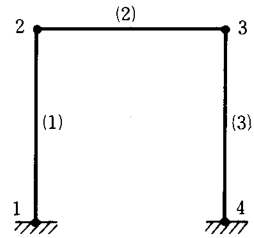


図2.1.6　門形配管系

弾性力に対して

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1 \\ \boldsymbol{f}_2 \\ \boldsymbol{f}_3 \\ \boldsymbol{f}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{11}^{(1)} & \boldsymbol{k}_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{k}_{21}^{(1)} & \boldsymbol{k}_{22}^{(1)}+\boldsymbol{k}_{22}^{(2)} & \boldsymbol{k}_{23}^{(2)} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{k}_{32}^{(2)} & \boldsymbol{k}_{33}^{(2)}+\boldsymbol{k}_{33}^{(3)} & \boldsymbol{k}_{34}^{(3)} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{k}_{43}^{(3)} & \boldsymbol{k}_{44}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \\ \boldsymbol{x}_4 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.1.23)$$

慣性力に対して

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1 \\ \boldsymbol{f}_2 \\ \boldsymbol{f}_3 \\ \boldsymbol{f}_4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_{11}^{(1)} & \boldsymbol{m}_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{m}_{21}^{(1)} & \boldsymbol{m}_{22}^{(1)}+\boldsymbol{m}_{22}^{(2)} & \boldsymbol{m}_{23}^{(2)} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{m}_{32}^{(2)} & \boldsymbol{m}_{33}^{(2)}+\boldsymbol{m}_{33}^{(3)} & \boldsymbol{m}_{34}^{(3)} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{m}_{43}^{(3)} & \boldsymbol{m}_{44}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}}_1 \\ \ddot{\boldsymbol{x}}_2 \\ \ddot{\boldsymbol{x}}_3 \\ \ddot{\boldsymbol{x}}_4 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2.1.24)$$

ここでマトリックス内右肩の添字は要素番号を表わしている。

このようにマトリックスの合成は単に全体系の対応する節点位置へ部分マトリックスの成分を加算してゆけばよい。

1.3.4　その他の要素に対する取扱い

いままでは直管部に相当する直棒要素についてのマトリックス$[K]$，

[M]の作成法を説明したが，実際の配管系では弁，フランジ部などの質量要素，サポート，ハンガなどのばね要素，インピーダンス要素，その他ベンド部，境界端末などの部分がある。インピーダンス要素については第2章で後述するとして，他の要素に対する扱いかたをつぎに説明する。

(1) 固定端

図2.1.6における節点1,4などは変位が生じないように拘束されており，固定の条件と考えられる。固定端はまたひじょうに固いばねが付加されていると見なしてもよく，計算処理上は固定端部節点の剛性マトリックス成分を10^6～10^{10}倍程度拡大しておけばよい。図2.1.6のように完全固定の場合は6方向変位すべてを拘束するが，単純支持，スライド支持など部分固定の場合は拘束された方向の成分についてのみ剛性マトリックス成分を大きくすればよい。

(2) 付加質量，付加ばね要素

図2.1.7に示すように節点に付加重量物や付加ばねが存在する場合には，それらの質量またはばね定数をそれぞれ質量マトリックス，剛性マトリックスの接続する節点の作用方向に加算する。

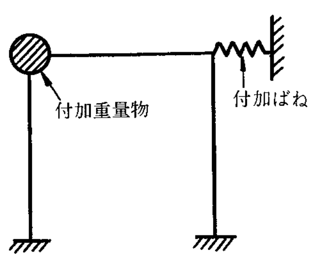


図2.1.7　付加質量，付加ばねをもつ系

(3) ベンド部

ベンド部に対しては曲棒要素の剛性マトリックス，質量マトリックスを作ればよいが，実用的には曲棒をいくつかの等価な直棒要素に

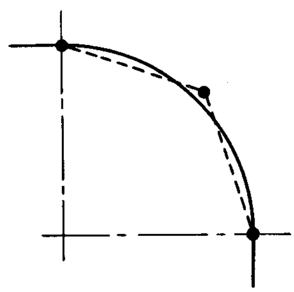


図2.1.8　ベンド部

置き換えて解析してもよい。すなわち図2.1.8に示すようにベンド部をさらに分割して直棒要素の結合で表現する。この場合，折線部と曲線部で長さが等しくなるように節点の位置を決定し，さらに面内曲げに対してはその断面のひしゃげ効果による剛性低下を考慮し，Kārmān のたわみ係数を用いて等価な剛性をもつ棒に置き換える。

(4) アングル材，チャンネル材

配管系のサポートやハンガにはアングル材やチャンネル材が使われる。簡単な構造のものについては材料力学公式により静的ばね定数を計算し，(2)で述べた付加ばね要素として扱ってもよい。しかしもっと複雑な構造になると直棒要素の結合として有限要素法を用いた解析を行なうことになるが，この場合直管部で示した解析に比べて，さらにつぎの注意が必要である。

図2.1.9に示すように断面の慣性主軸の方向をx''，y''，長手方向をz''軸とする局所座標系$x''-y''-z''$を定義し，これに対する部分要素マトリックス$[K_e]$，$[M_e]$を式(2.1.16)，式(2.1.17)により作成する。これを式(2.1.22)と同様の座標変換によって通常の局所座標系$x'-y'-z'$に対する$[K_e]$，$[M_e]$を作り，それから全体座標系へ変換する。つまり，アングルやチャンネル材の場合は通常の局所座標系と断面主軸の方向が異なるため，座標変換が一度多くなる。

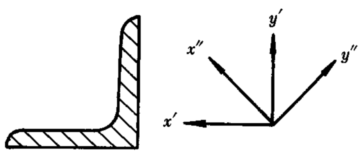


図 2.1.9 アングル材

なお，直棒要素に対するマトリックス$[K_e]$，$[M_e]$の導出にはSt. Venantのねじり理論が適用されているが，アングルやチャンネルなどの薄肉開断面材の場合には曲げとねじりが連成するため厳密には前述の方法が適用できない。しかし曲げねじり連成の影響が大きいのは部材の端部のみ

に局限されるので，細長い部材から構成される骨組構造物の全体的な変形には曲げねじりの連成効果は無視してもよいと考えられる。

1.4 固有値解析法

1.3で導いた配管系の剛性マトリックス［K］および質量マトリックス［M］を用いれば固有値方程式(2.1.3)が完成し，これを解けば固有振動数p，振動モード$\boldsymbol{N}$が求められる。固有値方程式の解法としては多くの方法が紹介されているが，それぞれ特長があり目的によって使い分けをするのがよい。配管系の振動解析では節点数および自由度がかなり大きくなるが，バンドマトリックスにおさまりやすい性質がある。また固有振動数も全部求める必要はなく，比較的限られた周波数範囲のもの，普通は低次の側から数個，せいぜい十個も得れば十分である。このように，大次元のバンドマトリックスで表わされる固有値方程式から，比較的限られた周波数範囲の固有振動数とモードをすみやかに算出するのに適した方法として，ここではつぎの三つの方法をとりあげ検討する。

1.4.1 べき乗法

べき乗法として一般に紹介されているのはつぎのようなものである。固有値方程式(2.1.3)を固有値問題の標準形式 $[H]\boldsymbol{Z}=\lambda\boldsymbol{Z}$ に変形するが，［H］は対称マトリックスであるほうが便利なので，それも満たすように変形する。すなわち剛性マトリックス［K］をCholeski[57]の方法によって次式のように下三角マトリックス［L］と上三角マトリックスに$[L]^{\mathrm{T}}$に分解する。

$$[K]=[L][L]^{\mathrm{T}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.1.25)$$

式（2.1.25）を式（2.1.3）に代入し整理すると

$$[L]^{-1}[M][[L]^{\mathrm{T}}]^{-1}[L]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}=\frac{1}{p^2}[L]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}$$

となる。いま

$$[H]=[L]^{-1}[M][[L]^{\mathrm{T}}]^{-1} \qquad \cdots\cdots (2.1.26)$$

$$\boldsymbol{Z}=[L]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N} \quad , \qquad \lambda=\frac{1}{p^2} \qquad \cdots\cdots (2.1.27)$$

と置けば上式はつぎのような標準形で表わされる。

$$[H]\boldsymbol{Z}=\lambda\boldsymbol{Z} \qquad \cdots\cdots (2.1.28)$$

すなわち$[K]$を三角分解して式（2.1.25）を満たす$[L]$を求め，式（2.1.26）によって対称マトリックス$[H]$を作る。標準的な固有値問題である式（2.1.28）を解けば固有値$\boldsymbol{\lambda}$および固有ベクトル$\boldsymbol{Z}$が求まるので，これを式（2.1.27）により変換すれば所要の固有振動数，振動モードが得られる。

べき乗法によって式（2.1.28）を解く場合，最初は任意の初期ベクトル$\boldsymbol{C}_0$を設定し，これに$[H]$を左から何回も乗じてゆく。任意のベクトル$\boldsymbol{C}_0$は固有ベクトル$\boldsymbol{Z}_j$（$j=1,2\cdots n$），の一次結合として次式

$$\boldsymbol{C}_0=\rho_1\boldsymbol{Z}_1+\rho_2\boldsymbol{Z}_2+\cdots\cdots+\rho_n\boldsymbol{Z}_n \qquad \cdots\cdots (2.1.29)$$

ただし

ρ_j＝係数，$\boldsymbol{Z}_j$＝固有ベクトル

のように表わされるから，両辺に左から$[H]$をi回乗じた場合，$\boldsymbol{Z}_j$は式（2.1.28）を満足することを考慮すると次式のようになる。

$$C_i=[H]^i C_0=\lambda_1^i\ \{\rho_1 Z_1+\rho_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^i Z_2+\cdots\cdots+\rho_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^i Z_n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.1.30)$$

$\lambda_1>\lambda_j$ ($j\geqq 2$) ならば，$i\to\infty$のとき $(\lambda_j/\lambda_1)^i\to 0$となることから，繰り返し演算を適当な回数だけ行なえば$C_i=[H]^i C_0$は最低次の固有ベクトルZ_1に収束することがわかる。固有値λは次式

$$\Lambda_i=\frac{C_i^{\mathrm{T}}[H]C_i}{C_i^{\mathrm{T}}C_i}=\frac{C_i^{\mathrm{T}}C_{i+1}}{C_i^{\mathrm{T}}C_i} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.1.31)$$

で表わされるRayleigh 商において，C_iが十分固有ベクトルに収束したときの値として求められる。

つぎに二次以上のk次（$k\geqq 2$）の固有ベクトルを求める場合を説明する。式（2.1.30）において，$j<k$であるすべてのjに対して$\rho_j=0$であればベクトルC_iはk次の固有ベクトルZ_kに収束し，式（2.1.31)もk次の固有値に収束する。したがってC_iの代りにk次よりも低次の成分を取り除いた次式

$$C_i'=C_i-\sum_{j=1}^{k-1}\rho_j Z_j \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.1.32)$$

を計算し(これをデフレーションと呼ぶ),このC_i'を用いて最低次を求めた組合と同様の操作を行なう。ただし式(2.1.32)においてZ_jはすでに求められているとし，ρ_jは直交条件を用いて導かれた次式で計算するものとする。

$$\rho_j=\frac{Z_j^{\mathrm{T}}C_i}{Z_j^{\mathrm{T}}Z_j} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.1.33)$$

実際の解析手順では一回一回の繰り返し過程において式（2.1.31）のRayleigh商を計算し，前回の値と比較して収束性を判定する。収束したと見なせた場合はこのときのΛ_i，C_iを固有値，固有ベクトルとする。

以上の手順をフローチャートに示したのが図2.1.10である。

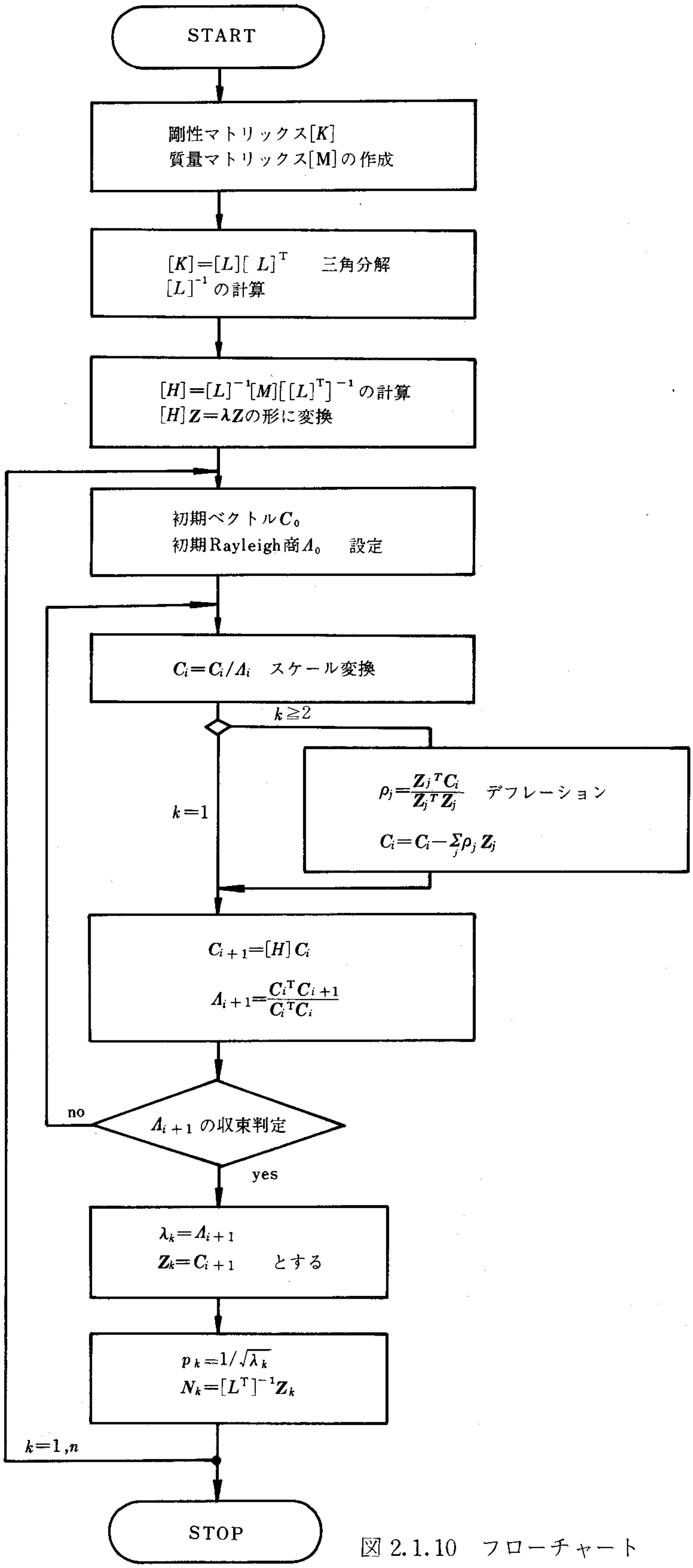


図 2.1.10　フローチャート

1.4.2 改良形べき乗法

一般によく知られているべき乗法は1.4.1で述べたようなものであるが，これにはつぎのような欠点がある。

(1) 配管系の場合は要素の配列が一次元的なため$[K]$，$[M]$はバンドマトリックスとなりやすいが，一般的なべき乗法では正方マトリックスのままで処理するので計算機内で多くの記憶容量が必要となり，大きな自由度をもつ系の解析が困難になる。

(2) 配管設計を行なう際には振動解析だけでなく，熱応力や自重による応力解析も同時に行ないたい場合が多いが，一般的なべき乗法では静的解析ができない。

(3) 式（2.1.25）で表わされるCholeski分解の過程において，条件の悪い系のマトリックス$[K]$に対しては，計算機での演算途中に平方根の中が負になる場合がある。

以上のような欠点を解消するために，バンドマトリックスの処理が可能な修正Choleski法[58]とStodola[24]の考えかたを応用し，べき乗法に物理的な意味を付加して改良した方法を紹介する。

固有値方程式(2.1.3)をつぎのように三段階に分けて考える。

$$\boldsymbol{A}=p^2\boldsymbol{N},\qquad \boldsymbol{F}=[M]\boldsymbol{A},\qquad [K]\boldsymbol{N}=\boldsymbol{F} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.1.34)$$

式（2.1.34）をべき乗法によって解くために，p，$\boldsymbol{N}$に代るものとしてΛ_i，$\boldsymbol{C}_i$を導入し次式のように書き直す。

$$\boldsymbol{A}_i=\Lambda_i^2\boldsymbol{C}_i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.1.35)$$

$$\boldsymbol{F}_i=[M]\boldsymbol{A}_i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.1.36)$$

$$[K]\boldsymbol{C}_{i+1}=\boldsymbol{F}_i \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.1.37)$$

式（2.1.35）は変位分布$\boldsymbol{C}_i$に対する加速度の分布$\boldsymbol{A}_i$を示す式であり，式(2.

1.36）はその加速度分布状態における慣性力の大きさを表わしている。式（2.1.37）はその慣性力から変形量を求める式である。

式（2.1.37）の演算は通常の静的解析で現われる一次方程式を解く問題であり，ここではバンドマトリックスが処理できる修正Choleski法[58]によってこれを解く。すなわちバンドマトリックスに作成された剛性マトリックス[K]を修正Choleski法によって次式のように三角分解する。

$$[K]=[L][D][L]^{\mathrm{T}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.1.38)$$

ここで，[L]は下三角マトリックス，[D]は対角マトリックスである。三角分解ができれば式（2.1.37）はつぎの二段階に分けて解くことができる。

$$\left.\begin{aligned}&[L]\boldsymbol{Z}_i=\boldsymbol{F}_i\\&[D][L]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{i+1}=\boldsymbol{Z}_i\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.1.39)$$

固有値解析に際しては，最初は任意の初期ベクトル$\boldsymbol{C}_i$,($i=0$)を設定し，また振動数Λ_i,($i=0$)も適当に仮定すれば，式（2.1.35）から加速度$\boldsymbol{A}_i$が，続いて式(3.1.36）から慣性力の分布$\boldsymbol{F}_i$が求まる。慣性力がわかると式(2.1.37)によって(実際は式(2.1.39)を計算する)それに対する変位状態$\boldsymbol{C}_{i+1}$が求められ，最初に設定した変位状態が修正される。$\boldsymbol{C}_{i+1}$と$\boldsymbol{A}_i$を用いれば，つぎに示す式（2.1.40）によって固有振動数の近似値Λ_iが求まり，式（2.1.35）によって新たな加速度分布$\boldsymbol{A}_{i+1}$が定まる。以下同様の手順を繰り返せば$i\rightarrow\infty$のとき$\boldsymbol{C}_i$，Λ_iは$\boldsymbol{N}$，pに収束する。

振動数Λ_iの計算はつぎのようにする。すなわちi番目の加速度分布から$i+1$番目の変位の導出は式（2.1.36），式（2.1.37）の過程を経て得られるが，一方変位は加速度を振動数の自乗で割ったものであるから

$$C_{i+1} = -\frac{A_i}{\Lambda_i^2}$$

である。上式の両辺にそれぞれの転置ベクトルを掛けて整理すると次式が得られる。

$$\Lambda_i = \left(\frac{A_i^{\mathrm{T}} A_i}{C_{i+1}^{\mathrm{T}} C_{i+1}}\right)^{1/4} \quad \cdots\cdots (2.1.40)$$

式（2.1.40）より繰り返しごとの振動数を計算し，収束状況を判定しながら十分な許容値に収束するまで繰り返せば最低次の固有振動数と振動モードが得られる。

二次以上の高次モードを求めたい場合は，式（2.1.32）と同様にベクトル成分に低次の固有振動モードの成分を含まないようにデフレーションを行なうが，式（2.1.28）の固有値問題の形と式（2.1.34）の場合とでは直交条件，および記号の意味がやや異なるので，つぎの式(2.1.41）を用いる。

$$\left.\begin{aligned} & A_i' = A_i - \sum_{j=1}^{k-1} \rho_j N_j \\ & \text{ただし} \\ & \rho_j = \frac{N_j^{\mathrm{T}} [M] A_i}{N_j^{\mathrm{T}} [M] N_j} = \frac{N_j^{\mathrm{T}} F_i}{m_j} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (2.1.41)$$

以上の改良形べき乗法について解析手順をまとめたものが図2.1.11である。

なお，図2.1.11を見てわかるように比較的時間のかかる式（2.1.38）の三角分解は一度だけでよく，繰り返し計算が必要な部分は式（2.1.39）で示される前進および後退代入の部分だけであるため，振動解析といっても静的解析に比べてそう多くの計算時間は必要としない。

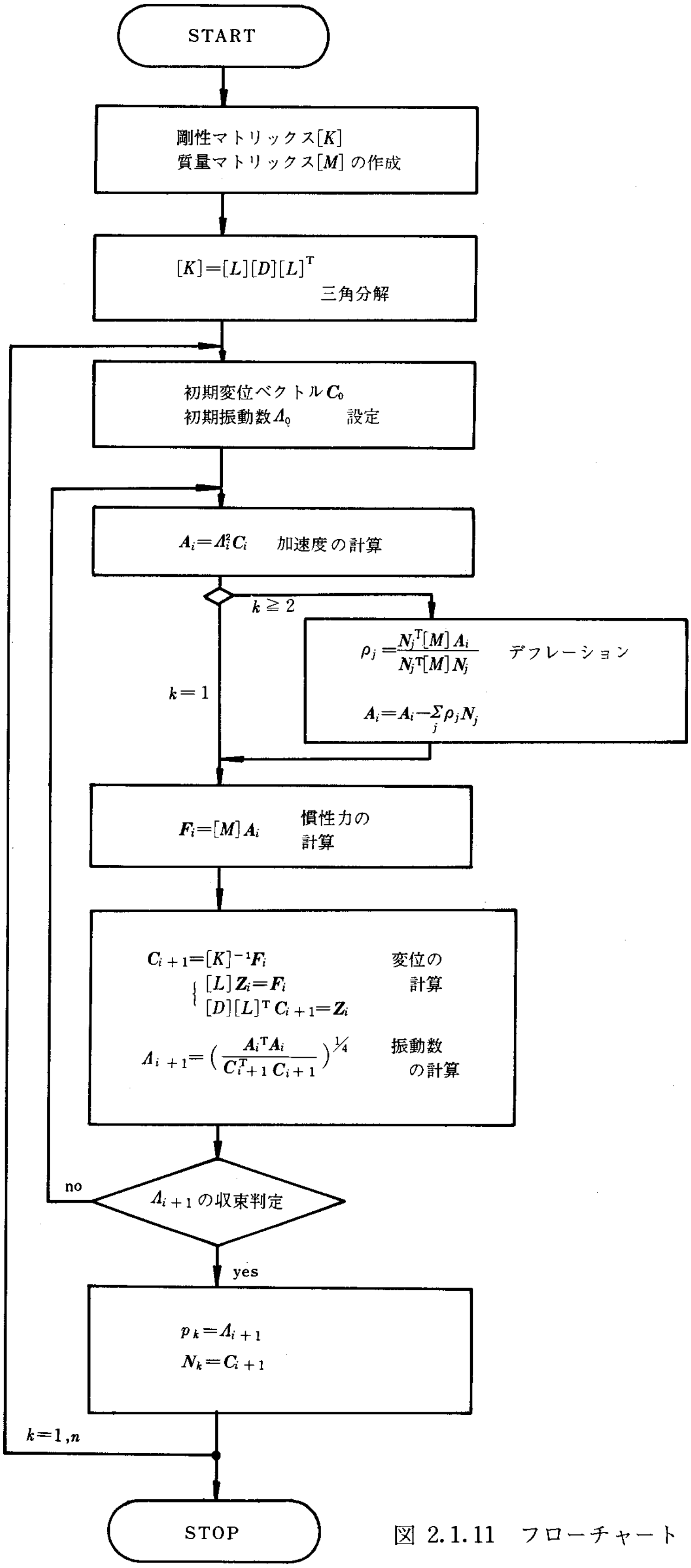


図 2.1.11　フローチャート

1.4.3　インピーダンス法

固有値方程式 (2.1.3) を次式のように変形する。

$$\left[[K]-p^2[M]\right]N=0 \quad \cdots\cdots (2.1.42)$$

ここで非減衰自由振動のつり合式 (2.1.42) ではなく，最終番目の方向に交番力 $F_n e^{i\omega t}$ を加えた場合の強制振動の式 (2.1.43) を考える。

$$\begin{bmatrix} \\ [K]-\omega^2[M] \\ \\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (2.1.43)$$

この $\left[[K]-\omega^2[M]\right]$ は変位インピーダンスまたはダイナミックスティフネスと呼ばれるものである。（以下では力と変位の比をインピーダンスと呼ぶ）

強制外力の周波数 ω を仮定し，Gaussの消去法[55] の前進部分を適用して下三角部分を零にしてゆくと

$$\begin{bmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & z_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (2.1.44)$$

のように変形でき，最終番目の成分のつり合式として次式が得られる。

$$z_{nn}=F_n/X_n \quad \cdots\cdots (2.1.45)$$

この z_{nn} は最終節点を最終番目方向に周波数 ω で加振したときの変位インピーダンスというべき値であるので，$z_{nn}=0$ ならば ω は固有振動数と

なる。したがってωを変化させて$z_{nn}=0$になる値を探索すればよいわけであり，その方法としてはたとえば直線内そうによるはさみうち法が採用できる。すなわち，探索の上，下限値ω_s，ω_Lときざみ$\triangle\omega$を与え，ωを$\triangle\omega$きざみで変化させてz_{nn}を計算し，零をよぎるまで進める。零をよぎる範囲が発見できると，その区間内で直線内そうにより$|z_{nn}|<\varepsilon$を満たすωを追跡する。ここでεは許容値である。こうしてある次数の固有振動数が求められると，それに対応する振動モードは$X_n=1$と置き，Gaussの消去法の後退部分を用いて計算することができる。同様の手順によって残りの区間について探索を行なうと$\omega_s<\omega<\omega_L$の範囲内に存在するすべての固有振動数，振動モードを求めることができる。この方法の特長はつぎのようである。

(1) 配管系の解析では[K]，[M]がバンドマトリックスとなるが，この解法ではバンドマトリックスの扱いが容易であり計算時間の短縮と計算機容量の節約がはかれる。

(2) z_{nn}は図2.1.12に示すように，その連続部分ではωに対して常に単調減少カーブとなるので根を見逃す危険性が少なく，また直線内そうにより収束の早い探索が可能である。

(3) インピーダンスマトリックスを有限要素法で簡単に作成でき，しかも伝達マトリックス法のもつ有利性，たとえば特定の周波数範囲内での固有振動数探索やインピーダンス要素の扱いができるなどの利点を兼ね備えている。

(4) 固有振動数の算出だけでなく，任意の周波数における機械インピーダンスや非減衰系の強制振動応答の解析にも利用できる。

図2.1.13にこのインピーダンス法による固有値解析手順のフローチャートを示す。

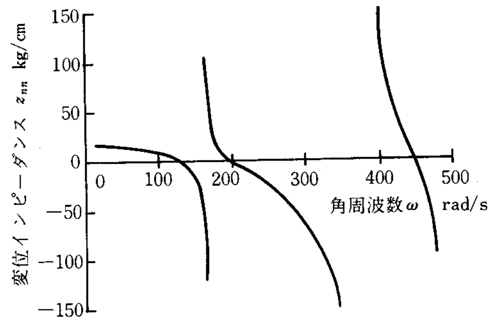


図 2.1.12 周波数ーインピーダンス曲線

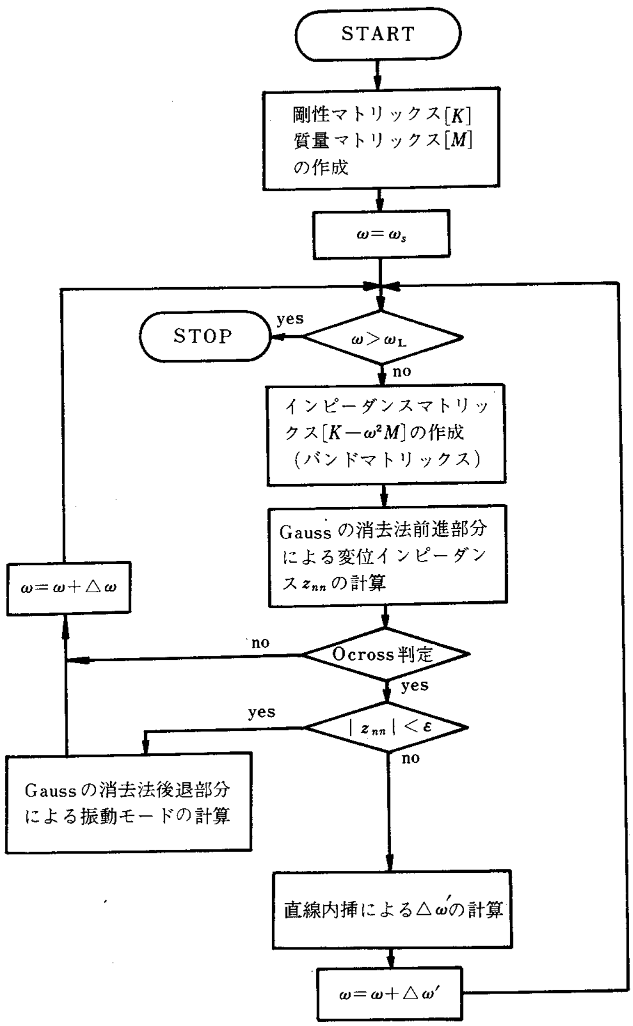


図 2.1.13 フローチャート

1.5 応答計算のための準備

固有値解析を行なうときに各次数の固有振動数p_jおよび振動モードN_jを求めるだけでなく，モーダル質量m_j，部材力モード S_j を求めておけば，モーダルアナリシスによって力加振を受ける場合の変位，速度，加速度，部材力などの振動応答が計算できる。またそれらに加えて，励振係数α_{jk}またはβ_{jk}，静たわみモードベクトルN_k^*，静部材力モードベクトルS_k^*を求めておけば，端末部に変位加振を受ける場合の振動応答が解析できる。これらの諸量の定義および詳しい内容については第3編の第1章および第2章において説明するが，固有値解析の際には固有振動数，振動モードだけでなく，これらの諸量も同時に得られるようプログラムを作っておくのが望ましい。1.4で紹介した固有値解析法では有限要素法を採用しているために，これらの量が容易に求められる。

1.6 解析精度の検討

1.6.1 モデル計算による精度の検討

有限要素法を用いて作成したマトリックス[K]，[M]，および固有値方程式（2.1.3)を解くための三種の固有値解法の精度を検討するために，理論値あるいは実測値の存在する図2.1.14～図2.1.19のようなモデルについて計算を行なった。図中に示す寸法の単位はmmであり，また黒丸，斜線部分はそれぞれ節点，固定境界を表わしている。材料定数は$E = 2.1\times10^6$ kg/cm^2, $\rho = 8.0\times10^{-6}$ kgs^2/cm^{4}である。表2.1.1～表2.1.6はこれらに対する固有振動数の計算結果を示したものであるが，三種の固有値解法を比較するため，IBM—370—158を用いた場合の計算実行時間(c. p. uタイム）も記載した。

(1) 単純支持はり

図2.1.14は両端単純支持された一様断面の平面はりモデルである。これを16等分して17節点で計算した。八次モードまで求めた固有振動数の値と計算に要した時間を表2.1.1に示す。

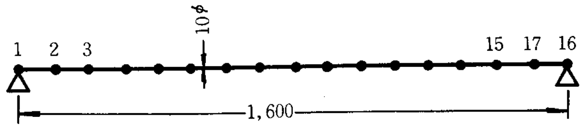


図 2.1.14 単純支持はり

表 2.1.1 単純支持はりに対する計算結果

	次数	べき乗法	改良形べき乗法	インピーダンス法	理論値
固有振動数 Hz	1	7.88	7.87	7.86	7.86
	2	31.46	31.45	31.45	31.44
	3	70.78	70.78	70.77	70.74
	4	125.85	125.85	125.84	125.76
	5	196.71	196.71	195.15	196.50
	6	283.45	283.44	283.44	282.96
	7	386.23	386.21	386.19	385.14
	8	505.26	505.24	505.21	503.04
計算時間 s		9.30	14.93	72.29	

(2) 門形配管系

図2.1.15は 9 本の直管から構成される門形配管系である。9 要素10節点で立体問題として解析した結果を表 2.1.2 に示す。表には川井[59]による実測値も載せている。

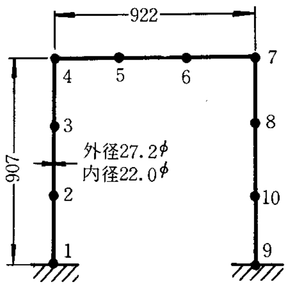


図 2.1.15 門形配管系

表 2.1.2 門形配管系の計算結果

		次数	べき乗法	改良形べき乗法	インピーダンス法	川井[59]の実測値
固有振動数 Hz	面内	1	27.6	27.6	27.6	26.3
		2	107	107	107	108
	面外	1	17.2	17.2	17.2	16.5
		2	36.5	36.5	36.5	34.3
計算時間 s			12.37	7.71	80.68	

(3) 二層立体骨組構造物

配管系ではないが配管系と同様の直棒要素から構成される図2.1.16のような二層立体骨組構造物について，12節点16要素で解析した。その結果を川井[59]による実測値とともに表2.1.3に示す。

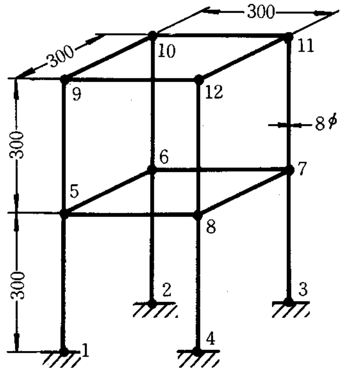


図 2.1.16　二層立体骨組構造物

表 2.1.3　二層立体骨組構造物の計算結果

	次数	べき乗法	改良形べき乗法	インピーダンス法	川井[59]の実測値
固有振動数 Hz	1	22.4	22.4	22.4	22.6
	2	22.4	22.4	22.4	22.6
	3	29.2	29.2	29.2	29.6
	4	72.4	72.4	72.4	73.3
	5	72.4	72.4	72.4	73.3
計算時間 s		22.68	30.25	213.8	

(4)　付加質量，付加ばねのある系

集中質量，ばねが付加された場合の例として図2.1.17に示すモデルを立体問題として解析した。その結果を表 2.1.4 に示す。ばねは一方向だけに付加されているので，面外振動は付加質量だけの場合，面内振動は付加質量，付加ばねともに存在する場合に相当する。表中の理論値はRayleighの方法によって求めた近似解である。

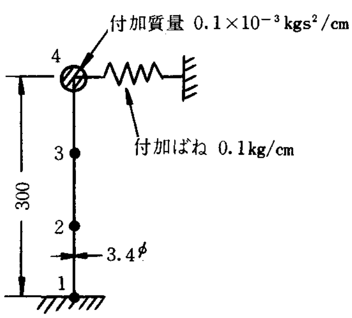


図 2.1.17　付加質量，付加ばねのある系

表 2.1.4　付加質量，付加ばねのある系の計算結果

		次数	べき乗法	改良形べき乗法	インピーダンス法	理論値
固有振動数 Hz	面内	1	7.81	7.81	7.81	7.81
		2	120.6	120.6	120.6	
		3	393.4	393.3	393.3	
	面外	1	6.08	6.08	6.08	6.07
		2	120.6	120.6	120.6	
		3	393.3	393.3	393.3	
計算時間 s			3.69	6.02	22.9	

(5)　アングル材

配管系の支持構造物として使用されるアングル材やチャンネル材はSt.Venantのねじり理論が成立しないため，厳密には式（2.1.16）が適用

できないが細長い要素については近似的に式（2.1.16）を使う。その場合の妥当性を確かめる意味で図2.1.18に示すアングル材構造物を考え，4節点3要素で立体問題として計算した。形状が平面でも断面の主軸方向の関係でモードが面内，面外に分離できないためこの場合には立体問題として扱わねばならない。計算結果と実測値の比較を表2.1.5に示す。

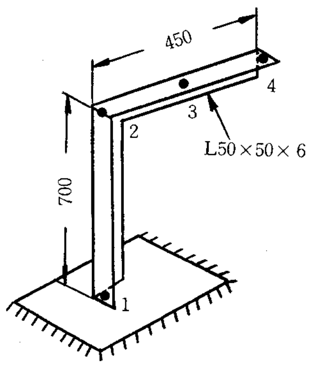


図 2.1.18　アングル材構造物

表 2.1.5　アングル材構造物の計算結果

	次数	べき乗法	改良形べき乗法	インピーダンス法	実測値
固有振動数 Hz	1	12.0	12.0	12.0	12.5
	2	31.7	31.7	31.7	33.5
	3	73.0	73.0	73.0	74.5
計算時間 s		1.67	2.17	2.86	

(6)　ベンド管

ベンド部を直棒要素の接続で近似する場合の妥当性検討のために，図2.1.19(a)に示すようなベンド管を同図(b)のように5節点4要素にモデル化して解析した。ただしベンド管の寸法は1.6.2で述べる要素(e)と同一である。計算結果と実測値の比較を表2.1.6に示す。

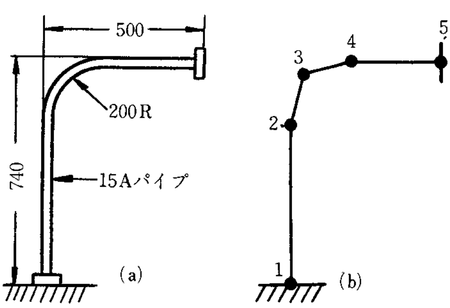


図 2.1.19　ベンド管

表 2.1.6　ベンド管の計算結果

		次数	べき乗法	改良形べき乗法	インピーダンス法	実測値
固有振動数 Hz	面内	1	11.1	11.0	11.0	11.7
		2	35.4	35.4	35.4	37.0
		3	199.7	199.7	199.7	198.0
	面外	1	10.3	10.3	10.3	11.0
		2	39.7	39.7	39.7	42.0
		3	182.7	182.7	182.7	180.0
計算時間 s			5.40	6.45	12.96	

以上(1)〜(6)の例で示した計算結果は理論値あるいは実測値とよく一致し，有限要素法による$[K]$，$[M]$の導出，およびベンド管やアングル材などに対する扱いかたが妥当であることが確かめられた。さらに，固有値方程式を解くための三種の固有値解法はいずれも同一の値を示し，精度的にも十分であることが示された。

三種の固有値解法による計算時間を比較すると，ほぼべき乗法，改良形べき乗法，インピーダンス法の順に時間を多く要している。しかし，これらはバンド幅のとりかたや，特にインピーダンス法の場合は探索周波数範囲やきざみの大きさによって大きく変わるので一概には計算時間を比較できない。解析能力としては，128Kバイトの記憶容量をもつ計算機で一次元的な配列の立体配管系を解析する場合，べき乗法では20節点，改良形べき乗法では1000節点，インピーダンス法では800節点程度の系が解析できる。一般的に言って固有振動数を低次から指定した数だけ算出するにはべき乗法，改良形べき乗法が便利であり，小規模な系にはべき乗法が，大規模な系には改良形べき乗法が適している。また限られた周波数範囲における固有振動数探索やインピーダンス要素のある場合はインピーダンス法が有効である。

このように三種の固有値解法はいずれも良好であり，中でも小規模な系に対してはべき乗法が最も使いやすいので，以下の解析においてはべき乗法を使用してゆく。

1.6.2　モデル配管系に対する解析値と実測値の比較

解析精度を検討するため，実際の配管系を模擬したモデル配管系を製作して実験を行なった。ここで用いた配管要素は15A　SGP－Eガス管および50A SGP－Eガス管の二種類で，それぞれに対して図2.1.20の(a)〜(g) に示す要素を用いた。

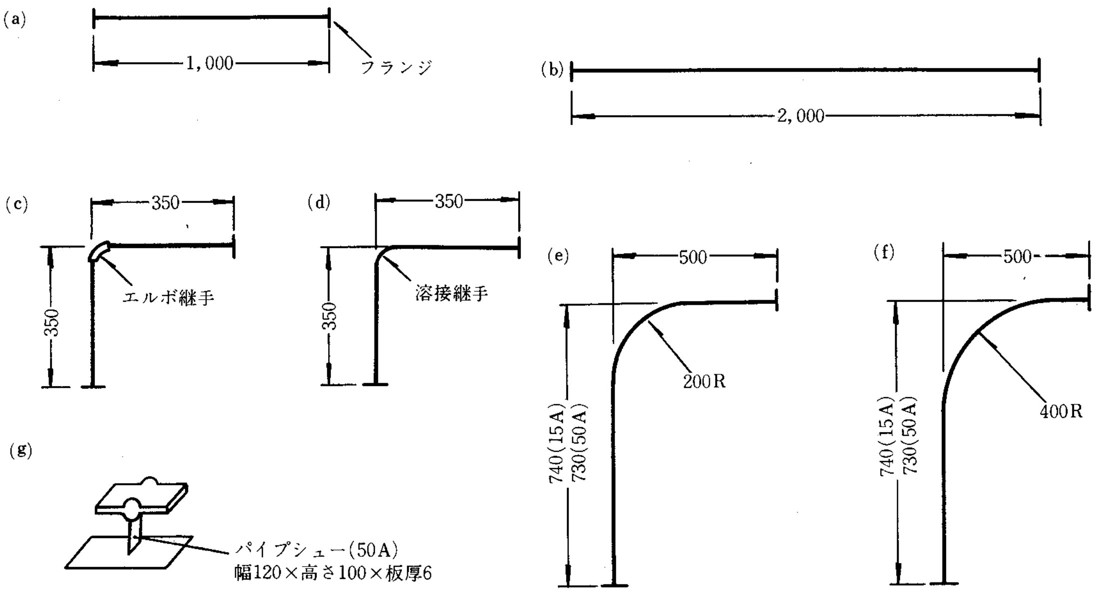


図 2.1.20　実験に用いた配管要素

なお，管要素の両端にはフランジを取り付けているが，管の寸法，フランジの質量などを表2.1.7に示す。

表 2.1.7　配管寸法およびフランジ質量

	寸　法　な　ど	15Aガス管	50Aガス管
管	外　径　d_o　cm	2.17	6.05
	内　径　d_i　cm	1.61	5.29
フランジ	質　量（締結ボルト分も含む）　kgs^2/cm	0.64×10^{-3}	0.41×10^{-2}
	軸まわり慣性モーメント（　〃　）$kgcms^2$	0.77×10^{-2}	0.71×10^{-1}

これらの配管要素を用いて図2.1.21～図2.1.24に示すような配管系を作り，固有振動数の実測値とべき乗法による解析値とを比較した。その結果を表2.1.8～表2.1.11に示す。図中の黒丸は分割節点を，（　）内の英字は要素の種類を表わしている。図のように境界条件，支持条件が比較的単純で弾性的挙動を示すような系については解析値と実験値は一部を除いて数%程度のかなりよい一致を示している。

べき乗法による固有値解析は一般に高次のモードになると精度が落ちると言われているが，ここに示した程度の配管系では十次近くまで支障なく解が求められている。自由度の少ない系を解析した場合には，高次モードの固有振動数の計算値が低次モードよりも小さく出る場合も時々あるが，配管系の場合には比較的自由度が大きくなるので十次程度でも全体の自由度からみれば比較的低次側のモードとなり，実用的には特に問題ないようである。

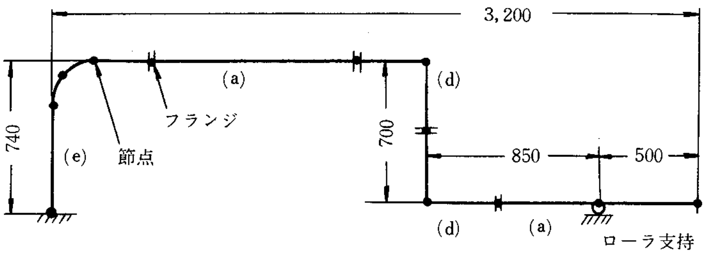


図 2.1.21　15A配管系(i)

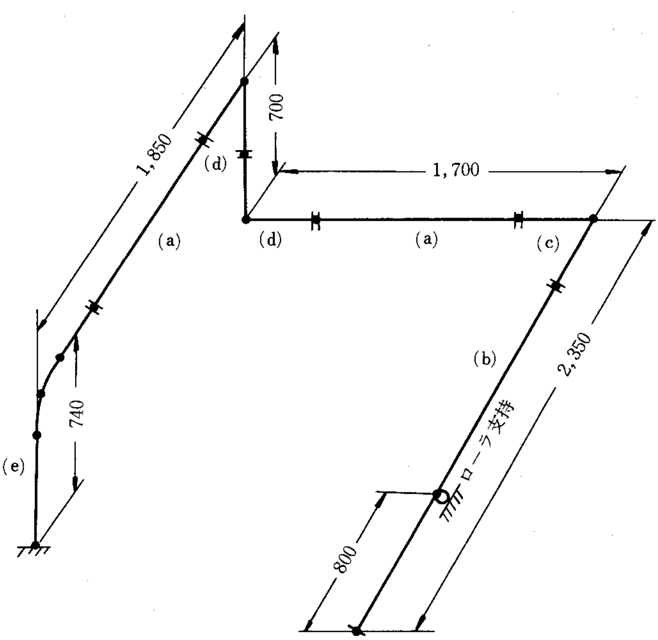


図 2.1.22　15A配管系(ii)

表 2.1.8 配管系(i)の固有振動数

次数	面内 計算値 Hz	面内 実測値 Hz	面内 誤差 %	面外 計算値 Hz	面外 実測値 Hz	面外 誤差 %
1	3.6	3.6	0	3.4	3.4	0
2	6.6	6.8	−3.0	6.2	6.5	−4.6
3	15.2	15.2	0	14.3	14.7	−2.7
4	22.9	23.5	−2.5	25.6	25.0	2.4
5	25.9	26.5	−2.3	37.6	37	1.6
6	51.7	51.0	1.4	59.6	59	1.0
7	65.2	66.0	−1.2	76.4	71	7.6
8	106.7	104	2.6	126.7	109	16

表 2.1.9 配管系(ii)の固有振動数

次数	計算値 Hz	実測値 Hz	誤差 %
1	0.74	0.73	1.4
2	1.78	1.75	1.7
3	2.66	2.6	2.3
4	7.1	7.0	1.4
5	8.8	8.6	2.3
6	9.4	10.0	−6.0
7	11.7	12.0	−2.5
8	14.5	14.6	2.1
9	21.6	21.5	0.5

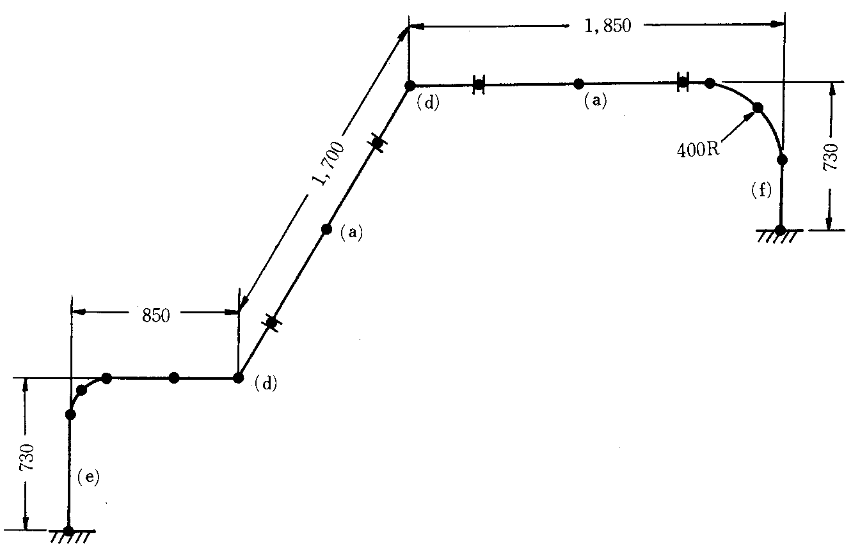


図 2.1.23 50A配管系(iii)

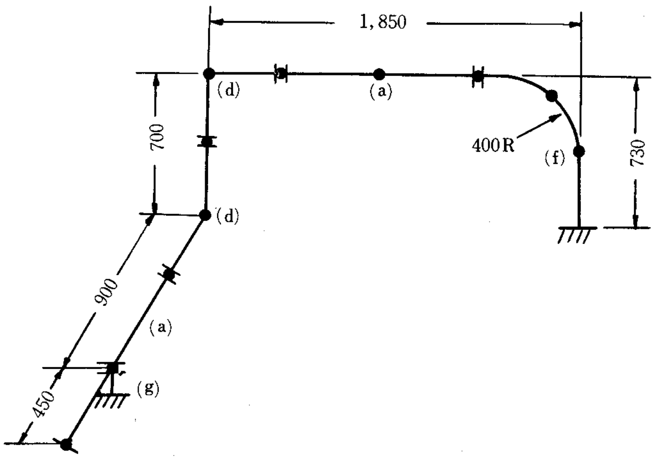


図 2.1.24　50A配管系(iv)

表 2.1.10　配管系(iii)の固有振動数

次数	計算値 Hz	実測値 Hz	誤差 %
1	8.7	8.8	−1.1
2	12.4	12.0	3.3
3	17.8	18.0	−1.1
4	29.8	29.0	2.8
5	36.1	35.7	1.1
6	46.1	44.8	2.9
7	66.9	65.2	2.6
8	70.9	70.0	1.3
9	92.9	88.5	5.0

表 2.1.11　配管系(iv)の固有振動数

次数	計算値 Hz	実測値 Hz	誤差 %
1	13.4	13.1	2.3
2	21.0	21.2	−0.9
3	28.0	26.0	7.7
4	46.4	42.3	9.7
5	52.7	50.0	5.4
6	81.7	79.0	3.4
7	93.2	92.0	1.3

1.6.3　直管部の要素分割に関する検討

有限要素法では変位関数を近似しているため，配管系の振動解析を行なう場合，支持点や断面急変部などの要素境界についてはもちろんのこと，一様断面をもつ直管部においても長い管については適当に要素分割を行ない，節点間隔を細かくとる必要がある。ここで分割の程度について検討する。

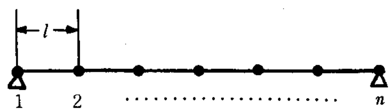


図 2.1.25　直棒要素

まず，図2.1.25に示すような両端固定棒の縦振動に関し，分割数（等分割）を種々変更して固有振動数を計算した。このときの理論解に対する精度を無次元要素長さで整理したのが図2.1.26における破線である。図には川井[60]による解も載せている。ただし分割長さを無次元化するときの波長 λ は次式で与えられるものである。

$$\lambda=\frac{2\pi}{p}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \cdots\cdots(2.1.46)$$

ねじり振動については，縦振動と同じく変位関数を一次式で近似しているため，縦振動に関する結果がそのまま適用できる。ただし波長 λ は次式によって与えられる。

$$\lambda=\frac{2\pi}{p}\sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad \cdots\cdots(2.1.47)$$

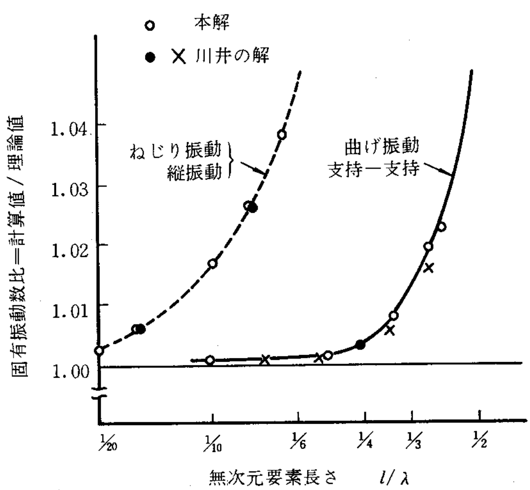


図 2.1.26　分割要素長さと精度の関係

曲げ振動については，図2.1.25に示すような両端支持ばりに対して同様の解析を行ない，その精度を無次元要素長さで整理した。その結果を川井[61]の解とともに図2.1.26に実線で示す。ここで波長 λ は次式で与えられるものである。

$$\lambda=\frac{2\pi}{\sqrt{p}}\left(\frac{EI}{\rho A}\right)^{1/4} \qquad \cdots\cdots (2.1.48)$$

曲げ振動の場合，両端支持以外は振動モードが正弦波と異なるので厳密には波長の考えが成り立たないが，両端固定はりおよび片持はりに対しても式（2.1.48）の λ を用いて要素長さを無次元化すると，そのときの精度は図2.1.26中の×印のように示される。

以上の結果から，固有振動数で１％の精度を確保するためには，直管部における最大要素長さを縦およびねじり振動については波長の約1/13，曲げ振動については波長の約1/3.5以下にとる必要があると言える。

最大要素長さを具体的に求めてみるとつぎのようになる。いま

$$E=2.1\times10^6\mathrm{kg/cm^2},\quad G=0.8\times10^6\mathrm{kg/cm^2},\quad \rho=8.0\times10^{-6}\mathrm{kg\,s^2/cm^4}$$

とし，管は薄肉として近似的に

$$I/A=d^2/8$$

とする。さらに固有角振動数 p の代りに $f=p/2\pi$ を用いると式（2.1.46）～式（2.1.48），および上述の結論より分割要素の最大長さ l_{max} が次式のように表わされる。

$$\left.\begin{aligned}
&\text{縦振動に対して} && l_{max}=\frac{1}{13f}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\fallingdotseq\frac{40000}{f}\\
&\text{ねじり振動に対して} && l_{max}=\frac{1}{13f}\sqrt{\frac{G}{\rho}}\fallingdotseq\frac{24000}{f}\\
&\text{曲げ振動に対して} && l_{max}=\frac{1}{3.5}\frac{2\pi}{\sqrt{2\pi f}}\left(\frac{EI}{\rho A}\right)^{1/4}\fallingdotseq300\sqrt{\frac{d}{f}}
\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (2.1.49)$$

これらの関係を図に表わしたのが図2.1.27である。この図からわかるように，実際に問題となる周波数領域では縦およびねじり振動に対する検討

は省略することができ，曲げ振動に対する考慮だけを払えばよい。すなわち配管系の解析に際しては，あらかじめ所要の固有振動数の上限値を設定し，式（2.1.49）により最大要素長さl_{max}を求め，要素分割長さlがl_{max}より小さくなるようにモデル化して計算する。こうして得られた固有振動数の計算値が設定値よりも低ければその精度は十分であると言える。

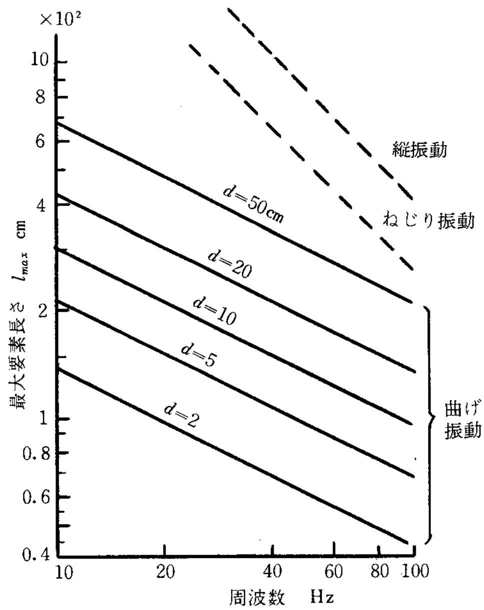


図 2.1.27　精度1％確保のための最大要素長さ

1.7　結　　言

配管系の振動特性を有限要素法によって解析する方法について検討した。まず直棒，付加ばね，付加質量などの要素で表わされる配管系について，剛性マトリックス[K]，質量マトリックス[M]の導出法を説明し，これから得られた固有値方程式を三種の固有値解法，すなわちべき乗法，改良形べき乗法およびインピーダンス法によって解く方法を示した。いくつかのモデルに対して解析した値を理論解や実測値と比較した結果，弾性的挙動を示し，かつ単純な境界条件で与えられるような系に対しては有限要素法によって振動特性が精度よく解析できることが確かめられた。さらにこの手法を運用する場合の注意点としてつぎのことが明らかになった。

(1)　直管部における要素分割は，最大要素長さを式（2.1.48）で表わされる曲げ波長の少なくとも$1/3.5$以下にとるのがよい。

(2)　ベンド部は折線化し，直管の接続で処理してもよい。ただしKármán

のたわみ係数を用いて曲げ剛性を修正するものとし，ベンド部と折線部の要素長さは等しくなるようにモデル化するのが望ましい。

(3) サポート，ハンガなどに用いられるアングル材やチャンネル材も直管部と同様の1節点6自由度の直棒要素で扱える。ただし断面主軸に方向性があるため座標変換を必要とする。

(4) フランジ，単純サポート，固定境界などは付加質量，付加ばねで扱える。

(5) 普通に用いられている一般的なべき乗法は，固有振動数を低次から指定した数だけ，しかも解を見落すことなく算出できること，計算時間が短いことなどの特長をもち，小規模な系に対しては最も適した方法と言える。

(6) 改良形べき乗法は，べき乗法のもつ長所をそのまま保有し，しかも大規模な配管系の解析が可能である。また静的解析とも併用できる。

(7) インピーダンス法は限られた周波数範囲に存在する固有振動数を探索するのに適しており，大規模な配管系の解析も可能である。また強制振動の解析やインピーダンス要素を含む系の解析にも利用することができる。

以上によって，複雑な配管系に対しても適切なモデル化を行なえば実用上十分な精度で振動特性が解析でき，耐振構造の検討および第3編で述べる応答解析の前処理過程として有効に適用できる見通しを得た。

第2章　機械インピーダンス合成法による配管系の固有値解析

2.1　緒　　言

プラントなどに設置される配管系には，要素の特性が寸法や形状ではなく固有振動数，モードなどの振動特性で与えられる場合がある。たとえば配管系に接続する機器も系に含めて解析する必要のある場合，機器類は前もって振動特性が算出されていることが多く，ましてその機器類が他のメーカで作られる場合は，寸法，形状の詳細は不明で振動特性のデータだけが与えられるのが普通である。また配管系に使用される支持構造物には，解析では扱いにくい複雑なものもある。このような要素についてはあらかじめ計算または実測によって求められた振動特性をインピーダンスの形で表現した，いわゆるインピーダンス要素として扱うのがよい。そして配管系にこのようなインピーダンス要素がある場合には，第1章で述べた有限要素法だけでは解析が不可能で，インピーダンス合成法を用いることが必要になる。

機械インピーダンス合成法は，実測または計算によって求められた個々の要素の振動特性を合成して，全体系の振動特性を解析する手法であり，近年の計測技術や計算技術の発達にともなってかなり実用化されてきている。[37][38][39] なかでもKlostermanら[39] はこの手法を用いて，自動車，電機製品など種々の機械構造物の振動解析を行なっている。

本章では配管系を対象とし，系にインピーダンス要素を含む場合にも有限要素法と統一的に解析できる方法として，あらかじめ求められた各要素の振動特性を Klosterman らとは異なった形で合成し，解析する一手法を提案する。すなわち要素のインピーダンスを

(1)　有限要素法を利用する方法

(2)　固有値解析して得られた振動特性を利用する方法

(3)　実測で得られた振動特性を利用する方法

のいずれかで作成し，これらを合成したインピーダンスマトリックスを第1章 1.4.3で述べたインピーダンス法を用いて解く方法を検討する。このうち(1)の有限要素法によるものは第1章 1.4.3で述べたものと全く同じであり，したがって本章で扱う内容は第1章のインピーダンス法による固有値解析法を基礎として，さらに上記(2), (3)のインピーダンス要素を処理できるように拡張したものとも言える。

さらに本章では結合したあとの全体系の振動応答をモーダルアナリシスを用いて計算できるように，モーダル質量，モーダル減衰率を各要素における値から合成する方法を提案する。このようなインピーダンス合成の手法を配管系に適用して計算を行ない，運動方程式から直接求めた解や実験によって得られた結果と比較し，その有効性，精度を検討する。

2.2 理　論

2.2.1 要素におけるインピーダンスの表現法

通常，機械インピーダンスは加振力と速度の比 F/V で表わされるが，本章では加振力と変位の比F/Xすなわち動剛性をインピーダンスとして使用する。要素のインピーダンスを求め記述する方法としてつぎの三通りの場合を考える。

(1)　有限要素法による方法

全体を構成する部分要素について有限要素法を適用すれば，第1章の**1.3**で述べたように剛性マトリックス $[K]$，質量マトリックス $[M]$が作成でき，角周波数ω におけるインピーダンスマトリックスが次式のように表わされる。

$$[Z]=[K]-\omega^2[M] \quad \cdots\cdots \quad (2.2.1)$$

(2) 固有値解析の結果からモーダルアナリシスにより求める方法

部分要素が正弦波加振を受ける場合の運動方程式は次式のように表わされる。

$$[M]\ddot{\boldsymbol{x}}+[C]\dot{\boldsymbol{x}}+[K]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{F}e^{i\omega t} \quad \cdots\cdots \quad (2.2.2)$$

この要素についてあらかじめ固有値解析を行ない，固有振動数p_j，振動モード$\boldsymbol{N}_j$，モーダル質量m_j，$(j=1,2\cdots\cdots n)$ を求めておけば，モーダルアナリシスによってインピーダンスを表現できる。すなわち式 (2.2.2) の解を $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}e^{i\omega t}$ と置き，振幅ベクトル$\boldsymbol{X}$を次式

$$\boldsymbol{X}=[N]\,\boldsymbol{\Phi}\equiv\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{N}_j\,\Phi_j \quad \cdots\cdots \quad (2.2.3)$$

のように展開して表わすと，第3編第1章で詳述するように，式(2.2.2)が各モードごとに独立した運動方程式に分離でき，それを解くと j 次のモーダル変位振幅Φ_jが次式のように求められる。

$$\Phi_j=\frac{\boldsymbol{N}_j^{T}\boldsymbol{F}}{m_j\,(p_j^2-\omega^2+i\,2h_j\,p_j\omega)} \quad \cdots\cdots \quad (2.2.4)$$

式 (2.2.4) を式 (2.2.3) に代入すれば正弦波強制振動における変位振幅の大きさ$\boldsymbol{X}$が求まる。したがって，部分要素系の p 点に加振力が作用したときの q 点におけるレセプタンスα_{pq}は次のように表わされる。

$$\alpha_{pq}=\frac{X_q}{F_p}=\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{pj}\;a_{qj}}{m_j\,(p_j^2-\omega^2+i\,2h_j\,p_j\,\omega)} \quad \cdots\cdots \quad (2.2.5)$$

減衰項を考慮しない場合は次式のようになる。

$$\alpha_{pq}=\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{pj}\;a_{qj}}{m_j\,(p_j^2-\omega^2)} \quad \cdots\cdots \quad (2.2.6)$$

ただし，a_{pj}，a_{qj} は p 点，q点における j 次の振動モード成分，すなわち N_j のp点，q点における成分を表わす。

部分系の固有値解析を行なえばa_{pj}，a_{qj}，m_j，p_j が求まり，h_j を適当な値に見積ると式（2.2.5），式（2.2.6）のα_{pq}は完全に定まる。式（2.2.5），式(2.2.6）で求めたレセプタンスは結合点が多自由度の場合はマトリックスを構成することになり，その逆マトリックスをとれば合成すべきインピーダンスマトリックス［Z］が求まる。すなわち

$$[Z]=[\alpha]^{-1} \quad \cdots\cdots (2.2.7)$$

このようにして扱われる要素を以下では計算インピーダンス要素と呼ぶ。

(3) 実測データから求める方法

伝達関数測定装置を用いれば要素に作用する力と変位の比が周波数応答の形で実測できる。したがって，将来全体系に組み立てられる際に結合点となる各成分についてレセプタンスα_{pq}を実測し，記憶しておけば式（2.2.7）によって結合点のインピーダンスマトリックス[Z]が得られる。しかしこの直接的な方法では，各レセプタンス成分に対して，対象としている周波数領域すべての周波数についてその値を記憶しておかねばならないこと，レセプタンスの中でも回転角に関する成分は測定が困難なことなどの難点がある。そのためここでは測定値をいったん振動特性値に変換する。すなわち実測によるレセプタンス，インピーダンスなどの周波数応答線図をデータ解析し，カーブフィットの手法によって固有振動数p_j，モーダル質量m_j，モーダル減衰率h_j を求め，さらに共振状態において振動モードを測定して加振点，測定点のモードa_{pj}，a_{qj} を求める。するとモーダルアナリシスによるレセプタンスの表現式(2.2.5）によってレセプタンスマトリックスを形成することができ，この逆マトリックスをとれば式(2.2.7）で示す

ようにインピーダンス合成に必要なマトリックス$[Z]$が得られる。

カーブフィットの手法によりモーダル質量，モーダル減衰率などを求める方法としてはLemonら[62]，岡村ら[63]などの方法が紹介されているが，本章でも同様な最小自乗法による測定データの解析法を用いる。

機械系の速度と力の比 $Y=V/F$ は位相を 90° ずらして表現すると，式(2.2.5) と同様の形式

$$\left.\begin{aligned} & Y=\sum_{j=1}^{n}\frac{K_j}{(p_j^2-\omega^2)/\omega+\mathrm{i}\,2h_j p_j} \\ & \text{ただし} \\ & K_j=\frac{a_{pj}\,a_{qj}}{m_j} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2.2.8)$$

で与えられる。伝達関数の測定がA/F，X/Fで行なわれたとしても次式

$$V/F=A/F\div\mathrm{i}\omega=X/F\times\mathrm{i}\omega \cdots\cdots (2.2.9)$$

の関係を用いて式(2.2.8) の形に変換できる。K_j，h_jを決定するために式(2.2.8)をつぎに示すように実数部Y_{real}と虚数部Y_{imag}に分解して表現する。

$$\left.\begin{aligned} Y_{real}&=\sum_{j=1}^{n}\frac{Q_j K_j}{Q_j^2+R_j^2} \\ Y_{imag}&=\sum_{j=1}^{n}\frac{-K_j R_j}{Q_j^2+R_j^2} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2.2.10)$$

ただし　$Q_j=(p_j^2-\omega^2)/\omega$

$R_j=2h_j p_j$

測定データから共振周波数を読み取れば，直ちに固有振動数p_jを決定することができる。つぎに式 (2.2.10) のK_j，R_jを決定するために，測定データから共振点を含む適当な個数の周波数を選びだし，各周波数における振動レベルと位相を読み取ってこれを式 (2.2.10) の Y_{real}と Y_{imag} に変換

する。まず最初は各モードの減衰率h_jを適当に仮定し，共振点以外の測定データを用いて最小自乗法により式（2.2.10）上側の式より未知数K_jを求める。このK_jと共振点の測定データを用いると式（2.2.10）下側の式の未数R_jを近似的に決定できる。このR_jを式（2.2.10）上側の式に代入して以下同様の計算を繰り返し収束するまで続ける。このようにして$K_j = a_{pj} a_{qj} / m_j$，$R_j = 2 h_j p_j$が決定されると，$p_j$はすでに求められているので，式（2.2.5）中の変数はすべて既知となり，あらゆる周波数ωに対してレセプタンスα_{pq}が完全に定まることになる。

以上の手順によってp点を加振したときのq点の測定データから式（2.2.5）で表わされるレセプタンスα_{pq}が求められる。回転角成分などのように加振できない成分のレセプタンスに対しても共振点でモードを測定しておけば式（2.2.5）を用いて求められる。すなわち回転角成分q方向のレセプタンスを求めるには，加振できるp方向の測定データからm_j，h_jを求めておき，p方向のモード値a_{pj}とq方向のモード値a_{qj}を式（2.2.5）に代入すればよい。また，減衰を考慮しない場合は式（2.2.6）を用いることになる。

このようにして扱われる要素を以下では実測インピーダンス要素と呼ぶ。

2.2.2　インピーダンスの合成とその解法

2.2.1で述べた方法を適用すれば部分要素の機械インピーダンスが作成でき，これを合成すると部分要素から組み立てられた全体系のインピーダンスが求められる。いま結合前の部分要素のインピーダンスマトリックスが次式

$$[Z]_A = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} \end{bmatrix}_A, \qquad [Z]_B = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{bmatrix}_B \cdots (2.2.11)$$

で表わされる構造物（A）と（B）の結合を考え，図 2.2.1に示すように結合後全体系(C)になるとする。結合は(A)の点1,3と(B)の点2,1がおのおの対応して行なわれるものとすると，インピーダンス合成はばねの並列結合と考えられるので，結合後の系(C)のインピーダンスマトリックス$[Z]_C$は結合点に対応するインピーダンス成分を加算すればよく，次式のように表わされる。

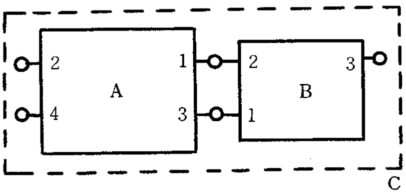


図 2.2.1　要素AとBの結合

$$[Z]_C=\begin{bmatrix} \boxed{z_{A11}+z_{B22}} & z_{A12} & \boxed{z_{A13}+z_{B21}} & z_{A14} & z_{B23} \\ z_{A21} & z_{A22} & z_{A23} & z_{A24} & 0 \\ \boxed{z_{A31}+z_{B12}} & z_{A32} & \boxed{z_{A33}+z_{B11}} & z_{A34} & z_{B13} \\ z_{A41} & z_{A42} & z_{A43} & z_{A44} & 0 \\ z_{B32} & 0 & z_{B31} & 0 & z_{B33} \end{bmatrix} \cdots (2.2.12)$$

このような考えかたは結合要素や結合点の自由度が増加した場合でもそのまま成立する。こうして合成された全体系のインピーダンスマトリックス$[Z]_C$を解けば，結合後の固有振動数や振動モードなどの振動特性が求められる。$[Z]_C$を解く方法として，非減衰系では第1章 1.4.3で述べたインピーダンス法による固有値解析の手法が適用できる。

2.2.3　結合後系のモーダル質量，モーダル減衰率

結合後の系に対する固有振動数および振動モードは，式 (2.2.12) を第1章 1.4.3で述べた固有値解法で解くことによって求めることができるが，結合後の系に対してモーダルアナリシスによる応答解析を行なおうとする場合はさらにモーダル質量，モーダル減衰率も求めておかねばならない。ここでは運動エネルギ，減衰エネルギのバランスから，各要素の結合前の

モーダル質量，モーダル減衰率などのデータを用いて結合後系のモーダル質量，モーダル減衰率を求める方法を示す。

(1) モーダル質量

図 2.2.1に示したのと同様な場合を考え，要素(A) と(B) が結合して系(C)になるとする。結合要素が増えても同様の処理が可能であるが，ここでは簡単のために2要素結合を例にとって説明する。結合後のある固有振動数Ωにおける結合点の変位ベクトル（結合後系の固有振動モード）を$\boldsymbol{C}$とし，モーダル変位振幅の大きさが単位量になったときの振動状態を考えると，結合点に作用する力$\boldsymbol{F}$は要素(A) 側については次式で与えられる。

$$\boldsymbol{F}=[Z]\,\boldsymbol{C} \quad \cdots\cdots (2.2.13)$$

ただし$[Z]$は要素(A) のインピーダンスマトリックスとする。ところで要素(A)は加振力$\boldsymbol{F}$により振動数Ωで強制振動をしていると考えられるので，要素(A)内での応答変位$\boldsymbol{X}$（要素(A)における結合後の振動モード）はp, m, $\boldsymbol{N}$を結合前の振動特性量とし，減衰を無視すれば式 (2.2.3)，式 (2.2.4) などと同様に次式で表わされる。

$$\boldsymbol{X}=[N]\,\boldsymbol{\Phi} \equiv \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{N}_j\,\Phi_j \quad \cdots\cdots (2.2.14)$$

ただし

$$\Phi_j=\frac{\boldsymbol{N}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}}{m_j\,(p_j^2-\Omega^2)} \quad \cdots\cdots (2.2.15)$$

式 (2.2.15) に式 (2.2.13) を代入し，Φ_jをまとめてベクトルの形で表わすと次式となる。

$$\boldsymbol{\Phi}=[G]\,[Z]\,\boldsymbol{C} \quad \cdots\cdots (2.2.16)$$

ただし

$$[G]=\begin{bmatrix} \dfrac{\boldsymbol{N}_1^{\mathrm{T}}}{m_1(p_1^2-\Omega^2)} \\ \vdots \\ \dfrac{\boldsymbol{N}_n^{\mathrm{T}}}{m_n(p_n^2-\Omega^2)} \end{bmatrix} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2.2.17)$$

要素(A)内での運動エネルギT_Aは，$[M]$ を要素(A)の質量マトリックスとし，$m_j=\boldsymbol{N}_j^{\mathrm{T}}[M]\boldsymbol{N}_j$ であることを考慮すれば式（2.2.14）より次式のように表わされる。

$$T_A=\frac{1}{2}\Omega^2\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}[M]\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}\Omega^2\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}[N]^{\mathrm{T}}[M][N]\boldsymbol{\Phi}$$

$$=\frac{1}{2}\Omega^2\sum_{j=1}^{n}m_j\,\Phi_j^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2.2.18)$$

すなわち式（2.2.15）よりΦ_jが計算されれば，T_Aは式（2.2.18）から求められる。式（2.2.18）は要素(B)について同様に適用することができ，結合後の系全体としての運動エネルギT_Cは

$$T_C=T_A+T_B \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2.2.19)$$

のように各要素のもつエネルギの和として表わされる。一方結合後系のモーダル質量をm_Cとすると

$$T_C=\frac{1}{2}m_C\Omega^2=T_A+T_B$$

となり，これよりm_Cがつぎのように求められる。

$$m_C=\frac{2(T_A+T_B)}{\Omega^2}=\Big(\sum_{j=1}^{n}m_j\,\Phi_j^2\Big)_A+\Big(\sum_{j=1}^{n}m_j\,\Phi_j^2\Big)_B \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2.2.20)$$

(2)　モーダル減衰率

モーダル減衰率については，各要素において消散されるエネルギの和が系全体として消散されるエネルギに等しいとする考えかたを用いる。結合後，固有振動数Ωで正弦波加振される場合を考えると，減衰力と変位は90°位相がずれるから1サイクル中に要素(A)において消散されるエネルギ$\triangle W_A$は

$$\triangle W_A=\pi\Omega \boldsymbol{X}^T[C]\boldsymbol{X}=\pi\Omega\boldsymbol{\Phi}^T[N]^T[C][N]\boldsymbol{\Phi}$$
$$=\pi\Omega\sum_{j=1}^{n}2h_j p_j m_j \Phi_j^2 \quad \cdots\cdots (2.2.21)$$

要素(B)についても同様に扱うことができ，系全体として消散されるエネルギ$\triangle W_C$は次式のようになる。

$$\triangle W_C=\triangle W_A+\triangle W_B \quad \cdots\cdots (2.2.22)$$

ゆえに，結合後系のモーダル減衰率h_Cは

$$h_C=\frac{1}{4\pi}\times\frac{1\text{サイクル当りに消散されるエネルギ}}{\text{最大運動エネルギ}}=\frac{\triangle W_A+\triangle W_B}{4\pi(T_A+T_B)}$$
$$=\frac{(\sum_{j=1}^{n}\Omega h_j p_j m_j \Phi_j^2)_A+(\sum_{j=1}^{n}\Omega h_j p_j m_j \Phi_j^2)_B}{\Omega^2[(\sum_{j=1}^{n}m_j\Phi_j^2)_A+(\sum_{j=1}^{n}m_j\Phi_j^2)_B]} \quad \cdots\cdots (2.2.23)$$

したがってインピーダンス合成の際各要素について $m_j\Phi_j^2$ を求めておけば，式（2.2.20）および式（2.2.23）によって結合後のある次数の固有振動数Ωにおけるモーダル質量，モーダル減衰率を求めることができる。他のモードについても同様に計算できる。なお，減衰がヒステリシス減衰である場合は式（2.2.23）の分子において，Ωh_jの代りに$p_j h_j$を使用すればよい。

2.3 解析と実験

以上述べたインピーダンス合成による固有値解析法の精度を検討するため，モデル配管系について数値計算と実験を行ない，その結果を比較する。

2.3.1　計算方法

ここで用いた解析プログラムは第1章1.4.3で述べた有限要素法による固有値解析プログラムにインピーダンス合成の部分をサブプログラムとして組み込んだものである。図 2.2.2に計算のフローチャートを示す。インピーダンス合成の例として配管系にインピーダンス要素（多くの場合配管

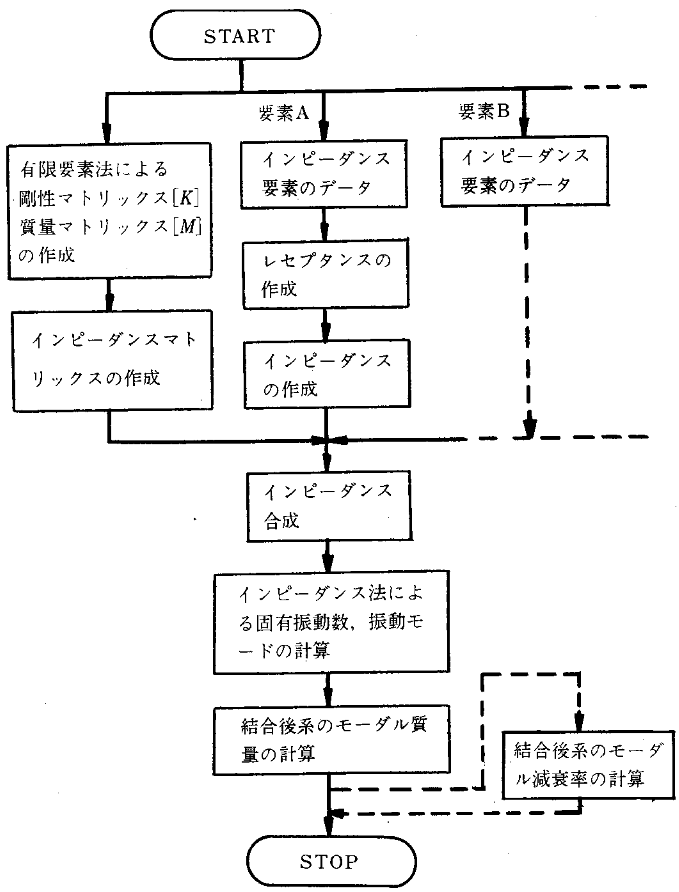


図 2.2.2　フローチャート

系が接続する機器類や支持構造物であるが配管系の一部であってもよい）が結合される場合を考える。

まず，配管系については有限要素法によって剛性マトリックス[K]，質量マトリックス[M] を作り，2.2.1 (1)で述べた方法でインピーダンスマトリ

ックス[Z] を作る。インピーダンス要素については，あらかじめ固有値解析によって求めた，あるいは実測のA/Fの周波数応答曲線からデータ解析によって得られた固有振動数，モーダル質量などを適当な次数だけ考慮し，式(2.2.6)を用いてレセプタンスマトリックスを作る。そして，その逆マトリックスをとることによってインピーダンスマトリックスを求める。個々のインピーダンスマトリックスを2.2.2で示した方法で合成して固有値解析を行ない，結合後の固有振動数，振動モード，モーダル質量を求める。モーダル減衰率については固有値解析後，別に計算を行なう。インピーダンス要素どうしで合成する場合も同様であり，単に有限要素法の部分を省略するだけでよい。

インピーダンス合成法による固有振動数の結果を比較するため，有限要素法で作成した固有値方程式をべき乗法によっても直接解析する。また結合後系に対する応答計算の比較のために，式(2.2.2)で表わされる全体系の運動方程式において減衰項を省略したものをGauss の消去法によって解き，直接解としてA/Fの形で表示する。

2.3.2 実験方法

数種類の配管系モデルに対し，図 2.2.3に示すような実験装置を用いて固有振動数や振動応答を求め解析値と比較する。またインピーダンス

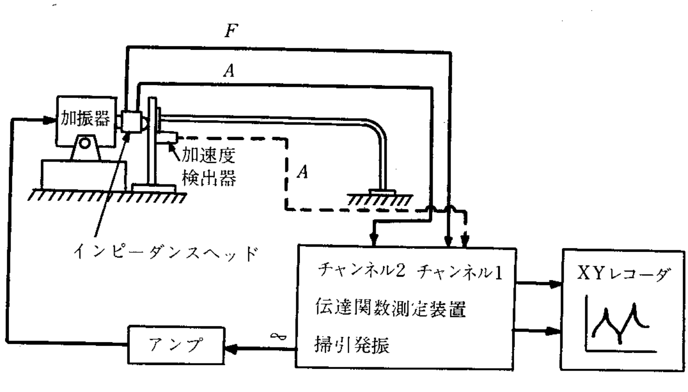


図 2.2.3 実験装置

要素の特性を，2.2.1(3)で述べたように実測値から求めるための手段とし

ても図 2.2.3の装置を利用する。

実験装置は動電形加振器，アンプ，伝達関数測定装置（T.F.A)，XYレコーダ，インピーダンスヘッド，加速度検出器から構成されており，T.F.Aからの正弦波信号がアンプを通して加振器を駆動させる。適当な範囲で加振周波数を掃引し，加振力*F*および加速度*A*をインピーダンスヘッドで検出してT.F.Aのチャンネル1および2の入力とする。T.F.Aにおいて*A*/*F*およびその位相を演算し，XYレコーダに*A*/*F*の周波数応答として記録する。*A*/*F*の周波数応答線図においてピークを示す周波数が固有振動数であり，T.F.Aのディジタル表示からその振動数を読み取る。共振点におけるモードの測定には，インピーダンスヘッドの加速度検出器を基準にして別の加速度検出器による加速度をチャンネル1に入れ，その相対的な大きさと位相を読み取る。以上で得られた*A*/*F*の周波数応答から，2.2.1(3)で示したデータ解析法を用いてモーダル質量，モーダル減衰率の値を求め，測定した固有振動数，振動モードとともに，インピーダンス合成のデータとする。

なお，実験に用いた配管要素は第1章 1.6.2で示したものと同一であり，伝達関数測定装置はIMV社製62MC，加振器はIMV社製VS3201を使用した。（この計測器は第3編で述べる応答実験にも使用する。）

2.4 解析値と実測値との比較検討

解析手法の妥当性を確かめるため，以下に示すいくつかのテストモデルについてインピーダンス合成を行ない，直接解法や実験による結果と比較する。

(1) 片持はりの結合

インピーダンス合成法による固有振動数の精度を調べるため，図 2.2.4

～図 2.2.6に示す比較的単純な片持はりの2自由度結合（z, θ_y）すなわち剛結合をとりあげ，はり要素（2.2.1(1)の方法）および計算インピーダンス要素(2.2.1(2)の方法）を用いて曲げ振動数を計算した。このインピーダンス要素は結合される前にあらかじめ固有値解析を行ないデータを準備した。表 2.2.1～表 2.2.3に示している理論値ははり理論を用いて計算した値である。図 2.2.4におけるはり要素とインピーダンス要素の直列結合の場合，インピーダンス合成による計算値は理論値と比較して高めに得られているが，これはインピーダンス要素を作成する際，もとのはり要素としての三次成分までしか考慮しておらず，インピーダンス要素自体の自由度を拘束したことに相当し，結合後系の振動モードを十分に表現できないためである。図 2.2.5の並列結合をした場合は直列結合と同じ三次までしか考慮していないが，結合後も結合前と同じ固有振動数をもち，その振動数の付近ではインピーダンス要素で連続体であるはりとしての動的挙動が十分表わされているため，計算値と理論値はほぼ一致している。図 2.2.6ははり要素もインピー

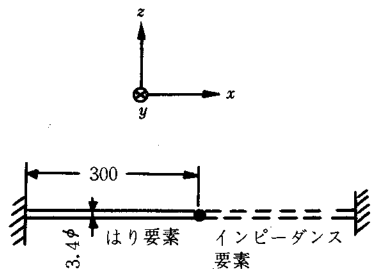


図 2.2.4 直列結合

表 2.2.1 直列結合後の固有振動数

rad/s

次数	計算値	理論値
1	286.0	270.4
3	1576.1	1460.0

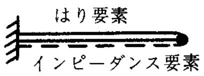


図 2.2.5 並列結合

表 2.2.2 並列結合後の固有振動数

rad/s

次数	計算値	理論値
1	170.2	170.1
2	1072.6	1070.0

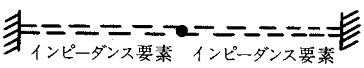


図 2.2.6 直列結合

表 2.2.3 直列結合後の固有振動数

rad/s

次数	計算値	理論値
1	306.9	270.4
3	1838.0	1460.0

ダンス要素に置き換えた場合を示しており，図 2.2.4の場合と比較して計算値はさらに高めに得られている。これはインピーダンス要素どうしを結合しているため図 2.2.4の場合よりさらに自由度を拘束していることになるからである。したがって図 2.2.4，図 2.2.6の直列結合の場合もインピーダンス要素において結合後のモードを十分表現できるだけの結合前のモード数を考慮すれば，より良好な精度で固有振動数を計算できると考えられる。なお，表 2.2.1，表 2.2.3において二次の値を示していないのは同一なはりを対称に結合した場合，結合後の二次モードの節が加振点と一致し，二次の値が得られないためである。

(2) 一層立体骨組構造物

配管系ではないが，一つの結合点における自由度が6個の場合の立体骨組構造物（有限要素法で扱う）と計算インピーダンスとの合成を行なう。図 2.2.7 (a)は片持はりであるインピーダンス要素が1個の場合，(b)はインピーダンス要素が2個の場合の結合を示しており，固有振動数は表 2.2.4に比較しているように全体系を有限要素法で求めた直接解および川井による実測値[59]とも全般的によく一致している。これはインピーダンス要素において片持はりとしての四次までを考慮しており，結合後系

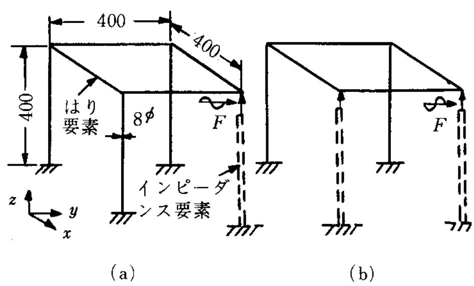


図 2.2.7 一層立体骨組構造物

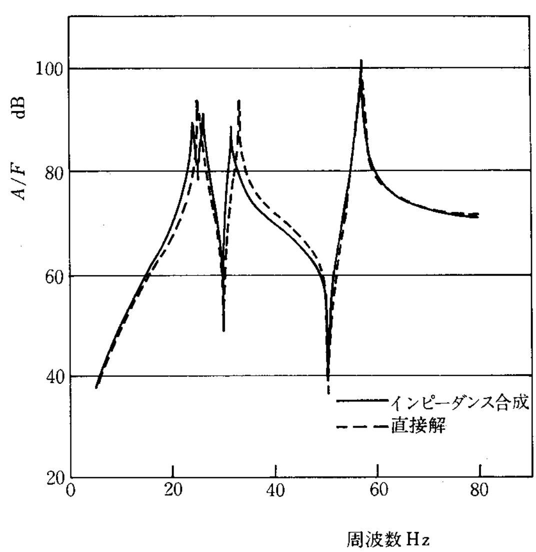


図 2.2.8 結合後系のA/F応答曲線

の三次までの振動数であれば振動特性を十分に表わしているためである。一次振動数に関して(a),(b)のインピーダンス合成による値が二つ得られているが，これは図 2.2.7の構造は一次が重根であり，加振方向に一致した主方向（y 方向）成分の一つだけが得られるはずであるが，インピーダンス要素を結合したことにより系の対称性が少しくずれ，接近した根が二つ出たものである。結合後のモーダル質量の値も表 2.2.4に示している。モーダル質量はモードの現われかた，および規準化のしかたによって値が変わるので，この例のように対称性がくずれた結果 x 方向にも成分が出ているモードと，純粋に y 方向だけに現われる振動モードとではモーダル質量の比較はできない。そこでモーダル質量の妥当性を検討するために，一例として(a)の結果を用いてモーダルアナリシスにより A/F の周波数応答を計算した場合を実線で，直接解による A/F 応答を破線で図 2.2.8に示し比較した。応答は図 2.2.7に示す加振点について計算しているが，減衰を考慮せずに応答を求めており，共振点では無限大に反共振点では零になるので適当なレベルで打ち切って表示している。また 0dBはkg, cm, s 系での単位量である。図 2.2.8での，インピーダンス合成(a)による結合後の応答と直接解による応答において，反共振点の位置はほとんど同一であり，また共振点以外の途中の周波数領域でも両者による応答の差は小さい。モーダル質量の影響は共振点以外の振動応答に大きく現われるものであり，インピーダンス合成により求められたモーダル質量は妥当なものであると言える。

表 2.2.4　結合後系の固有振動数，モーダル質量

次数	インピーダンス合成 (a)		インピーダンス合成 (b)		有限要素法による直接解		実測値[59]
	固有振動数 Hz	モーダル質量 kgs²/cm	固有振動数 Hz	モーダル質量 kgs²/cm	固有振動数 Hz	モーダル質量 kgs²/cm	固有振動数 Hz
1	24.5	0.116×10^{-2}	24.8	0.103×10^{-2}	25.7	0.846×10^{-3}	25.4
	26.2	0.165×10^{-2}	26.6	0.122×10^{-2}			
2	31.6	0.963×10^{-3}	31.9	0.919×10^{-3}	32.9	0.128×10^{-2}	32.6
3	56.7	0.138×10^{-2}	55.9	0.132×10^{-2}	56.6	0.137×10^{-2}	56.8

(3)　二層立体骨組構造物

これも配管系ではないが，結合点が4箇所，結合自由度が24個ある骨組構造物の合成の例を図 2.2.9に示す。図に示すように上層部は有限要素で下層部はインピーダンス要素として扱う。ここでは図 2.2.7に示したものと相似な一層立体構造物を計算インピーダンス要素とし，結合前の三次（約100Hz）までを考慮している。表 2.2.5に合成後の固有振動数，モーダル質量を有限要素法による直接解，川井[59]による実験値とともに載せ，比較した。固有振動数に関しては一，二，四次の値はよく一致している。三，五次はやや高めに得られているが，インピーダンス要素の考慮モード数が結合前の三次までであり，結合後の振動数が100Hz近くになると動的挙動を十分に表わすことができないためである。四次のほうが三次より精度がよいのは，結合前のインピーダンス要素のモードが結合後の三次モードより四次モードのほうを

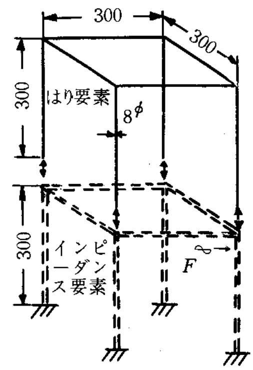


図 2.2.9　二層立体骨組構造物

表 2.2.5　結合後系の固有振動数，モーダル質量

次数	インピーダンス合成		有限要素法による直接解		実測値[59]
	固有振動数 Hz	モーダル質量 kgs²/cm	固有振動数 Hz	モーダル質量 kgs²/cm	固有振動数 Hz
1	22.9	0.985×10^{-3}	22.4	0.948×10^{-3}	22.6
2	29.8	0.159×10^{-2}	29.2	0.156×10^{-2}	29.6
3	79.7	0.110×10^{-2}	72.4	0.114×10^{-2}	73.3
4	80.4	0.163×10^{-2}	80.3	0.221×10^{-2}	81.6
5	97.0	0.200×10^{-2}	89.5	0.179×10^{-2}	90.8

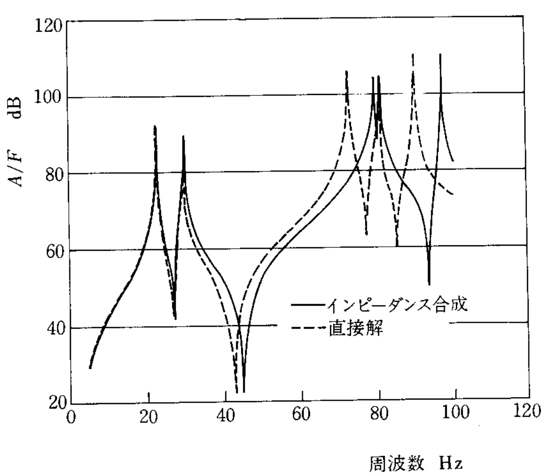


図 2.2.10　結合後系のA/F応答曲線

表現しやすくなっているためであると思われる。モーダル質量に関しては，三次までは直接解とよく一致している。**2.4** (2)で示したと同じく，表 2.2.5の結果を用いて応答解析を行ない，直接解によるA/Fの周波数応答と比較したのが図 2.2.10である。図において三次以上の周波数領域では応答曲線に差が出てきているが，インピーダンス要素を作成する際の考慮モード数が少ないためやむを得ないものと思われる。一次および二次付近においては反共振点も一致し，応答レベルもあまり差がなく良好な結果が得られている。

(4) 板と立体配管系

配管系は有限要素法で，板は計算インピーダンス要素として合成した場合を図 2.2.11に示す。板部はねじり剛性に薄肉開断面の式を用いる直棒要素に近似し，有限要素法により固有値解析した。その結果を曲げ成分については三次まで，ねじり成分については二次までを考慮してインピーダンス要素としている。配管系のフランジ部の質量および(b)におけるパイプクランプシューはそれぞれ付加質量，付加ばねの形で考慮した。表 2.2.6に(a)，(b)の場合のインピーダンス合成による固有振動数の計算値と実測値を示す。

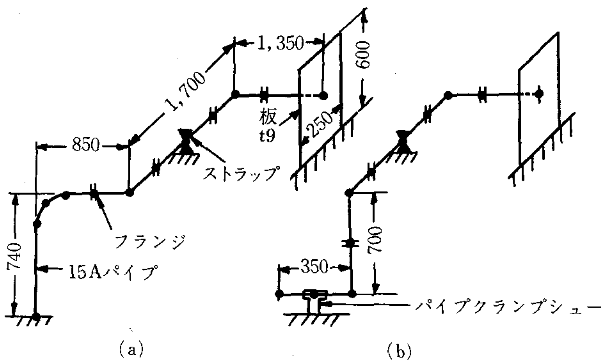


図 2.2.11 板と立体配管系

表 2.2.6 結合後系の固有振動数

次数	(a) の固有振動数 Hz		(b) の固有振動数 Hz	
	計算値	実測値	計算値	実測値
1	6.5	6.5	9.8	9.5
2	12.1	12.3	15.1	14.5
3	19.2	18.5	20.1	18.9
4	27.6	31.0	37.8	38.3
5	39.3	42.0	45.2	45.5

系(a), (b)ともに両者はよく合っている。

(5) 配管系

図 2.2.12 に示す配管系において $x-z$ 面内振動を考え，x, z, θ_y 方向の3自由度結合を行なう。配管(a)に対しては有限要素法を用い，配管(b)は実測インピーダンス要素として扱う。結合前の配管(b)において，結合点の z 方向について A/F を実測したのが図 2.2.13の破線である。これをカーブフィット法でデータ解析し，モーダル質量，減衰率などを求めた。カーブフィットの精度確認のために A/F を再生したのが同図実線である。これを用いてインピーダンス合成した場合の固有振動数の計算値，ならびに結合後の実測値を表 2.2.7に示す。三次になると計算値と実測値の差が7％程度も生じているが，実測インピーダンスの場合，特に回転角の振動モードを精度よく測定できないことが原因と考えられる。

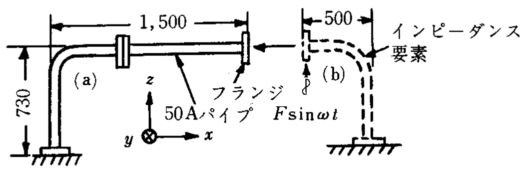


図 2.2.12 配管系

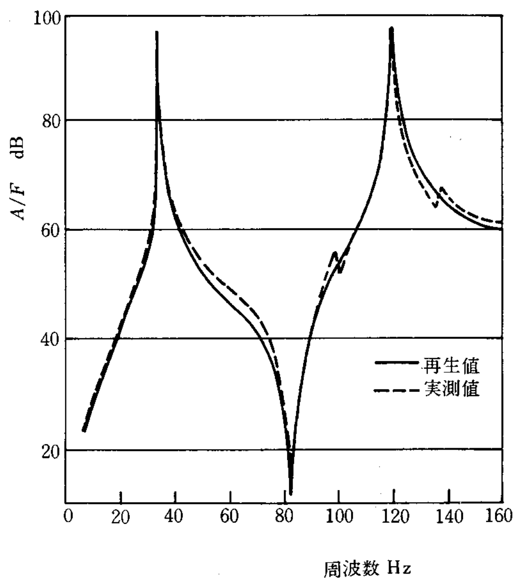


図 2.2.13 結合前の系(b)の A/F 応答曲線

表 2.2.7 結合後の固有振動数

次数	インピーダンス合成 Hz	実測値 Hz
1	46.7	49.0
2	58.9	62.2
3	154.6	144.0

(6) 板と配管系

板と配管系において1自由度（x方向）および2自由度（x, θ_y方向）結合を行ない，$x-z$面内振動における固有振動数，モーダル質量，モーダル減衰率について検討する。図 2.2.14 に示す結合前の板(a)，および配管(b)に対して結合点でx方向に加振を行ない，加振点のA/Fの周波数応答を求めたのが図 2.2.15，図 2.2.16 の破線である。これをデータ解析によってインピーダンス表現のための諸量を求めたあと，精度確認のために再生した値を同図実線で示した。(a)については適当な減衰を与えるために制振布をはっており，(b)については図 2.2.14 に示すように結合点でのz方向拘束のためにローラ支持をして加振している。

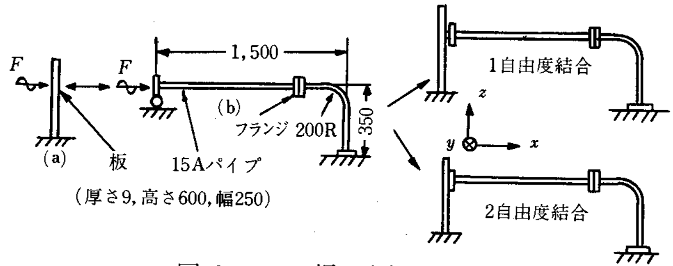


図 2.2.14 板と配管系

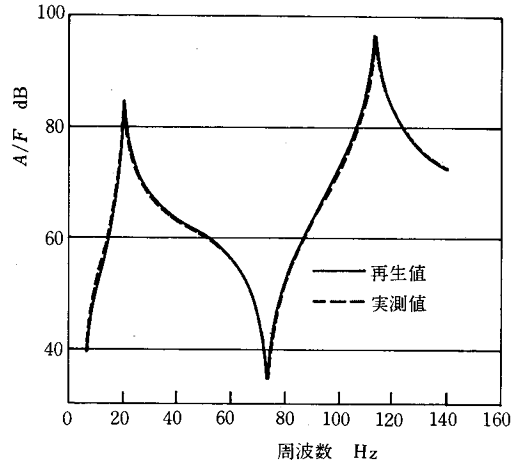


図 2.2.15 結合前の板(a)のA/F応答曲線

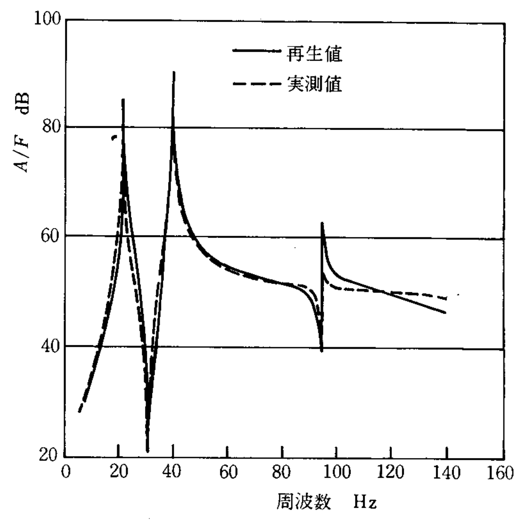


図 2.2.16 結合前の配管(b)のA/F応答曲線

表 2.2.8および表 2.2.9にはつぎの三種の条件で求めた固有振動数，モーダル質量，モーダル減衰率を示す。

（Ⅰ） 板(a)，配管(b)ともに実測インピーダンスを用いて解析した場合

（Ⅱ） 板(a)は実測インピーダンス，配管(b)は計算インピーダンス（四次モードまで考慮）を用いて解析した場合

（Ⅲ） 板(a)と配管(b)を結合後，実測した場合

表 2.2.8 1自由度結合における振動特性値

次数	Ⅰ			Ⅱ			Ⅲ		
	固有振動数 Hz	モーダル質量 kgs²/cm	減衰率 %	固有振動数 Hz	モーダル質量 kgs²/cm	減衰率 %	固有振動数 Hz	モーダル質量 kgs²/cm	減衰率 %
1	22.2	0.0141	2.1	22.6	0.0181	1.5	21.7	0.0212	1.80
2	33.1	0.0533	0.91	37.2	0.0584	0.62	33.5	0.140	0.26
3	93.0	0.117	0.56	92.9	0.0378	0.71	92.0	0.0599	0.35
4	101.0	0.0168	0.95	98.8	0.0377	0.40	97.7	0.0122	0.82

表 2.2.9 2自由度結合における振動特性値

次数	Ⅰ			Ⅱ			Ⅲ		
	固有振動数 Hz	モーダル質量 kgs²/cm	減衰率 %	固有振動数 Hz	モーダル質量 kgs²/cm	減衰率 %	固有振動数 Hz	モーダル質量 kgs²/cm	減衰率 %
1	27.0	0.0107	2.52	30.5	0.0126	1.94	28.0	0.0101	1.35
2	100.3	0.0238	0.71	98.4	0.0251	0.69	109.0	0.0218	0.66

結合後の結合点の x 方向の A/F の応答を，（Ⅰ）は実線，（Ⅱ）は一点鎖線，（Ⅲ）は破線で図 2.2.17および図 2.2.18に示した。1自由度結合の場合，表 2.2.8に示すように固有振動数は（Ⅰ），（Ⅱ）のインピーダンス合成した解析値と（Ⅲ）の実測値とは良好な精度で一致している。また図 2.2.17 に示す A/F の応答において，一次，二次の近傍の低周波数領域では応答曲線はよく一致し，共振点でのピークの高さもほぼ同じであることからインピーダンス合成で求めたモーダル質量やモーダル減衰率は妥当なものである

と言える。高次になると反共振点がずれ，ピークの高さは少し異なってきているが，応答曲線の傾向はよく一致している。

2自由度結合の場合，図 2.2.18に示すA/Fの応答において二次の固有振動数が，一次と比較して実測値との差が大きくなっているが，回転角θ_yのモードの測定がむずかしく，その測定精度が高次になる程，影響が大きくなるためと考えられる。しかし全体としてはインピーダンス合成による応答と実測による応答の曲線はよく一致しており，インピーダンス合成により求めた結合後のモーダル質量，モーダル減衰率の値は満足すべきものと考えられる。

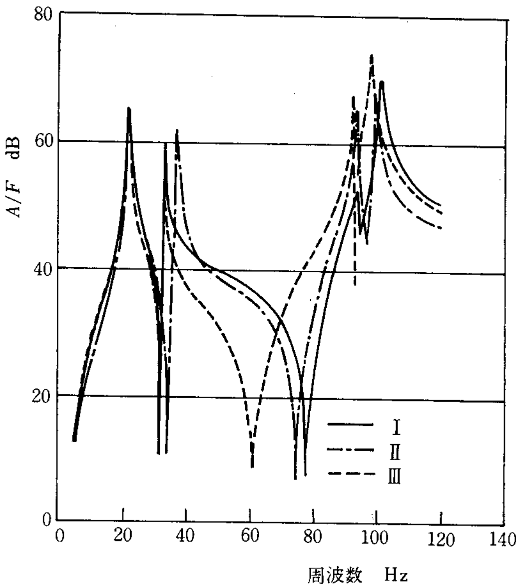


図 2.2.17　1自由度結合におけるA/F応答曲線

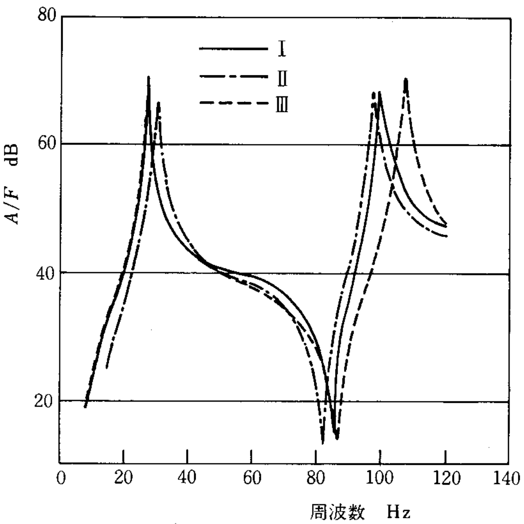


図 2.2.18　2自由度結合におけるA/F応答曲線

2.5 結　　言

インピーダンス要素を含む配管系の振動特性をインピーダンス合成法によって解析する一手法を提案した。いくつかのモデルに対して計算と実験を行ない，解析精度と適用上の問題について検討した結果，つぎの結論が得られた。

(1) 配管系を構成する部分要素の振動特性が実測あるいは固有値解析によってあらかじめ調べられている場合，それらを結合してできる全体系の固有値方程式はインピーダンスマトリックスの形で表現することができ，第1章 1.4.3で述べたインピーダンス法を用いて解くことができる。

その結果，配管系に接続する機器類や支持構造物などの動的剛性を，これまでのような単なる付加質量，付加ばねといった形でなく，インピーダンス要素として扱うことが可能になり，より実際に近い形で振動解析ができるようになった。

(2) 結合後系のモーダル質量やモーダル減衰率の計算値は直接解や実測による値とはやや差があるが，振動応答の解析値は良好な結果が得られており，本章で提案した手法は妥当であると言える。これによって，インピーダンス法を用いた場合にも応答解析に必要なモーダル質量，モーダル減衰率の算出が可能になった。

(3) 固有値解析の結果を用いて部分要素のインピーダンスを作成する場合，結合後の注目する振動モードを十分表現できるだけの結合前のモード数を考慮しておけば，結合後の固有振動数は良好な精度で得られる。

(4) 部分要素のインピーダンスを作成する場合，実測によるものは固有値解析の結果を利用する方法，あるいは有限要素法による方法に比べてやや精度が悪い。しかし理論に乗りにくい複雑な要素については実測から振動特性を求める方法が有効であり，将来計測機器やデータ解析技術の向上によってさらに精度のよい結果が得られるようになると考えられる。

第３編　機器配管系の応答解析法に関する研究

第1章　力加振を受ける配管系の応答解析

1.1 緒　　言

原子力プラントや化学プラントなどにおいて問題となる配管系の振動は，多くの場合強制振動と考えられるが，解析上からはさらにつぎの二つに分類できる。一つは水撃作用，管内流体の圧力脈動など配管系の内部に存在する加振源により強制的に交番力が加えられて生じる振動で力加振と呼ばれるもの，他の一つは地震による振動のように加振源が配管系の外部にあり，系の境界点が強制的に動かされることによって振動が誘発される場合で変位加振と呼ばれるものである。

いずれにせよ，振動による事故を防止するには設計段階において運転中に発生しうる振動の大きさを定量的に予測し，構造安全性を評価しなければならない。耐振構造であるかどうかの定性的な判断だけでなく，予想される外力に対して振動振幅や応力がどの程度に達するかを求めるには，モーダルアナリシスによる応答解析法を適用するのが最も有効である。これはまず，対象としている配管系の固有値解析を行なって固有振動数，振動モード，モーダル質量などの振動特性量を求め，つぎにこれらの諸量を用いてモードごとに独立した運動方程式を構成し，これを解いて応答を算出する方法である。

モーダルアナリシスを用いた振動応答解析は原子力プラントなどの耐震設計においてすでに多く利用されているが，実際の機器配管系に適用した場合の精度については実測値の裏づけが少なく，また流体力による振動応答などにはほとんど使用された実績がないようである。

そこで，まず本章では配管系が力加振を受ける場合について，有限要素法によって求めた振動特性の値を用いて振動応答を算出する方法を検討し，動電形加振器による正弦波加振実験，およびスピーカを用いた脈動加振実

験によって解析法の精度と適用上の留意点を明らかにする。

1.2 理　　論

配管系の振動解析を行なう場合，有限要素法を用いれば連続体から有限の自由度をもつ系に置き換えることができ，強制振動に対する運動方程式をつぎのようにマトリックスで表わすことができる。

$$[M]\ddot{\boldsymbol{x}}+[C]\dot{\boldsymbol{x}}+[K]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f} \quad \cdots\cdots (3.1.1)$$

外力が正弦波の場合には$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{F}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$と置けば

$$-\omega^2[M]\boldsymbol{X}+\mathrm{i}\omega[C]\boldsymbol{X}+[K]\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F} \quad \cdots\cdots (3.1.1)'$$

となる。外力が与えられたときの振動応答を求めるには，式（3.1.1）または式（3.1.1)′ を直接解いてもよいが，モーダルアナリシスでは変位ベクトル$\boldsymbol{x}$ を式（3.1.4）に示すように座標変換してから解くため，以下の固有値解析が必要になる。すなわち第2編で述べた方法により，固有値方程式

$$[K]\boldsymbol{N}=p^2[M]\boldsymbol{N} \quad \cdots\cdots (3.1.2)$$

を解いて固有振動数p_j，振動モード$\boldsymbol{N}_j$，（$j=1,2\cdots\cdots n$）を求める。

さらに，次式で定義される各モードのモーダル質量m_j を計算しておく。

$$m_j=\boldsymbol{N}_j^{\mathrm{T}}[M]\boldsymbol{N}_j \quad \cdots\cdots (3.1.3)$$

ここで振動モードを表わすベクトル$\boldsymbol{N}_j$ は，その名の通り振動のモードつまり振動系各位置における相対的な振動振幅の比率を表わすものであるから，その大きさについては適当に規準化して表示すればよい。振動工学の分野では式（3.1.3）のモーダル質量が単位量，あるいは振動系の全質量に

等しくなるように規準化する場合が多い。しかし実用的な立場では振動系のどの部分が最もよく振れるかを見きわめることが重要であり，その意味では式（3.1.2）を解いて得られた振動モードベクトル$\boldsymbol{N}_j$はその成分の最大値が単位量になるように規準化して扱うのが便利である。したがってここで扱う式（3.1.3）のモーダル質量m_jは，成分の最大値が単位量になるように規準化された振動モード$\boldsymbol{N}_j$に対するものとする。

さて，第2編で説明した固有値解析により固有振動モードが求められると，それを用いて式（3.1.4）のように節点変位ベクトル $\boldsymbol{x}$ からモーダル変位ベクトル $\boldsymbol{\varphi}$に変数変換ができる。

$$\boldsymbol{x}=[N]\boldsymbol{\varphi}\equiv\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{N}_j\ \varphi_j \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.1.4)$$

式（3.1.4）を式（3.1.1）に代入し，両辺の各項に左から$[N]^{\mathrm{T}}$ を乗じると次式となる。

$$[N]^{\mathrm{T}}[M][N]\ddot{\varphi}+[N]^{\mathrm{T}}[C][N]\dot{\varphi}+[N]^{\mathrm{T}}[K][N]\varphi=[N]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f} \quad \cdots\cdots\cdots (3.1.5)$$

ところが固有ベクトルの性質から

$$[N]^{\mathrm{T}}[M][N]=\begin{bmatrix} m_1 & & 0 \\ & m_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m_n \end{bmatrix} \quad [N]^{\mathrm{T}}[K][N]=\begin{bmatrix} m_1 p_1^2 & & 0 \\ & m_2 p_2^2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m_n p_n^2 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots (3.1.6)$$

が成り立ち，また一般に配管系の減衰は小さいので減衰項も固有振動モード間では連成しないという近似が許される。h_j を j 次のモーダル減衰率で各モードごとに適当に定めるとし，また a_{kj},f_kを j 次の固有ベクトル$\boldsymbol{N}_j$ および外力$\boldsymbol{f}$の k 方向成分とすれば，式(3.1.5)は

$$
\begin{bmatrix} m_1 & & & 0 \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m_n \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\varphi}_n \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} 2h_1 p_1 m_1 & & & 0 \\ & 2h_2 p_2 m_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 2h_n p_n m_n \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_n \end{bmatrix}
$$

$$
+\begin{bmatrix} m_1 p_1^2 & & & 0 \\ & m_2 p_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m_n p_n^2 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \sum_k a_{k1} f_k \\ \sum_k a_{k2} f_k \\ \vdots \\ \sum_k a_{kn} f_k \end{bmatrix}
\quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.1.7)
$$

となり，式（3.1.7）は各成分ごとに分離することができる。すなわち j 式のモードに対して

$$
\ddot{\varphi}_j + 2h_j p_j \dot{\varphi}_j + p_j^2 \varphi_j = \frac{\sum_k a_{kj} f_k}{m_j} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.1.8)
$$

となる。式（3.1.8）を解いて φ_j が求められれば，変位，加速度などの応答値は式（3.1.9）によりモーダル変位領域から節点変位領域へ逆変換すれば得られる。

$$
\boldsymbol{x} = [N]\boldsymbol{\varphi}, \quad \dot{\boldsymbol{x}} = [N]\dot{\boldsymbol{\varphi}}, \quad \ddot{\boldsymbol{x}} = [N]\ddot{\boldsymbol{\varphi}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.1.9)
$$

あるいは，節点位置 i での量で表わすと

$$
x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \varphi_j, \quad \dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \dot{\varphi}_j, \quad \ddot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ddot{\varphi}_j \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.1.9)'
$$

このように配管系に外力 $\boldsymbol{f}$ が作用したときの各点の応答量は運動方程式（3.1.1）を直接解いても求められるが，モーダルアナリシスを適用する場合はいったん固有値解析を行なって振動モード $\boldsymbol{N}_j$，固有振動数 p_j，およびモーダル質量 m_j を求め，節点変位 $\boldsymbol{x}$ の代りにモーダル変位 $\boldsymbol{\varphi}$ に関する運動方程式（3.1.8）を導き，それを解いたあと式（3.1.9）によって節点座標に関する量に変換して求めることになる。

解析によって求めたい量が変位や加速度ではなく部材に作用する断面力

（応力）である場合には，固有値解析の際に部材力モードベクトル$\boldsymbol{S}_j$ を求めておくことにより，式（3.1.9）と同様の式（3.1.11）によって計算することができる。つまり応答解析によって各節点での変位 $\boldsymbol{x}$ が求まったとすると，ある配管要素 e の両端の変位ベクトル$\boldsymbol{x}_e$が選びだせる。要素 e については，その両端位置における節点変位$\boldsymbol{x}_e$と節点力（要素両端での部材力）$\boldsymbol{q}_e$との関係が，慣性力を無視すれば第2編で述べた式（2.1.16）を用いて次式のように表わされる。

$$\boldsymbol{q}_e=[K_e]\boldsymbol{x}_e$$

要素全部についてまとめて書くと

$$\boldsymbol{q}=[B]\boldsymbol{x} \qquad (3.1.10)$$

ここで$[B]$は節点変位と節点力を結びつけるマトリックスで$[K_e]$を寄せ集めて作られる。式（3.1.10）に式（3.1.9）を代入すると

$$\boldsymbol{q}=[B][N]\boldsymbol{\varphi}=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{S}_j\,\varphi_j \qquad (3.1.11)$$

ただし　$\boldsymbol{S}_j=[B]\boldsymbol{N}_j \qquad (3.1.12)$

である。$\boldsymbol{S}_j$の i 方向成分をs_{ij}とし，i の成分について書くと

$$q_i=\sum_{j=1}^{n}s_{ij}\varphi_j \qquad (3.1.11)'$$

となる。式（3.1.11）または式（3.1.11)′ で求められる部材力は有限要素法における近似的な変位関数から導かれたものであること，慣性力の分布を無視していることなどのために厳密には正確なものではないが，実用上はさしつかえない程度のものである。また$\boldsymbol{S}_j$は振動モード$\boldsymbol{N}_j$に対応する部材力モードであり，$\boldsymbol{N}_j$はその成分の最大値が単位量になるように規準化してあることから，$\boldsymbol{S}_j$はその振動モードにおいて最大変位成分が単位

量になったときの部材力の分布状態を表わしていることになる。S_jの値は固有値解析の際に求められる。もし部材が応力集中のない単純な断面形状を有している場合には，配管の表面応力σ_iは部材力q_iを断面積，あるいは断面係数で割れば求められる。

モードごとの運動方程式（3.1.8）は，一般の不規則外力が作用する場合には，Duhamel積分，Newmarkのβ法あるいはRunge-kutta-Gill 法などの数値計算によって解かねばならないが，特に正弦波加振の場合には容易に解が求められる。すなわち$f_k=F_k e^{i\omega t}$，$\varphi_j=\Phi_j e^{i\omega t}$と置けば

$$\Phi_j=\frac{\sum_k a_{kj} F_k}{m_j(p_j^2-\omega^2+i\,2h_j p_j \omega)} \quad \cdots\cdots (3.1.13)$$

となる。ゆえに節点 i における変位振幅X_i，加速度振幅A_i，部材力の振幅Q_iはつぎのように表わされる。

$$\left.\begin{aligned} X_i&=\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{ij}\sum_k a_{kj}F_k}{m_j(p_j^2-\omega^2+i\,2h_j p_j \omega)}\\ A_i&=\sum_{j=1}^{n}\frac{-\omega^2 a_{ij}\sum_k a_{kj}F_k}{m_j(p_j^2-\omega^2+i\,2h_j p_j \omega)}\\ Q_i&=\sum_{j=1}^{n}\frac{s_{ij}\sum_k a_{kj}F_k}{m_j(p_j^2-\omega^2+i\,2h_j p_j \omega)}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (3.1.14)$$

以上のように，入力となる力が与えられれば力加振による変位，加速度などの応答量が固有値解析の結果をもとにモーダルアナリシスによって求められる。式（3.1.8），式（3.1.13）などにおいてはモードの数は自由度nのすべてを考慮しているが，固有振動数が対象としている周波数領域から遠く離れているものについては式（3.1.13）から明らかなようにそのモードの成分Φ_jは相対的に小さくなり省略してもさしつかえない。

1.3 解析手順

モーダルアナリシスによって配管系の振動応答を計算する場合の具体的な作業はつぎの手順に従って行なわれる。

(1) 配管系のモデル化

解析対象としている配管系をベンド部，断面急変部，支持点，分岐点などで適当に細かく分割し，直棒，質量，ばね要素などに分解する。この分割点（節点）の座標，各要素の材料定数などを用意し，計算機にインプットする。

(2) 有限要素法による固有値方程式の作成と固有値解析

(1)で与えられたデータを用いて連続体である配管系を，はりおよび棒理論に基づく有限要素法により多自由度化し，それに対する質量マトリックス$[M]$，剛性マトリックス$[K]$を作成する。ついで$[M]$，$[K]$を用いて表わされる固有値方程式（3.1.2）を第2編で述べた方法により固有値解析し，固有振動数p_j，振動モード$\boldsymbol{N}_j$を求める。

(3) モーダル質量m_j，部材力モード$\boldsymbol{S}_j$の計算

力加振を受ける場合の振動応答を解析したい場合には，固有値解析の際にモーダル質量m_jを式（3.1.3）によって求めておく。さらに応力の検討も必要な場合は部材力モード$\boldsymbol{S}_j$を式（3.1.12）により求めておく。

(4) モーダル減衰率h_jの推定

h_jは解析的には求めにくいので経験的なデータにより推定するか，実測値がある場合にはそれを利用して決定する。

(5) モードごとの運動方程式を解く

与えられた外力に対してモードごとの運動方程式（3.1.8）を組み立て，これを解く。外力が一般の不規則波形をしている場合は，Newmark 法や Runge-Kutta-Gill 法などによる数値計算が必要であるが，

正弦波加振の場合には式（3.1.13）により解が表わされる。この場合，考慮すべき振動モードは外力の周波数と近い固有振動数をもつものを適当な数だけ選びだす。

(6)　モーダル変位応答から節点変位応答への変換

(5)によりモードごとの応答量φ_jなどが求まると，式（3.1.9），式（3.1.11）あるいは式（3.1.14）によって節点の変位，加速度，応力など，所要の応答量を算出する。

以上の過程のうち(1)～(4)は固有値解析と呼ばれるもので第2編で述べたものと同じであり，特に(2)，(3)の計算は計算機の中で自動的に処理できる。(5)，(6)の過程は応答解析と呼ばれている。

以上の解析手順をフローチャートにまとめたものが図3.1.1である。

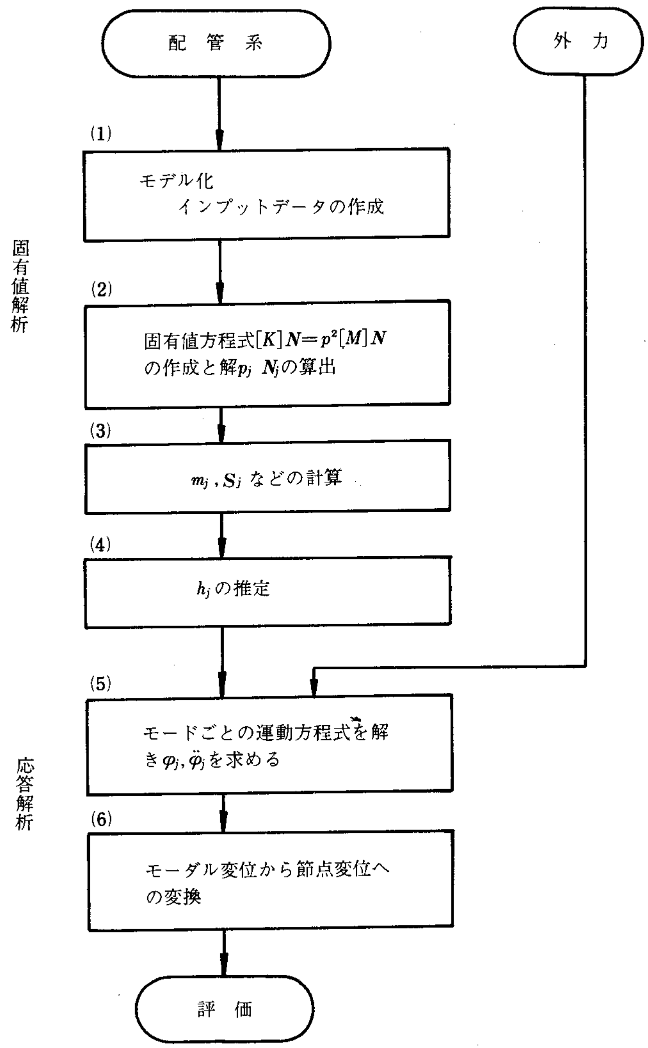


図 3.1.1　フローチャート

1.4 解析と実験

解析精度を検討するため，図2.1.20の配管要素を用いて三種のモデル配管系を作り，動電形加振器による正弦波加振実験，およびスピーカによる脈動加振実験を行なって解析値と比較する。以下に解析と実験の方法を説明する。

1.4.1 計算方法

(1) モデル配管系は直管部，フランジ部およびベンド部によって構成されている。直管部は直棒要素として，またフランジ部は付加質量と付加慣性モーメントとして扱う。ベンド部は第2編1.3.4で述べたように，2本の直棒で近似し面内曲げ剛性をKārmānのたわみ係数で補正する。

(2) 固有値計算は第2編1.4.1で述べたべき乗法を使用して行ない，応答計算は正弦波加振の場合の式（3.1.14）を用いる。

(3) 応答計算に用いるモーダル減衰率h_jは，実験の際に測定した周波数応答線図からカーブフィット法によって求める。実測データの得られない高次のモーダル減衰率については$h_j = 0$とする。

(4) スピーカによる加振実験の場合，励振された空気によって配管が受ける加振力はベンド部において発生し，その大きさは第1編の式（1.1.34）で表わされる。ここではベンド部における音圧の振幅および基準信号との位相差を測定し，その実測値を用いて式（3.1.34）より，おのおのの周波数における加振力を計算する。

(5) 加振力は正弦波であるので，運動方程式は式（3.1.1）′のようになる。本章で用いる配管系は減衰率h_jが1％以下と小さく，共振点付近以外では減衰の影響は無視できるので，式（3.1.1）′において減衰を考慮しないものをGaussの消去法によって直接解き，（これを直

接解と呼ぶ）比較のために，一部で厳密解の代用として用いる。

1.4.2　実験方法

図3.1.2，図3.1.3に示す実験装置を用いて固有値実験，加振器による応答実験およびスピーカによる応答実験を行なう。

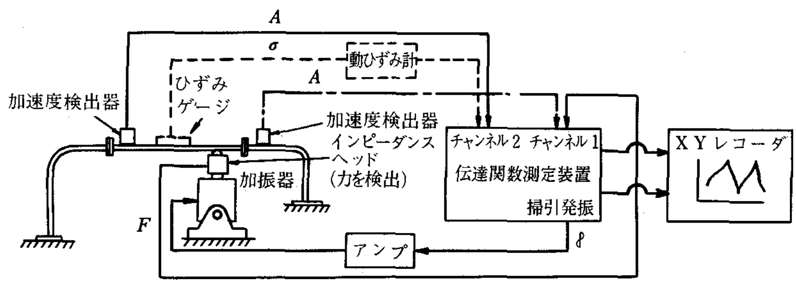


図 3.1.2　実験(1)，(2)における実験装置

(1)　固有値実験

（1．1）　固有振動数の測定

図3.1.2において伝達関数測定装置（T.F.A）の掃引発振器部より適当な範囲の周波数（本章の実験ではだいたい5～100Hz）で掃引発振し，動電形加振器によって配管系を正弦波加振する。このときチャンネル1で加振力Fを，チャンネル2で配管系内の適当な点における加速度Aを測定し，T.F.AでA/Fを計算してXYレコーダに記録する。この周波数応答線図においてA/Fがピークを示す周波数を固有振動数とする。

（1．2）　固有振動モードの測定

図3.1.2において加速度検出器を2個使用し，チャンネル1を一点鎖線のようにつなぎ換える。周波数を共振周波数に合わせ，一方の加速度計で基準点の振幅が一定になるよう監視しながら，他方の加速

度計で各点の相対的な振幅比を計測する。

(2) 加振器による応答実験

(2.1) 強制振動モードの測定

周波数を共振周波数以外の周波数に設定し，(1.2)と同様の操作を行なう。ただしこのときは相対的な振幅比ではなく絶対値を測定する。

(2.2) 加速度と力の比A/Fの周波数応答の測定

(1.1)と同様である。

(2.3) 応力と力の比σ/Fの周波数応答の測定

図3.1.2において，チャンネル2の加速度計に換えて動ひずみ計を接続し(1.1)と同様の操作を行なう。

(3) スピーカによる応答実験

(3.1) スピーカによる脈動圧の周波数応答の測定

図3.1.3 に示すように，T.F.A から掃引発振してスピーカを鳴らし管内の空気を励振させる。このとき管内にマイクロホンをそう入して，ベンド部における音圧の振幅と位相を測定し，周波数応答としてXYレコーダに記録する。

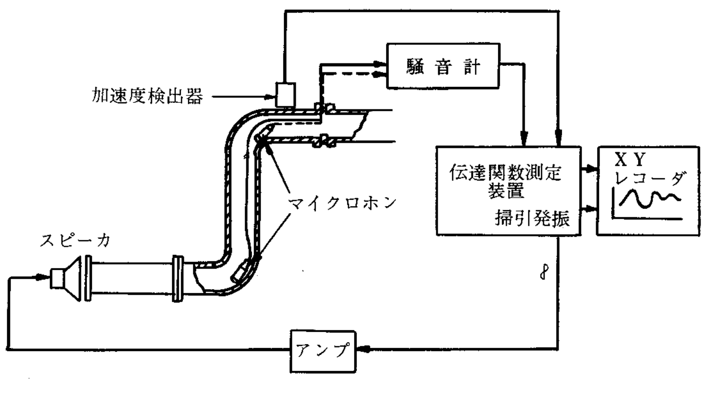


図 3.1.3 実験(3)における実験装置

（3．2） 脈動圧による配管系加速度の周波数応答の測定

マイクロホンをとりはずし，代りに加速度検出器を接続する。音圧を測定したときと同じ力でスピーカを鳴らして加速度を測定し，周波数応答として記録する。

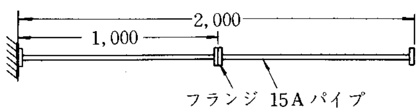
1.5 解析値と実測値との比較検討

1.5.1 動電形加振器による加振応答

機械的な加振力を受ける場合のモーダルアナリシスによる応答解析法の精度を検討するため，一次元，二次元，三次元の三種のモデルについて加振器による加振実験を行ない，解析結果と比較した。

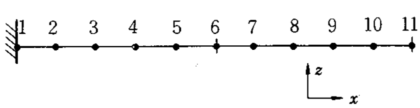
(1) 一次元モデル

一次元モデルは 図3.1.4(a) に示すような片持はりであるが，これを同図(b)のように11節点に分割して計算した。応答解析に先立って，固有値解析を行なったが，固有振動数，振動モードの結果を 図3.1.5 に，応答解析で用いる諸量を 表3.1.1 に示す。図3.1.5 においては，振動モードは成分の最大値が単位量になるよう規準化している。



15Aパイプ：外径21.7，内径16.1
フランジの質量：0.64×10^{-3} kgs/cm
慣性モーメント x 軸まわり：0.77×10^{-2} kgcms^2

(a) 配管系



(b) 計算モデル

図 3.1.4 一次元モデル

表 3.1.1 固有値解析結果

次 数	1	2	3	4	5	6
固有振動数 Hz	3.27	17.91	71.05	124.16	241.10	332.61
モーダル質量 kgs²/cm	0.144×10^{-2}	0.300×10^{-2}	0.127×10^{-2}	0.104×10^{-2}	0.120×10^{-2}	0.157×10^{-2}
節点6の z 方向の変位モード	0.332 8	−1.000 0	−0.151 7	0.331 6	0.104 9	−0.123 5
節点11の z 方向の変位モード	1.000 0	0.977 7	−0.466 2	0.248 5	−0.305 7	−0.961 3
節点2の x 方向の応力モード kg/cm²	169	−833	−961	−619	2,390	5,490

また一次のモードに実測値がないのは固有振動数が低すぎて図3.1.2の方法では測定できなかったためである。以上の結果を用いて応答計算を行ない，実測値および一部では直接解と比較した。図3.1.6に周波数をパラメータとして，すなわち8.5Hz, 16.7Hz, 25Hz, 95Hzの周波数において節点6を z 方向に加振したときの強制振動モードを示す。図ではモーダルアナリシスによるもの，直接解および実測値の三者の比較を行なっているが，図によれば三者ともよく一致している。モーダルアナリシスに用いたモードは一次～六次である。$F=1$ kgで加振したときの各周波数におけるモーダル変位振幅を表3.1.2に示す。表から明らかなように，その成分は加振周波数に近い固有振動数をもつモードが主成分を占め，離れた固有振動数をもつモードの成分は小さい。離れた固有振動数をもつモードの成分は反共振点のように振動レベルが小さいところを除いて無視できる。表3.1.2で五次，六次の成分は95Hzでもなお小さく，このあたりの周波数での変位や加速度を求めるのであれば四次

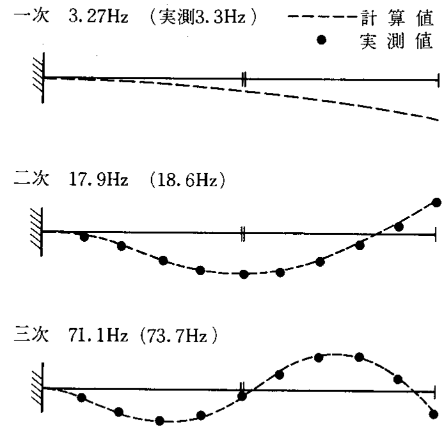


図 3.1.5　固有振動数および振動モード

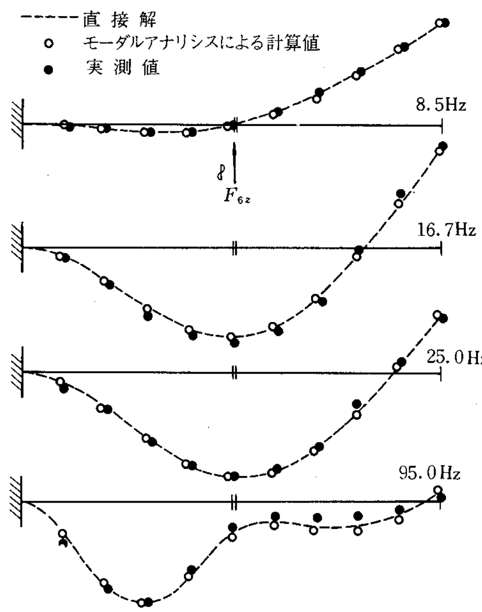


図 3.1.6　強制振動モード

表 3.1.2 モーダル変位振幅 Φ_j cm

次数＼周波数	8.5Hz	16.7Hz	25.0Hz	95.0Hz
1	−0.095 190	−0.021 850	−0.009 539	−0.000 650
2	−0.034 020	−0.202 200	0.027 770	0.000 971
3	−0.000 609	−0.000 635	−0.000 685	0.000 761
4	0.000 527	0.000 534	0.000 547	0.001 265
5	0.000 038	0.000 038	0.000 039	0.000 045
6	−0.000 018	−0.000 018	−0.000 018	−0.000 020

まで考慮すれば十分であり，また問題となる周波数が高くなってくれば，そのときは低次のモードが省略できると考えられる。ここで六次まで用いたのは，応力を計算する場合に応力モードの値は高次のものほど大きくなる傾向があるので，モーダル変位が小さくなっても高次の影響が変位や加速度の場合よりも大きくなることを考慮したためである。それでも1節点3自由度で11節点，すなわち計33の自由度をもつ系が6自由度の系に削減されたことになる。

つぎに節点をパラメータとして周波数応答を検討する。図3.1.7に節点11を z 方向に加振したときのイナータンス，すなわち A_{11z}/F_{11z} の周波数応答を示す。図で，モーダルアナリシスによる計算値は1 Hzもしくはそれ以下のきざみで計算したものをなめらかに結んだ。縦軸は対数目盛であり，0 dBは kg，cm，s 系での単位量をとっている。以後の図も同様である。この場合0 dB $= 1\ \mathrm{cm/s^2\ kg}$ である。横軸は周波数を等分目盛で表示しており，ピークのところが共振点，とがった谷が反共振点である。

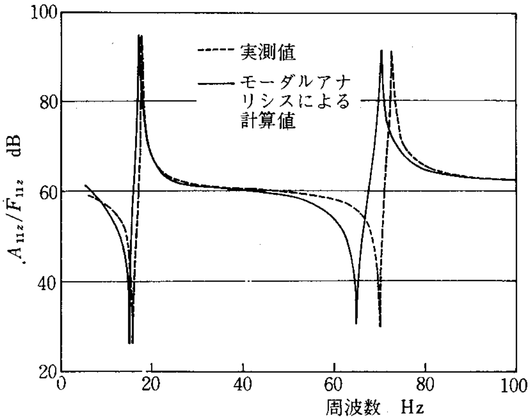


図 3.1.7 A_{11z}/F_{11z} の周波数応答

図3.1.8にクロスイナータン

スA_{11z}/F_{6z}およびA_{6z}/F_{11z}の周波数応答を示す。Maxwellの相反定理より両者は一致するはずであるが，実測では少し差が生じている。これはインピーダンスヘッドによるx方向の拘束の影響が現われたものと思われるが，いずれも計算値とはかなりよく合っている。

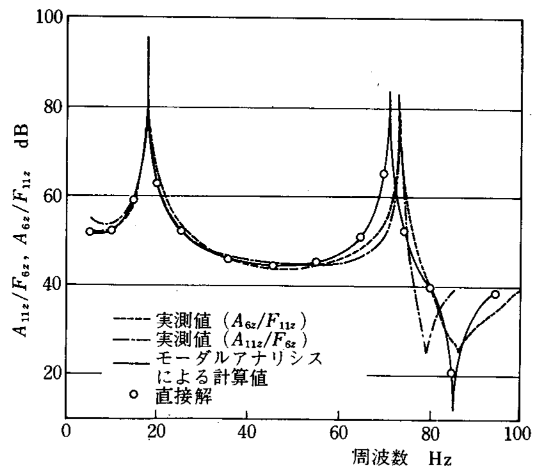


図 3.1.8 A_{11z}/F_{6z}，A_{6z}/F_{11z}の周波数応答

図3.1.9 にσ_{2x}/F_{11z}の周波数応答を示す。ここでσ_{2x}は節点2におけるx方向（軸方向）上部外表面応力である。実測値と計算値はかなりよい精度で一致している。

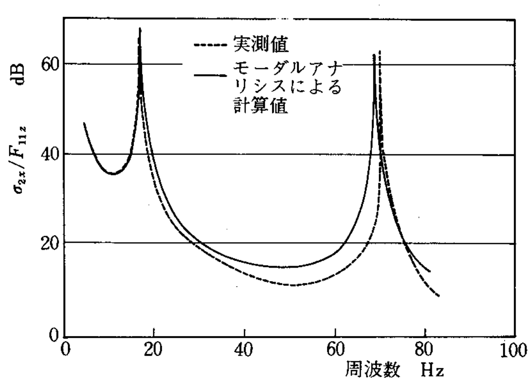


図 3.1.9 σ_{2x}/F_{11z}の周波数応答

(2) 二次元モデル

二次元モデルは図3.1.10(a)に示すような配管系で，これを同図(b)のように9節点に分割して計算した。固有値解析の結果を図3.1.11および 表3.1.3 に示すこの結果を用いて応答計算を行なったが，このモデルでは面内の加振しか行なっていないので，振動モードも面内のものだけで

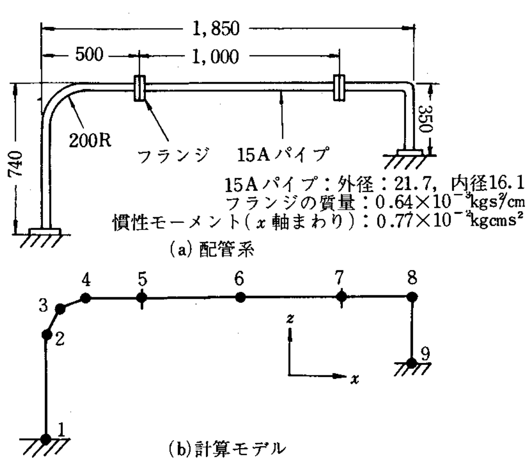


図 3.1.10 二次元モデル

表 3.1.3　固有値解析結果

次　　数	1	2	3	4	5	6
固　有　振　動　数 Hz	22.23	30.17	55.77	181.44	205.93	322.27
モ ー ダ ル 質 量 kg s^2/cm	0.221×10^{-2}	0.665×10^{-2}	0.445×10^{-2}	0.0914×10^{-2}	0.103×10^{-2}	0.801×10^{-2}
節点 5 の z 方向の変位モード	0.595 7	−1.000 0	0.812 3	0.244 8	−0.171 4	−0.440 2
節点 7 の z 方向の変位モード	0.555 6	0.398 8	−1.000 0	0.384 4	−0.113 9	0.437 8
節点 6 の x 方向の応力モード kg/cm²	−849	430	1,141	4,243	−2,490	−223

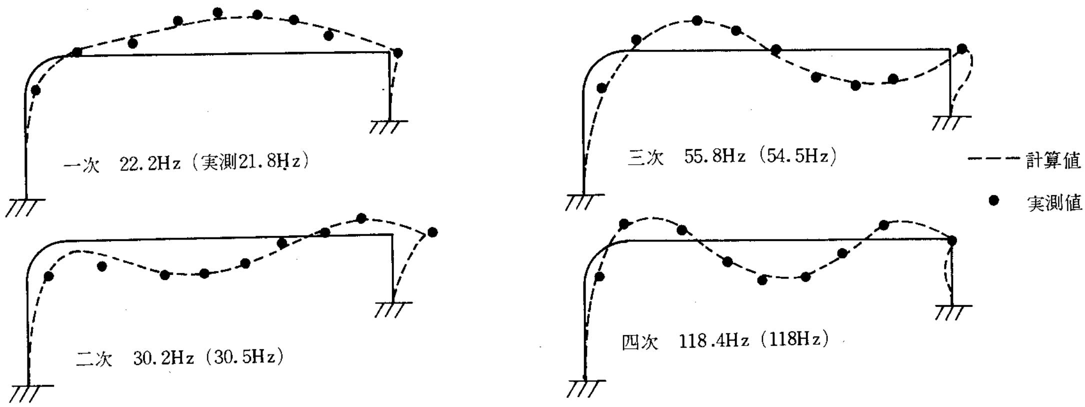
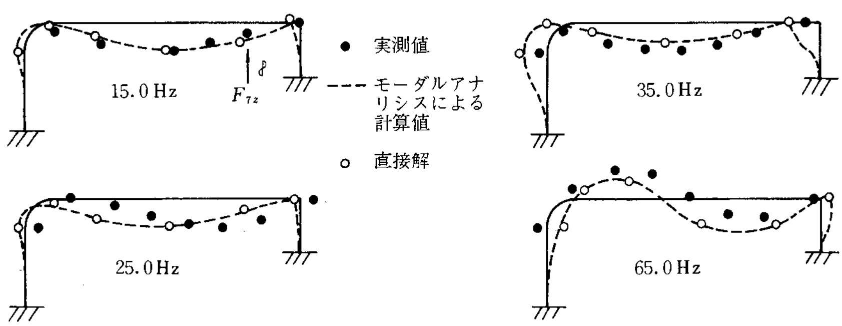
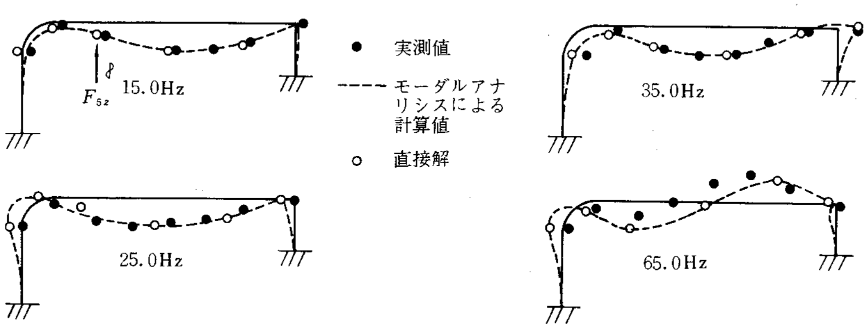


図 3.1.11　固有振動数および振動モード



(a) 節点 7 加振時の強制振動モード



(b) 節点 5 加振時の強制振動モード

図 3.1.12　強制振動モード

表 3.1.4　モーダル変位振幅 Φ_j cm

次数＼周波数	15.0Hz	25.0Hz	35.0Hz	65.0Hz
1	0.023 700	−0.048 630	−0.008 720	−0.001 709
2	0.002 220	0.005 334	−0.004 828	−0.000 459
3	−0.001 975	−0.002 293	−0.003 023	0.005 110
4	0.000 772	0.000 796	0.000 833	0.001 088
5	−0.000 066	−0.000 066	−0.000 067	−0.000 073
6	0.000 013	0.000 013	0.000 014	0.000 014

一次～六次まで考慮した。図3.1.12(a)に15Hz，25Hz，35Hz，65Hzの周波数で節点7を z 方向に加振したときの強制振動モードを，そして同図(b)に節点5を z 方向に加振したときの強制振動モードを示す。これらの図ではモーダルアナリシスによる計算値と直接解とはよく一致しているが，実測値とは x 方向に対して少しずれている。固有振動モードは計算と実測がよく一致しており，強制振動モードでは二つの方法による計算値がよく合っていることから，このずれの原因としては実験時の加振点の境界条件が十分でなかったこと，すなわちインピーダンスヘッドによる x 方向の拘束の

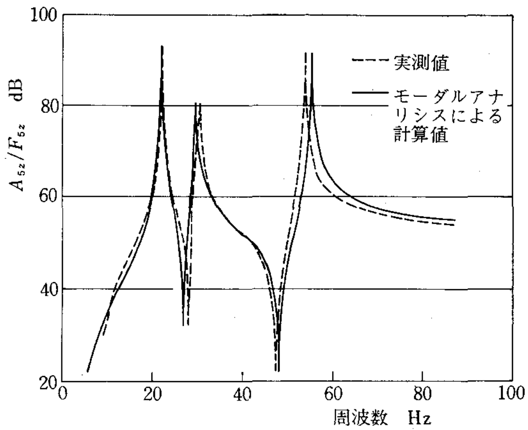


図 3.1.13　A_{5z}/F_{5z}の周波数応答

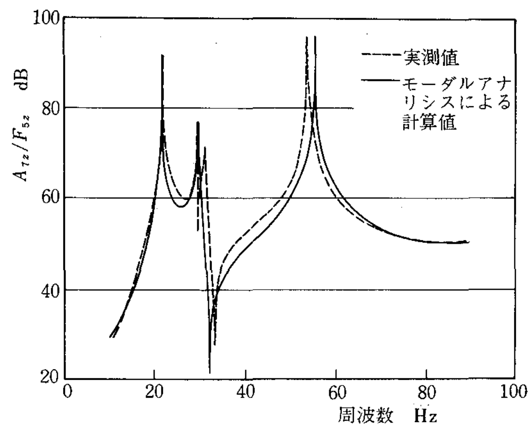


図 3.1.14　A_{7z}/F_{5z}の周波数応答

影響が考えられ，モーダルアナリシスの精度としては十分であると思われる。表3.1.4 に節点7を$F=1$ kgで正弦波加振したときの強制振動におけるモーダル変位振幅Φ_jを示すが，一次元モデルと同様，加振周波数と離れた固有振動数をもつモードの成分はひじょうに小さくなっていることがわかる。

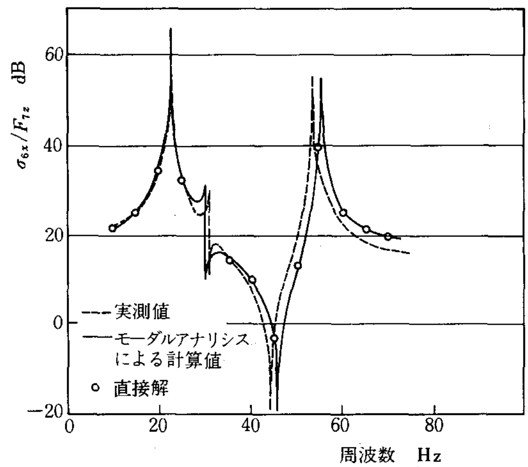


図 3.1.15 σ_{6x}/F_{7z}の周波数応答

図3.1.13，図3.1.14にA_{5z}/F_{5z}，A_{7z}/F_{5z}の周波数応答を示す。図3.1.14の30Hz付近において，実測値のほうが計算値に比べてピークが1個多く現われているが，これは本来なら出てこないはずの面外成分が出たためであり，本質的なずれではない。図3.1.15に応力と加振力の比σ_{6x}/F_{7z}の周波数応答を示すが，三者とも良好な一致を示している。

(3) 三次元モデル

三次元モデルは図3.1.16(a)に示すような配管系で，これを同図(b)のように16節点に分割して計算した。固有値解析結果を図3.1.17および表3.1.5に示す。図3.1.17の振動モードは三次元を一度に表現しにくいので x，y，z 方向の成分ごとに表わした。一次のモードでは計算値と実測値がよく一致しているが，二次，三次のモードでは少しずれている。この原因の一つは固有振動数が二次と三次とではひじょうに接近して

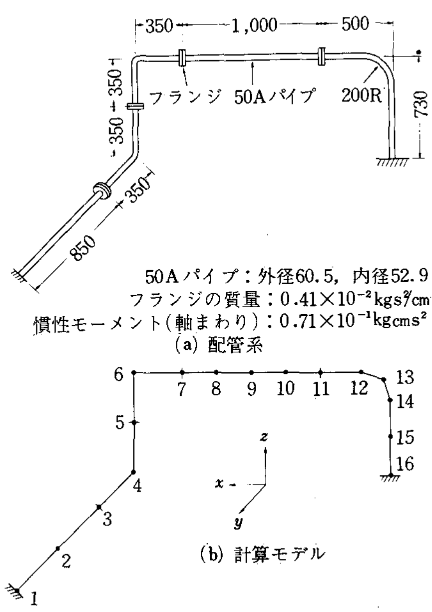


図 3.1.16 三次元モデル

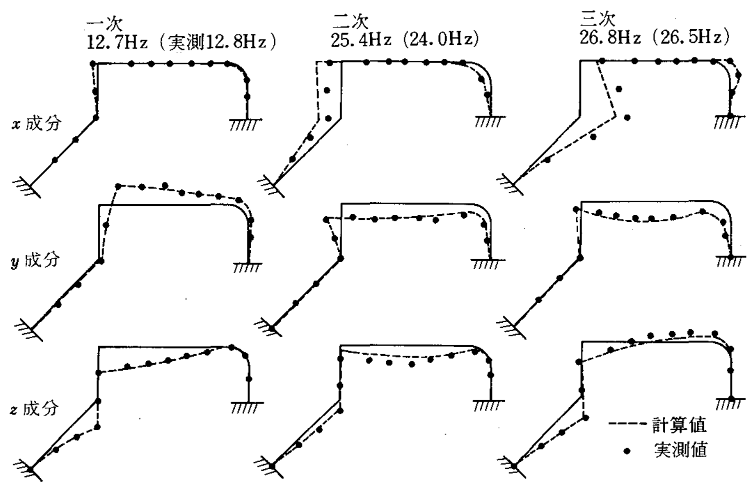


図 3.1.17 固有振動数および振動モード

表 3.1.5 固有値解析結果

次数	1	2	3	4	5	6
固有振動数 Hz	12.68	25.42	26.78	49.85	50.43	75.67
モーダル質量 kg s²/cm	2.63×10^{-2}	3.25×10^{-2}	2.68×10^{-2}	1.28×10^{-2}	1.42×10^{-2}	0.966×10^{-2}
節点7の z 方向の変位モード	−0.842 8	−0.419 1	−0.349 3	−0.203 4	0.372 7	−0.175 8
節点11の z 方向の変位モード	−0.265 3	−0.562 4	0.143 2	−0.050 3	0.097 3	−0.782 9
節点9の x 方向の応力モード kg/cm²	78.9	754	−442	380	−1,028	2,544

7	8	9
109.93	142.14	162.93
0.754×10^{-2}	2.66×10^{-2}	1.03×10^{-2}
−0.022 5	−1.000 0	0.042 3
−0.007 7	0.984 8	0.027 8
−81.0	1,220	341

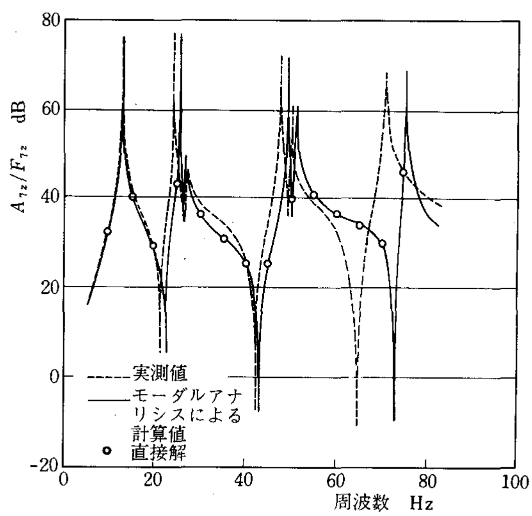


図 3.1.18 A_{7z}/F_{7z}の周波数応答

いるために周波数が少し変化するとモードが大きく変化し，精度のよい測定がむずかしかったことである。もう一つはつぎのような計算上の問題である。本

章に用いているべき乗法では固有振動数が接近すると解の収束性が悪くなる。30回程度の反復で計算を打ち切りこれを解としてとりだした場合，振動数はそれでも 0.6 %程度の精度を保っているがモードはかなりばらついている。この場合のモードは接近した固有モードが入りまじったものである。このように各モードごとの精度は十分でないかも知れないが，べき乗法では各モードの直交性を利用して高次モードを求めているために，たとえ解が接近していても直交性はほぼ満足されており，式(3.1.7)における直交変換は可能である。それゆえ一見モードの計算値と実測値にくいちがいがあるように見えても，あとで示す応答計算の結果からもわかるように，応答計算には問題ないと考えられる。この固有値計算結果の一次～九次を用いて応答計算を行なった。図3.1.18，図3.1.19にそれぞれA_{7z}/F_{7z}，A_{7z}/F_{11z}の周波数応答を示す。両図とも，60Hzより高い周波数においてモーダルアナリシスによる計算値は実測値と差が大きくなっているが，直接解とはよく一致しており，モーダルアナリシスの精度としては十分であると考えられる。

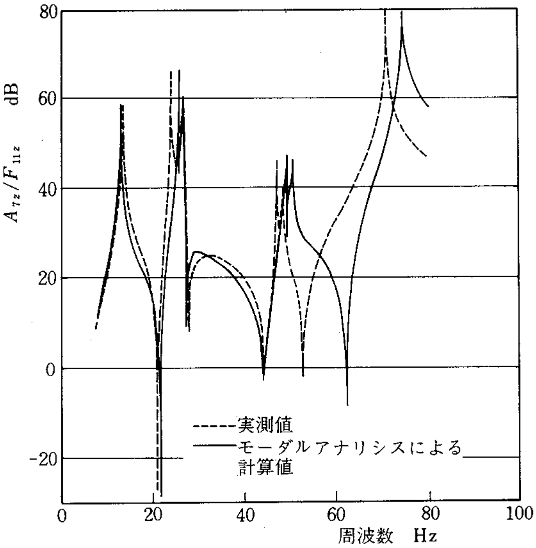


図 3.1.19 A_{7z}/F_{11z}の周波数応答

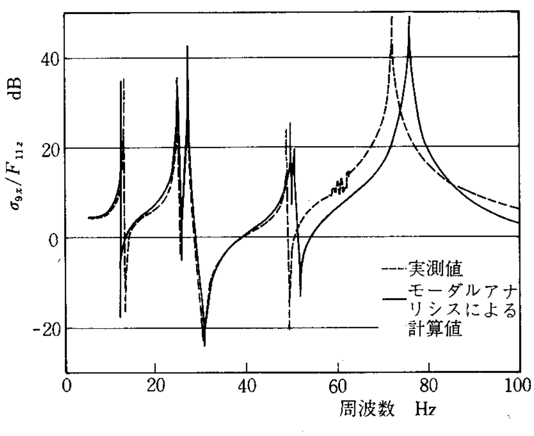


図 3.1.20 σ_{9x}/F_{11x}の周波数応答

図3.1.20にσ_{9x}/F_{11z}の周波数応答を示す。60Hz付近の乱れは本質的なものではなく測定上のノイズと考えられ，三次元モデルの応力としてはひじょうによく合っている。

このように，使用したモードのうち二次と三次，および四次と五次が接近しており，振動モード自体の実測値，計算値の間に若干のずれがあったものの，応答解析の結果としては十分なものが得られた。したがって，普通モーダルアナリシスでは接近した固有値があれば精度が落ちると言われているが，固有値解析の際モード間の直交性を満たすように注意して解析すれば実用的には問題ないと考えられる。

1.5.2　スピーカ加振による振動応答

流体脈動に起因する配管振動の応答解析法について検討するため，1.5.1で用いたモデルのうち三次元モデルに対して節点1の固定端の部分よりスピーカで管内空気を励振し，その応答の実測値と計算値を比較した。まず加振力を評価するためにベンド部における音圧の実効値と基準信号との位相差を実測したが，その結果を図3.1.21に示す。(a), (b), (c)はそれぞれベンド部である節点4, 6, 13での実測値を表わし，0 dBはほかの図と違って0.0002μbar（実効値）である。この図において音圧レベルがピークになっているところは管内流体系の共振点である。また比較的とがった谷は反共振点で，なめらかな谷は反共振点ではない。図のように各ベンド部における音圧の大きさが周波数に対し

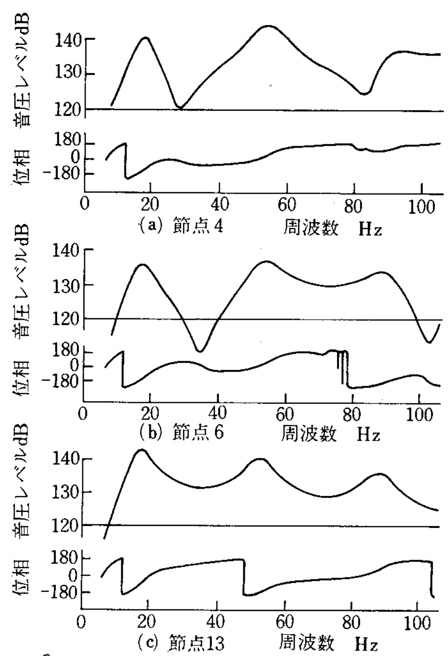


図 3.1.21　音圧の周波数応答

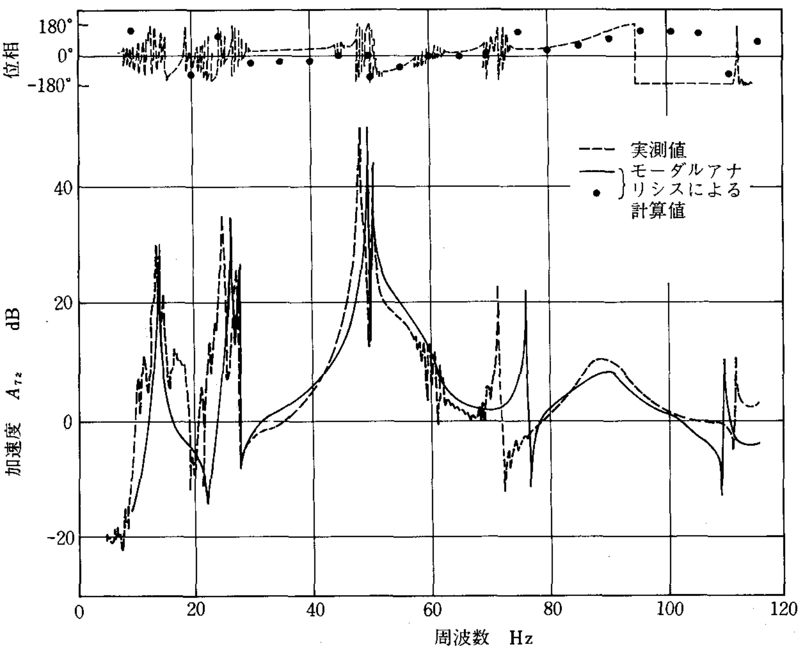


図 3.1.22 脈動圧によるA_{7z}の周波数応答

て変化し，また相対的な位相差も周波数によって変化してゆくので，加振力のようすは周波数によってかなり変ってくる。図3.1.21からおのおのの周波数における音圧の振幅と位相を読み取って加振力を求め，節点7の z 方向の加速度応答を計算した。その結果を図3.1.22に示す。図にはこれに対応する実測値を破線で示している。図において，鋭いピークは機械系の共振によるものである。ただし計算値のカーブに出ていない実測値のピークは計測器のノイズなど測定上の問題であり，本質的なものではないと考えられる。90Hz付近のなめらかなピーク，および15Hz,50Hzあたりのふくらみは図3.1.21よりわかるように，流体系の共振によって加振力が増加したことによるものであり，全般的に計算値と実測値はよく一致している。

1.6 結　　言

配管系の内部に強制的交番力が加わる場合，すなわち力加振を受ける場

合の配管系の振動応答を，モーダルアナリシスによって解く方法について検討した結果，その精度と適用上の注意点に関し，つぎの結論が得られた。

(1) いくつかのモデル配管系に対する解析結果は直接解および実測値ともよく一致し，弾性的挙動を示す簡単な配管系については，変位，加速度，応力の応答を比較的精度よく計算できる。特にスピーカを用いた加振実験によって管内流体の脈動圧による機械系の応答が実用上十分な精度で解析できることが確かめられた。

(2) モーダルアナリシスによって応答解析を行なう場合，固有値解析の精度が要求されるので，要素分割のとりかたなどモデル化の方法については第2編で述べた点に注意する必要がある。それに加えて応答解析ではモードの直交性が重要な条件となる。べき乗法などによって固有値解析する場合，ひじょうに接近した固有振動数をもつモードは解析精度が若干低下するが，モード間の直交性を満たすようにモードを分離してゆけば個々のモードの精度は少し落ちても応答計算の精度には問題はない。

(3) モーダルアナリシスを適用する場合，問題となる周波数領域から離れた固有振動数をもつモードは反共振点の近傍以外では無視できる。また反共振点の近傍は振動のレベルが小さいところであるから，それらのモードは無視しても実用上問題はない。したがって精度を落とすことなく自由度を削減できる。ただし応力を求める場合は，変位，加速度の場合に比べて高次のモードを若干多く考慮するほうがよい。

(4) 減衰マトリックス$[C]$は厳密には対角化できないが，減衰が小さい場合はその影響は共振点の近傍でしか現われないので，モードごとの減衰量，すなわちモーダル減衰の考えかたが成立する。減衰は共振振幅を支配するため，応答計算をするうえでその評価は一つの大きな問題である。本章では実測した周波数応答曲線のピークの高さからモーダ

ル減衰率を定めたが，実際上は経験値や文献[45][46]などによって推定することになる。

なお，実際の配管系では配管と支持構造物がストラップやUボルトで結合されている。これらは摩擦やすきまなどの非線形特性を含んでいるが，その非線形性がそう大きくなければ，等価なばね定数，等価な減衰量を導入することによってモーダルアナリシスが利用できると考えられる。

第2章　変位加振を受ける配管系の応答解析

2.1 緒　　言

配管系の振動は普通，力加振による強制振動と変位加振による強制振動に分けて考えることができる。力加振の場合の解析法については第1章で検討したので，本章においては変位加振の場合すなわち配管系の境界である端末点から強制的に変位または加速度が加えられて振動する場合の解析を扱う。

変位加振を受ける配管系の応答解析は耐震設計の分野においてよく使用されているが，そこではすべての端末点が同一の動きをすると仮定した1入力問題として扱われ，おのおのの端末点が独立な動きをする場合の多自由度多入力問題をモーダルアナリシスで解く方法についてはまだ十分に検討されていないようである。ここでは多入力問題にも対処できる一解法を紹介する。この方法ではまず配管系を有限要素法などにより多自由度系に置き換え，各節点の変位を強制変位ベクトルと応答変位ベクトルに分解して表わす。応答変位ベクトルをモーダルアナリシスにより求めるために，あらかじめ端末固定の条件で固有値解析を行なって固有振動数，振動モードを求め，さらにその際，強制変位ベクトルに対するそのモードの励振係数を求めておく。この励振係数が得られておれば端末に強制変位が与えられた場合，この係数を乗じることによって各モードに対する一般力が計算でき，以後の応答解析は第1章で述べた力加振の場合と全く同様に処理することができる。ただし，こうして得られたものは応答ベクトル成分に関するものであるから，全部の応答を算出するためにはこれに強制ベクトル成分を加え合わせる操作が必要である。

節点の変位ベクトルを強制ベクトルと応答ベクトルに分解する方法には種々の選択の余地があるが，ここでは最も便利と思われる二つの方法につ

いて解析理論とその適用のしかたを説明し，ついで第1章で用いた三種の配管系を利用して変位加振実験を行ない，本解法の妥当性，精度を検討する。

2.2 理　　論

配管系構造物を有限要素法によって多自由度系にモデル化すれば，その運動方程式はマトリックスを用いて次式のように表わすことができる。

$$[M]\ddot{\boldsymbol{x}}+[C]\dot{\boldsymbol{x}}+[K]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f} \quad \cdots\cdots (3.2.1)$$

いま，変位ベクトル $\boldsymbol{x}$ を内部点のベクトル $\boldsymbol{x}_{\mathrm{I}}$ と端末点（加振点）のベクトル $\boldsymbol{x}_{\mathrm{II}}$ に分解し，内部点には外力が作用しない場合を考えると，式（3.2.1）は式（3.2.1)′のように書き直せる。

$$\begin{bmatrix} M_{12} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{I}} \\ \ddot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{I}} \\ \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{\mathrm{I}} \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{f}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (3.2.1)'$$

ただし $[M]=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$，$[C]=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$，$[K]=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{\mathrm{I}} \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{f}=\begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{f}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix}$

ここで言う端末点とは強制変位を加えられる節点のことであり，この点の変位ベクトル $\boldsymbol{x}_{\mathrm{II}}$ が与えられたとして，内部点の変位ベクトル $\boldsymbol{x}_{\mathrm{I}}$ がどうなるかを解析する問題となる。この場合運動方程式としては式（3.2.1)′ の上半分だけあれば十分であるが，計算上の都合から式（3.2.1)′ の形で考えてゆくことにする。式(3.2.1)または式（3.2.1)′ を解くために $\boldsymbol{x}$ を次ぎのように $\boldsymbol{x}_A$ と $\boldsymbol{x}_B$ に分解する。

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_A+\boldsymbol{x}_B \quad \cdots\cdots (3.2.2)$$

ここで，$\boldsymbol{x}_B$は$\boldsymbol{x}_{\mathrm{II}}$により一義的に決められる強制変位ベクトルで，変換マトリックス$[T]$を適当に選ぶことにより次式のように決定される。

$$\boldsymbol{x}_B=[T]\boldsymbol{x}_{\mathrm{II}} \quad \cdots\cdots (3.2.3)$$

ただし系の自由度をn，端末点の数をlとした場合$[T]$は$n\times l$のマトリックスであって，$\boldsymbol{x}_B$における端末点の成分は$\boldsymbol{x}_{\mathrm{II}}$に等しくなるよう$[T]$を選定するものとする。また$\boldsymbol{x}_A$は応答変位ベクトルと呼ぶべきもので，端末部における変位成分は零とする。

式(3.2.3)を式(3.2.2)に代入し，さらにそれを式(3.2.1)に代入して書き直すと，運動方程式は

$$[M]\ddot{\boldsymbol{x}}_A+[C]\dot{\boldsymbol{x}}_A+[K]\boldsymbol{x}_A=\boldsymbol{f}-[M][T]\ddot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{II}}-[C][T]\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{II}}-[K][T]\boldsymbol{x}_{\mathrm{II}} \quad \cdots\cdots (3.2.4)$$

となる。式(3.2.4)は，端末における加振入力$\boldsymbol{x}_{\mathrm{II}}$が与えられると$\boldsymbol{x}_B$ $(=[T]\boldsymbol{x}_{\mathrm{II}})$が決定され，それによる加振力$-[M][T]\ddot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{II}}$，$-[C][T]\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{II}}$，$-[K][T]\boldsymbol{x}_{\mathrm{II}}$が求められて，力加振の問題として応答変位$\boldsymbol{x}_A$が解析できることを示している。式(3.2.4)を直接解いてもよいが，ここではモーダルアナリシスによって解くことを試みる。そのため，まずつぎの固有値方程式

$$[K]N=p^2[M]N \quad \cdots\cdots (3.2.5)$$

を解いて固有振動数p_j，振動モード$\boldsymbol{N}_j$，$(j=1,2\cdots n)$を求め，応答変位ベクトル$\boldsymbol{x}_A$を式(3.2.6)によりモーダル変位$\boldsymbol{\varphi}$に変換する。

$$\boldsymbol{x}_A=[N]\boldsymbol{\varphi}\equiv\sum_{j=1}^{n}N_j\,\varphi_j \quad \cdots\cdots (3.2.6)$$

ただし式 (3.2.5) は，$\boldsymbol{x}_A$ の端末点ではその変位成分が零であることから，端末点は固定の条件で固有値解析を行なうものとする。式 (3.2.4) に式 (3.2.6) を代入し，さらに両辺の各項に左から $[N]^{\mathrm{T}}$ を乗じると

$$[N]^{\mathrm{T}}[M][N]\ddot{\boldsymbol{\varphi}}+[N]^{\mathrm{T}}[C][N]\dot{\boldsymbol{\varphi}}+[N]^{\mathrm{T}}[K][N]\boldsymbol{\varphi}$$
$$=[N]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}-[N]^{\mathrm{T}}[M][T]\ddot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{II}}-[N]^{\mathrm{T}}[C][T]\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{II}}-[N]^{\mathrm{T}}[K][T]\boldsymbol{x}_{\mathrm{II}} \quad \cdots\cdots (3.2.7)$$

ところで，次式

$$\boldsymbol{m}_j=\boldsymbol{N}_j^{\mathrm{T}}[M]\boldsymbol{N}_j \quad \cdots\cdots (3.2.8)$$

で定義されるモーダル質量 $\boldsymbol{m}_j$ を用いると，固有ベクトルの性質より

$$[N]^{\mathrm{T}}[M][N]=\begin{bmatrix} m_1 & & 0 \\ & m_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & m_n \end{bmatrix}, \quad [N]^{\mathrm{T}}[K][N]=\begin{bmatrix} m_1p_1^2 & & 0 \\ & m_2p_2^2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & m_np_n^2 \end{bmatrix}$$

また，系の減衰が小さい場合には減衰項も各モード間で連成しないという近似が成立し，さらに右辺第３項も無視できて

$$[N]^{\mathrm{T}}[C][N]\fallingdotseq\begin{bmatrix} 2h_1p_1m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2h_np_nm_n \end{bmatrix}, \quad [N]^{\mathrm{T}}[C][T]\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{II}}\fallingdotseq 0$$

となる。式 (3.2.7) の右辺第１項の $[N]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}$ については端末固定の条件で固有値解析をしているゆえ，$[N]^{\mathrm{T}}$ の端末部におけるモード成分は零であり，$\boldsymbol{f}$ は系内部において外力が作用しない場合を考えているから

$$[N]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}=0$$

である。結局，式 (3.2.7) は次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\varphi}_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2h_1p_1m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2h_np_nm_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} m_1p_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_np_n^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix}$$

$$=-[N]^T[M][T]\ddot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{II}}-[N]^T[K][T]\boldsymbol{x}_{\mathrm{II}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.2.9)$$

式 (3.2.9) は各モードごとに分離されている。整理して書き直すと j 次のモード成分に対して

$$\ddot{\varphi}_j+2h_jp_j\dot{\varphi}_j+p_j^2\varphi_j=-\frac{1}{m_j}N_j^T[M][T]\ddot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{II}}-\frac{1}{m_j}N_j^T[K][T]\boldsymbol{x}_{\mathrm{II}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots (3.2.10)$$

右辺の $\frac{1}{m_j}N_j^T[M][T]$，$\frac{1}{m_j}N_j^T[K][T]$ は，$\boldsymbol{x}_{\mathrm{II}}$ により内部に伝達される慣性力，弾性力が j 次のモードをどの程度励振するかを示す係数で，強制変位加振に対する加速度励振係数，変位励振係数とも呼ぶべきものである。これを固有値解析の際に計算しておけば各モードごとの応答が式 (3.2.10) により力加振の場合と同様に求められる。式 (3.2.10) を解いて φ_j が求まれば，各節点における変位 $\boldsymbol{x}_A$，速度 $\dot{\boldsymbol{x}}_A$，加速度 $\ddot{\boldsymbol{x}}_A$ の値は式 (3.2.6) と同様の変換により，また部材に発生する応力 $\boldsymbol{q}_A$ は第1章 **1.2** で述べた部材力モード $\boldsymbol{S}_j=[B]N_j$ を用いて，次式のように求めることができる。

$$\boldsymbol{x}_A=[N]\boldsymbol{\varphi},\ \dot{\boldsymbol{x}}_A=[N]\dot{\boldsymbol{\varphi}},\ \ddot{\boldsymbol{x}}_A=[N]\ddot{\boldsymbol{\varphi}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.2.11)$$

$$\boldsymbol{q}_A=[S]\boldsymbol{\varphi} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.2.12)$$

ここで　$[S]=[\boldsymbol{S}_1,\ \boldsymbol{S}_2\cdots\cdot\boldsymbol{S}_n]$ である。

ただし，$\boldsymbol{x}_A$，$\dot{\boldsymbol{x}}_A$，$\ddot{\boldsymbol{x}}_A$，$\boldsymbol{q}_A$ は応答変位に関するものであるから，実際の全部の応答量はこれに強制変位に関する量も加え合わせる必要があり，

$$\boldsymbol{x}=[T]\boldsymbol{x}_{\mathrm{II}}+[N]\boldsymbol{\varphi},\ \dot{\boldsymbol{x}}=[T]\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{II}}+[N]\dot{\boldsymbol{\varphi}},\ \ddot{\boldsymbol{x}}=[T]\ddot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{II}}+[N]\ddot{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots (3.2.13)$$

$$\boldsymbol{q}=[B][T]\boldsymbol{x}_{\mathrm{II}}+[S]\boldsymbol{\varphi} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.2.14)$$

となる。

以上で変位加振を受ける場合のモーダルアナリシスによる応答解析法の概要を説明したが，式 (3.2.3) における $\boldsymbol{x}_B$ あるいは $[T]$ のとりかたには種々の選択の余地がある。ここでは実用的に有効と思われるつぎの二つの方法について検討する。一つは $\boldsymbol{x}_B$ として端末変位ベクトルをとる方法で，もう一つは静たわみベクトルをとる方法である。

2.2.1　$\boldsymbol{x}_B$ として端末変位ベクトルをとる方法（方法(a)）

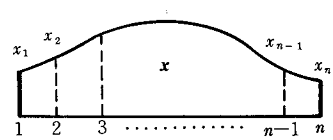
$\boldsymbol{x}_B$ として内部点では成分が零，端末点では与えられた強制変位 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{II}}$ を成分にもつベクトルを考える。すなわちEを単位行列として

$$\boldsymbol{x}_B=\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_{\mathrm{I}}\\ 0\end{bmatrix},\quad [T]=\begin{bmatrix}0\\ \mathrm{E}\end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.2.15)$$

とする。

たとえば，図3.2.1 に示すような質点系において，両端1, n に強制変位 x_1, x_n が与えられた結果図のような変位分布 $\boldsymbol{x}$ が生じたとすると，$\boldsymbol{x}_A$, $\boldsymbol{x}_B$ は図中のようなものとなる。$\boldsymbol{x}_B$ あるいは $[T]$ をこのようにとると式 (3.2.10) における加振項は

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{I}}=\begin{bmatrix}x_2\\ x_3\\ \vdots\\ x_{n-1}\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{x}_{\mathrm{II}}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_n\end{bmatrix}$$



$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{x}_A=\begin{bmatrix}0\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ 0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{x}_B=\begin{bmatrix}x_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ x_n\end{bmatrix}$$

図 3.2.1　内部点ベクトルと端末点ベクトル

$$\begin{aligned}N_j^{\mathrm{T}}[M][T]\ddot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{II}}&=[N_{\mathrm{I}j}^{\mathrm{T}},\ 0]\begin{bmatrix}M_{11} & M_{12}\\ M_{21} & M_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \ddot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}\\ &=N_{\mathrm{I}j}^{\mathrm{T}}[M_{12}]\ddot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{II}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.2.16)\end{aligned}$$

$$[N_j^{\mathrm{T}}[K][T]\boldsymbol{x}_{\mathrm{II}}=[N_{\mathrm{I}j}^{\mathrm{T}},\ 0]\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}=N_{\mathrm{I}j}^{\mathrm{T}}[K_{12}]\boldsymbol{x}_{\mathrm{II}}\cdots\cdots\cdots (3.2.17)$$

ただし，$N_{\mathrm{I}j}$ は振動モード$\boldsymbol{N}_j$のうち内部点成分に関するベクトルである。集中定数系の場合質量マトリックス[M]は対角マトリックスとなるので式（3.2.16）は零となり，また有限要素法を用いた場合でも式（3.2.16）の値は式（3.2.17）の値に比べて小さく，加振周波数が特に高くならない限り無視してよい。それゆえ式（3.2.10）における加振項は弾性力によるものだけとなり，その励振係数を αで表わすと，モードごとの運動方程式は次式のようになる。

$$\ddot{\varphi}_j+2h_j p_j \dot{\varphi}_j+p_j^2 \varphi_j=-\boldsymbol{\alpha}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_{\mathrm{II}} \quad \cdots\cdots(3.2.10)'$$

ただし

$$\boldsymbol{\alpha}_j^{\mathrm{T}}=\frac{1}{m_j} N_{\mathrm{I}j}^{\mathrm{T}}[K_{12}] \quad \cdots\cdots (3.2.18)$$

変位加振による振動が問題になる場合には，固有値解析の際に励振係数α_{jk}を求めておくことにより運動方程式(3.2.10)′を構成することができ，これを解けばモーダル応答$\boldsymbol{\varphi}_j$，$\ddot{\boldsymbol{\varphi}}$ などが求められる。

節点における変位や加速度の全応答量は式（3.2.13）より求められるが，配管系内部の値を問題にする場合には，式（3.2.15）に示す$\boldsymbol{x}_B$の定義から系内部ではその成分は零であり，式（3.2.13）における強制変位の項は省略できて次式のように表わすことができる。

$$\boldsymbol{x}=[N]\boldsymbol{\varphi},\ \ \dot{\boldsymbol{x}}=[N]\dot{\boldsymbol{\varphi}},\ \ \ddot{\boldsymbol{x}}=[N]\ddot{\boldsymbol{\varphi}} \quad \cdots\cdots (3.2.13)'$$

ただし，応力を計算しようとする場合，式（3.2.14）をそのまま適用すると端末点近くの解析精度が落ちるので，式(3.2.13)′によって求めた加速度分布 $\ddot{\boldsymbol{x}}$から慣性力を計算し，それから部材力を計算し直したほうがよい。すなわち式(3.2.1)を変形して系の変位を求めると

$$\boldsymbol{x}=[K]^{-1}\boldsymbol{f}-[K]^{-1}[C]\dot{\boldsymbol{x}}-[K]^{-1}[M]\ddot{\boldsymbol{x}} \quad \cdots\cdots (3.2.19)$$

$\ddot{\boldsymbol{x}}$, $\dot{\boldsymbol{x}}$に式 (3.2.13)′ を代入し，さらに左から力変換マトリックス$[B]$を掛けて部材力 $\boldsymbol{q}$ を求めると

$$\boldsymbol{q}=[B]\boldsymbol{x}=[B][K]^{-1}\boldsymbol{f}-[B][K]^{-1}[C][N]\dot{\boldsymbol{\varphi}}-[B][K]^{-1}[M][N]\ddot{\boldsymbol{\varphi}} \quad \cdots\cdots(3.2.20)$$

となる。ただし$[B]$は節点変位と部材力を関係づけるマトリックスで，第1章の **1.2** で述べたものである。上式右辺第1項については後述の式 (3.2.24)，式 (3.2.25) を用いればつぎの関係が導かれる。

$$[K]^{-1}\boldsymbol{f}=[\boldsymbol{N}_1^* \;\; \boldsymbol{N}_2^* \;\cdots\cdots\; \boldsymbol{N}_l^*]\,\boldsymbol{x}_{\mathrm{II}}$$

$$\therefore [B][K]^{-1}\boldsymbol{f}=[B][\boldsymbol{N}_1^* \;\cdots\cdots\; \boldsymbol{N}_l^*]\,\boldsymbol{x}_{\mathrm{II}}=[\boldsymbol{S}_1^* \;\; \boldsymbol{S}_2^* \;\cdots\cdots\; \boldsymbol{S}_l^*]\,\boldsymbol{x}_{\mathrm{II}}$$

ただし，$\boldsymbol{S}_k^*=[B]\boldsymbol{N}_k^*$である。また$\boldsymbol{N}_k^*$は加振点 k において単位の変位を生じさせるような力を加えたときの静たわみモードであり，$\boldsymbol{S}_k^*$はそのときに発生する部材力のモードである。

また第2項については，一般に減衰力は慣性力に比べて小さいので無視できる。第3項については固有値の性質からつぎの関係

$$[K]^{-1}[M][N]=\left[\frac{\boldsymbol{N}_1}{p_1^2},\; \frac{\boldsymbol{N}_2}{p_2^2}\;\cdots\cdots\;\frac{\boldsymbol{N}_n}{p_n^2}\right]$$

$$\therefore [B][K]^{-1}[M][N]=\left[\frac{\boldsymbol{S}_1}{p_1^2},\; \frac{\boldsymbol{S}_2}{p_2^2}\;\cdots\cdots\;\frac{\boldsymbol{S}_n}{p_n^2}\right] \quad \cdots\cdots(3.2.21)$$

が成り立つので，結局式 (3.2.20) はつぎのように表わされる。

$$\boldsymbol{q}=[\boldsymbol{S}_1^*,\;\; \boldsymbol{S}_2^* \;\cdots\cdots\; \boldsymbol{S}_l^*]\,\boldsymbol{x}_{\mathrm{II}}-\left[\frac{\boldsymbol{S}_1}{p_1^2},\; \frac{\boldsymbol{S}_2}{p_2^2}\;\cdots\cdots\;\frac{\boldsymbol{S}_n}{p_n^2}\right]\ddot{\boldsymbol{\varphi}} \quad \cdots\; (3.2.14)'$$

したがって，方法*(a)*によって応力計算をする場合は式(3.2.14)の代りに式(3.2.14)′ を用いることになる。

特に配管系の端末点 k が正弦的に加振される場合，$\boldsymbol{x}_{\mathrm{II}}$の k 方向成分の

振幅をX_kとすれば，j次のモーダル変位振幅Φ_jは式（3.2.10)′を解いてつぎのように求められる。

$$\Phi_j = \frac{-\sum_{k=1}^{l} \alpha_{jk} X_k}{p_j^2 - \omega^2 + \mathrm{i}\, 2h_j p_j \omega} \cdots\cdots (3.2.22)$$

したがって節点iにおける変位振幅X_i，加速度振幅A_i，および部材力振幅Q_iの応答は，振動モード，部材力モード，および静部材力モードのi方向成分をそれぞれa_{ij}，s_{ij}，s_{ik}^{*}とすれば式（3.2.13)′，式(3.2.14)′より次式のように求められる。

$$\left.\begin{aligned}
X_i &= -\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij} \sum_{k=1}^{l} \alpha_{jk} X_k}{p_j^2 - \omega^2 + \mathrm{i}\, 2h_j p_j \omega} \\
A_i &= -\sum_{j=1}^{n} \frac{-a_{ij}\, \omega^2 \sum_{k=1}^{l} \alpha_{jk} X_k}{p_j^2 - \omega^2 + \mathrm{i}\, 2h_j p_j \omega} \\
Q_i &= \sum_{k=1}^{l} s_{ik}^{*} X_k - \sum_{j=1}^{n} \frac{s_{ij} (\omega^2 / p_j^2) \sum_{k=1}^{l} \alpha_{jk} X_k}{p_j^2 - \omega^2 + \mathrm{i}\, 2h_j p_j \omega}
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (3.2.23)$$

2.2.2　$\boldsymbol{x}_B$として静的変位ベクトルをとる方法（方法*(b)*）

$\boldsymbol{x}_B$として端末に$\boldsymbol{x}_{\mathrm{II}}$が静的に加えられたとしたときの静的変位をとり，残りの動的変位を$\boldsymbol{x}_A$とする。すなわち変換マトリックス[T]として,次式

$$[T] = [N_1^{*},\ N_2^{*},\ \cdots\cdot N_l^{*}] \cdots\cdots (3.2.24)$$

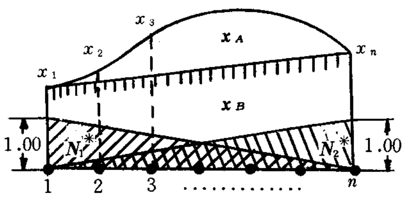
のような静たわみベクトルN_k^{*}から成るマトリックスを採用し,式(3.2.3)によって$\boldsymbol{x}_B$を定める。ここでN_k^{*}は配管系における他の端末点は固定したまま，端末点kだけを単位量静的変位させたときの静たわみ分布を表わすベクトルで，固有値解析の際に容易に求めておくことができる。ま

た一方，x_Bは式（3.2.1）においてfが静的に加えられたときの静的変位としても得られるから次式が成立する。

$$x_B=[T]x_{\mathrm{II}}=[K]^{-1}f \quad \cdots\cdots (3.2.25)$$

図3.2.2はx_Bなどを簡単に説明したものである。式（3.2.25）の関係を用いると式（3.2.10）の右辺第2項は

$$N_j^{\mathrm{T}}[K][T]x_{\mathrm{II}}=N_j^{\mathrm{T}}[K][K]^{-1}f=N_j^{\mathrm{T}}f=0$$



$x=x_A+x_B$, $x_B=[T]x_{\mathrm{II}}$

$[T]=[N_1^*, N_2^*]$, $x_{\mathrm{II}}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_n \end{bmatrix}$

図 3.2.2 静的変位ベクトルと動的変位ベクトル

となる。なぜなら$[K][T]x_{\mathrm{II}}$は上式のように端末点だけに力が作用する力ベクトルfとなり，これに端末変位成分が零である振動モードN_j^{T}を乗じても零となるからである。それゆえ，励振項としては第1項の慣性力によるものだけを考えればよく，この励振係数をβで表わすと，式（3.2.10）は次式のように書き表わされる。

$$\ddot{\varphi}_j+2h_j p_j\dot{\varphi}_j+p_j^2\varphi_j=-\beta_j^{\mathrm{T}}\ddot{x}_{\mathrm{II}} \quad \cdots\cdots (3.2.10)''$$

ただし

$$\beta_j^{\mathrm{T}}=\frac{1}{m_j}N_j^{\mathrm{T}}[M][N_1^*,\ N_2^* \cdot\cdot\cdot\cdot N_l^*] \quad \cdots\cdots (3.2.26)$$

ここでの励振係数β_{jk}は通常の耐震設計で用いられているものの拡張されたものであり，塔状構造物のように端末加振点が1箇所でN_k^*が剛体変位モードである場合は，従来使用されている係数と全く同じものになる。固有値解析の際，式（3.2.26）で定義される励振係数β_{jk}を求めておけば端末に強制加速度$\ddot{x}_{\mathrm{II}}$が与えられたときの運動方程式は式(3.2.10)″となり，これを解けばモーダル応答φ_jなどが得られる。φ_jなどがわかれば節点変位，応力などは式（3.2.13），式（3.2.14）によって計算できる

が，$[T]$として$[N_1^*, N_2^* \cdots\cdots N_l^*]$を採用しているこの場合には

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= [N_1^* \cdots\cdots N_l^*]\,\boldsymbol{x}_{\mathrm{II}} + [N]\,\boldsymbol{\varphi} \\ \dot{\boldsymbol{x}} &= [N_1^* \cdots\cdots N_l^*]\,\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{II}} + [N]\,\dot{\boldsymbol{\varphi}} \\ \ddot{\boldsymbol{x}} &= [N_1^* \cdots\cdots N_l^*]\,\ddot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{II}} + [N]\,\ddot{\boldsymbol{\varphi}} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots \quad (3.2.13)''$$

$$\boldsymbol{q} = [S_1^* \cdots\cdots S_l^*]\,\boldsymbol{x}_{\mathrm{II}} + [S]\,\boldsymbol{\varphi} \cdots\cdots \quad (3.2.14)''$$

となる。

特に端末点kにおいて強制加速度$-\omega^2 X_k e^{i\omega t}$で正弦波加振される場合は，方法(a)の場合と同様にして，X_i，A_i，Q_iがつぎのように求められる。

$$\left.\begin{aligned} X_i &= \sum_{k=1}^{l} a_{ik}^* X_k - \sum_{j=1}^{n} \frac{-a_{ij}\,\omega^2 \sum_{k=1}^{l} \beta_{jk} X_k}{p_j^2 - \omega^2 + i\,2h_j p_j \omega} \\ A_i &= -\sum_{k=1}^{l} \omega^2 a_{ik}^* X_k - \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}\,\omega^4 \sum_{k=1}^{l} \beta_{jk} X_k}{p_j^2 - \omega^2 + i\,2h_j p_j \omega} \\ Q_i &= \sum_{k=1}^{l} s_{ik}^* X_k - \sum_{j=1}^{n} \frac{-s_{ij}\,\omega^2 \sum_{k=1}^{l} \beta_{jk} X_k}{p_j^2 - \omega^2 + i\,2h_j p_j \omega} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots \quad (3.2.27)$$

2.3 解析手順

変位加振を受ける配管系の振動応答をモーダルアナリシスによって解析する場合，図3.2.3に示すような順序に従って行なわれる。このうちのほとんどは前章で述べた力加振の場合と同じであるが，相違のある点に留意してもう一度記載する。

(1) 配管系のモデル化

(2) 有限要素法などによる固有値方程式の作成と固有値解析

(3) 励振係数α_{jk}，β_{jk}，部材力モード$\boldsymbol{S}_j$，静たわみモード$\boldsymbol{N}_j^*$，静部材力モード$\boldsymbol{S}_j^*$の計算

力加振の場合はモーダル質量m_jを求めたが，それに代るものとして式（3.2.18），式（3.2.26）で定義されるα_{jk}またはβ_{jk}を求めておく。さらにモーダル変位から節点変位や応力を求める際にN_k^*，S_k^*が必要になるので，**2.2**で定義されるそれらの値を求めておく。

(4) モーダル減衰率h_jの推定

(5) モードごとの運動方程式を解く

(6) 節点変位，応力などの計算

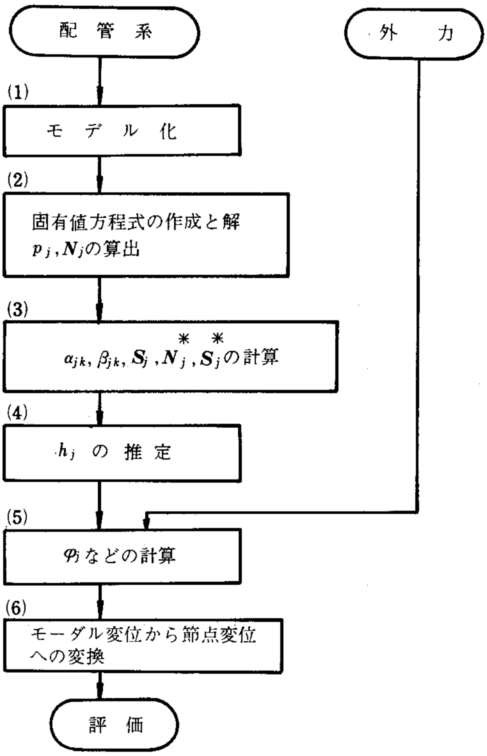


図 3.2.3 フローチャート

式（3.2.13)″，式（3.2.14)″などによりモーダル変位から節点変位に関する量へ変換するが，ここで力加振の場合と異なるのは強制変位ベクトルに関する成分を付け加える必要のあることである。しかし共振領域など応答変位成分が大きい場合を扱うときはこの項は省略してよいと考えられる。

2.4 解析と実験

第1章で用いた三種のモデル配管系を利用して動電形加振器による強制変位加振実験を行ない，解析値と比較する。以下に解析と実験の方法を説明する。

2.4.1 計算方法

実験値と比較すべき解析値を求める際の取扱いかたは，前章1.4.1で説明したものとほとんどである。異なる点は応答計算に式（3.2.23)，式（3.2.27）を用いることである。

2.4.2 実験方法

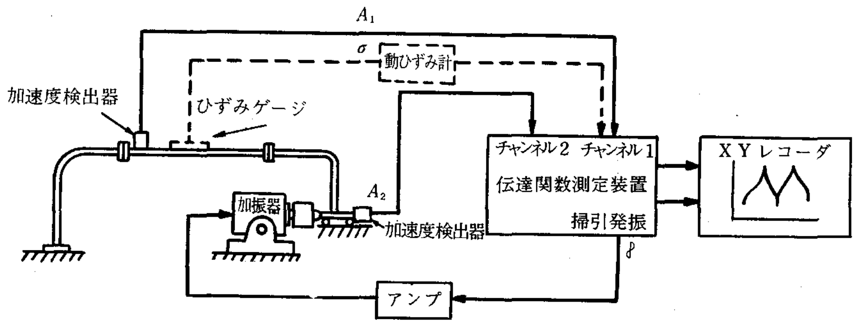


図 3.2.4 実験装置

図3.2.4に示すように，モデル配管系の一端を可動支持とし，そこに動電形加振器を設置する。加振器は伝達関数測定装置（T.F.A）に内蔵された発振器信号により駆動され，配管系端末部を強制的に正弦波で加振する。このときT.F.Aのチャンネル2で端末点の振動を，チャンネル1で内部点の振動または応力を測定する。振動の測定には，T.F.Aに内蔵された加速度計を用い，また応力を測定する場合は図の破線のようにチャンネル1に動ひずみ計を接続して以下のような測定を行なう。

(1) 固有値実験

(1.1) 固有振動数の測定

加振周波数を適当な範囲で掃引し，そのときの内部点と端末点の加速度の比A_1/A_2をXYレコーダに記録する。このときA_1/A_2がピークを示す，すなわちA_2が零になる周波数が端末を固定としたときの固有

振動数になる。

(1.2)　固有振動モードの測定

周波数を共振周波数に合わせ，チャンネル2の加速度計を端末点以外の基準点に取り付ける。そしてこの加速度が一定になるように監視しながらチャンネル1により各点の加速度の大きさを測定し，相対的な振幅比を求める。

(2)　応答実験

(2.1)　強制振動モードの測定

周波数を共振点以外の周波数に設定し，チャンネル2により端末の加速度が一定になるよう監視しながら，チャンネル1により内部点の加速度を測定する。

(2.2)　内部点加速度と端末点加速度の比A_1/A_2の周波数応答の測定

(1.1)と同様である。

(2.3)　内部点応力と端末点加速度の比σ/A_2の周波数応答の測定

図 3.2.4の破線で示すように，チャンネル1の加速度計に換えて動ひずみ計を接続し，(1.1)と同様の操作を行なう。

2.5　解析値と実測値との比較

(1)　一次元モデル

一次元モデルとして，図3.2.5(a)に示すような2本の直管から成る配管系に対し，一端を上下方向に変位加振する場合を取り扱う。これを同図(b)のように11節点に分割し，一端固定，他端支持の境界条件で固有値解析を行なった。その結果を表3.2.1および図3.2.6，図3.2.7らに示す。振動モードは振幅の最大値を単位量になるように規準化している。図3.2.6に固有振動数，振動モードの実測値も記入しているが，計算値とよい一致を示して

いる。図3.2.7，図3.2.8には応答結果とともに固有値解析の際求めた静たわみモード，静部材力モードも示している。

つぎにこれらの諸量を用いて応答計算を行ない，実測値および直接解と比較した。図 3.2.7 には周波数をパラメータとして，すなわち8.5Hz，16.7Hz，25Hz，および95Hzの周波数に対して節点11を z 方向に単位振幅で加振したときの強制振動の変位，または加速度の分布を示す。図ではモーダルアナリシスによる*(a)*，*(b)*の方法と直接解，実測値の四者の比較を示している。ここでとりあげた周波数は共振点から相当離れたところであり，モーダルアナリシスを行なう

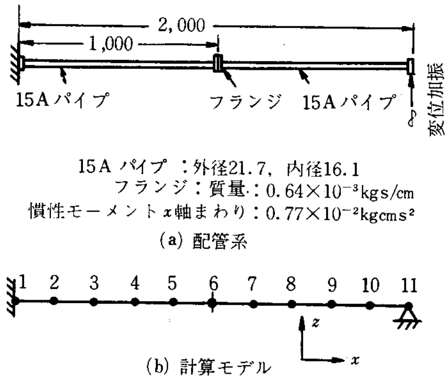


図 3.2.5 一次元モデル

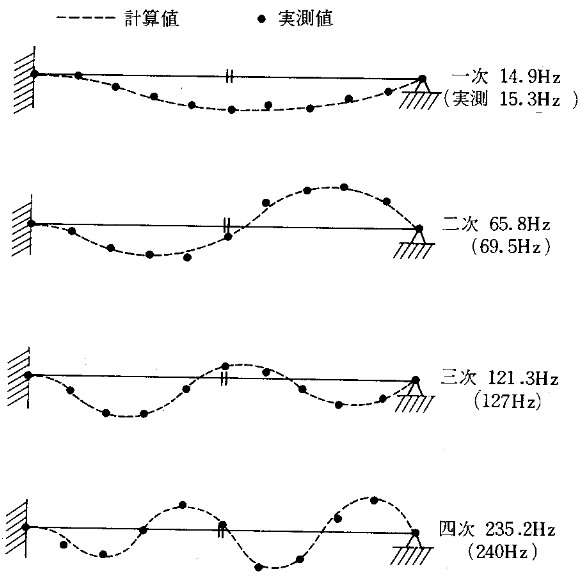


図 3.2.6 固有振動数および振動モード

表 3.2.1 一次元モデルの固有値解析結果

次数	1	2	3	4	5	6
固有振動数 Hz	14.9	65.8	121.3	235.2	330	502
節点11の z 方向励振係数 α_j 1/s^2	-0.360×10^4	5.85×10^4	-9.54×10^4	30.64×10^4	-25.5×10^4	50.0×10^4
〃 β_j	0.417	−0.369	0.190	−0.190	0.092	−0.130

場合かなり条件の悪い周波数領域であると考えられるが，方法*(a)*において端末部近くで若干精度が落ちる点を除けば，モーダルアナリシスによる方法は直接解，実測値とよい一致を示している。共振領域で加振した

場合には端末部に比較して相対的に内部の変位が大きくなり，変位曲線も共振周波数に対応する固有振動モードで十分に表現できるようになるためモーダルアナリシスを適用した場合の精度はさらによくなる。

方法(a)において端末部で精度が落ちるのは図 3.2.1 からもわかるように端末部分で不連続な内部変位曲線をモード関数で表わそうとするためであり，静的変形に近い低周波領域での加振時のように，端末に比べて内部の振動が小さいときには誤差が大きくなる。しかし実際上問題となるのは，共振領域でのように端末に比べて内部の振動が大きくなる場合であり，このときは，

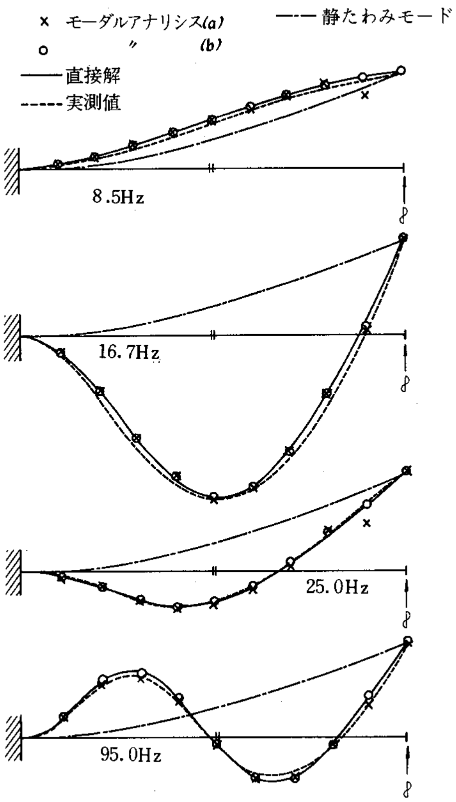


図 3.2.7 強制振動モード

表 3.2.2 モーダル変位振幅 Φ_j cm

	周波数＼次数	1	2	3	4	5	6
方 法(a)	8.5 Hz	0.612	−0.349	0.166	−0.142	−0.059	−0.049
	16.7 〃	−1.645	−0.368	0.169	−0.143	−0.059	−0.049
	25.0 〃	−0.236	−0.405	0.174	−0.144	−0.060	−0.050
	95.0 〃	−0.016	0.366	0.467	−0.179	−0.067	−0.054
方 法(b)	8.5 Hz	−0.201	−0.006 5	0.009 5	−0.000 25	0.000 06	−0.000 04
	16.7 〃	−2.053	−0.026 2	0.003 7	−0.000 97	0.000 24	−0.000 01
	25.0 〃	−0.647	−0.064	0.008 5	−0.002 2	0.000 54	−0.000 3
	95.0 〃	−0.427	0.729	0.305	−0.037	0.008 5	−0.004 6

方法(a)における端末部精度も改善されて実用に供することができると考らえられる。方法(b)を用いた場合はいずれの場合も良好な結果を示している。このときのモーダルアナリシスに用いたモードは一次～六次であるが，

振幅1cmで加振したときの各周波数におけるモーダル変位振幅の大きさΦ_jを表3.2.2に示す。表からわかるようにその成分は加振周波数に近い固有振動数をもつモードが主成分を占め，離れた固有振動数をもつモードは小さくなっており，加振周波数近傍の数個の固有振動モードを考慮すれば十分な精度が得られることを示している。

図3.2.8は8.5Hz，25Hz，95Hzの周波数で変位加振したときの部材力，この場合にはy軸まわりのモーメント分布を，モーダルアナリシスによる*(a)*，*(b)*の方法と直接解法により求めた値を比較したものである。三者はいずれもよく一致している。モーメントを算出するときに用いた式（3.2.23）および式（3.2.27）はいずれも静部材力と動部材力の和として表わされているが，図3.2.8においては固有値解析の際に求めた静部材力の分布も示している。加振周波数が低い場合は慣性力が小さいので静部材力が主成分を占めるが，ある程度周波数が高くなると，特に共振振領域においては動部材力の成分が大きくなって静部材力は無視することができる。

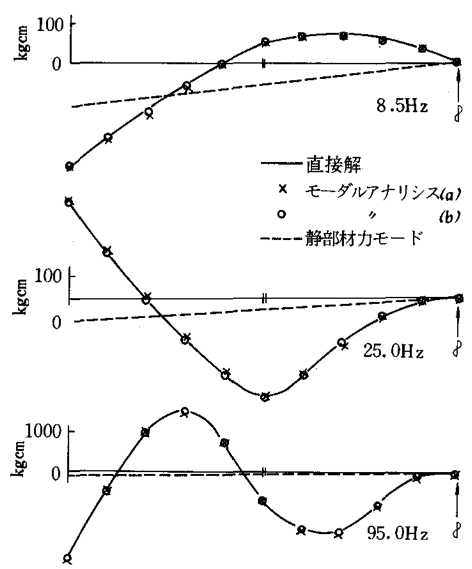


図 3.2.8 強制振動におけるモーメント分布

図3.2.9は節点6のz方向加速度A_{6z}を端末点加速度A_{11z}で割った値，すなわちA_{6z}/A_{11z}の周波数応答を示したものである。これはまた変位振幅の比X_{6z}/X_{11z}でもある。縦軸はデシベルで表示しており，0dBは節点6と端末点11の振動の大きさが等しくなる値をとっている。横軸の周波数は等分目盛で表わしており，ピークのところが共振点である。

図3.2.10は節点2におけるx方向表面応力σ_{2x}と端末点11の加速度A_{11z}の比σ_{2x}/A_{11z}の周波数応答を示したもので，σ_{2x}はy軸まわりのモーメントを断面係数で割った値，または動ひずみ計により測定した表面応力を表わしている。この場合の縦軸における0 dBはkg，cm，s系での単位量を表わし，以後の応力周波数応答線図においても同様である。図3.2.9，図3.2.10においてはモーダルアナリシスによる方法(a)，(b)の結果はほとんど一致し，いずれも実験値とよい対応を示している。40Hz以上の周波数において計算値と実測値にやや差があるのは，固有振動数が4％程度ずれているのがおもな原因と考えられる。

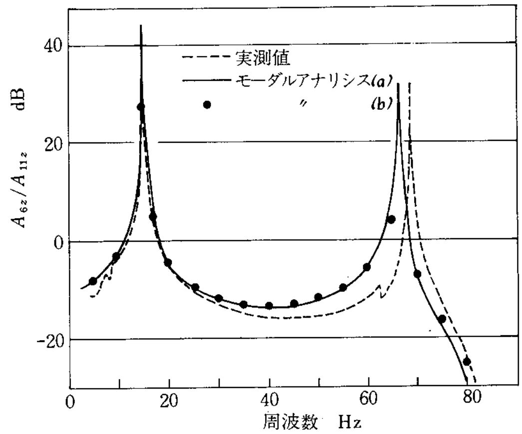


図 3.2.9 A_{6z}/A_{11z}の周波数応答

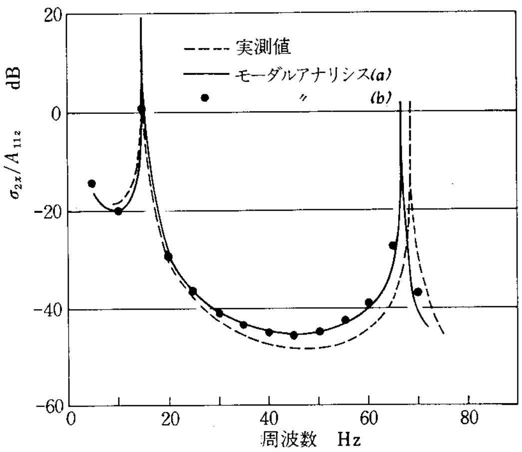


図 3.2.10 σ_{2x}/A_{11z}の周波数応答

(2) 二次元モデル

二次元モデルは図3.2.11(a)に示すような配管系において，その右端をx方向に変位加振するモデルである。これを同図(b)のように9節点に分割して計算した。固有値解析の結果は第1章表3.1.3に示すものと同一なので，ここでは励振係数，静たわみモード，および静部材力モードだけを表3.2.3，図

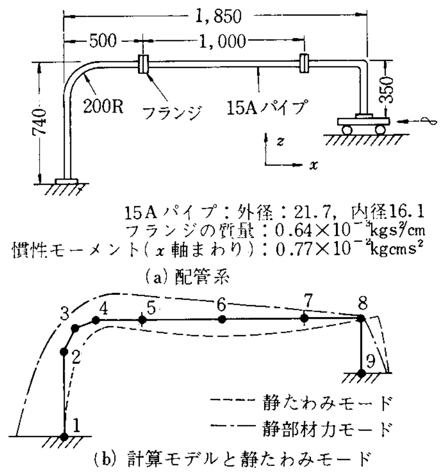


図 3.2.11 二次元モデル

3.2.11(b)に示す。

図3.2.12に8 Hz, 27Hz, 72Hzの周波数において，節点9をx方向に単位振幅で加振したときの強制振動モードを示す。これらの図ではモーダルアナリシスを用いた方法(a), (b)の計算値はいずれも，直接解および実測値とよく合っている。表3.2.4にはモーダルアナリシスにおけるモーダル変位振幅

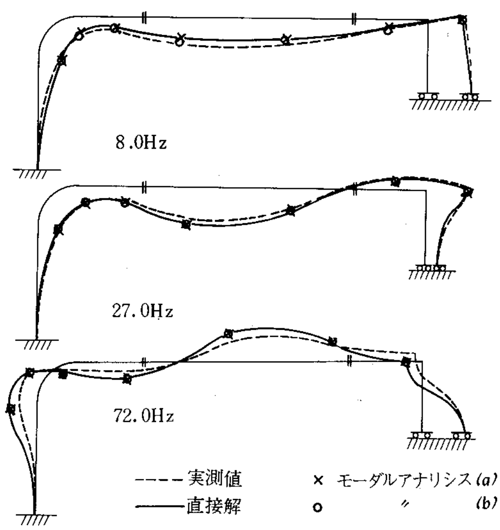


図 3.2.12　強制振動モード

表 3.2.3　二次元モデルの固有値解析結果

次数	1	2	3	4	5	6
固有振動数 Hz	22.2	30.2	55.8	118.4	206.9	322.3
節点9のx方向励振係数 α_j 1/s²	0.136×10^4	-2.63×10^4	-5.23×10^4	10.98×10^4	-3.68×10^4	7.73×10^4
〃 β_j	−0.071	0.738	0.429	−0.211	0.023	−0.024

表 3.2.4　モーダル変位振幅 Φ_j cm

	周波数＼次数	1	2	3	4	5	6
方　法(a)	8.0 Hz	−0.080	0.788	0.435	−0.199	0.021 9	−0.018 9
	27.0 〃	0.138	3.700	0.588	−0.210	0.022 2	−0.019 0
	72.0 〃	0.004 2	−0.163	−0.654	−0.319	0.024 9	−0.020 1
方　法(b)	8.0 Hz	−0.010 9	0.055 4	0.009 0	−0.000 9	0.000 0	−0.000 0
	27.0 〃	0.228	2.950	0.129	−0.011	0.000 4	−0.000 1
	72.0 〃	0.081 2	−0.888	−1.060	−0.118	0.003 1	−0.001

Φ_jの大きさを示した。8 Hzの周波数における振動変位はほとんど静的変位によるもので，したがって方法(b)で解析した場合は表3.2.4からもわかるように動的変位成分はきわめて小さい。27Hz, 72Hzになると動的変位はかなり大きくなる。

図3.2.13には節点5のz方向加速度A_{5z}と加振点9のx方向加速度A_{9x}の比A_{5z}/A_{9x}の周波数応答結果を示す。方法(a), 方法(b)による結果はほ

とんど一致し，ともに実測値とよく合っている。10Hz付近の実測値が揺れているのは計測時のノイズと思われ，また50Hz，62Hzあたりで小さなピークを示しているのは，面外の固有振動数がこの近くにあり，面外の共振が現われたものである。

図3.2.14には節点６における x 方向応力 σ_{6x} の周波数応答の結果を示した。方法(a)と方法(b)とは１～２％程度の差で一致し，図に表わした場合はほとんど差が認められない。そしてこれらは反共振点付近を除いて実測値ともよく合っている。

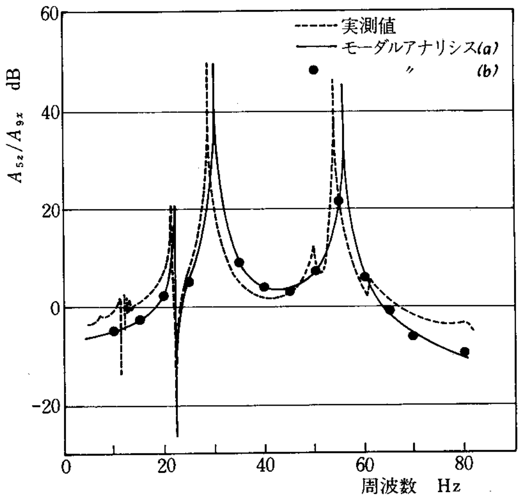


図 3.2.13 A_{5z}/A_{9x} の周波数応答

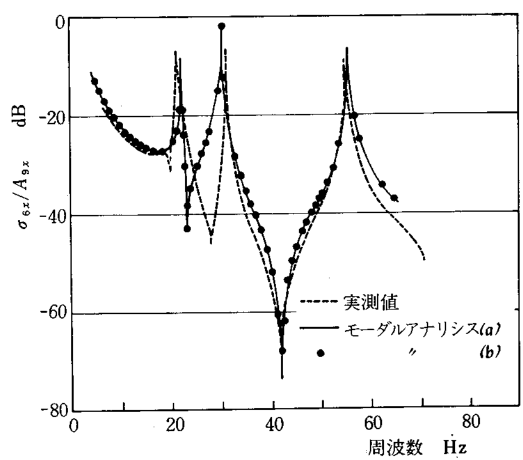


図 3.2.14 σ_{6x}/A_{9x} の周波数応答

(3) 三次元モデル

三次元モデルは図3.2.15(a)に示すような配管系で，その右端を変位加振するモデルである。これを同図(b)のように16節点15要素に分割して計算した。節点16を固定として固有値解析した結果は第１章の表3.1.5の値と同一であるのでここでの掲載は省略する。

節点16をローラ支持して x 方向のみに可動できる構造とし，x 方向に加振力を与えて強制変位加振を行なった。そのときの内部点，ここでは例として節点７の y 方向振動を測定した結果を図3.2.16に示す。図には

方法(a)および方法(b)による計算結果も載せているが，実測値とは比較的よく合っている。実測値が全体的に低周波側に寄っているのは，x方向に可動のローラ支持をした場合，他の方向成分に対して固定の条件が達成しにくくなり，共振点が理論値よりも低く出たためであると思われる。実際，図3.2.16においてピークを示す周波数，すなわち共振周波数は端末点16を完全固定として測定した第

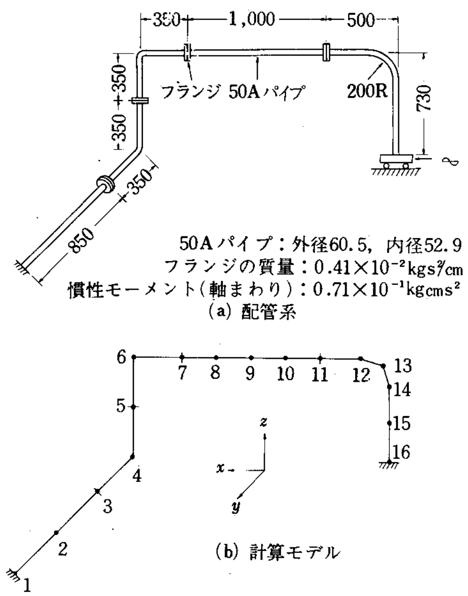


図 3.2.15　三次元モデル

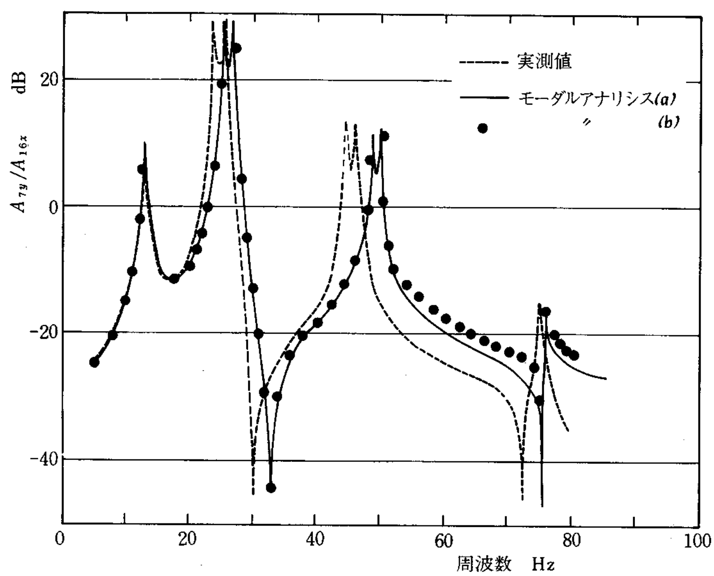


図 3.2.16　A_{7y}/A_{16x}の周波数応答

1章での固有振動数（図3.1.19などにおける共振周波数）より若干低めに現われており，特に45Hz付近に出ている二つのピークはこの傾向が著しい。

つぎに，節点16のローラ支持をはずし防振ゴムを敷いてx，y，z，

θ_x，θ_y，θ_zの６方向に可動の弾性支持とした。この状態で節点16を加振器で斜め方向から正弦波加振し，節点16における６方向振動成分と，内部点ここでは節点5，7，11における x，y，z の３方向の振動を測定したのが表3.2.5および表3.2.6の値である。機器類に接続される配管系などにおいては端末部である機器類の機械振動の大きさから配管系の振動応答を予測する必要があるが，このモデルで言えば節点16の振動が既知として内部点の応答を推定することに相当する。そこで表3.2.5に示された端末点の実測値が与えられたとして，モーダルアナリシスによる方法*(a)*，方法*(b)*および直接解法を用いて内部点の振動の大きさを計算したのが表3.2.6である。方法*(a)*および方法*(b)*によるものはともに直接解とかなりの精度で一致している。また実測値と比較すると一部差のあるところもあるが，振動の測定精度，特に端末点16の回転角成分の測定がむずかしいことを考えれば，表3.2.6の計算値と実測値との対応は良好なものであると考えられる。

表 3.2.5　端末点での振動測定値

測定点	周波数／測定方向	20.0Hz	40.0Hz	60.0Hz
節点16	x Gal	71	72	40
	y Gal	−11	−18.5	−5
	z Gal	45	−69.8	−8.5
	θ_x rad/s^2	−0.61	−1.65	−0.15
	θ_y rad/s^2	−1.92	−0.18	−1.27
	θ_z rad/s^2	0.31	−0.23	−0.51

表 3.2.6　振動応答の計算値と実測値との比較(単位はGal)

加振周波数		20.0Hz				40.0Hz				60.0Hz			
応答測定点	測定方向	方法*(a)*	方法*(b)*	直接解	実測値	方法*(a)*	方法*(b)*	直接解	実測値	方法*(a)*	方法*(b)*	直接解	実測値
節点 5	x	−64.0	−60.6	−63.8	−58	−45.5	−43.8	−41.9	−40	−0.5	0.1	2.0	1
	y	−33.8	−34.5	−34.4	−27	−57.5	−59.1	−59.6	−62	0.7	0.4	2.5	2.5
	z	−72.0	−74.4	−74.9	−67	15.1	13.9	15.3	28	0.1	0.3	1.0	6
節点 7	x	−33.7	−34.9	−34.4	−27	13.9	10.4	13.3	12	17.7	18.0	16.2	15
	y	−43.2	−43.1	−43.6	−49	−90.4	−88.8	−90.0	−82	−0.4	−1.0	2.0	2
	z	−34.4	−34.5	−34.0	−36	48.5	47.6	50.1	36	7.8	8.6	6.8	3
節点 11	x	−33.5	−35.0	−34.2	−33	14.1	10.6	12.9	6	17.7	17.9	16.0	17
	y	7.4	7.5	7.2	14	64.4	62.4	61.6	85	1.0	1.5	1.7	1
	z	55.2	56.1	56.0	57	−1.1	−3.4	−3.4	−2	−5.9	−6.6	−7.2	16

2.6 検　　討

変位加振を受ける配管系の振動応答をモーダルアナリシスを用いた二通りの解法によって求める方法について検討した。

方法(a)は，端末部が強制加振された場合，端末部と内部を結ぶ部材に伝達される弾性力が内部点の振動を発生させる強制外力になると考え，力加振の問題としてモーダルアナリシスにより解く方法である。端末部から内部に伝えられる力は弾性力だけでなく慣性力も存在するが，一般にこの量は小さく無視することができる。たとえば本章で示したモデルにおいては対象とする周波数領域において慣性伝達力は弾性伝達力に比べて１～２％程度であった。それゆえ，方法(a)を用いた場合は入力として端末部の変位の情報だけが与えられればよく，加速度の情報は不要となる。またこれに対する励振係数 α は式（3.2.18），つまり端末部材のばね定数とこれに接続する点の振動モード値の積から簡単に求められる。欠点としては，高次になるほど励振係数が大きくなり，モードの収束性があまりよくないこと，端末部分の不連続な変位曲線をモード関数の一次結合で表わそうとするため，特に最低次固有振動数以下の低周波領域において端末部付近の精度が落ちることである。

方法(b)は，全変位量を静的変位と動的変位に分解し，端末に強制変位が与えられた場合それに対応した静的変位がまず発生し，つぎに静的変位分布によって生じる慣性分布荷重が外力として動的変位を誘起すると考える。そして端末加振点に対する静たわみモードとそれによる各振動モードへの励振係数 β を固有値解析の際に求めておき，与えられた加速度入力と β の積で一般力を求め，力加振の問題としてモーダルアナリシスを適用する方法である。この方法では滑らかな動的変位曲線をモード関数の一次結合として表わすので，端末部付近においても精度は落ちずモードの収束性もよい。また，動的変位を求める場合に慣性荷重だけが問題となるので，端末部入力としては加速度の情報だけ与えられればよい。ただし全応答量を求めるためには静的変位の分を加える必要があり，これが無視できない場合は端末での変位の情報も必要となる。

励振係数βを求めるには端末部が単位量となるように規準化した静たわみモードを求め，式 (3.2.26) の演算を行なう必要があるが，方法(a)による励振係数 αが求まっている場合にはつぎの式から求めてもよい。すなわち共振点で正弦波加振をしている場合を考えると動的変位は静的変位に比べて十分大きくなり，式 (3.2.10)′ と式 (3.2.10)″ は同じ内容を表わすようになる。このとき$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}e^{ip_jt}$ と置けば$\boldsymbol{\alpha}_j^{\mathrm{T}} \fallingdotseq -p_j^2 \boldsymbol{\beta}_j^{\mathrm{T}}$が得られる。励振係数の各成分について書くと

$$\alpha_{jk} \fallingdotseq -p_j^2 \beta_{jk} \quad \text{または} \beta_{jk} \fallingdotseq -\alpha_{jk}/p_j^2$$

となる。本章で扱った配管モデルに対して上式を計算してみると，低次のモードに対しては数%程度の差で一致した。以上のことから共振領域を問題にする場合は，方法(a)と方法(b)は同じものであることがわかる。

2.7 耐震設計法との関連

配管系の端部は通常図 3.2.17に示すように，いくつかの機器類のいくつかの場所に別れて接続されている。このような配管系が地震入力を受けたときの応答を解析する場合は，あらかじめ配管接続点での地震応答を機器系の振動解析によって求めておき，これを配管系の入力として扱うのが普通である。たとえば図3.2.17のように l 個の端部をもつ配管系に対してある方向の地震が到来したときの応答を解析しようとする場合，本章で述べた解析法を適用するとモードごとの運動方程式は式 (3.2.10)″ より次式のようになる。以下簡単のために添字 j を省略して書くと

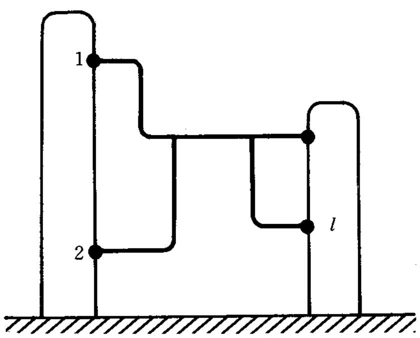


図 3.2.17 配管系

$$\ddot{\varphi}+2hp\dot{\varphi}+p^2\varphi=-(\beta_1\ddot{z}_1+\beta_2\ddot{z}_2+\cdots+\beta_l\ddot{z}_l) \quad \cdots\cdots\cdots (3.2.28)$$

ただし，$\ddot{z}_k$，（$k=1,2\ \cdots\cdots\ l$）は配管系の端末点kにおける加速度であり，あらかじめ機器系の地震応答解析によって求められているものとする。またβ_k（$k=1,2\ \cdots\cdots\ l$）は端末点kにおける加速度励振係数で式(3.2.26)より求められる量である。

ところで現実には式（3.2.28）の代りに，つぎの第3章**3.2**で述べるような1入力問題（塔槽類などのように地震による加振点が1箇所だけの場合，あるいは図3.2.17のように複数の加振点があってもこれらが全く同じ波形で加振されるような場合）の次式

$$\ddot{\varphi}+2hp\dot{\varphi}+p^2\varphi=-\beta\ddot{z} \quad \cdots\cdots (3.2.29)$$

ただし　$\beta=\dfrac{1}{m}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{M}]\boldsymbol{I}$

を用いて応答解析を行なっているのが実情である。

すなわち，多入力問題の式（3.2.28）を簡略化して1入力問題の式（3.2.29）に置き換えて解析することになっているが，このときの置き換えかたとしてつぎの二つの方法が考えられる。それを紹介する前に，まずβとβ_k（$k=1,2\ \cdots\cdots\ l$）との関係を求めておく。

多入力加振の場合においてもすべての加振点が同時に地震方向に静的に移動したとすると内部の配管系すべての点が剛体的に移動することになり，地震感度ベクトル$\boldsymbol{I}$と静たわみモードベクトル$\boldsymbol{N}_k^*$との間には

$$\boldsymbol{N}_1^*+\boldsymbol{N}_2^*+\cdots\cdots+\boldsymbol{N}_l^*=\boldsymbol{I}$$

の関係が成り立ち，この関係から励振係数間の関係としてつぎの式が成立する。

$$\beta_1+\beta_2+\cdots\cdots+\beta_l=\beta \quad \cdots\cdots (3.2.30)$$

さて，多入力間題を１入力問題で近似する方法を考える。

(1) 等価地震入力 $\ddot{z}$ として，それぞれの入力 $\ddot{z}_k$ のうち最大のものを用いる方法。　それぞれの入力波形が相似的である場合には，式（3.2.30）を用いると式（3.2.28）の右辺はつぎのように表わされる。

$$\beta_1\ddot{z}_1+\beta_2\ddot{z}_2+\cdots\cdots+\beta_l\ddot{z}_l\leqq\beta_1\ddot{z}+\beta_2\ddot{z}+\cdots\cdots+\beta_l\ddot{z}=\beta\ddot{z} \quad \cdots\cdot \ (3.2.31)$$

したがって式（3.2.28）の代りに式（3.2.29）を用いることは安全側の評価をしていることになる。

(2) それぞれの入力 $\ddot{z}_k$ に対する応答を単独に算出し，この中の最大値を多入力系の応答値とする方法。　これは床応答曲線を利用する場合に便利な方法である。入力 $\ddot{z}_k$ に対する加速度倍率を R_k とすると，$\ddot{z}_k$ による加速度応答は $R_k\beta_k\ddot{z}_{kmax}$ で表わされるが，床応答線図を使用する場合は $\beta_k=1$ としたときの応答 $R_k\ddot{z}_{kmax}$ が直ちに読み取れる。この中の最大値を $R\ddot{z}_{max}$ とおけば

$$\begin{aligned}&R_1\beta_1\ddot{z}_{1max}+R_2\beta_2\ddot{z}_{2max}+\cdots\cdots\cdots+R_l\beta_l\ddot{z}_{lmax}\\&\quad\leqq\beta_1(R\ddot{z}_{max})+\beta_2(R\ddot{z}_{max})+\cdots\cdots\cdots+\beta_l(R\ddot{z}_{max})\\&\quad=\beta R\ddot{z}_{max} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (3.2.32)\end{aligned}$$

となる。この $\beta R\ddot{z}_{max}$ は１入力問題で解析した床応答に励振係数を考慮して算出した応答値であり，この場合も安全側の評価をしていることになる。

(1), (2)いずれの方法を採用するにしても，現在行なわれている地震応答解析法はまずまず妥当なものであると言える。

しかし注目しなければならないのは，式（3.2.28）あるいは式(3.2.29)は配管系が地震による変位加振を受けたときの動的応答成分を求めているだけであり，実際はこれに強制成分，つまり図3.2.17において配管接続点

が強制的に変位したときに生じる静的成分を加える必要のあることである。配管系の剛性が低くてこれによる応力が無視できる場合には現状の解析状況で結構であるが，一般的には配管系が接続する塔槽類，建築物などは比較的固有振動数が低いので静的変位成分を無視できない。

このように，多入力問題を扱う場合には端末点の加速度入力による応答解析のほかに，さらに端末点での強制変位による静的解析も並行して行なう必要があると思われる。

2.8 結　　言

配管系がその境界から強制的に変位が加えられて振動する場合，すなわち変位加振を受ける場合について，振動応答をモーダルアナリシスによって解析する一手法を提案した。簡単なモデル配管系を用いて正弦波加振実験を行ない，その妥当性を検討した結果，つぎのことが明らかとなった。

(1) 変位加振を受ける場合は，系の変位を強制成分と応答成分に分解すれば応答成分の算出にモーダルアナリシスが適用でき，励振係数を導入することによって，力加振の場合と同様の問題に帰着できる。強制変位成分として端末変位成分をとる方法，および静的変位成分をとる方法について検討したが，いずれも良好な結果が得られ，解析手法の妥当性が確かめられた。

(2) 定量的な応答解析を行なうには加振入力のほか，固有振動数，減衰率，励振係数などの値が必要である。このうち加振入力，減衰率の大きさは不明確な場合が多いが，そのような場合でも本章で述べた励振係数を固有値解析の際に求めておけばモードごとの励振効果が評価でき，ある程度振動応答の大きさを予測することができる。

(3) 変位加振の場合はモーダルアナリシスによって求めるのは変位や応力の応答成分だけであり，強制成分が無視できない場合はこれを加え

る必要がある。現状における配管系の耐震設計法では応答成分は適切な1入力近似で算出されているが，強制成分については省略されている場合があるので注意を要する。

(4) 応答解析の精度を保つためには，固有振動数，減衰率などの振動特性量を正確に解析あるいは推定することが必要であり，第1章の力加振の場合について述べたと同様の注意が必要である。

以上本解法によって，従来実用的にはほとんど扱われていなかった外部からの機械振動に起因する配管系の応答解析，あるいは耐震設計における多入力問題の解析が比較的容易に実行できるようになった。なお，本章では端末部に強制変位が一方的に加えられる場合を検討したが，対象としている系がその外部と連成する場合においても，あらかじめ端末部を含む全体的な応答を求めておけば，それを入力として対象系細部の応答値を求めることにも適用できると考えられる。

第3章　配管系の弾塑性応答解析

3.1 緒　　言

原子力プラントや化学プラントに設置される重要機器については，設計段階において動的解析を主体とした十分な耐震上の強度検討が要求される。神奈川県では1973年に高圧ガス製造施設を対象とする耐震設計基準が制定され，以来他府県においてもこれに準じるようになり，設計における耐震解析の役割はますます重要になってきた。機器配管系の耐震設計法については「原子力発電所耐震設計技術指針」[45]や「コンビナート保安防災技術指針」[46]において詳細に説明されているが，これらは主として弾性理論に基づいている。しかし非鉄金属，高温材料においては厳密には弾性的挙動を示さないし，また弾性限のはっきりしている通常の炭素鋼を用いた機器配管系についても許容値を弾性限以上まで認めるとすれば，材料の塑性領域までを考慮した弾塑性動的応答解析が必要になる。単純なばねと質量で代表される構造物の弾塑性地震応答については土木，建築の分野で古くから研究されており，たとえば文献[64][65][66]らにおいていくつかの結果が紹介されている。機器配管系などの多自由度振動系に対しても計算機の発達した今日では，材料特性さえはっきりすれば有限要素法を用いて非弾性の運動方程式を導くことができ，あとは時刻歴の数値積分などによって応答量を求めることができる。しかしこの方法では計算時間が長くかかるほか，応答量が地震波形に依存するなど設計の立場からは満足できるものとは言えない。柴田ら[67]は以上のような問題点を指摘し，最近スペクトルを基本とした非定常解析手法を提案している。

このような背景から，本章では変位加振を受ける場合の応答解析法のうち，主として地震入力を受ける配管系の弾塑性応答解析法に関し，地震波形に依存しない安定な解を簡単に求めることをめざした一近似解法を提案

する。すなわち線形化の仮定を置くことによってモーダルアナリシスを近似的に弾塑性領域まで拡張し，応答線図を用いて弾塑性応答を算出することを試みる。まず弾性レベルでの通常の地震応答解析法について簡単に説明したあと，この手法を弾塑性領域まで拡張するための仮定と解析理論を紹介し，いくつかの計算例によってその妥当性を確かめる。また最後に実際の耐震設計への適用方法についても検討する。

3.2 弾性領域での応答解析法

プラントに設置される配管系の多くは図3.3.1 で示すように塔槽類や機器に接続されている。塔槽類や機器の重量は一般に配管系のそれに比べて大きいので，地震到来時の配管系の応答を解析するにはあらかじめ塔槽類や機器系を配管系とは独立に動的解析を行なって，配管との接続点たとえば図3.3.1 における点1,2の応答波形を求めておき，これを入力として配管系の振動応答を解析するのが普通である。このような場合は配管系の端末部に強制的に変位加振が行なわれる問題に相当し，モーダルアナリシスによって解く際には一般的には第3編第2章で述べたような方法を用いて解析しなければならない。すなわち配管接続点の位置，方向によってそれぞれ強制変位量が異なるので，各位置，各方向の強制変位に対する励振係数を第2章の方法で求めておき，これに各変位量を掛け合わせて各モードの一般力を算出し，力加振の問題として解いてゆくことになる。

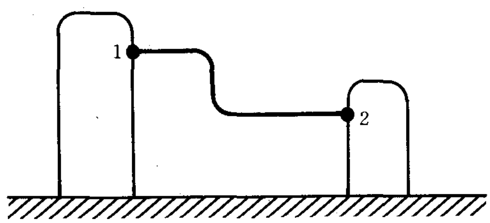


図 3.3.1 配管系の例

しかし現在一般に採用されている方法はつぎのように簡略化したものである。すなわち，配管系の接続点1,2などにおける強制変位は地震到来方向だけに成分をもち，その大きさは各位置で全く同じものと仮定する。こ

のようにすると，配管系の地震応答解析は塔槽類の地震応答解析の場合と同様に加振点が1箇所だけである1入力問題として扱うことができる。この場合には変換マトリックス$[T]$として地震感度ベクトル$\boldsymbol{I}$をとることができ，第2章で述べた強制変位ベクトル$\boldsymbol{x}_B$は，$\boldsymbol{I}$と加振点（接続点）における地震入力$\boldsymbol{z}$の積で次式のように表わされる。

$$\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{I}\boldsymbol{z}$$

あるいは $\ddot{\boldsymbol{x}}_B=\boldsymbol{I}\ddot{\boldsymbol{z}}$ ……………………………………………… (3.3.1)

ここで$\boldsymbol{z}$，$\ddot{\boldsymbol{z}}$は配管接続点において与えられる変位および加速度の地震入力を示す。また地震感度ベクトル$\boldsymbol{I}$は第2章で述べた静たわみモード$\boldsymbol{N}_k^*$に相当するもので，各節点において地震到来方向に単位の大きさの成分をもつベクトルである。

式（3.3.1）で表わされる$\boldsymbol{x}_B$を用いて変位加振を受ける場合の運動方程式（3.2.4)を書き直すと，配管系の加振点との相対変位を表わす応答ベクトル$\boldsymbol{x}_A$を求める式は添字$_A$を省略すれば，次式のように表わされる。

$$[M]\ddot{\boldsymbol{x}}+[C]\dot{\boldsymbol{x}}+[K]\boldsymbol{x}=-[M]\boldsymbol{I}\ddot{\boldsymbol{z}} \quad \cdots\cdots (3.3.2)$$

ただし，式（3.2.4）に代入した際右辺の第1項，第3項，第4項は第2章で扱ったときと同様の理由で省かれている。

モーダルアナリシスを用いて式（3.3.2）を解く方法をもう一度簡単に説明すると，まず式（3.3.2）に対応する固有値方程式

$$[K]\boldsymbol{N}=p^2[M]\boldsymbol{N} \quad \cdots\cdots (3.3.3)$$

を解き，固有振動数p_j，振動モード$\boldsymbol{N}_j$を求める。$\boldsymbol{N}_j$を用いて変位量$\boldsymbol{x}$を次式

$$\boldsymbol{x}=[N]\boldsymbol{\varphi}\equiv\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{N}_j\varphi_j \quad \cdots\cdots (3.3.4)$$

のようにモーダル変位 $\boldsymbol{\varphi}$ に変換すると，モード間の直交性より式（3.3.2）は各モードごとに分解されてつぎのように書き表わすことができる。

$$\ddot{\varphi}_j+2h_jp_j\dot{\varphi}_j+p_j^2\varphi_j=-\beta_j\ddot{z} \quad \cdots\cdots (3.3.5)$$

ただし　$\beta_j=\dfrac{\boldsymbol{N}_j^{\mathrm{T}}[M]\boldsymbol{I}}{m_j}$　，　$h_j=\dfrac{\boldsymbol{N}_j^{\mathrm{T}}[C]\boldsymbol{N}_j}{2p_jm_j}$

地震入力 $\ddot{z}$ が与えられた場合，式(3.3.5)を解けば，モーダル変位応答 φ_j が求められ，そのときの節点変位は式（3.3.4）の変換によって計算できる。

ところで耐震設計上必要なのは変位や応力の時刻歴の波形ではなく，地震が到来したときに生じるそれらの最大値である。最大値について注目した場合，地震入力が決まれば式(3.3.5)の解はその係数である三つのパラメータ p, h, β の関数として次式のように表わすことができる。

$$\varphi_{max}=\mathrm{f}(p,h)\cdot\beta\ddot{z}_{max} \quad \cdots\cdots (3.3.6)$$

励振係数 β は多自由度系を1自由度系へ置き直したときの有効地震力の大きさを決定するものと考えられるもので，式（3.3.6）に示すように φ_{max} に対しては比例的に作用する。関数 $\mathrm{f}(p,h)$ を図に表わしたものはレスポンススペクトラムあるいは応答線図としてよく知られているものである。たとえば地震入力 $\ddot{z}$ がEl centro NS波である場合には図3.3.2 のようになり，また塔槽類などの耐震設計用には φ_{max} の代りに加速度応答倍率を，固有振動数の代りに固有周期を用いて表わした図3.3.3 のような応

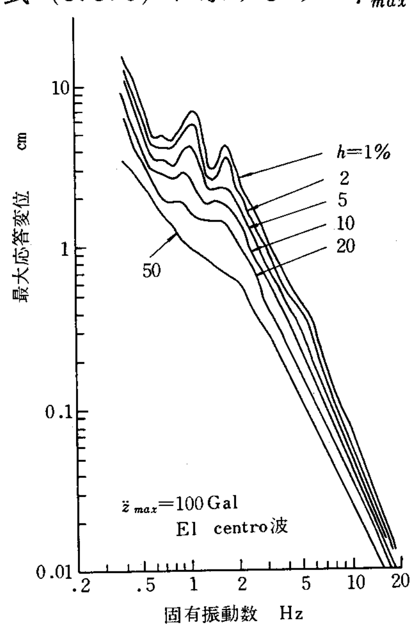


図 3.3.2　変位応答線図

答線図が用いられている。

いずれにしても式（3.3.5）をいちいち解く必要はなく，図3.3.2や図3.3.3を見ればモードごとの応答の最大値が読み取れる。そして系の危険位置 i での変位や部材力の最大値は式（3.3.4）などで求める代りにつぎの近似式が使用されている。

$$\left.\begin{aligned} x_{imax} &= \sqrt{\sum_j (a_{ij}\varphi_{jmax})^2} \\ q_{imax} &= \sqrt{\sum_j (s_{ij}\varphi_{jmax})^2} \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.7)$$

ただし x_i, q_i, a_{ij}, s_{ij} はベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{N}_j$, $\boldsymbol{S}_j$ の危険位置 i における成分を表わすものである。

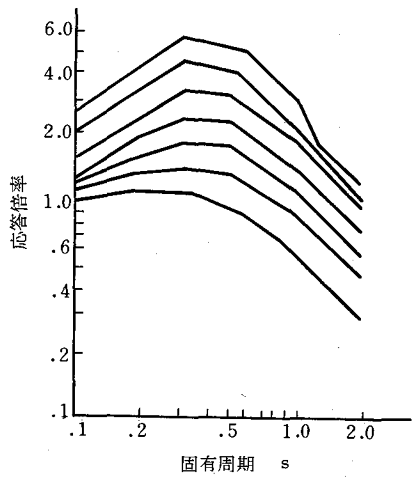


図 3.3.3　加速度応答線図

こうして求められた最大変位や応力が許容値と比較され構造安全性が評価される。特に1モード系（一つのモードだけを考慮すればよいような系）に対しては式（3.3.7）において一つのモード成分だけをとりだせばよく，節点変位および部材力の最大値 x_{imax}, q_{imax} は次式のように表わされる。

$$\left.\begin{aligned} x_{imax} &= a_{ij}\varphi_{jmax} \\ q_{imax} &= s_{ij}\varphi_{jmax} \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.7)'$$

簡単のため以下ではこのような1点加振，1モード系に対する問題を扱うことにし，多入力加振あるいは高次振動まで考慮する必要のある系に対してはあとで検討する。

3.3 弾塑性領域での近似応答解析法

弾塑性材料に繰り返し荷重を加えると応力とひずみの関係は図3.3.4 のようなヒステリシス曲線を描き，複素弾性係数$\vec{E}=E(1+i\eta)$を用いて次式のように表わすことができる。

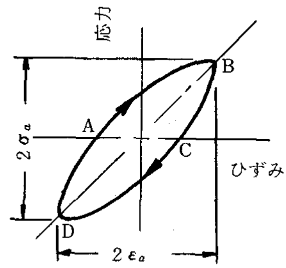


図 3.3.4　応力ーひずみ曲線

$$\sigma/\varepsilon=E+i\eta E \quad \cdots\cdots (3.3.8)$$

ここでEは図3.3.4 の直線DBのこう配に相当する等価縦弾性係数であり，ηは損失係数と呼ばれ次式

$$\eta=\frac{\triangle W}{2\pi W} \quad \cdots\cdots (3.3.9)$$

のように1サイクル当りの消散エネルギ$\triangle W$と最大ひずみエネルギWとの比で定義される量である。弾塑性材料の場合はE，ηはいずれもひずみ振幅ε_aの関数と考えられる。このような材料を用いて製作された配管系構造物の剛性マトリックスは式（3.3.8）の実数部Eを用いて導かれた項，すなわち弾性の場合の$[K]$に相当するものと，そのほかに虚数部ηEから導かれる項$[D]$から成り，運動方程式は式（3.3.2）に代って次式のように表わされる。

$$[M]\ddot{\boldsymbol{x}}+[C]\dot{\boldsymbol{x}}+i[D]\boldsymbol{x}+[K]\boldsymbol{x}=-[M]\boldsymbol{I}\ddot{z} \quad \cdots\cdots (3.3.10)$$

この場合$[M]$，$[C]$は弾性系と全く同じであるが，$[D]$，$[K]$はひずみ振幅の関数と考えられるため，地震が到来して構造要素内部の応力状態が変わるにつれて$[D]$，$[K]$も刻々と変化する，いわゆる非弾性挙動を示す。そのため式（3.3.10）を解くのに前節で述べたモーダルアナリシスが厳密には適用できず，一般には直接数値積分を行なって解くのが現状である。し

かしここではつぎの仮定を置くことによって式（3.3.10）を線形化し，モーダルアナリシス法を適用して近似解を求めようとする。すなわち

1）図3.3.4あるいは式（3.3.8）で表わされる材料定数E,ηはひずみ振幅ε_aだけに依存し，周波数による依存性や平均応力の影響は考えない。

$$E = E(\varepsilon_a),\quad \eta = \eta(\varepsilon_a) \quad \cdots\cdots (3.3.11)$$

2）構造物に地震荷重が作用したときの応答波形は図3.3.5に示すように必ずしも正弦的ではないが，最大応答を示す近傍では正弦波振動の一部と見なし，式（3.3.11）からE，ηを求めるための有効ひずみ振幅ε_aとして最大応答ひずみε_{max}を採用する。

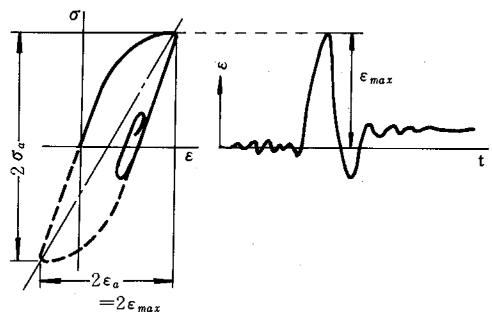


図 3.3.5　地震時のひずみの挙動

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{max} \quad \cdots\cdots (3.3.12)$$

3）地震持続中も式（3.3.10）の$[D]$，$[K]$は一定不変として扱う。そしてその値としては，仮定**1**），**2**）によりε_{max}に相当するE, ηを用いて導かれた$[D]$，$[K]$を用いる。

仮定の**3**)より$[D]$，$[K]$が定数扱いとなり，（ε_{max}が不明のため，まだその具体的な数値は決められないが）モーダルアナリシスが適用できる。式（3.3.10)は式(3.3.2)に比べて$i[D]\boldsymbol{x}$の項が増えている。これはヒステリシス減衰と呼ばれるもので変形量に依存する減衰項であり，これを系の固有振動数での振動速度に比例する等価粘性減衰に置き換えると，モーダル減衰率は本来の粘性減項$[C]\dot{\boldsymbol{x}}$のものも含めて次式のように表わすこ

とができる。

$$h_j = \frac{N_j^{\mathrm{T}}[D]\,N_j}{2p_j^2 m_j} + \frac{N_j^{\mathrm{T}}[C]\,N_j}{2p_j m_j} \quad \cdots\cdots (3.3.13)$$

ただし，ヒステリシス減衰によるモード間の連成効果は無視でき，減衰項についても対角化が可能であると仮定している。また右辺第2項の粘性減衰率は解析的には求めにくいので経験的な推定値を用いることにする。

さて，以上の仮定により弾塑性系に対しても近似的にモーダルアナリシスが適用できることになり，式（3.3.3）を解く固有値解析と式(3.3.5)を解く応答解析の二つの解析が行なわれる。

式（3.3.5）は，ある地震入力が与えられ，系の固有振動数p_j，減衰率h_j，励振係数β_jがわかれば，モードごとの最大応答が式（3.3.6）のような形で求められることを示しており，従来の弾性系の場合と全く同じ過程である。それゆえ図3.3.2あるいは図3.3.3などで示される応答曲線がそのまま利用できる。

一方，式（3.3.3）を解いて固有値解析を行なう段階は，弾性系の場合は配管構造物の形状，寸法，使用材料が決まれば$[K]$，$[M]$が一方的に決まり，したがって固有振動数も応答値に関係なく求められたが，弾塑性系の場合は材料の等価縦弾性係数，損失係数が応答ひずみの大きさによって変わるため，これから導かれる固有振動数，減衰率は一方的には定まらず応答量に依存することになる。そのため弾塑性系の固有値解析ではまず応答量を予測し，予想されるいくつかの応答値に対して固有値解析を行ない，固有振動数，減衰率，および励振係数を応答値，たとえば1モード系の場合には最大応答モーダル変位φ_{jmax}の関数として算出しておく必要がある。モードに関する添字jを省いてこれを式に表わすとつぎのようになる。

$$p=p(\varphi_{max}), \quad h=h(\varphi_{max}), \quad \beta=\beta(\varphi_{max}) \quad \cdots\cdots (3.3.14)$$

また，このときの固有値解析の結果として振動モード $\boldsymbol{N}$, ひずみモード $\boldsymbol{B}$ も φ_{max} の関数として次式

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}(\varphi_{max}),\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(\varphi_{max}) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.3.15)$$

のように得られる。そして変位やひずみの最大値は式（3.3.7)′ あるいはつぎの式（3.3.16）から求められる。

$$\varepsilon_{i\,max}=b_i\,\varphi_{max}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.3.16)$$

ただし，b_i はひずみモードベクトル $\boldsymbol{B}$ の i 方向成分である。

解析対象系に対する固有値解析によって式(3.3.14)の関係が，また一方では与えられた地震入力による応答解析から式（3.3.6）がそれぞれ求められたとすると，これら両式を同時に満足する φ_{max} を見つけることによって最大応答モーダル変位 φ_{max} を決定することができる。強度評価に必要な応答ひずみは式（3.3.16）で求められるが，もしひずみよりも変位や応力を求めたい場合は式（3.3.7)′ を用いればよい。そしてこのときの p, h が与えられた荷重下における等価固有振動数，等価減衰率を表わしていることになる。

以上の解析手順をフローチャートに示したのが図3.3.6 である。

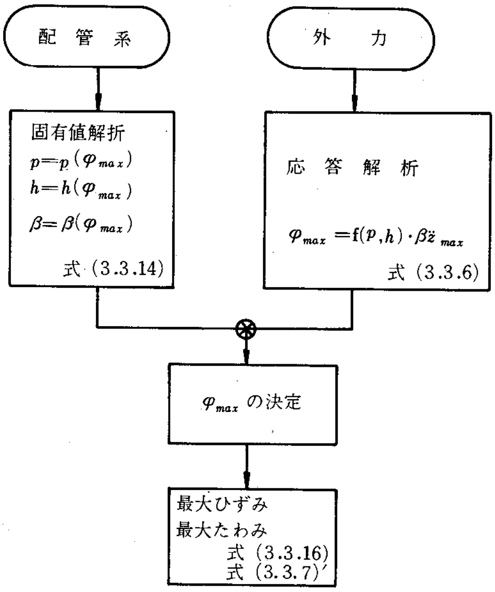


図 3.3.6 フローチャート

3.4　1自由度モデルによる近似解法の精度検討

3.4.1　1自由度非線形モデルにおける地震応答

弾塑性構造物を扱う前に，仮定**2)**，**3)** の妥当性を検討することを目的として，つぎのような1自由度非線形モデルについて本近似解法と直接積分解法とによる結果を比較する。

(1)　非線形モデル（i）

減衰が振幅とともに増加する漸増減衰の例として次式を考える。

$$\ddot{\varphi}+0.2p\,|\varphi|\,\dot{\varphi}+p^2\varphi=-\ddot{z} \quad \cdots\cdots (3.3.17)$$

ただし $p=4\pi$，$\ddot{z}=$ El centro 地震波とする。本解法を適用する前に等価減衰率 h を最大応答変位 φ_{max} の関数として求めておく必要があるが，仮定により応答波形は正弦的として1サイクル当りの消散エネルギと最大ひずみエネルギの比から計算すると次式のようになる。

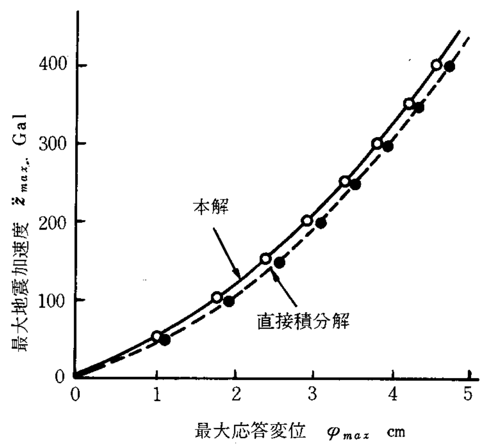


図 3.3.7　非線形モデル(i)の変位応答

$$h=(2/15\pi)\,\varphi_{max} \quad \cdots\cdots (3.3.18)$$

以上の p と h，および別にEl centro 地震波に対して求められた応答線図（図3.3.2）を用いて，種々の地震入力レベルに対して φ_{max} を求めたのが図3.3.7 の実線である。これに対して式（3.3.17）を直接 Runge-Kutta-Gill 法によって求めた結果が同図に破線で示されている。本解法によるものはやや応答が小さめにでている。

(2) 非線形モデル (ii)

減衰が振幅の増加につれて減少する漸減減衰の例として次式を考える。

$$\ddot{\varphi}+2p\frac{\sqrt{|\varphi|}}{|\dot{\varphi}|}\dot{\varphi}+p^2\varphi=-\ddot{z} \quad \cdots\cdots (3.3.19)$$

ただしp, $\ddot{z}$ は式 (3.3.17) と同じとする。(1)の場合と同様に等価減衰率 h を求めると

$$h=(8/3\pi p)\ \varphi_{max}^{-0.5} \quad \cdots\cdots (3.3.20)$$

となり，本近似解法では最大応答 φ_{max} が図3.3.8 の実線のように求められた。同図の破線はこれに対する直接積分解であるが，本解法のほうはやや大きめに現われている。

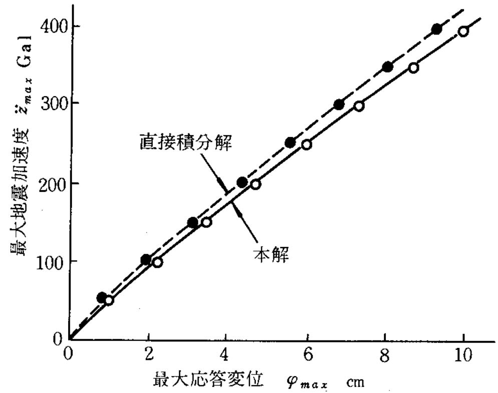


図 3.3.8 非線形モデル (ii) の変位応答

(3) 非線形モデル (iii)

減衰だけでなくばね特性も振幅に依存する例として次式を考える。

$$\ddot{\varphi}+0.8\pi|\varphi|\dot{\varphi}+\frac{(4\pi)^2}{\sqrt{|\varphi|}}\varphi=-\ddot{z} \quad \cdots\cdots (3.3.21)$$

式 (3.3.21) は漸増減衰，軟化ばね特性を有する系である。

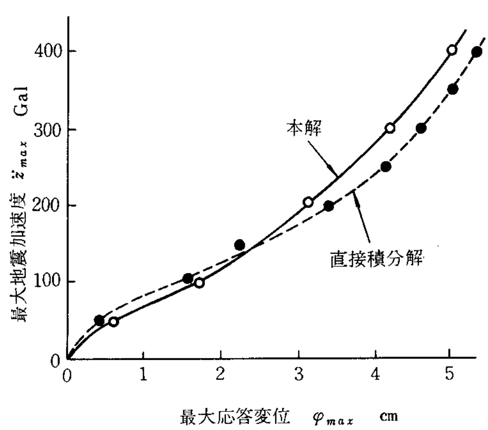


図 3.3.9 非線形モデル (iii) の変位応答

エネルギ計算より等価な固有振動数，減衰率を求めると次式のようになる。

$$p= (8\pi/\sqrt{3})\varphi_{max}^{-0.25}, \quad h=(1/10\pi)\varphi_{max}^{1.5} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.3.22)$$

式（3.3.22）で表わされる振動特性と図 3.3.2 の応答線図より図式的に解を求めると最大応答変位と地震入力の大きさの関係が図 3.3.9 の実線のようになる。これに対して直接積分によって求めた結果は同図破線のようである。大入力領域において両者はやや差が出ているが，それでも 7.5%程度の差におさまっている。

3.4.2　1自由度弾塑性モデルにおける地震応答

応力とひずみの関係がヒステリシス曲線を示す弾塑性モデルについて本近似解と直接積分解を比較する。

(1) Bi-Linear モデル

Bi-Linear 形の復元特性をもつ弾塑性モデルとして次式を考える。

$$\ddot{\varphi}+F(\varphi, \dot{\varphi})=-\ddot{z} \cdots\cdots\cdots (3.3.23)$$

ただし$F(\varphi, \dot{\varphi})$は図3.3.10中に示すようなものとする。最大応答変位 φ_{max} に

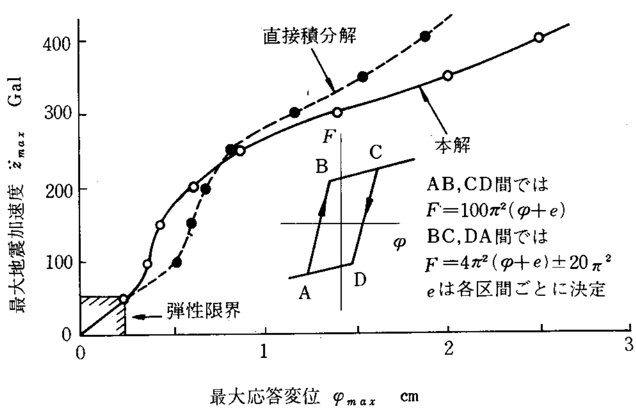


図 3.3.10　Bi-Linear　モデルの変位応答

対する等価ばね定数は直線ACのこう配に等しくとり，減衰率はループ面積から計算して求めると，いずれもφ_{max}の関数として数値的に定められる。こうして得られた材料特性と図3.3.2 で示される応答線図から最大応答変

位を求めると図3.3.10の実線のようになる。一方，式(3.3.23)を直接解いて求めた値は図3.3.10の破線である。$\ddot{z}_{max}$=50Gal付近から塑性領域にはいり，250Gal程度までは本解は小さめに，それ以上では逆に大きめに出ている。

(2) Log モデル

ヒステリシス特性を示す他の例として図3.3.11に示すような復元特性をもつ系を考える。運動方程式は式（3.3.23）と同じである。(1)の場合と同一手順によって最大応答をいくつかの地震入力 $\ddot{z}_{max}$ について求め，プロットしたのが図3.3.11の実線であり，これに対して式(3.3.23)を直接解いて求めたものが同図破線である。本解法による応答値は若干小さめにでている。

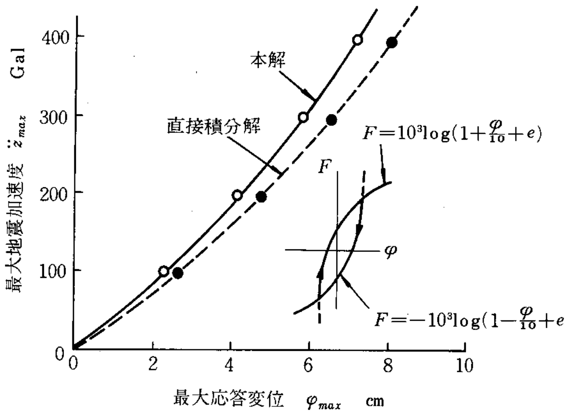


図 3.3.11 Log モデルの変位応答

3.5 弾塑性はりモデルによる近似解法の精度検討（鉛モデルによる加振実験と解析）

3.5.1 実験装置

多自由度系における弾塑性解析法の妥当性を検討するため，常温で弾塑性特性を示す鉛材料を選び，正弦波加振およびランダム加振を行なって解析結果と比較した。

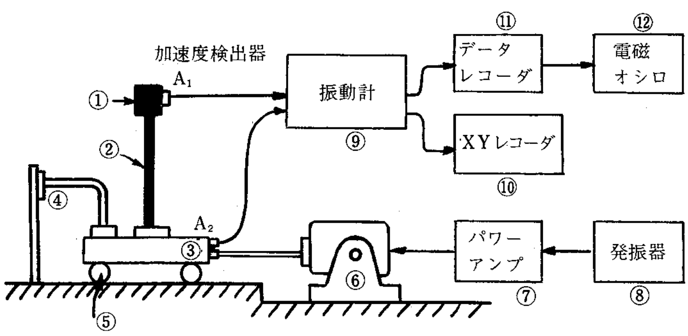


図 3.3.12 鉛モデル用実験装置

実験装置は図3.3.12に示すように鉛棒②の先端に質量①が取り付けられ，これが台盤③にフランジで固定される。台盤は2個のローラ⑤によって水平方向に可動支持され加振器⑥によって加振されるが，台盤に復元特性をもたせるためベンド管と板から成るばね系④で支えられている。発振器⑧で発生した正弦波またはランダム波信号はパワーアンプ⑦を経て加振器にはいり，台盤を振動させて試験体①-②系を変位加振する。このとき台盤③と鉛棒先端①の振動を加速度検出器A_2，A_1で検出して計測し，その振幅または波形をXYレコーダ⑩またはデータレコーダ⑪に記録する。このようにして台盤の振動に対して鉛棒先端の振動の大きさを測定すれば，鉛棒と質量から成る弾塑性はり系の応答が観測される。試験モデルの寸法を図3.3.13（a）に示す。

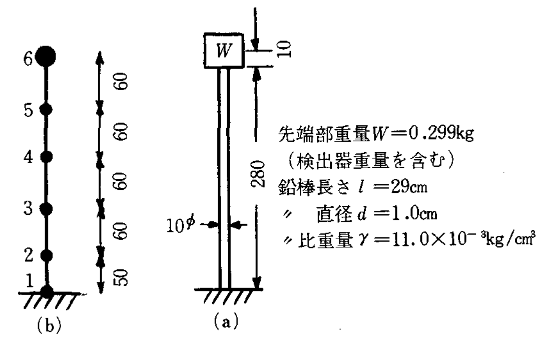


図 3.3.13 鉛モデル

3.5.2 鉛モデルの正弦波加振応答

(1) 実測値

図3.3.14は正弦波加振応答の測定結果を示したものである。図 3.3.12 の装置において台盤に$\ddot{z}_a e^{i\omega t}$の正弦波振動を与え，加速度振幅$\ddot{z}_a$を一定に保ちながら周波数ωを連続的に掃引し，先端部の絶対加速度振幅$\ddot{x}_a$を測

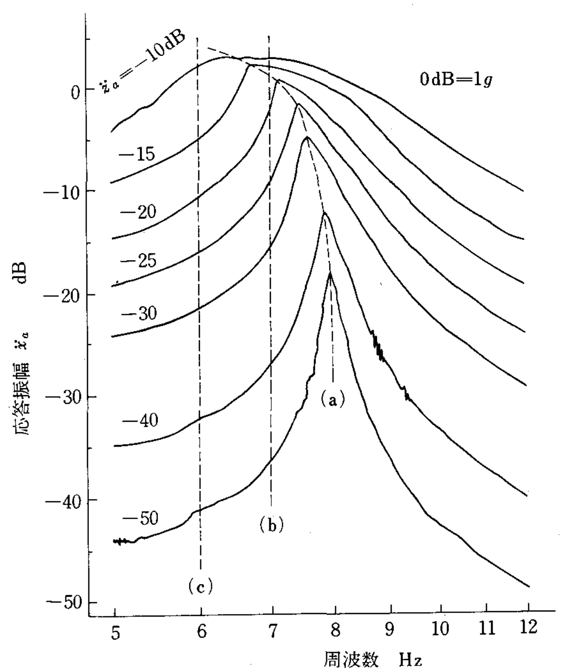


図 3.3.14 鉛モデルの正弦波応答

定したものである。加振振幅$\ddot{z}_a$を－50～10dB（0dB＝1g片振幅）にわたって変更し測定した。応答値の振幅依存性を見るために図 3.3.14 において（a） 共振周波数，(b） 7Hz， （c） 6Hzのそれぞれの周波数において$\ddot{z}_a$と$\ddot{x}_a$とを読み取り，それらの関係を書き直したものが図 3.3.19の破線である。これが以下に示す解析結果と比較される。

(2) 鉛材料の弾塑性特性

解析を実行するには仮定 1) で述べた材料の弾塑性特性をあらかじめ求めておく必要がある。本来これらは個々の材料について実験的に求められるべきものであるが，ここでは便宜的に静的引張り試験の結果を用いて式（3.3.11）の関係を導く。

材料に繰り返し荷重を加えると図 3.3.15 のような曲線が描かれるが，これについてつぎのような仮定を置く。

1)ヒステリシス曲線はひずみ振幅ε_aだけに依存し，周波数，平均応力には関係しない。

2)引張り負荷サイクルABにおいては，ひずみは弾性ひずみε_eと塑性ひずみε_pから成り，それらは縦弾性係数 E_e，加工硬化係数 n，塑性定数Kを用いて次式のように表わされるものとする。

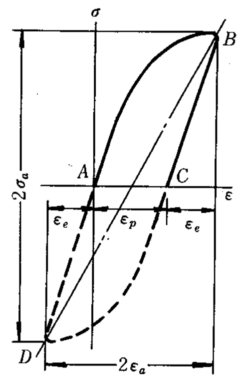


図 3.3.15 応力－ひずみ曲線

$$\varepsilon=\varepsilon_e+\varepsilon_p \ ,\ ただし\ \varepsilon_e=\sigma/E_e\,,\ \varepsilon_p=(\sigma/K)^{1/n} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (3.3.24)$$

3)引張り除荷サイクルBC間ではこう配E_eの直線とする。

4)圧縮サイクル CD， DA間では引張りサイクルAB， BCと対称とする。

以上の仮定のもとにヒステリシス曲線が決定されると，等価縦弾性係数E，損失係数η がつぎのようにして求められる。まず図3.3.15の関係と式

(3.3.24) を用いれば，ひずみ振幅 ε_a と応力振幅 σ_a の関係は次式のようになる。

$$\varepsilon_a=\frac{1}{2}(2\varepsilon_e+\varepsilon_p)=\sigma_a/E_e+0.5\ (\sigma_a/K)^{1/n} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.3.25)$$

いくつかの σ_a を設定して式 (3.3.25) を適用すれば σ_a に対応した ε_a が定まり，次式

$$E\ (\varepsilon_a)=\sigma_a/\varepsilon_a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.3.26)$$

によって E と ε_a の関係が数値的に確立される。

つぎに，図3.3.15において1サイクル間に消費されるエネルギ $\triangle W$ を計算すると，これは塑性仕事に等しいのでつぎのように表わされる。

$$\triangle W=2\int_0^{\varepsilon_p}K\varepsilon^n d\varepsilon=\frac{2K}{n+1}\varepsilon_p{}^{n+1}=\frac{2}{(n+1)K^{1/n}}\sigma_a^{(n+1)/n} \cdots\cdots\cdots\cdots (3.3.27)$$

一方，最大ひずみエネルギ W は $\frac{1}{2}E\varepsilon_a^2$ であるから η が次式のように得られる。

$$\eta=\frac{\triangle W}{2\pi W}=\frac{2\sigma_a{}^{(n+1)/n}}{\pi(n+1)K^{1/n}E\varepsilon_a^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.3.28)$$

また，数値計算に用いる際には η よりも複素弾性係数の虚数部に相当する ηE で示したほうがよいので，ηE の形で求めると次式のようになる。

$$\eta E=\frac{2\sigma_a^{(n+1)/n}}{\pi(n+1)K^{1/n}\varepsilon_a^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.3.28)'$$

式 (3.3.28)，式 (3.3.28)′ も σ_a の項がはいっているが，縦弾性係数を求めた場合と同様な手続きによって，これらを ε_a だけの関数の形で表わすことができる。

ところで本章で使用した鉛材料の場合，静的引張り試験は行なっていないが，文献[(68)(69)(70)]より縦弾性係数 $E_e=15.5\times10^4\ \mathrm{kg/cm^2}$，0.2%耐力=10.0

kg / cm², n=0.25と推定する。0.2%耐力の結果を式(3.3.24)最後の式に代入してKを求めるとK=473kg / cm² となる。以上のE_e, K, n を用いて式(3.3.26), 式 (3.3.28)などを計算し，図示すると図3.3.16のようになった。

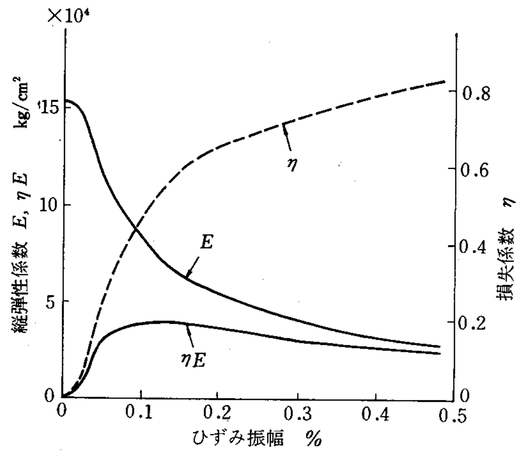


図 3.3.16 鉛の等価縦弾性係数，損失係数

(3) 固有値解析

図3.3.13 (a) の試験体を同図 (b) に示すような5要素6節点の有限要素モデルに置き換えて固有値解析を行なった。計算の手順としては，まずいたるところE, η は一定とし，通常の弾性計算で第1近似のひずみモード$\boldsymbol{B}$を求める。つぎに最大応答変位 φ_{max} を設定し，式 (3.3.16) よりひずみ分布を求め，図3.3.16より各断面における新たなE, η を見つけて同様の固有値計算を進め，これを収束するまで繰り返す。この場合断面の伸縮剛性EA, 曲げ剛性EIは数値計算によって求めることにし，$[K]$, $[M]$の作成は第2編で述べた方法を用いる。$[D]$はEの代りにηEを用いるだけで$[K]$と全く同じ手続きで求められる。なおモードの収束性は非常によく

表 3.3.1 鉛モデルの固有値解析結果

モーダル変位 φ_{max} cm	固有振動数 $p/2\pi$ Hz	減衰率 h %	励振係数 β	部材12中央部のひずみ ε_{max}
0.05	8.03	1.04	1.10	74×10^{-6}
0 10	7.97	1.3	〃	149
0.25	7.69	4.0	〃	381
0.50	7.09	11.2	〃	801
1.00	6.12	22.0	〃	1710
1.50	5.45	28.4	〃	2690
2.50	4.62	34.6	〃	4750
3.00	4.34	36.5	〃	5930
4.00	3.92	38.3	〃	8170

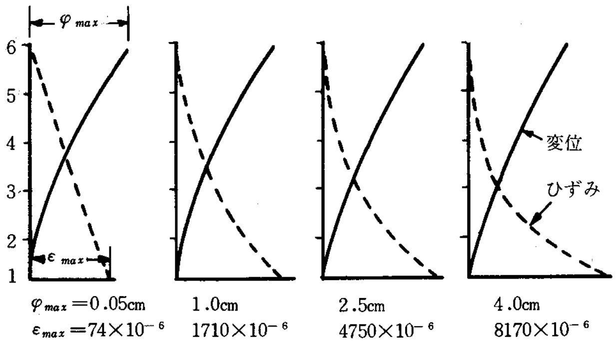


図 3.3.17 振動モードひずみモードの応答依存性

実用的には2～3回の繰り返しで十分と思われる。いくつかの φ_{max} に対して計算した結果は表 3.3.1 に示す通りである。ただしヒステリシス以外の減衰率は1％とした。図 3.3.17 は応答量による振動モードとひずみ分布の推移を示したもので，応答量が大きくなると下端付け根部のひずみが増加し，塑性関節の傾向を示してくるようすが伺える。

(4) 応答線図の決定

図3.3.18において基礎部に $\ddot{z}_a e^{i\omega t}$ なる入力を加えたときの運動方程式は式（3.3.5）に相当するものとして次式のように表わされる。

$$\ddot{\varphi}+2hp\dot{\varphi}+p^2\varphi=-\beta\ddot{z}_a e^{j\omega t} \quad \cdots\cdots\cdots (3.3.5)'$$

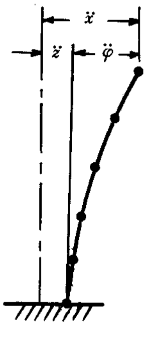


図 3.3.18 $\ddot{x},\ddot{z},\ddot{\varphi}$ の関係

$\varphi=\varphi_a e^{i\omega t}$ とおいて応答振幅 φ_a を求めると

$$\varphi_a=\left|\frac{-\beta}{p^2-\omega^2+i\,2hp\omega}\right|\ddot{z}_a \quad \cdots\cdots\cdots (3.3.29)$$

このとき鉛棒先端の絶対加速度振幅 $\ddot{x}_a$ は図 3.3.18の関係よりつぎのようになる。

$$\ddot{x}_a = \left| \frac{\beta \omega^2}{p^2 - \omega^2 + i\, 2hp\omega} + 1 \right| \ddot{z}_a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.3.30)$$

式（3.3.29）が式（3.3.5）′に対する応答線図を式で表わしたものであり，これと表 3.3.1 の結果から応答計算が行なわれる。

(5) 応答計算

表3.3.1 で表わされる固有値解析の結果と式（3.3.29）で表わされる応答線図の関係を同時に満足する φ_a が与えられた入力 $\ddot{z}_a$ に対する応答変位振幅である。加振振幅 $\ddot{z}_a$ と応答振幅 $\ddot{x}_a$ の関係を求めるには，表 3.3.1 に示されている φ_{max}（$=\varphi_a$），p，h，β を用いて式（3.3.29）より逆に φ_a を発生するに必要な $\ddot{z}_a$ を求め，さらに式（3.3.30）を用いてこのときの絶対加速度振幅 $\ddot{x}_a$ を求めるとよい。加振周波数として（a）共振周波数，（b）7Hz，（c）6Hzの三通りについてこれらの関係を求めプロットしたのが図3.3.19の実線であり，先に同図に破線で示された実測値と比較されるべき解析結果である。縦軸，横軸ともにデシベル単位で表示しており，0 dBは片振幅 1 g である。

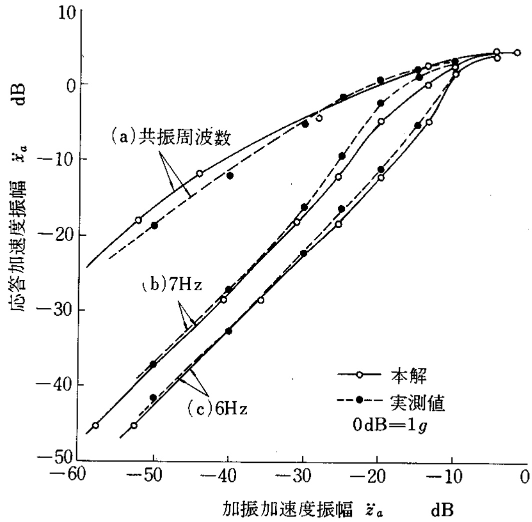


図 3.3.19 正弦波加振応答

3.5.3 鉛モデルのランダム加振応答

(1) 実測値

図 3.3.12に示す実験装置においてランダム発振器⑧により台盤③を加振し，

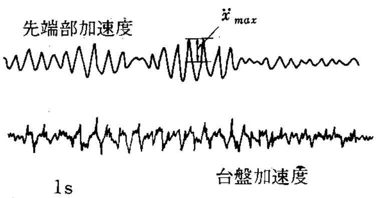


図 3.3.20 ランダム加振時の加速度波形例

台盤と先端の加速度を測定した。ランダム発振器は1～20Hzの範囲でホワイトノイズ特性をもたせ，また加振レベルの調整は発振器出力を変更することにより行なった。加振レベルの0 dBは発振器出力にして1 V(実効値)に相当するものである。図 3.3.20 に実測波形の一例を示す。種々の加振レベルに対して約1分間の測定を続け，電磁オシログラフに描かれた応答波形からその最大値 $\ddot{x}_{max}$ を読み取った。また後述の応答線図を作る必要性から台盤の加速度波形はデータレコーダに記録した。各加振レベルに対して実測した最大応答加速度$\ddot{x}_{max}$を図 3.3.22に破線で示す。

(2) 固有値解析

固有値解析の結果は表3.3.1と同じである。

(3) 応答線図

ランダム加振に対する応答線図は解析的に求めるのは容易でないので，アナログ計算機を使用して求めた。すなわち運動方程式 (3.3.5) をアナログ計算機でシミュレートし，入力$\ddot{z}$としては実験の際データレコーダに記録した，加振レベルが−10dBのときの台盤の加速度信号を用いた。$\beta=1$としパラメータp，hを種々変更して計算すると図

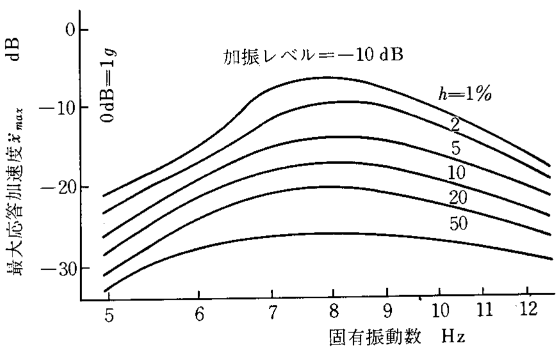


図 3.3.21 ランダム加振に対する応答線図

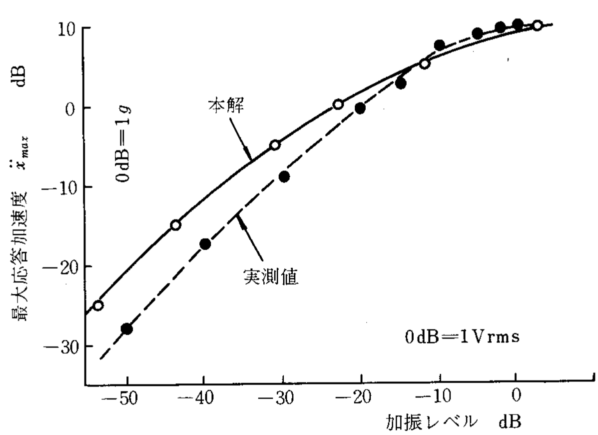


図 3.3.22 ランダム加振応答

3.3.20と同様の波形が得られる。これから最大応答 $\ddot{x}_{max}$ を読み取って整理したのが図 3.3.21である。

(4) 応答計算

表 3.3.1 に載せた固有値解析結果と図 3.3.21に示した応答線図から，与えられた加振レベルに対応する応答加速度の最大値が求められる。最大応答を示す近傍では固有振動数で振れているので，φ_{max} と $\ddot{x}_{max}$ との関係として共振状態の式

$$\ddot{x}_{max} = |1 + i\,(2h/\beta)|\, p^2 \varphi_{max} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.3.31)$$

を用い，前項と同様の手続きによって加振レベルと $\ddot{x}_{max}$ の関係を求めプロットしたのが図 3.3.22 の実線である。図にはこの解析値と比較される実測値も示されており，加振レベルの大きい領域ではよく合っていることがわかる。

3.6 検討

(1)弾塑性特性をもつ配管系構造物の実用的な動的解析を可能にするため，線形化のための仮定を置き数式モデルおよび鉛モデルの実験によってその妥当性を確かめた。3.4.1 で示した非線形モデルは仮定の**2**)，**3**) を確かめるものである。図 3.3.7 の漸増減衰系では本解法による応答値は直接解に比べてやや小さめに，図 3.3.8 の漸減減衰系では逆に大きめに出ている。これは実際の減衰定数が変位あるいはひずみに応じて刻々と変わるにもかかわらず，その最大値での値で近似するために漸増減衰系では h を大きめに，漸減減衰系では小さめに見積ることになるためと思われる。ばね項についても同様の傾向が考えられ，軟化ばね系では弱めに，硬化ばね系では剛めに見積りすぎることにな

るため，応答振幅としては大きめ，および小さめに出る傾向になる。その結果図 3.3.9のように漸増減衰，軟化ばね系では両者の影響の程度により直接解よりも大きめに出たり，小さめに出たりしている。仮定の**2**) の有効振幅の見積りについては$\varepsilon_a = \gamma\varepsilon_{max}$，$0<\gamma<1$として外荷重の性質や大きさに応じて$\gamma$をうまく選定すれば，さらに精度のよい結果が得られるかも知れない。

(2) 3.4.2 は1自由度の弾塑性モデルで仮定**1**) も含めて検討したものである。図 3.3.10，図 3.3.11の結果を見れば，ヒステリシス曲線を等価な縦弾性係数と損失係数で処理することもまずまず妥当なものと言える。3.4.2 (1)のBi-Linear モデルでは，弾性限界を起すあたりから地震入力で250 Gal ぐらいまでは減衰を過大に見積りすぎたのがよく効いて応答は小さめに，250 Gal 以上になると剛性を低く見積ったのが効いて応答は大きく出る傾向を示している。弾性限を少し越えたあたりでは非安全側の近似になっていることに注意しなければならない。3.4.2 (2)のLog モデルでは剛性の振幅依存性が比較的小さく，図 3.3.7 と同様の傾向を示している。

(3) **3.5** は鉛モデルを用いた加振実験により，はり構造物の応答を検討したものである。ここで解析の際必要な材料データ$E(\varepsilon_a)$，$\eta(\varepsilon_a)$を静的引張りデータから推定する方法を示し，それを用いて応答計算を行なった。実測値と解析値が比較的良好な一致を示している点からみて，$E(\varepsilon_a)$，$\eta(\varepsilon_a)$ 推定法の妥当性，および多自由度系に対する本解法の実用的な意味での妥当性が証明されたものと考えられる。

(4)本章ではEl Centro 地震波だけについて検討したが，実際の設計の際には，応答線図として図 3.3.2 そのものではなく図 3.3.3 のような設計応答線図を使用することになる。このようなとき，本解法は地震波形の依存性を受けない安定した応答結果が得られる。

(5)本章では多自由度系の場合1モード系として説明してきたが，高次振動まで考慮する必要のあるときは有効ひずみ振幅として式（3.3.12）の代りに，たとえば

$$\varepsilon_a = \left(\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{j\,max}^2 \right)^{1/2},\ ただし\ \varepsilon_{j\,max} = j次モードの最大応答ひずみ$$

などを用い，固有値計算と応答計算を交互に繰り返して計算を行なえば，同様の解析が可能となる。

(6)多入力変位加振，力加振の場合においても収束計算を行なうならば，式（3.3.5）における$-\beta\ddot{z}$の代りに一般力$-\boldsymbol{\beta}_j^T\ddot{\boldsymbol{z}}$, $\boldsymbol{N}_j^T\boldsymbol{f}/m_j$を用いて同様の解析を行なうことができる。

(7)本章で用いた鉛モデルのように平面はり構造の曲げ変形を扱う場合には材料特性としてE，ηだけでよかったが，立体配管のような三次元構造物ではさらに横弾性係数Gあるいはポアリン比νとそれに対応した損失係数が必要である。

(8)本解法は最大応答ひずみ，あるいは変形量を求めるためのものであり，地震荷重などの外力が去ったあとには残留変形，残留ひずみが残ることに注意しなければならない。また内圧，自重などの平均荷重が加わっている場合にはラチェット的挙動が生じる可能性が考えられ，これら平均荷重の効果についてはさらに研究を重ねる必要がある。

3.7 耐震設計への応用

耐震設計における機器配管系の弾塑性応答解析はその煩雑さから現在ではまだほとんど利用されていないが，本解析法を適用すれば近似的ではあるが簡単に，かつ安定した解が得られることが判明し，実用化の見通しが得られた。しかし実際の設計業務の一部として考えた場合，材料定数E, ηの準備，繰り返し計算の必要など弾性解析に比べなお若干の相違点が残っ

ている。また構造設計の面から考えると，解析によって厳密な精度のよい解が欲しいと言うよりも，安全側の値が得られそれによって構造安全性が保証されればよいという性格のものであることから，実用的にはさらにつぎのような修正あるいは取扱いかたが望ましいかと思われる。

(1) El centro 地震波に対する最大応答変位の値は図 3.3.2 に示すようであるが，塔槽類のように基礎部に直接地震入力が加わる機器に対しては図 3.3.3 のような応答線図が，また配管などのように機器や構築物を経て地震入力を受けるものに対しては図3.3.23のような床応答線図が一般に使用されている。これらの線図では縦軸が加速度で表わされており，これから得られる応答加速度（最大絶対加速度）と応答変位（最大相対変位）との間には近似的につぎの関係

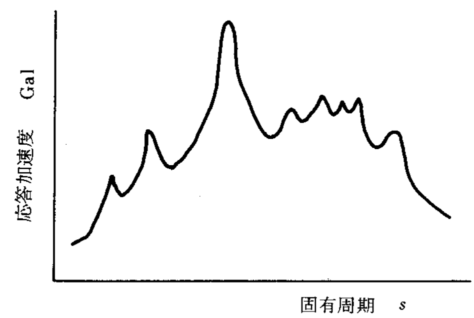


図 3.3.23 床応答線図

応答変位＝応答加速度／(角固有振動数)²

が成立するので，最大相対変位φ_{max}を求めるのに図3.3.2のような変位応答線図から読み取る代りに図3.3.3または図 3.3.23 のような加速度応答線図から最大絶対加速度値を読み取り，これから上式により換算してもよい。

(2) 実際の材料の特性は図 3.3.24 (b) に示す

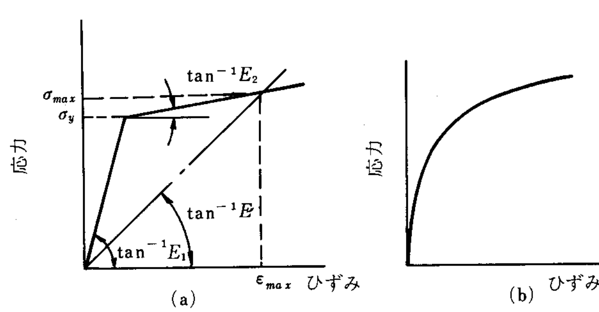


図 3.3.24 応力一ひずみ曲線

うな滑らかな加工硬化挙動を示す場合が多いが，静的な弾塑性解析の際には図3.3.24 (a)のように折れ線化してBi-Linear あるいはTri-Linearとして扱うのが普通である。静的解析のためにこのような折れ線化した材料データが準備されているならばこれをそのまま動的解析に使用してもよいと考えられる。

(3)図 3.3.2 の応答線図を見てもわかる通り，一般に共振領域，剛領域にある系では減衰を小さく，また剛性を低く見積るほど応答量が増え設計上は安全側の評価ができる。このような観点から弾塑性定数E，ηのとりかたを 3.5.2 で提案した方法を修正し，つぎの簡単な方法に改める。すなわち図 3.3.24 （a）に示すように等価縦弾性係数としては静的な引張り試験から得られる応力－ひずみ曲線のセカント係数とし，ηとしては 3.5.2 の方法では減衰効果を過大に見積りすぎる傾向にあること，塑性域にはいると応答波形は正弦半波的になることなどを考慮して半サイクル間に消費されるエネルギと最大ひずみエネルギの比で定義する。このようにすると図 3.3.24 （a）で示されるBi-Linear特性をもつ材料に対して，応力状態σ_{max}におけるE，ηは$\sigma_{max}>\sigma_y$のとき，つぎのように表わすことができる。

$$\left.\begin{aligned} E&=E_1\times[(\sigma_y/\sigma_{max})+(E_1/E_2)\{1-(\sigma_y/\sigma_{max})\}]^{-1} \\ \eta&=\frac{1}{2\pi}(E_1/E_2)\,[1-(\sigma_y/\sigma_{max})^2][(\sigma_y/\sigma_{max})+(E_1/E_2)\{1-(\sigma_y/\sigma_{max})\}]^{-1} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.3.32)$$

図 3.3.25は図 3.3.24 （a）の材料特性に対応する荷重－変位曲線であるが，このような復元特性をもつ系において$k_1=1000$kg / cm，$k_2=10$kg / cm，$F_y=500$kg，$F_m=0$としたときの式 (3.3.23) の応答を直接解法，**3.3** で述べた近似解法，および本節で提案した修正近似解法によって計算し，その結果を比べたのが図3.3.26である。

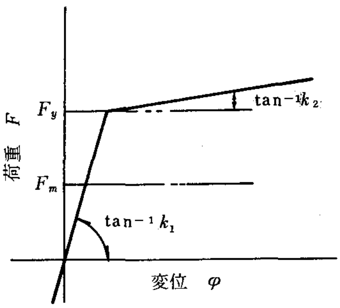


図 3.3.25　荷重—変形曲線

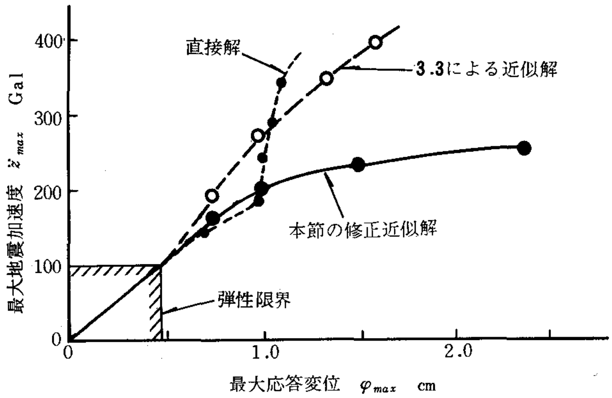


図 3.3.26　近似解法の比較

修正近似解法は塑性領域に大きくはいったところで応答が大きく出すぎているが，弾性領域を少し越えるあたりではかなりよい結果を示している。

(4) 本章では平均応力の効果については考慮していなかったが，実際の配管系では内圧，自重などの一定応力が作用しているのが普通である。このような場合の取扱いかたについてはさらに詳細な研究が必要であるが，一つの方法として等価縦弾性係数のとりかたをたとえば平均応力によってその分だけ降伏点が低下したものと見なし，Bi-Linear 形材料に対してはσ_y，σ_{max} の代りに，それぞれ $\sigma_y-|\sigma_m|$，$\sigma_{max}-|\sigma_m|$ を用いて式（3.3.32）を適用することが考えられる。一例として式（3.3.23）および図 3.3.25 に示したモデルにおいて，入力地震加速度 $\ddot{z}_{max}=300\mathrm{Gal}$，$k_1=1000\ \mathrm{kg/cm}$，$k_2=10\ \mathrm{kg/cm}$，$F_y=1000\ \mathrm{kg}$とし，平均荷重$F_m$を変更したときの応答を本節**3.7**の修正近似解法によって計算した。その結果を図3.3.27に示す。同図の破線は同じモデルを直接積分によって求めた値である。

以上述べた修正事項などを考慮すれば，機器配管系における耐震設計のための弾塑性応答解析はつぎの順序に従って実行することができる。

(1)まず弾性定数を用いて通常の弾性レベルでの固有値解析を行ない，固有振動数や応力の分布状態などを求める。

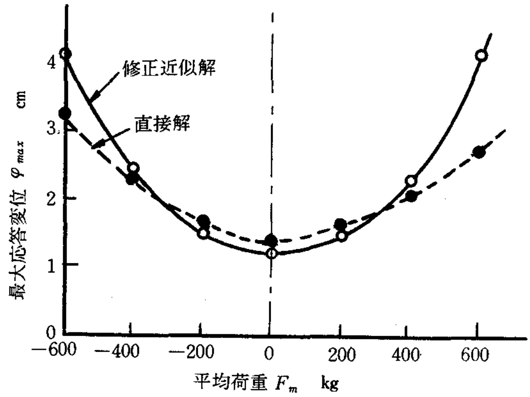


図 3.3.27 平均荷重の影響

(2)与えられた設計用地震入力加速度に対して図 3.3.3 または図 3.3.23 などの応答線図より応答量を決定し，各断面での応力の最大値を見積る。

(3)つぎにこの応答応力に対応した材料定数E，ηを式（3.3.32）などによって算出し，修正したE，ηを用いて(1)と同様の固有値解析をやり直す。

(4)修正された固有振動数，減衰率を用いて(2)の応答解析をやり直し，以下(3)，(4)の段階を収束するまで繰り返す。

(1)，(2)の段階は通常の弾性解析であり，弾塑性計算の場合は(3)，(4)の段階が追加されることになるが，これらは電子計算機の中で自動的に処理できるので設計者の手間はほとんど変わらない。

3.8 結　　言

プラントなどに設置される機器配管系の弾塑性地震応答解析法に関し，モーダルアナリシスを弾塑性領域まで拡張した一近似解法を提案した。い

くつかの数式モデルおよび鉛を用いた実験によってその妥当性を検討した結果，つぎのことが明らかとなった。

(1)限られた事例ではあるが，近似解法は直接解法に比べ数%～数十%程度の誤差内にあり，また弾性領域では両者は全く一致することから，塑性域にはいる程度が大きくなければ振動問題の弾塑性解析に本解法が有効に利用できる見通しを得た。

(2)材料の弾塑性特性は近似的に等価縦弾性係数と等価損失係数で表現することができる。本解法ではこれらを最大応答に等しい振幅に対応する値で線形化しているために，減衰は過大に，剛性は過少に見積る傾向がある。また弾性限を少し越えた付近では減衰が効きすぎてやや不安全側の結果が得られている。

(3)実用する場合は解析作業が簡単なこと，必ず安全側の解が得られることが必要である。したがって等価縦弾性係数として平均応力も考慮したセカント係数を，また損失係数としては半サイクル間の消費エネルギから決まる値をとる，などの修正案が考えられる。

プラント機器配管系の耐震強度については最近ますます規制が厳しくなり，より詳細な耐震解析が要求されるようになっている。現状の耐震設計指針などでは，地震入力の設定，解析上の誤差などの不確定性などを補なう意味で許容値がほとんど降状点以下におさえられている。しかし地震荷重は内圧，自重などの応力制御形の荷重と異なり，本文での解析例でもわかるように弾性限を越えたからといって必ずしも致命的な破損につながるとは限らず，ねばりのある材料であれば十分耐えうる性質のものである。それゆえ信頼できる弾塑性解析法が確立されれば，頻度のきわめて少ない大地震に対しては変形や破損によって住民に被害を及ぼさない範囲において許容値をもっと塑性域まで拡大してもよいと思われる。

このような意味から，本章で提案した近似解法は将来のより合理的な弾

塑性耐震設計法の確立のための一つの有益な資料になるものと考えられる。また従来の弾性解析で扱われている系においても，減衰などは実際は振幅依存性をもつものであり，これを一定値として扱っている方法の妥当性が本研究の結果によって明確な意味をもつようになった。

総　　括

本研究は，プラント機器類の構造設計において重要な課題となっている配管系の振動問題を，ディジタル電子計算機を用いて数値解析する方法について検討したもので，3編から構成されている。

第1編は配管振動の加振源の一つである管内流体の脈動圧力を，従来使用されていたアナログ計算機に代ってディジタル計算機で解析する方法を研究したものである。ここでは伝達マトリックスの考えに基づいた一解法を提案した。すなわち流体系の状態量として圧力と体積速度をとり，管，容量，分岐，オリフィスなど配管系を構成する各要素に対してあらかじめ波動方程式や連続の式を解いて要素両端の状態量の関係，すなわち伝達方程式を求めておく。最初は始端における状態量を未知数を含んだ形で設定し、ついで各要素の伝達方程式を接続して最終端まで計算を続け，そこでの境界条件を満たすように未知数を決定し，圧力状態を求める方法である。第1章では解析理論，各要素における伝達方程式の導出，および具体的な適用法を，第2章では圧縮機との接続点で境界条件として与えられる吐出し，吸込体積速度の周波数成分を求める方法を示した。この結果，従来アナログ計算機で行なわれていた脈動解析がディジタル計算機を用いることによって，一般の設計者の手で手軽に実行できるようになり，脈動状態の把握と機械系への加振入力の大きさが容易に予測できるようになった。

第2編は配管系の機械振動特性の解析を扱ったものである。第1章では有限要素法を用いて剛性マトリックス，質量マトリックスを導出する方法を説明したあと，フランジ，ベンド管，サポート，ハンガなど実際的な配管要素の扱いかたを示し，ついで有限要素法で作成された固有値方程式を三種の固有値解法を用いて解く方法を検討した。すなわち，中規模の振動系の解析に適したべき乗法と，これを大規模の実用的な配管系に適応で

きるように改良した改良形べき乗法，さらに機械インピーダンスの形で処理できるインピーダンス法の三つの方法を研究し，それを配管系に適用して解析手法の妥当性，精度を検討した。簡単な解析モデルに対する理論解やモデル配管系に対する実験値との比較を行なった結果はよい一致が得られ，有限要素法を用いた場合の要素分割のしかたや直管以外の配管要素の取扱い，固有値解法の特長などが明確になり，実際への適用時における留意点や結果に対する信頼性の評価が明らかとなった。第2章では有限要素法では扱いにくいインピーダンス要素を含む配管系の解析を行なうため，機械インピーダンス合成法を用いた一解法を提案した。すなわち実測あるいは固有値解析によってあらかじめ振動特性の調べられている部分系に対してインピーダンスの表現式を作成し，これを合成して得られた全体系の機械インピーダンスマトリックスを第1章で述べた固有値解法で解くことにより，全体系の振動特性を求める方法を示した。さらにこのインピーダンス法を用いた場合にも，有限要素法による場合と同じように，モーダル質量，モーダル減衰率を算出できるようにし，応答解析への結びつけを可能にした。以上によって有限要素法とインピーダンス合成法とが統一的に扱われ，一般の配管要素だけでなく支持構造物や端末機器部など機械インピーダンスの形で表わされる要素に対しても解析が可能になり，比較的簡単な系に対しては十分な精度をもって実機に適用できることが確認された。

第3編はモーダルアナリシスを用いた配管系の応答解析法について検討したものである。第1章では力加振を受ける場合について，解析法の適用のしかたを説明し，加振器およびスピーカによる正弦波加振実験によって精度を調べた。その結果は固有値解析が信頼して行なわれる系，すなわち弾性的挙動を示す系については応答解析は十分な精度を有することが明らかとなり，さらに流体脈動によって発生する機械系の振動応答も精度よく解析できることが確認された。第2章では配管系の端末から強制的に変位

加振される場合の一解析法を紹介し，正弦波加振実験によってその精度を調べた。プラント配管系だけでなく舶用機器，回転機器類に取り付けられる配管系など，変位加振とみなされる配管系の振動問題はよく遭遇するが，本研究によってその場合の定量的な予測が可能になった。さらに第2章では耐震設計における多入力問題にも触れて，現在一般に使用されている地震応答解析法の妥当性および問題点を指摘した。第3章では主として地震応答を対象とした弾塑性応答解析法に関して，モーダルアナリシスを拡張した一近似解法を提案し，いくつかの解析モデルおよび鉛を用いた加振実験によってその妥当性を検討した。その結果はかなりの塑性域にはいっても比較的良好な近似解が得られることが判明した。従来弾塑性領域における地震応答解析はその煩雑さと経済的理由によって，ほとんど実用されていないが，ここで提案した近似解法によれば弾性レベルでの解析とほとんど同程度の労力で弾塑性問題が扱えるようになり，実用化へ一歩近づいたものと考えられる。また従来行なわれている弾性解析においても減衰量などは実際には振幅依存性をもつものであり，これを適当に一定値として処理している方法の妥当性が本研究の結果によって明確な意味をもつようになった。

以上，本研究によって配管内の流体脈動，機械系の振動特性および振動応答の解析がかなり複雑な系に対しても容易に行なうことが可能になり，配管系の動的設計法の確立と信頼性の向上に貢献することができた。しかし種々の加振源に対する加振力の正確な予測，すきまや摩擦などの非線形要素を含む場合の扱いかた，減衰定数の推定法などまだ検討すべき問題も多く残されており，これらは今後の研究に待たねばならない。

謝　　辞

本研究の過程において，懇篤なる指導と校閲の労をとっていただいた大阪大学長谷川嘉雄教授に謹んで深甚の感謝をささげます。長谷川先生には卒業研究の指導を受け，先生から学んだ研究へのきびしい態度とその後の公私にわたる暖かい指導，激励が本研究の大きな支えになりました。

大阪大学菊川真教授，浜田実教授，中川憲治教授には本研究をまとめるに際して有益な助言と指導を賜わり，なかでも浜田先生には御多忙中にもかかわらず詳細な校閲をしていただきました。また，大阪大学森川敬信教授にも査読をお願いしました。ここに深く感謝の意を表します。

なお，本研究をとりあげ推進するに際しては東京大学藤井澄二教授，早稲田大学奥村敦史教授，東京大学柴田碧教授，東京大学川井忠彦教授らの研究に負うところが大きい。また神戸大学瀬口靖幸教授，岩壷卓三助教授には構造設計，振動問題に関する指導を受け，第２編1.4.2で述べた修正Choleski法による一次方程式の計算には瀬口研究室のプログラムを利用させていただきました。紙上を借りてお礼申しあげます。

昭和38年に（株）神戸製鋼所に入社して以来，研究開発部門に所属し，主として機械振動に関する仕事に携わってきましたが，この間上司として指導し，また鞭達と協力を賜わった現亀岡敏雄顧問，佐藤栄一部長，安文在次長，阿部亨課長および野口篤郎事業部長代理，野村逸郎事業部長代理，外山昭部長ら関係者に感謝致します。特に阿部課長には入社以来十余年間直接の上司として終始変らぬ指導と援助を賜わりました。阿部課長の支援がなくてはとうていこの研究は実現しなかったことと思われます。さらに研究の遂行にあたり，熱心な協力と有益な意見をくださった伊藤信哉氏，黒橋道也氏，井上喜雄氏に深く感謝します。

文　　献

(1) ASME, Boiler and Pressure Vessel Code Sec.Ⅲ, (1974), 125

(2) 小林, 配管支持設計, (昭46), 93, 日本発条

(3) 藤井, 機習教157 回, (1961), 31

(4) 草間, 辻, 押田, 機論, 22−117 (昭31), 360

(5) 秋元, 水撃作用と圧力脈動, (昭47), 日本工業新聞社

(6) J. Parmakian (小堀, 横山訳), 水撃解析法, (昭44), コロナ社

(7) V.L. Streeter (竹中訳), 流体過度現象, (昭48), 日本工業新聞社

(8) 藤井, 機誌, 52−363 (昭24−3), 54

(9) 藤井, 機誌, 64−509 (昭36−6), 888

(10) The M.W.Kellogg, Design of Piping Systems, (1956), 260, Jhon Wiley & Sons.

(11) 大谷, 山田, 日立評論, 44−6 (昭37−6), 97

(12) 大谷, 山田, 機誌, 66−532 (昭38−5), 621

(13) 大谷, 日立評論, 46−8 (昭39−8), 36

(14) K. Groth, Kältetechnik, 9−4 (1957), 101

(15) E.G. Chilton, L.R. Handley, Trans. ASME (1952−8), 931

(16) J.V. Hughes, J.M. Sharp. ASME Paper No. 56−A−200 (1956)

(17) W. Nimitz, G. Damewood, ASME Paper No. 61−WA−290 (1961)

(18) 酒井, 佐伯, 機論38−309 (昭47), 1000

(19) S.S. Grover, Trans. ASME, Ser B, 88−2 (1966−5), 164

(20) 奥村, 機械の研究, 第19巻別冊, (昭42), 24, 養賢堂

(21) たとえばS. Timoshenko (谷下, 渡辺訳), 工業振動学, (昭36), 22, 東京図書

(22) たとえば林, 村, 変分法, (昭44), 57, コロナ社

(23) たとえば林，村，変分法，(昭44)，66，コロナ社

(24) たとえばDen Hartog（谷口，藤井訳），機械振動論，(昭40)，177，コロナ社

(25) N.O. Myklestad（小堀訳），機械振動解析，(昭43)，262，ブレイン図書

(26) Okumura, "On a method of analysis for vibration and stability problems of linear mechanical systems or structures", Meno. of School of Sci. & Engg., Waseda Univ., No. 21, 1957

(27) 日本機械学会，原子炉配管系の耐震設計法に関する研究，(昭38)，35

(28) Shibata,and others, "Aseismic design of piping systems in power and chemical engineering plants", Proc. of JSME 1967 Semi-International Symp., p. 215—222, 1967

(29) 日本機械学会，原子炉容器及び配管系の耐震設計法に関する試験研究，(昭42)，1

(30) 日本機械学会，原子炉容器及び配管系の耐震設計法に関する試験研究，(昭42)，36

(31) 平松，機論，38—309（昭47），992

(32) 平松，機論，38—310（昭47），1311

(33) 桐岡，機誌，74—629（昭46），718

(34) O.C. Zienkiewicz,Y.K. Cheung（吉識訳），マトリックス有限要素法，(昭46)，培風館

(35) 日本鋼構造協会，構造工学講座Ⅰ—4—B，(1971)，培風館

(36) 日本工業経済連盟，第575回工経連講座，(昭47—6)

(37) W.C. Hurty, AIAA J. 3—4（1965—4），678

(38) R.R. Craig Jr., AIAA J. 6—7（1968—7），1313

(39) A.L. Klosterman, Combining Experimental and Analytical Techniques for Dynamic System Analysis

Tokyo Seminar on Finite Element Analysis (1973—9)
(40) 精機学会関西支部，工作機械における振動対策シンポジウムテキスト，(昭48)，1
(41) 柴田，機械の研究，第19巻別冊（昭42)，100
(42) 佐藤，鈴木，機講論，200（昭43)，37
(43) 柴田，清水，岡田，機講論，206（昭44)，129
(44) 佐藤，鈴木，機講論，206（昭44)，133
(45) 日本電気協会，原子力発電所耐震設計指術指針 JEAG 4601，(1970)
(46) 高圧ガス保安協会，コンビナート保安防災技術指針，(1974)
(47) 日本鋼構造協会，構造工学講座Ⅱ—4—A，(1972)，46，培風館
(48) 日本鋼構造協会，第3回大会研究集会講演論文集，(昭44)，509
(49) R.C. Binder, J. Acous. Soc. Amer. 15—1 (1943—7), 41
(50) 阿部，機講論，200（昭43)，73
(51) P. Kuhlmann, A. Nottrodt, VDI -Forsch. -h, 516 (1966)
(52) 植松，水力学，(昭31)，53，産業図書
(53) 三橋ほか3名，機講論，730—3（1973)，155
(54) R. Zurmühl（佐々木，高市訳)，工業技術者のためのマトリックス，(1961)，240，工業数学研究会
(55) 戸川，マトリックスの数値計算，(1971)，オーム社
(56) 日本鋼構造協会，構造工学講座Ⅱ—1—A，(1971)，培風館
(57) たとえばW. Weaver（山本訳)，構造物解析のプログラム，(昭43)，56
(58) 川面，若杉，押沢，日本鋼構造協会第5回大会研究集会研究発表論文集，(昭46)，1
(59) 日本鋼構造協会，構造工学講座Ⅰ—4—B，(1971)，192，培風館
(60) 日本鋼構造協会，構造工学講座Ⅰ—4—B，(1971)，133，培風館
(61) 日本鋼構造協会，構造工学講座Ⅰ—4—B，(1971)，147，培風館

(62) A.L. Klosterman, J.R. Lemon, Building Block Approach to Structural Dynamics, ASME Vibrations Conference Paper 69－VIBR－304 (1969)

(63) 岡村, 松原, 精密機械37－4 (昭46－4), 282

(64) 日本材料学会, 耐震設計に関する講習会, (昭42－2)

(65) 武藤, 構造物の動的解析 (昭41), 172, 丸善

(66) T. Hongladaromp ほか2名, Trans. ASME, Ser. B, 96－2 (1974), 399

(67) 柴田ほか3名, 機講論 740－12 (1974－11), 516

(68) W. Johnson, P.B. Mellor (清田ほか2名訳), 塑性加工学1, (昭44), 189, 培風館

(69) 日本金属学会, 金属便覧, (昭40), 931, 丸善

(70) 小野, 鉛および鉛合金, (昭17), 28, 山海堂