Title	準線形放物型偏微分方程式の近似解法に関する研究
Author(s)	中口, 悦史
Citation	大阪大学, 1998, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.11501/3144001
rights	
Note	

準線形放物型偏微分方程式の近似解法に関する研究

1998 年 1 月

中口　悦史

準線形放物型偏微分方程式の近似解法に関する研究

1998 年 1 月

中口　悦史

目次

第 1 章

序論

近年, 強い相互作用を持つ反応拡散方程式系によって記述される数理モデルが, 物理学, 工学をはじめ, 化学, 生物学, 経済学に至るまで幅広い分野において注目され, 盛んに研究が行われている. 例としては, 半導体内の電荷の静電場によるドリフト拡散 [16,17] や, 細胞性粘菌の走化性による集合体形成 [29] のモデルが挙げられる. いずれも, 考察対象が複数種あって, 各種内では自然な拡散が, 異なる種間では誘引あるいは排斥といった相互作用に起因する移動と, 互いの協同・競合による生成・消滅などの反応があるような系のダイナミクスをモデル化したもので, これら各要因の効果によって, パターン形成など複雑な現象が起こると考えられている. 強い相互作用を持つ反応拡散方程式系は一般的には次のような, 領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d \, (d=1,2,3)$ 上の偏微分方程式系で与えられる [78]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\{a_1(u,v)\nabla u + u\nabla B_1(v)\} + f_1(u,v) & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \operatorname{div}\{a_2(u,v)\nabla v + v\nabla B_2(u)\} + f_2(u,v) & \text{in } \Omega \times (0,\infty). \end{cases}$$

この式において第 1 項が自然な拡散を, 第 2 項が相互作用による移動を, また第 3 項が反応による生成・消滅を表している.

このような方程式が, 古くから知られているものもあるにもかかわらず, 最近になって注目を集めるようになった背景には, 近年における数学理論の進歩がある. 強い相互作用を持つ反応拡散方程式系は数学の言葉では準線形放物型偏微分方程式系と呼ばれるものに分類される. また放物型偏微分方程式系は適当な関数空間の上で定式化することによって, 無限次元ベクトル空間上の常微分方程式として抽象的に扱うこ

とができる. このようにして抽象化された方程式は抽象発展方程式と呼ばれ, その理論や解析手法が Hille-吉田の半群理論 [79] を基礎として加藤 [27], Sobolevskii [56], 田辺 [62–64], Lunardi [40], Amann [2–5], 八木 [73–78] らによって展開され, 確立されてきた. さらに最近はこのような一般的成果を基にして, 個々の方程式に対する研究が盛んになされるようになり, その成果が徐々に挙げられつつある [76,77].

このようにして解の解析的構成や漸近挙動などの定性的性質を調べることができるが, これだけでは実際にそれぞれの解がどのような時間的・空間的変化をするかという情報を得ることはできない. 具体的な解の挙動を知るためには, 何らかの近似手法を用いて解を個別に数値的に構成してその挙動を追跡するといった, 定量的研究が重要となる.

放物型偏微分方程式の近似解法には通常, 空間変数を差分化, あるいは有限要素法や境界要素法によって離散化し, それによって得られる連立常微分方程式に, Euler 法, Runge-Kutta 法, 多段階法といった時間離散化手法を適用するという手法が用いられる. 空間離散化については特に, 関数解析的手法によって体系化されている有限要素法, あるいはその一般化である Galerkin 法がよく用いられ, 1970 年代から 1980 年代にかけて Helfrich [25], 藤田, 水谷, 鈴木 [18,19,57–60], 牛島 [68–72], Bramble, Thomée [6,8,65,66], Sammon [52,53] など国内外の多くの研究者が, 線形方程式への応用に関する研究を手がけている. 一方で, 空間離散化を考慮せずに, 上記の時間離散化手法を用いた抽象的な近似に関しても, Le Roux [35,36] をはじめ Savaré [54], Larsson, Thomée [15,34], Ostermann [38,39,47], Palencia [20–22,48,49] らによって, 近年主にヨーロッパを舞台にして盛んに研究が行われている. しかしいずれにしても, 準線形方程式の離散化近似に関する理論的研究はまだ始められたばかりの段階にあり, その個別の方程式への応用に関する研究成果も数少ないのが現状である.

本論文では, 一般の準線形放物型偏微分方程式の数値解法として, 新たな全離散近似解法を提案し, その安定性および近似解の収束性を保証することを目的とする. 具体的には, 時間変数の離散化に陰的 Runge-Kutta 法を, 空間変数の離散化に有限要

素法を適用し, 半群論的アプローチによる抽象発展方程式論の手法を応用して解析する. Runge-Kutta 法には, 一段階法, すなわち直前のただ一つのステップにおける近似解の値から次のステップの値が求められる解法であるにも関わらず, その係数の組み合わせ方によって高い近似精度が得られるという, 大きな特徴がある. また, 適当な陰的法を用いることによって, 無条件安定な, すなわち空間刻み幅と時間刻み幅の組み合わせに依らずに近似解の有界性が保証されるような, 全離散近似解法が構成されることが期待される. 実際に本論文の第 4 章において, 近似解の表現公式を与えることによって, 解法の無条件安定性が示される. 発展方程式の解の表現公式と非常に類似したこの公式によって, 発展方程式論における様々な手法の応用が容易となる. さらに, これらと同様の式によって, 近似誤差の表示公式が与えられることを示し, これによって刻み幅に一様な誤差評価を導く. 誤差の表示および評価については, Lubich and Ostermann [39] の誤差評価の手法を参考にした.

有限要素法は, 差分法や境界要素法と比較して, 領域の次元や形状, 方程式の形式に対する依存が小さい, 特に非線形方程式への応用が容易である, 基底関数の選び方によって近似の精度が決定される, といった特徴が挙げられる. また上に述べたように, 関数解析すなわち無限次元ベクトル空間上の解析学によって体系化された理論が存在する. 中でも 牛島 [72] などに見られる抽象化は, 無限次の行列である微分作用素を有限次の行列によって近似するということを強く意識したものである. これは, 有限要素法と発展方程式論の手法とが相性が良いことを示すものである. 実際に本論文の第 5 章では, 近似作用素の収束性に関する条件を設定し, 抽象的な枠組みの中で一般的な結果を与える.

さらに本論文では, 上述のようにして与えた全離散近似解法の有効性を示すために, 個々の反応拡散方程式系の数値計算にこの解法を応用して, 具体的に数値解を構成することを試みる. 本論文の第 6 章においては, 細胞性粘菌の走化性による集合体形成のモデルである Keller-Segel 方程式の数値計算例を示し, 定常解の存在について新しい事柄を示す.

以下に各章の概略を示す.

第 2 章は, 第 3–6 章における議論のための準備として, 関数空間や放物型偏微分方程式, 陰的 Runge-Kutta 法, 有限要素法, Volterra 型離散積分不等式など, 基礎事項の概説および本論文に関連して新たに示された事実の証明に充てられる.

第 3 章では線形放物型方程式の Runge-Kutta 法による時間離散近似を扱う. 線形発展方程式の理論では放物型半群や発展作用素が重要な役割を担うが, ここでは線形放物型方程式の時間離散近似式に関しても, 放物型半群や発展作用素と同様の性質を持ち, 同様の役割を果たすものが構成される. 3.2 節では時間的斉次線形方程式の近似解が放物型離散半群を用いて表現されることを示し, 放物型離散半群の性質について述べる. 3.3 節では時間的非斉次線形方程式の近似に対して, 元の方程式の発展作用素に相当する離散発展作用素を用いた近似解の表現公式を与える. さらに離散発展作用素の構成を示し, これが元の方程式の発展作用素と類似の性質を有することを明らかにする.

第 4 章では準線形放物型方程式の Runge-Kutta 法による時間離散近似解の構成とその収束性について考察する. 準線形放物型方程式の解は発展作用素による解の表現公式と縮小写像の不動点定理を応用して構成される. 4.3 節では時間離散近似解をこれと同様の筋道を辿って, つまり離散発展作用素による近似解の表現公式と縮小写像の不動点定理を応用して構成する. 4.4 節においては近似解の誤差が離散発展作用素によって表現されることを利用して, 誤差評価を与える. いずれにおいても第 3 章の結果が重要な役割を担う.

第 5 章で有限要素型近似と Runge-Kutta 法による, 準線形放物型方程式の全離散近似方程式が時間局所解を持つことを示し, 近似解の誤差の評価式を与える. 5.3 節で全離散近似解の構成を示すが, やはり 4.3 節における時間離散近似解の場合と同様の方針によって証明する. また 5.4 節で近似解の誤差評価を与えるが, ここでも離散発展作用素による誤差の表現を用いる. 第 5 章の結果, 反応拡散方程式系の数値解法として, 有限要素法と Runge-Kutta 法を用いた全離散近似解法が構成され, その安定性と収束性が保証される.

第 6 章においては第 3–5 章で得られた一般的結果の 1 つの応用として, 1 次元 Keller-Segel 方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} = d_a \dfrac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(a \dfrac{b}{\rho} \dfrac{\partial \rho}{\partial x}\right), & 0 < x < 1, t > 0, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = d_\rho \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + fa - g\rho, & 0 < x < 1, t > 0, \\ \dfrac{\partial a}{\partial n} = \dfrac{\partial \rho}{\partial n} = 0, & x = 0, 1, t > 0, \end{cases}$$

の数値計算について得られた結果を述べる. 数値計算をするにあたって, 第 5 章で与えた全離散近似解法が Keller-Segel 方程式に対して応用可能であることを示し, その解法の誤差評価を与える. 数値計算の結果, 解析的結果によって少なくとも 1 つ存在することが示されている非定数定常解が, 数値的に 2 つ以上存在することが示唆される.

第 7 章では総括として, 本論文の内容をまとめ, 今後の研究課題について触れる.

第 2 章

基礎事項の準備

序論でも触れたように本論文では, 放物型偏微分方程式の全離散近似解に関する解析に, 関数解析および抽象発展方程式論の手法を応用する. また離散化には有限要素法と陰的 Runge-Kutta 法を利用することを考える. そこでこの章では本論に入るための準備として, 関数解析, 陰的 Runge-Kutta 法, 有限要素法に関して本論文で必要となる範囲で概観する.

2.1 関数解析と放物型偏微分方程式.

熱方程式や強い相互作用を持つ反応拡散方程式系などの放物型偏微分方程式は後述するように, L^2-空間などの適当な関数空間の上の常微分方程式として, 抽象的に定式化することができる. このような方程式は抽象発展方程式と呼ばれ, 序論でも触れたが, 関数空間, 作用素論, Hille-吉田の半群理論を基礎として, その理論が体系的に展開されてきた. ここでは本論文で重要となる事柄を Adams [1], Krein [32], 田辺 [62–64], Triebel [67], 八木 [77] などから引用して述べる.

I) Sobolev 空間.

$\mathbb{R}^d\,(d=1,2)$ で d-次元実 Euclid 空間を表す. 集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ は弧状連結な開集合であるとき領域と呼ぶ. $\partial\Omega$ で Ω の境界を表し, $\frac{\partial}{\partial n}$ を $\partial\Omega$ での外向き法線ベクトルに沿った微分演算記号とする.

有界領域 Ω に対して,

$$\bigcup_{j=1}^{M} O_j \supset \partial\Omega, \quad (O_j \cap \Omega) + C_j \subset \Omega,\, j=1,\dots,M,$$

を成立させるような, 有限個の開集合 $O_1,\dots,O_M$ とそれに対応する有限個の円錐形

開集合 $C_1, \ldots, C_M$,

$$C_j = \{x \in \mathbb{R}^d;\ 0 < y = x \cdot v_j < h_j,\ |x - yv_j| < a_j y\},$$
$$v_j \in \mathbb{R}^d : |v_j| = 1,\ h_j, a_j > 0,$$

が存在するとき, Ω は限定円錐条件を満たすという. 例えば凸多角形領域や, 滑らかな境界を持つ領域は限定円錐条件を満たす.

実数 s の整数部分, 小数部分をそれぞれ $[s]$, $\{s\}$ で表す. また, d 個の非負整数の組 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ に対して $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}},$$

と定義する. $\overline{\Omega}$ 上の連続関数の集合を $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ と書き,

$$\|f\|_{\mathcal{C}} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)|$$

とする. m が非負整数のとき, $\overline{\Omega}$ 上で m 回連続偏微分可能な関数の集合を $\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$ で表し,

$$\|f\|_{\mathcal{C}^m} = \max_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}$$

とする. また整数でない $\sigma > 0$ について, $[\sigma]$ 回連続偏微分可能で $[\sigma]$ 次のすべての偏導関数が指数 $s = \{\sigma\}$ の Hölder 連続:

$$\|f\|_{\mathcal{C}^s} = \sup_{x, y \in \Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^s} < \infty$$

であるような関数の集合を $\mathcal{C}^\sigma(\overline{\Omega})$ と書き,

$$\|f\|_{\mathcal{C}^\sigma} = \max\left\{\|f\|_{\mathcal{C}^{[\sigma]}},\ \max_{|\alpha| = [\sigma]} \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}^{\{\sigma\}}}\right\}$$

と定義する.

$1 \le p < \infty$ のとき, Ω 上で p 乗可積分:

$$\|f\|_{L^p} = \left\{\int_\Omega |f(x)|^p dx\right\}^{1/p} < \infty$$

な関数の全体を $L^p(\Omega)$ と書く. 特に $p=2$ の場合はよく知られた L^2-空間であり, そこでの内積を

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx$$

で定義する. また Ω 上で本質的有界:

$$\|f\|_{L^\infty} = \text{ess.}\sup_{x\in\Omega} |f(x)| < \infty$$

である関数の全体を $L^\infty(\Omega)$ と書く.

非負整数 m に対して, m 次までのすべての偏導関数が $L^2(\Omega)$ に属する関数 f の集合を $H^m(\Omega)$ と表し,

$$\|f\|_{H^m} = \left\{ \sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha f\|_{L^2}^2 \right\}^{1/2}$$

とおく. $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ である. s が整数でない正の実数のときは, $H^s(\Omega)$ を $H^{[s]}(\Omega)$ と $H^{[s]+1}(\Omega)$ の補間 $H^s(\Omega) = [H^{[s]}(\Omega), H^{[s]+1}(\Omega)]_{\{s\}}$ によって定義する.

このようにして定義された $H^s(\Omega)$ は指数 s の Sobolev 空間と呼ばれる. また, Ω が限定円錐条件を満たすとき,

$$\|f\|_{H^s}^2 \sim \|f\|_{L^2}^2 + \sum_{|\alpha|=[s]} \int_{\Omega\times\Omega} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|^2}{|x-y|^{d+2\{s\}}} dxdy \tag{2.1}$$

が成立することが [67] に示されている.

これらの集合 $C^s(\overline{\Omega})$, $L^p(\Omega)$, $H^s(\Omega)$ はそれぞれ $\|\cdot\|_{C^s}$, $\|\cdot\|_{L^p}$, $\|\cdot\|_{H^s}$ をノルムとする Banach 空間, すなわち無限次元ベクトル空間である. 特に $L^2(\Omega)$, $H^s(\Omega)$ は内積を導入することによって Hilbert 空間となる. $\mathbb{L}^p(\Omega) = L^p(\Omega)\times L^p(\Omega)$, $\mathbb{H}^s(\Omega) = H^s(\Omega)\times H^s(\Omega)$ をそれぞれ $L^p(\Omega)$, $H^s(\Omega)$ の $\begin{bmatrix}\cdot\\\cdot\end{bmatrix}$ の形の積空間とする.

以下にこれらの空間の間の関係に関する定理を述べる. いずれも詳細については [62–64,67] を参照のこと.

Sobolev 空間の補間定理. $d=1,2$, $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ は限定円錐条件を満たす有界領域とし, $0\le s_0 < s_1 \le 2$ とする. $0\le\theta\le 1$, $s=(1-\theta)s_0+\theta s_1$ のとき,

$$\|\cdot\|_{H^s} \le C_\theta \|\cdot\|_{H^{s_0}}^{1-\theta} \|\cdot\|_{H^{s_1}}^{\theta} \tag{2.2}$$

が成立する. ◁

Sobolev 空間の埋蔵定理. 1) $\Omega \subset \mathbb{R}^1$ は有界領域すなわち有界開区間とする. $0 \le s \le 1/2$ のとき, $H^s(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - s$, であって,

$$\|\cdot\|_{L^p} \le C_s \|\cdot\|_{H^s}. \tag{2.3}$$

$s > 1/2$ のときは $H^s(\Omega) \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega})$,

$$\|\cdot\|_{\mathcal{C}} \le C_s \|\cdot\|_{H^s}. \tag{2.4}$$

2) $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ は有界領域とする. $0 \le s < 1$ のとき, $H^s(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, $\frac{1}{p} = \frac{1-s}{2}$, であって,

$$\|\cdot\|_{L^p} \le C_s \|\cdot\|_{H^s}. \tag{2.5}$$

$s = 1$ のときは任意の $1 \le q < \infty$ に対して $H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ であって,

$$\|\cdot\|_{L^q} \le C_{q,p} \|\cdot\|_{H^1}^{1-p/q} \|\cdot\|_{L^p}^{p/q}, \quad 1 \le p \le q. \tag{2.6}$$

$s > 1$ のときは $H^s(\Omega) \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega})$,

$$\|\cdot\|_{\mathcal{C}} \le C_s \|\cdot\|_{H^s}. \tag{2.7}$$

$\triangleleft$

II) 線形作用素の分数べき.

ここでは, 前出の Sobolev 空間の補間定理に対応する抽象的な補間定理について述べる. はじめに本論文を通して用いる記号を定義する.

X で Banach 空間あるいは Hilbert 空間を表し, そのノルムを $\|\cdot\|_X$ と書く. X が Hilbert 空間のとき, $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ で内積を示す. Banach 空間 X から別の Banach 空間 Y への作用素 A に対して, $\mathcal{D}(A)$, $\mathcal{R}(A)$ でそれぞれ A の定義域 ($\subset X$), 値域 ($\subset Y$) を表す. A が有界作用素のとき $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ と書き, そのノルムを $\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{0 \ne x \in X} \|Ax\|_Y / \|x\|_X$ で導入する. また $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,X)$ とする.

Banach 空間 X で稠密に定義された閉線形作用素 A が次の条件を満たすとする.

(A) レゾルベント集合 $\rho(A)$ はある角度 $\varphi \in (0, \pi/2)$ の角領域 $\mathbb{C} \setminus \overline{S_\varphi}$, $S_\varphi = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\arg \lambda| < \varphi\}$, を含み, レゾルベントは

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{M_A}{|\lambda| + 1}, \quad \lambda \notin \overline{S_\varphi},$$

を満たす.

このとき A の負の分数べきを次式で定義することができる:

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lambda^{-\alpha} (\lambda - A)^{-1} d\lambda, \quad \alpha > 0.$$

ただし Γ は $\rho(A)$ の中にあって, 原点と実軸の負の部分を囲む積分路. また, 正の分数べきは非有界作用素として,

$$A^\alpha = (A^{-\alpha})^{-1},\ \mathcal{D}(A^\alpha) = \mathcal{R}(A^{-\alpha}), \quad \alpha > 0,$$

によって定義される. 分数べき A^α には実数のべき乗と同様に半群性

$$A^\alpha \cdot A^\beta = A^{\alpha + \beta}$$

がある.

X が Hilbert 空間のとき, $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$, ある $\mu > 0$ について $\mathcal{R}(A - \mu) = X$, さらに

$$\mathrm{Re}\langle Au, u\rangle_X \ge 0, \quad u \in \mathcal{D}(A),$$

を満たすような作用素 A を極大増大作用素という. 極大増大作用素 A もやはり条件 (A) を見たし, その分数べき A^α を定義することができる.

以下に示す不等式 (2.8), (2.9) が Sobolev 空間の補間 (2.2) に対応する抽象的な補間不等式である. いずれも [32,62] に詳しい内容が示されている.

モーメントの不等式. 作用素 A が条件 (A) を満たすとき, 任意の $\alpha < \beta < \gamma$ に対して

$$\|A^\beta u\|_X \le C_{\alpha,\beta,\gamma} \|A^\alpha u\|_X^{(\gamma-\beta)/(\gamma-\alpha)} \|A^\gamma u\|_X^{(\beta-\alpha)/(\gamma-\alpha)}, \quad u \in \mathcal{D}(A^\gamma), \tag{2.8}$$

が成立する. ◁

Heinz-Kato の定理. X, Y を Hilbert 空間とし, A, B をそれぞれ X, Y で定義された極大増大作用素とする. また $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ は $\mathcal{D}(A)$ を $\mathcal{D}(B)$ へ写し, すべての $u \in \mathcal{D}(A)$ に対して

$$\|BTu\|_Y \le M\|Au\|_X$$

が成立すると仮定する. このとき任意の $\alpha \in [0,1]$ に対して, T は $\mathcal{D}(A^\alpha)$ を $\mathcal{D}(B^\alpha)$ へ写し,

$$\|B^\alpha Tu\|_Y \le C_\alpha \|T\|^{1-\alpha}_{\mathcal{L}(X,Y)} \|A^\alpha u\|_X, \quad u \in \mathcal{D}(A^\alpha), \tag{2.9}$$

が成立する. ◁

III) 放物型偏微分方程式.

熱方程式に代表される線形放物型偏微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\{a(x,t)\nabla u\} - c(x,t)u + f(x,t), & x \in \Omega,\ 0 < t \le T, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

は $X = L^2(\Omega)$,

$$\mathcal{D}(A(t)) = \left\{u \in H^2(\Omega);\ u|_{\partial\Omega} = 0\right\},$$

$$(A(t)u)(x) = -\operatorname{div}\{a(x,t)\nabla u(x)\} + c(x,t)u(x), \quad u \in \mathcal{D}(A(t),$$

$$(F(t))(x) = f(x,t),$$

とおくことによって, 無限次元ベクトル空間 X 上の線形常微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A(t)u = F(t), & 0 < t \le T, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

として定式化することができる. また序論に示した強い相互作用を持つ反応拡散方程式などの準線形放物型偏微分方程式系

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = \operatorname{div}\{a_1(u_1,u_2)\nabla u_1 + u_1\nabla B_1(u_2)\} + f_1(u_1,u_2) & x \in \Omega,\ 0 < t \le T, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = \operatorname{div}\{a_2(u_1,u_2)\nabla u_2 + u_2\nabla B_2(u_1)\} + f_2(u_1,u_2) & x \in \Omega,\ 0, < t \le T, \\ \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \\ u_1(x,t) = \bar{u}_1(x),\ u_2(x,t) = \bar{u}_2(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

は例えば $X=\mathbb{L}^2(\Omega)$, K を適当な指数 s の Sobolev 空間 $Z=\mathbb{H}^s(\Omega)$ の中の開球とし,

$$\mathcal{D}(A(u))=\left\{v=\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}\in\mathbb{H}^2(\Omega);\ \frac{\partial v_1}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega}=\frac{\partial v_2}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega}=0\right\},\quad u\in K,$$

$$(A(u)v)(x)=\begin{bmatrix}-\operatorname{div}\{a_1(u_1,u_2)\nabla v_1+u_1B_1'(u_2)\nabla v_2\}\\ -\operatorname{div}\{a_2(u_1,u_2)\nabla v_2+u_2B_2'(u_1)\nabla v_1\}\end{bmatrix},$$

$$u=\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}\in K,\ v\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}\in\mathcal{D}(A(u)),$$

$$(F(u))(x)=\begin{bmatrix}f_1(u_1,u_2)\\ f_2(u_1,u_2)\end{bmatrix},\quad u=\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}\in K,$$

$$u_0(x)=\begin{bmatrix}\bar{u}_1(x)\\ \bar{u}_2(x)\end{bmatrix},$$

とおけば, X 上の準線形常微分方程式

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}+A(u)u=F(u), & 0<t\le T,\\ u(0)=u_0,\end{cases}$$

となる. これらのような方程式を一般に抽象発展方程式と呼ぶ. 序論やこの節の冒頭でも触れたが, 抽象発展方程式の解の構成や定性的性質は, 通常の常微分方程式の理論を参考にしながら, 関数解析的手法によって明らかにされてきた. ここでは線形・準線形抽象発展方程式の理論の主要な部分を田辺 [62–64], 八木 [77] などから引用して紹介する. ここに示す解析手法は本論文第 3–5 章における理論展開の基礎となる.

III-A) 線形放物型方程式.

始めに Banach 空間 X の上の時間的斉次線形抽象方程式

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}+Au=F(t), & 0<t\le T,\\ u(0)=u_0,\end{cases}\tag{2.10}$$

を考える. ここで, A は X で稠密に定義された閉線形作用素, F は X に値を取る $[0,T]$ 上の連続関数, $u_0\in X$ は初期値, $u=u(t)$ は未知関数である.

以下の条件を仮定する.

(A) A のレゾルベント集合 $\rho(A)$ は, ある角度 $\varphi\in(0,\pi/2)$ の角領域 $\mathbb{C}\setminus\overline{S_\varphi}$, $S_\varphi=\{\lambda\in\mathbb{C};\ |\arg\lambda|<\varphi\}$, を含み, レゾルベントは評価

$$\|(\lambda-A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\le\frac{M_A}{|\lambda|+1},\quad \lambda\notin\overline{S_\varphi},\tag{2.11}$$

を満たす.

($\mathrm{F_t}$) ある指数 $\eta \in (0,1]$ があって, $F \in C^\eta([0,T];X)$ は Hölder 連続である.

常微分方程式と同様に考えれば, (2.10) の解が指数関数を用いて与えられることが期待される. 実際, 条件 (A) の下では作用素 $-A$ の指数関数 e^{-tA} を複素積分

$$e^{-tA} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-t\lambda}(\lambda - A)^{-1}d\lambda, \quad t > 0, \tag{2.12}$$

によって定義することができる. ここで Γ は $\infty e^{+i\varphi}$ から $\infty e^{-i\varphi}$ へ向かう, S_φ を通らない積分路. また, これは通常の指数関数と同様に半群性

$$e^{-tA}e^{-sA} = e^{-(t+s)A}, \quad t, s > 0,$$

を持つ. よって $e^{-0A} = 1$ と定義すれば, 作用素族 $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$ は連続パラメータ t の連続半群となる. さらに (2.12) から導かれる性質として, 連続性

$$t \to 0 \text{ のとき} \quad e^{-tA} \to I \quad (\text{強収束}),$$

や微分可能性

$$\frac{d}{dt}e^{-tA} = -Ae^{-tA}, \quad t > 0, \tag{2.13}$$

さらに t に関して一様な評価

$$\|e^{-tA}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C, \quad t \leq 0, \tag{2.14}$$

$$\|A^\theta e^{-tA}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_\theta t^{-\theta}, \quad t > 0,\ \theta > 0, \tag{2.15}$$

が示される. 特に (2.15) は放物型方程式に特有の性質である. この意味を込めて, 連続半群 $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$ は $-A$ によって生成される放物型半群と呼ばれる.

放物型半群の性質から直ちに次の定理が示される.

定理 2.1. 方程式 (2.10) の一意解 $u \in \mathcal{C}([0,T];X) \cap \mathcal{C}^1((0,T];\mathcal{D}(A))$ は, 放物型半群を用いて,

$$u(t) = e^{-tA}u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A}F(s)ds, \quad 0 \le t \le T, \tag{2.16}$$

と表され,

$$\|u(t)\|_X \le C\left(\|u_0\|_X + \|F\|_{\mathcal{C}([0,T];X)}\right), \quad 0 \le t \le T, \tag{2.17}$$

と評価される. 特に $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ のとき $u \in \mathcal{C}^1([0,T];\mathcal{D}(A))$ であって,

$$\|Au(t)\|_X \le C\left(\|Au_0\|_X + \frac{1}{\eta}\|F\|_{\mathcal{C}^\eta([0,T];X)}\right), \quad 0 \le t \le T, \tag{2.18}$$

が成立する. ◁

次に, X の上の時間的非斉次線形抽象方程式

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A(t)u = F(t), \quad 0 < t \le T, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.19}$$

を考える. ここで $A(t)$ は X で稠密に定義された閉線形作用素で, 定義域 $\mathcal{D}(A(t))$ は t に関して一定とする.

以下の条件と前出の $(\mathrm{F_t})$ を仮定する.

$(\mathrm{A_t}1)$ すべての $t \in [0,T]$ についてレゾルベント集合 $\rho(A(t))$ は角領域 $\mathbb{C} \setminus \overline{S_\varphi}$ を含み, レゾルベント $(\lambda - A(t))^{-1}$ は t に一様に (2.11) と同じ評価を満たす.

$(\mathrm{A_t}2)$ ある指数 $\mu \in (0,1]$ があって, $A(t)$ は t の関数として Hölder 条件

$$\|\{A(t) - A(s)\}A(s)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le L_A|t-s|^\mu, \quad t,s \in [0,T], \tag{2.20}$$

を満たす.

放物型半群 e^{-tA} に対応するものとして, 条件 $(\mathrm{A_t}1)$, $(\mathrm{A_t}2)$ の下で積分方程式

$$\Phi(t,s) = e^{-(t-s)A(s)} - \int_s^t \Phi(t,r)\{A(r) - A(s)\}e^{-(r-s)A(s)}dr \tag{2.21}$$

によって作用素値関数 $\Phi(t,s)$ を導入することができる. $\Phi(\cdot,\cdot)$ はやはり放物型半群と同様に半群性

$$\Phi(t,t) = I, \quad 0 \le t \le T,$$

$$\Phi(t,r)\Phi(r,s) = \Phi(t,s), \quad 0 \le s \le r \le t \le T,$$

と微分可能性

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,s) = -A(t)\Phi(t,s),$$
$$\frac{\partial}{\partial s}\Phi(t,s) = \Phi(t,s)A(s),$$

を有する. さらに評価式

$$\|\Phi(t,s)\|_{\mathcal{L}(X)} \le C, \quad 0 \le s \le t \le T, \tag{2.22}$$

$$\|A(t)^{\theta}\Phi(t,s)\|_{\mathcal{L}(X)} \le C_{\theta}(t-s)^{-\theta}, \quad 0 < s < t \le T, 0 < \theta \le 1, \tag{2.23}$$

$$\|\Phi(t,s)A(s)^{\theta}\|_{\mathcal{L}(X)} \le C_{\theta}(t-s)^{-\theta}, \quad 0 < s < t \le T, 0 < \theta < \mu, \tag{2.24}$$

が成立する. この作用素値関数 $\Phi(\cdot,\cdot)$ は (2.19) に関する基本解, あるいは作用素 $A(\cdot)$ によって生成される発展作用素と呼ばれる.

発展作用素の性質から次の定理が導かれる.

定理 2.2. 方程式 (2.19) の一意解 $u \in \mathcal{C}([0,T];X) \cap \mathcal{C}^1((0,T];X)$, $A(\cdot)u \in \mathcal{C}((0,T];X)$ は

$$u(t) = \Phi(t,0)u_0 + \int_0^t \Phi(t,s)F(s)ds, \quad 0 \le t \le T, \tag{2.25}$$

と書くことができ,

$$\|u(t)\|_X \le C\left(\|u_0\|_X + \|F\|_{\mathcal{C}([0,T];X)}\right), \quad 0 \le t \le T, \tag{2.26}$$

によって評価される. さらに, もし $u_0 \in \mathcal{D}(A(0))$ なら $A(\cdot)u \in \mathcal{C}([0,T];X)$ であって,

$$\|A(t)u(t)\|_X \le C\left(\|A(0)u_0\|_X + \frac{1}{\eta}\|F\|_{\mathcal{C}^{\eta}([0,T];X)}\right), \quad 0 \le t \le T, \tag{2.27}$$

が成立する. ◁

III-B) 準線形放物型方程式.

ここでは, Banach 空間 X の上の準線形抽象発展方程式

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{du}{dt}+A(u)u=F(u), \quad 0<t\leq T,\\ u(0)=u_0,\end{array}\right. \tag{2.28}$$

を考える. ここで $A(u)$ は X で稠密な定義域を持つ閉線形作用素で, Z を X に連続的に埋め込まれた別の Banach 空間として, $u\in K=\{u\in Z;\ \|u-u_0\|_Z<r\}$ に対して定義される. 定義域 $\mathcal{D}(A(u))$ は $u\in K$ に関して一定とする. F は X に値を取る K 上の関数, $u_0\in K$ は初期値, $u=u(t)$ は未知関数である.

以下の条件を仮定する.

($\mathrm{A_u}$1) すべての $u\in K$ に対してレゾルベント集合 $\rho(A(u))$ はある角領域 $\mathbb{C}\setminus\overline{S_\varphi}$ を含み, レゾルベント $(\lambda-A(u))^{-1}$ は u に一様に (2.11) と同じ評価

$$\|(\lambda-A(u))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\leq\frac{M_A}{|\lambda|+1}, \quad \lambda\notin\overline{S_\varphi},\ u\in K, \tag{2.29}$$

を満たす.

($\mathrm{A_u}$2) $A(\cdot)$ は Lipschitz 条件

$$\|\{A(u)-A(v)\}A(u)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\leq L_A\|u-v\|_Z, \quad u,v\in K, \tag{2.30}$$

を満たす.

(Sp) ある数 $\alpha\in(0,1)$ があって, $\mathcal{D}(A(u_0)^\alpha)$ は Z に連続的に埋め込まれ, $\|\cdot\|_Z\leq D\|A(u_0)^\alpha\cdot\|_X$ を満たす.

($\mathrm{F_u}$) $F(\cdot)$ は Lipschitz 条件

$$\|F(u)-F(v)\|_X\leq L_F\|u-v\|_Z, \quad u,v\in K,$$

を満たす.

(In) ある数 $\beta\in(\alpha,1]$ について, $u_0\in\mathcal{D}(A(u_0)^\beta)$ である.

これらの条件の下で (2.28) の解が構成されることが, [77,Theorem A.4] に示されている. この定理は, 本論文の第 4,5 章で (2.28) の近似解を構成するにあたって, 基本的な考え方を提供するので, ここでその略証と合わせて述べる.

定理 2.3. 上記の (Sp), ($\mathrm{A_u}$1), ($\mathrm{A_u}$2), ($\mathrm{F_u}$), (In) を仮定し, $\eta \in (0, \beta - \alpha)$ を任意に選ぶ. このとき, 関数空間 $\mathcal{C}^\eta([0,T];Z)$ の中に, (2.28) は一意な解 $u \in \mathcal{C}^1((0,S];X)$, $A(u)u \in C((0,S];X)$, を持つ. さらに u は次の評価を満たす.

$$\|A(u(t))u(t)\|_X \le Ct^{\beta-1}, \quad 0 < t \le S.$$

略証. $0 < S < r^{1/\eta}$ として,

$$\mathcal{X}(S) = \mathcal{C}([0,S];Z),$$

$$\mathcal{K}(S) = \{u \in \mathcal{C}^\eta([0,S];Z);\ u(0) = u_0,\ \|u(t) - u(s)\|_Z \le |t-s|^\eta, t, s \in [0,S]\},$$

とおく. 明らかに $\mathcal{K}(S)$ は $\mathcal{X}(S)$ の閉部分集合.

各 $u \in K$ について, $A(u(\cdot))$ は条件 ($\mathrm{A_t}$1), ($\mathrm{A_t}$2) を満たすから, $A(u(\cdot))$ は発展作用素 $\Phi(u;\cdot,\cdot)$ を生成する. これより, 写像 $\mathcal{T}\colon \mathcal{K}(S) \to \mathcal{C}([0,S];X)$ が次式で定義される.

$$(\mathcal{T}(u))(t) = \Phi(u;t,0)u_0 + \int_0^t \Phi(u;t,s)F(u(s))ds, \quad 0 \le t \le S.$$

発展作用素の性質から, 写像 $\mathcal{T}$ が $\mathcal{K}(S)$ をそれ自身へ写すこと, また $\mathcal{X}(S)$ 上の縮小写像であることが示される. ゆえに縮小写像の原理より, $\mathcal{T}$ は $\mathcal{K}(S)$ の中に一意な不動点 $u \in K$ を持つ. この不動点 u が (2.28) の解であることはただちに分かる. □

2.2 陰的 Runge-Kutta 法.

一般に知られている Runge-Kutta 法は, 1 世紀ほど前に Runge と Kutta によって構成されたものを指す. これに対し 1960 年代以降, Butcher, Hairer, Iserles らによって一般化された Runge-Kutta 法の理論が構築されてきた. ここでは, 一般化された Runge-Kutta 法を単に Runge-Kutta 法と呼び, これに関して本論文の中で重要となる定義などを Butcher [10], 三井 [41] などから引用して述べる.

Runge-Kutta 法とは, 常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f(t,u), \quad t \ge 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.31}$$

の近似解 U_n を漸化式

$$
(2.32)\qquad
\begin{cases}
U_{n+1} = U_n + h\sum_{j=1}^{s} b_j K_{n,j}, \quad n = 0,1,\dots, \\
V_{n,i} = U_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} K_{n,j}, \quad i = 1,\dots,s, \\
K_{n,i} = f(t_n + hc_i, V_{n,i}), \qquad i = 1,\dots,s, \\
U_0 = u_0,
\end{cases}
$$

によって与える数値解法である. この係数の組み合わせは Butcher 配列と呼ばれる配列表現

$$
\begin{array}{c|ccc}
c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1s} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
c_s & a_{s1} & \cdots & a_{ss} \\
\hline
 & b_1 & \cdots & b_s
\end{array}
$$

によって与えられることが多い. 行列表記

$$
\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{bmatrix}, \quad
\mathcal{B} = \begin{bmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_s \end{bmatrix}, \quad
\mathcal{C} = \begin{bmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_s \end{bmatrix}
$$

を用いると, (2.32) は次のように書くことができる.

$$
(2.33)\qquad
\begin{cases}
U_{n+1} = U_n + h\boldsymbol{e}^T \mathcal{B}\boldsymbol{K}_n, \quad n = 0,1,\dots, \\
\boldsymbol{V}_n = \boldsymbol{e}U_n + h\mathcal{A}\boldsymbol{K}_n, \\
\boldsymbol{K}_n = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\tau}_n, \boldsymbol{V}_n), \\
U_0 = u_0.
\end{cases}
$$

ここで $\boldsymbol{V}_n = [V_{n,1},\dots,V_{n,s}]^T$, $\boldsymbol{K}_n = [K_{n,1},\dots,K_{n,s}]^T$, $\boldsymbol{e} = [1,\dots,1]^T$, $\boldsymbol{\tau}_n = t_n\boldsymbol{e} + h\mathcal{C}\boldsymbol{e}$, また $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1,\dots,\tau_s]^T$ と $\boldsymbol{V} = [V_1,\dots,V_s]^T$ に対して $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{V}) = [f(\tau_1,V_1),\dots,f(\tau_s,V_s)]^T$ とおいた. 本論文では以後, 係数の組 $(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C})$ で与えられる Runge-Kutta 法を, Runge-Kutta 法 $(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C})$ と呼ぶ.

漸化式 (2.33) は, 行列 $\mathcal{A}$ が狭義下三角行列のときに限って, その第 2 式と第 3 式からなる連立方程式

$$
\boldsymbol{V}_n = \boldsymbol{e}U_n + h\mathcal{A}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\tau}_n, \boldsymbol{V}_n),
$$

すなわち

$$
V_{n,i} = U_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(t_n + hc_j, V_{n,j}), i = 1,\dots,s,
$$

が i の昇順の逐次代入のみで, つまり陽的に解くことができる. 逆に $\mathcal{A}$ が狭義下三角でないとき, $\boldsymbol{V}_n$ を求めるためにはこれらの式に何らかの反復計算を適用する必要がある. その意味で, Runge-Kutta 法 $(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C})$ は, 行列 $\mathcal{A}$ が狭義下三角のとき陽的, それ以外のときは陰的な Runge-Kutta 法と呼ばれる.

2.2.1 次数条件式.

Runge-Kutta 法は, $U_n = u(t_n)$ の条件の下で $U_{n+1} - u(t_{n+1}) = O(h^{p+1})\,(h \to 0)$ であるとき, p 次の精度を持つ, あるいは単に p 次であるという. この次数条件に関して Butcher [10] は次の定理を示している.

定理 2.4. $c_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}$ を満たす Runge-Kutta 法 $(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C})$ が p 次であるためには, 節点数が高々 p のすべての根付き木 T に対して,

$$\gamma(T)\Phi(T) = 1$$

が成立することが必要十分である. ここで $\gamma(T)$ は木 T の濃度, $\Phi(T)$ は木 T に対する基本重みである. ◁

$\gamma(T)$ は実数, $\Phi(T)$ は係数 a_{ij}, b_i, c_i の多項式であるので, これによって完全に次数を定める条件が分かったことになる. この式を次数条件式と呼ぶ.

次数条件式からただちに, Runge-Kutta 法 $(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C})$ が p 次のとき,

$$\boldsymbol{e}^T \mathcal{B}\mathcal{A}^{k-1}\mathcal{C}^{\ell-1}\boldsymbol{e} = \frac{1}{\ell(\ell+1)\cdots(k+\ell-1)}, \quad k,\ell \geq 1,\ k+\ell-1 \leq p, \tag{2.34}$$

が導かれる.

ここで, 内部次数と積分次数を定義する. Runge-Kutta 法 $(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C})$ の内部次数は

$$\mathcal{A}\mathcal{C}^{k-1}\boldsymbol{e} = \frac{1}{k}\mathcal{C}^k \boldsymbol{e}, \quad k = 1,2,\ldots,q, \tag{2.35}$$

が成立するような最大の q である. また積分次数は

$$\boldsymbol{e}^T \mathcal{B}\mathcal{C}^{k-1}\boldsymbol{e} = \frac{1}{k}, \quad k = 1,2,\ldots,r, \tag{2.36}$$

を満たす最大の r で定義される. 次数条件式等から, 関係式

$$\min\{q+1, r\} \leq p \leq \min\{2s, r\}$$

が成立することが知られている [10].

2.2.2 安定関数と安定性.

Runge-Kutta 法 $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ に対して, 有理関数

$$R(z) = 1 + z\boldsymbol{e}^T \mathcal{B}(\mathcal{I} - z\mathcal{A})^{-1}\boldsymbol{e}$$

をこのスキームの安定関数と呼ぶ.

$0 < \theta \leq \pi/2$ とする. $(\mathcal{I} - z\mathcal{A})^{-1}$ が閉角領域 $\mathbb{C} \setminus S_{\pi-\theta} = \{z \in \mathbb{C};\ |\arg(-z)| \leq \theta\}$, を含むある領域で正則で, 安定関数 $R(z)$ が

$$|R(z)| \leq 1, \quad z \in -\overline{S_\theta},$$

を満たすとき, Runge-Kutta 法は $A(\theta)$-安定であるという. $A(\theta)$-安定な Runge-Kutta 法に関してさらに

$$|R(\infty)| < 1$$

が成立するとき $A(\theta)$-強安定であるという. また本論文では新たに, $A(\theta)$-安定な Runge-Kutta 法に関して

$$R(\infty) = 0$$

が成立するとき, $L(\theta)$-安定であると定義する.

Crouzeix らは [15] で, 安定関数 $R(z)$ を含むあるクラスの有理関数の正則性に関する結果を示した. この結果は, 第 3 章において離散半群を構成するために重要な情報を与える. またこれは, $R(z)$ を $A(\theta)$-強安定な Runge-Kutta 法の安定関数に限定した場合, より精密にすることができる. そこで, ここにその結果を詳しい証明とともに示す.

補題 2.5. $A(\theta)$-強安定な Runge-Kutta 法の安定関数 $R(z)$ の特異点は, 閉領域

$$\Sigma = \{z \in \mathbb{C};\ \|\mathcal{A}\|^{-1} \le |z| \le \|\mathcal{A}^{-1}\|,\ |\arg z| \le \pi - \theta\}$$

に含まれる.

証明 は $A(\theta)$-強安定性の定義からほぼ明らかなので省略する. □

命題 2.6. $R(z)$ を $A(\theta)$-強安定な Runge-Kutta 法の安定関数とする. 適当な $\delta > 0$, $\delta^{-1} > \max\{\|\mathcal{A}\|, \|\mathcal{A}^{-1}\|\}$, を選べば, 任意の $0 < \theta' < \theta$ に対して次の評価が成立するような定数 $0 < \kappa < 1$, $\nu > 0$, $\sigma > 0$ をとることができる:

$$|R(z)| \le \begin{cases} \kappa, & |z| \ge \delta^{-1}, \\ \kappa, & \delta \le |z| \le \delta^{-1},\ |\arg(-z)| \le \theta', \\ e^{-\nu|z|}, & |z| \le \delta,\ |\arg(-z)| \le \theta', \\ e^{\sigma|z|}, & |z| \le \delta,\ |\arg(-z)| \ge \theta'. \end{cases}$$

証明. 補題 2.5 より $(\mathcal{I} - z\mathcal{A})^{-1}$ は $|z| > \|\mathcal{A}^{-1}\|$ で正則であって,

$$\lim_{z\to\infty} z(\mathcal{I} - z\mathcal{A})^{-1} = -\mathcal{A}^{-1}.$$

これより

$$R(\infty) = 1 - \boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1},$$

$$R(z) - R(\infty) = \boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{I} - z\mathcal{A})^{-1}\boldsymbol{e}$$

と書けて, 次の評価が成立する.

$$|R(z) - R(\infty)| \le \frac{C}{|z| - \|\mathcal{A}^{-1}\|}, \quad |z| > \|\mathcal{A}^{-1}\|.$$

$A(\theta)$-強安定であることより, $|R(\infty)| < 1$ だから, $\delta_1 > 0$ を十分小さく取ると

$$|R(z)| \le \kappa_1, \quad |z| \ge \delta_1^{-1},$$

を満たすような $\kappa_1 \in (0,1)$ を取ることができる.

一方,

$$R(z) = 1 + z\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\boldsymbol{e} + z^2\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}(\mathcal{I} - z\mathcal{A})^{-1}\boldsymbol{e}$$

より $b = \boldsymbol{e}^T \mathcal{B} \boldsymbol{e}$ とおくと

$$R(z) - e^{bz} = O(|z|^2)\ (z \to 0).$$

これより, $z = 0$ の十分近くでは

$$|R(z)| \le e^{C|z|^2} |e^{bz}|$$

が成立する. ところで, ふたたび $A(\theta)$-強安定性の定義より $b > 0$ だから, 任意の $\theta' \in (0, \theta]$ について

$$|e^{bz}| \le e^{-b|z|\cos\theta'}, \quad |\arg(-z)| \le \theta'.$$

よって, 十分小さな $\delta_2 > 0$ と任意の $0 < \theta' \le \theta$ に対して, 正数 ν, σ を取って

$$|R(z)| \le e^{-\nu|z|}, \quad |\arg(-z)| \le \theta',\ |z| \le \delta_2,$$

$$|R(z)| \le e^{\sigma|z|}, \quad |\arg(-z)| > \theta',\ |z| \le \delta_2,$$

が成立するようにできる.

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とする. 閉曲線

$$\{z;\ |z| = \delta, |\arg(-z)| \le \theta\} \cup \{z;\ \delta \le |z| \le \delta^{-1}, |\arg(-z)| = \theta\}$$
$$\cup \{z;\ |z| = \delta^{-1}, |\arg(-z)| \le \theta\}$$

で囲まれる領域の中で $R(z)$ は正則かつ $|R(z)| \le 1$ を満たす. 最大値原理より, 任意の $0 < \theta' < \theta$ に対して $\kappa_2 \in (0, 1)$ があって, $R(z)$ は

$$|R(z)| \le \kappa_2, \quad \delta \le |z| \le \delta^{-1},\ |\arg(-z)| \le \theta',$$

を満たす.

以上の ν, σ と $\kappa = \max\{\kappa_1, \kappa_2\}\ (< 1)$ によって, この命題が証明された. □

2.3 有限要素法.

有限要素法は, 構造体力学など工学の諸分野でよく用いられている数値解法である. 数学的な原型は 1943 年の Courant の論文に見られるが, 1950 年代半ばに Turner らが航空機の応力解析において再発見したのが, 有限要素法の実質的な始まりとされる. その後, 有限要素法が Ritz-Galerkin 法の特殊なケースであることが知られるようになり, 1960 年代後半以後, Ciarlet, Lions [11–13] らによって, 偏微分方程式の近似解法として関数解析の枠組みの中で体系化されてきた.

Ritz-Galerkin 法とは, 変分問題の近似解法である Ritz 法と, 偏微分方程式の境界値問題に対する近似解法の Galerkin 法を総称したものである. これらは一見異なる解法であるが, いずれも境界値問題の弱形式を有限次元空間の上へ射影する近似法と見なせることから, たびたび同種の解法として扱われる.

この節では, 有限要素法の概要を応用例を通して紹介した後, 有限要素法の基礎となる定義, 定理のうち本論文で必要となるものを Ciarlet [11–13] などから引用して述べる.

2.3.1 有限要素法の基本的な考え方.

有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d\,(d=1,2)$ 上の次の楕円型偏微分方程式の Neumann 境界値問題を考える.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x)\nabla u) + c(x)u = f(x) & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \Omega. \end{cases} \tag{2.37}$$

ここで $a, c \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ は $a(x) \geq a_0 > 0$, $c(x) \geq c_0 > 0$ を満たすとし, $f \in L^2(\Omega)$ とする. この問題は次の弱形式と同等になる:

$$\alpha(u,v) = \langle f, v\rangle_{L^2}, \quad v \in H^1(\Omega). \tag{2.38}$$

ただし $\alpha(u,v) = \langle a\nabla u, \nabla v\rangle_{L^2} + \langle cu, v\rangle_{L^2}$.

ここで (2.37) の近似解を, 適当な $\{\phi_1, \ldots, \phi_K\} \subset H^1(\Omega)$ を取って, $H^1(\Omega)$ の部分空間

$$V_K = \left\{ v_K = \sum_{k=1}^{K} y_k \phi_k \right\}$$

の中の問題

$$\alpha(u_K, v_K) = \langle f, v_K \rangle_{L^2}, \quad v_K \in V_K. \tag{2.39}$$

の解 $u_K \in V_K$ として与えることを考える. $u_K = \sum_{k'=1}^{K} y_{k'}\phi_{k'}$ とおいて (2.39) を書き下すと, 連立一次方程式

$$\sum_{k'=1}^{K} \alpha(\phi_{k'}, \phi_k) y_{k'} = \langle f, \phi_k \rangle_{L^2}, \quad k = 1, \ldots, K,$$

が得られる. $\alpha(\phi_{k'}, \phi_k)$ で与えられる行列が正則となるように $\{\phi_k\}$ が選ばれていれば, この方程式は一意に解けるから, 近似解 u_K は一意に求められる.

以上が一般的な Galerkin 法としての考え方であるが, 有限要素法では特に ϕ_k として Ω の中で小さな台を持つものを選ぶことを考える. そのような ϕ_k の選び方とそのときの誤差評価などを次に示す.

2.3.2 単体分割・有限要素空間と近似誤差評価.

ここでは領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d\,(d = 1, 2)$ が有界凸多角形である場合に限って述べる. 滑らかな境界を持つ場合については, Zlamal [80], 藤田-鈴木 [19] などに記述されている.

Ω の開部分集合からなる集合 $\tau = \{\sigma_m \subset \Omega\}_{m=1,\ldots,M}$ が以下の条件を満たすとき, τ は領域 Ω の単体分割であるという.

- 各 σ_m は開単体であって, $\overline{\Omega} = \bigcup_{m=1}^{M} \overline{\sigma}_m$.
- $m \neq m'$ のとき, $\overline{\sigma}_m \cap \overline{\sigma}_{m'}$ は空集合か, 辺単体かのいずれかである.

単体 σ に対して, $d(\sigma)$, $\rho(\sigma)$ をそれぞれ σ の外接球, 内接球の直径とする. 単体の最大径 $\xi = \max_{\sigma \in \tau_\xi} d(\sigma)$ をパラメータに持つ, 領域 Ω の単体分割の列 $\{\tau_\xi\}_{\xi > 0}$ を考える. 分割列 $\{\tau_\xi\}$ に対して, ある正数 μ があって,

$$\rho(\sigma) \geq \mu d(\sigma), \quad \sigma \in \tau_\xi,$$

を満たすとき, $\{\tau_\xi\}$ は正則であるという. また, 分割列 $\{\tau_\xi\}$ に対して,

$$d(\sigma) \geq \nu \xi, \quad \sigma \in \tau_\xi,$$

が成立するような正数 ν が存在するとき, $\{\tau_\xi\}$ は逆仮定を満たすという. 分割列 $\{\tau_\xi\}$ が正則でかつ逆仮定を満たすとき, 一様正則であると定義する [61].

領域 Ω の単体分割 τ_ξ に対して有限要素空間を

$$X_{1\xi} = \{w \in \mathcal{C}(\overline{\Omega});\ \text{各}\ \sigma \in \tau_\xi\ \text{について}\ w|_\sigma\ \text{は一次関数}\ \}$$

で定義する. 明らかに $X_{1\xi} \subset H^1(\Omega)$ である. $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ から $X_{1\xi}$ への補間作用素 $\Pi_{1\xi}$ と, $L^2(\Omega)$ から $X_{1\xi}$ への射影作用素 $P_{1\xi}$ を次式で定義する:

$$(\Pi_{1\xi} w)(x_k) = w(x_k), \quad k = 1, \ldots, K;$$

$$\langle P_{1\xi} w, \chi\rangle_{L^2} = \langle w, \chi\rangle_{L^2}, \quad \chi \in X_{1\xi}.$$

ただし $\{x_k\}_{k=1,\ldots,K} \subset \overline{\Omega}$ は τ_ξ の分割における節点の集合とする.

有限要素空間に関する重要な評価式を定理の形にまとめておく. 詳細は [11–13] などを参照のこと.

定理 2.7. Ω の分割列 $\{\tau_\xi\}_{\xi>0}$ が一様正則なら,

$$\|\hat{w}\|_{H^m} \le C\xi^{-m}\|\hat{w}\|_{L^2}, \quad m = 0, 1,\ \hat{w} \in X_{1\xi}, \tag{2.40}$$

$$\|(1 - \Pi_{1\xi})w\|_{H^m} \le C\xi^{2-m}\|w\|_{H^2}, \quad m = 0, 1,\ w \in H^2(\Omega), \tag{2.41}$$

$$\|(1 - P_{1\xi})w\|_{L^2} \le C\xi^2\|w\|_{H^2}, \quad w \in H^2(\Omega), \tag{2.42}$$

が成立する. ◁

$\alpha(\cdot,\cdot)$ を, $H^1(\Omega)$ 上の有界かつ強圧的な, すなわち適当な正数 M, δ に対して

$$|\alpha(u, v)| \le M\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}, \quad u, v \in H^1(\Omega), \tag{2.43}$$

$$\mathrm{Re}\,\alpha(u, u) \ge \delta\|u\|^2_{H^1}, \quad u \in H^1(\Omega), \tag{2.44}$$

を満たすような二次形式とする．例えば 2.3.1 で定義した二次形式 $\alpha(\cdot,\cdot)$ は有界かつ強圧的である．

$$\alpha(R_{1\xi}u,\chi)=\alpha(u,\chi),\quad u\in H^1(\Omega),\ \chi\in X_{1\xi},$$

で定義される作用素 $R_{1\xi}\colon H^1(\Omega)\to X_{1\xi}$ を $\alpha(\cdot,\cdot)$ に関する Ritz 作用素と呼ぶ．$\{\tau_\xi\}_{\xi>}$ が一様正則であるとき

$$\|(1-R_{1\xi})u\|_{H^m}\le C\xi^{2-m}\|u\|_{H^2},\quad m=0,1,\ u\in H^2(\Omega):\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0, \tag{2.45}$$

が成立することが，[11–13] に示されている．

2.4 Volterra 型離散積分不等式．

2.1 節 III) において発展作用素を構成する際に，(2.21) の型の積分方程式を用いた．このような型の積分方程式は Volterra 型と呼ばれる．Volterra 型積分方程式および不等式は，発展方程式論において頻繁に現れ，重要な役割を果たす．本論文では発展方程式論の手法を応用してその近似解を与えるため，Volterra 型積分不等式を離散化した型のものがやはり頻繁に現れる．このような不等式を本論文では Volterra 型離散積分不等式と呼ぶ．ここでは本論文で重要な鍵となる Volterra 型離散積分不等式に関する評価式を示す．

命題 2.8. N を自然数，$h>0$ とする．正の定数 a,b と指数 $\alpha,\beta\in(0,1]$ に対して，二重数列 $\{x_{n,m}\}_{0\le m\le n\le N}$ が

$$x_{n,m}\le a((n-m+1)h)^{\alpha-1}+h\sum_{\ell=m}^{n-1}b((n-\ell)h)^{\beta-1}x_{\ell,m},\qquad 0\le m\le n\le N, \tag{2.46}$$

を満たすと仮定する．このとき $x_{n,m}$ は

$$x_{n,m}\le C\,a((n-m+1)h)^{\alpha-1},\quad 0\le m\le n\le N, \tag{2.47}$$

で評価される．ここで正数 C は b,α,β と $T=Nh$ にのみ依存する．同様に $x_{n,m}$ が

$$x_{n,m}\le a((n-m+1)h)^{\alpha-1}+h\sum_{\ell=m}^{n-1}x_{n,\ell+1}\,b((\ell-m+1)h)^{\beta-1},\qquad 0\le m\le n\le N, \tag{2.48}$$

を満たす場合にも, 評価式 (2.47) が成立する.

証明. どちらの場合も同様であるので, ここでは (2.46) を仮定して証明する.

まず帰納法によって,

$$x_{n,m} \le \sum_{j=0}^{k} ab^j \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)^j}{\Gamma(\alpha+j\beta)}((n-m+1)h)^{\alpha+j\beta-1} + h\sum_{\ell=m}^{n-k-1} b^{k+1}\frac{\Gamma(\beta)^{k+1}}{\Gamma((k+1)\beta)}((n-\ell)h)^{(k+1)\beta-1}x_{\ell,m} \tag{2.49}$$

が $0 \le k \le n-m$ について成立することを示す. ここで $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数. $k=0$ のときは (2.46) に一致するから, 明らかに成立する. ある $k=k' \ge 0$ で (2.49) が成立すると仮定する. (2.49) の右辺の $x_{l,m}$ に (2.46) を代入して

$$\begin{aligned}
x_{n,m} \le &\sum_{j=0}^{k'} ab^j \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)^j}{\Gamma(\alpha+j\beta)}((n-m+1)h)^{\alpha+j\beta-1} \\
&+ h\sum_{\ell=m}^{n-k'-1} b^{k'+1}\frac{\Gamma(\beta)^{k'+1}}{\Gamma((k'+1)\beta)}((n-\ell)h)^{(k'+1)\beta-1} \\
&\qquad \times \left\{ a((\ell-m+1)h)^{\alpha-1} + h\sum_{\ell'=m}^{\ell-1} b((\ell-\ell')h)^{\beta-1}x_{\ell',m} \right\} \\
\le &\sum_{j=0}^{k'} ab^j \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)^j}{\Gamma(\alpha+j\beta)}((n-m+1)h)^{\alpha+j\beta-1} \\
&+ h\sum_{\ell=m}^{n-k'-1} ab^{k'+1}\frac{\Gamma(\beta)^{k'+1}}{\Gamma((k'+1)\beta)}((n-\ell)h)^{(k'+1)\beta-1}((\ell-m+1)h)^{\alpha-1} \\
&+ h^2\sum_{\ell'=m}^{n-k'-2}\sum_{\ell=\ell'}^{n-k'-2} b^{k'+2}\frac{\Gamma(\beta)^{k'+1}}{\Gamma((k'+1)\beta)} \\
&\qquad \times ((n-\ell-1)h)^{(k+1)\beta-1}((\ell-\ell'+1)h)^{\beta-1}x_{\ell',m}
\end{aligned}$$

を得る. ここで次に示す補題 2.9 を応用すると, (2.49) が $k=k'+1$ でも成立することが示される.

よって, (2.49) はすべての $k \ge 0$ で成立する. 特に $k=n-m$ とすると, 第 2 項が省略されて,

$$x_{n,m} \le \sum_{j=0}^{n-m} ab^j \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)^j}{\Gamma(\alpha+j\beta)}((n-m+1)h)^{\alpha+j\beta-1}$$

を得る．無限級数

$$\sum_{j=0}^{n-m} \frac{\{b\Gamma(\beta)^j((N+1)h)^\beta\}^j}{\Gamma(\alpha+j\beta)}$$

は収束するから，これによって，(2.47) が導かれる． □

補題 2.9. $p>0, 0<q<1$ とする．このとき，

$$h\sum_{\ell=m}^{n-1}((n-\ell)h)^{p-1}((\ell-m+1)h)^{q-1} \le B(p,q)((n-m+1)h)^{p+q-1},$$
$$0\le m\le n\le N,$$

が成立する．ここで $B(p,q)$ はベータ関数．$0<p<1$ かつ $q>0$ の場合も同様である．

証明. $0<p<1$ の場合を考える．関数 $f(x)=((n+1)h-x)^{p-1}(x-mh)^{q-1}$ は，区間 $(mh,(n+1)h)$ で下に凸で，ある点 $x=x_0$ で最小値を取る．$\ell_0\le x_0<\ell_0+1$ を満たす整数 ℓ_0 を取ると，

$$\begin{aligned}h\sum_{\ell=m}^{n-1}((n-l)h)^{p-1}((l-m+1)h)^{q-1} &\le \left(\int_{mh}^{\ell_0 h}+\int_{(\ell_0+1)h}^{(n+1)h}\right)f(x)dx\\ &\le \int_{mh}^{(n+1)h}f(x)dx = B(p,q)((n-m+1)h)^{p+q-1}\end{aligned}$$

が得られる．次に $p\ge 1$ の場合は，$f(x)$ が単調減少だから，

$$\begin{aligned}h\sum_{\ell=m}^{n-1}((n-l)h)^{p-1}((l-m+1)h)^{q-1} &\le \int_{mh}^{nh}f(x)dx\\ &\le \int_{mh}^{(n+1)h}f(x)dx = B(p,q)((n-m+1)h)^{p+q-1}\end{aligned}$$

を得る． □

次の命題も命題 2.8 と同様にして証明される．

命題 2.10. N は自然数，$h>0$ とする． 正数列 $\{a_n\}_{0\le n\le N}$，正数 b と指数 $\alpha,\beta\in(0,1]$ に対して，数列 $\{x_n\}_{0\le n\le N}$ が

$$x_n \le h\sum_{\ell=0}^{n-1}((n-\ell)h)^{\alpha-1}a_\ell + h\sum_{\ell=0}^{n-1}b((n-\ell)h)^{\beta-1}x_\ell, \quad 0\le n\le N, \tag{2.50}$$

を満たすと仮定する．このとき x_n は

$$x_n \le Ch\sum_{\ell=0}^{n-1}((n-\ell)h)^{\alpha-1}a_\ell, \quad 0 \le n \le N, \tag{2.51}$$

によって評価される．ここで正数 C は b, α, β と $T = Nh$ にのみ依存する． □

第3章

線形放物型方程式の時間離散近似

3.1 緒言.

放物型偏微分方程式は抽象発展方程式, すなわち無限次元ベクトル空間上の常微分方程式として定式化される. このことはすでに 2.1 節 III) で述べた. この定式化によって放物型方程式に, 常微分方程式の数値解法を抽象的に適用することを考えることができる. この章は, 抽象線形発展方程式の陰的 Runge-Kutta 法による時間離散近似解の表現公式を得ること, より詳しく言えば, 線形方程式に陰的 Runge-Kutta 法を適用して得られた近似方程式の基本解である, 離散発展作用素の構成法を示すことを目的とする.

2.1 節 III-B) で見たように, 準線形方程式の解の関数解析的な構成は, 発展作用素を用いた解の表現公式を基本とする. また発展作用素は放物型半群を用いて構成され, 放物型半群は作用素の指数関数として定義される. その議論に倣えば, まず放物型半群に対応する放物型離散半群を, 次に発展作用素に対応する離散発展作用素を放物型離散半群を用いて構成し, それに続いて準線形方程式の時間離散近似解を離散発展作用素を用いた表現公式を利用して与える, という手順を踏むことが適当であると考えられる. そのために, この章で線形の理論を展開し, 次章でそれを応用して準線形方程式を扱おうというのである.

一方で, ここで全離散近似でなく時間離散近似のみを考えるのは, 問題の単純化のためだけでなく, 第 5 章において全離散近似を扱う際に, 空間離散化に関して一様な表現あるいは評価を必要とするからでもある. また, 視点を変えることによって, 空間刻みが 0 の極限における全離散近似解の振る舞いを保証することにもつながる.

3.2 節では, 作用素の指数関数である放物型半群に相当する放物型離散半群の構成

および性質を示し, 時間的斉次線形方程式の近似解の表現公式を与える. その結果を踏まえて 3.3 節において, 離散発展作用素が放物型離散半群と, ある離散化された積分方程式によって結び付けられることを述べ, 離散発展作用素の性質と, 時間的非斉次線形方程式の近似解の表現公式を示す.

3.2 放物型離散半群.

時間的斉次線形方程式

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = F(t), \quad 0 < t \le T, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

に陰的 Runge-Kutta 法 $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ を適用した近似式

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n + he^T\mathcal{B}\{-A\boldsymbol{V}_n + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\tau}_n)\}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1, \\ \boldsymbol{V}_n = \boldsymbol{e}U_n + h\mathcal{A}\{-A\boldsymbol{V}_n + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\tau}_n)\}, \\ U_0 = u_0, \end{cases} \tag{3.2}$$

について考える. ただし $\boldsymbol{\tau}_n = [t_n + hc_1, \ldots, t_n + hc_s]^T$, また $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \ldots, \tau_s]^T$ に対し $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\tau}) = [F(\tau_1), \ldots, F(\tau_s)]^T$ とする. ここで A, $F(\cdot)$ は以下の条件を満たすと仮定する.

(A) A のレゾルベント集合 $\rho(A)$ は角領域 $\mathbb{C}\setminus\overline{S_\varphi}$ を含み, レゾルベント $(\lambda - A)^{-1}$ は

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{M_A}{|\lambda| + 1}, \quad \lambda \notin \overline{S_\varphi},$$

を満たす.

($\mathrm{F_t}$) ある指数 $\eta \in (0, 1]$ があって, $F \in \mathcal{C}^\eta([0, T]; X)$ である.

また陰的 Runge-Kutta 法は, ある $\theta \in (\varphi, \pi/2]$ について, $A(\theta)$-強安定であるとする.

(3.1) の解 u はすでに定理 2.1 で見たように, $-A$ によって生成される放物型半群 $\{e^{-tA}\}_{t\ge 0}$ を用いて

$$u(t) = e^{-tA}u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A}F(s)ds \tag{3.3}$$

と表される. 方程式の類似性から, (3.2) の解にもこれに対応した表現があると期待される. 実際, $\boldsymbol{J}_h = (\mathcal{I} + h\mathcal{A}A)^{-1}$ という作用素が構成できれば, (3.2) の第 2 式より

$$\boldsymbol{V}_n = \boldsymbol{J}_h\{\boldsymbol{e}U_n + h\mathcal{A}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\tau}_n)\}$$

であるから, これを (3.2) の第 1 式に代入して

$$U_{n+1} = \{1 - he^T \mathcal{B}\mathcal{A}\boldsymbol{J}_h\boldsymbol{e}\}U_n + he^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h\mathcal{A}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\tau}_n)$$

を得る. すなわち (3.2) の解 U_n は次のように書ける.

$$U_n = R(-hA)^n u_0 + h\sum_{l=0}^{n-1} R(-hA)^{n-l-1}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h\mathcal{A}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\tau}_l). \tag{3.4}$$

ここで

$$R(-hA) = 1 - h\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}\boldsymbol{J}_h\boldsymbol{e} = 1 - h\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}(\mathcal{I} + h\mathcal{A}A)^{-1}\boldsymbol{e}.$$

(3.4) と (3.3) を見比べれば, 作用素族 $\{R(-hA)^n\}_{n=0,1,\ldots}$ が放物型半群 $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$ とよく似た役割を果たしていることが分かる. この節では実際に, $\{R(-hA)^n\}$ が放物型 (連続) 半群 と同様の性質を持つことを示す. はじめに, $\{R(-hA)^n\}$ が半群をなす, すなわち

$$R(-hA)^0 = 1,$$

$$R(-hA)^n \cdot R(-hA)^m = R(-hA)^{n+m}, \quad n, m \geq 0,$$

を満たすことは容易に分かる.

補題 3.1. 任意の $h > 0$ に対して, 作用素 $\boldsymbol{J}_h = (\mathcal{I} + h\mathcal{A}A)^{-1}$ は X^s 上の有界作用素として存在し,

$$\|\boldsymbol{J}_h\|_{\mathcal{L}(X^s)} \leq C, \quad \|A\boldsymbol{J}_h\|_{\mathcal{L}(X^s)} \leq Ch^{-1}, \tag{3.5}$$

を満たす. ただし 定数 $C > 0$ は h に依存しない.

証明. $\delta > 0$ を $\delta^{-1} > \max\{\|\mathcal{A}\|, \|\mathcal{A}^{-1}\|\}$ となるようにとり, $\Sigma = \{z \in \mathbb{C};\ \delta \leq |z| \leq \delta^{-1}, |\arg z| \geq \theta\}$ とおくと, $(\mathcal{I} - z\mathcal{A})^{-1}$ は Σ の外で正則である. そこで, $\varphi < \psi < \theta$ となる ψ をとって, 積分路 Γ を λ: $\lambda = -re^{\pm i\psi}$ $(0 \leq r < \infty)$ とすると, 積分

$$\boldsymbol{J}_h = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\mathcal{I} - h\mathcal{A}\lambda)^{-1}(\lambda + A)^{-1}d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\mathcal{I} - z\mathcal{A})^{-1}\left(\frac{z}{h} + A\right)^{-1}\frac{dz}{h}$$

は $\mathcal{L}(X)$ の作用素として存在する．この被積分関数は遠方で $O(|z|^{-2})$ で減衰するから，積分路を

$$\gamma:\ \{z;\ |z|=\delta, |\arg z| \le \pi-\psi\} \cup \{z;\ \delta \le |z| \le \delta^{-1}, |\arg z| = \pi-\psi\} \cup \{z;\ |z|=\delta^{-1}, |\arg z| \le \pi-\psi\}$$

に変更しても積分の値は変わらない．すなわち

$$J_h = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\mathcal{I}-z\mathcal{A})^{-1}\left(\frac{z}{h}+A\right)^{-1}\frac{dz}{h}.$$

これよりただちに $(\mathcal{I}+h\mathcal{A}A)J_h = \mathcal{I}$，つまり $J_h = (\mathcal{I}+h\mathcal{A}A)^{-1}$ であることが分かる．また，

$$\|J_h\|_{\mathcal{L}(X^s)} \le \frac{M_A}{2\pi}\int_\gamma \|(\mathcal{I}-z\mathcal{A})^{-1}\|\frac{|dz|}{|z|+1}$$

より，$\|J_h\|_{\mathcal{L}(X^s)}$ が h に関して一様に有界である．$h\|AJ_h\|_{\mathcal{L}(X^s)}$ も同様である．□

ここで $R(-hA)$ の積分表示について注意しておく．$\varepsilon > 0$ とすると，上記の積分路 Γ 上で $|(-\lambda+1)^{-\varepsilon}R(-h\lambda)| \le C(|\lambda|+1)^{-\varepsilon}$ であるから，

$$(A+1)^{-\varepsilon}R(-hA) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (-\lambda+1)^{-\varepsilon}R(-h\lambda)(\lambda+A)^{-1}d\lambda$$

が成立する．すなわち，

$$R(-hA) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (-\lambda+1)^{-\varepsilon}R(-h\lambda)(\lambda+A)^{-1}d\lambda.$$

遠方で $R(-h\lambda)-R(\infty) = O(|h\lambda|^{-1})$ であることと，Γ の右側では $(\lambda+A)^{-1}$ が正則であることを用いれば，

$$R(-hA) = R(\infty) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \{R(-h\lambda)-R(\infty)\}(\lambda+A)^{-1}d\lambda.$$

ここで積分路を Γ の右側，すなわち A のレゾルベント集合 $\rho(A)$ 内にあって，$R(-h\lambda)$ の特異点をすべて囲むような任意の有界閉曲線 Γ_h に変更すると，Γ_h の内側では $(\lambda+A)^{-1}$ は正則だから，

$$R(-hA) = R(\infty) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h} R(-h\lambda)(\lambda+A)^{-1}d\lambda \tag{3.6}$$

という積分表示を得る．

命題 3.2. 離散半群 $\{R(-hA)^n\}_{n=0,1,\dots}$ は一様有界である, すなわち, ある定数 $C>0$ があって,

$$\|R(-hA)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \le C, \quad n=0,1,\dots, \tag{3.7}$$

が満たされる.

証明. (3.6) と同様にして,

$$\begin{aligned} R(-hA)^n &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (-\lambda+1)^{-\varepsilon}R(-h\lambda)^n(\lambda+A)^{-1}d\lambda \\ &= R(\infty)^n + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R(z)^n\left(\frac{z}{h}+A\right)^{-1}\frac{dz}{h}. \end{aligned}$$

ただし γ は, $-hA$ のレゾルベント集合 $\rho(-hA)=(-h)\cdot\rho(A)$ 内にあって, $R(z)$ の特異点をすべて囲むような任意の有界閉曲線とする. ここで, ψ を $\varphi<\psi<\theta$ を満たすようにとり, 命題 2.6 で定義した δ を用いて,

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_n \\ &= \{z;\,|z|=\delta^{-1}, |\arg z|\le \pi-\psi\}\cup\{z;\,\delta\le|z|\le\delta^{-1}, |\arg z|=\pi-\psi\} \\ &\quad \cup\{z;\,\delta/n\le|z|\le\delta, |\arg z|=\pi-\psi\}\cup\{z;\,|z|=\delta/n, |\arg z|\le\pi-\psi\} \\ &= \gamma_n^{(1)}+\gamma_n^{(2)}+\gamma_n^{(3)}+\gamma_n^{(4)} \end{aligned}$$

とすると,

$$\begin{aligned} R(-hA)^n &= R(\infty)^n + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} R(z)^n\left(\frac{z}{h}+A\right)^{-1}\frac{dz}{h} \\ &= R(\infty)^n + \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_n^{(1)}}+\int_{\gamma_n^{(2)}}+\int_{\gamma_n^{(3)}}+\int_{\gamma_n^{(4)}}\right). \end{aligned} \tag{3.8}$$

定数 κ, ν, σ を命題 2.6 で定義される数とすると, この各項はそれぞれ

$$|R(\infty)^n| \le \kappa^n \le 1,$$

$$\left\|\int_{\gamma_n^{(1)}} R(z)^n\left(\frac{z}{h}+A\right)^{-1}\frac{dz}{h}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \le C\int_{-\pi+\psi}^{\pi-\psi}\kappa^n d\rho,$$

$$\left\| \int_{\gamma_n^{(2)}} R(z)^n \left(\frac{z}{h} + A\right)^{-1} \frac{dz}{h} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \le C \int_\delta^{\delta^{-1}} \kappa^n \frac{dr}{r},$$

$$\left\| \int_{\gamma_n^{(3)}} R(z)^n \left(\frac{z}{h} + A\right)^{-1} \frac{dz}{h} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \le C \int_{\delta/n}^{\delta} e^{-\nu r n} \frac{dr}{r} \le C \int_\delta^{\infty} e^{-\nu r} \frac{dr}{r},$$

$$\left\| \int_{\gamma_n^{(4)}} R(z)^n \left(\frac{z}{h} + A\right)^{-1} \frac{dz}{h} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \le C \int_{-\pi+\psi}^{\pi-\psi} e^{\sigma\delta/n \cdot n} \, d\rho,$$

と評価される. これより (3.7) を得る. □

命題 3.3. $R(-hA)^n - R(\infty)^n$ の値域は $\mathcal{D}(A)$ に含まれ,

$$\|A\{R(-hA)^n - R(\infty)^n\}\|_{\mathcal{L}(X)} \le C((n+1)h)^{-1}, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{3.9}$$

が成立する.

証明. $n \ge 1$ とする. (3.8) より

$$\begin{aligned} A\{R(-hA)^n - R(\infty)^n\} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} R(z)^n A \left(\frac{z}{h} + A\right)^{-1} \frac{dz}{h} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_n^{(1)}} + \int_{\gamma_n^{(2)}} + \int_{\gamma_n^{(3)}} + \int_{\gamma_n^{(4)}} \right). \end{aligned}$$

命題 3.2 の証明と同様に各項を評価すると,

$$\left\| \int_{\gamma_n^{(1)}} R(z)^n A \left(\frac{z}{h} + A\right)^{-1} \frac{dz}{h} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \le C \int_{-\pi+\psi}^{\pi-\psi} \kappa^n \frac{\delta^{-1} \cdot d\rho}{h},$$

$$\left\| \int_{\gamma_n^{(2)}} R(z)^n A \left(\frac{z}{h} + A\right)^{-1} \frac{dz}{h} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \le C \int_\delta^{\delta^{-1}} \kappa^n \frac{dr}{h},$$

$$\left\| \int_{\gamma_n^{(3)}} R(z)^n A \left(\frac{z}{h} + A\right)^{-1} \frac{dz}{h} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \le C \int_{\delta/n}^{\delta} e^{-\nu r n} \frac{dr}{h} \le C \int_\delta^{\infty} e^{-\nu r} \frac{dr/n}{h},$$

$$\left\| \int_{\gamma_n^{(4)}} R(z)^n A \left(\frac{z}{h} + A\right)^{-1} \frac{dz}{h} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \le C \int_{-\pi+\psi}^{\pi-\psi} e^{\sigma\delta/n \cdot n} \frac{\delta/n \cdot d\rho}{h},$$

が得られる. これより

$$\|A\{R(-hA)^n - R(\infty)^n\}\|_{\mathcal{L}(X)} \le C \left(\frac{\kappa^n}{h} + (nh)^{-1} \right) \le C((n+1)h)^{-1}$$

となる. □

命題 3.4. $\{R(-hA)^n\}$ に関して

$$\|AR(-hA)^n \boldsymbol{e}^T \mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h\|_{\mathcal{L}(X^s,X)} \le C((n+1)h)^{-1}, \tag{3.10}$$

$$\|A\boldsymbol{J}_h\boldsymbol{e}R(-hA)^n\|_{\mathcal{L}(X,X^s)} \le C((n+1)h)^{-1}, \quad n=0,1,\dots, \tag{3.11}$$

が成立する.

証明. 等式

$$AR(-hA)^n\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h = A\{R(-hA)^n - R(\infty)^n\}\cdot\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h + \boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}R(\infty)^n A\boldsymbol{J}_h,$$

$$A\boldsymbol{J}_h\boldsymbol{e}R(-hA)^n = \boldsymbol{J}_h\boldsymbol{e}\cdot A\{R(-hA)^n - R(\infty)^n\} + A\boldsymbol{J}_h\boldsymbol{e}R(\infty)^n,$$

および $(n+1)|R(\infty)^n| \le C$ に注意すれば, 命題 3.3 と補題 3.1 よりただちに導かれる. □

(3.10), (3.11) は放物型半群の性質 $\|Ae^{-tA}\|_{\mathcal{L}(X)} \le Ct^{-1}$ に相当するものである. この事実を考慮して, これ以後, 離散半群 $\{R(-hA)^n\}$ を放物型離散半群と呼ぶ.

以上の結果を用いると近似解 U_n に関して, 定理 2.1 に示した真の解 $u(t)$ の有界性と同様の評価が示される.

定理 3.5. (3.2) の解 U_n は評価式

$$\|U_n\|_X \le C\left(\|u_0\|_X + \|F\|_{C([0,T];X)}\right), \tag{3.12}$$

$$\|AU_n\|_X \le C\left(\|Au_0\|_X + \frac{1}{\eta}\|F\|_{C^\eta([0,T];X)}\right), \quad n=0,1,\dots,N, \tag{3.13}$$

を満足する.

証明. U_n は (3.4) で与えられるから, (3.12) は (3.7) よりただちに得られる. (3.13) については,

$$\begin{aligned}1 - R(-hA)^n &= h\sum_{l=0}^{n-1} R(-hA)^{n-l-1}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}A\boldsymbol{J}_h\boldsymbol{e} \\ &= h\sum_{l=0}^{n-1} AR(-hA)^{n-l-1}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h\mathcal{A}\boldsymbol{e}\end{aligned}$$

を用いて

$$AU_n = R(-hA)^n Au_0 + h\sum_{l=0}^{n-1} AR(-hA)^{n-l-1}e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h\mathcal{A}\{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\tau}_l) - \boldsymbol{e}F(t_n)\} + \{1 - R(-hA)^n\}F(t_n)$$

と書けるから, (3.7), (3.10) を用いてこれを評価して

$$\|AU_n\|_X \le C\|Au_0\|_X + Ch\sum_{l=0}^{n-1}((n-l)h)^{\eta-1}\|F\|_{C^\eta([0,T];X)} + C\|F\|_{C([0,T];X)}$$

を得る. □

3.3 離散発展作用素.

次に, 時間的非斉次線形方程式

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A(t)u = F(t), \quad 0 < t \le T, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{3.14}$$

の陰的 Runge-Kutta 法 $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ による近似方程式

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n + he^T\mathcal{B}\{-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_n)\boldsymbol{V}_n + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\tau}_n)\}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \\ \boldsymbol{V}_n = \boldsymbol{e}U_n + h\mathcal{A}\{-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_n)\boldsymbol{V}_n + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\tau}_n)\}, \\ U_0 = u_0, \end{cases} \tag{3.15}$$

について考える. ただし記号 $\boldsymbol{\tau}_n$, $\boldsymbol{F}(\cdot)$ については前節と同じ, また $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \dots, \tau_s]^T$ に対し $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}) = \mathrm{diag}[A(\tau_1), \dots, A(\tau_s)]$ とおく. $A(\cdot)$, $F(\cdot)$ は以下の条件を満たすと仮定する.

($\mathrm{A_t}$1) $t \in [0, T]$ について一様に, $A(t)$ は前節の条件 (A) を満たす. すなわち, $A(t)$ のレゾルベント集合 $\rho(A(t))$ は角領域 $\mathbb{C}\backslash\overline{S_\varphi}$ を含み, レゾルベント $(\lambda - A(t))^{-1}$ は t に一様に

$$\|(\lambda - A(t))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{M_A}{|\lambda| + 1}, \quad \lambda \notin \overline{S_\varphi}, t \in [0, T],$$

を満たす.

($\mathrm{A_t}2$) $A(t)$ の定義域 $\mathcal{D}(A(t))$ は t に依らず一定で, ある指数 $\mu \in (0,1]$ があって, $A(t)$ は t の関数として次の Hölder 条件

$$\|\{A(t)-A(s)\}A(s)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le L_A|t-s|^{\mu}, \quad t,s \in [0,T],$$

を満たす.

($\mathrm{F_t}$) ある指数 $\eta \in (0,1]$ があって, $F \in \mathcal{C}^{\eta}([0,T];X)$ である.

この節でも, 陰的 Runge-Kutta 法は, ある $\theta \in (\varphi, \pi/2]$ について, $A(\theta)$-強安定であると仮定する.

上記の仮定の下で (3.14) の解 u は, 定理 2.2 に見たように, $A(t)$ によって生成される発展作用素 $\varPhi(t,s)$ を用いて

$$u(t) = \varPhi(t,0)u_0 + \int_0^t \varPhi(t,s)F(s)ds \tag{3.16}$$

と表される. (3.2) の解がそうであったように, (3.15) の解もやはり, (3.16) と同様に表現されると期待される. この場合も, $\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{\tau}_n) = (\mathcal{I} + h\mathcal{A}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_n))^{-1}$ という作用素が意味を持てば, (3.15) の第 2 式より

$$\boldsymbol{V}_n = \boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{\tau}_n)\{eU_n + h\mathcal{A}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\tau}_n)\}$$

と書けるから, これを (3.15) の第 1 式に代入すると

$$U_{n+1} = \{1 - he^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_n)\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{\tau}_n)e\}U_n + he^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{\tau}_n)\mathcal{A}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\tau}_n)$$

を得る. すなわち (3.15) の解 U_n は

$$U_n = \varPhi_h(n,0)u_0 + h\sum_{l=0}^{n-1}\varPhi_h(n,l+1)e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{\tau}_l)\mathcal{A}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\tau}_l) \tag{3.17}$$

と表される. ただし,

$$\varPhi_h(n,m) = \begin{cases} 1, & n=m, \\ \{1 - he^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_{n-1})\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{\tau}_{n-1})e\}\cdots\{1 - he^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_m)\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{\tau}_m)e\}, & n>m. \end{cases} \tag{3.18}$$

以下に述べる命題によってこの作用素値関数 $\Phi_h(\cdot,\cdot)$ が, 発展作用素 $\Phi(\cdot,\cdot)$ と同様の性質を持つことを明らかにする. はじめに $\Phi_h(\cdot,\cdot)$ に関して発展作用素と同様に半群性

$$\Phi_h(n,n) = 1, \quad 0 \le n \le N,$$

$$\Phi_h(n,l)\cdot\Phi_h(l,m) = \Phi_h(n,m), \quad 0 \le m \le l \le n \le N,$$

が成立することを注意しておく.

補題 3.6. 前節の補題 3.1 , 命題 3.2–4 で得られた評価 (3.5), (3.7), (3.9), (3.10), (3.11) は $A(t)$ についても成立する. なおかつそれらは $t \in [0,T]$ に関して一様である. すなわち,

$$\|\boldsymbol{J}_h(t)\|_{\mathcal{L}(X^s)} \le C, \quad \|A(t)\boldsymbol{J}_h(t)\|_{\mathcal{L}(X^s)} \le Ch^{-1}, \quad t \in [0,T], \tag{3.19}$$

$$\|R(-hA(t))^n\|_{\mathcal{L}(X)} \le C, \quad t \in [0,T],\ n \ge 0, \tag{3.20}$$

$$\|A(t)\{R(-hA(t))^n - R(\infty)^n\}\|_{\mathcal{L}(X)} \le C((n+1)h)^{-1}, \tag{3.21}$$

$$\|A(t)R(-hA(t))^n\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(t)\|_{\mathcal{L}(X^s,X)} \le C((n+1)h)^{-1}, \tag{3.22}$$

$$\|A(t)\boldsymbol{J}_h(t)\boldsymbol{e}R(-hA(t))^n\|_{\mathcal{L}(X,X^s)} \le C((n+1)h)^{-1}, \quad t \in [0,T],\ n \ge 0, \tag{3.23}$$

が成立する. ただし $\boldsymbol{J}_h(t) = (\mathcal{I} + h\mathcal{A}A(t))^{-1}$ である. □

補題 3.7. 放物型離散半群は, その生成素の連続性を保存する. すなわち,

$$\|R(-hA(t))^n - R(-hA(s))^n\|_{\mathcal{L}(X)} \le C|t-s|^\mu, \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}\|A(t)\{R(-hA(t))^n - R(-hA(s))^n\}\|_{\mathcal{L}(X)}& \\ \le C|t-s|^\mu((n+1)h)^{-1}, &\quad t,s \in [0,T],\ n \ge 0.\end{aligned} \tag{3.25}$$

証明. 放物型離散半群の積分表現公式 (3.8) を用いると

$$
\begin{aligned}
&R(-hA(t))^n - R(-hA(s))^n \\
&\qquad = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} R(z)^n \left\{\left(\frac{z}{h} + A(t)\right)^{-1} - \left(\frac{z}{h} + A(s)\right)^{-1}\right\}\frac{dz}{h}.
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{z}{h} + A(t)\right)^{-1} - \left(\frac{z}{h} + A(s)\right)^{-1} \\
&\qquad = \left(\frac{z}{h} + A(t)\right)^{-1}\{A(s) - A(t)\}A(s)^{-1}\cdot A(s)\left(\frac{z}{h} + A(s)\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

より

$$
\left\|\left(\frac{z}{h} + A(t)\right)^{-1} - \left(\frac{z}{h} + A(s)\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \le C\,\frac{h}{|z|}\,|t-s|^{\mu},
$$

$$
\left\|A(t)\left\{\left(\frac{z}{h} + A(t)\right)^{-1} - \left(\frac{z}{h} + A(s)\right)^{-1}\right\}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \le C|t-s|^{\mu},
$$

が得られる. これより命題 3.2 の証明と同様にして証明される. □

補題 3.8. 適当な $h_0 > 0$ をとると, 任意の $h \in (0, h_0)$ と $n = 0, 1, \ldots, N-1$ に対して作用素 $\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{\tau}_n) = (\mathcal{I} + h\mathcal{A}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_n))^{-1}$ は X^s 上の有界作用素として存在し, n, h について一様に

$$
C^{-1}\|\boldsymbol{J}_h(t_{n+1})\|_{\mathcal{L}(X^s)} \le \|\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{\tau}_n)\|_{\mathcal{L}(X^s)} \le C\|\boldsymbol{J}_h(t_n)\|_{\mathcal{L}(X^s)} \le C, \tag{3.26}
$$

$$
\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_n)\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{\tau}_n)\|_{\mathcal{L}(X^s)} \le C\|A(t_n)\boldsymbol{J}_h(t_n)\|_{\mathcal{L}(X^s)} \le Ch^{-1}, \tag{3.27}
$$

を満たす.

証明. 次の等式が成立する:

$$
(\mathcal{I} + h\mathcal{A}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_n)) = [\mathcal{I} + h\mathcal{A}\{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_n) - A(t_n)\}\boldsymbol{J}_h(t_n)](\mathcal{I} + h\mathcal{A}A(t_n)).
$$

ここで $A(t)$ の Hölder 連続性より, 小さな $h_0 > 0$ をとると, $h \in (0, h_0)$ に対して

$$
\|h\mathcal{A}\{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_n) - A(t_n)\}\boldsymbol{J}_h(t_n)\|_{\mathcal{L}(X^s)} \le \frac{1}{2}
$$

となるようにできる. これより

$$\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{\tau}_n) = \boldsymbol{J}_h(t_n)[\mathcal{I} + h\mathcal{A}\{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_n) - A(t_n)\}\boldsymbol{J}_h(t_n)]^{-1}$$

と表すことができる. 補題 3.1 や $\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_n)A(t_n)^{-1}\|$ の一様有界性などを用いると, 上記の評価 (3.26), (3.27) が得られる. □

系.

$$\|A(t_{m+1})R(-hA(t_{m+1}))^n\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{\tau}_m)\|_{\mathcal{L}(X^s,X)} \le C((n+1)h)^{-1}, \tag{3.28}$$

$$\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_m)\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{\tau}_m)\boldsymbol{e}R(-hA(t_m))^n\|_{\mathcal{L}(X,X^s)} \le C((n+1)h)^{-1}, \tag{3.29}$$

$$m = 0, 1, \ldots, N-1,\ n \ge 0.$$

証明. (3.28) は (3.22) と (3.26) から, (3.29) は (3.27) と (3.23) から直ちに示される. □

命題 3.9. 作用素族 $\{\varPhi_h(n,m)\}$ は一様有界である, すなわち

$$\|\varPhi_h(n,m)\|_{\mathcal{L}(X)} \le C, \quad 0 \le m \le n \le N, \tag{3.30}$$

を満たす.

証明. 次の差分等式を考える:

(3.31)

$$\begin{aligned}
&\varPhi_h(n,m) - R(-hA(t_m))^{n-m} \\
&= \sum_{l=m}^{n-1} \varPhi_h(n,l+1)\{\varPhi_h(l+1,l) - R(-hA(t_m))\}R(-hA(t_m))^{l-m} \\
&= h\sum_{l=m}^{n-1} \varPhi_h(n,l+1)\boldsymbol{e}^T\mathcal{B} \\
&\qquad \times \{A(t_m)\boldsymbol{J}_h(t_m) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_l)\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{\tau}_l)\}\boldsymbol{e}R(-hA(t_m))^{l-m} \\
&= h\sum_{l=m}^{n-1} \varPhi_h(n,l+1)\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_l)\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{\tau}_l)\{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_l)^{-1} - A(t_m)^{-1}\} \\
&\qquad \times A(t_m)\boldsymbol{J}_h(t_m)\boldsymbol{e}R(-hA(t_m))^{l-m} \\
&= h\sum_{l=m}^{n-1} \varPhi_h(n,l+1)\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{\tau}_l)\mathcal{A}\{\mathcal{I} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_l)A(t_m)^{-1}\} \\
&\qquad \times A(t_m)\boldsymbol{J}_h(t_m)\boldsymbol{e}R(-hA(t_m))^{l-m}.
\end{aligned}$$

(3.20), (3.23) を用いてこれを評価して不等式

$$\begin{aligned}
&\|\Phi_h(n,m)\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\le \|R(-hA(t_m))^{n-m}\|_{\mathcal{L}(X)} + Ch\sum_{l=m}^{n-1}\|\Phi_h(n,l+1)\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\quad \times \|\mathcal{I}-\boldsymbol{A}(\tau_l)A(t_m)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^s)}\|A(t_m)\boldsymbol{J}_h(t_m)\boldsymbol{e}R(-hA(t_m))^{l-m}\|_{\mathcal{L}(X,X^s)} \\
&\le C + Ch\sum_{l=m}^{n-1}\|\Phi_h(n,l+1)\|_{\mathcal{L}(X)}((l-m+1)h)^{\mu-1}
\end{aligned}$$

を得る．これは (2.48) において $x_{n,m}=\|\Phi_h(n,m)\|_{\mathcal{L}(X)}$ とした Volterra 型離散積分不等式である．よって命題 2.8 を用いることによって (3.30) を得る． □

命題 3.10. $\Phi_h(\cdot,\cdot)$ に関して評価

$$\|A(t_n)\Phi_h(n,m)A(t_m)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le C, \quad 0\le m\le n\le N, \tag{3.32}$$

が成立する．

証明. 今度は次の差分等式

(3.33)
$$\begin{aligned}
&\Phi_h(n,m) - R(-hA(t_n))^{n-m} \\
&= \sum_{l=m}^{n-1} R(-hA(t_n))^{n-l-1}\{\Phi_h(l+1,l) - R(-hA(t_n))\}\Phi_h(l,m) \\
&= h\sum_{l=m}^{n-1} R(-hA(t_n))^{n-l-1}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\{A(t_n)\boldsymbol{J}_h(t_n) - \boldsymbol{A}(\tau_l)\boldsymbol{J}_h(\tau_l)\}\boldsymbol{e}\Phi_h(l,m) \\
&= h\sum_{l=m}^{n-1} R(-hA(t_n))^{n-l-1}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(t_n)\mathcal{A} \\
&\quad \times \{A(t_n)\boldsymbol{A}(\tau_l)^{-1} - \mathcal{I}\}\boldsymbol{A}(\tau_l)\boldsymbol{J}_h(\tau_l)\boldsymbol{e}\Phi_h(l,m)
\end{aligned}$$

を考える．これより

$$\begin{aligned}
A(t_n)\Phi_h(n,m)A(t_m)^{-1} &= R(-hA(t_n))^{n-m}\cdot A(t_n)A(t_m)^{-1} \\
&+ h\sum_{l=m}^{n-1} A(t_n)R(-hA(t_n))^{n-l-1}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(t_n)\mathcal{A}\{A(t_n)\boldsymbol{A}(\tau_l)^{-1}-\mathcal{I}\} \\
&\qquad \times \mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(\tau_l)\mathcal{A}\boldsymbol{A}(\tau_l)A(t_l)^{-1}\boldsymbol{e}\cdot A(t_l)\Phi_h(l,m)A(t_m)^{-1}
\end{aligned}$$

であるから, (3.22) などを用いて Volterra 型離散積分不等式

$$\begin{aligned}&\|A(t_n)\Phi_h(n,m)A(t_m)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\\&\qquad\le C+Ch\sum_{l=m}^{n-1}((n-l)h)^{\mu-1}\|A(t_l)\Phi_h(l,m)A(t_m)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\end{aligned}$$

が得られる. ふたたび命題 2.8 を適用して (3.32) を得る. □

命題 3.11. $\Phi_h(n,m)-R(-hA(t_n))^{n-m}$ の値域は $\mathcal{D}(A(t_n))$ に含まれ,

$$\begin{aligned}&\|A(t_n)\{\Phi_h(n,m)-R(-hA(t_n))^{n-m}\}\|_{\mathcal{L}(X)}\\&\qquad\le C((n-m+1)h)^{\mu-1},\quad 0\le m\le n\le N,\end{aligned}\tag{3.34}$$

が成立する.

証明. $\Psi_h(n,m)=A(t_n)\{\Phi_h(n,m)-R(-hA(t_n))^{n-m}\}$ とおくと (3.33) より,

$$\begin{aligned}\Psi_h(n,m)&=h\sum_{l=m}^{n-1}A(t_n)R(-hA(t_n))^{n-l-1}e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(t_n)\mathcal{A}\\&\qquad\times\{A(t_n)\boldsymbol{A}(\tau_l)^{-1}-\mathcal{I}\}\boldsymbol{A}(\tau_l)\boldsymbol{J}_h(\tau_l)e\Phi_h(l,m)\\&=Q_h(n,m)+h\sum_{l=m}^{n-1}A(t_n)R(-hA(t_n))^{n-l-1}e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(t_n)\mathcal{A}\\&\qquad\times\{A(t_n)\boldsymbol{A}(\tau_l)^{-1}-\mathcal{I}\}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(\tau_l)\mathcal{A}\boldsymbol{A}(\tau_l)A(t_l)^{-1}e\Psi_h(l,m)\end{aligned}$$

を得る. ただし

$$\begin{aligned}Q_h(n,m)&=h\sum_{l=m}^{n-1}A(t_n)R(-hA(t_n))^{n-l-1}e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(t_n)\mathcal{A}\\&\qquad\times\{A(t_n)\boldsymbol{A}(\tau_l)^{-1}-\mathcal{I}\}\boldsymbol{A}(\tau_l)\boldsymbol{J}_h(\tau_l)eR(-hA(t_l))^{l-m}.\end{aligned}$$

ここで $\|Q_h(n,m)\|_{\mathcal{L}(X)}\le C((n-m+1)h)^{\mu-1}$ が示されれば, ふたたび (3.22) より

$$\|\Psi_h(n,m)\|_{\mathcal{L}(X)}\le C((n-m+1)h)^{\mu-1}+Ch\sum_{l=m}^{n-1}((n-l)h)^{\mu-1}\|\Psi_h(l,m)\|_{\mathcal{L}(X)}$$

であるから, (3.34) が成立する.

$\|Q_h(n,m)\|_{\mathcal{L}(X)}$ の評価を求める. はじめに $k=[(n+m)/2]$ とおいて,

$$Q_h(n,m)=\sum_{l=k}^{n-1}+\sum_{l=m}^{k-1}=Q_h^{(1)}(n,m)+Q_h^{(2)}(n,m)$$

と分ける. この第 1 項は容易に (3.22), (3.29) より

$$\|Q_h^{(1)}(n,m)\|_{\mathcal{L}(X)}\le Ch\sum_{l=k}^{n-1}((n-l)h)^{\mu-1}((k-m+1)h)^{-1}\le C((n-m+1)h)^{\mu-1}$$

と評価できる. 次に

$$\begin{aligned}
&Q_h^{(2)}(n,m)\\
&=h\sum_{l=m}^{k-1}A(t_n)R(-hA(t_n))^{n-l-1}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(t_n)\mathcal{A}\\
&\qquad\times A(t_n)\{\boldsymbol{J}_h(\tau_l)\boldsymbol{e}R(-hA(t_l))^{l-m}-\boldsymbol{J}_h(t_m)\boldsymbol{e}R(-hA(t_m))^{l-m}\\
&+h\sum_{l=m}^{k-1}A(t_n)R(-hA(t_n))^{n-l-1}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(t_n)\mathcal{A}\\
&\qquad\times\{A(t_m)\boldsymbol{J}_h(t_m)\boldsymbol{e}R(-hA(t_m))^{l-m}-\boldsymbol{A}(\tau_l)\boldsymbol{J}_h(\tau_l)\boldsymbol{e}R(-hA(t_l))^{l-m}\\
&+h\sum_{l=m}^{k-1}A(t_n)R(-hA(t_n))^{n-l-1}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(t_n)\mathcal{A}\\
&\qquad\times\{A(t_n)-A(t_m)\}\boldsymbol{J}_h(t_m)\boldsymbol{e}R(-hA(t_m))^{l-m}\\
&=Q_h^{(3)}(n,m)+Q_h^{(4)}(n,m)+Q_h^{(5)}(n,m)
\end{aligned}$$

と分ける.

$$\begin{aligned}
Q_h^{(5)}(n,m)&=A(t_n)R(-hA(t_n))^{n-k}\sum_{l=m}^{k-1}R(-hA(t_n))^{k-l-1}\\
&\qquad\times\{R(-hA(t_m))-R(-hA(t_n))\}R(-hA(t_m))^{l-m}\\
&=R(-hA(t_n))^{n-k}\cdot A(t_n)\{R(-hA(t_m))^{k-m}-R(-hA(t_n))^{k-m}\}
\end{aligned}$$

となるから (3.20), (3.25) よりすぐに $\|Q_h^{(5)}(n,m)\|_{\mathcal{L}(X)}\le C((n-m+1)h)^{\mu-1}$ が得

られる. $Q_h^{(3)}(n,m)$ は

$$
\begin{aligned}
&Q_h^{(3)}(n,m)\\
&= h\sum_{l=m}^{k-1} A(t_n)R(-hA(t_n))^{n-l-1}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(t_n)\mathcal{A}\\
&\quad\times\Big[A(t_n)\{\boldsymbol{J}_h(\tau_l)-\boldsymbol{J}_h(t_m)\}\boldsymbol{e}R(-hA(t_l))^{l-m}\\
&\qquad -A(t_n)\boldsymbol{J}_h(t_m)\boldsymbol{e}\{R(-hA(t_l))^{l-m}-R(-hA(t_m))^{l-m}\}\Big]\\
&= h\sum_{l=m}^{k-1} A(t_n)R(-hA(t_n))^{n-l-1}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(t_n)\mathcal{A}\\
&\quad\times\Big[A(t_n)\boldsymbol{J}_h(t_m)h\mathcal{A}\cdot\{A(t_m)\boldsymbol{A}(\tau_l)^{-1}-\mathcal{I}\}\cdot\boldsymbol{A}(\tau_l)\boldsymbol{J}_h(\tau_l)\boldsymbol{e}R(-hA(t_l))^{l-m}\\
&\qquad -A(t_n)A(t_m)^{-1}\boldsymbol{J}_h(t_m)\boldsymbol{e}\cdot A(t_m)\{R(-hA(t_l))^{l-m}-R(-hA(t_m))^{l-m}\}\Big]
\end{aligned}
$$

と書けるから, やはり (3.22), (3.23), (3.25), (3.29) より

$$
\begin{aligned}
\|Q_h^{(3)}(n,m)\|_{\mathcal{L}(X)} &\le Ch\sum_{l=m}^{k-1}((n-k+1)h)^{-1}((l-m+1)h)^{\mu-1}\\
&\le C((n-m+1)h)^{\mu-1}
\end{aligned}
$$

が成立する. $Q_h^{(4)}(n,m)$ についても同様に

$$
\begin{aligned}
&Q_h^{(4)}(n,m)\\
&= h\sum_{l=m}^{k-1} A(t_n)R(-hA(t_n))^{n-l-1}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(t_n)\mathcal{A}\\
&\quad\times\Big[A(t_m)\boldsymbol{J}_h(t_m)\boldsymbol{e}\{R(-hA(t_m))^{l-m}-R(-hA(t_l))^{l-m}\}\\
&\qquad +\{A(t_m)\boldsymbol{J}_h(t_m)-\boldsymbol{A}(\tau_l)\boldsymbol{J}_h(\tau_l)\}\boldsymbol{e}R(-hA(t_m))^{l-m}\Big]\\
&= h\sum_{l=m}^{k-1} A(t_n)R(-hA(t_n))^{n-l-1}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(t_n)\\
&\quad\times\Big[\boldsymbol{J}_h(t_m)\mathcal{A}\boldsymbol{e}\cdot A(t_m)\{R(-hA(t_m))^{l-m}-R(-hA(t_l))^{l-m}\}\\
&\qquad +\boldsymbol{J}_h(\tau_l)\mathcal{A}\{\mathcal{I}-\boldsymbol{A}(\tau_l)A(t_m)^{-1}\}\cdot A(t_m)\boldsymbol{J}_h(t_m)\boldsymbol{e}R(-hA(t_m))^{l-m}\Big]
\end{aligned}
$$

より $\|Q_h^{(4)}(n,m)\|_{\mathcal{L}(X)} \le C((n-m+1)h)^{\mu-1}$ となる. 以上のことをまとめると $\|Q_h(n,m)\|_{\mathcal{L}(X)} \le C((n-m+1)h)^{\mu-1}$ を得る. □

命題 3.12. $\Phi_h(\cdot,\cdot)$ は以下の評価を満たす:

$$\|A(t_n)\Phi_h(n,m+1)e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(\tau_m)\|_{\mathcal{L}(X^s,X)} \\ \le C((n-m)h)^{-1}, \quad 0\le m<n\le N; \tag{3.35}$$

$$\|A(t_n)\boldsymbol{J}_h(t_n)e\Phi_h(n,m)\|_{\mathcal{L}(X,X^s)} \\ \le C((n-m+1)h)^{-1}, \quad 0\le m\le n\le N. \tag{3.36}$$

証明. 等式

$$\begin{aligned}A(t_n)&\Phi_h(n,m+1)e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(\tau_m)\\ &= A(t_n)\{\Phi_h(n,m+1)-R(-hA(t_n))^{n-m-1}\}e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(\tau_m)\\ &+ A(t_n)\{R(-hA(t_n))^{n-m-1}-R(-hA(t_{m+1}))^{n-m-1}\}e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(\tau_m)\\ &+ A(t_n)A(t_{m+1})^{-1}\cdot A(t_{m+1})R(-hA(t_{m+1}))^{n-m-1}e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(\tau_m)\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}A(t_n)\boldsymbol{J}_h(t_n)e\Phi_h(n,m) &= \boldsymbol{J}_h(t_n)eA(t_n)\{\Phi_h(n,m)-R(-hA(t_n))^{n-m}\}\\ &\quad + A(t_n)\boldsymbol{J}_h(t_n)eR(-hA(t_n))^{n-m}\end{aligned}$$

に注意すれば, (3.34) と (3.23), (3.25), (3.28) より直ちに導かれる. □

(3.35), (3.36) は発展作用素の性質 (2.23): $\|A(t)\Phi(t,s)\|_{\mathcal{L}(X)}\le C(t-s)^{-1}$ に対応するもので, 放物型方程式特有の性質といえる. 以上の結果を考慮して, これ以降 $\Phi_h(\cdot,\cdot)$ を, 作用素族 $\{A(t_n),\boldsymbol{A}(\tau_n)\}$ によって生成される離散発展作用素と呼ぶ.

定理 3.5 あるいは定理 2.2 と同様に, 近似解の有界性が次のように示される.

定理 3.13. (3.15) の解 U_n は評価式

$$\|U_n\|_X\le C\left(\|u_0\|_X+\|F\|_{C([0,T];X)}\right), \tag{3.37}$$

$$\|A(t_n)U_n\|_X \le C\left(\|A(0)u_0\|_X + \frac{1}{\eta}\|F\|_{C^\eta([0,T];X)}\right), \quad n = 0, 1, \ldots, N, \tag{3.38}$$

を満たす.

証明. (3.37) は表現式 (3.17) と命題 3.9 よりすぐに導かれる. (3.38) は

$$\begin{aligned}
A(t_n)U_n &= A(t_n)\Phi_h(n,0)A(t_0)^{-1}A(0)u_0 \\
&\quad + h\sum_{l=0}^{n-1} A(t_n)\Phi_h(n,l+1)e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{\tau}_l)\mathcal{A}\{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\tau}_l) - \boldsymbol{e}F(t_n)\} \\
&\quad + h\sum_{l=0}^{n-1} A(t_n)\Phi_h(n,l+1)e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{\tau}_l)\mathcal{A}\{\mathcal{I} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_l)A(t_n)^{-1}\}\boldsymbol{e}F(t_n) \\
&\quad + \{1 - A(t_n)\Phi_h(n,0)A(t_0)^{-1}A(t_0)A(t_n)^{-1}\}F(t_n)
\end{aligned}$$

を命題 3.10, 3.12 によって評価して得られる. ここで等式

$$\begin{aligned}
\{1 - \Phi_h(n,0)\}A(t_n)^{-1} &= h\sum_{l=0}^{n-1}\Phi_h(n,l+1)e^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_l)\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{\tau}_l)A(t_n)^{-1} \\
&= h\sum_{l=0}^{n-1}\Phi_h(n,l+1)e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{\tau}_l)\mathcal{A}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_l)A(t_n)^{-1}
\end{aligned}$$

を用いた. □

以上で離散発展作用素 $\Phi_h(\cdot,\cdot)$ に関する基本的な評価と, 近似解 U_n の表現公式および有界性が示された. さらにモーメントの不等式 (2.8) を用いると, 命題 3.10, 3.12 の補間として (2.23) に対応する評価式

$$\begin{aligned}
&\|A(t_n)^\rho \Phi_h(n,m+1)e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{\tau}_m)\|_{\mathcal{L}(X^s,X)} \\
&\qquad\qquad \le C_\rho((n-m)h)^{-1}, \quad 0 \le m < n \le N,\ 0 < \rho \le 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\|A(t_n)^\rho \boldsymbol{J}_h(t_n)\boldsymbol{e}\Phi_h(n,m)\|_{\mathcal{L}(X,X^s)} \\
&\qquad\qquad \le C_\rho((n-m+1)h)^{-1}, \quad 0 \le m \le n \le N,\ 0 < \rho \le 1,
\end{aligned}$$

を得ることができる. しかし (2.24) に相当する評価はこのような補間によって導出することができない. そこでこの節の残りの部分では

$$\Xi_h(\boldsymbol{\tau}_m) = 1 - he^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_m)\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{\tau}_m)\boldsymbol{e}$$

によって新たに離散半群 $\{\Xi_h(\boldsymbol{\tau}_m)^n\}_{n=0,1,\ldots}$ を導入し, (2.24) に対応する離散発展作用素 $\Phi_h(\cdot,\cdot)$ の評価を求める. まずこの半群 $\{\Xi_h(\boldsymbol{\tau}_m)^n\}$ の評価を示す.

命題 3.14. 離散半群 $\{\Xi_h(\boldsymbol{\tau}_m)^n\}$ は一様有界である, すなわち

$$\|\Xi_h(\boldsymbol{\tau}_m)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \le C, \quad m = 0, 1, \ldots, N-1,\ n \ge 0, \tag{3.39}$$

を満たす.

証明. 放物型離散半群 $\{R(-hA(t_m))^n\}$ との差分等式

$$\begin{aligned}\Xi_h(\boldsymbol{\tau}_m)^n - R(-hA(t_m))^n &\\ = h\sum_{l=0}^{n-1} \Xi_h(\boldsymbol{\tau}_m)^{n-l-1} \boldsymbol{e}^T \mathcal{B}\mathcal{A}^{-1} \boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{\tau}_m)\mathcal{A}& \\ \times \{\mathcal{I} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_m)A(t_m)^{-1}\}A(t_m)\boldsymbol{J}_h(t_m)\boldsymbol{e}R(-hA(t_m))^l&\end{aligned} \tag{3.40}$$

を (3.20), (3.23) によって評価すると, 不等式

$$\begin{aligned}\|\Xi_h(\boldsymbol{\tau}_m)^n\|_{\mathcal{L}(X)} &\le C + Ch\sum_{l=0}^{n-1} \|\Xi_h(\boldsymbol{\tau}_m)^{n-l-1}\|_{\mathcal{L}(X)} h^\mu ((l+1)h)^{-1} \\ &\le C + Ch\sum_{l=0}^{n-1} \|\Xi_h(\boldsymbol{\tau}_m)^{n-l-1}\|_{\mathcal{L}(X)} ((l+1)h)^{\mu-1}\end{aligned}$$

が得られる. Volterra 型離散積分不等式に関する命題 2.8 を用いてこれを解くと (3.39) を得る. □

命題 3.15. m について一様に

$$\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_m)\{\Xi_h(\boldsymbol{\tau}_m)^n - R(\infty)^n\}\|_{\mathcal{L}(X^s)} \le C((n+1)h)^{-1}, \quad n \ge 0, \tag{3.41}$$

が成立する.

証明. 今度は次の差分等式を考える:

$$\begin{aligned}\Xi_h(\boldsymbol{\tau}_m)^n - R(-hA(t_{m+1}))^n &\\ = h\sum_{l=0}^{n-1} \Xi_h(\boldsymbol{\tau}_m)^{n-l-1} \boldsymbol{e}^T \mathcal{B}\mathcal{A}^{-1} \boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{\tau}_m)\mathcal{A}\{\mathcal{I} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_m)A(t_{m+1})^{-1}\}& \\ \times A(t_{m+1})\boldsymbol{J}_h(t_{m+1})\boldsymbol{e}R(-hA(t_{m+1}))^l.&\end{aligned} \tag{3.42}$$

ここで $\boldsymbol{\Psi}_h(m) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_m)\{\Xi_h(\boldsymbol{\tau}_m)^n - R(-hA(t_{m+1}))^n\}$ とおくと

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Psi}_h(m)\\
&\quad = h\sum_{l=0}^{n-1} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_m)A(t_{m+1})^{-1}\cdot A(t_{m+1})R(-hA(t_{m+1}))^{n-l-1}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{\tau}_m)\mathcal{A}\\
&\qquad\quad \times\{\mathcal{I} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_m)A(t_{m+1})^{-1}\}A(t_{m+1})\boldsymbol{J}_h(t_{m+1})\boldsymbol{e}R(-hA(t_{m+1}))^l\\
&\qquad\qquad + h\sum_{l=0}^{n-1}\boldsymbol{\Psi}_h(m)\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}\ -1\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{\tau}_m)\mathcal{A}\{\mathcal{I} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_m)A(t_{m+1})^{-1}\}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times A(t_{m+1})\boldsymbol{J}_h(t_{m+1})\boldsymbol{e}R(-hA(t_{m+1}))^l
\end{aligned}$$

が成立するから, (3.28), (3.29) を用いて離散積分不等式

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{\Psi}_h(m)\|_{\mathcal{L}(X^s)}\\
&\quad \le Ch\sum_{l=0}^{n-1}((n-l)h)^{-1}h^{\mu}((l+1)h)^{-1} + Ch\sum_{l=0}^{n-1}\|\boldsymbol{\Psi}_h(m)\|_{\mathcal{L}(X^s)}h^{\mu}((l+1)h)^{-1}\\
&\qquad\qquad\qquad \le C((n+1)h)^{\mu-1} + Ch\sum_{l=0}^{n-1}\|\boldsymbol{\Psi}_h(m)\|_{\mathcal{L}(X^s)}((l+1)h)^{\mu-1}
\end{aligned}$$

が示される. これより

$$\|\boldsymbol{\Psi}_h(m)\|_{\mathcal{L}(X^s)} \le C((n+1)h)^{\mu-1}$$

を得る. よって

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_m)\{\Xi_h(\boldsymbol{\tau}_m)^n - R(\infty)^n\}\|_{\mathcal{L}(X^s)}\\
&\qquad \le \|\boldsymbol{\Psi}_h(m)\|_{\mathcal{L}(X^s)} + \|A(t_{m+1})\{R(-hA(t_{m+1}))^n - R(\infty)^n\}\|_{\mathcal{L}(X)}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \le C((n+1)h)^{-1}
\end{aligned}$$

となって (3.41) が導かれる. □

命題 3.16. $\{\Xi_h(\boldsymbol{\tau}_m)^n\}$ に関する一様評価として

(3.43) $$\|\Xi_h(\boldsymbol{\tau}_m)^n\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_m)\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{\tau}_m)\|_{\mathcal{L}(X^s,X)} \le C((n+1)h)^{-1},$$

(3.44) $$\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\tau}_m)\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{\tau}_m)\boldsymbol{e}\Xi_h(\boldsymbol{\tau}_m)^n\|_{\mathcal{L}(X,X^s)} \le C((n+1)h)^{-1},$$

$$m = 0, 1, \ldots, N-1,\ n \ge 0,$$

が成立する.

証明. 等式

$$\Xi_h(\tau_m)^n e^T \mathcal{B}A(\tau_m)J_h(\tau_m) = e^T\mathcal{B}A(\tau_m)J_h(\tau_m)R(\infty)^n + e^T\mathcal{B}A(\tau_m)\{\Xi_h(\tau_m)^n - R(\infty)^n\}J_h(\tau_m)$$

および

$$A(\tau_m)J_h(\tau_m)e\Xi_h(\tau_m)^n = A(\tau_m)J_h(\tau_m)eR(\infty)^n + A(\tau_m)\{\Xi_h(\tau_m)^n - R(\infty)^n\}J_h(\tau_m)e$$

の右辺に命題 3.15 を適用すれば (3.43), (3.44) が得られる. □

(3.43), (3.44) の性質から, 離散半群 $\{\Xi_h(\tau_m)^n\}$ も放物型であるといえる. さらに分数べきを含む (2.15) に相当する評価を得るために, 2 つの補題を用意する.

補題 3.17. 分数べき $(\mathcal{A}A(t_m))^\rho$ は定義できて, $(\mathcal{A}A(t_m))^\rho = \mathcal{A}^\rho A(t_m)^\rho$.

証明. $-\zeta \in S_{\theta-\varphi}$ とする. 補題 3.1 と同様にして

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\zeta\mathcal{I} + \lambda\mathcal{A})^{-1}(\lambda + A(t_m))^{-1}d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\mathcal{I} - z\mathcal{A})^{-1}(\zeta z - A(t_m))^{-1}dz = (\zeta\mathcal{I} - \mathcal{A}A(t_m))^{-1}$$

が導かれる. これより

$$\|(\zeta\mathcal{I} - \mathcal{A}A(t_m))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^s)} \le \frac{C}{|\zeta|+1}, \quad \zeta \in -S_{\theta-\varphi}, \tag{3.45}$$

であるから, $\mathcal{A}A(t_m)$ の分数べきが

$$(\mathcal{A}A(t_m))^{-\rho} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\widetilde{\Gamma}} \zeta^{-\rho}(\zeta\mathcal{I} - \mathcal{A}A(t_m))^{-1}d\zeta$$

によって定義される. ここで $\widetilde{\Gamma} = \partial S_{(\theta-\varphi)/2}$. よって,

$$(\mathcal{A}A(t_m))^{-\rho} = \frac{1}{-4\pi^2}\int_{\widetilde{\Gamma}}\int_\Gamma \zeta^{-\rho}(\zeta\mathcal{I} + \lambda\mathcal{A})^{-1}(\lambda + A(t_m))^{-1}d\lambda d\zeta$$
$$= \frac{1}{-4\pi^2}\int_\Gamma\int_\gamma \lambda^{-\rho}(-z)^{\rho-1}(\mathcal{I} - z\mathcal{A})^{-1}(\lambda + A(t_m))^{-1}dzd\lambda = A(t_m)^{-\rho}\mathcal{A}^{-\rho}. \quad \square$$

補題 3.18. h が十分小さいとき, $(\mathcal{A}A(\tau_m))^\rho$ は定義できて,

$$\|(\mathcal{A}A(\tau_m))^\rho J_h(\tau_m)\|_{\mathcal{L}(X^s)} \leq Ch^{-\rho}, \quad m = 0, 1, \ldots, N-1,\ 0 \leq \rho \leq 1, \tag{3.46}$$

が成立する.

証明. $-\zeta \in S_{\theta-\varphi}$ のとき

$$(\zeta\mathcal{I} - \mathcal{A}A(\tau_m)) = \left[\mathcal{I} - \mathcal{A}\{A(\tau_m) - A(t_m)\}(\zeta\mathcal{I} - \mathcal{A}A(t_m))^{-1}\right](\zeta\mathcal{I} - \mathcal{A}A(t_m))$$

だから, h が十分小のとき,

$$\|(\zeta\mathcal{I} - \mathcal{A}A(\tau_m))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^s)} \leq \frac{C}{|\zeta|+1}, \quad \zeta \in -S_{\theta-\varphi}. \tag{3.47}$$

これより $\mathcal{A}A(\tau_m)$ の分数べきが

$$(\mathcal{A}A(\tau_m))^{-\rho} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}} \zeta^{-\rho}(\zeta\mathcal{I} - \mathcal{A}A(\tau_m))^{-1} d\zeta$$

によって定義される. (3.46) の $\rho = 0, 1$ の場合はすでに補題 3.8 で示されているから, $0 < \rho < 1$ の場合はモーメントの不等式 (2.8) を用いて $\rho = 0, 1$ の場合を補間することで得られる. □

命題 3.19. m に一様に

$$\|(\mathcal{A}A(\tau_m))^\rho\{\Xi_h(\tau_m)^n - R(\infty)^n\}\|_{\mathcal{L}(X^s)} \leq C_\rho((n+1)h)^{-\rho}, \tag{3.48}$$

$$\|\Xi_h(\tau_m)^n e^T \mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}A(\tau_m))^\rho J_h(\tau_m)\|_{\mathcal{L}(X^s, X)} \leq C_\rho((n+1)h)^{-\rho}, \tag{3.49}$$

$$\|(\mathcal{A}A(\tau_m))^\rho J_h(\tau_m) e \Xi_h(\tau_m)^n\|_{\mathcal{L}(X, X^s)} \leq C_\rho((n+1)h)^{-\rho}, \tag{3.50}$$

$$0 \leq \rho \leq 1,\ m = 0, 1, \ldots, N-1,\ n \geq 0,$$

が成立する.

証明. (3.48) は (3.39) と (3.41) の補間としてモーメントの不等式 (2.8) によって得られる. (3.49), (3.50) については等式

$$\begin{aligned}\Xi_h(\tau_m)^n e^T \mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}A(\tau_m))^\rho J_h(\tau_m) &= e^T \mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}A(\tau_m))^\rho J_h(\tau_m) R(\infty)^n \\ &\quad + e^T \mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}A(\tau_m))^\rho\{\Xi_h(\tau_m)^n - R(\infty)^n\} J_h(\tau_m)\end{aligned}$$

および

$$(\mathcal{A}A(\tau_m))^\rho J_h(\tau_m)e\Xi_h(\tau_m)^n = (\mathcal{A}A(\tau_m))^\rho J_h(\tau_m)eR(\infty)^n \\ + (\mathcal{A}A(\tau_m))^\rho\{\Xi_h(\tau_m)^n - R(\infty)^n\}J_h(\tau_m)e$$

の右辺を (3.48) を用いて評価することによって示される. □

(3.49) を用いると, (2.24): $\|\Phi(t,s)A(s)^\rho\|_{\mathcal{L}(X)} \le C(t-s)^{-\rho}$ に相当する次の評価が得られる. これと類似の評価式は第 5 章でも同様にして導出される.

命題 3.20. $0<\rho<\mu$ のとき

$$\|\Phi_h(n,m+1)e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}A(\tau_m))^\rho J_h(\tau_m)\|_{\mathcal{L}(X^s,X)} \\ \le C_\rho((n-m)h)^{-\rho}, \quad 0\le m<n\le N, \tag{3.51}$$

が成立する.

証明. 差分等式

$$\Phi_h(n,m+1) - \Xi_h(\tau_m)^{n-m-1} \\ = h\sum_{l=m+1}^{n-1}\Phi_h(n,l+1)e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}J_h(\tau_l)\mathcal{A} \\ \times\{\mathcal{I} - A(\tau_l)A(\tau_m)^{-1}\}A(\tau_m)J_h(\tau_m)e\Xi_h(\tau_m)^{l-m-1}$$

の両辺に右から $e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}A(\tau_m))^\rho J_h(\tau_m)$ を作用させて得られる等式を, (3.49) と

$$\|A(\tau_m)J_h(\tau_m)e\Xi_h(\tau_m)^{l-m-1}e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}A(\tau_m))^\rho J_h(\tau_m)\|_{\mathcal{L}(X^s)} \\ \le \|A(\tau_m)J_h(\tau_m)e\Xi_h(\tau_m)^{l-\lfloor(l+m+1)/2\rfloor}\|_{\mathcal{L}(X,X^s)} \\ \times\|\Xi_h(\tau_m)^{\lfloor(l+m+1)/2\rfloor-m-1}e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}A(\tau_m))^\rho J_h(\tau_m)\|_{\mathcal{L}(X^s,X)} \\ \le C_\rho((l-m)h)^{-1-\rho}$$

を用いて評価する. その結果,

$$\|\Phi_h(n,m+1)e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}A(\tau_m))^\rho J_h(\tau_m)\|_{\mathcal{L}(X^s,X)} \\ \le C_\rho((n-m)h)^{-\rho} + C_\rho h\sum_{l=m+1}^{n-1}((l-m)h)^\mu((l-m)h)^{-1-\rho} \\ \le C_\rho((n-m)h)^{-\rho}$$

を得る. □

3.4 結言.

この章では, 抽象線形発展方程式を陰的 Runge-Kutta 法によって時間離散化して得られる近似方程式に関して, その基本解となる放物型離散半群あるいは離散発展作用素を構成し, 解の表現公式を与えた. また放物型離散半群, 離散発展作用素がそれぞれ元の方程式に関する放物型半群, 発展作用素に相当する性質を持つことを示した. これらの結果が準線形方程式の全離散近似を考える上で本質的であることが, 以下に続く各章の議論を通して明らかになるであろう. さらに注意すべき点は, 3.3 節に示した離散発展作用素 $\varPhi_h(\cdot,\cdot)$ の性質が, 本質的にはその生成素 $\{A(t_n), A(\tau_n)\}$ のレゾルベント条件と Hölder 連続性

$$\|\{A(t_n)-A(t_m)\}A(t_m)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le M_A|(n-m)h|^{\mu}, \quad n,m=0,1,\dots,N, \tag{3.52}$$

$$\|\{A(\tau_n)-A(t_n)\}A(t_n)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^s)} \le Ch^{\mu}, \tag{3.53}$$

$$\|\{A(t_{n+1})-A(\tau_n)\}A(t_{n+1})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^s)} \le Ch^{\mu}, \quad n=0,1,\dots,N-1, \tag{3.54}$$

から導き出されることである. この事実は次章の議論にも深く関係することである.

第 4 章

準線形放物型方程式の時間離散近似

4.1 緒言.

この章と次章において, 強い相互作用を持つ反応拡散方程式系の抽象化である抽象準線形発展方程式の, 近似解に関する評価を導く. 特にここでは前章に続いて陰的 Runge-Kutta 法による時間離散近似のみを考え, 本来の対象である全離散近似は次章で扱う. これは, 前章の緒言でも触れたが, 問題を簡単化することで空間離散化の影響を無くし, 空間離散化に依存しない部分の評価を得るためである. ただしこのような考察は, 陰的な時間離散化手法を用いる場合にのみ有効である. 陽的な手法を用いると, よく知られているように, 安定な解法を得るためには時間刻み幅と空間刻み幅の選び方に制限を加えなければならない.

4.2 節において, 準線形方程式の陰的 Runge-Kutta 法による時間離散近似方程式を与え, 近似方程式の解に関する主結果を述べる. 主結果の証明のうち, 近似解の構成については 4.3 節で, 誤差評価については 4.4 節で示す. 近似解の構成には, 2.1 節 III-B) における議論と同様にして, 離散発展作用素による近似解の表現公式と不動点定理を応用する. また誤差評価においては, 近似解の表現公式と同様の式によって近似誤差を表現することができることを利用する. いずれにおいても, 前章の線形理論が重要な役割を果たす.

4.2 近似方程式と主結果.

この章では, Banach 空間 X の上の方程式

$$(4.1)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A(u)u = F(u), \quad 0 < t \le T, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

に対して, 陰的 Runge-Kutta 法を適用することを考える. ここで $A(\cdot)$ は, X の中に連続的に埋め込まれている Banach 空間 Z の中の開球 $K=\{u\in Z;\ \|u-u_0\|_Z\le r\}$ で定義され, 各 $u\in K$ について $-A(u)$ は X 上の解析的半群の生成素である. さらに $A(u)$ の定義域 $\mathcal{D}(A(u))$ は $u\in K$ に関して一定とする. また F は X に値を取る K 上の関数, $u_0\in K$ は初期値, $u=u(t)$ は未知関数である.

以下の条件を仮定する.

($\mathrm{A_u}$1) $u\in K$ に対して, $A(u)$ のレゾルベント集合 $\rho(A(u))$ は, u に関わらず, ある角度 $\varphi\in(0,\pi/2)$ の角領域 $\mathbb{C}\setminus\overline{S_\varphi}$ を含む. またレゾルベント $(\lambda-A(u))^{-1}$ は,

$$\|(\lambda-A(u))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\le\frac{M_A}{|\lambda|+1},\quad \lambda\notin\overline{S_\varphi},\ u\in K,$$

を満たす. ここで定数 M_A は u, λ に依存しない.

($\mathrm{A_u}$2) 定義域 $\mathcal{D}(A(u))\equiv\mathcal{D}$ は u に依らず一定で, $A(\cdot)$ は Lipschitz 条件

$$\|\{A(u)-A(v)\}A(u)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\le L_A\|u-v\|_Z,\quad u,v\in K,$$

を満たす.

(Sp) ある数 $\alpha\in(0,1)$ があって, $\mathcal{D}(A(u_0)^\alpha)$ は Z に連続的に埋め込まれ, $\|\cdot\|_Z\le D\|A(u_0)^\alpha\cdot\|_X$ を満たす.

($\mathrm{F_u}$) $F(\cdot)$ は Lipschitz 条件

$$\|F(u)-F(v)\|_X\le L_F\|u-v\|_Z,\quad u,v\in K,$$

を満たす.

(In) u_0 は $\mathcal{D}(A(u_0))$ の元である.

初期値問題 (4.1) に対して s 段 Runge-Kutta 法 $(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C})$ を適用すると, 漸化式

$$\text{(4.2)}\qquad \begin{cases} U_{n+1}=U_n+he^T\mathcal{B}\{-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{V}_n)\boldsymbol{V}_n+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{V}_n)\}, & n=0,1,\dots,N-1,\\ \boldsymbol{V}_n=\boldsymbol{e}U_n+h\mathcal{A}\{-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{V}_n)\boldsymbol{V}_n+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{V}_n)\}, & \\ U_0=u_0, & \end{cases}$$

を得る. ここで, $\boldsymbol{V}_n=[V_{n,1},\dots,V_{n,s}]^T$, また $\boldsymbol{V}=[V_1,\dots,V_s]^T$ に対して $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{V})=\mathrm{diag}[A(V_1),\dots,A(V_s)]$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{V})=[F(V_1),\dots,F(V_s)]^T$ と定義する.

この式 (4.2) は非線形であるので, 実際に解くためには何らかの反復計算が必要となる. そのため不動点定理を応用して各ステップごとの解の存在を保証しなければならない. しかしステップごとの近似解の存在とその誤差評価だけでは, $h \to 0$ のときに近似解が発散しないことや適当な時間区間上で一様に (4.1) の真の解に収束することなどを示すのが困難となる. ここでは, 第 3 章の線形理論と縮小写像に関する不動点定理を同時に応用して近似解の有界性を示し, ふたたび第 3 章の結果を用いて近似誤差を評価する. 近似解の有界性は定理 4.1 に, 誤差評価は定理 4.2 に述べ, 証明はそれぞれ 4.3, 4.4 節で与える.

定理 4.1. 上の条件 ($\mathrm{A_u}$1–2), (Sp), ($\mathrm{F_u}$), (In) を仮定し, また陰的 Runge-Kutta 法 $(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C})$ は, ある $\theta \in (\varphi, \pi/2]$ があって, $A(\theta)$-強安定であるとする. $\eta \in (0, 1-\alpha)$ をひとつ固定し, $S \in (0,T]$, $h > 0$, $N = [S/h]$ として, 空間 $\mathcal{X}_h$, 集合 $\mathcal{Z}_h$, $\mathcal{K}_h$ をそれぞれ

$$\mathcal{X}_h = \mathcal{X}_h(S) = \{\mathcal{U} = [U_0, \dots, U_N, \boldsymbol{V}_0, \dots, \boldsymbol{V}_{N-1}];$$
$$U_n \in Z,\ \boldsymbol{V}_n = [V_{n,1}, \dots, V_{n,s}]^T \in Z^s\} = Z^{N+1} \times (Z^s)^N,$$

$$\mathcal{Z}_h = \mathcal{Z}_h(S) = \{\mathcal{U} = [U_0, \dots, U_N, \boldsymbol{V}_0, \dots, \boldsymbol{V}_{N-1}] \in \mathcal{X}_h;\ U_n \in K,\ \boldsymbol{V}_n \in K^s,$$
$$\|U_n - U_m\|_Z \le |(n-m)h|^\eta,\ \|\boldsymbol{V}_n - eU_n\|_{Z^s} \le h^\eta\},$$

$$\mathcal{K}_h = \mathcal{K}_h(S) = \{\mathcal{U} = [U_0, \dots, U_N, \boldsymbol{V}_0, \dots, \boldsymbol{V}_{N-1}] \in \mathcal{Z}_h;\ U_0 = u_0\},$$

と定義する. このとき, S と h を十分小さくすると, (4.2) は $\mathcal{K}_h$ の中で一意な解 $\mathcal{U} = [U_0, \dots, U_N, \boldsymbol{V}_0, \dots, \boldsymbol{V}_{N-1}]$ を持つ.

定理 4.2. 定理 4.1 の仮定に加えて, 陰的 Runge-Kutta 法 $(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C})$ は $p\,(\ge 2)$ 次であるとし, q をこのスキームの内部次数とする. (4.1) の解 u が $u \in \mathcal{C}^{p+1}([0,S];X) \cap \mathcal{C}^{q+1}([0,S];\mathcal{D})$ を満たすなら, h が十分小さいとき, 任意の $\rho \in (\alpha, 1]$ について誤差

$E_n = U_n - u(t_n)$ は

$$(4.3)\quad \|E_n\|_X \le C\Bigg(h^p\int_0^S \|u^{(p+1)}(t)\|_X dt + h^{q+1}\int_0^S \|A(u_0)u^{(q+1)}(t)\|_X dt + h^{q+1}\|A(u_0)^\rho u^{(q+1)}(\cdot)\|_{C([0,S];X)}\Bigg)$$

で評価される. さらに, ある $\gamma \in (\alpha, 1)$ があって $u^{(p+1)} \in L^1(0,S;\mathcal{D}(A(u_0)^\gamma))$ なら,

$$(4.4)\quad \|E_n\|_Z \le C\Bigg(h^p\int_0^S \|A(u_0)^\gamma u^{(p+1)}(t)\|_X dt + h^{q+1}\|A(u_0)u^{(q+1)}(\cdot)\|_{C([0,S];X)}\Bigg)$$

が成立する.

4.3 近似解の存在定理の証明 : 解の構成と性質.

定理 4.1 を証明するためには, 定理 2.3 の証明と同様の筋道を辿る必要がある.

$\mathcal{W} = [W_0, \dots, W_N, \boldsymbol{Y}_0, \dots, \boldsymbol{Y}_{N-1}] \in \mathcal{Z}_h$ として, $\mathcal{U} = [U_0, \dots, U_N, \boldsymbol{V}_0, \dots, \boldsymbol{V}_{N-1}]$ に関する次の線形の漸化式を考える:

$$(4.5)\quad \begin{cases} U_{n+1} = U_n + he^T\mathcal{B}\{-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_n)\boldsymbol{V}_n + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}_n)\}, & n = 0, 1, \dots, N-1, \\ \boldsymbol{V}_n = eU_n + h\mathcal{A}\{-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_n)\boldsymbol{V}_n + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}_n)\}, \\ U_0 = u_0. \end{cases}$$

この式は, 3.3 節で示したように, 作用素 $\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}) = (\mathcal{I} + h\mathcal{A}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}))^{-1}$ を構成することができれば, 第 2 式を解いて第 1 式に代入することで

$$(4.6)\quad \begin{cases} U_{n+1} = \{1 - he^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_n)\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_n)e\}U_n + he^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_n)\mathcal{A}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}_n), \\ \boldsymbol{V}_n = \boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_n)\{eU_n + h\mathcal{A}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}_n)\}, \end{cases}$$

に書き替えられる. このとき (4.5) の解 $\mathcal{U} = [U_0, \dots, U_N, \boldsymbol{V}_0, \dots, \boldsymbol{V}_{N-1}]$ は, 作用素族 $\{A(W_0), \dots, A(W_N), \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_0), \dots, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_{N-1})\}$ によって生成される離散発展作用素

$$(4.7)\quad \Phi_h(\mathcal{W}; n, m) = \begin{cases} 1, & n = m, \\ \{1 - he^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_{n-1})\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_{n-1})e\}\cdots\{1 - he^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_m)\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_m)e\}, & n > m, \end{cases}$$

を用いて,

$$(4.8)\quad \begin{cases} U_n = \Phi_h(\mathcal{W}; n, 0)u_0 + h\displaystyle\sum_{l=0}^{n-1}\Phi_h(\mathcal{W}; n, l+1)e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_l)\mathcal{A}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}_l), \\ \boldsymbol{V}_n = \boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_n)\{eU_n + h\mathcal{A}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}_n)\}, \end{cases}$$

のように表される.

式 (4.8) によって定義される対応 $\mathcal{W} \mapsto \mathcal{U}$ を $\mathcal{T}$ とする. この写像 $\mathcal{T}\colon \mathcal{Z}_h \to X^{N+1} \times (\mathcal{D}^s)^N$ が不動点 $\mathcal{U}$ を持つなら, $\mathcal{U}$ が (4.2) の解であることは容易に分かる.

補題 4.3. 適当な $h_0>0$ あって, 任意の $h\in(0,h_0)$ と $n=0,1,\dots,N-1$ に対して作用素 $\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_n)=(\mathcal{I}+h\mathcal{A}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_n))^{-1}$ は X^s 上の有界作用素として存在し, n, h について一様に

$$C^{-1}\|\boldsymbol{J}_h(W_{n+1})\|_{\mathcal{L}(X^s)}\le\|\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_n)\|_{\mathcal{L}(X^s)}\le C\|\boldsymbol{J}_h(W_n)\|_{\mathcal{L}(X^s)}\le C, \tag{4.9}$$

$$\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_n)\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_n)\|_{\mathcal{L}(X^s)}\le C\|A(W_n)\boldsymbol{J}_h(W_n)\|_{\mathcal{L}(X^s)}\le Ch^{-1}, \tag{4.10}$$

を満たす. ここで $\boldsymbol{J}_h(W)=(\mathcal{I}+h\mathcal{A}A(W))^{-1}$.

証明. (3.19) と同様にして, n について一様に

$$\|\boldsymbol{J}_h(W_n)\|_{\mathcal{L}(X^s)}\le C,\quad \|A(W_n)\boldsymbol{J}_h(W_n)\|_{\mathcal{L}(X^s)}\le Ch^{-1},\quad n=0,1,\dots,N,$$

であるから, Hölder 連続性

$$\|\{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_n)-A(W_n)\}A(W_n)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^s)}\le Ch^{\eta},$$
$$\|\{A(W_{n+1})-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_n)\}A(W_{n+1})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^s)}\le Ch^{\eta},$$

が成立することに注意すれば, 補題 3.8 と同様にして (4.9), (4.10) が示される. □

系. 任意の $\rho\in(0,1)$ について

$$\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_n)^{\rho}\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_n)\|_{\mathcal{L}(X^s)}\le C_\rho h^{-\rho} \tag{4.11}$$

が成立する. ただし $C_\rho>0$ は ρ に依存して決まる定数.

証明. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_n)=\mathrm{diag}[A(Y_{n,1}),\dots,A(Y_{n,s})]$ は対角行列だから, その分数べきは $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_n)^{\rho}=\mathrm{diag}[A(Y_{n,1})^{\rho},\dots,A(Y_{n,s})^{\rho}]$ によって得られる. (4.11) の $\rho=0,1$ の場合はすでに (4.9), (4.10) に示されているから, それらとモーメントの不等式 (2.8) によって証明される. □

命題 4.4. 離散発展作用素 $\Phi_h(\mathcal{W};\cdot,\cdot)$ に関して, 以下の評価が成立する:

$$\|\Phi_h(\mathcal{W};n,m)\|_{\mathcal{L}(X)} \le C, \quad 0 \le m \le n \le N; \tag{4.12}$$

$$\|A(W_n)\Phi_h(\mathcal{W};n,m)A(W_m)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le C, \quad 0 \le m \le n \le N; \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}\|A(W_n)\Phi_h(\mathcal{W};n,m+1)e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_m)\|_{\mathcal{L}(X^s,X)}& \\ \le C((n-m)h)^{-1},& \quad 0 \le m < n \le N;\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}\|A(W_n)\boldsymbol{J}_h(W_n)\boldsymbol{e}\Phi_h(\mathcal{W};n,m)\|_{\mathcal{L}(X,X^s)}& \\ \le C((n-m+1)h)^{-1},& \quad 0 \le m \le n \le N.\end{aligned} \tag{4.15}$$

証明. $\Phi_h(\mathcal{W};\cdot,\cdot)$ の生成素 $\{A(W_0),\dots,A(W_N),\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_0),\dots,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_{N-1})\}$ はレゾルベント条件

$$\|(\lambda - A(W_n))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{M_A}{|\lambda|+1}, \quad \lambda \notin \overline{S_\varphi},$$

$$\|(\lambda\mathcal{I} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_n))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^s)} \le \frac{C}{|\lambda|+1}, \quad \lambda \notin \overline{S_\varphi},$$

および Hölder 連続性

$$\|\{A(W_n) - A(W_m)\}A(W_m)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le L_A|(n-m)h|^\eta, \quad n,m = 0,1,\dots,N,$$

$$\|\{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_n) - A(W_n)\}A(W_n)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^s)} \le Ch^\eta,$$

$$\|\{A(W_{n+1}) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_n)\}A(W_{n+1})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^s)} \le Ch^\eta, \quad n = 0,1,\dots,N-1,$$

を満足する. 3.4 節で触れたように, 3.3 節で示された離散発展作用素に関する評価がいずれも, その生成素のレゾルベント条件と Hölder 連続性から導出されていることを考慮すれば, (3.30), (3.32), (3.35), (3.36) の証明と同様の手順によって (4.12–15) を導出することができる. □

系. 任意の $\rho \in (0,1)$ について

$$(4.16)\quad \|A(W_n)^\rho \Phi_h(\mathcal{W}; n, m+1) e^T \mathcal{B} \mathcal{A}^{-1} \boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_m)\|_{\mathcal{L}(X^s, X)} \leq C_\rho((n-m)h)^{-\rho}, \quad 0 \leq m < n \leq N,$$

が得られる. ただし $C_\rho > 0$ は ρ に依存して決まる定数である.

証明. $\rho = 0, 1$ の場合はすでに (4.12), (4.14) で得られているから, モーメントの不等式 (2.8) を応用することによって導くことができる. □

命題 4.5. 任意の $\mathcal{W} \in \mathcal{Z}_h$ に対して, $\mathcal{U} = \mathcal{T}\mathcal{W}$ は (4.8) で与えられ, 評価式

$$(4.17)\quad \|U_n\|_X \leq C,$$

$$(4.18)\quad \|A(W_n)U_n\|_X \leq C,$$

$$(4.19)\quad \|\boldsymbol{V}_n - \boldsymbol{e}U_n\|_{X^s} \leq Ch, \quad \|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_n)\{\boldsymbol{V}_n - \boldsymbol{e}U_n\}\|_{X^s} \leq C,$$

を満たす.

証明. (4.8) が成立することは補題 4.3 によって保証されたので, (4.17) は (4.8), (4.12) からすぐに示される. また等式

$$\begin{aligned}(4.20)\quad \{1 - \Phi_h(\mathcal{W}; n, m)\}A(W_j)^{-1} &= h\sum_{l=m}^{n-1} \Phi_h(\mathcal{W}; n, l+1) e^T \mathcal{B} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_l) \boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_l) A(W_j)^{-1} \\ &= h\sum_{l=m}^{n-1} \Phi_h(\mathcal{W}; n, l+1) e^T \mathcal{B} \mathcal{A}^{-1} \boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_l) \mathcal{A} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_l) A(W_j)^{-1}, \\ &\qquad 0 \leq m \leq n \leq N,\ 0 \leq j \leq N,\end{aligned}$$

を用いると (4.8) より

$$\begin{aligned}A(W_n)U_n &= A(W_n)\Phi_h(\mathcal{W}; n, 0)A(W_0)^{-1}A(u_0)u_0 \\ &\quad + h\sum_{l=0}^{n-1} A(W_n)\Phi_h(\mathcal{W}; n, l+1) e^T \mathcal{B} \mathcal{A}^{-1} \boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_l) \mathcal{A}\{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}_l) - \boldsymbol{e}F(W_n)\} \\ &\quad + h\sum_{l=0}^{n-1} A(W_n)\Phi_h(\mathcal{W}; n, l+1) e^T \mathcal{B} \mathcal{A}^{-1} \boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_l) \mathcal{A}\{\mathcal{I} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_l) A(W_n)^{-1}\}\boldsymbol{e}F(W_n) \\ &\quad + \{1 - A(W_n)\Phi_h(\mathcal{W}; n, 0)A(W_0)^{-1}A(u_0)A(W_n)^{-1}\}F(W_n)\end{aligned}$$

が成立する. この式を (4.13), (4.14) と連続性

$$\|eF(W_n) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}_l)\|_{X^s} \leq C((n-l)h)^\eta, \quad 0 \leq l < n \leq N,$$

によって評価して (4.18) を得る. (4.19) については

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_n - \boldsymbol{e}U_n &= \{\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_n) - \mathcal{I}\}\boldsymbol{e}U_n + h\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_n)\mathcal{A}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}_n) \\ &= h\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_n)\mathcal{A}\{-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_n)A(W_n)^{-1}\boldsymbol{e}A(W_n)U_n + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}_n)\}\end{aligned}$$

を評価すればよい. □

以上の準備の下で, $\mathcal{T}$ が縮小写像であることを証明する.

命題 4.6. S を十分小さくとると, $\mathcal{T}$ は $\mathcal{K}_h$ をそれ自身に写す写像になる.

証明. 任意の $\mathcal{W} \in \mathcal{K}_h$ に対して, $\mathcal{U} = \mathcal{T}\mathcal{W} \in \mathcal{K}_h$ であることを示せばよい. $U_0 = u_0$ は明らか. また (4.19) の両式にモーメントの不等式 (2.8) による補間を応用すると,

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{V}_n - \boldsymbol{e}U_n\|_{Z^s} &\leq D\|A(u_0)^\alpha\{\boldsymbol{V}_n - \boldsymbol{e}U_n\}\|_{X^s} \\ &\leq C\|\boldsymbol{V}_n - \boldsymbol{e}U_n\|_{X^s}^{1-\alpha}\|A(u_0)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_n)^{-1} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_n)\{\boldsymbol{V}_n - \boldsymbol{e}U_n\}\|_{X^s}^{\alpha} \leq Ch^{1-\alpha}\end{aligned}$$

となり, $\eta < 1 - \alpha$ より

$$\|\boldsymbol{V}_n - \boldsymbol{e}U_n\|_{Z^s} \leq C_1 S^{1-\alpha-\eta} h^\eta$$

が得られる. 次に $n \geq m$ のとき

$$\begin{aligned}U_n - U_m = \{&\varPhi_h(\mathcal{W}; n, m) - 1\}A(W_m)^{-1} \cdot A(W_m)U_m \\ &+ h\sum_{l=m}^{n-1} \varPhi_h(\mathcal{W}; n, l+1)\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_l)\mathcal{A}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}_l)\end{aligned}$$

が成立する. (4.20) より

$$\|\{\varPhi_h(\mathcal{W}; n, m) - 1\}A(W_m)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C(n-m)h, \quad 0 \leq m \leq n \leq N, \tag{4.21}$$

だから, これと (4.18) より

$$\|U_n - U_m\|_X \le C(n-m)h,$$

$$\|A(u_0)\{U_n - U_m\}\|_X \le \|A(u_0)U_n\|_X + \|A(u_0)U_m\|_X \le C,$$

が得られる. ふたたびモーメントの不等式 (2.8) により,

$$\begin{aligned}\|U_n - U_m\|_Z &\le D\|A(u_0)^\alpha\{U_n - U_m\}\|_X \\ &\le C\|U_n - U_m\|_X^{1-\alpha}\|A(u_0)\{U_n - U_m\}\|_X^\alpha \le C((n-m)h)^{1-\alpha} \\ &\le C_2 S^{1-\alpha-\eta}((n-m)h)^\eta.\end{aligned}$$

ゆえに $\max\{C_1, C_2\}S^{1-\alpha-\eta} < 1$ となるように S を選ぶと $\mathcal{U} \in \mathcal{K}_h$ となる. □

命題 4.7. 必要があればさらに S を小さくすることで, $\mathcal{T}$ をノルム

$$\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{X}_h} = \max_{n=0,\dots,N}\|U_n\|_Z + \max_{n=0,\dots,N-1}\|\boldsymbol{V}_n\|_{Z^s},$$
$$\mathcal{U} = [U_0, \dots, U_N, \boldsymbol{V}_0, \dots, \boldsymbol{V}_{N-1}] \in \mathcal{X}_h,$$

に関して縮小写像にすることができる.

証明. $\mathcal{W}, \mathcal{W}' \in \mathcal{K}_h$, $\mathcal{U} = \mathcal{T}\mathcal{W}$, $\mathcal{U}' = \mathcal{T}\mathcal{W}'$ として, $\|\mathcal{U} - \mathcal{U}'\|_{\mathcal{X}_h} \le c\|\mathcal{W} - \mathcal{W}'\|_{\mathcal{X}_h}$ を成立させるような正数 $c < 1$ が存在することを示せばよい. $\rho \in (\alpha, 1)$ を任意にひとつ固定する. このとき, $\mathcal{D}(A(u))$ が $u \in K$ について一定であることから, 任意の $W \in K$ について $\mathcal{D}(A(W)^\rho) \subset \mathcal{D}(A(u_0)^\alpha)$ となる. すなわち任意の $W \in K$, $\boldsymbol{Y} \in K^s$ について

$$\|U\|_Z \le D\|A(u_0)^\alpha U\|_X \le D'\|A(W)^\rho U\|_X, \quad U \in X,$$

$$\|\boldsymbol{V}\|_{Z^s} \le D\|A(u_0)^\alpha \boldsymbol{V}\|_{X^s} \le D'\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y})^\rho \boldsymbol{V}\|_{X^s}, \quad \boldsymbol{V} \in X^s,$$

が成立する. また定数 D' は $W, \boldsymbol{Y}$ に依存しない.

まず $U_n - U_n'$ は

$$U_n - U_n' = \{\Phi_h(\mathcal{W}; n, 0) - \Phi_h(\mathcal{W}'; n, 0)\}u_0$$
$$+ h\sum_{l=0}^{n-1}\{\Phi_h(\mathcal{W}; n, l+1) - \Phi_h(\mathcal{W}'; n, l+1)\}e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_l')\mathcal{A}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}_l')$$
$$+ h\sum_{l=0}^{n-1}\Phi_h(\mathcal{W}; n, l+1)e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\{\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_l)\mathcal{A}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}_l) - \boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_l')\mathcal{A}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}_l')\}$$
$$= I_1 + I_2 + I_3$$

と書ける. I_1 は

$$I_1 = h\sum_{j=0}^{n-1}\Phi_h(\mathcal{W}; n, j+1)e^T\mathcal{B}\{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_j')\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_j') - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_j)\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_j)\}e\Phi_h(\mathcal{W}'; j, 0)u_0$$
$$= h\sum_{j=0}^{n-1}\Phi_h(\mathcal{W}; n, j+1)e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_j)\mathcal{A}\{\mathcal{I} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_j)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_j')^{-1}\}$$
$$\times \mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_j')\mathcal{A}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_j')A(W_j')^{-1}e \cdot A(W_j')\Phi_h(\mathcal{W}'; j, 0)A(W_0')^{-1} \cdot A(u_0)u_0$$

と書けるから, (4.16) より

$$\|A(W_n)^\rho I_1\|_X \le Ch\sum_{j=0}^{n-1}((n-j)h)^{-\rho}\|\boldsymbol{Y}_j - \boldsymbol{Y}_j'\|_{Z^s} \le CS^{1-\rho}\|\mathcal{W} - \mathcal{W}'\|_{\mathcal{X}_h}$$

となる. I_3 も同様に

$$I_3 = h\sum_{l=0}^{n-1}\Phi_h(\mathcal{W}; n, l+1)e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_l)\mathcal{A}\{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}_l) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}_l')\}$$
$$+ h\sum_{l=0}^{n-1}\Phi_h(\mathcal{W}; n, l+1)e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\{\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_l) - \boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_l')\}\mathcal{A}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}_l')$$

と書け, (4.16) と

$$\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_l) - \boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_l') = \boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_l)h\mathcal{A}\{\mathcal{I} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_l)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_l')^{-1}\}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_l')\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_l') \tag{4.22}$$

より

$$\|A(W_n)^\rho I_3\|_X \le Ch\sum_{l=0}^{n-1}((n-l)h)^{-\rho}\|\boldsymbol{Y}_l - \boldsymbol{Y}_l'\|_{Z^s} \le CS^{1-\rho}\|\mathcal{W} - \mathcal{W}'\|_{\mathcal{X}_h}$$

を得る. 一方 I_2 は I_1 と同様に変形すると,

$$
\begin{aligned}
I_2 = h^2 \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{j=l+1}^{n-1} &\varPhi_h(\mathcal{W}; n, j+1) \boldsymbol{e}^T \mathcal{B} \mathcal{A}^{-1} \boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_j) \mathcal{A} \{\mathcal{I} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_j) \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_j')^{-1}\} \\
&\times \mathcal{A}^{-1} \boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_j') \mathcal{A} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_j') A(W_j')^{-1} \boldsymbol{e} \\
&\times A(W_j') \varPhi_h(\mathcal{W}'; j, l+1) \boldsymbol{e}^T \mathcal{B} \mathcal{A}^{-1} \boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_l') \mathcal{A} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}_l') \\
= h \sum_{j=1}^{n-1} &\varPhi_h(\mathcal{W}; n, j+1) \boldsymbol{e}^T \mathcal{B} \mathcal{A}^{-1} \boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_j) \mathcal{A} \{\mathcal{I} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_j) \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_j')^{-1}\} \\
&\times \mathcal{A}^{-1} \boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_j') \mathcal{A} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_j') A(W_j')^{-1} \boldsymbol{e} \\
&\times h \sum_{l=0}^{j-1} A(W_j') \varPhi_h(\mathcal{W}'; j, l+1) \boldsymbol{e}^T \mathcal{B} \mathcal{A}^{-1} \boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_l') \mathcal{A} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}_l')
\end{aligned}
$$

となる. ここで

$$
\begin{aligned}
&h \sum_{l=0}^{j-1} A(W_j') \varPhi_h(\mathcal{W}'; j, l+1)\} \boldsymbol{e}^T \mathcal{B} \mathcal{A}^{-1} \boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_l') \mathcal{A} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}_l') \\
&= h \sum_{l=0}^{j-1} A(W_j') \varPhi_h(\mathcal{W}'; j, l+1)\} \boldsymbol{e}^T \mathcal{B} \mathcal{A}^{-1} \boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_l') \mathcal{A} \{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}_l') - \boldsymbol{e} F(W_j')\} \\
&\quad + h \sum_{l=0}^{j-1} A(W_j') \varPhi_h(\mathcal{W}'; j, l+1)\} \boldsymbol{e}^T \mathcal{B} \mathcal{A}^{-1} \boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_l') \mathcal{A} \\
&\qquad \times \{\mathcal{I} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_l') A(W_j')^{-1}\} \boldsymbol{e} F(W_j') \\
&\quad + \{1 - A(W_j') \varPhi_h(\mathcal{W}'; j, 0) A(W_0')^{-1} A(u_0) A(W_j')^{-1}\} F(W_j')
\end{aligned}
$$

であるから, (4.13), (4.14), (4.16) より

$$
\|A(W_n)^\rho I_2\|_X \le Ch \sum_{j=1}^{n-1} ((n-j)h)^{-\rho} \|\boldsymbol{Y}_j - \boldsymbol{Y}_j'\|_{Z^s} \le CS^{1-\rho} \|\mathcal{W} - \mathcal{W}'\|_{\mathcal{X}_h}
$$

が得られる. よって

$$
\|U_n - U_n'\|_Z \le C_3 S^{1-\rho} \|\mathcal{W} - \mathcal{W}'\|_{\mathcal{X}_h} \tag{4.23}
$$

を得る.

次に $\boldsymbol{V}_n - \boldsymbol{V}_n'$ を評価する.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{V}_n - \boldsymbol{V}_n' = \boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_n) &[\{U_n - U_n'\} + h\mathcal{A}\{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}_n) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}_n')\}] \\
&+ \{\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{Y}_n) - \boldsymbol{J}_h(Y_n')\}\{U_n' + h\mathcal{A}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}_n')\}
\end{aligned}
$$

であるが, (4.22), (4.23) と (4.11) より,

$$\|V_n - V_n'\|_{Z^s} \le D\|A(u_0)^\alpha\{V_n - V_n'\}\|_{X^s} \le C\|A(Y_n)^\rho\{V_n - V_n'\}\|_{X^s} \le C_4 S^{1-\rho}\|\mathcal{W} - \mathcal{W}'\|_{\mathcal{X}_h} \tag{4.24}$$

が得られる.

ゆえに $\max\{C_3, C_4\}S^{1-\rho} < 1$ となるように S を選べば $\mathcal{T}$ は縮小写像となる. □

$\mathcal{K}_h$ は $\mathcal{X}_h$ の閉部分集合だから, 命題 4.6, 4.7 より $\mathcal{T}$ は $\mathcal{K}_h$ 上の縮小写像となる. よって縮小写像に関する不動点定理より $\mathcal{T}$ は $\mathcal{K}_h$ の中に一意な不動点 $\mathcal{U}$ を持つ. 先に述べたように, この不動点 $\mathcal{U}$ が (4.2) の解である.

4.4 近似解の収束性定理の証明：解の誤差評価.

ここでは定理 4.2 を証明する. u を (4.1) の真の解とする. $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \dots, \tau_s]^T$ に対して $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}) = [u(\tau_1), \dots, u(\tau_s)]^T$, $\boldsymbol{u}^{(m)}(\boldsymbol{\tau}) = [u^{(m)}(\tau_1), \dots, u^{(m)}(\tau_s)]^T$ とおき,

$$\begin{cases} e_n = u(t_{n+1}) - u(t_n) - h\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{\tau}_n), \\ \boldsymbol{d}_n = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n) - \boldsymbol{e}u(t_n) - h\mathcal{A}\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{\tau}_n), \end{cases} \tag{4.25}$$

という量を定義する. Taylor 級数展開

$$y(h) = y(0) + hy'(0) + \frac{h^2}{2}y''(0) + \cdots + \frac{h^m}{m!}y^{(m)}(0) + \int_0^h \frac{(h-t)^m}{m!}y^{(m+1)}(t)dt$$

を用いて e_n を p 次まで展開すると,

$$\begin{aligned} e_n &= u(t_n + h) - u(t_n) - h\sum_{i=1}^s b_i u'(t_n + hc_i) \\ &= \left\{\sum_{k=1}^p \frac{h^k}{k!}u^{(k)}(t_n) + \int_0^h \frac{(h-t)^p}{p!}u^{(p+1)}(t_n+t)dt\right\} \\ &\quad - h\sum_{i=1}^s b_i \left\{\sum_{k=0}^{p-1} \frac{(hc_i)^k}{k!}u^{(k+1)}(t_n) + \int_0^{hc_i} \frac{(hc_i - t)^{p-1}}{(p-1)!}u^{(p+1)}(t_n+t)dt\right\} \\ &= \sum_{k=1}^p \frac{h^k}{(k-1)!}\left(\frac{1}{k} - \boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{C}^{k-1}\boldsymbol{e}\right)u^{(k)}(t_n) \\ &\quad + \int_0^h \left(\frac{(h-t)^p}{p!}u^{(p+1)}(t_n+t) - \frac{h(h-t)^{p-1}}{(p-1)!}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{C}^p\boldsymbol{u}^{(p+1)}((t_n\mathcal{I} + t\mathcal{C})\boldsymbol{e})\right)dt \end{aligned}$$

を得る. ここで p 次であることより (2.36), すなわち

$$e^T\mathcal{B}\mathcal{C}^{k-1}e = \sum_{i=1}^{s} b_i c_i^{k-1} = \frac{1}{k}, \quad k = 1, \ldots, p,$$

が成立するから, 結局

(4.26)
$$e_n = \int_0^h \left(\frac{(h-t)^p}{p!} u^{(p+1)}(t_n + t) - \frac{h(h-t)^{p-1}}{(p-1)!} e^T\mathcal{B}\mathcal{C}^p \boldsymbol{u}^{(p+1)}((t_n\mathcal{I} + t\mathcal{C})e) \right) dt$$

と書ける. 同様に, 内部次数の定義 (2.35) より

$$\mathcal{A}\mathcal{C}^{k-1}e = \begin{bmatrix} \vdots \\ \sum_{j=1}^{s} a_{ij} c_j^{k-1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ c_j^k / k \\ \vdots \end{bmatrix} = \frac{1}{k}\mathcal{C}^k e, \quad k = 1, \ldots, q,$$

を用いると,

(4.27)
$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}_n &= \left\{ \sum_{k=1}^{q} \frac{h^k}{k!} \mathcal{C}^k e u^{(k)}(t_n) + \int_0^h \frac{(h-t)^q}{q!} \mathcal{C}^{q+1} \boldsymbol{u}^{(q+1)}((t_n\mathcal{I} + t\mathcal{C})e) dt \right\} \\ &\quad + h\mathcal{A} \left\{ \sum_{k=0}^{q-1} \frac{h^k}{k!} \mathcal{C}^k e u^{(k+1)}(t_n) + \int_0^h \frac{(h-t)^{q-1}}{(q-1)!} \mathcal{C}^q \boldsymbol{u}^{(q+1)}((t_n\mathcal{I} + t\mathcal{C})e) dt \right\} \\ &= \int_0^h \left(\frac{(h-t)^q}{q!} \mathcal{C}^{q+1} - \frac{h(h-t)^{q-1}}{(q-1)!} \mathcal{A}\mathcal{C}^q \right) \boldsymbol{u}^{(q+1)}((t_n\mathcal{I} + t\mathcal{C})e) dt \end{aligned}$$

が導かれる.

(4.1) と (4.25) より

$$(4.28) \quad \begin{cases} u(t_{n+1}) = u(t_n) + he^T\mathcal{B}\{-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n))\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n))\} + e_n, \\ \hfill n = 0, 1, \ldots, N-1, \\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n) = eu(t_n) + h\mathcal{A}\{-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n))\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n))\} + \boldsymbol{d}_n, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

が成立する. これと (4.2) より, 誤差 $E_n = U_n - u(t_n)$, $\boldsymbol{D}_n = \boldsymbol{V}_n - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n)$ は

$$(4.29) \quad \begin{cases} E_{n+1} = E_n - he^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{V}_n)\boldsymbol{D}_n + he^T\mathcal{B}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}_n, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n)) - e_n, \\ \hfill n = 0, 1, \ldots, N-1, \\ \boldsymbol{D}_n = eE_n - h\mathcal{A}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{V}_n)\boldsymbol{D}_n + h\mathcal{A}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}_n, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n)) - \boldsymbol{d}_n, \\ E_0 = 0, \end{cases}$$

の解として与えられる. ここで $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{v})=-\{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{V})-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{v})\}\boldsymbol{v}+\{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{V})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v})\}$ とおいた. これより (4.8) と同様に, $E_n,\boldsymbol{D}_n$ は離散発展作用素 $\Phi_h(\mathcal{U};\cdot,\cdot)$ を用いて

$$
(4.30)\quad \begin{cases} E_n=\displaystyle\sum_{l=0}^{n-1}\Phi_h(\mathcal{U};n,l+1)\{he^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{V}_l)\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{V}_l)\boldsymbol{d}_l-e_l\} \\ \qquad\quad +h\displaystyle\sum_{l=0}^{n-1}\Phi_h(\mathcal{U};n,l+1)e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{V}_l)\mathcal{A}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}_l,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_l))), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n=0,1,\dots,N, \\ \boldsymbol{D}_n=\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{V}_n)\{eE_n-\boldsymbol{d}_n\}+h\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{V}_n)\mathcal{A}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}_n,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n))), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n=0,1,\dots,N-1, \end{cases}
$$

のように表すことができる.

$\|E_n\|_X$ の評価を求める. 仮定より解 u は $u\in\mathcal{C}^{p+1}([0,S];X)\cap\mathcal{C}^{q+1}([0,S];\mathcal{D})$ を満たす. このとき $\boldsymbol{d}_n\in\mathcal{D}^s$ である. また $\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n))\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n)\|_{X^s}\le\widetilde{C}$ より

$$
\|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}_n,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n))\|_{X^s}\le C\|\boldsymbol{D}_n\|_{Z^s}
$$

が導かれる. よって (4.30) と (4.11), (4.12), (4.13) より, 任意の $\rho\in(\alpha,1]$ について

$$
(4.31)\qquad \|E_n\|_X\le C\sum_{l=0}^{n-1}\{h\|A(u_0)\boldsymbol{d}_l\|_{X^s}+\|e_l\|_X\}+Ch\sum_{l=0}^{n-1}\|\boldsymbol{D}_l\|_{Z^s},
$$

$$
(4.32)\quad \|\boldsymbol{D}_n\|_{Z^s}\le D\|A(u_0)^\alpha\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{V}_n)\boldsymbol{e}E_n\|_{X^s}+C\|A(u_0)^\rho\boldsymbol{d}_n\|_{X^s}+Ch^{1-\alpha}\|\boldsymbol{D}_n\|_{Z^s},
$$

を得る. ここで h が十分小さければ, (4.32) より

$$
(4.33)\qquad \|\boldsymbol{D}_n\|_{Z^s}\le C\|A(u_0)^\alpha\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{V}_n)\boldsymbol{e}E_n\|_{X^s}+C\|A(u_0)^\rho\boldsymbol{d}_n\|_{X^s}
$$

となる. この式の右辺第 1 項は, (4.12) と (4.10), (4.15) とモーメントの不等式 (2.8) より得られる

$$
\begin{aligned}
\|A(u_0)^\alpha\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{V}_n)\boldsymbol{e}\Phi_h(\mathcal{U};n,l+1)\|_{\mathcal{L}(X,X^s)}&\le C\|\Phi_h(\mathcal{U};n,l+1)\|_{\mathcal{L}(X)}^{1-\alpha}\\
&\times\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{V}_n)\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{V}_n)\boldsymbol{e}\Phi_h(\mathcal{U};n,l+1)\|_{\mathcal{L}(X,X^s)}^\alpha\le C((n-l)h)^{-\alpha}
\end{aligned}
$$

を用いて,

$$\|A(u_0)^\alpha \boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{V}_n)eE_n\|_{X^s} \le C\sum_{l=0}^{n-1}((n-l)h)^{-\alpha}\{h\|A(u_0)\boldsymbol{d}_l\|_{X^s}+\|e_l\|_X\} + Ch\sum_{l=0}^{n-1}((n-l)h)^{-\alpha}\|\boldsymbol{D}_l\|_{Z^s} \tag{4.34}$$

と評価される. (4.33), (4.34) は $\|\boldsymbol{D}_n\|$ に関する Volterra 型離散積分不等式を与えている. これに命題 2.10 を用いると

$$\|\boldsymbol{D}_n\|_{Z^s} \le C\max_{l=0,1,\dots,N-1}\|A(u_0)^\rho \boldsymbol{d}_l\|_{X^s} + C\sum_{l=0}^{n-1}((n-l)h)^{-\alpha}\{h\|A(u_0)\boldsymbol{d}_l\|_{X^s}+\|e_l\|_X\} \tag{4.35}$$

となるから, (4.35) を (4.31) に代入すると,

$$\|E_n\|_X \le C\max_{l=0,1,\dots,N-1}\|A(u_0)^\rho \boldsymbol{d}_l\|_{X^s} + C\sum_{l=0}^{n-1}\{h\|A(u_0)\boldsymbol{d}_l\|_{X^s}+\|e_l\|_X\}$$

が得られる. (4.26), (4.27) より

$$\|e_l\|_X \le Ch^p\int_{t_l}^{t_{l+1}}\|u^{(p+1)}(t)\|_X dt,$$

$$\|A(u_0)\boldsymbol{d}_l\|_{X^s} \le Ch^q\int_{t_l}^{t_{l+1}}\|A(u_0)u^{(q+1)}(t)\|_X dt,$$

$$\|A(u_0)^\rho \boldsymbol{d}_l\|_{X^s} \le Ch^{q+1}\|A(u_0)^\rho u^{(q+1)}(\cdot)\|_{C([t_l,t_{l+1}];X)},$$

を用いて (4.3) を得る.

次に $\|E_n\|_Z$ を評価するために, $u^{(p+1)} \in L^1(0,S;\mathcal{D}(A(u_0)^\gamma))$ を仮定する. このとき $e_n \in \mathcal{D}(A(u_0)^\gamma)$ である. ここで命題 4.7 の証明の冒頭に述べたと同様に, $\alpha<\alpha'<\gamma'<\gamma$ のとき $W,w\in K$ に一様に

$$\mathcal{D}(A(u_0)^\gamma) \subset \mathcal{D}(A(W)^{\gamma'}) \subset \mathcal{D}(A(w)^{\alpha'}) \subset D(A(u_0)^\alpha), \quad W,w\in K,$$

より

$$\|A(u_0)^\alpha A(w)^{-\alpha'}\|_{\mathcal{L}(X)},\ \|A(w)^{\alpha'}A(W)^{-\gamma'}\|_{\mathcal{L}(X)},\ \|A(W)^{\gamma'}A(u_0)^{-\gamma}\|_{\mathcal{L}(X)} \le C, \quad w,W\in K,$$

が成り立つことに注意する. 等式

$$
\begin{aligned}
A(U_n)^{\alpha'}\Phi_h(\mathcal{U};n,m)A(U_m)^{-\gamma'} &= A(U_n)^{\alpha'}A(U_m)^{-\gamma'}R(-hA(U_m))^{n-m} \\
&\quad + h\sum_{l=m}^{n-1} A(U_n)^{\alpha'}\Phi_h(\mathcal{U};n,l+1)e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{V}_l)\mathcal{A}\{\mathcal{I}-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{V}_l)A(U_m)^{-1}\} \\
&\qquad \times A(U_m)^{1-\gamma'}\boldsymbol{J}_h(U_m)eR(-hA(U_m))^{l-m}
\end{aligned}
$$

を評価することによって

$$
\begin{aligned}
&\|A(U_n)^{\alpha'}\Phi_h(\mathcal{U};n,m)A(U_m)^{-\gamma'}\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\qquad \le C + Ch\sum_{l=m}^{n-1}((n-l)h)^{-\alpha'}((l-m+1)h)^{\gamma'-1} \le C,
\end{aligned}
$$

すなわち

$$
\|A(u_0)^{\alpha}\Phi_h(\mathcal{U};n,l+1)A(u_0)^{-\gamma}\|_{\mathcal{L}(X)} \le C \tag{4.36}
$$

が得られる. さらに

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{V}_n)A(U_n)^{-\alpha'} &= A(U_n)^{-\alpha'}\boldsymbol{J}_h(U_n) \\
&\quad + \boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{V}_n)h\mathcal{A}\{\mathcal{I}-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{V}_n)A(U_n)^{-1}\}A(U_n)^{1-\alpha'}\boldsymbol{J}_h(U_n)
\end{aligned}
$$

の評価

$$
\|A(u_0)^{\alpha}\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{V}_n)A(U_n)^{-\alpha'}\|_{\mathcal{L}(X)} \le C
$$

から

$$
\|A(u_0)^{\alpha}\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{V}_n)e\Phi_h(\mathcal{U};n,l+1)A(u_0)^{-\gamma}\|_{\mathcal{L}(X)} \le C \tag{4.37}
$$

を得る. 評価式 (4.37) を用いることによって, (4.34) において $((n-l)h)^{-\alpha}\|e_l\|_X$ を $\|A(u_0)^{\gamma}e_l\|_X$ に置き換えた式, すなわち

$$
\begin{aligned}
\|A(u_0)^{\alpha}\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{V}_n)eE_n\|_{X^s} &\le Ch\sum_{l=0}^{n-1}((n-l)h)^{-\alpha}\|A(u_0)\boldsymbol{d}_l\|_{X^s} \\
&\quad + C\sum_{l=0}^{n-1}\|A(u_0)^{\gamma}e_l\|_X + Ch\sum_{l=0}^{n-1}((n-l)h)^{-\alpha}\|\boldsymbol{D}_l\|_{Z^s}
\end{aligned}
$$

が成り立つ. よって (4.35) と同様に命題 2.10 によって

$$\|\boldsymbol{D}_n\|_{Z^s} \le C \max_{l=0,1,\dots,N-1} \|A(u_0)\boldsymbol{d}_l\|_{X^s} + Ch\sum_{l=0}^{n-1}((n-l)h)^{-\alpha}\|A(u_0)\boldsymbol{d}_l\|_{X^s} + C\sum_{l=0}^{n-1}\|A(u_0)^{\gamma}e_l\|_X$$

を得る. 一方 (4.30) の第 1 式に (4.36) を用いて

$$\|E_n\|_Z \le Ch\sum_{l=0}^{n-1}((n-l)h)^{-\alpha}\|A(u_0)\boldsymbol{d}_l\|_{X^s} + C\sum_{l=0}^{n-1}\|A(u_0)^{\gamma}e_l\|_X + Ch\sum_{l=0}^{n-1}((n-l)h)^{-\alpha}\|\boldsymbol{D}_l\|_{Z^s}$$

であるから結局

$$\|E_n\|_Z \le C \max_{l=0,1,\dots,N-1} \|A(u_0)\boldsymbol{d}_l\|_{X^s} + C\sum_{l=0}^{n-1}\|A(u_0)^{\gamma}e_l\|_X$$

を得る. ふたたび (4.26), (4.27) より

$$\|A(u_0)^{\gamma}e_l\|_X \le Ch^p \int_{t_l}^{t_{l+1}} \|A(u_0)^{\gamma}u^{(p+1)}(t)\|_X dt,$$

$$\|A(u_0)\boldsymbol{d}_l\|_{X^s} \le Ch^{q+1}\|A(u_0)u^{(q+1)}(\cdot)\|_{C([t_l,t_{l+1}];X)},$$

を用いることによって (4.4) が得られる.

4.5 結言.

この章では, 抽象準線形発展方程式の陰的 Runge-Kutta 法による時間離散近似に関して, 近似解の構成および収束性を示した. 近似解の構成は離散発展作用素による近似解の表現公式と, 適当な空間上の不動点定理によって, 収束性はやはり離散発展作用素を用いた近似誤差の表現に対する評価から得られた. 次章で空間離散化を合わせて考えるが, その際に空間刻みに関して何らかの一様性が成立するような状況を与えることで, この章と同様の議論が可能になる. そのような状況を考えることの妥当性は, 第 6 章の応用例によって示されるであろう.

また, この章で示された収束性の結果は Lubich and Ostermann [39] などの結果と比較しても遜色のない物である. さらに, 作用素 $A(u)$, 関数 $F(u)$ の u に関する滑らかさが仮定される場合, 近似解の収束性の評価が改良されるという事実も, すでに明らかになっている [44].

第 5 章

準線形放物型方程式の全離散近似

5.1 緒言.

この章では, 前章までの時間離散近似に関する結果を応用して, 抽象準線形発展方程式に対する全離散近似解の有界性及び収束性に関する結果を示す. 時間離散化は前章までと同様に陰的 Runge-Kutta 法によって, 空間離散化は, 有限要素法型の近似によって与える: このような近似解法は 有限要素-Runge-Kutta 法, あるいはより一般的に Galerkin-Runge-Kutta 法と呼ばれることがある. この章の結果によって, 強い相互作用を持つ反応拡散方程式系の数値解法として, 空間離散化に有限要素法を, 時間離散化に陰的 Runge-Kutta 法を適用して構成した全離散近似解法に対して, 安定性と収束性の保証を数値関数解析的に与えることができる.

5.2 節で全離散近似方程式を与え, 近似作用素などに関する仮定とその下での主結果を述べる. 5.3 節では近似解の有界性を, 4.3 節と同様にして 3 章の線形理論と不動点定理を応用して証明する. 5.4 節では, やはり 4.4 節と同様の手順で, 誤差評価を与える. 特に, 近似作用素のレゾルベント条件と連続性に関して, 空間離散化に関する一様性を仮定することによって, 4.3 節に示された離散発展作用素の評価がすべて, 空間離散化に依存せずに成立することが導かれる. そのために, 近似解に関しても同様に, 空間離散化について一様な評価を得ることができる.

5.2 近似方程式.

この章では Banach 空間 X の上の方程式

$$
(5.1)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A(u)u = F(u), \quad 0 < t \le T, \\ u(0) = u_0, \end{cases}
$$

の Galerkin 型近似による近似方程式に対して, 陰的 Runge-Kutta 法を適用して, 近

似解を求めることを考える. ここで $A(\cdot)$ は, X の中に連続的に埋め込まれている Banach 空間 Z の中の開球 $K=\{u\in Z;\ \|u-u_0\|_Z\le r\}$ で定義され, 各 $u\in K$ について $-A(u)$ は X 上の解析的半群の生成素である. さらに $A(u)$ の定義域 $\mathcal{D}(A(u))$ は $u\in K$ に関して一定とする. F は X に値をとる K 上の関数, $u_0\in K$ は初期値, $u=u(t)$ は未知関数である.

正数 ξ をパラメータとする X の有限次元部分空間の族 $\{X_\xi\}_{\xi>0}$ を $X_\xi\subset Z$ となるようにとり, $P_\xi\colon X\to X_\xi$ を射影とする. $u\in K$ に対して作用素 $A(u)$ の X_ξ での近似を有界作用素 $A_\xi(u)\in\mathcal{L}(X_\xi)$ で与える. また $u\in K$ のとき $F_\xi(u)=P_\xi F(u)$ とする.

4.2 節の ($\mathrm{A_u}$1–2), (Sp), ($\mathrm{F_u}$1), (In) を仮定し, さらに以下の条件を仮定する.

($\mathrm{A}_{\mathrm{u}\xi}$1) $u\in K$ に対して, $A_\xi(u)$ のレゾルベント集合 $\rho(A_\xi(u))$ は, u に関わらず, ある角度 $\widehat{\varphi}\in(0,\pi/2)$ の角領域 $\mathbb{C}\setminus\overline{S_{\widehat{\varphi}}}$ を含む. またレゾルベント $(\lambda-A_\xi(u))^{-1}$ は,

$$\|(\lambda-A_\xi(u))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\xi)}\le\frac{M_A}{|\lambda|+1},\quad \lambda\notin\overline{S_{\widehat{\varphi}}},\ u\in K,$$

を満たす. ここで定数 M_A は u,λ,ξ に依存しない.

($\mathrm{A}_{\mathrm{u}\xi}$2) $A_\xi(\cdot)\colon K\to\mathcal{L}(X_\xi)$ は Lipschitz 条件

$$\|\{A_\xi(u)-A_\xi(v)\}A_\xi(u)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\xi)}\le L_A\|u-v\|_Z,\quad u,v\in K,$$

$$\|A_\xi(u)^{-1}\{A_\xi(u)-A_\xi(v)\}\|_{\mathcal{L}(X_\xi)}\le L_A\|u-v\|_Z,\quad u,v\in K,$$

を満たす.

($\mathrm{A}_{\mathrm{u}\xi}$3) $A_\xi(u)$ の収束性は

$$\|A_\xi(u)^\beta\{A_\xi(u)^{-1}P_\xi-P_\xi A(u)^{-1}\}\|_{\mathcal{L}(X)}\le M'_A Q_\xi^{1-\beta},\quad u\in K,\ 0\le\beta\le1,$$

$$\begin{aligned}\|A_\xi(u)^\beta[\{A_\xi(u)^{-1}P_\xi-P_\xi A(u)^{-1}\}-\{A_\xi(v)^{-1}P_\xi-P_\xi A(v)^{-1}\}]\|_{\mathcal{L}(X)}&\\ \le L'_A Q_\xi^{1-\beta}\|u-v\|_Z,\quad u,v\in K,\ 0\le\beta\le1,&\end{aligned}$$

によって評価される. ただし Q_ξ は ξ にのみ依存する正数.

($\mathrm{S}_\xi 1$) ある指数 $\widehat{\alpha} \in (\alpha, 1)$ があって, 埋め込み $\|\cdot\|_Z \le \widehat{D}\|A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}} \cdot \|_X$ が ξ について一様に成立する.

($\mathrm{S}_\xi 2$) ある数 $\gamma \in (\widehat{\alpha}, 1)$ があって, $A_\xi(u_0)^\gamma P_\xi A(u_0)^{-\gamma}$ は X 上で ξ について一様に有界である.

(In_ξ) ξ が小さいとき $u_{0\xi} = P_\xi u_0 \in K$.

以上の条件の下で, 初期値問題 (5.1) の X_ξ での近似は

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{u}}{dt} + A_\xi(\hat{u})\hat{u} = F_\xi(\hat{u}), & 0 < t \le T, \\ \hat{u}(0) = u_{0\xi} = P_\xi u_0, \end{cases} \tag{5.2}$$

で与えられる. これに陰的 Runge-Kutta 法を適用すると, 漸化式

$$\begin{cases} \widehat{U}_{n+1} = \widehat{U}_n + h\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\{-\boldsymbol{A}_\xi(\widehat{\boldsymbol{V}}_n)\widehat{\boldsymbol{V}}_n + \boldsymbol{F}_\xi(\widehat{\boldsymbol{V}}_n)\}, & n = 0, 1, \dots, N-1, \\ \widehat{\boldsymbol{V}}_n = \boldsymbol{e}\widehat{U}_n + h\mathcal{A}\{-\boldsymbol{A}_\xi(\widehat{\boldsymbol{V}}_n)\widehat{\boldsymbol{V}}_n + \boldsymbol{F}_\xi(\widehat{\boldsymbol{V}}_n)\}, \\ \widehat{U}_0 = u_{0\xi}, \end{cases} \tag{5.3}$$

を得る. ここで, $\widehat{\boldsymbol{V}}_n = [\widehat{V}_{n,1}, \dots, \widehat{V}_{n,s}]^T$, また $\boldsymbol{V} = [V_1, \dots, V_s]^T$ に対して $\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{V}) = \mathrm{diag}[A_\xi(V_1), \dots, A_\xi(V_s)]$, $\boldsymbol{F}_\xi(\boldsymbol{V}) = [F_\xi(V_1), \dots, F_\xi(V_s)]^T$ と定義する.

この近似式 (5.3) によって得られる全離散近似解の存在と ξ, h に関する一様有界性は 4.3 節と同様の手順によって, つまり第 3 章の線形理論と縮小写像の不動点定理を応用することによって証明することができる. また近似解の誤差評価は, 各ステップごとの時間離散化誤差と空間離散化誤差の累積を, 離散発展作用素を用いて評価することによって得られる. 以下に述べる定理 5.1, 5.2 はそれぞれ近似解の有界性, 誤差評価に関する結果である. これらの証明はそれぞれ 5.3, 5.4 節に示す.

定理 5.1. 4.2 節の条件 ($\mathrm{A_u}1$–2), (Sp), ($\mathrm{F_u}1$), (In), および上記の ($\mathrm{A}_{\mathrm{u}\xi}1$–2), ($\mathrm{S}_\xi 1$), ($\mathrm{In}_\xi$) を仮定する. また陰的 Runge-Kutta 法 $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ は, ある $\theta \in (\varphi, \pi/2]$ があって, $A(\theta)$-強安定であるとする. $\widehat{\eta} \in (0, 1-\widehat{\alpha})$ をひとつ固定し, $S \in (0, T]$, $h > 0$, $N = [S/h]$ として, 空間 $\mathcal{X}_{\xi,h}$, 集合 $\mathcal{K}_{\xi,h}$ をそれぞれ

$$\mathcal{X}_{\xi,h} = \mathcal{X}_{\xi,h}(S) = \{\widehat{\boldsymbol{\mathcal{U}}} = [\widehat{U}_0, \dots, \widehat{U}_N, \widehat{\boldsymbol{V}}_0, \dots, \widehat{\boldsymbol{V}}_{N-1}];$$
$$\widehat{U}_n \in X_\xi,\ \widehat{\boldsymbol{V}}_n = [\widehat{V}_{n,1}, \dots, \widehat{V}_{n,s}]^T \in X_\xi^s\} = X_\xi^{N+1} \times (X_\xi^s)^N,$$

$$\mathcal{K}_{\xi,h} = \mathcal{K}_{\xi,h}(S) = \{\widehat{\mathcal{U}} = [\widehat{U}_0, \dots, \widehat{U}_N, \widehat{V}_0, \dots, \widehat{V}_{N-1}] \in \mathcal{X}_{\xi,h};\ \widehat{U}_0 = u_{0\xi},$$
$$\|U_n - U_m\|_Z \le |(n-m)h|^{\widehat{\eta}},\ \|V_n - eU_n\|_{Z^s} \le h^{\widehat{\eta}}\},$$

と定義する. このとき, S, h と ξ を十分小さくすると, (5.3) は $\mathcal{K}_{\xi,h}$ の中で一意な解 $\widehat{\mathcal{U}} = [\widehat{U}_0, \dots, \widehat{U}_N, \widehat{V}_0, \dots, \widehat{V}_{N-1}]$ を持つ. 特に S と h は ξ に無関係に決めることができる.

定理 5.2. 定理 5.1 の仮定に加えて, 条件 ($\mathrm{A}_{u\xi}3$), ($\mathrm{S}_\xi 2$) および陰的 Runge-Kutta 法 $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ は $p\ (\ge 2)$ 次であることを仮定し, q をこのスキームの内部次数とする. (5.1) の解 u が $u \in \mathcal{C}^{\widehat{\eta}}([0,S]; Z) \cap \mathcal{C}^{p+1}([0,S]; X) \cap \mathcal{C}^{q+1}([0,S]; \mathcal{D})$ かつ, ある $\sigma > 0$ について $A(u)u \in \mathcal{C}^{\sigma}([0,S]; X)$ を満たすなら, h が十分小さいとき, 任意の $\rho \in (\widehat{\alpha}, 1]$ に対して誤差 $E_n = \widehat{U}_n - u(t_n)$ は

$$\begin{aligned}(5.4)\quad \|E_n\|_X \le C\Big(&h^{p+1}\int_0^S \|u^{(p+1)}(t)\|_X dt + h^{q+1}\int_0^S \|A(u_0)u^{(q+1)}(t)\|_X dt \\ &+ h^{q+1}\|A(u_0)^\rho u^{(q+1)}(\cdot)\|_{\mathcal{C}([0,S];X)}\Big) \\ &+ CQ_\xi^{1-\widehat{\alpha}}\Big\{\|A(u)u\|_{\mathcal{C}^\sigma([0,S];X)} + \|u\|_{\mathcal{C}^{\widehat{\eta}}([0,S];Z)}\Big\} + \|(1-P_\xi)u(\cdot)\|_{\mathcal{C}([0,S];Z)}\end{aligned}$$

で評価される. さらに $u^{(p+1)} \in L^1(0,S; \mathcal{D}(A(u_0)^\gamma))$ が満足される場合は, 任意の $\beta \in (1-\widehat{\eta}, 1)$ に対して

(5.5)
$$\begin{aligned}\|E_n\|_Z \le C\Big(&h^{p+1}\int_0^S \|A(u_0)^\gamma u^{(p+1)}(t)\|_X dt + h^{q+1}\|A(u_0)u^{(q+1)}(\cdot)\|_{\mathcal{C}([0,S];X)}\Big) \\ &+ CQ_\xi^{1-\beta}\Big\{\|A(u)u\|_{\mathcal{C}^\sigma([0,S];X)} + \|u\|_{\mathcal{C}^{\widehat{\eta}}([0,S];Z)}\Big\} + \|(1-P_\xi)u(\cdot)\|_{\mathcal{C}([0,S];Z)}\end{aligned}$$

が成立する. 特にスキームが $L(\theta)$-安定なら, $\beta = \widehat{\alpha}$ として (5.5) が成立する.

5.3 近似解の存在定理の証明：解の構成と性質.

この節では定理 5.1 の証明を述べるが, 各 X_ξ ごとに 4.3 節と同じ議論を展開することになるので, ここでは証明の概略だけを述べる. また条件 ($\mathrm{A}_{u\xi}1$–2), ($\mathrm{S}_\xi 1$) がすべて ξ に一様であることから, この議論は ξ に依存しないものである.

4.3 節で用いたと同様の空間 $\mathcal{X}_h$ と集合 $\mathcal{Z}_h$ を

$$\mathcal{X}_h=\mathcal{X}_h(S)=\{\mathcal{U}=[U_0,\dots,U_N,\boldsymbol{V}_0,\dots,\boldsymbol{V}_{N-1}];$$
$$U_n\in Z,\ \boldsymbol{V}_n=[V_{n,1},\dots,V_{n,s}]^T\in Z^s\}=Z^{N+1}\times(Z^s)^N,$$

$$\mathcal{Z}_h=\mathcal{Z}_h(S)=\{\mathcal{U}=[U_0,\dots,U_N,\boldsymbol{V}_0,\dots,\boldsymbol{V}_{N-1}]\in\mathcal{X}_h;\ U_n\in K,\ \boldsymbol{V}_n\in K^s,$$
$$\|U_n-U_m\|_Z\le|(n-m)h|^{\widehat{\eta}},\ \|\boldsymbol{V}_n-eU_n\|_{Z^s}\le h^{\widehat{\eta}}\},$$

によって定義する. このとき $\mathcal{X}_{\xi,h}$, $\mathcal{Z}_h\subset\mathcal{X}_h$, また $\mathcal{K}_{\xi,h}\subset\mathcal{X}_{\xi,h}\cap\mathcal{Z}_h$ である.

$\mathcal{W}=[W_0,\dots,W_N,\boldsymbol{Y}_0,\dots,\boldsymbol{Y}_{N-1}]\in\mathcal{Z}_h$ として, $\widehat{\mathcal{U}}=[\widehat{U}_0,\dots,\widehat{U}_N,\widehat{\boldsymbol{V}}_0,\dots,\widehat{\boldsymbol{V}}_{N-1}]$ に関する次の漸化式を考える:

$$(5.6)\qquad\begin{cases}\widehat{U}_{n+1}=\widehat{U}_n+he^T\mathcal{B}\{-\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{Y}_n)\widehat{\boldsymbol{V}}_n+\boldsymbol{F}_\xi(\boldsymbol{Y}_n)\},\quad n=0,1,\dots,N-1,\\ \widehat{\boldsymbol{V}}_n=e\widehat{U}_n+h\mathcal{A}\{-\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{Y}_n)\widehat{\boldsymbol{V}}_n+\boldsymbol{F}_\xi(\boldsymbol{Y}_n)\},\\ \widehat{U}_0=u_{0\xi}.\end{cases}$$

これは $\widehat{\mathcal{U}}$ に関して線形である. 補題 4.3 と同様に作用素 $\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{Y})=(\mathcal{I}+h\mathcal{A}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{Y}))^{-1}$ を構成することができるので, (5.6) において第 2 式を解いて第 1 式に代入すると

$$(5.7)\qquad\begin{cases}\widehat{U}_{n+1}=\{1-he^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{Y}_n)\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{Y}_n)e\}\widehat{U}_n+he^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{Y}_n)\mathcal{A}\boldsymbol{F}_\xi(\boldsymbol{Y}_n),\\ \widehat{\boldsymbol{V}}_n=\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{Y}_n)\{e\widehat{U}_n+h\mathcal{A}\boldsymbol{F}_\xi(\boldsymbol{Y}_n)\},\end{cases}$$

となる. 条件 ($\mathrm{A_{u\xi}}$1–2) と $\mathcal{W}\in\mathcal{Z}_h$ を考慮すると, 作用素族 $\{A_\xi(W_0),\dots,A_\xi(W_N),\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{Y}_0),\dots,\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{Y}_{N-1})\}$ は離散発展作用素 $\Phi_{\xi,h}(\mathcal{W};\cdot,\cdot)$:

$$(5.8)\qquad\Phi_{\xi,h}(\mathcal{W};n,m)=\begin{cases}1,\qquad n=m,\\ \{1-he^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{Y}_{n-1})\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{Y}_{n-1})e\}\\ \qquad\cdots\{1-he^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{Y}_m)\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{Y}_m)e\},\quad n>m,\end{cases}$$

を生成することが示される. よって (5.6) の解 $\widehat{\mathcal{U}}$ は

(5.9)
$$\begin{cases}\widehat{U}_n=\Phi_{\xi,h}(\mathcal{W};n,0)u_{0\xi}+h\displaystyle\sum_{l=0}^{n-1}\Phi_{\xi,h}(\mathcal{W};n,l+1)e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{Y}_l)\mathcal{A}\boldsymbol{F}_\xi(\boldsymbol{Y}_l),\\ \widehat{\boldsymbol{V}}_n=\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{Y}_n)\{e\widehat{U}_n+h\mathcal{A}\boldsymbol{F}_\xi(\boldsymbol{Y}_n)\},\end{cases}$$

と表される.

式 (5.9) によって定義される $\mathcal{Z}_h$ から $\mathcal{X}_{\xi,h}$ への写像 $\mathcal{T}_\xi\colon \mathcal{W} \mapsto \widehat{\mathcal{U}}$ の不動点 $\widehat{\mathcal{U}}$ が (5.3) の解であることは容易に分かるから, $\mathcal{T}_\xi$ が一意な不動点を持つことを示せば, 定理 5.1 が証明されたことになる. ところが, 4.3 節と同様に評価を行えば, S と h が十分小さいとき $\mathcal{T}_\xi$ が $\mathcal{Z}_h$ 上の縮小写像であることが示される. よって $\mathcal{T}_\xi$ は $\mathcal{Z}_h$ の中に一意な不動点 $\widehat{\mathcal{U}}$ を持つ. しかも (5.6) 第 3 式より必然的に $\widehat{\mathcal{U}}$ は $\mathcal{K}_{\xi,h} \subset \mathcal{Z}_h$ の元となる.

また 3.4 節あるいは命題 4.4 の証明で触れたが, 離散発展作用素に関する評価はすべて, その生成素のレゾルベント条件と Hölder 連続性のみに依存して導かれる. つまり第 4 章で示されたと同様の $\Phi_{\xi,h}(\mathcal{W};\cdot,\cdot)$ に関するさまざまな評価はすべて ξ について一様な評価となる. この事実と埋め込み $X_\xi \subset Z$ の ξ に関する一様性を考慮に入れると, 上述の S, h を ξ に無関係に決定できることが保証される.

5.4 近似解の収束性定理の証明：解の誤差評価.

ここでは定理 5.2 を証明する. はじめに u を (5.1) の真の解とし, 4.4 節と同様

$$\left\{\begin{array}{l} e_n = u(t_{n+1}) - u(t_n) - h\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{\tau}_n), \\ \boldsymbol{d}_n = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n) - \boldsymbol{e}^T u(t_n) - h\mathcal{A}\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{\tau}_n), \end{array}\right. \tag{5.10}$$

という量を定義する. (4.26), (4.27) に示したように,

$$e_n = \int_0^h \left(\frac{(h-t)^p}{p!} u^{(p+1)}(t_n+t) - \frac{h(h-t)^{p-1}}{(p-1)!} \boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{C}^p \boldsymbol{u}^{(p+1)}((t_n\mathcal{I}+t\mathcal{C})\boldsymbol{e}) \right) dt, \tag{5.11}$$

$$\boldsymbol{d}_n = \int_0^h \left(\frac{(h-t)^q}{q!} \mathcal{C}^{q+1} - \frac{h(h-t)^{q-1}}{(q-1)!} \mathcal{A}\mathcal{C}^q \right) \boldsymbol{u}^{(q+1)}((t_n\mathcal{I}+t\mathcal{C})\boldsymbol{e}) dt, \tag{5.12}$$

が成立する. (5.1) を (5.10) に代入すると

$$\left\{\begin{array}{l} u(t_{n+1}) = u(t_n) + h\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\{-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n))\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n))\} + e_n, \\ \hfill n = 0, 1, \ldots, N-1, \\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n) = \boldsymbol{e}u(t_n) + h\mathcal{A}\{-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n))\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n))\} + \boldsymbol{d}_n, \\ u(t_0) = u_0, \end{array}\right. \tag{5.13}$$

が得られる. これと (5.3) の差を考えることにより, 誤差 $E_n = \widehat{U}_n - u(t_n)$, $\boldsymbol{D}_n =$

$\widehat{\boldsymbol{V}}_n - \boldsymbol{u}(\tau_n)$ は

$$(5.14)\quad \begin{cases} E_{n+1} = E_n - h\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\{\boldsymbol{A}_\xi(\widehat{\boldsymbol{V}}_n)\widehat{\boldsymbol{V}}_n - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}(\tau_n))\boldsymbol{u}(\tau_n)\} \\ \qquad\qquad + h\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\{\boldsymbol{F}_\xi(\widehat{\boldsymbol{V}}_n) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}(\tau_n))\} - e_n, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1, \\ \boldsymbol{D}_n = \boldsymbol{e}E_n - h\mathcal{A}\{\boldsymbol{A}_\xi(\widehat{\boldsymbol{V}}_n)\widehat{\boldsymbol{V}}_n - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}(\tau_n))\boldsymbol{u}(\tau_n)\} \\ \qquad\qquad + h\mathcal{A}\{\boldsymbol{F}_\xi(\widehat{\boldsymbol{V}}_n) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}(\tau_n))\} - \boldsymbol{d}_n, \\ E_0 = u_{0\xi} - u_0 = (P_\xi - 1)u_0, \end{cases}$$

から得られる. しかしこの式は X の元と X_ξ の元とが混在しているため直接に評価を得ることが困難である. そこで新たに $\widetilde{\mathcal{U}} = [\widetilde{U}_0, \ldots, \widetilde{U}_N, \widetilde{\boldsymbol{V}}_0, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{V}}_{N-1}] \in \mathcal{K}_{\xi,h}$ を

$$(5.15)\quad \begin{cases} \widetilde{U}_{n+1} = \widetilde{U}_n + h\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\{-\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_n))\widetilde{\boldsymbol{V}}_n + \boldsymbol{F}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_n))\}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1, \\ \widetilde{\boldsymbol{V}}_n = \boldsymbol{e}\widetilde{U}_n + h\mathcal{A}\{-\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_n))\widetilde{\boldsymbol{V}}_n + \boldsymbol{F}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_n))\}, \\ \widetilde{U}_0 = u_{0\xi}. \end{cases}$$

の解として導入する. 仮定より $u \in \mathcal{C}^{\widehat{\eta}}([0,S];Z)$ すなわち $\mathcal{U} = [u(t_0), \ldots, u(t_N), \boldsymbol{u}(\tau_0), \ldots, \boldsymbol{u}(\tau_{N-1})] \in \mathcal{Z}_h$ であるから, 離散発展作用素 $\Phi_{\xi,h}(\mathcal{U};\cdot,\cdot)$ を構成することができ, これによって $\widetilde{\mathcal{U}}$ の存在は保証される. この $\widetilde{\mathcal{U}}$ を用いて E_n, $\boldsymbol{D}_n$ を

$$E_n = (\widehat{U}_n - \widetilde{U}_n) + (\widetilde{U}_n - P_\xi u(t_n)) + (P_\xi - 1)u(t_n) \equiv E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + E_n^{(3)},$$

$$\boldsymbol{D}_n = (\widehat{\boldsymbol{V}}_n - \widetilde{\boldsymbol{V}}_n) + (\widetilde{\boldsymbol{V}}_n - P_\xi \boldsymbol{u}(\tau_n)) + (P_\xi - 1)\boldsymbol{u}(\tau_n) \equiv \boldsymbol{D}_n^{(1)} + \boldsymbol{D}_n^{(2)} + \boldsymbol{D}_n^{(3)},$$

と分解すると, $\{E_n^{(1)}, \boldsymbol{D}_n^{(1)}\}$, $\{E_n^{(2)}, \boldsymbol{D}_n^{(2)}\}$ はそれぞれ

$$(5.16)\quad \begin{cases} E_{n+1}^{(1)} = E_n^{(1)} - h\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_n))\boldsymbol{D}_n^{(1)} + h\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\boldsymbol{G}_\xi(\widehat{\boldsymbol{V}}_n, \boldsymbol{u}(\tau_n)), \\ \boldsymbol{D}_n^{(1)} = \boldsymbol{e}E_n^{(1)} - h\mathcal{A}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_n))\boldsymbol{D}_n^{(1)} + h\mathcal{A}\boldsymbol{G}_\xi(\widehat{\boldsymbol{V}}_n, \boldsymbol{u}(\tau_n)), \\ E_0^{(1)} = 0, \end{cases}$$

$$(5.17)\quad \begin{cases} E_{n+1}^{(2)} = E_n^{(2)} - h\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_n))\boldsymbol{D}_n^{(2)} + h\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\boldsymbol{H}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_n)) - P_\xi e_n, \\ \boldsymbol{D}_n^{(2)} = \boldsymbol{e}E_n^{(2)} - h\mathcal{A}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_n))\boldsymbol{D}_n^{(2)} + h\mathcal{A}\boldsymbol{H}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_n)) - P_\xi \boldsymbol{d}_n, \\ E_0^{(2)} = 0, \end{cases}$$

によって与えられる. ここで $\boldsymbol{G}_\xi(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{v}) = -\{\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{V}) - \boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{v})\}\boldsymbol{V} + \{\boldsymbol{F}_\xi(\boldsymbol{V}) - \boldsymbol{F}_\xi(\boldsymbol{v})\}$, $\boldsymbol{H}_\xi(\boldsymbol{v}) = -\{\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{v})P_\xi - P_\xi\boldsymbol{A}(\boldsymbol{v})\}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{v})\{\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{v})^{-1}P_\xi - P_\xi\boldsymbol{A}(\boldsymbol{v})^{-1}\}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$ とおいた. 離散発展作用素 $\Phi_{\xi,h}(\mathcal{U};\cdot,\cdot)$ を用いると (5.16), (5.17) より

$$(5.18)\quad \begin{cases} E_n^{(1)} = h\displaystyle\sum_{l=0}^{n-1} \Phi_{\xi,h}(\mathcal{U}; n, l+1)\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_l))\mathcal{A}\boldsymbol{G}_\xi(\widehat{\boldsymbol{V}}_l, \boldsymbol{u}(\tau_l)), \\ \boldsymbol{D}_n^{(1)} = \boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_n))\boldsymbol{e}E_n^{(1)} + h\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_n))\mathcal{A}\boldsymbol{G}_\xi(\widehat{\boldsymbol{V}}_n, \boldsymbol{u}(\tau_n)), \end{cases}$$

$$
(5.19)\quad \begin{cases} E_n^{(2)} = \displaystyle\sum_{l=0}^{n-1} \varPhi_{\xi,h}(\mathcal{U};n,l+1)\{he^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_l))\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_l))P_\xi \boldsymbol{d}_l - P_\xi e_l\} \\ \qquad\quad + h\displaystyle\sum_{l=0}^{n-1} \varPhi_{\xi,h}(\mathcal{U};n,l+1)e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_l))\mathcal{A}\boldsymbol{H}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_l)), \\ \boldsymbol{D}_n^{(2)} = \boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_n))\{\boldsymbol{e}E_n^{(2)} - P_\xi \boldsymbol{d}_n\} + h\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_n))\mathcal{A}\boldsymbol{H}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_n)), \end{cases}
$$

が得られる.

$\|E_n\|_X$ に関する評価 (5.4) を求める.

$$
\|\boldsymbol{G}_\xi(\widehat{\boldsymbol{V}}_l, \boldsymbol{u}(\tau_l))\|_{X^s} \le C\|\boldsymbol{D}_l\|_{Z^s}
$$

に注意すると (5.18) より

$$
(5.20)\qquad \|E_n^{(1)}\|_X \le Ch\sum_{l=0}^{n-1}\|\boldsymbol{D}_l\|_{Z^s},
$$

$$
(5.21)\qquad \|\boldsymbol{D}_n^{(1)}\|_{Z^s} \le \widehat{D}\|A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_n))\boldsymbol{e}E_n^{(1)}\|_{X^s} + Ch^{1-\widehat{\alpha}}\|\boldsymbol{D}_n\|_{Z^s},
$$

$$
(5.22)\qquad \|A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_n))\boldsymbol{e}E_n^{(1)}\|_{X^s} \le Ch\sum_{l=0}^{n-1}((n-l)h)^{-\widehat{\alpha}}\|\boldsymbol{D}_l\|_{Z^s},
$$

が導かれる. 一方で (5.19) は

$$
\begin{aligned}
E_n^{(2)} = &\sum_{l=0}^{n-1}\varPhi_{\xi,h}(\mathcal{U};n,l+1)\{he^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_l))\mathcal{A}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_l))P_\xi\boldsymbol{d}_l - P_\xi e_l\} \\
&+ he^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_{n-1}))\mathcal{A}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_{n-1})) \\
&\quad \times\{\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_{n-1}))^{-1}P_\xi - P_\xi\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}(\tau_{n-1}))^{-1}\} \\
&\quad\quad \times\{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}(\tau_{n-1}))\boldsymbol{u}(\tau_{n-1}) - \boldsymbol{e}A(u(t_n))u(t_n)\} \\
&+ he^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_{n-1}))\mathcal{A}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_{n-1})) \\
&\quad \times[\{\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_{n-1}))^{-1}P_\xi - P_\xi\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}(\tau_{n-1}))^{-1}\} \\
&\quad\quad - \{A_\xi(u(t_n))^{-1}P_\xi - P_\xi A(u(t_n))^{-1}\}]\boldsymbol{e}A(u(t_n))u(t_n) \\
&+ h\sum_{l=0}^{n-2}\varPhi_{\xi,h}(\mathcal{U};n,l+1)e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_l))\mathcal{A}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_l))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times \{\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_l))^{-1}P_\xi - P_\xi \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}(\tau_l))^{-1}\}\\
&\quad \times \{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}(\tau_l))\boldsymbol{u}(\tau_l) - \boldsymbol{e}A(u(t_n))u(t_n)\}\\
&+ h\sum_{l=0}^{n-2} \Phi_{\xi,h}(\mathcal{U};n,l+1)\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_l))\mathcal{A}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_l))\\
&\times [\{\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_l))^{-1}P_\xi - P_\xi \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}(\tau_l))^{-1}\}\\
&\quad - \{A_\xi(u(t_n))^{-1}P_\xi - P_\xi A(u(t_n))^{-1}\}]\boldsymbol{e}A(u(t_n))u(t_n)\\
&+ \{1-\Phi_{\xi,h}(\mathcal{U};n,0)\}\{A_\xi(u(t_n))^{-1}P_\xi - P_\xi A(u(t_n))^{-1}\}A(u(t_n))u(t_n),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{D}_n^{(2)} &= \boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_n))\{\boldsymbol{e}E_n^{(2)} - P_\xi \boldsymbol{d}_n\}\\
&+ h\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_n))\mathcal{A}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_n))\{\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_n))^{-1}P_\xi - P_\xi \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}(\tau_n))^{-1}\}\\
&\quad \times \{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}(\tau_n))\boldsymbol{u}(\tau_n) - \boldsymbol{e}A(u(t_n))u(t_n)\}\\
&+ h\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_n))\mathcal{A}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_n))[\{\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_n))^{-1}P_\xi - P_\xi \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}(\tau_n))^{-1}\}\\
&\quad - \{A_\xi(u(t_n))^{-1}P_\xi - P_\xi A(u(t_n))^{-1}\}]\boldsymbol{e}A(u(t_n))u(t_n)\\
&+ h\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_n))\mathcal{A}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_n))\boldsymbol{e}\{A_\xi(u(t_n))^{-1}P_\xi - P_\xi A(u(t_n))^{-1}\}\\
&\quad \times A(u(t_n))u(t_n),
\end{aligned}
$$

と書き直すことができる. 後に示す 補題 5.3, 命題 5.4, 5.5 から得られる評価

$$
\|\Phi_{\xi,h}(\mathcal{U};n,l+1)\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_l))\mathcal{A}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_l))\|_{\mathcal{L}(X_\xi^s,X_\xi)} \le C((n-l)h)^{-1},
$$

$$
\begin{aligned}
&\|A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_n))\boldsymbol{e}\Phi_{\xi,h}(\mathcal{U};n,l+1)\\
&\qquad \times \boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_l))(\mathcal{A}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_l)))^{1-\widehat{\alpha}}\|_{\mathcal{L}(X_\xi^s)}\\
&\quad \le \|A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_n))\boldsymbol{e}\Phi_{\xi,h}(\mathcal{U};n,\lfloor(n+l+1)/2\rfloor)\|_{\mathcal{L}(X_\xi^s)}\\
&\qquad \times \|\Phi_{\xi,h}(\mathcal{U};\lfloor(n+l+1)/2\rfloor,l+1)\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\\
&\qquad\qquad \times \boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_l))(\mathcal{A}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_l)))^{1-\widehat{\alpha}}\|_{\mathcal{L}(X_\xi^s)} \le C((n-l)h)^{-1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\|A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_n))\boldsymbol{e}\Phi_{\xi,h}(\mathcal{U};n,0)A_\xi(u_0)^{-\widehat{\alpha}}\|_{\mathcal{L}(X_\xi)}\\
&\qquad \le \|A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_n))A_\xi(u_0)^{-\widehat{\alpha}}\boldsymbol{e}\|_{\mathcal{L}(X_\xi^s)}\\
&\qquad\qquad \times \|A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}\Phi_{\xi,h}(\mathcal{U};n,0)A_\xi(u_0)^{-\widehat{\alpha}}\|_{\mathcal{L}(X_\xi)} \le C,
\end{aligned}
$$

$$\|A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}} h\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n))\mathcal{A}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n))A_\xi(u_0)^{-\widehat{\alpha}}\|_{\mathcal{L}(X^s)}$$
$$= \|\mathcal{I} - A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}} \boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n))A_\xi(u_0)^{-\widehat{\alpha}}\|_{\mathcal{L}(X^s)} \le C,$$

を用いると

$$\|E_n^{(2)}\|_X \le C\sum_{l=0}^{n-1}\{h\|A(u_0)\boldsymbol{d}_l\|_{X^s} + \|e_l\|_X\} + CQ_\xi\{\|A(u)u\|_{C^\sigma} + \|u\|_{C^{\widehat{\eta}}([0,S];Z)}\}, \tag{5.23}$$

$$\|\boldsymbol{D}_n^{(2)}\|_{Z^s} \le \widehat{D}\|A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n))\boldsymbol{e}E_n^{(2)}\|_{X^s} + C\|A(u_0)^\rho \boldsymbol{d}_n\|_{X^s} + CQ_\xi^{1-\widehat{\alpha}}\{\|A(u)u\|_{C^\sigma} + \|u\|_{C^{\widehat{\eta}}([0,S];Z)}\}, \tag{5.24}$$

$$\|A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n))\boldsymbol{e}E_n^{(2)}\|_{X^s} \le C\sum_{l=0}^{n-1}((n-l)h)^{-\widehat{\alpha}}\{h\|A(u_0)\boldsymbol{d}_l\|_{X^s} + \|e_l\|_X\} + CQ_\xi^{1-\widehat{\alpha}}\{\|A(u)u\|_{C^\sigma} + \|u\|_{C^{\widehat{\eta}}([0,S];Z)}\}, \tag{5.25}$$

を得る. (5.21), (5.24) と $\boldsymbol{D}_n^{(3)} = (P_\xi - 1)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n)$ を合わせると

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{D}_n\|_{Z^s} &\le Ch^{1-\widehat{\alpha}}\|\boldsymbol{D}_n\|_{Z^s} + \widehat{D}\|A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n))\boldsymbol{e}E_n^{(1)}\|_{X^s}\\ &+ \widehat{D}\|A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n))\boldsymbol{e}E_n^{(2)}\|_{X^s} + C\|A(u_0)^\rho \boldsymbol{d}_n\|_{X^s}\\ &+ CQ_\xi^{1-\widehat{\alpha}}\{\|A(u)u\|_{C^\sigma([0,S];X)} + \|u\|_{C^{\widehat{\eta}}([0,S];Z)}\} + \|(1-P_\xi)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n)\|_{Z^s}\end{aligned}$$

となるが, h が十分小なら,

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{D}_n\|_{Z^s} &\le C\|A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n))\boldsymbol{e}E_n^{(1)}\|_{X^s}\\ &+ C\|A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n))\boldsymbol{e}E_n^{(2)}\|_{X^s} + C\|A(u_0)^\rho \boldsymbol{d}_n\|_{X^s}\\ &+ CQ_\xi^{1-\widehat{\alpha}}\{\|A(u)u\|_{C^\sigma([0,S];X)} + \|u\|_{C^{\widehat{\eta}}([0,S];Z)}\} + \|(1-P_\xi)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n)\|_{Z^s}\end{aligned}$$

が成立する. これに (5.22), (5.25) を代入して得られる Volterra 型離散積分不等式

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{D}_n\|_{Z^s} &\le Ch\sum_{l=0}^{n-1}((n-l)h)^{-\widehat{\alpha}}\|\boldsymbol{D}_l\|_{Z^s}\\ &+ C\sum_{l=0}^{n-1}((n-l)h)^{-\widehat{\alpha}}\{h\|A(u_0)\boldsymbol{d}_l\|_{X^s} + \|e_l\|_X\} + C\|A(u_0)^\rho \boldsymbol{d}_n\|_{X^s}\\ &+ CQ_\xi^{1-\widehat{\alpha}}\{\|A(u)u\|_{C^\sigma([0,S];X)} + \|u\|_{C^{\widehat{\eta}}([0,S];Z)}\} + \|(1-P_\xi)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n)\|_{Z^s}\end{aligned}$$

を命題 2.10 を用いて解くと

(5.26)

$$\|\boldsymbol{D}_n\|_{Z^s} \le C\sum_{l=0}^{n-1}((n-l)h)^{-\widehat{\alpha}}\{h\|A(u_0)\boldsymbol{d}_l\|_{X^s}+\|e_l\|_X\}+C\max_{l=0,1,\dots,N-1}\|A(u_0)^\rho \boldsymbol{d}_l\|_{X^s}$$
$$+ CQ_\xi^{1-\widehat{\alpha}}\{\|A(u)u\|_{C^\sigma([0,S];X)}+\|u\|_{C^{\widehat{\eta}}([0,S];Z)}\}+\|(1-P_\xi)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n)\|_{Z^s}$$

を得る. (5.20), (5.23) と $E_n^{(3)}=(P_\xi-1)u(t_n)$ から得られる

$$\|E_n\|_X \le Ch\sum_{l=0}^{n-1}\|\boldsymbol{D}_l\|_{Z^s}+C\sum_{l=0}^{n-1}\{h\|A(u_0)\boldsymbol{d}_l\|_{X^s}+\|e_l\|_X\}$$
$$+CQ_\xi\{\|A(u)u\|_{C^\sigma([0,S];X)}+\|u\|_{C^{\widehat{\eta}}([0,S];Z)}\}+\|(1-P_\xi)u(t_n)\|_X$$

に (5.26) を代入すると (5.4) が得られる.

次に $\|E_n\|_Z$ の評価 (5.5) を求める. $u^{(p+1)}\in L^1(0,S;\mathcal{D}(A(u_0)^\gamma))$ であるから, (5.26) において $((n-l)h)^{-\widehat{\alpha}}\|e_l\|_X$ を $\|A(u_0)^\gamma e_l\|_X$ に置き換える, すなわち

(5.27)

$$\|\boldsymbol{D}_n\|_{Z^s} \le C\sum_{l=0}^{n-1}\{((n-l)h)^{-\widehat{\alpha}}h\|A(u_0)\boldsymbol{d}_l\|_{X^s}+\|A(u_0)^\gamma e_l\|_X\}+C\|A(u_0)^\rho \boldsymbol{d}_n\|_{X^s}$$
$$+CQ_\xi^{1-\widehat{\alpha}}\{\|A(u)u\|_{C^\sigma([0,S];X)}+\|u\|_{C^{\widehat{\eta}}([0,S];Z)}\}+\|(1-P_\xi)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n)\|_{Z^s}$$
$$\le C\sum_{l=0}^{n-1}\|A(u_0)^\gamma e_l\|_X+C\max_{l=0,1,\dots,N-1}\|A(u_0)\boldsymbol{d}_n\|_{X^s}$$
$$+CQ_\xi^{1-\widehat{\alpha}}\{\|A(u)u\|_{C^\sigma([0,S];X)}+\|u\|_{C^{\widehat{\eta}}([0,S];Z)}\}+\|(1-P_\xi)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n)\|_{Z^s}$$

を得ることができる. 一方, 後述の命題 5.4, 5.7 を用いると

$$\|E_n\|_Z \le \widehat{D}\|A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}E_n^{(1)}\|_Z+\widehat{D}\|A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}E_n^{(2)}\|_Z+\|E_n^{(3)}\|_Z$$
$$\le Ch\sum_{l=0}^{n-1}((n-l)h)^{-\widehat{\alpha}}\|\boldsymbol{D}_l\|_{Z^s}$$
$$+C\sum_{l=0}^{n-1}\{((n-l)h)^{-\widehat{\alpha}}h\|A(u_0)\boldsymbol{d}_l\|_{X^s}+\|A(u_0)^\gamma e_l\|_X\}$$
$$+CQ_\xi^{1-\beta}\{\|A(u)u\|_{C^\sigma([0,S];X)}+\|u\|_{C^{\widehat{\eta}}([0,S];Z)}\}+\|(1-P_\xi)u(t_n)\|_Z$$

が得られる. これに (5.27) を代入して (5.5) が導かれる.

ここでさらにスキームが $L(\theta)$-安定のとき, $R(\infty)=1-\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{e}=0$ だから

$$1-h\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_l))\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_l))\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_l))\boldsymbol{e}$$

であり,

$$\begin{aligned}
&\|A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}\varPhi_{\xi,h}(\mathcal{U};n,l+1)\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_l))(\mathcal{A}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_l)))^{1-\widehat{\alpha}}\|_{\mathcal{L}(X_\xi^s)}\\
&\qquad\le\|\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\cdot A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_n))\boldsymbol{e}\varPhi_{\xi,h}(\mathcal{U};n-1,\lfloor(n+l)/2\rfloor)\|_{\mathcal{L}(X_\xi^s)}\\
&\qquad\times\|\varPhi_{\xi,h}(\mathcal{U};\lfloor(n+l)/2\rfloor,l+1)\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_l))(\mathcal{A}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_l)))^{1-\widehat{\alpha}}\|_{\mathcal{L}(X_\xi^s)}\\
&\qquad\qquad\le C((n-l)h)^{-1},\quad 0\le l<n-1,
\end{aligned}$$

が示される. よって (5.5) において $\beta=\widehat{\alpha}$ とした式が成立する.

補題 5.3.

$$\|A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_n))A_\xi(u_0)^{-\widehat{\alpha}}\|_{\mathcal{L}(X_\xi^s)}\le C,\quad 0\le n<N. \tag{5.28}$$

証明. 等式

$$\begin{aligned}
A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_n))A_\xi(u_0)^{-\widehat{\alpha}}&=\boldsymbol{J}_{\xi,h}(u_0)\\
&+hA_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_n))\mathcal{A}\{\mathcal{I}-\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_n))A_\xi(u_0)^{-1}\}A_\xi(u_0)^{1-\widehat{\alpha}}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(u_0)
\end{aligned}$$

を評価することで得られる. □

命題 5.4.

$$\|A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}\varPhi_{\xi,h}(\mathcal{U};n,0)A_\xi(u_0)^{-\widehat{\alpha}}\|_{\mathcal{L}(X_\xi)}\le C,\quad 0\le n\le N. \tag{5.29}$$

証明. これも (3.31) と同様の等式

$$\begin{aligned}
A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}\varPhi_{\xi,h}(\mathcal{U};n,0)A_\xi(u_0)^{-\widehat{\alpha}}&=R(-hA_\xi(u_0))^n\\
&+h\sum_{l=0}^{n-1}A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}\varPhi_{\xi,h}(\mathcal{U};n,l+1)\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_l))\mathcal{A}\\
&\quad\times\{\mathcal{I}-\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_l))A_\xi(u_0)^{-1}\}A_\xi(u_0)^{1-\widehat{\alpha}}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(u_0)\boldsymbol{e}R(-hA_\xi(u_0))^l
\end{aligned}$$

の評価から

$$\|A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}\varPhi_{\xi,h}(\mathcal{U};n,0)A_\xi(u_0)^{-\widehat{\alpha}}\|_{\mathcal{L}(X_\xi)}$$
$$\le C + Ch\sum_{l=0}^{n-1}((n-l)h)^{-\alpha}((l+1)h)^{\widehat{\eta}}((l+1)h)^{\widehat{\alpha}-1} \le C$$

によって導かれる. □

命題 5.5.

(5.30) $$\|\varPhi_{\xi,h}(\mathcal{U};n,m+1)e^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m)))^\rho \boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m))\|_{\mathcal{L}(X_\xi^s,X_\xi)}$$
$$\le C((n-m)h)^{-\rho}, \quad 0\le\rho\le 1, 0\le m\le n-1.$$

証明. $\rho=0$ の場合はすでに証明済み. $\rho=1$ の場合を考える. 命題 3.20 の証明と同様に, $\varXi_{\xi,h}(\boldsymbol{v}) = 1 - he^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{v})\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{e}$ として, 次の差分等式を得る.

$$\varPhi_{\xi,h}(\mathcal{U};n,m+1) - \varXi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m))^{n-m-1}$$
$$= h\sum_{l=m+1}^{n-1}\varPhi_{\xi,h}(\mathcal{U};n,l+1)e^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_l))\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_l))$$
$$\times\{\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_l))^{-1}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m)) - \mathcal{I}\}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m))\boldsymbol{e}\varXi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m))^{l-m-1}.$$

これより

$$\boldsymbol{\varPsi}_{\xi,h}(n,m) = \{\varPhi_{\xi,h}(\mathcal{U};n,m+1) - \varXi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m))^{n-m-1}\}$$
$$\times\, \boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m))\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m))$$

に関して次の等式が成立する.

$$\boldsymbol{\varPsi}_{\xi,h}(n,m) = \boldsymbol{Q}_{\xi,h}(n,m) + h\sum_{l=m+1}^{n-1}\boldsymbol{\varPsi}_{\xi,h}(n,l+1)\{\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_l))^{-1}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m)) - \mathcal{I}\}$$
$$\times\, \boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m))\boldsymbol{e}\varXi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m))^{l-m-1}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m))\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m)).$$

ここで

$$\boldsymbol{Q}_{\xi,h}(n,m) = h\sum_{l=m+1}^{n-1}\varXi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_l))^{n-l-1}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_l))\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_l))$$
$$\times\{\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_l))^{-1}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m)) - \mathcal{I}\}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m))\boldsymbol{e}$$
$$\times\, \varXi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m))^{l-m-1}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m))\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m)).$$

命題 3.11 の証明に現れた $Q_h(n,m)$ と同様に考えると, $k=[(n+m+1)/2]$ として, $\boldsymbol{Q}_{\xi,h}(n,m)$ は次のように書き換えることができる:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{Q}_{\xi,h}(n,m)\\
&= h\sum_{l=m+1}^{k-1} \Xi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_l))^{n-l-1}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_l))\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_l))\\
&\quad\times\{\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_l))^{-1}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_m))-\mathcal{I}\}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_m))\boldsymbol{e}\\
&\quad\times\Xi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_m))^{l-m-1}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_m))\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_m))\\
&+h\sum_{l=k}^{n-1}\{\Xi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_l))^{n-l-1}-\Xi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_{n-1}))^{n-l-1}\}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_l))\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_l))\\
&\quad\times\{\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_l))^{-1}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_m))-\mathcal{I}\}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_m))\boldsymbol{e}\\
&\quad\times\Xi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_m))^{l-m-1}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_m))\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_m))\\
&+h\sum_{l=k}^{n-1}\Xi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_{n-1}))^{n-l-1}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_{n-1}))\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_{n-1}))\\
&\quad\times\{\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_{n-1}))^{-1}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_l))-\mathcal{I}\}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_l))\{\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_l))^{-1}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_m))-\mathcal{I}\}\\
&\quad\times\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_m))\boldsymbol{e}\Xi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_m))^{l-m-1}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_m))\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_m))\\
&+h\sum_{l=k}^{n-1}\Xi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_{n-1}))^{n-l-1}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_{n-1}))\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_{n-1}))\\
&\quad\times\{\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_l))^{-1}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_{n-1}))-\mathcal{I}\}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_{n-1}))^{-1}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_m))\\
&\quad\times\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_m))\boldsymbol{e}\Xi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_m))^{l-m-1}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_m))\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_m))\\
&+\{\Xi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_m))^{n-k}-\Xi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_{n-1}))^{n-k}\}\\
&\quad\times\Xi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_m))^{k-m-1}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_m))\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_m)).
\end{aligned}
$$

ここで次の補題を示す.

補題 5.6. 任意の $0<\varepsilon<\widehat{\eta}$ に対して,

(5.31)

$$
\|\Xi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_m))^k-\Xi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_n))^k\|_{\mathcal{L}(X)}\le C_\varepsilon((n-m)h)^{\widehat{\eta}-\varepsilon},\quad 0\le m\le n<N,\ k\ge 0,
$$

(5.32)

$$
\begin{aligned}
&\|\{\Xi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_m))^k-\Xi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_n))^k\}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_m))\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_m))\|_{\mathcal{L}(X^s,X)}\\
&\qquad\le C_\varepsilon((k+1)h)^{-1}((n-m)h)^{\widehat{\eta}-\varepsilon},\quad 0\le m\le n<N,\ k\ge 0.
\end{aligned}
$$

証明. 始めに差分等式

$$(5.33)\quad \Xi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m))^k - R(-hA_\xi(u(t_{m+1})))^k$$
$$= h\sum_{l=0}^{k-1} R(-hA_\xi(u(t_{m+1})))^{k-l-1}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}A_\xi(u(t_{m+1}))\boldsymbol{J}_{\xi,h}(u(t_{m+1}))$$
$$\times\{A_\xi(u(t_{m+1}))^{-1}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m)) - \mathcal{I}\}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m))\boldsymbol{e}\Xi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m))^l$$

より,

$$\|\Xi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m))^k - R(-hA_\xi(u(t_{m+1})))^k\|_{\mathcal{L}(X)}$$
$$\le Ch\sum_{l=0}^{k-1}((k-l)h)^{-1}h^{\widehat{\eta}} \le Ch\sum_{l=0}^{k-1}((k-l)h)^{-1+\varepsilon}h^{\widehat{\eta}-\varepsilon} \le C_\varepsilon h^{\widehat{\eta}-\varepsilon}$$

を得る. これと (3.24) より

$$\|\Xi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m))^k - \Xi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n))^k\|_{\mathcal{L}(X)}$$
$$\le \|\Xi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m))^k - R(-hA_\xi(u(t_{m+1})))^k\|_{\mathcal{L}(X)}$$
$$+ \|R(-hA_\xi(u(t_{m+1})))^k - R(-hA_\xi(u(t_{n+1})))^k\|_{\mathcal{L}(X)}$$
$$+ \|R(-hA_\xi(u(t_{n+1})))^k - \Xi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_n))^k\|_{\mathcal{L}(X)}$$
$$\le C_\varepsilon h^{\widehat{\eta}-\varepsilon} + C|(n-m)h|^{\widehat{\eta}} + C_\varepsilon h^{\widehat{\eta}-\varepsilon} \le C_\varepsilon|(n-m)h|^{\widehat{\eta}-\varepsilon}$$

によって (5.31) が得られる.

ふたたび (5.33) より

$$\|\{\Xi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m))^k - R(-hA_\xi(u(t_{m+1})))^k\}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m))\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m))\|_{\mathcal{L}(X^s,X)}$$
$$\le Ch\sum_{l=0}^{k-1}((k-l)h)^{-1}h^{\widehat{\eta}}((l+1)h)^{-1} \le C_\varepsilon((k+1)h)^{-1+\varepsilon}h^{\widehat{\eta}-\varepsilon}$$

を得る. また条件 (A2) に注意すると (3.25) と同様にして

$$\|\{R(-hA_\xi(u(t_{m+1})))^k - R(-hA_\xi(u(t_{n+1})))^k\}A_\xi(u(t_{m+1}))\|_{\mathcal{L}(X_\xi)}$$
$$\le C|(n-m)h|^{\widehat{\eta}}((k+1)h)^{-1},\quad k\ge 0,$$

が示される. よって

$$
\begin{aligned}
&\|\{\Xi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_m))^k-\Xi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_n))^k\}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_m))\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_m))\|_{\mathcal{L}(X^s,X)}\\
&\le\|\{\Xi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_m))^k-R(-hA_\xi(u(t_{m+1})))^k\}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_m))\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_m))\|_{\mathcal{L}(X^s,X)}\\
&+\|\{R(-hA_\xi(u(t_{m+1})))^k-R(-hA_\xi(u(t_{n+1})))^k\}A_\xi(u(t_{m+1}))\|_{\mathcal{L}(X_\xi)}\\
&\quad\times\|\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}A_\xi(u(t_{m+1}))^{-1}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_m))\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_m))\|_{\mathcal{L}(X^s,X)}\\
&+\|\{R(-hA_\xi(u(t_{n+1})))^k-\Xi_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_n))^k\}\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_{n+1}))\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_{n+1}))\|_{\mathcal{L}(X^s,X)}\\
&\quad\times\|\mathcal{I}+\{\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_{n+1}))^{-1}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_m))-\mathcal{I}\}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\tau_m))\|_{\mathcal{L}(X^s)}\\
&\le C_\varepsilon((k+1)h)^{-1+\varepsilon}h^{\widehat{\eta}-\varepsilon}+C|(n-m)h|^{\widehat{\eta}}((k+1)h)^{-1}+C_\varepsilon((k+1)h)^{-1+\varepsilon}h^{\widehat{\eta}-\varepsilon}\\
&\le C_\varepsilon((k+1)h)^{-1}|(n-m)h|^{\widehat{\eta}-\varepsilon}.\quad\square
\end{aligned}
$$

(3.49) と補題 5.6 の結果を用いると,

$$
\|\boldsymbol{Q}_{\xi,h}(n,m)\|_{\mathcal{L}(X^s,X)}\le C((n-m)h)^{\widehat{\eta}/2-1},\quad 0\le m<n\le N.
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\Psi}_{\xi,h}(n,m)\|_{\mathcal{L}(X^s,X)}&\le\|\boldsymbol{Q}_{\xi,h}(n,m)\|_{\mathcal{L}(X^s,X)}\\
&\quad+Ch\sum_{l=m+1}^{n-1}\|\boldsymbol{\Psi}_{\xi,h}(n,l+1)\|_{\mathcal{L}(X^s,X)}((l-m)h)^{\widehat{\eta}-1}
\end{aligned}
$$

より

$$
\|\boldsymbol{\Psi}_{\xi,h}(n,m)\|_{\mathcal{L}(X^s,X)}\le C((n-m)h)^{\widehat{\eta}/2-1},\quad 0\le m<n\le N,
$$

が得られ, $\rho=1$ の場合が示される.

$0<\rho<1$ のときは, 上と同様にして

$$
\|\boldsymbol{Q}_{\xi,h}(n,m)(\mathcal{A}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_m)))^{\rho-1}\|_{\mathcal{L}(X^s,X)}\le C((n-m)h)^{\widehat{\eta}/2-\rho},\quad 0\le m<n\le N,
$$

より

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\Psi}_{\xi,h}(n,m)(\mathcal{A}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_m)))^{\rho-1}\|_{\mathcal{L}(X^s,X)}&\le\|\boldsymbol{Q}_{\xi,h}(n,m)(\mathcal{A}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\tau_m)))^{\rho-1}\|_{\mathcal{L}(X^s,X)}\\
&\quad+Ch\sum_{l=m+1}^{n-1}\|\boldsymbol{\Psi}_{\xi,h}(n,l+1)\|_{\mathcal{L}(X^s,X)}((l-m)h)^{\widehat{\eta}-\rho}\\
&\le C((n-m)h)^{\widehat{\eta}/2-\rho},\quad 0\le m<n\le N,
\end{aligned}
$$

が得られることから導かれる.

以上で命題 5.5 が証明された. □

命題 5.7.

(5.34)

$$\|A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}\Phi_{\xi,h}(\mathcal{U};n,m+1)\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m))\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m))A_\xi(u(t_{m+1}))^{-\beta}\|_{\mathcal{L}(X_\xi^s)}$$
$$\le C((n-m)h)^{-1-\widehat{\alpha}+\beta},\quad 1-\widehat{\eta}<\beta<1,\ 0\le m<n\le N.$$

証明. 次のように変形する:

$$\begin{aligned}
&A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}\Phi_{\xi,h}(\mathcal{U};n,m+1)\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m))\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m))A_\xi(u(t_{m+1}))^{-\beta}\\
&\quad= A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}\Phi_{\xi,h}(\mathcal{U};n,m+1)\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}A_\xi(u(t_{m+1}))^{1-\beta}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(u(t_{m+1}))\\
&\qquad+A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}\Phi_{\xi,h}(\mathcal{U};n,m+1)\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m))\\
&\qquad\times\{\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m))A_\xi(u(t_{m+1}))^{-1}-\mathcal{I}\}A_\xi(u(t_{m+1}))^{1-\beta}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m)).
\end{aligned}$$

この式の第 2 項は

$$\begin{aligned}
&\|A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}\Phi_{\xi,h}(\mathcal{U};n,m+1)\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m))\\
&\quad\times\{\boldsymbol{A}_\xi(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m))A_\xi(u(t_{m+1}))^{-1}-\mathcal{I}\}A_\xi(u(t_{m+1}))^{1-\beta}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_m))\|_{\mathcal{L}(X^s,X)}\\
&\qquad\le C((n-m)h)^{-\widehat{\alpha}}h^{\widehat{\eta}-\beta+1}\le C((n-m)h)^{-\widehat{\alpha}+\widehat{\eta}-\beta+1}
\end{aligned}$$

で評価される. 一方, 第 1 項は次のように書き下せる:

$$\begin{aligned}
&A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}\Phi_{\xi,h}(\mathcal{U};n,m+1)\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}A_\xi(u(t_{m+1}))^{1-\beta}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(u(t_{m+1}))\\
&=A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}\{\Phi_{\xi,h}(\mathcal{U};n,m+1)-R(-hA_\xi(u(t_{m+1})))^{n-m-1}\}\\
&\quad\times\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}A_\xi(u(t_{m+1}))^{1-\beta}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(u(t_{m+1}))\\
&+A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}[A_\xi(u(t_{m+1}))^{1-\beta}\{R(-hA_\xi(u(t_{m+1})))^{n-m-1}-R(\infty)^{n-m-1}\}\\
&\qquad-A_\xi(u_0)^{1-\beta}\{R(-hA_\xi(u_0))^{n-m-1}-R(\infty)^{n-m-1}\}]\\
&\quad\times\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}A_\xi(u(t_{m+1}))^{1-\beta}\boldsymbol{J}_{\xi,h}(u(t_{m+1}))
\end{aligned}$$

$$+ A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}\{A_\xi(u(t_{m+1}))^{1-\beta} - A_\xi(u_0)^{1-\beta}\}$$
$$\times e^T \mathcal{B} A_\xi(u(t_{m+1}))^{1-\beta} J_{\xi,h}(u(t_{m+1}))R(\infty)^{n-m-1}$$
$$+ A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}+1-\beta} R(-hA_\xi(u_0))^{n-m-1} e^T \mathcal{B} J_{\xi,h}(u_0)$$
$$= K_1 + K_2 + K_3 + K_4.$$

$\widehat{\alpha} < 1 - \widehat{\eta} < \beta$ よりただちに

$$\|K_4\|_{\mathcal{L}(X^s,X)} \le C((n-m)h)^{-\widehat{\alpha}-1+\beta}$$

が得られる. また K_1 は (3.31) に相当する差分等式によって,

$$\|K_1\|_{\mathcal{L}(X^s,X)} \le C((n-m)h)^{-\widehat{\alpha}+\widehat{\eta}-1+\beta}$$

で評価できる. K_2, K_3 については複素積分表示をレゾルベントに関する不等式

$$\|A_\xi(u_0)^{\widehat{\alpha}}\{A_\xi(u(t_{m+1}))^{1-\beta}(\lambda - A_\xi(u(t_{m+1})))^{-1} - A_\xi(u_0)^{1-\beta}(\lambda - A_\xi(u_0))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}$$
$$\le C_{\widehat{\alpha},\beta}(|\lambda|+1)^{\widehat{\alpha}-\beta}((m+1)h)^{\widehat{\eta}}, \quad \lambda \notin S_\varphi,$$

を用いて評価することにより,

$$\|K_2\|_{\mathcal{L}(X^s,X)}, \|K_3\|_{\mathcal{L}(X^s,X)} \le C((n-m)h)^{-\widehat{\alpha}-1+\beta}$$

となる. これらをまとめて (5.34) を得る. □

5.5 結言.

この章での考察により, 強い相互作用を持つ反応拡散方程式系などの準線形放物型偏微分方程式に対する, 有限要素法と陰的 Runge-Kutta 法による全離散近似解法について, 関数解析的手法によって安定性と収束性を保証することができた. すなわち, 半群論的なアプローチによる発展方程式の手法を応用して, 近似解の表現公式に対する一様評価を得て解法の無条件安定性を, また近似誤差に対する同様の表示公式を評価することによって収束性を示した. いずれも, 前章の結果に加えて, 空間離散化に関してある種の一様性を仮定することによって導かれたものである.

近似誤差を時間離散化による項と空間離散化による項とに分けて考察すると, 以下のようなことが分かる. 時間離散化による誤差は, 前章の時間離散近似に関して得られた誤差と全く同じ形の評価であることが分かる. 空間離散化誤差は, [19] などに示されている線形方程式の場合の評価に比べて劣っているが, これは準線形方程式の非線形性が強く影響しているものと考えられる.

次章において, この章で得られた近似解法の具体的応用について述べる. これによって, ここで設定した枠組が適当なものであることが示されるであろう.

第 6 章

反応拡散方程式系への応用

6.1 緒言.

強い相互作用を持つ反応拡散方程式系が様々な分野の数理モデルに現れることは, すでに序論で触れた. この章ではそのような方程式のいくつかの例を紹介し, そのうちの 1 例について数値計算の結果を示す. 数値解法としてここでは, 空間離散化に三角形一次要素による有限要素法を, 時間離散化には任意段数の陰的 Runge-Kutta 法を利用した解法を新たに提案する: これは前章で抽象的理論によって安定性と収束性の保証を与えた, 全離散近似解法を具体化したものである. 実際に数値計算を行うことによって, この解法が実現, 応用可能であることを示す.

6.2 節に方程式の例を物理学, 化学, 生物学の分野から合わせて 4 つ挙げる. そのうちの一つ, 細胞性粘菌の走化性モデルである Keller-Segel 方程式の数値計算について, 6.3 節で述べる. まず, 上述の数値解法に対して前章の一般的議論が応用可能であることを示し, 解法の収束性評価を与える. 次に, 実際に行った数値計算の結果を示し, 数値解の挙動, 特に数値的定常解について考察する.

6.2 強い相互作用を持つ反応拡散方程式系の例.

6.2.1 半導体内の電荷のドリフト拡散の方程式 [16,17].

半導体内においては電子と正孔は通常の拡散と電場によるドリフト移動による運動をする. 一方で, 生成・再結合によって常に熱平衡状態へ戻ろうとする力が働く. 以

上のことから次のような方程式が導かれる:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div}\{\mu_n(\nabla u)(\nabla n - n\nabla u)\} - Q(n,p)(np-1) + g(x) \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} = \operatorname{div}\{\mu_p(\nabla u)(\nabla p + p\nabla u)\} - Q(n,p)(np-1) + g(x) \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ \epsilon \triangle u = n - p - N(x) \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial n}{\partial \nu} = \dfrac{\partial p}{\partial \nu} = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on } \Sigma_N \times (0,\infty), \\ (n,p,u) = (\bar{n}(x), \bar{p}(x), \bar{u}(x)) \quad \text{on } \Sigma_D \times (0,\infty). \end{cases}$$

ここで $\Omega \subset \mathbb{R}^d\,(d=1,2,3)$ は半導体が占める領域, $\Sigma_N \cup \Sigma_D = \partial\Omega$. $n(x,t), p(x,t)$ はそれぞれ電子, 正孔の密度, $u(x,t)$ は静電ポテンシャルを表し, 熱平衡状態が $np=1$ となるように正規化されている. また, $g(x)$ は何らかの電荷の注入を, $N(x)$ は不純物ドープによる電荷のバイアス量を意味する. 拡散係数 μ_n, μ_p や生成・再結合の係数 Q は一般に, それぞれ電場 ∇u や電荷密度 n, p に依存する.

この方程式に関しては, Fang and Ito [16,17] によって, 時間大域解の存在や吸収領域の存在, さらに拡散係数が一定の場合における解の漸近挙動が明らかにされている.

6.2.2 ドラッグ拡散の方程式 [14].

ポリマー媒質中における溶剤の浸透は, ほぼ一定速度で動く拡散界面 (diffusion front) によって特徴づけられる. Cohen ら [14] はこの様子を表すモデルとして, 次の方程式を提出した:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div}[D(c)\nabla c + F(c)\nabla\sigma] \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial t} = \beta(c)[g(c) - \sigma] \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ c = 1 \quad \text{on } \partial\Omega \times (0,\infty). \end{cases}$$

ここで $\Omega \subset \mathbb{R}^d\,(d=1,2,3)$ はポリマーが占める領域, c は溶剤の濃度, σ はポリマーの歪みを表し, 適当な正規化とスケーリングがなされているとする. $g(c)$ は溶剤の浸透に対するポリマーの歪みの感度を意味する.

Amann [5] は, 退化準線形放物型方程式の理論を応用して, この方程式の時間局所解の存在を証明した. また[14] には $d=1$ の場合の数値計算の結果についても述べられている.

6.2.3 競合する種の棲み分けの方程式 [55].

領域内の生物種の競争関係を表すモデルとしてよく知られた方程式に, Lotka-Volterra の競争方程式がある. この Lotka-Volterra 型の競争関係に加えて, 生息環境の差異による移動と, 個体の拡散を考慮した次のような方程式が, 重定ら [55] によって提出された:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}[\nabla\{(a_1+\alpha_{11}u+\alpha_{12}v)u\} + b_1 u\nabla U(x)] \\ \qquad\qquad\qquad +(c_1-\gamma_{11}u-\gamma_{12}v)u \quad \text{in } \Omega\times(0,\infty), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \mathrm{div}[\nabla\{(a_2+\alpha_{21}u+\alpha_{22}v)v\} + b_2 v\nabla U(x)] \\ \qquad\qquad\qquad +(c_2-\gamma_{21}u-\gamma_{22}v)v \quad \text{in } \Omega\times(0,\infty), \\ \dfrac{\partial}{\partial n}\{(a_1+\alpha_{11}u+\alpha_{12}v)u\} + b_1 u\dfrac{\partial U(x)}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega\times(0,\infty), \\ \dfrac{\partial}{\partial n}\{(a_2+\alpha_{21}u+\alpha_{22}v)v\} + b_2 v\dfrac{\partial U(x)}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega\times(0,\infty). \end{cases}$$

ここで u, v はそれぞれの種の個体数密度を表す. $U(x)$ は環境ポテンシャルを, すなわち $-U(x)$ によってその地点における生息環境の良さを意味し, u, v ともに $-U(x)$ のより高い方へ移動する傾向があることを示している.

重定らは [55] の中で, $d=1$ の場合について実際に数値計算を行い, 空間的に棲み分けることによって共存することができることを示している. また時間大域解の存在と解の正値性が八木 [76] によって解析的に証明されている.

6.2.4 細胞性粘菌の走化性の方程式 [29].

Keller と Segel [29] は, 走化性による細胞性粘菌の集合体形成の様子を表すモデルとして, 次のような方程式を提唱した:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} = \mathrm{div}\{d_a(a,\rho)\nabla a - a\nabla B(\rho)\} \quad \text{in } \Omega\times(0,\infty), \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = d_\rho\triangle\rho + af(\rho) - g(\rho)\rho \quad \text{in } \Omega\times(0,\infty), \\ \dfrac{\partial a}{\partial n} = \dfrac{\partial \rho}{\partial n} = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega\times(0,\infty). \end{cases}$$

ここで a は細胞性粘菌の個体密度を, ρ は誘引化学物質の濃度を表す. 関数 $B(\rho)$ は感応関数と呼ばれ, 走化性の感度を意味する. 代表的なモデルとして

$$B(\rho) = b\log\rho,\ b\rho^k,\ \frac{b\rho}{1+\rho},$$

などが挙げられる. $f(\rho), g(\rho)$ はそれぞれ化学物質の分泌, 自然分解の割合を意味する.

この Keller-Segel 方程式の解の時間局所的存在や正値性, $d=1$ の場合の解の大域的存在が, 八木 [77] によって解析的に示されている. また正値定常解の構造や解の爆発に関して, 様々な研究成果が挙げられている [37,43,46].

6.3 細胞性粘菌の走化性モデル.

前節で挙げた反応拡散方程式系の例の中から, この節では特に Keller-Segel 方程式を取り上げ, 第 5 章までの一般的な理論の応用について述べる. すでに触れたように Keller-Segel 方程式は, 細胞性粘菌が集合体を形成する際の系のダイナミクスを記述したものである. 細胞性粘菌は, 発芽直後に互いに反発しあうように分散し, 食糧を求めて移動する. しかし, 食料が枯渇すると, いくつかの点で集合体を形成し, ナメクジ状となって移動するという生態が観察されている. この集合体形成の場面において, それぞれが分泌する化学物質によって互いに誘引しあう, すなわち走化性を示すことが知られている.

はじめに Keller-Segel 方程式の有限要素法と Runge-Kutta 法による全離散化を与え, 第 5 章の結果が応用可能であることを示した上で, 近似解の誤差評価を述べる. 次に, 実際にこの解法によって数値計算を行い, これまでに知られている解析的結果と照合しながらこの計算結果について考察する.

6.3.1 方程式の離散化とその誤差の評価.

ここでは, 領域 $\Omega \in \mathbb{R}^d\,(d=1,2)$ を有界凸多角形, 拡散係数 d_a, d_ρ を正の定数とした次の Keller-Segel 方程式を考える:

$$
(6.1)\qquad
\begin{cases}
\dfrac{\partial a}{\partial t} = d_a \triangle a - \mathrm{div}\{a\,b(\rho)\nabla\rho\} & \text{in } \Omega\times(0,\infty),\\
\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = d_\rho \triangle \rho + a f(\rho) - g(\rho)\rho & \text{in } \Omega\times(0,\infty),\\
\dfrac{\partial a}{\partial n} = \dfrac{\partial \rho}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,\infty),\\
a(x,0) = a_0(x), \quad \rho(x,0) = \rho_0(x) & \text{in } \Omega.
\end{cases}
$$

ただし $n(x)$ は境界点 $x \in \partial\Omega$ における外向き法線ベクトル, 関数 $b(\rho)(=B'(\rho))$, $f(\rho)$, $g(\rho)$ は, $g_0 > 0$ に対して

$$
(6.2)\qquad b(\rho) \ge 0,\ \ f(\rho) \ge 0,\ \ g(\rho) \ge g_0,
$$

を満たす $\rho \in \mathbb{R}_+$ の十分滑らかな関数である. 初期関数 $u_0(x), \rho_0(x)$ は, $\delta_0 > 0$ を定数として

$$\begin{cases} a_0,\ \rho_0 \in H^2(\Omega), \\ \dfrac{\partial a_0}{\partial n} = \dfrac{\partial \rho_0}{\partial n} = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega, \\ a_0(x) \geq 0,\ \rho_0(x) \geq \delta_0 \qquad \text{on } \overline{\Omega}, \end{cases} \tag{6.3}$$

を満たすと仮定する.

以上の状況のもとで次の定理を得る.

定理 6.1. ε_d を, $d=1$ のとき $\varepsilon_1 = 0$, $d=2$ のとき $0 < \varepsilon_2 < 1/2$ で任意に 1 つ固定する. 方程式 (6.1) に適用する有限要素法と陰的 Runge-Kutta 法に対して以下の条件を仮定する.

- 有限要素法は一次近似で, 単体の最大径 ξ をパラメータに持つ単体分割の列 $\{\tau_\xi\}$ は一様正則である.
- 陰的 Runge-Kutta 法は p 次で, 適当な $\theta \in (0, \pi/2)$ について $L(\theta)$-安定である. また内部次数 $0 \leq q \leq p-1$ とする.

このとき, 十分小さな $0 < S \leq T$, $h > 0$ と $\xi > 0$ に対して, $[0, S]$ での近似解 $\left\{\widehat{U}_n = \begin{bmatrix} \hat{a}_n \\ \hat{\rho}_n \end{bmatrix}\right\}_{n=0,1,\dots,N}$, $N \leq S/h$, は一意に存在する. また (6.1) が, ある $\widehat{\eta} \in (0, (1-\varepsilon_d)/2)$ と $\gamma \in ((1+\varepsilon_d)/2, 3/4)$ について, $u \in \mathcal{C}^{\widehat{\eta}}([0,S]; \mathbb{H}^{1+\varepsilon_d}(\Omega)) \cap \mathcal{C}^{p+1}([0,S]; \mathbb{L}^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^{q+1}([0,S]; \mathbb{H}^2(\Omega))$ かつ $u^{(p+1)} \in L^1(0,S; \mathbb{H}^{2\gamma}(\Omega))$ を満たす一意解 u を持つなら, 誤差評価

$$\begin{aligned} \|U_n - u(t_n)\|_{\mathbb{H}^{1+\varepsilon_d}} \leq Ch^{p+1}\left\|u^{(p+1)}\right\|_{L^1(0,S;\mathbb{H}^{2\gamma})} + Ch^{q+1}\left\|u^{(q+1)}\right\|_{L^\infty(0,S;\mathbb{H}^2)} \\ + C\xi^{1-\varepsilon_d}\left\{\|u\|_{\mathcal{C}^1([0,S];\mathbb{H}^2)} + \|u\|_{\mathcal{C}^{\widehat{\eta}}([0,S];\mathbb{H}^{1+\varepsilon_d})}\right\} \end{aligned}$$

が成立する.

証明. この定理は第 5 章の抽象理論の助けを借りて証明することができる. つまり定理 6.1 の仮定の下で 4.2 節の条件 ($\mathrm{A_u}$1–2), (Sp), ($\mathrm{F_u}$1), (In) および 5.2 節の ($\mathrm{A}_{\mathrm{u}\xi}$1–3), ($\mathrm{S}_\xi$1–2), ($\mathrm{In}_\xi$) が満足されることを示して, 定理 5.1, 5.2 を適用すればよい.

方程式 (6.1) は以下のようにして L^2-積空間 $X = \mathbb{L}^2(\Omega)$ 上の抽象準線形発展方程式

$$
(6.4) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A(u)u = F(u), \quad 0 < t < \infty, \\ u(0) = u_0, \end{cases}
$$

として定式化される.

$Z = \mathbb{H}^{1+\epsilon_d}(\Omega)$ とおく. 条件 (6.3) により $u_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ \rho_0 \end{bmatrix} \in Z \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ である. すべての $u = \begin{bmatrix} a \\ \rho \end{bmatrix} \in K$ が

$$
\mathrm{Re}\,\rho(x) \geq \delta \quad \text{on } \overline{\Omega}
$$

を満たすような $\delta > 0$ が取れるように r を十分小さく取って, 空間 Z の中の開球

$$
K = \left\{ u = \begin{bmatrix} a \\ \rho \end{bmatrix} \in Z; \|u - u_0\|_Z = \sqrt{\|a - a_0\|^2_{H^{1+\epsilon_d}} + \|\rho - \rho_0\|^2_{H^{1+\epsilon_d}}} < r \right\}
$$

を定義する.

各 $u = \begin{bmatrix} a \\ \rho \end{bmatrix} \in K$ に対して X の線形作用素 $A(u)$ を

$$
\begin{cases} \mathcal{D}(A(u)) = \mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_1, \qquad \mathcal{D}_1 = \left\{ w \in H^2(\Omega); \dfrac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega \right\}, \\ A(u)\widetilde{u} = \begin{bmatrix} A_1\tilde{a} - B(a,\rho)\tilde{\rho} \\ A_2\tilde{\rho} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{u} = \begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{\rho} \end{bmatrix}, \end{cases}
$$

で定義する. ここで

$$
\begin{cases} \mathcal{D}(A_1) = \mathcal{D}(A_2) = \mathcal{D}_1, \\ \mathcal{D}(B(a,\rho)) = \mathcal{D}_1, \quad \begin{bmatrix} a \\ \rho \end{bmatrix} \in K, \\ A_1\tilde{a} = -d_a\triangle\tilde{a} + d_a\tilde{a}, \\ A_2\tilde{\rho} = -d_\rho\triangle\tilde{\rho} + g_0\tilde{\rho}, \\ B(a,\rho)\rho = -\,\mathrm{div}\{\mathrm{Re}\,a\,b(\mathrm{Re}\,\rho)\,\nabla\tilde{\rho}\}, \end{cases}
$$

である. 関数 $F(u)$ は

$$
F(u) = \begin{bmatrix} d_a a \\ af(\mathrm{Re}\,\rho) - \{g(\mathrm{Re}\,\rho) - g_0\}\rho \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} a \\ \rho \end{bmatrix} \in K,
$$

で与えられる.

一方で (6.1) から次の弱形式が導出される:

$$
(6.5) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\langle u, v\rangle_{\mathbb{L}^2} + \alpha(u; u, v) = \langle F(u), v\rangle_{\mathbb{L}^2}, \quad 0 < t \le T,\ v \in \mathbb{H}^1(\Omega), \\ u(0) = u_0. \end{cases}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\alpha(u; \widetilde{u}, \widetilde{v}) &= d_a\langle \nabla\tilde{a}, \nabla\tilde{w}\rangle_{L^2} + d_a\langle \tilde{a}, \tilde{w}\rangle_{L^2} \\
&\quad - \langle \mathrm{Re}\, a\, b(\mathrm{Re}\,\rho)\nabla\tilde{\rho}, \nabla\tilde{w}\rangle_{L^2} + d_\rho\langle \nabla\tilde{\rho}, \nabla\tilde{\mu}\rangle_{L^2} + g_0\langle \tilde{\rho}, \tilde{\mu}\rangle_{L^2}, \\
&\qquad u = \begin{bmatrix} a \\ \rho \end{bmatrix} \in K,\ \widetilde{u} = \begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{\rho} \end{bmatrix},\ \widetilde{v} = \begin{bmatrix} \tilde{w} \\ \tilde{\mu} \end{bmatrix} \in \mathbb{H}^1(\Omega),
\end{aligned}
$$

は $A(u)$ に関する $\mathbb{H}^1(\Omega)$ 上の二次形式である. $\alpha(u; \cdot, \cdot)$ は $u \in K$ に関して一様に有界かつ強圧的, すなわち

$$
(6.6) \qquad |\alpha(u; \widetilde{u}, \widetilde{v})| \le M\|\widetilde{u}\|_{\mathbb{H}^1}\|\widetilde{v}\|_{\mathbb{H}^1}, \quad u \in K,\ \widetilde{u}, \widetilde{v} \in \mathbb{H}^1(\Omega),
$$

$$
(6.7) \qquad \mathrm{Re}\,\alpha(u; \widetilde{u}, \widetilde{u}) \ge \delta\|\widetilde{u}\|_{\mathbb{H}^1}, \quad u \in K,\ \widetilde{u} \in \mathbb{H}^1(\Omega),
$$

を満たすことが容易に分かる.

方程式 (6.1) に対して有限要素法を適用する. 定理の仮定により Ω の単体分割の族 $\{\tau_\xi\}_{\xi>0}$ は一様正則である. 2.3 節と同様に

$$
X_{1\xi} = \left\{ w \in \mathcal{C}(\overline{\Omega});\ \text{各 } \sigma \in \tau_\xi \text{ について } w|_\sigma \text{ は一次関数} \right\}
$$

と定義し, $X_\xi = X_{1\xi} \times X_{1\xi}$ とおく. このとき X_ξ は X の有限次元部分空間である. $P_\xi\colon \mathbb{L}^2(\Omega) \to X_\xi$, $P_{1\xi}\colon L^2(\Omega) \to X_{1\xi}$ を L^2-内積に関する直交射影とする.

(6.1) に対する有限要素近似は次式で定められる:

$$
(6.8) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\langle \widehat{u}, \widehat{v}\rangle_{\mathbb{L}^2} + \alpha(\widehat{u}; \widehat{u}, \widehat{v}) = \langle F(\widehat{u}), \widehat{v}\rangle_{\mathbb{L}^2}, \quad 0 < t \le T,\ \widehat{v} \in X_\xi, \\ \widehat{u}(0) = P_\xi u_0. \end{cases}
$$

X_ξ は有限次元だから, 各 $u \in K$ に対して X_ξ 上の有界線形作用素 $A_\xi(u)$ を

$$
\langle A_\xi(u)\widehat{u}, \widehat{v}\rangle_{\mathbb{L}^2} = \alpha(u;\ \widehat{u}, \widehat{v}), \quad \widehat{u}, \widehat{v} \in X_\xi,
$$

で容易に定義できる．これを行列で表すと

$$A_\xi(u)=\begin{bmatrix} A_{1\xi} & -B_\xi(a,\rho) \\ 0 & A_{2\xi} \end{bmatrix},\quad u=\begin{bmatrix} a \\ \rho \end{bmatrix},$$

となる．ここで $X_{1\xi}$ 上の有界線形作用素 $A_{1\xi}$, $A_{2\xi}$, $B_\xi(a,\rho)$ はそれぞれ

$$\langle A_{1\xi}\hat{a},\hat{w}\rangle_{L^2}=d_a\langle\nabla\hat{a},\nabla\hat{w}\rangle_{L^2}+d_a\langle\hat{a},\hat{w}\rangle_{L^2},\quad \hat{a},\hat{w}\in X_{1\xi},$$

$$\langle A_{2\xi}\hat{\rho},\hat{\mu}\rangle_{L^2}=d_\rho\langle\nabla\hat{\rho},\nabla\hat{\mu}\rangle_{L^2}+g_0\langle\hat{\rho},\hat{\mu}\rangle_{L^2},\quad \hat{\rho},\hat{\mu}\in X_{1\xi},$$

$$\langle B_\xi(a,\rho)\hat{\rho},\hat{w}\rangle_{L^2}=\langle\mathrm{Re}\,a\,b(\mathrm{Re}\,\rho)\nabla\hat{\rho},\nabla\hat{w}\rangle_{L^2},\quad \hat{\rho},\hat{w}\in X_{1\xi},$$

で定義されるものである．

これより (6.1) の X_ξ での近似は

$$\text{(6.9)}\qquad \begin{cases} \dfrac{d\widehat{u}}{dt}+A_\xi(\widehat{u})\widehat{u}=F_\xi(\widehat{u}), & 0<t\le T, \\ \widehat{u}(0)=u_{0\xi}, \end{cases}$$

で与えられる．ただし $F_\xi(u)=P_\xi F(u)$, $u_{0\xi}=\begin{bmatrix} a_{0\xi} \\ \rho_{0\xi} \end{bmatrix}=P_\xi u_0$.

(6.9) に時間刻み幅 h で陰的 Runge-Kutta 法 $(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C})$ を適用すると (6.1) の全離散近似

$$\text{(6.10)}\qquad \begin{cases} \widehat{U}_{n+1}=\widehat{U}_n+h\boldsymbol{e}^T\mathcal{B}\{-\boldsymbol{A}_\xi(\widehat{\boldsymbol{V}}_n)\widehat{\boldsymbol{V}}_n+\boldsymbol{F}_\xi(\widehat{\boldsymbol{V}}_n)\}, & n=0,1,\ldots,N-1, \\ \widehat{\boldsymbol{V}}_n=\boldsymbol{e}\widehat{U}_n+h\mathcal{A}\{-\boldsymbol{A}_\xi(\widehat{\boldsymbol{V}}_n)\widehat{\boldsymbol{V}}_n+\boldsymbol{F}_\xi(\widehat{\boldsymbol{V}}_n)\}, \\ \widehat{U}_0=u_{0\xi}, \end{cases}$$

を得る．ただし N は $N\cdot h\le T$ を満たす自然数．定理の仮定より陰的 Runge-Kutta 法 $(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C})$ は $A(\theta)$-強安定かつ精度 p 次である．

全離散近似 (6.10) に対して定理 5.1, 5.2 を応用するために, 4.2 節, 5.2 節に示した各条件が満たされていることを確認する．はじめに 4.2 節の条件 ($\mathrm{A_u}$1–2), (Sp), ($\mathrm{F_u}$1), (In) が成立することは [77] に示されているので, ここでは省略する．

5.2 節の各条件を調べる前に, 有限要素法に関して新たないくつかの事実を示す．次の 2 つの命題は定理 2.7 に示した各評価式の補間あるいは補外にあたるものである．

命題 6.2. $\Pi_{1\xi}\colon C(\overline{\Omega}) \to X_{1\xi}$ を補間作用素とする. $d=1,2$ 両方の場合において, 任意の $0 \le s < 3/2$ に対して $X_{1\xi} \subset H^s(\Omega)$ であり,

$$\|\hat{w}\|_{H^s} \le C\xi^{\min\{0,k-s\}}\|\hat{w}\|_{H^k}, \quad k=0,1,\ \hat{w} \in X_{1\xi}, \tag{6.11}$$

$$\|(1-\Pi_{1\xi})w\|_{H^s} \le C\xi^{2-s}\|w\|_{H^2}, \quad w \in H^2(\Omega), \tag{6.12}$$

が成立する.

証明. $0 \le s \le 1$ のときは第 2 章に述べた評価 (2.40), (2.41) をそれぞれ Sobolev 空間の補間 (2.2) によって補間して得られる.

$s = 1+\varepsilon > 1$ とする. (2.1) より $H^{1+\varepsilon}(\Omega)$, $0<\varepsilon<1/2$, の同値ノルムが

$$\|w\|^2_{H^{1+\varepsilon}(\Omega)} = \|w\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{d}\int_{\Omega\times\Omega}\frac{|\partial_j w(x)-\partial_j w(y)|^2}{|x-y|^{d+2\varepsilon}}dxdy$$

で定義される. 任意の $\hat{w} \in X_{1\xi}$ に対して各 $\sigma \in \tau_\xi$ で $\hat{w}_{\sigma j} = \partial_j \hat{w}|_\sigma$ は定数だから,

$$\int_{\Omega\times\Omega}\frac{|\partial_j\hat{w}(x)-\partial_j\hat{w}(y)|^2dxdy}{|x-y|^{d+2\varepsilon}} \le 4\sum_{\sigma\in\tau_\xi}\int_{\sigma\times(\Omega\setminus\sigma)}\frac{dxdy}{|x-y|^{d+2\varepsilon}}\cdot|\hat{w}_{\sigma j}|^2 \le C\xi^{-2\varepsilon}\|\hat{w}\|^2_{H^1}$$

となる. これより $\hat{w} \in H^{1+\varepsilon}(\Omega)$ かつ $\|\hat{w}\|_{H^{1+\varepsilon}} \le C\xi^{-\varepsilon}\|\hat{w}\|_{H^1}$, さらに $\|\hat{w}\|_{H^{1+\varepsilon}} \le C\xi^{-1-\varepsilon}\|\hat{w}\|_{L^2}$ を得る.

次に $w \in H^2(\Omega)$, $\hat{w} = \Pi_{1\xi}w$ とする. このとき上と同様に

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega\times\Omega}\frac{|\{\partial_j\hat{w}(x)-\partial_j w(x)\}-\{\partial_j\hat{w}(y)-\partial_j w(y)\}|^2dxdy}{|x-y|^{d+2\varepsilon}}\\ &\le 4\sum_{\sigma\in\tau_\xi}\int_{\sigma\times(\Omega\setminus\sigma)}\frac{|\hat{w}_{\sigma j}-\partial_j w(x)|^2dxdy}{|x-y|^{d+2\varepsilon}} + \sum_{\sigma\in\tau_\xi}\int_{\sigma\times\sigma}\frac{|\partial_j w(x)-\partial_j w(y)|^2dxdy}{|x-y|^{d+2\varepsilon}}\\ &\le C\xi^{2-2\varepsilon}\|\nabla(\partial_j w)\|^2_{L^2}\end{aligned}$$

である. よって

$$\|\hat{w}-w\|^2_{H^{1+\varepsilon}} \le C\xi^{2-2\varepsilon}\|w\|^2_{H^2}$$

が得られる. □

命題 6.3. $d=1,2$ 両方の場合で, 任意の $0 \le s < 3/2$ に対して

$$\|(1-P_{1\xi})w\|_{H^s} \le C\xi^{2-s}\|w\|_{H^2}, \quad w \in H^2(\Omega), \tag{6.13}$$

が成立する.

証明. $s=0$ の場合はすでに (2.42) に示した. $0<s<3/2$ のときは (6.11), (6.12) より

$$\begin{aligned}\|(1-P_{1\xi})w\|_{H^s} &\le \|(1-\Pi_{1\xi})w\|_{H^s} + \|(\Pi_{1\xi}-P_{1\xi})w\|_{H^s} \\ &\le C\xi^{2-s}\|w\|_{H^2} + C\xi^{-s}\{\|(\Pi_{1\xi}-1)w\|_{L^2} + \|(P_{1\xi}-1)w\|_{L^2}\} \\ &\le C\xi^{2-s}\|w\|_{H^2}\end{aligned}$$

によって示される. □

(6.13) より直ちに

$$\|u_{0\xi}-u_0\|_{\mathbb{H}^{1+\varepsilon_d}} \le C\xi^{1-\varepsilon_d}\|u_0\|_{\mathbb{H}^2}$$

であるから, ξ を十分小さく取れば $\|u_{0\xi}-u_0\|_Z < r$, すなわち (In_ξ) が示される.

さらに Ritz 作用素に関する評価 (2.45) の補間・補外として次の評価式が得られる.

命題 6.4. $R_\xi(u)$ を二次形式 $\alpha(u;\cdot,\cdot)$ に関する Ritz 作用素, すなわち

$$\alpha(u;R_\xi(u)\widehat{u},\widehat{v}) = \alpha(u;\widehat{u},\widehat{v}), \quad \widehat{u},\widehat{v} \in X_\xi,$$

を満たすとする. $d=1,2$ いずれの場合にも, 任意の $0 \le s < 3/2$ について $u \in K$ に一様に

$$\|(1-R_\xi(u))v\|_{\mathbb{H}^s} \le C\xi^{2-s}\|v\|_{\mathbb{H}^2}, \quad v \in \mathcal{D}, \tag{6.14}$$

が成立する.

証明. $\Pi_\xi = \Pi_{1\xi}\times\Pi_{1\xi}$ とおく. $s=0,1$ の場合は (2.45) と同様にして証明される: 実際, $s=1$ の場合は等式

$$\alpha\big(u;(1-R_\xi(u))v,(1-R_\xi(u))v\big) = \alpha\big(u;(1-R_\xi(u))v,(1-\Pi_\xi)v\big)$$

と (6.6), (6.7), (6.12) より

$$\delta\|(1-R_\xi(u))v\|_{\mathbb{H}^1}^2 \le M\|(1-R_\xi(u))v\|_{\mathbb{H}^1}\|(1-\Pi_\xi)v\|_{\mathbb{H}^1}$$
$$\le C\|(1-R_\xi(u))v\|_{\mathbb{H}^1}\cdot\xi\|v\|_{\mathbb{H}^2};$$

$s=0$ の場合は等式

$$\big\langle(1-R_\xi(u))v,(1-R_\xi(u))v\big\rangle_{L^2}$$
$$=\alpha\big(u;(1-R_\xi(u))v, A(u)^{*\,-1}(1-R_\xi(u))v\big)$$
$$=\alpha\big(u;(1-R_\xi(u))v,(1-R_\xi(u))(A(u)^*)^{-1}(1-R_\xi(u))v\big)$$

を評価して,

$$\|(1-R_\xi(u))v\|_{\mathbb{L}^2}^2 \le M\cdot C\xi\|v\|_{\mathbb{H}^2}\cdot C\xi\|(A(u)^*)^{-1}(1-R_\xi(u))v\|_{\mathbb{H}^2}$$
$$\le C\xi^2\|v\|_{\mathbb{H}^2}\cdot\|(1-R_\xi(u))v\|_{\mathbb{L}^2}\le C\xi^4\|v\|_{\mathbb{H}^2}^2$$

を得る. $0<s<1$ の場合については Sobolev 空間の補間 (2.2) によって $s=0,1$ の場合を補間して示される. $1<s<3/2$ のときは (6.11), (6.12) より

$$\|(1-R_\xi(u))v\|_{\mathbb{H}^s}\le\|(1-\Pi_\xi)v\|_{\mathbb{H}^s}+\|(\Pi_\xi-R_\xi(u))v\|_{\mathbb{H}^s}$$
$$\le C\xi^{2-s}\|v\|_{\mathbb{H}^2}+C\xi^{1-s}\{\|(\Pi_\xi-1)v\|_{\mathbb{H}^1}+\|(1-R_\xi(u))v\|_{\mathbb{H}^1}\}$$
$$\le C\xi^{2-s}\|v\|_{\mathbb{H}^2},\quad v\in\mathcal{D},$$

として証明される. □

近似作用素 $A_\xi(u)$ に関する次の評価式は藤田-鈴木 [19] などに同様のものが示されているが, u に関する一様性を明らかにするために改めてここに証明を述べる. (6.7) より $A_\xi(u)$ は $\mathbb{L}^2(\Omega)$ 上の極大増大作用素であるので, その分数べき $A_\xi(u)^\rho$ が定義されることを注意しておく.

命題 6.5. $A_\xi(u)$ は $u\in K$ に関して一様に

$$\|A_\xi(u)^\theta\|_{\mathcal{L}(X_\xi)}\le C_\theta\xi^{-2\theta},\quad 0\le\theta\le1, \tag{6.15}$$

を満たす.

証明. $\theta = 0$ の場合は明らか. $\theta = 1$ の場合は (6.6) と (6.11) からただちに

$$\langle A_\xi(u)\hat{v}, \hat{w}\rangle \leq M\|\hat{v}\|_{\mathbb{H}^1}\|\hat{w}\|_{\mathbb{H}^1} \leq C\xi^{-2}\|\hat{v}\|_{\mathbb{L}^2}\|\hat{w}\|_{\mathbb{L}^2}, \quad \hat{v}, \hat{w} \in X_\xi,$$

によって示される. 2.1 節 II) に示した Heinz-Kato の定理を用いてこの両者を補間して $0 < \theta < 1$ の場合を得る. □

($S_\xi 1$) が成立することを示す. Ritz 作用素の定義より $A_\xi(u)^{-1}P_\xi = R_\xi(u)A(u)^{-1}$ だから, (6.14) より

$$\text{(6.16)} \qquad \|\{A_\xi(u)^{-1}P_\xi - A(u)^{-1}\}F\|_{\mathbb{H}^s} \leq C\xi^{2-s}\|F\|_{\mathbb{L}^2}, \quad F \in X, 0 \leq s < 3/2.$$

これより

$$\|\widehat{F}\|_{\mathbb{H}^s} \leq C\|A_\xi(u_0)\widehat{F}\|_{\mathbb{L}^2}, \quad \widehat{F} \in X_\xi,\ 0 \leq s < 3/2,$$

を得る. また (6.7) より

$$\|\widehat{F}\|_{\mathbb{H}^1} \leq \|A_\xi(u_0)^{1/2}\widehat{F}\|_{\mathbb{L}^2}, \quad \widehat{F} \in X_\xi,$$

が成立する. $\theta_1 = (1 + 2\varepsilon_d)/4$, $\varepsilon = 4\varepsilon_d/(1 + 2\varepsilon_d)$ と選べば, Heinz-Kato の定理より

$$\|\widehat{F}\|_{\mathbb{H}^{(1+\varepsilon_d)}} = \|\widehat{F}\|_{\mathbb{H}^{(1+\theta_1\varepsilon)}} \leq C\|A_\xi(u_0)^{(1+\theta_1)/2}\widehat{F}\|_{\mathbb{L}^2}, \quad \widehat{F} \in X_\xi,$$

となり, $\widehat{\alpha} = (1 + \theta_1)/2$ として ($S_\xi 1$) が満たされる.

($S_\xi 2$) も同様に以下のようにして示される. まず,

$$\|A_\xi(u_0)R_\xi(u_0)v\|_{\mathbb{L}^2} \leq C\|A(u_0)v\|_{\mathbb{L}^2}, \quad v \in \mathcal{D}(A(u_0)),$$

$$\|A_\xi(u_0)^{1/2}R_\xi(u_0)v\|_{\mathbb{L}^2} \leq C\|A(u_0)^{1/2}v\|_{\mathbb{L}^2}, \quad v \in \mathcal{D}(A(u_0)^{1/2}),$$

が成立するから, ふたたび Heinz-Kato の定理を用いて

$$\|A_\xi(u_0)^{(1+\theta)/2}R_\xi(u_0)v\|_{\mathbb{L}^2} \leq C\|A(u_0)^{(1+\theta)/2}v\|_{\mathbb{L}^2},$$
$$v \in \mathcal{D}(A(u_0)^{(1+\theta)/2}),\ 0 \leq \theta \leq 1,$$

を得る．一方で

$$\|P_\xi v\|_{\mathbb{L}^2} \le \|v\|_{\mathbb{L}^2}, \quad v \in \mathbb{L}^2(\Omega),$$

$$\|R_\xi(u_0)v\|_{\mathbb{H}^1} \le C\|v\|_{\mathbb{H}^1}, \quad v \in \mathbb{H}^1(\Omega),$$

だから，これらと (6.13), (6.14) との間に Sobolev 空間の補間 (2.2) を用いて

$$\begin{aligned}\|(1-P_\xi)v\|_{\mathbb{L}^2}, \|(1-R_\xi(u_0))v\|_{\mathbb{L}^2} &\le C\xi^{1+\theta}\|v\|_{\mathbb{H}^{1+\theta}} \\ &\le C\xi^{1+\theta}\|A(u_0)^{(1+\theta)/2}v\|_{\mathbb{L}^2}\end{aligned}$$

が導かれる．これらの評価と (6.15) より

$$\begin{aligned}&\|A_\xi(u_0)^{(1+\theta)/2}P_\xi v\|_{\mathbb{L}^2} \\ &\le \|A_\xi(u_0)^{(1+\theta)/2}(P_\xi - R_\xi(u_0))v\|_{\mathbb{L}^2} + \|A_\xi(u_0)^{(1+\theta)/2}R_\xi(u_0)v\|_{\mathbb{L}^2} \\ &\le C\xi^{-1-\theta}\|(P_\xi - R_\xi(u_0))v\|_{\mathbb{L}^2} + C\|A(u_0)^{(1+\theta)/2}v\|_{\mathbb{L}^2} \\ &\le C\|A(u_0)^{(1+\theta)/2}v\|_{\mathbb{L}^2}\end{aligned}$$

となる．結局 $\gamma = (3+4\widehat{\alpha})/8 = (5+2\theta_1)/8$ として $(\mathrm{S}_\xi 2)$ が成立する．

$\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$, $u = \begin{bmatrix} a \\ \rho \end{bmatrix} \in K$ とする．$A_{1\xi}$ と $A_{2\xi}$ は正定値自己共役だから，$\lambda - A_\xi(u)$ が逆作用素

$$(\lambda - A_\xi(u))^{-1} = \begin{bmatrix} (\lambda - A_{1\xi})^{-1} & -(\lambda - A_{1\xi})^{-1}B_\xi(a,\rho)(\lambda - A_{2\xi})^{-1} \\ 0 & (\lambda - A_{2\xi})^{-1} \end{bmatrix}$$

を持つことが分かる．$\widehat{\varphi} = \theta/2$ と取ると，

$$\|(\lambda - A_{1\xi})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_{1\xi})}, \|(\lambda - A_{2\xi})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_{1\xi})} \le \frac{C}{|\lambda|+1}, \quad \lambda \notin S_{\widehat{\varphi}}.$$

また，

$$\begin{aligned}&|\langle B_\xi(a,\rho)A_{2\xi}^{-1}\hat{f}, \hat{w}\rangle_{L^2}| \\ &\le |\langle \mathrm{Re}\, ab(\mathrm{Re}\,\rho)\nabla\{A_{2\xi}^{-1} - A_2^{-1}\}\hat{f}, \nabla\hat{w}\rangle_{L^2}| + |\langle \mathrm{div}\{\mathrm{Re}\, ab(\mathrm{Re}\,\rho)\nabla A_2^{-1}\hat{f}\}, \hat{w}\rangle_{L^2}| \\ &\le \|\mathrm{Re}\, ab(\mathrm{Re}\,\rho)\|_{L^\infty} \cdot C\xi\|\hat{f}\|_{L^2}\|\hat{w}\|_{H^1} + C\|\mathrm{Re}\, ab(\mathrm{Re}\,\rho)\|_{H^{1+\epsilon_d}}\|A_{2\xi}^{-1}\hat{f}\|_{H^{2-\epsilon_d}}\|\hat{w}\|_{L^2} \\ &\le C\|\mathrm{Re}\, ab(\mathrm{Re}\,\rho)\|_{H^{1+\epsilon}}\|\hat{f}\|_{L^2}\|\hat{w}\|_{L^2}, \quad \hat{f}, \hat{w} \in X_{1\xi},\end{aligned}$$

だから, u と ξ に一様に

$$\|B_\xi(a,\rho)A_{2\xi}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_{1\xi})} \le C$$

を得る. ここで適当な Sobolev 空間の埋蔵定理 : $\|\cdot\|_{L^p} \le C\|\cdot\|_{H^\epsilon}$ を適用した. これによってレゾルベント条件 ($\mathrm{A_{u\xi}1}$) が示された. 同様にして Lipschitz 条件 ($\mathrm{A_{u\xi}2}$) も示すことができる. ($\mathrm{A_{u\xi}3}$) については (6.15), (6.16) と Lipschitz 連続性から, $Q_\xi = \xi^2$ として導かれる.

以上で定理 6.1 が証明された. □

6.3.2 数値実験結果.

定理 6.1 によって Keller-Segel 方程式の有限要素法と陰的 Runge-Kutta 法による近似解の収束性が保証された. ここでは実際にその近似解の数値計算の結果について述べる.

方程式 (6.1) において $b(\rho) = b/\rho$, さらに $f(\rho) = f$, $g(\rho) = g$ を定数とした 1 次元領域の Keller-Segel 方程式

$$\text{(6.17)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} = d_a \dfrac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(a\dfrac{b}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x}\right), & 0 < x < 1,\, t > 0, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = d_\rho \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + fa - g\rho, & 0 < x < 1,\, t > 0, \\ \dfrac{\partial a}{\partial x} = \dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0, & x = 0, 1,\, t \le 0, \\ a = a_0(x),\ \rho = \rho_0(x), & 0 \le x \le 1,\, t = 0, \end{cases}$$

を考える. 定数はそれぞれ

$$d_a = d_\rho = 0.1, b = 10, g = f = 1$$

とする. 初期関数 a_0, ρ_0 は次のような 2 組のものを与える:

$$\text{(1)} \quad a_0(x) = 1,\ \rho(x) = \frac{1}{2} + 8x^2(1-x)^2;$$
$$\text{(2)} \quad a_0(x) = 1,\ \rho(x) = \frac{63}{64} + \frac{19}{32}x^2(1-6x+4x^2).$$

いずれの組も条件 (6.3) を満たすことがすぐに分かる. 以下, 初期関数に (1), (2) を与えた初期値問題を, それぞれ例題 (1), 例題 (2) と呼ぶ.

上記の例題に対して次のような数値解法を適用する. 空間変数の離散化には 1 次近似の有限要素法を用い, 領域 $(0,1)$ の分割は区間幅 $\xi = 1/256$ の等分割とする. 時間変数の離散化には Butcher 配列

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{3} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}$$

で与えられる 2 段数陰的 Runge-Kutta 法を用いる. これは $L(\pi/2)$-安定な 3 次法であることが知られている. 時間離散化の刻み幅は $h = 10^{-5}$ とする. また全離散近似式 (6.10) の第 2 式を非線形方程式として解くにあたっては, 反復計算

$$\widehat{\boldsymbol{V}}_n^{(new)} = \boldsymbol{J}_{\xi,h}(\widehat{\boldsymbol{V}}_n^{(old)})\{\boldsymbol{e}\widehat{U}_n + h\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}_\xi(\widehat{\boldsymbol{V}}_n^{(old)})\}$$

を用いる. 相対誤差 10^{-6}, 絶対誤差 10^{-7} を収束判定の基準とし, 最大許容反復回数を 200 回とする.

以上の計算を ACOS システム 3900 を用いて行った. 例題 (1), (2) の計算結果をそれぞれ図 6.1, 6.2 に示す. なお, 例題 (1) については $5 \le t \le 7$ で, (2) については $3 \le t \le 5$ で, 相対的な時間変化量が 10^{-4} 程度になったので, これ以降数値的に大きな変化は観察されないと判断し, それぞれ $t = 7$, $t = 5$ で計算を終了した. これら 2 つの例題はいずれも初期関数として, $a_0(x)$ を定数関数, $\rho_0(x)$ を単峰性の関数に選ばれている. これは元の現象に照らし合わせると, 細胞性粘菌 a が領域内に一様に分布している状態において, 恣意的に誘引化学物質 ρ の分布に擾乱を与えたような状況である. 細胞性粘菌の走化性を考慮すると, 時間経過に従って細胞性粘菌が化学物質濃度の比勾配の大きい方へ集まる傾向, すなわち a が ρ と同じ点で極大値を取る単峰性の分布に変化する傾向が観測されると期待される. また粘菌, 化学物質双方の拡散係数が, 粘菌の移動度に比べて小さいことから, この集中化が拡散よりも顕著に現れることも予測できる. 実際両方の例題において $t = 0.1$ 前後で a のグラフに鋭いピークが現れている. 数値データからこのピークは ρ のグラフのピークと同じ位置

にあって, 半値幅は高々 5ξ つまり $\frac{1}{50}$ 程度でしかない. さらに計算を続行して時間 t を経過させるにつれて, このピークは半値幅をほぼ一定に保ったままその高さを下げていく. Keller-Segel 方程式の性質上 a のグラフの面積は一定であるから, ピークの低下は拡散の効果に起因していることが分かる. やがて a, ρ ともに時間的変化が微小になっていくことは, 前述の通りである. 最終的に得られたグラフは図 6.1 (d), 図 6.2 (e) に示されている. これらのグラフは数値的定常解を十分な精度で与えていると考えられる. すなわち 2 つの非定数定常解が数値的に構成されているわけである. 例題 (1) の定常解が初期関数と同様に対称であるのに対し, (2) で得られた定常解は境界 $(x = 0)$ に貼り付くような分布をしている. (2) の定常解は解析的に安定かつ吸収的であって, それが数値的に裏付けられたと考えられる. 一方 (1) の定常解は, (1) の初期関数が数値的に対称であって, 有限要素法の計算がやはり対照的であるため, 対称な解の集合の中で安定かつ吸収的な定常解として得られたと考えられる. 初期関数の対称性が少しでも崩されれば, 例題 (2) の計算と同様, 境界に張り付くような分布を持つ定常解へ変化することが推測される.

1 次元 Keller-Segel 方程式 (6.17) に関しては, これまでに以下の事実が解析的に得られている.

- 条件 (6.3) を満たす任意の初期関数の組 (a_0, ρ_0) に対して, 時間大域的に有界な正値解が存在する [77].
- 拡散係数 d_a, d_ρ が他の係数に比べて比較的小さいときには, 非定数の正値定常解が少なくとも 1 つ存在する [37].

これらと照合すると例題 (1),(2) の結果は, 時間大域的な正値解の存在を示すと同時に, 2 つの非定数正値定常解を数値的に与えるものである. またここで得られた定常解以外にも非定数定常解が存在する可能性は高いが, それらは不安定であると考えられるので, 数値的構成は困難であろう.

6.4 結言.

この章では, 強い相互作用を持つ反応拡散方程式系の例を示し, そのうち Keller-Segel 方程式について数値計算の結果を述べた. 数値解法として新たに有限要素法と

陰的 Runge-Kutta 法による全離散近似解法を提案した. また, これが第 5 章で構成した抽象的な近似解法を実現したものであることを明らかにした上で, その収束性定理を示した. この解法を応用して 1 次元 Keller-Segel 方程式の数値計算を行った結果, 非定数定常解が数値的に 2 個存在することが分かった. この結果は, 少なくともひとつ存在するとしていた従来の解析的結果を補強するものである. またさらに多くの非定数定常解の存在も予想される.

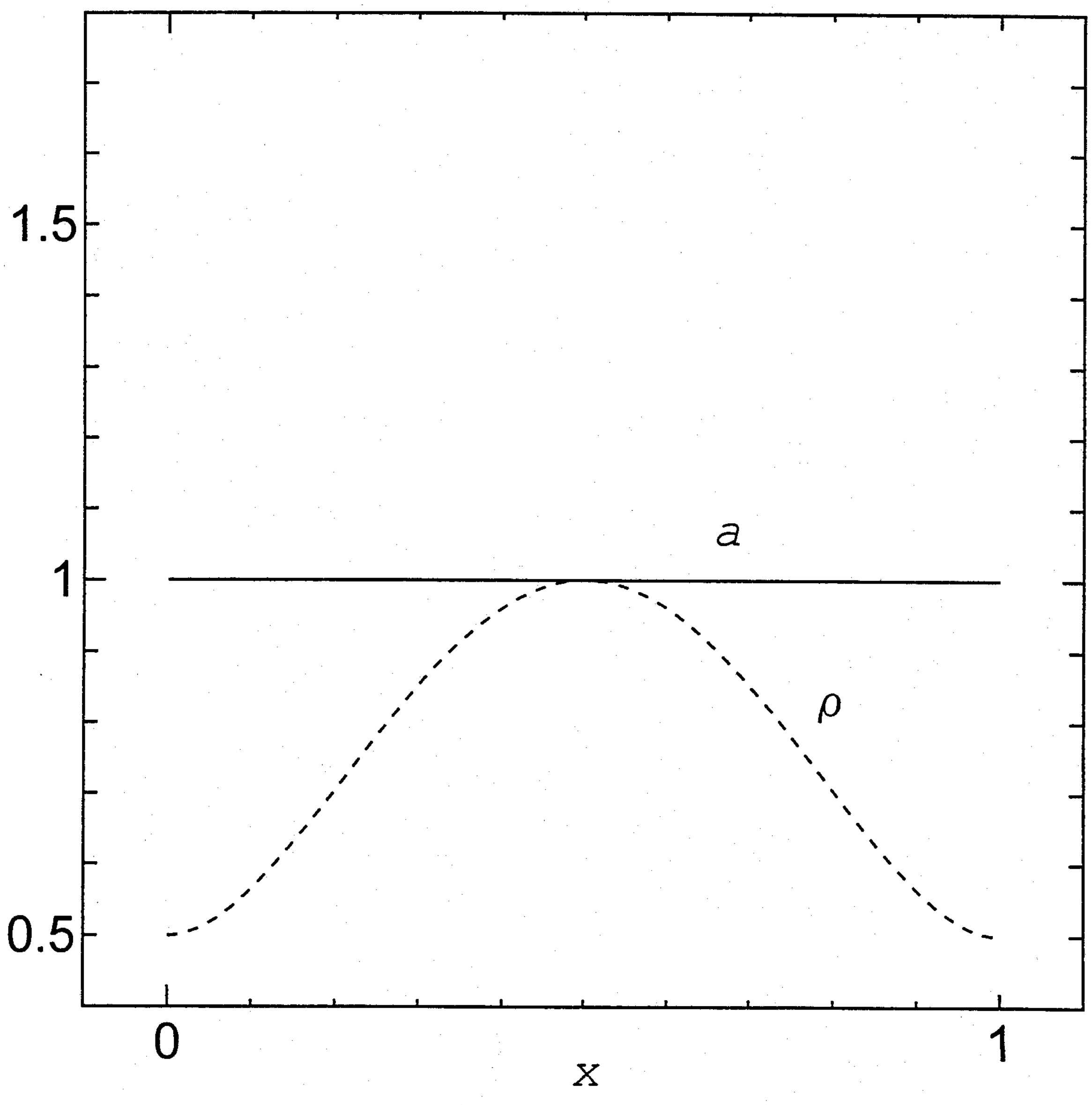

図 6.1 (a) $t = 0$

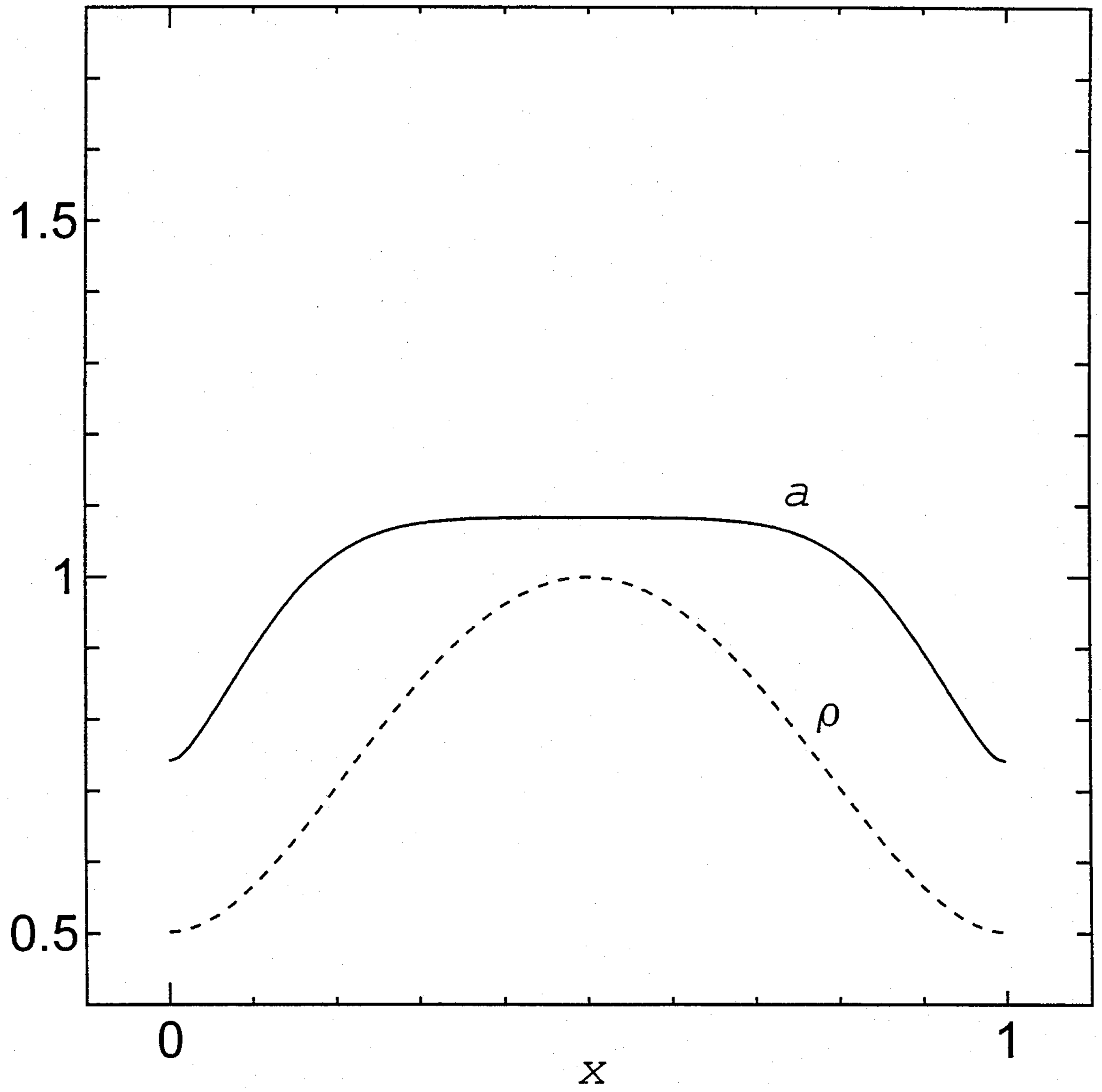

図 6.1 (b) $t = 0.001$

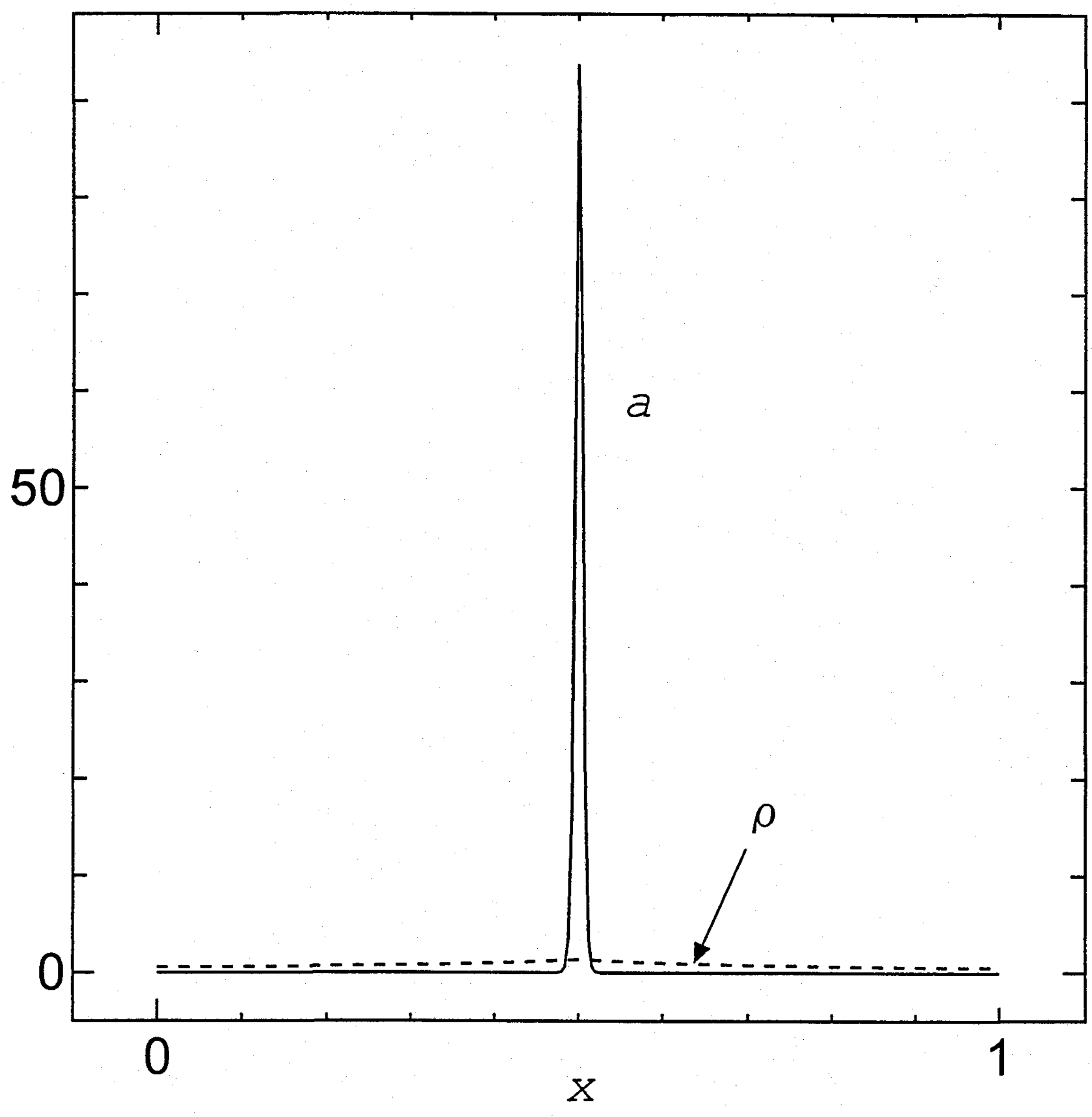

図 6.1 (c) $t=0.2$

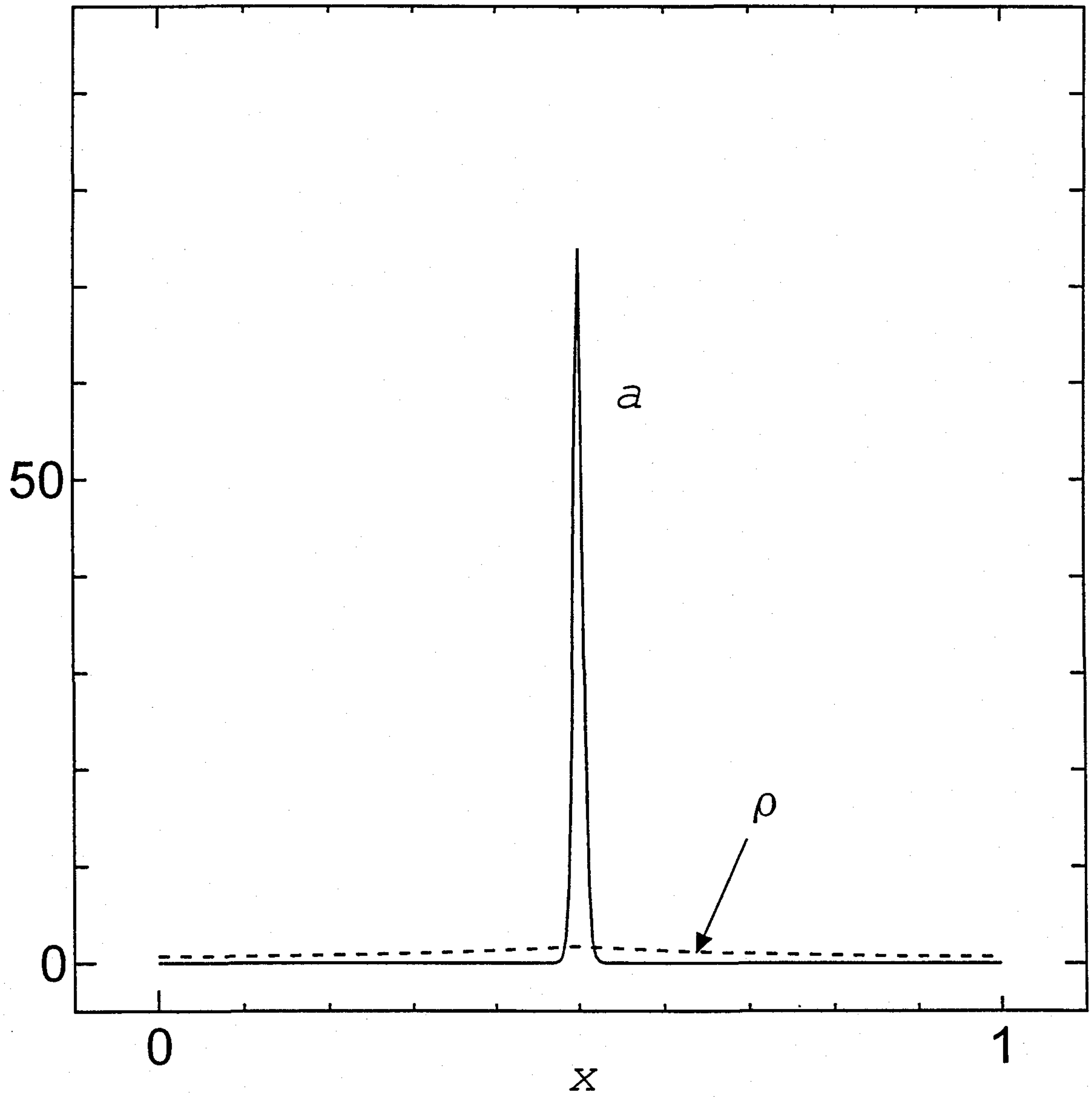

図 6.1 (d) $t = 7$

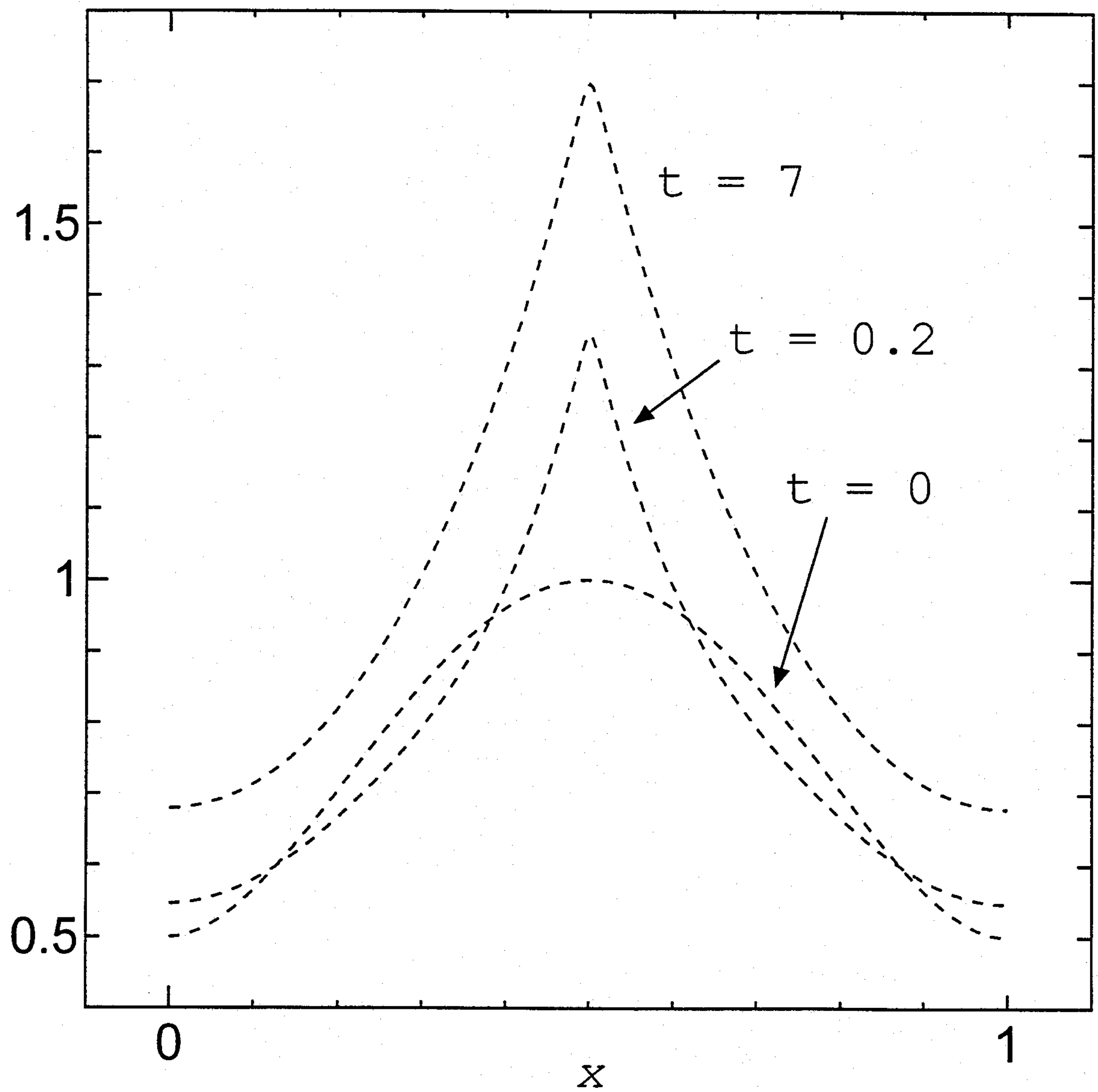

図 6.1 (e) ρ の時間推移

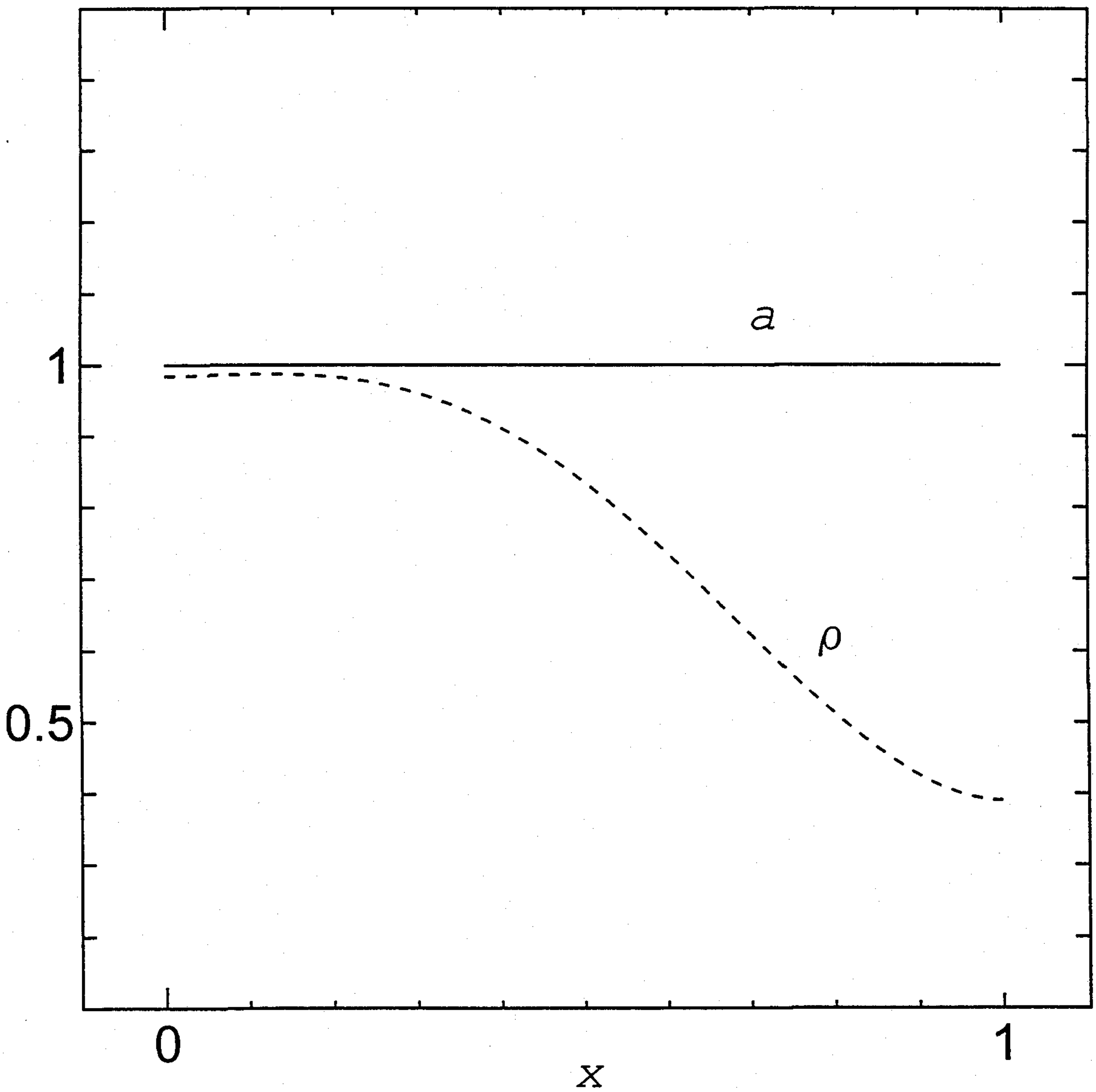

図 6.2 (a) $t = 0$

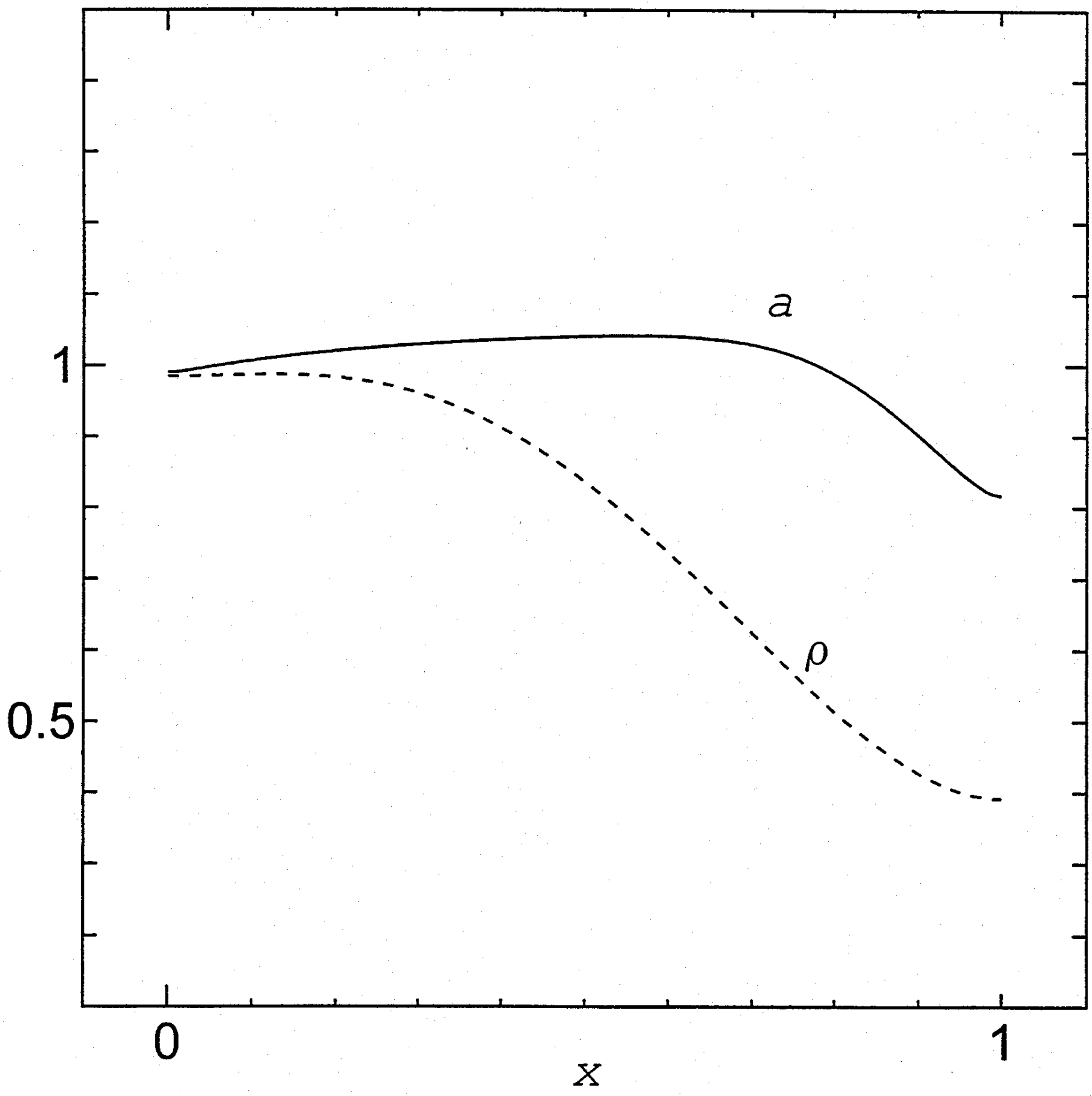

図 6.2 (b) $t = 0.001$

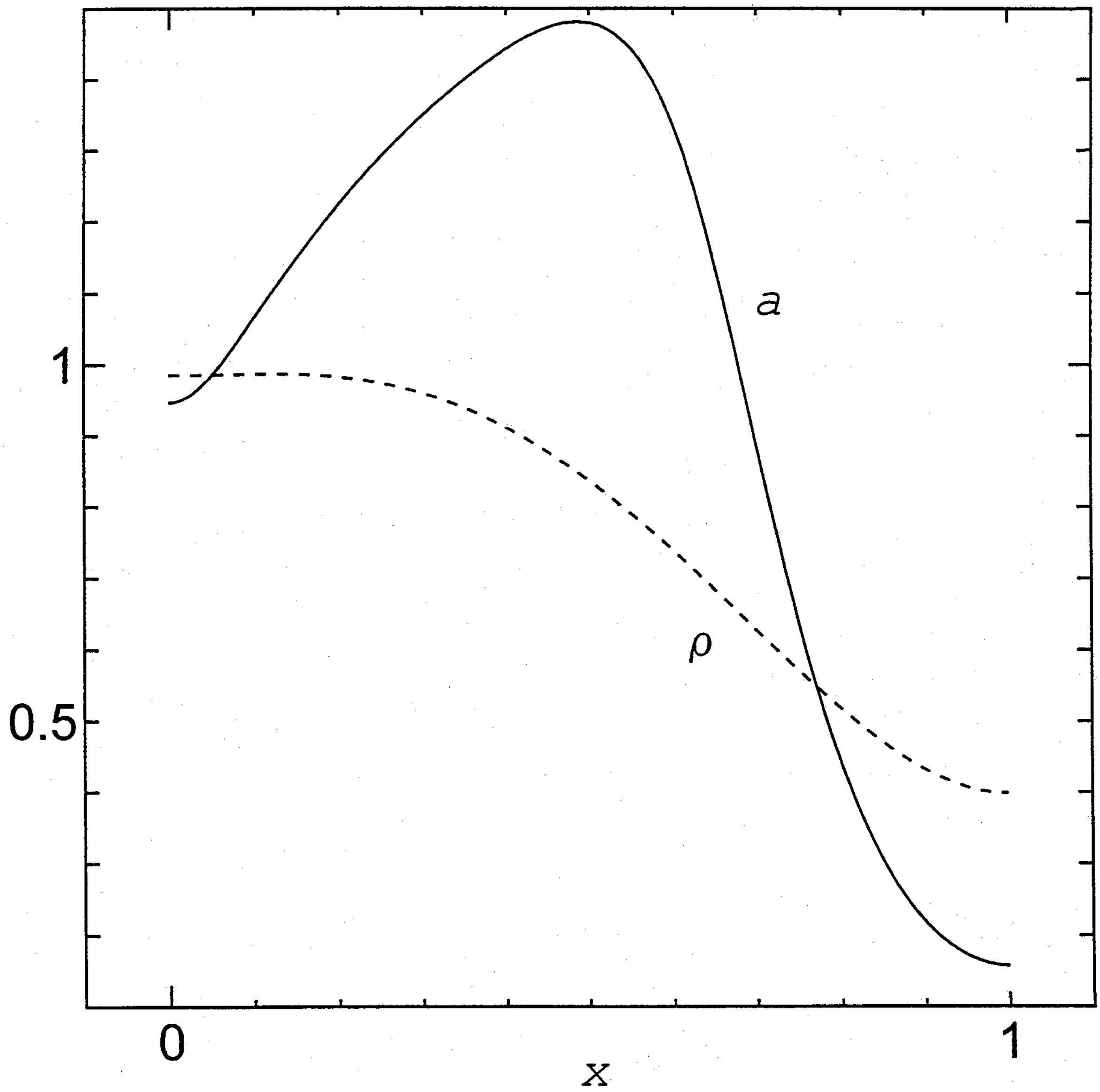

図 6.2 (c) $t = 0.01$

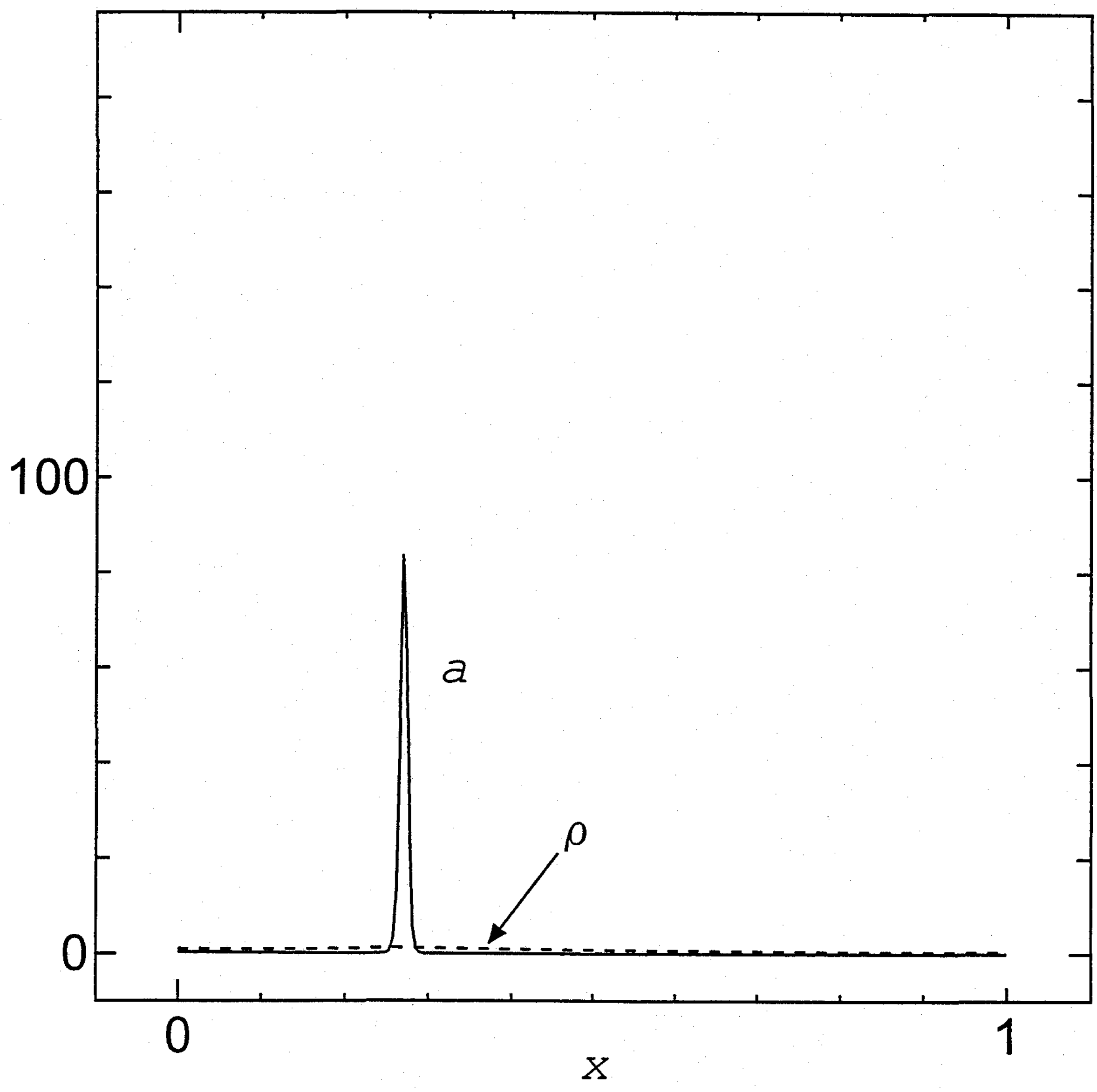

図 6.2 (d) $t = 0.1$

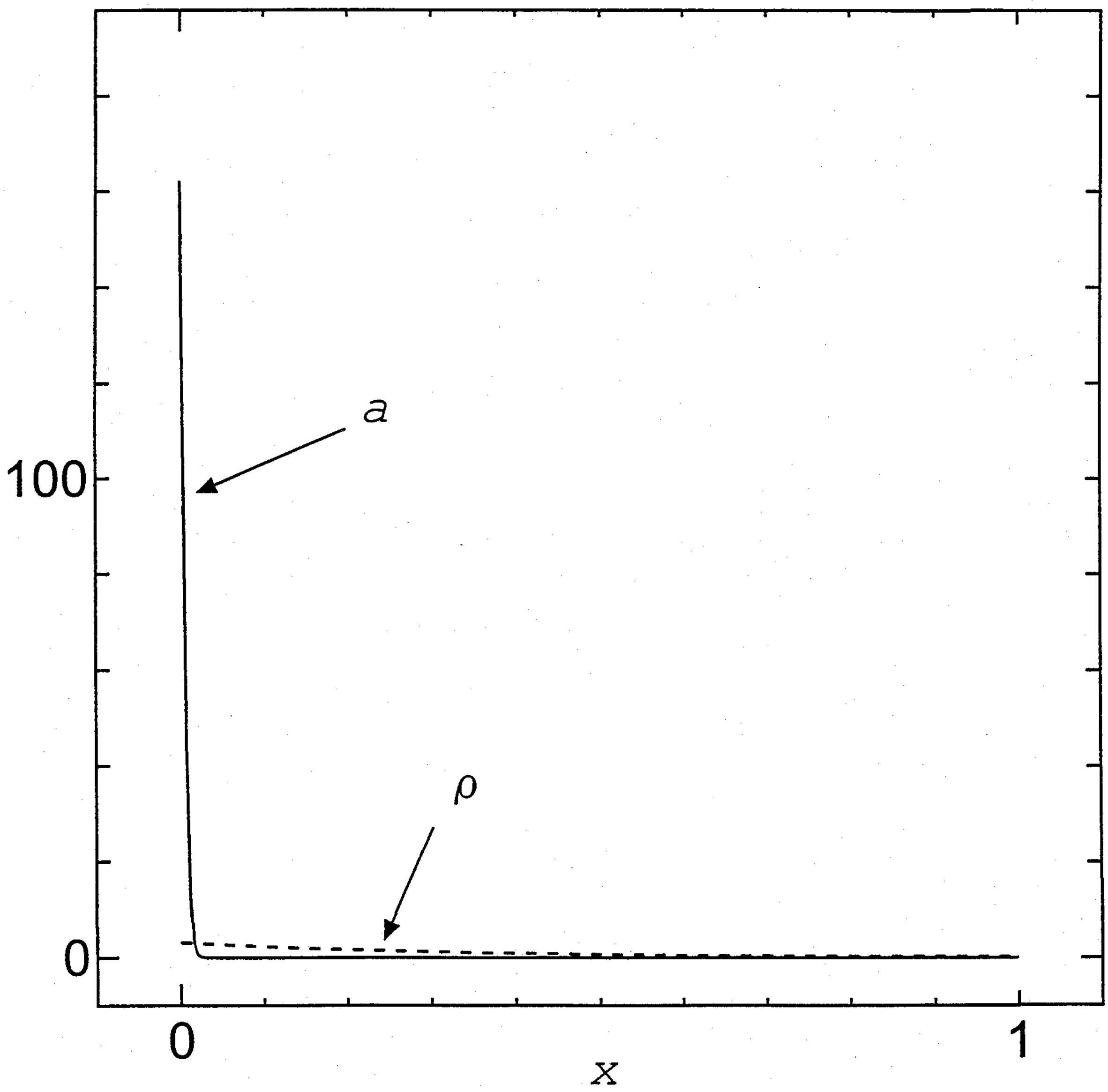

図 6.2 (e) $t = 5$

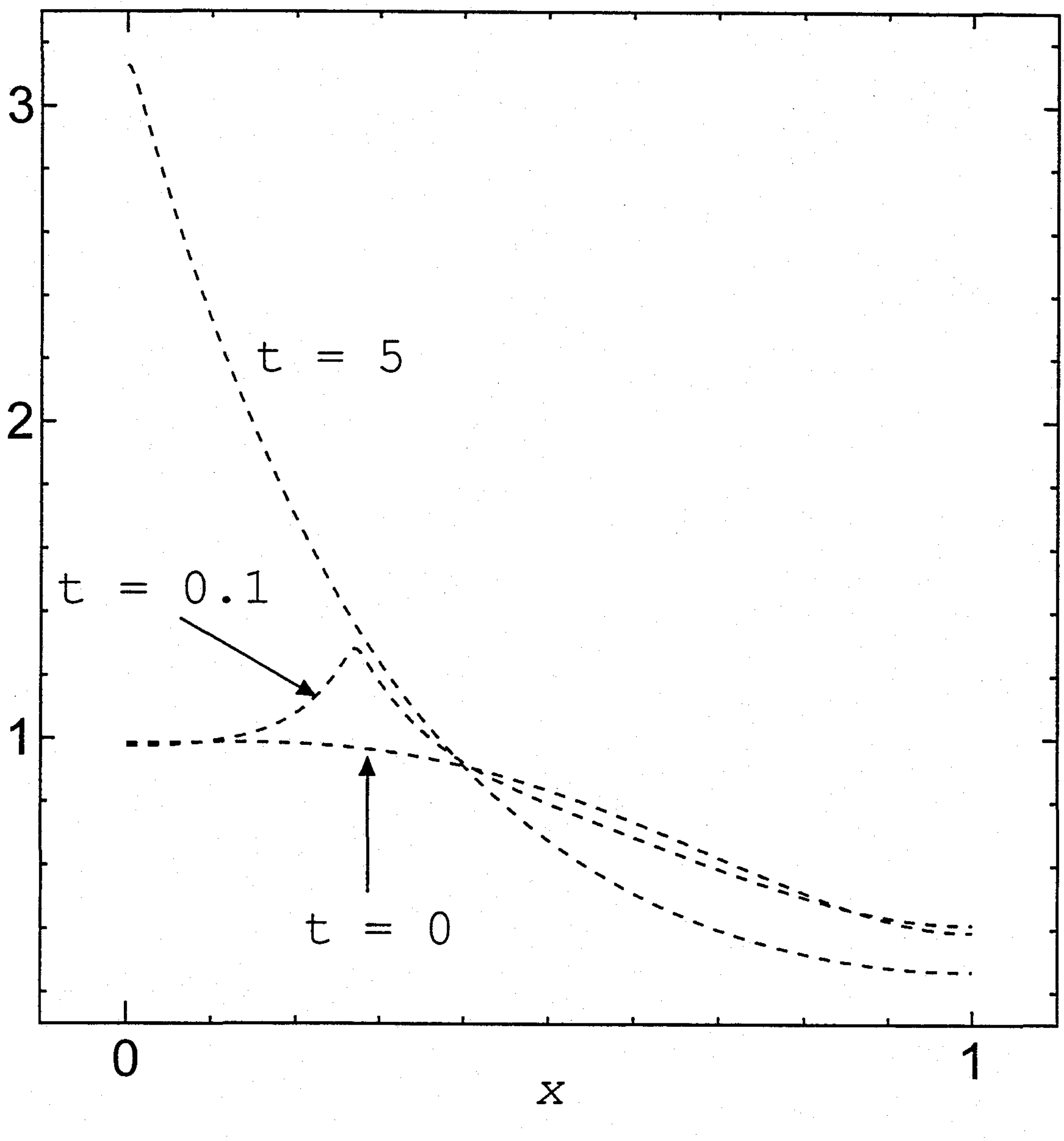

図 6.2 (f) ρ の時間推移

第 7 章

総括

本論文では, 近年注目を集めている, 強い相互作用を持つ反応拡散方程式系のための数値解法として新たに, 有限要素法と Runge-Kutta 法を利用した全離散近似解法を提案し, 解法の無条件安定性および近似解の収束性に対する保証を与えた. また, この解法を応用して, 細胞性粘菌の走化性による集合体形成の数理モデルとして知られる Keller-Segel 方程式の数値計算を実行し, 1 次元領域の場合に 2 つの非定数定常解を数値的に構成することに成功した. 解法の安定性と収束性の解析には, 抽象準線形発展方程式の理論における手法を応用し, 元の方程式に関しては時間局所解を持つための十分条件を仮定するだけで, 近似解が時間局所的に構成され, 近似誤差の評価が得られることを示した. 一方で, 陰的な時間離散化を用いることによって, 解法の無条件安定性, すなわち空間と時間の刻み幅に一様な近似解の有界性が導かれることが示された.

この章では, 本論文の内容を各章ごとにまとめ, さらに今後の研究課題について述べる.

第 1 章では序論として, 本研究の背景について触れた. 強い相互作用を持つ反応拡散方程式系に関する研究の概要をまとめ, それらに対する近似解法の必要性を述べた. また, 線形放物型偏微分方程式の近似解法に関する研究を中心にその概要を述べた. さらに本研究の目的を述べ, 本論文の内容を概観した.

第 2 章では, 放物型偏微分方程式, 陰的 Runge-Kutta 法, 有限要素法, Volterra 型離散積分方程式など, 本論文の議論の基礎となる事柄について概説するとともに, 関

連して示された新たな事実について述べた.

第 3 章では, 線形放物型方程式の陰的 Runge-Kutta 法による時間離散近似について, 抽象線形発展方程式の理論, 特に放物型半群や発展作用素の構成を手本にして考察した. 3.2 節では, 時間的斉次線形方程式の時間離散近似解が放物型離散半群によって表現されることを示し, 放物型離散半群が放物型半群と同様の性質を持つことを述べた. 次に 3.3 節において時間的非斉次線形方程式の時間離散近似方程式について, 離散発展作用素を用いた近似解の表現公式を与え, 元の方程式の発展作用素の性質に類似した離散発展作用素の有する性質を示した.

第 4 章では, 準線形放物型方程式の陰的 Runge-Kutta 法による時間離散近似解の構成を示し, その収束性の評価式を与えた. 近似解の構成は, 元の方程式の解の存在証明と同様の手順によって, 縮小写像の不動点定理を応用して証明された. ここで構成された縮小写像は, 第 3 章で与えられた離散発展作用素によって定義された. 近似解の収束性に関しては, 誤差を離散発展作用素を用いて表し, その表現式を第 3 章の結果を用いて評価することによって示した.

第 5 章では準線形放物型方程式の全離散近似解の有界性および収束性を示した. 方程式の全離散化には, 有限要素型近似と陰的 Runge-Kutta 法を適用した. まず, 第 4 章と同様に縮小写像の不動点定理を用いることによって全離散近似解が構成され, 時間近似, 空間近似に一様な評価を持つことを示した. 次に離散発展作用素を用いた近似解の誤差の表現式に対する評価として, 近似解の収束評価を得た. ここでの議論によって, 準線形放物型偏微分方程式に対する, 安定性と収束性の保証された数値解法として, 有限要素法と Runge-Kutta 法を用いた全離散近似解法が構成されることが示された.

第 6 章は, 第 5 章までの一般的結果の 1 つの応用として, 細胞性粘菌の走化性モデルである Keller-Segel 方程式の数値計算の結果を述べた. 始めに Keller-Segel 方程式に対して第 5 章で構成した全離散近似解法が応用可能であることを示し, それに対する誤差の評価式を与えた. 1 次元領域上の Keller-Segel 方程式に対して 2 種類の初期関数を与えて数値計算を行った結果, それぞれ異なる定常解に収束した様子

であることが分かった. これによって, 解析的に存在が知られている非定数定常解が, 数値的に 2 つ構成され, さらに多く存在しうることが示唆された.

次に今後の研究課題について述べる.

第 1 の重要な課題として, 本論文で扱った方程式の抽象的な枠組みを拡張することが挙げられる. 例えば [75,76] で扱われている非線形の境界条件を持つ方程式, [4,5] などで考察されている退化方程式への拡張が考えられる. このような抽象理論の拡張は, より多様な反応拡散方程式系への応用を可能にする.

次に, 近似解法に関する課題について触れる. 空間離散化については, 有限要素法が関数解析的定式化に最も適した解法と考えられるが, 本論文では領域を有界凸多角形に, 有限要素空間を 1 次のものに限定したので, これらについて検討する余地がある. 滑らかな境界を持つ領域への適用については, Zlamal [80] や鈴木 [57–60] などの結果を参考にできる. また高次要素に関する理論は Ciarlet [11,12] などに記述がある. 一方, 時間離散化について本論文では, 一段階法であるために離散発展作用素の構成が用意であるという理由もあって, Runge-Kutta 法を利用した. Runge-Kutta 法に対抗しうる候補として, 多段階法が挙げられる. 多段階法を利用した場合, 離散発展作用素の構成に多少の困難が予想されるが, この両者の比較は重要な課題である.

最後に第 6 章の数値計算に関連する課題として, 1 次元 Keller-Segel 方程式の非定数定常解をより多く見出だすことや, 多次元の場合の数値計算を実行することが挙げられる. ただし多次元の場合には解が有限時間で爆発する可能性が解析的に示されているので, 数値計算の際には最新の注意が必要である. さらに他の反応拡散方程式系についても, いくつかの特徴的な性質を数値的に明らかにすることが, 課題として挙げることができる.

謝辞

本論文は, 大阪大学大学院 工学研究科 応用物理学専攻 博士後期課程において, 八木厚志教授のご指導の下に行った研究をまとめたものです. 本研究に携わる契機を与えていただき, 懇切丁寧にご指導, ご助言を賜りました八木厚志教授に, 謹んで感謝の意を表するとともに, 厚く御礼申し上げます.

本学工学部旧数理工学教室の故 山本稔先生には, 微分方程式論の研究に携わる契機を与えていただきましたことを, 深く感謝いたします. 本学大学院工学研究科応用物理学専攻の斎藤誠慈講師には, 博士前期課程における研究に関して親切なご指導, ご助言をいただきました. 厚く御礼申し上げます.

本学大学院工学研究科応用物理学専攻の石井博昭教授ならびに川上則雄教授には, 本論文作成にあたって貴重なご助言をいただきました. ここに深く感謝の意を表します.

本学大学院工学研究科応用物理学専攻の大中幸三郎助教授には, 数値計算の見地から数々の貴重なご助言, ご指摘をいただきました. 本学大学院工学研究科応用物理学専攻の山本吉孝講師ならびに阿南工業高等専門学校の長渕裕助教授には, つねに温かいご助言, ご激励をいただきました. 心より感謝いたします. また研究室の先輩である岡山理科大学総合情報学部の大江貴司講師ならびに静岡大学工学部の山谷克助手には, 貴重なご助言をいただき, とくに感謝いたします.

最後に, 事務補佐官の荒井ゆかりさんをはじめ, 5年間の大学院在学中に様々なご協力, ご援助をいただいた八木・山本研究グループならびに大中研究グループ内外の皆様に心より御礼申し上げます.

参考文献

1. R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
2. H. Amann, *Quasilinear evolution equations and parabolic systems*, Trans. Amer. Math. Soc. **293** (1986), 191–227.
3. H. Amann, *Dynamic theory of quasilinear parabolic equations—I. Abstract evolution equations*, Nonlin. Anal. **12** (1988), 895–919.
4. H. Amann, *Global existence for a class of highly degenerate parabolic systems*, Japan J. Indust. Appl. Math. **8** (1991), 143–151.
5. H. Amann, *Highly degenerate quasilinear parabolic systems*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser. IV **18** (1991), 135–166.
6. G. A. Baker, J. H. Bramble and V. Thomée, *Single step Galerkin approximations for parabolic problems*, Math. Comp. **31** (1977), 818–847.
7. N. A. Bobylev, S. K. Korovin and S. Piskarev, *Semidiscrete approximations of semilinear periodic problems in Banach spaces*, to appear in Nonlin. Anal..
8. J. H. Bramble, A. H. Schatz, V. Thomée and L. B. Wahlbin, *Some convergence estimates for semidiscrete Galerkin type approximations for parabolic equations*, SIAM J. Numer. Anal. **14** (1977), 218–241.
9. S. C. Brenner and L. R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer-Verlag, New York, 1994.
10. J. C. Butcher, *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations*, John Wiley and Sons, Chichester, 1987.
11. P. G. Ciarlet, *Numerical Analysis of the Finite Element Method*, Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1976.
12. P. G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
13. P. G. Ciarlet and J. L. Lions (eds.), *Handbook of Numerical Analysis, Vol. II, Finite Element Methods(Part 1)*, North-Holland, Amsterdam, 1991.
14. R. W. Cox and D. S. Cohen, *A mathematical models for stress-driven diffusion in polymers*, J. Polymer Science, Part B: Polymer Physics **27** (1989), 589–602.
15. M. Crouzeix, S. Larsson, S. Piskarev and V. Thomée, *The stability of rational approximations of analytic semigroup*, BIT **33** (1993), 74–84.
16. W. Fang and K. Ito, *Global solutions of the time-dependent drift-diffusion semiconductor equations*, J. Diff. Eq. **123** (1995), 523–566.
17. W. Fang and K. Ito, *Asymptptic behavior of the drift-diffusion semiconductor equations*, J. Diff. Eq. **123** (1995), 567–587.
18. H. Fujita and A. Mizutani, *On the finite element method for parabolic equations, I; approximation of holomorphic semi-groups*, J. Math. Soc. Japan **28** (1976), 749–771.

19. H. Fujita and T. Suzuki, *Evolution Problems*, Part 6 of Handbook of Numerical Analysis, Vol. II, Finite Element Methods (Part 1), edited by P. G. Ciarlet and J. L. Lions, North-Holland, Amsterdam, 1991.
20. C. Gonzalez and C. Palencia, *Stability of time-stepping methods for abstract time-dependent parabolic problems*, preprint (Applied mathematics and computation reports, Universidad de Valladolid).
21. C. Gonzalez and C. Palencia, *Stability of Runge-Kutta methods for abstract time-dependent parabolic problems: the Hölder case*, preprint (Applied mathematics and computation reports, Universidad de Valladolid).
22. C. Gonzalez and C. Palencia, *Stability of Runge-Kutta methods for quasilinear parabolic problems*, preprint (Applied mathematics and computation reports, Universidad de Valladolid).
23. E. Hairer, S. P. Nørsett and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
24. E. Hairer and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
25. H. -P. Helfrich, *Fehlerabschätzungen für das Galerkinverfahlen zur lösung von Evolutionsgleichungen*, Manuscr. Math. **13** (1974), 219–235.
26. A. Iserles, *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations*, Cambridge UP, New York, 1996.
27. T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
28. S. L. Keeling, *Galerkin/Runge-Kutta discretizations for semilinear parabolic equations*, SIAM J. Numer. Anal. **27** (1990), 394–418.
29. E. F. Keller and L. A. Segel, *Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability*, J. Theor. Biol. **26** (1970), 399–415.
30. 菊池 文雄, 有限要素法の数理, 培風館, 東京, 1994.
31. A. N. コルモゴロフ and S. V. フォミーン, 山崎 三郎・柴岡 泰光 訳, 函数解析の基礎 *(上/下)*, 原著第4版, 岩波書店, 東京, 1979.
32. S. G. クレイン, 牛島 照男・辻岡 邦夫 訳, バナッハ空間における線形微分方程式, 吉岡書店, 京都, 1972.
33. 熊ノ郷 準, 擬微分作用素, 岩波書店, 東京, 1974.
34. S. Larsson, V. Thomée and L. B. Wahlbin, *Finite-element methods for a strongly damped wave equation*, IMA J. Numer. Anal. **11** (1991), 115–142.
35. M. -N. Le Roux, *Semidiscretization in time for parabolic problems*, Math. Comp. **33** (1979), 919–931.
36. M. -N. Le Roux, *Semi-discrétisation en temps pour les équations d'évolution paraboliques lorsque l'opérateur dépend du temps*, RAIRO Numer. Anal. **13** (1979), 119–137.
37. C. -S. Lin, W. -M. Ni and I. Takagi, *Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis system*, J. Diff. Eq. **72** (1988), 1–27.
38. Ch. Lubich and A. Ostermann, *Runge-Kutta methods for parabolic equations and convolution quadrature*, Math. Comp. **60** (1993), 105–131.
39. Ch. Lubich and A. Ostermann, *Runge-Kutta approximation of quasi-linear parabolic equations*, Math. Comp. **64** (1995), 601–627.
40. A. Lunardi, *Abstract quasilinear parabolic equations*, Math. Ann. **267** (1984), 395–415.

41. 三井 斌友, 微分方程式の数値解法 *I*, 岩波講座 応用数学, 岩波書店, 東京, 1993.
42. 溝端 茂, 偏微分方程式論, 岩波書店, 東京, 1965.
43. T. Nagai, *Blow-up of radially symmetric solutions to a chemotaxis system*, Adv. Math. Sci. Appl. **5** (1995), 581–601.
44. E. Nakaguchi and A. Yagi, *Error estimates of implicit Runge-Kutta methods for quasilinear abstract equations of parabolic type in Banach spaces*, Japan. J. Math. (to appear).
45. E. Nakaguchi and A. Yagi, *Full discrete approximation for abstract quasilinear parabolic equations*, submitted to Math. Japonica.
46. W. -M. Ni and I. Takagi, *On the shape of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem*, Comm. Pure Appl. Math. **44** (1991), 819–851.
47. A. Ostermann and M. Roche, *Runge-Kutta methods for partial differential equations and fractional orders of convergence*, Math. Comp. **59** (1992), 403–420.
48. C. Palencia, *A stability result for sectorial operators in Banach spaces*, SIAM J. Numer. Anal. **30** (1993), 1373–1384.
49. C. Palencia, *Stability of rational multistep approximations of holomorphic semigroups*, Math. Comp. **64** (1995), 591–599.
50. A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.
51. S.Piskarev, *On approximation of holomorphic semigroups*, Tartu Riikl. Ul. Toimetised **492** (1979), 3–32.
52. P. H. Sammon, *Convergence estimates for semidiscrete parabolic equation approximations*, SIAM J. Numer. Anal. **19** (1982), 68–92.
53. P. H. Sammon, *Fully discrete approximation methods for parabolic problems with nonsmooth initial data*, SIAM J. Numer. Anal. **20** (1983), 437–470.
54. G. Savaré, *$A(\theta)$-stable approximations of abstract Cauchy problems*, Numer. Math. **65** (1993), 319–335.
55. N. Shigesada, K. Kawasaki and E. Teramoto, *Spatial segregation of interacting species*, J. Theor. Biol. **79** (1979), 83–99.
56. P. E. Sobolevskiĭ, *Equations of parabolic type in a Banach space*, Amer. Math. Soc. Transl. **49** (1966), 1–62.
57. T. Suzuki, *An abstract study of Galerkin's method for the evolution equation $u_t + A(t)u = 0$ of parabolic type with the Neumann boundary condition*, J. Fac. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **25** (1978), 25–46.
58. T. Suzuki, *On the rate of convergence of the difference finite element approximation for parabolic equations*, Proc. Japan Acad. Ser. A **54** (1979), 326–331.
59. T. Suzuki, *On some approximation theorems of evolution equations of parabolic type*, Numerical analysis of evolution equations (Lecture notes in numerical and applied analysis 1), Kinokuniya, Tokyo, 1979, pp. 63–82.
60. T. Suzuki, *Full-discrete finite element approximation of evolution equation $u_t + A(t)u = 0$ of parabolic type*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **29** (1982), 195–240.
61. 田端 正久, 微分方程式の数値解法 *II*, 岩波講座 応用数学, 岩波書店, 東京, 1994.
62. 田辺 広城, 発展方程式, 岩波書店, 東京, 1975.
63. 田辺 広城, 関数解析 上/下, 実教出版, 東京, 上:1978, 下:1981.

64. H. Tanabe, *Functional Analytic Methods for Partial Differential Equations*, Mercel Dekker, New York, 1996.
65. V. Thomée, *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
66. V. Thomée, *The Finite Element Method for Parabolic Problems*, Mathematical Theory of Finite and Boundary Element Methods, Birkhäuser, Basel, 1990.
67. H. Triebel, *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
68. T. Ushijima, *Approximation theory for semi-groups of linear operators and its applications to approximation of wave equations*, Japan J. Math. **1** (1975), 185–224.
69. T. Ushijima, *On the uniform convergence for the lumped mass approximation of the heat equation*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **24** (1977), 477–489.
70. T. Ushijima, *Error estimates for the lumped mass approximation of the heat equation*, Mem. Numer. Math. no.6 (1979), 65–82.
71. T.Ushijima, *On the finite element type approximation of semi-groups of linear operators*, Numerical analysis of evolution equations (Lecture notes in numerical and applied analysis 1), Kinokuniya, Tokyo, 1979, pp. 1–24.
72. 牛島 照夫, 半群の近似と有限要素法, 数学 **32** (1980), 133–148.
73. A. Yagi, *Fractional powers of operators and evolution equations of parabolic type*, Proc. Japan Acad. Ser. A **64** (1988), 227–230.
74. A. Yagi, *Parabolic evolution equations in which the coefficients are the generators of infinitely differentiable semigroups*, Funkcial. Ekvac. **32** (1989), 107–124.
75. A. Yagi, *Abstract quasilinear evolution equations of parabolic type in Banach spaces*, Bolletino Uno. Mat. Ital. **5-B** (1991), 341–368.
76. A. Yagi, *Global solution to some quasilinear parabolic system in population dynamics*, Nonlin. Anal. **21** (1993), 603–630.
77. A. Yagi, *Norm behavior of solutions to a parabolic system of chemotaxis*, Math. Japonica **45** (1997), 241–265.
78. 八木 厚志, 強い相互作用を持つ反応拡散方程式系の研究, 生産と技術 **49** (1997), 57–59.
79. K. Yosida, *Functional Analysis* 6-th ed., Springer-Verlag, Berlin, 1980.
80. M. Zlámal, *Curved elements in the finite element method. I*, SIAM J. Numer. Anal. **10** (1973), 229–240.

著者発表論文

1. E. Nakaguchi, S. Saito and A. Yagi, *Exponential decay of solutions of linear evolution equations in a Banach space*, Math. Japonica 44 (1996), 469–481.
2. E. Nakaguchi and A. Yagi, *Error estimates of implicit Runge-Kutta methods for quasilinear abstract equations of parabolic type in Banach spaces*, Japan. J. Math. (to appear).
3. E. Nakaguchi and A. Yagi, *Full discrete approximation for abstract quasilinear parabolic equations*, submitted to Math. Japonica.