様式３

論　文　内　容　の　要　旨

氏　　名　（	丹野 真人	）
論文題名	The wild McKay correspondence for p^n-cyclic groups and quotient singularities （位数p^n巡回群の野性マッカイ対応と商特異点）	

論文内容の要旨

本論文の主題は、位数がpのベキである巡回群の場合の野性マッカイ対応、特にv関数とその積分の計算である。ここでp>0は基礎体kの標数を表す。v関数は野性マッカイ対応において重要な関数であり、標数零におけるage不変量の一般化とも思える。また整数論で現れるアルティン導手の一般化ともみなせる、興味深い研究対象である。

マッカイ対応とは、有限群Gとその線型表現Vが与えられたとき、商多様体V/Gの適当な幾何学的不変量と表現Vの適当な代数的不変量が一致する現象を指す。どのような不変量を考えるかによって様々なマッカイ対応が存在するが、本論文ではBatyrev (1998)やDenef--Loeser (2002)の研究に端を発するものを扱う。Yasuda (2019)は上述の研究を、正標数、特に野性的な状況を含む場合に拡張した：すなわち、商多様体V/Gの弦モチーフと呼ばれる不変量がv関数の積分と一致することを示した。弦モチーフは特異点の情報を含むため、v関数の計算を通じて特異点の“悪さ”を判定することができる。しかしその重要性にも関わらず、一般の場合におけるv関数の具体的な計算方法は未だ得られていない（v関数が具体的に計算されている例として、Yasuda (2014)、Wood--Yasuda (2015)、Yamamoto (2021)がある）。

そこで、Gが位数pの巡回群であるような場合にv関数とその積分の計算について考察を行う。v関数は形式円盤D上のG被覆のモジュライ空間上で定義され、積分もその上で行われる。本論文の状況ではそのモジュライ空間はアルティン・シュライアー・ヴィット理論を用いて記述することができる。特に、各滑層が乗法群とアフィン空間の積となっているような滑層分割がとれる。更にv関数自体も、G被覆に対応するG拡大の分岐フィルトレーションによって記述でき（Theorem 3.2.14）、各滑層で定数関数であることがわかる。

標数零の場合、age不変量を用いた特異点の判定法が知られている（Reid (1980)、Tai (1984)）。正標数の場合でもv関数を用いて同様の判定法が得られる（Yasuda (2019)）。特にGが位数pベキの巡回群である場合は、表現Vから定まる量を調べることで特異点の“悪さ”を判定できる（Corollary 4.2.10）。更に表現Vが直既約である場合には、より簡単にVの次元による判定法を得る（Theorem 4.2.12）。

双有理幾何学において、川又ログ端末特異点は重要な特異点のクラスである。標数零では川又ログ端末特異点はコーエン・マコーレーであることが知られているが、これは正標数では成立しない。標数pにおいて、p群による商多様体の多くはコーエン・マコーレーでないことが期待できる。本論文で得られた特異点の判定法を用いることで、G表現の次元が十分大きければ商多様体V/Gは川又ログ端末であるが、コーエン・マコーレーでない例となっていることがわかる。

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏　名	（　丹野真人　）	
論文審査担当者	（職）	氏　名
	主 査　教授	安田健彦
	副 査　教授	髙橋篤史
	副 査　教授	中村博昭
	副 査　准教授	藤田健人

論文審査の結果の要旨

本論文で、丹野真人氏は位数が素数冪の巡回群に対する野性 McKay 対応の研究を行い、理論で重要な役割を果たすｖ関数の明示的公式を導くことに成功した。また、得られた公式を応用し、前述の型の群による商特異点が双有理幾何的に良い性質を持つための数値的判定法を導出した。

McKay 対応は有限群の表現と商特異点という、代数と幾何の両分野を結びつける興味深い現象として注目されている。基礎体の標数が零の場合には、数理物理学との関連もあり、活発に研究されてきた。一方、正標数や混標数においては、野性的と呼ばれる状況が出現し、解析が著しく困難になることが知られている。McKay 対応の研究に対し試みられている様々なアプローチの一つに、Batyrev や Denef-Loeser の研究に端を発するモチーフ積分を用いたものがある。安田は近年、このアプローチを発展させ、整数論と関連の深い正標数や混合標数における野性 McKay 対応の理論を構築した。この理論に登場する様々な不変量や関数は、一般に計算が非常に難しい。理論の応用範囲を拡張するため、計算手法を発展させ、より多くの状況で具体的に不変量を計算できるようになることが、さらなる発展のために重要な課題であった。

本論文では、位数が基礎体の標数の冪に等しい巡回群の場合を詳細に調べることで、この課題に取り組んでいる。これは、位数が基礎体の標数に等しい場合に対する、安田による先行研究を一般化する試みである。野性 McKay 対応に登場するｖ関数は、標数零の McKay 対応に登場する age 不変量や整数論に登場する Artin 導手の共通の一般化となる重要な関数である。本論文の主結果の一つは、上述の群の任意の線形表現に対し、ｖ関数の明示的な公式を与えたことである。Laurent 冪級数体の拡大を Artin-Schreier-Witt 理論を用いて統制し、体拡大の分岐ジャンプと呼ばれる数値と関連付けることで、この公式を得た。

本論文のもう一つの主結果は、上述の群による商特異点が、双有理幾何学的視点から良い特異点となるかどうかの、簡便な数値判定法を得たことである。野性 McKay 対応理論より、ｖ関数を含む積分を用いて特異点を評価することが可能なことが知られていた。しかし、この積分を直接計算するのは容易ではない。丹野氏は、上つき分岐ジャンプや錐体上の線形関数を評価するなど、種々の計算技法を駆使することで、積分が収束するための条件を導くことに成功した。これにより、上述の群の線形表現に付随する商多様体が標準特異点を持つための十分条件や、対数的標準特異点を持つための必要十分条件を導くことに成功した。

この様に、本論文は、位数が素数冪の巡回群に対する野性 McKay 対応において、決定的な公式や定理を得ることに成功し、野性商特異点や野性 McKay 対応の研究に大きく貢献した。本研究で得られたいくつかの数式は、一見複雑であるが、自然で美しくもある。これらは、一朝一夕に得られるものではなく、丹野氏による長期間にわたる丹念な計算と論理の積み上げにより初めて可能となった。また、この型の群は、より複雑な群の構成要素として基本的な役割を果たすため、丹野氏が得た研究成果は今後の野性商特異点や野性 McKay 対応の研究において、重要な役割を果たすと期待される。よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値のあるものと認める。