



Title	Asymptotic behavior of solutions to nonlinear hyperbolic and dispersive equations with weakly dissipative structure
Author(s)	西井, 良徳
Citation	大阪大学, 2022, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/87809
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

論文内容の要旨

氏 名 (西井 良徳)

論文題名

Asymptotic behavior of solutions to nonlinear hyperbolic and dispersive equations with weakly dissipative structure
(弱い消散構造を伴う非線形双曲型及び分散型方程式の解の漸近挙動)

論文内容の要旨

本論文は、半線形波動方程式及び非線形Schrödinger方程式の初期値問題に対する解の長時間挙動について研究したものである。

双曲型方程式には平滑化効果がないため、非線形双曲型方程式の初期値問題を考える際、初期値が小さく、滑らかで、空間遠方で十分速く減衰している場合でも一般には有限時刻で解に特異性が生じる。そのため、非線形項が解の特異性の発生や、長時間挙動にどのように影響するかが興味の対象となる。1986年にKlainermanとChristodoulouによって導入された零条件(null condition)は、空間3次元における準線形波動方程式の小振幅解の時間大域的存在と漸近自由性を保証する非線形項の構造条件であり、非線形双曲型方程式における最重要概念の1つとして広く知られている。2000年代以降、Lindblad, Rodnianski, Alinhac, Agemi等により零条件よりも弱い構造条件の研究が進められている。Kubo(2007), Hoshiga(2008), Katayama-Murotani-Sunagawa(2012), Katayama-Matsumura-Sunagawa(2015)等により導入されたAgemi型構造条件はその1つで、零条件と消散構造を統合するような構造条件である。また、分散型方程式の代表格である非線形Schrödinger方程式において、Agemi型構造条件と対応する条件がLi-Sunagawa(2016), Sagawa-Sunagawa(2016), Sakoda-Sunagawa(2020), Katayama-Sakoda(2021)等により指摘されている。

本論文では、非線形項がAgemi型構造条件を満たす半線形波動方程式及びAgemi型構造条件と対応する消散構造を伴う非線形Schrödinger方程式に対して、これまであまり結果が知られていなかった消散構造が部分的に退化している状況下での解の漸近挙動について考察する。

以下、本論文の構成および各章の概要について述べる。本論文は全三章からなる。

第一章では問題の背景、先行研究の要約及び本論文の構成を述べる。

第二章では、2次元Euclid空間上で3次の非線形項を伴う半線形波動方程式の考察を行う。前半では方程式が単独である場合を取り扱う。学位申請者は砂川秀明氏、寺下拓貴氏との共同研究により、Agemi型構造条件を仮定し、零条件を仮定しない場合には解のエネルギーノルムが時間減衰することを示し、その減衰率の上からの評価を与えた。後半ではAgemi型構造条件を満たす斉3次の非線形項を伴う或る2成分半線形波動方程式系を考察する。学位申請者はこの連立系について、単独の場合とは対照的に、成分ごとの初期値にある種の大小関係がある場合には解の各成分が共に非自明な自由解に漸近し、特に系の全エネルギーは減衰しないことを示した。証明は、Klainermanにより創始された可換ベクトル場法を用いて半線形波動方程式を簡約化されたある種の常微分方程式へと変換し、その解の挙動を考察することにより行う。

第三章では、1次元Euclid空間上で斉3次の非線形項を伴うSchrödinger方程式について考察する。学位申請者は李春花氏、佐川侑司氏、砂川秀明氏との共同研究により、弱い消散構造の下で単独微分型Schrödinger方程式の解の L^2 ノルムが時間減衰することを示した。さらに、弱い消散構造を伴う非線形Schrödinger方程式の2成分連立系で、解が時間無限大で自由解に漸近するが、非線形項が短距離型の場合には起こりえない散乱状態への制限が生じる例を構成した。証明には、Hayashi-Naumkin(1998)で用いられたSchrödinger自由発展群のMDFM分解により、問題をある種の常微分方程式へと変換し、その解の挙動を考察する手法を用いる。

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏 名 (西 井 良 徳)		
	(職)	氏 名
論文審査担当者	主 査 教授	片山 聡一郎
	副 査 教授	富田 直人
	副 査 准教授	岡本 葵
	副 査 教授 (大阪市立大学)	砂川 秀明

論文審査の結果の要旨

非線形偏微分方程式の初期値問題を考えるとき、滑らかな初期値に対してある時刻までの解(時間局所解)の存在は古典的に知られている。初期値の大きさが小さいほど解の存在時間は長くなることが期待できるが、一般には、いくら初期値が小さくても任意の時刻までの解(時間大域解)が存在するとは限らない。非線形波動方程式や非線形シュレディンガー方程式に対しては、非線形項の次数が高ければ小さな初期値に対して大域解が存在することが知られているが、臨界次数の場合には非線形項の構造に応じて大域解の存在・非存在が分かれる。臨界次数の場合に小さな初期値に対する大域解の存在を保証する十分条件としては零条件と呼ばれる条件が有名である。零条件下では大域解は一般には非自明な自由解(非線形項をもたない方程式の解)に漸近する。他方、零条件を満たさない場合にも、特別な非線形消散項をもつ場合には大域解が存在することが古典的に知られていた。非線形消散項をもつ場合、解のエネルギーは0へと減衰していく。言い換えると解は自明な自由解(すなわち零解)に近づく。

最近になって大域解存在のための零条件よりも弱い十分条件が発見された。申請者の西井氏が上見(Agemi)型構造条件と呼ぶこの十分条件は、ある意味で両極端の場合として零条件(非自明な自由解に漸近)と非線形消散項(零解に漸近)を含んでいる。申請者の研究目的はこれらの中にある場合に大域解の挙動を決定することである。本論文で扱われている申請者が得た結果は以下のとおりである。

(1) 2次元空間における単独の非線形波動方程式に対して、上見型構造条件を満たすが零条件を満たさない場合には小さな初期値をもつ大域解は全て零解に漸近することを示した。また非線形の形に応じてエネルギーの減衰率の上からの評価を与えた。

1次元空間における単独のシュレディンガー方程式に対しても同様に零条件を満たさないが上見型構造条件を満たす場合には解が零解に漸近することを示し、エネルギーの減衰率の上からの評価を与えた。なお、減衰率に関しては波動とシュレディンガーでは空間の次元の違いに起因する差がある。

(2) 2次元空間における2成分の連立非線形波動方程式系に対して上と同様の問題を考察している。単独の場合とは異なり、連立系の場合には上見型構造条件を満たすが零条件を満たさないときにも非自明な自由解に漸近することがあり得ることを明らかにした。また初期値がある種の条件を満たす場合には2成分ともに非自明な自由解に漸近することも示している。

1次元空間における連立非線形シュレディンガー方程式系に対しても同様に、上見型構造条件を満たすが零条件を満たさない場合にも非自明な自由解に漸近する場合があることを示した。また、零条件を満たす場合とは異なり、漸近する自由解の初期値には強い制約が課されることも明らかにしている。

本論文で得られた結果は、これまでに知られていなかった弱い消散性をもつ非線形偏微分方程式に対する大域解の漸近挙動に関する新たな知見を与えるもので、非線形偏微分方程式の理論の発展に寄与するところは大い。よって、本論文は博士(理学)の学位論文として十分価値のあるものと認める。