Title	Generalized Kazdan-Warner equations associated with a linear action of a torus on a complex vector space
Author(s)	宮武, 夏雄
Citation	大阪大学, 2022, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/87810
rights	
Note	

様式３

論　文　内　容　の　要　旨

氏　　名　　（　　　宮 武 夏 雄　　　　　　　　　）	
論文題名	Generalized Kazdan-Warner equations associated with a linear action of a torus on a complex vector space （トーラスの複素線形空間への線形作用に付随した一般化カツダン-ワーナー方程式について）

論文内容の要旨

Riemann 多様体 (M, g) 上の以下の二階の楕円型偏微分方程式を Kazdan-Warner 方程式と呼ぶ:

$$\Delta_g f + h e^f = c.$$

ここに、 $\Delta_g := d^*d$ は関数に作用する幾何学的 Laplacian を表し、h, c は M 上の与えられた実数値関数であり、$f : M \to R$ が偏微分方程式の解である。Kazdan-Warner が上記 Kazdan-Warner 方程式を導入した動機は主に実 2 次元多様体上の prescribed Gaussian curvature problem を解くことにあったと思われるが、Kazdan-Warner 方程式そのものは様々な分野との関連を持ち、多様な研究がなされてきた。特に、Kähler多様体上の正則直線束上のエルミート計量を求める問題との関連は古くから良く知られていた。例えば、Jaffe-Taubesが著した本においては、複素平面上のU(1)-接続に関する偏微分方程式を解く際に、上記Kazdan-Warner方程式と同じ形の方程式が調べられている。

本論文では、実トーラスの複素線形空間への線形作用に対する運動量写像を用いてKazdan-Warner方程式を一般化した楕円型偏微分方程式（一般化Kazdan-Warner方程式）をRiemann多様体上に導入し、コンパクトRiemann多様体上でその楕円型偏微分方程式の解の存在と一意性を証明する。本論文において導入する楕円型偏微分方程式は、その具体例としてBryan-WentworthによるKähler曲面上のmulti-monopole equationや、Riemann面上のcyclic Higgs束に付随する対角形の調和計量に対するHitchin方程式　(Toda-lattice with opposite sign) がその具体例であって、特にこれらの偏微分方程式を実トーラスの複素線形空間への線形作用に対する運動量写像の観点から、統一的に一般化するものである。

本論文の構成は以下の通りである。第一章では、一般化Kazdan-Warner方程式の定義を与え、本論文の主定理である、一般化Kazdan-Warner方程式のコンパクトRiemann多様体上での解の存在と一意性の定理を述べる。第二章では、コンパクトKähler多様体上のHiggs束と調和束について、既知の事柄を振り返る。第三章では、主定理の証明を与える。証明では、変分法を用いる。有限次元の運動量写像のKähler商とGIT商の間の対応に関するKempf-Nessの定理で用いられたエネルギー汎関数を拡張した汎関数を導入し、偏微分方程式の解の存在と一意性の問題をその汎関数の臨界点の存在と一意性の問題に帰着させ、それを示すことにより定理の証明を与える。第四章では、主定理を用いて、コンパクトKähler多様体上のG-Higgs束について、その対角形の多重調和計量が存在するための必要十分条件を与える。特に、コンパクトRiemann面上のcyclic Higgs束について、それに付随する調和計量が対角形となることは既に知られているが、そのことを主定理の観点から説明する。第五章では、葉層構造付き多様体上において主定理を拡張する。それを用いて、第四章にて与えた命題と同様の主張がコンパクト佐々木多様体上のbasic Higgs束についても成り立つことを示す。

様式 7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏　名　（　宮武　夏雄　）

論文審査担当者		(職)	氏　名
	主　査	教授	後藤　竜司
	副　査	教授	石田　政司
	副　査	教授	山ノ井　克俊
	副　査	准教授	糟谷　久矢

論文審査の結果の要旨

Kazdan-Warner 方程式は曲面上のガウス曲率を実現する関数を決定する問題を解く際に導入された楕円型偏微分方程式である．宮武氏は実トーラス線形作用に関する運動量写像の観点から,任意次元リーマン多様体上で Kazdan-Warner 方程式の拡張である<u>一般化された Kazdan-Warner 方程式</u>を導入し，その解の存在と一意性に関する顕著な定理を示した．定理の証明において，有限次元シンプレクティック商と GIT 商の間の対応に関する古典的な結果である Kempf-Ness の定理にて用いられる有限次元汎関数を拡張した無限次元汎関数を導入し,PDE の解の存在問題をその汎関数の臨界点の存在問題に帰着させる変分法を用いた.この一般化された Kazdan-Warner 方程式はリーマン面上で考えると特別な形の Higgs 場及び調和計量に対応する．ケーラー多様体 (X,ω) 上の正則ベクトル束 E → X において $\mathrm{End}E\otimes\Lambda^{1'0}\to X$ の正則切断 Φ が Φ∧Φ=0 を満たすとき,Φを Higgs 場といい,組み (E,Φ) を Higgs 束という．Higgs 束は小林・ヒッチン対応により，ケーラー多様体 X の基本群の表現と対応しており，リーマン面の基本群の表現空間への応用，そして高次元非可換ホッジ理論など様々な発展を続けている．ベクトル束が直線束の直和に分解している場合は特別な重要性を持っており,Higgs 場 Φ にある種の対称性がある場合，計量が調和計量となり,平坦な接続を与えるための方程式は上記:一般化された Kazdan-Warner 方程式となっている．また，この方程式は特殊な場合として 2 次元逆符号周期的戸田方程式を与え，様々な重要な方程式を統一的に扱う枠組みを提供している.宮武氏による一般化された Kazdan-Warner 方程式の解の存在条件は Simpson による通常の Higgs 束の安定性条件とは異なる具体的かつ明解な形をしている.

宮武氏の結果は以下の国際的なジャーナルにおいて既に出版され,establish されており,また，宮武氏は様々な国際的な研究集会でも講演し,この結果は注目を集めている.

N. Miyatake, Generalized Kazdan-Warner equations associated with a linear action of a torus on a complex vector space, Geom Dedicata 214, 651–669 (2021).

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める.