The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Formulation of the Atiyah-Patodi-Singer index in lattice gauge theory
Author(s)	川井, 直樹
Citation	大阪大学, 2022, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/87817
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

様式３

論　文　内　容　の　要　旨

氏　名　（　　川井　直樹　　）	
論文題名	Formulation of the Atiyah-Patodi-Singer index in lattice gauge theory （格子ゲージ理論におけるアティヤ・パトディ・シンガー指数の定式化）

論文内容の要旨

格子ゲージ理論は、離散時空で定義されるゲージ理論の非摂動的かつゲージ不変な定式化である。ギンスパーグ・ウィルソン関係式を満たすオーバーラップ・フェルミオンの場合、有限の格子間隔でもカイラル対称性が中心的な役割を果たすアティヤ・シンガー指数定理を定式化することが可能である。しかし、アティヤ・シンガー指数定理を境界のある多様体に拡張したアティヤ・パトディ・シンガー指数定理は、格子ゲージ理論では知られていなかった。これは、格子上で非局所的な境界条件を課すことが困難であること、またそのような境界条件がギンスパーグ・ウィルソン関係式と相入れないためである。

連続理論において、質量のあるフェルミオン演算子のエータ不変量を用いた指数定理の再定式化が提案され、カイラル対称性がない場合にも指数が定式化できることが示された。その再定式化によれば、アティヤ・シンガー指数は質量のあるフェルミオン演算子のエータ不変量と等価であり、アティヤ・パトディ・シンガー指数はドメインウォール・フェルミオンのエータ不変量と等価である。格子上のアティヤ・シンガー指数はオーバーラップ・フェルミオンを使って定式化されているが、その定式化にオーバーラップ演算子の定義を代入すると、質量のあるフェルミオンで表現できることが自然に現れる。格子ゲージ理論におけるアティヤ・シンガー指数は、質量のあるウィルソン・ディラック演算子のエータ不変量と等価である。

我々は、この新しい定式化を用いて、4次元の格子ゲージ理論におけるアティヤ・パトディ・シンガー指数の非摂動的定式化を提案する。この提案を検証するために、古典連続極限において、格子ドメインウォール・フェルミオンのエータ不変量がアティヤ・パトディ・シンガー指数の表式と一致することを摂動的に示す。エータ不変量を評価するために、ゲージ場のないドメインウォール・フェルミオンの二乗の固有モード集合を導出し、その固有モード集合を用いてエータ不変量を評価する。その結果、連続極限において、アティヤ・パトディ・シンガー指数の曲率項は質量のあるバルクモードからの寄与として現れ、境界のエータ不変量は質量のないエッジに局在したモードから現れることがわかった。格子上のドメインウォール・フェルミオンのエータ不変量はその定義から整数であることが保証されているので、格子上のアティヤ・パトディ・シンガー指数は格子ゲージ理論におけるアノマリー流入機構を厳密に記述することが可能である。

様式 7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏　名　（　川井　直樹　）		
論文審査担当者	（職）	氏　名
	主 査　教授	大野木 哲也
	副 査　教授	兼村 晋哉
	副 査　准教授	山口　哲
	副 査　准教授	石井　理修
	副 査　助教	深谷　英則

論文審査の結果の要旨

博士論文「Formulation of the Atiyah-Patodi-Singer index in lattice gauge theory」の論文審査結果の要旨は次のとおりである。

格子ゲージ理論は、離散時空で定義されるゲージ理論の非摂動的かつゲージ不変な定式化である。ギンスパーグ・ウィルソン関係式を満たすオーバーラップ・フェルミオンの場合、有限の格子間隔でもカイラル対称性が中心的な役割を果たすアティヤ・シンガー指数定理を定式化することが可能である。しかし、アティヤ・シンガー指数定理を境界のある多様体に拡張したアティヤ・パトディ・シンガー指数定理は、格子ゲージ理論では知られていなかった。

近年、質量のあるフェルミオン演算子のエータ不変量を用いた指数定理の連続理論における再定式化が提案された。川井直樹氏はこの新しい定式化をベースに 4 次元の格子ゲージ理論におけるアティヤ・パトディ・シンガー指数の非摂動的定式化を提案した。この提案を検証するために、古典連続極限において、格子ドメインウォール・フェルミオンのエータ不変量がアティヤ・パトディ・シンガー指数の表式と一致することを摂動的に示した。この成果はすでに学術論文として出版されている。

格子上のドメインウォール・フェルミオンのエータ不変量はその定義から整数であることが保証されているので、格子上のアティヤ・パトディ・シンガー指数は格子ゲージ理論におけるアノマリー流入機構を厳密に記述することが可能である。さらにこの結果はカイラル対称性がない場合でも指数が定義できるという重要な理論的示唆を与える。

川井氏の研究は、格子ゲージ理論と数学の境界領域の探求に大きな波及効果を与える独創的な成果であり、博士（理学）の学位論文として十分価値のあるものと認める。