Title	微分幾何学に基づく可展面設計の計算機支援に関する研究
Author(s)	吉田, 皓太郎
Citation	大阪大学, 2022, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/88047
rights	
Note	

博士学位論文

微分幾何学に基づく
可展面設計の計算機支援に関する研究

吉田　皓太郎

2022 年 1 月

大阪大学大学院工学研究科

目 次

記号の定義

記号	意味
$\mathbb{N}$	自然数全体の集合
$\mathbb{Z}$	整数全体の集合
$\mathbb{R}$	実数全体の集合
$\mathbb{R}^n$	n 次実数ベクトル全体の集合
$\mathbb{R}^{n\times m}$	実数の $n \times m$ 行列全体の集合
$\mathcal{S}$	有限次元の基底関数空間
$A \backslash B$	差集合
$[a, b], (a, b)$	閉空間および開空間
$(a, b], [a, b)$	半開空間
$A \times B$	集合 A と集合 B の直積
$\boldsymbol{a}$	ベクトル
$\boldsymbol{A}$	行列
$\lvert\boldsymbol{a}\rvert$	ベクトルのユークリッドノルム
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$	ベクトルの内積
$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$	ベクトルの外積
$\boldsymbol{e}$	ベクトル空間の基底
$\boldsymbol{e}_x$	x 軸方向の単位ベクトル
$\boldsymbol{e}_y$	y 軸方向の単位ベクトル
$\boldsymbol{e}_z$	z 軸方向の単位ベクトル
$\boldsymbol{I}_n$	n 次の単位行列（しばしば n を省略する）
$\max(\boldsymbol{a})$	ベクトル要素の最大値
$\min(\boldsymbol{a})$	ベクトル要素の最小値
$\dim \boldsymbol{B}$	線形空間 $\boldsymbol{B}$ の次元
$\mathrm{vec}(\boldsymbol{B})$	行列のベクトル化：$\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1^\top & \boldsymbol{b}_2^\top & \cdots & \boldsymbol{b}_n^\top \end{pmatrix}$
$\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}$	ベクトルのアダマール積：$\begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_n b_n \end{pmatrix}$
$\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}$	行列のアダマール積：$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \circ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2 \circ \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \circ \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}$
$\mathrm{diag}(\boldsymbol{a})$	ブロック成分 $\boldsymbol{a}$ を持つブロック対角行列
$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$	正方行列の対角要素和：$\sum_{i=1}^n a_{ii}$
$\det \boldsymbol{A}$	正方行列の行列式（$\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n), \forall \boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^n$ とも表す.）
$\boldsymbol{B}^\top$	正則行列の転置

記号	意味
s, u	曲線の弧長
l	曲線の全長
t	線織面を記述するパラメータ，母線方向の長さ
$\boldsymbol{t}_p$	平面曲線の接線方向
$\boldsymbol{x}_p$	平面曲線の空間座標
$\boldsymbol{t}$	フレネセレ標構における，曲線の接線方向
$\boldsymbol{m}$	フレネセレ標構における，曲線の主法線方向
$\boldsymbol{b}$	フレネセレ標構における，曲線の従法線方向
κ	平面または空間曲率
τ	捩率
$\boldsymbol{\zeta}$	物体標構を構成する基底の１つ．曲線の接線方向に一致する
$\boldsymbol{\xi}$	物体標構を構成する基底の１つ
$\boldsymbol{\eta}$	物体標構を構成する基底の１つ．曲面の法線方向に一致する
ω_ξ	ξ 軸まわりの回転率
ω_η	η 軸まわりの回転率，展開後の曲線の曲率に相当する
ω_ζ	ζ 軸まわりの回転率
$\boldsymbol{\omega}$	各軸周りの回転率をまとめたベクトル．$(\omega_\xi \;\; \omega_\eta \;\; \omega_\zeta)$
$\boldsymbol{x}$	曲線の空間座標
$\boldsymbol{d}_g$	曲面の母線方向
D	曲面の母線長
α	ξ 軸と母線のなす角度
E, F, G	曲面の第一基本量
L, M, N	曲面の第二基本量
$\boldsymbol{d}_{\max}, \boldsymbol{d}_{\min}$	曲面の主曲率方向，また本論文では，$\boldsymbol{d}_{\min} \sim \boldsymbol{d}_g$ である．
$\kappa_{\max}, \kappa_{\min}$	最大主曲率，最小主曲率
T_D	可展面形成可能な最大母線長
$\hat{s}(u), \hat{u}(s)$	可展面形成時における，弧長間の関係
$\boldsymbol{\zeta}_L, \boldsymbol{\xi}_L, \boldsymbol{\eta}_L, \boldsymbol{\zeta}_U, \boldsymbol{\xi}_U, \boldsymbol{\eta}_U$	可展面の境界曲線上に定義される物体標構の基底
$\boldsymbol{\omega}_L, \boldsymbol{\omega}_U$	境界曲線上に定義される物体標構の各軸周りの回転率ベクトル
$\boldsymbol{x}_L, \boldsymbol{x}_U$	可展面の境界曲線の空間座標
$\hat{g}$	任意の関数 $g(u)$ と $\hat{u}(s)$ の合成関数

第1章　緒論

1.1　研究背景

設計について

設計とは，製品の要求を満たす機能を形状へと変換し，それを製作するための手順を考慮しながら，試行錯誤を繰り返し，最終的に形状を定量的に決定していく作業の事を指している．この設計行為を体系化する試みが行われ，今日では,「設計工学」と呼ばれる学問に発展している．設計者が設計行為の中で行うことは,「創造的作業」,「知的作業」および「作業的作業」の3つに分類される [1].「創造的作業」では，要求仕様を満たすであろう設計案の作成を行い,「知的作業」では，その設計案が確かに要求仕様を満たすかを検討を行い，基本設計解を検討する．そして,「作業的作業」では，その設計案を伝達手段として，図面に表現するため，図面の作成や機械への指令へ変換させる作業を行う．

設計工学における体系的設計原理によれば，設計行為は大きく分けて「概念設計」,「基本設計」,「詳細設計」の3つに大別されるとされる [2]．概念設計は，設計工程の中でも最も上流に位置している工程である．この過程では，設計要求に基づく基本設計解を作り出す．そのために，自然法則の発見，理解を行い，その法則を組み合わせ期待する機能を実現させる．概念設計では，設計思想およびコンセプトの存在が重要であり，その作業のほとんどが創造的作業であり，仕様の認識や理解などの一部は知的作業である．基本設計は，概念設計で得られた結果を基に，設計を具体化する過程である．製品の基本的形態や構造方式を決め，基本レイアウトを作成する．この工程では，知的作業が中心となる．詳細設計は，基本設計の結果をもとに，詳細形状，詳細レイアウトが決定される．基本設計では機能を定めることが中心となる一方，詳細設計では，寸法やレイアウトを決定することが中心となる．このため，作業的作業がほとんどを占めることになる．その後，生産技術を決定する工程設計や工程計画などが行われる．

こうした設計行為を，コンピュータなどの計算機により支援するために CAD(Computer-Aided-Design) システムは誕生した．このシステムでは，設計行為のうちの「作業的作業」および「知的作業」を中心に支援を行う．システム誕生の背景には2つが大きな要因として挙げられる．

1つ目は，製品ニーズの多様化による製品のライフサイクルの短縮化である．18世紀から19

世紀に起こった産業革命は，製品生産の工業化における著しい成長をもたらした．この結果，消費者の需要は細分化，多様化の一途を辿っている．また，現代はVUCAの時代と呼ばれ，社会にとって，未来の予測が難しく変化が起こりやすい時代であり，消費者の需要もまた，その予測を行うことが難しくなっている．こうした中，現代のものづくりにおいては，こうした状況に対して対応をしていくことが求められている．ものづくりにおいては，工程が進むほど仕様変更の自由度が低下していくことから，コストの8割は設計で決まると言われている．そのため，後工程での手戻りの未然防止のためにも，設計の効率化は重要な課題とされている．

2つ目は，熟練設計者の減少である．設計の効率化が求められる一方，特に先進国では，少子高齢化の傾向が強く，労働人口の減少や経験豊富な技術者の減少が課題となっている．この事実は，いわゆる「匠の技術」など，試行錯誤の経験の末獲得する技術やノウハウが多い設計行為において，その効率化に対する大きな課題となっている．

このような背景の中で，CADシステムは発展し，今日まで研究開発や機能の拡充などが絶えず行われている．以下では，今日までのCADシステムの発展の歴史について概観する [3,4]．

CADの歴史について

CADシステムの起源は，1963年にマサチューセッツ工科大学(MIT)で，サザーランドが開発した「SketchPad」が誕生とされている．このシステムでは，グラフィックディスプレイとライトペンを用いて対話的に図形を生成するものであった．また，MITでの研究とは独立して，1959年にゼネラルモーターズで開発プロジェクトが立ち上がっている．

この当時のCADは，製図の手法をそのまま踏襲しており，従来鉛筆，定規と消しゴムで行われていた製図作業が，ライトペンやデジライザに取って代わられたものとなっている．

3次元形状処理を行えるCADシステムは，1970年代後半に登場した．このシステムでは，曲線・曲面の表現方法として広く知られている，Bezier曲線・曲面やB-spline曲線・曲面が実装されている [5]．

3次元形状，特に複雑な自由曲面をCADにより扱う手法が広く知られるようになったのは，1960年代初頭の，ボーイングのファーガソンの研究からである．1967年には，クーンズパッチと呼ばれる曲面の表現手法が提案された．しかし，パッチ同士の接ベクトルなどの導関数ベクトルの調整を行う必要があり，直観的に曲面を設計することが難しいという課題があった．

こうした中，1966年に制御点を用いて表現するベジエ曲線が広く知られるようになり，同時に，この手法を曲面へ拡張したベジエパッチも提案された．このベジエパッチは，ルノーの設計システムUNISURFとして実装された．

ベジエ曲線は，一般に制御点の個数nに対して，$n-1$次の多項式である．このため，制御点の個数を増やすと，それに応じて高次元な曲線となり，曲線の制御が複雑になってしまう問

題などが起こった．そこで，比較的低次のベジエ曲線を区分的に接続することで，局所的な曲線制御を達成しつつ，形状を表現できる，B-spline 曲線が誕生し，これを拡張した B-spline 曲面も開発された．この曲面は元々確率分布の計算用に考案された手法であるが，1970 年代初頭にゴードンらにより形状モデルへ応用することが研究された．その後，1975 年に B-spline 曲面を有理化する研究が行われ，ティラーやビーゲルによって，NURBS（Non-Uniform Rational B-spline）曲面として，広く名が知られるようになった．

3 次元 CAD が革新的であった点の 1 つに，自由曲面を 3 次元的に扱うことができる点が挙げられる．これにより，従来デザイナがスケッチ図やラフ図によって曲面形状を表現するしかなかった設計工程において，3 次元 CAD により直接形状編集の意図を指示できるようになり，図面でのやりとりよりも，意図の伝達がスムーズに行われるようになった．

また今日では，3 次元 CAD モデルを後工程に利用するためのシステムとして，CAM（Computer-Aided-Manufacturing）や CAE（Computer-Aided-Engineering）が存在している他，計測データから CAD モデルを生成する，リバースエンジニアリング技術など，3 次元 CAD に関連する様々な技術が存在している．ここに，その概説を示す．

CAM システム

CAM システムとは，主に生産工程を計算機による支援するシステムの総称である．CAM の歴史は主に NC（Numerical Control）切削加工とともに発展しており，そのはじまりは，1948 年に米国の Parson 社が行った，ヘリコプタの羽の型板を輪郭加工する新しい工作機械の構想研究である．切削加工における CAM システムでは，CAD の形状情報を基に，加工に必要な形状を認識し，部品を構成する加工形状要素に分類する機能がある．そして，分類した加工形状要素に基づいて，加工に必要な諸条件を決定する機能，および工具の移動軌跡シミュレーションによる干渉チェックが行われたのち，妥当性が確認されれば，NC プログラムへ出力する機能を持っている．3 次元 CAD システムの発展により，CAM システムも発展し，複雑な加工も行えるようになっていった．

CAE システム

CAE システムとは，形状の設計案の性能評価・改善に携わる技術である．一般的に製品設計においては，形状設計案が導出されたあと，製品の機能・性能が設計者の要求通りであるかを検討する工程が行われる．この製品の機能・性能の検討は，設計において最も重要な部分である一方，多くの設計案を評価するためには多大な労力と費用がかかる．こうした機能・性能の検討を計算機により支援する技術の総称であり，特に，FEM（Finite Element Method）をはじめとする数値解析手法を指す場合も多い．3 次元 CAE システムを用いた製品設計は，自動車

をはじめ数多く行われている [6]．FEM を利用する場合には，解析モデルを作成する必要があるが，3 次元 CAD データがあれば，比較的簡易に解析モデルへ変換させることができる．

リバースエンジニアリング

ものづくりにおけるリバースエンジニアリングとは，製品のイメージとして作られたクレイモデルや，すでに現物がある製品を計測して得られるデータから，CAD データを作成する技術を指す．技術として完全に確立されている訳ではないため，実用的に利用されている場面は多くはないが，直観的なイメージなどを基にした製品設計を行えることができるため，近年注目されている [7]．

今日における CAD の現状と課題について

このように 3 次元 CAD システムを用いることで，設計と生産の部門で共通のデータを用いてやりとりができることに加え，製品の機能・性能評価をはじめとし，干渉チェックなどの詳細設計への応用も可能となっており，単なる形状設計のみならず，ものづくりにおける様々な工程に対する支援にも繋がる重要なシステムである．日本における 3 次元 CAD が製造業に普及しはじめたのは，1990 年半ば頃からであると言われているが，しかし，およそ 30 年近く経った現代にあっても，広く普及していると言えない現状がある [8]．経産省が発表した「ものづくり白書」による調査では，Fig. 1.1 に示すように，3 次元データのみで設計を行っている割合は 17.0%であり，図面と併用している割合とを合わせても，およそ 51.0%であった．つまり，およそ半数の設計現場では，未だに 3 次元 CAD そのものが導入されていないことが明らかにされている．

CAD が普及しきらない理由は様々あるが，その 1 つに設計者が暗黙のうちに考慮する制約条件の存在が挙げられる．一般的に，最終的に設計が完了して出力される設計案には，設計工程内で推敲された，設計目的，設計理由，拘束条件など，最終的な形状の決定および製造に関わる情報など，設計意図が反映された形で出力される．しかし，CAD により管理されるデータは，単なる形状データ以上の意味を持たないため，こうした設計意図や暗黙制約などを伝達させることは難しく，多くの場合は，前述したように，試行錯誤の結果などで獲得する場合が多い．こうした設計意図の伝達も考慮した CAD システムは，インテリジェント CAD と呼ばれ，吉川らや荒井らをはじめとして，このシステムに関する関する研究が行われてきた [9]．しかし，その実現化には至っていない．

形状情報と結びつくような設計意図の中でも，生産時に関する制約について取り上げる．設計者が製品を設計する際は，設計時に要求される機能を実現すると同時に，加工方法をはじめ

とする後工程に関する情報などを考慮しながら，設計を行う．この後工程に関する情報もまた，暗黙的な制約であり，CAD の幾何情報から必ずしも直接読み取れる訳ではない．

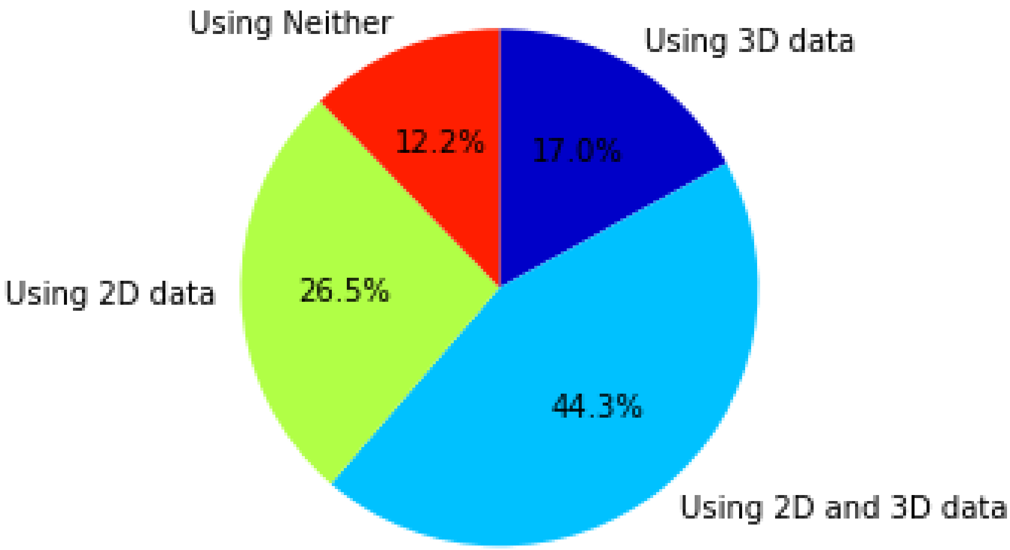


Fig. 1.1　The penetration ratio of CAD system obtained by interviewing

このような生産時に関する制約には，主に加工方法に関連するものが挙げられる．例えば旋盤加工の場合，加工の特性上，加工しやすい形状，加工しにくい形状が存在する [10]．こうした一例として，薄肉形状や，細長い長物と呼ばれる形状が挙げられる．このような製品においては，切削に対するワークの剛性が不足し，うまく削ることができなくなってしまう．したがって，旋盤加工において加工を行う製品では，このような技術の特性を理解しながら設計を行う必要がある．

また，射出成形など，金型に樹脂や金属を注入し，固化させたのち，成形品として取り出す形で製品を生産する場合，製品形状には抜き勾配と呼ばれる勾配をつけて設計する場合が多い [11]．これは，成型品を金型からスムーズに取り出すために，抜き方向に対する傾斜のことをいう．成型時に溶融樹脂が冷却されて成型品になるときに成形収縮を起こすため，強く固着したり，金型と擦れてしまうため，成形品不良などの要因となってしまう．

こうした不具合を解決するため，Fig. 1.2 に示すような直角を持つ製品に対し，大きくて 1 度から 2 度ほどの傾斜を作る．このように，比較的直観的解釈が容易なものもある一方，そうで

ないものも多い．以降では，そのような製品の中でも，曲げ加工により形状を形成する製品に着目する．

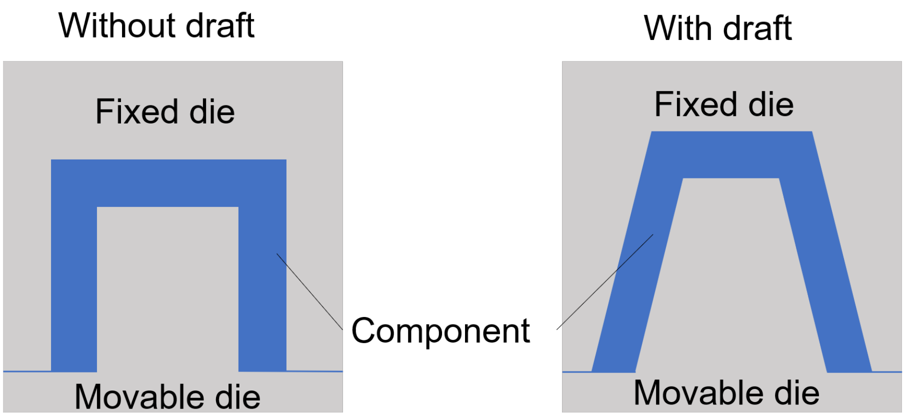


Fig. 1.2　The description of the draft

曲げ加工により形成する製品への制約

以降では，平面から加工を行い 3 次元曲面を作ることを「形成」操作と呼び，3 次元曲面を展開し，平面形状を得ることを「展開」操作と定義する．

このような製品の完成までの手順は，設計工程，生産工程，製造工程の 3 つに大別される [12]．設計工程では，設計要求や過去のデータなどを基に，概念設計，基本設計，詳細設計を経て要求を満足するような設計解を決定する．こうした設計解は，多くの場合 3 次元 CAD データ，または図面によって具体化される．生産工程ではまず，設計工程で具体化された設計解を基に，展開図を考える．こうして得られた展開図を，切断データに変換し，裁断機により形状を切り抜き，平面の展開形状を生産する．そして，製造工程では，生産工程で得られた展開形状から，実際に製品を形成していく工程である．製造工程における加工方法には，プレス加工をはじめとして，ぎょう鉄曲げや縫製，溶接など様々存在するが，一例としてプレス加工について取り上げる．

プレス加工を行う際は，プレス機と金型を用いて加工を行う．製品形状の形成を担うのは，主に金型であり，パンチ（オス金型）と呼ばれる上部のバインダーとダイ（メス金型）と呼ばれる下部のバインダーにより構成されている．パンチは，プレス機の「スライド」と呼ばれる上下に往復運動する上テーブルにセットされ，ダイはプレス機の「ポルスター」と呼ばれる下テーブルにセットされる．

平板をプレス加工する工程は，バインダー同士を閉じ，それを保つことで，シートをあらかじめ曲げておく工程，そして，ダイとパンチでシートをプレスし，形を形成する工程の 2 つが

存在する．バインダーには，2 つ目のプレス工程でプレスされるシートの金属量を調整する役割があり，平面内での弾性変形をなるべく小さくすることや，しわが極力発生しないことが望まれる．このような不具合を避けるためには，生産工程において，設計案から設計される展開形状を設計する工程は非常に重要である．

この工程を行う方法は，設計する製品によって様々あるが，例えば造船分野においては，線図から展開形状を設計する方法として，測地線[注 1)]展開法や，接触面展開法などが存在する．ただ，展開する形状などによって，手法の適用が難しい場合も多く，その場合には，設計者の経験や勘に基づいて行われる．また，展開法に関する研究もいくつか行われており，松尾らは曲率線情報に基づく展開システムが提案している [13,14]．また，今岡らは衣類製品を対象として，人体形状から展開形状を生成する手法を提案している [15] 他，外山らによって板金構造物を対象に，動的計画法や遺伝的アルゴリズムを用いた展開図設計手法が提案されている [16,17]．

ただ，この問題を考えるにあたっては，任意の形状が必ずしも展開可能ではないという事実に注意を向けるべきである．例えば，球の曲面形状は，数学的に展開できないことが知られている．[注 2)]また，造船分野における展開法では，非可展修正と呼ばれる作業を行う場合もあるが，得られた平面形状が意図する形状を再現できるとは限らない．

したがって，生産工程における不具合をより少なくするためには，設計工程において，多様な要求を満たす一方で，後工程を考慮した場合には，曲面の展開可能性という暗黙的制約が存在し，これを満たすように設計されることが求められる．

しかし，展開可能性という制約は直観的な解釈が難しく，その考慮度合は設計者の熟練度合に依存する．上記のことから，計算機による数理的な支援が不可欠であると考えられる．

可展面について

可展面は，伸縮なしに平面に変位できる曲面を指す曲面であり，基準曲線および母線により構成される曲面として数学的に定義されている．可展面の概念自体は，紀元前まで遡ることができるとされているが，その数学的特性に関する研究が行われたのは，17 世紀頃からである．特に 18 世紀にかけて，オイラーらが微分幾何学を用いたアプローチにより，可展面に関する一般的な数学的性質を明らかにしている．また，そのほかの数学的性質に関しては，今日まで様々な研究が行われている [18]．本研究では，工学的な立場から可展面を考察する．平面を伸縮なしに変位させることで形成できる曲面が可展面であるとすると，その形成する操作は,「曲げ」操作と「折り」操作の 2 つに分類できると考えられる．操作の違いにより，同じ平面形状でも得られる形状は異なる．

[注 1)]曲面上の 2 点を結ぶ曲線のうち，距離が最も最小となるような曲線を指す．変分法に基づく微分方程式の解として導出される．

[注 2)]詳細は付録にて示す．

一例として，Fig. 1.3 に示す四角形の平面形状から,「曲げ」による可展面と「折り」による可展面を形成している図を示す.

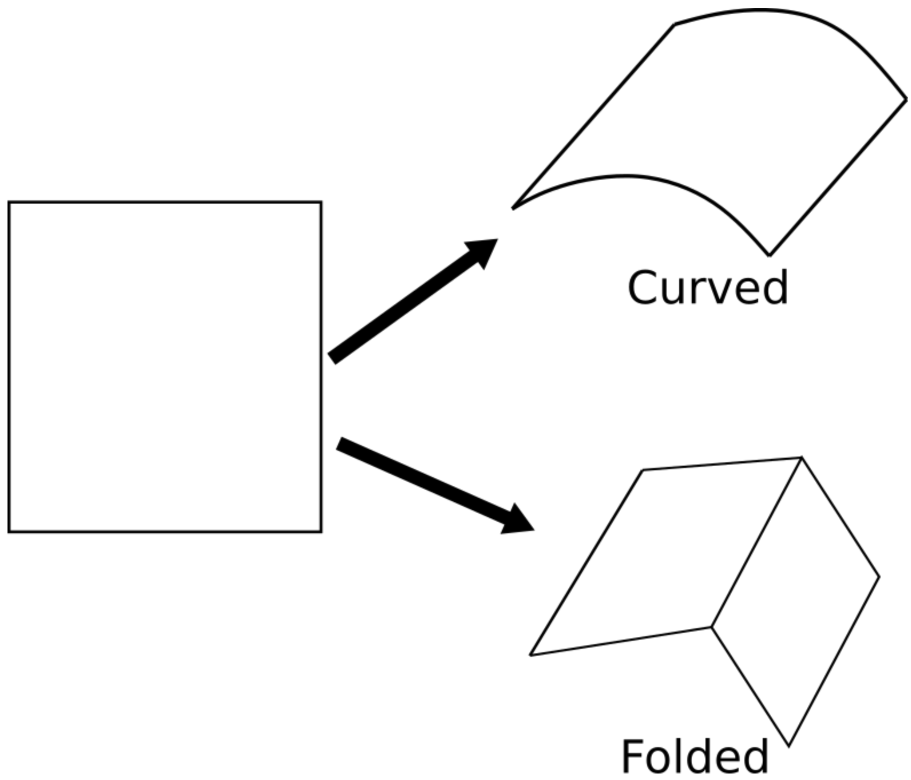


Fig. 1.3　The description of the difference between folded and curved shape.

この 2 つの曲面の違いを特徴づけるのは，形成される曲面の微分可能性である.「曲げ」操作により形成される曲面は，なめらかな曲面，つまり曲面の任意の点において，少なくとも微分連続性が保証される曲面である．一方,「折り」操作により形成される曲面は，折りが生じている部分においては，微分連続性が保たれていない曲面を指す.

次節に述べる先行研究では，この 2 つの操作の違いに基づいて分類を行う.

1.2　先行研究

本節では，可展面を形成する操作などの観点により，形状モデルの分類を行い，既存の研究についてまとめる.

折りを持つ可展面について

はじめに,「折り」により表現される可展面に関する研究について紹介する．折りにより形成される可展面は，例えば折り紙の形状などに見られる．こうした折り紙により形成できる形状設計に関する研究は，様々行われており，回転掃引による 3 次元形状を利用した折り紙の設計手法 [19]，指定された入力点の集合から折り紙構造の頂点座標を生成する手法 [20] や，空間曲線での折りを含む折り紙の設計方法なども提案されている [21]．

折りを工学的に応用させる試みについては，例えば「ミウラ折り」は人工衛星の太陽電池パネルの折りたたみ方法に使用されている．また,「吉村パターン」と呼ばれる構造を持つ曲面は，飲料缶の曲面などに見られる．また，折り曲げの加工は比較的容易に達成することができる一方，様々な形状や機能を持つ製品を製作できるため，折り構造による剛体構造や空間的なリンク機構を表現することも可能であり，こうした機構を持つ折り紙ロボットに関する研究が盛んに行われている [22, 23]．

このように，一部の分野においては，折りに関する工学的応用が行われているものの，その形状には形状はなめらかでない点を多く含んでいる．工業製品の多くは，全体的になめらかな曲面であることを要求されることが多いことから，折りにより実現される形状よりも，曲げにより実現される形状の方が，設計支援を行う上では重要であると考えられる．

曲げを持つ可展面について

前述の通り，工業製品において見られる可展面のほとんどは,「曲げ」により生成される可展面である．この曲面モデリングおよび設計支援に関する研究を，形状の数理表現により基づき，3 つに分類したのち，それぞれについて紹介を行う．

可展面上の曲線を基にした手法

第 1 のアプローチは，可展面上に存在すると仮定した曲線を基に，曲面を設計する手法である．曲線の表現方法には，パラメトリックに表現されている曲線の他，直観的に編集できることから，B-spline などの制御点により表現する曲線が用いられている．Bo らは，曲面上に存在する測地線に着目し，測地線を操作することによる形状制御手法について述べている [24]．また，Zhao らは，曲線を曲面上に含む可展面の設計手法について，その必要条件および十分条件について導くことで，形状を設計する手法している [25]．また，この他にも，Bertrand 曲線と呼ばれる主曲率が互いに等しい曲線を用いた表現方法が提案されている [26]．

特に曲線が曲面の境界曲線として与えられている場合については，Aumann は，ある境界曲線が 1 つ与えられた場合において，対応するもう片方の境界をベジエ曲線で設計する手法につ

いて提案している [27]．また，F-Jambrina は，Aumann の成果を一般化し，可展開条件を満たす B-spline 曲面の制御点ネットを得るためのアルゴリズムを提案している [28]．また，Perez と Fernandez らは，2 つの境界曲線が与えられる場合において，その間に可展面を形成する手法を提案している [29] 他，包絡線や凸包を利用したアルゴリズム [30] など，様々なアプローチで研究が行われている [31,32]．さらに，Bo らの研究や Cao らの研究などでは，与えた境界曲線において，その間に可展面を常に生成できるとは限らないという観点から，入力された境界曲線間に可展面を形成できるよう，変分法 [33,34] や CSA というヒューリスティックス手法を用いて修正する手法を提案している [35]．

双対表現を基にした手法

第 2 のアプローチは，可展面を局所的に表す平面式の軌跡として表現するものである．3 次元ユークリッド空間における任意の平面は，係数 $a_i (i = 1, 2, 3, 4)$ を用いて

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 = 0 \tag{1.1}$$

と表現される．可展面は，局所的には平面であることから，a_1, a_2, a_3, a_4 があるパラメータ t によって $a_i(t)$ のように表現できるとすれば，t が変化することによって描画される軌跡であると解釈できる．このような表現は双対表現とも呼ばれ，これを用いると，B-spline 曲面の可展開条件などの非線形特性方程式を解くことなく，表現できるという利点がある．Pottman らは，この双対表現により，可展面が双対射影 3 次元空間上の曲線であると満たすことができることから，可展 NURBS 曲面を線形近似するアルゴリズムについて提案している [36] 他，Boddululuri らは，この表現に基づいた可展面設計法について述べている [37]．また，Li および Chu らは，この表現に基づき，ベジエ曲面を拡張した，C-Bezier 可展面と呼ばれる可展面の表現方法を提案している [38]．さらに，Hoffmann らはこの表現を用いて，機械学習の 1 手法である，ニューラルネットワークを用いて設計を行う手法を提案している [39]．

離散的表現を基にした手法

第 3 のアプローチは，可展面を離散的に表現する手法が挙げられる．Sun らは，曲線に応じて，接線曲面，円柱，円錐の 3 つを組み合わせ，新しい可展面を生成する手法について述べている [40]．ベジエ曲面や B-spline 曲面に，可展開の特性を持たせる方法としては，Chen らや Chu らが，与えられた 2 つの境界曲線を補間する区分的ベジエパッチによって表現するためのアルゴリズムを提案している [41–44]．また Gavriil らは，建築プロジェクトにおけるパネルを用いた曲面を設計支援するため，B-spline 曲面表現を用いた可展面設計支援手法について，制御点を最適化する手法を提案している [45]．さらに Rabinovich らによって，四辺形メッシュを用い

て可展面を表現する手法が提案されている [46] 他，Liu らは可展面設計を目的として，離散幾何学によりモデル化した四辺形のメッシュを摂動させる手法について提案している [47,48]．また，Frey らは，三角メッシュにより表現する手法について述べている [49]．

可展面モデルの応用に関する研究

可展面のモデリング手法を応用・拡張し，可展面の設計支援に関する研究が行われている．

1 つ目は，点群やメッシュで表現された形状に対して可展面を求める手法である．Peternell は，点群をガウス写像により表現したのち分類を行った上で，双対表現によって可展面を表現する手法について述べている [50, 51]．Chen らは，点群との誤差を最小化する可展面を，非線形最小二乗法を用いて求める手法について提案している [52]．一方，Stein らは与えられたメッシュ形状を，いくつかの可展開な三角メッシュにより表現する手法について提案している [53]．

2 つ目は，単眼画像から可展面を復元する研究である．Fondevilla らは，注釈をつけた一枚の単眼画像を基に，3 次元の可展面および展開図を復元する手法を提案している [54]．また，Luo らは，ある画像を復元する可展面を，再投影した際の曲面の誤差を最小にすることで求めている [55] 他，渡辺らは単眼画像から 3 次元形状を復元させる手法について提案している [56]．

また，特定の分野では，可展面の性質を応用しようとする試みが行われている．工作機械における加工経路計画生成においては，Chu と Chen は 5 軸加工機のフランクミル加工において，加工表面を可展面近似することで，工具干渉を回避させるような加工経路計画を自動生成する手法に区分的について提案している [57]．また，シェル構造を持つ建築物設計においては，可展面が曲げのみによって形成できる観点から，施工性に優れているとされている．こうした性質を活かし，崔らは，可展面を区分的に接続することで，自由曲面を近似的に表現する研究を行っている [58]．そのほかにも，可展面の性質を活かした展開メカニズムを持つ製品開発に関する研究が行われている [59–61]．

1.3 本研究の目的

先行研究について俯瞰すると，以下のような問題点が挙げられる．

1 つ目は，可展面の 3 次元形状およびその展開形状設計のための，体系的な形状モデルが確立されていない点である．可展面を製品に用いる場合の多くは，その展開後の形状が必要とされる．

しかし，前述したように，可展面のモデリングおよび設計支援手法に関する研究の数多くは，その 3 次元形状の設計のみに着目している．また，可展開メッシュを展開する手法などに言及しているものもあるが，得られる展開形状の，特に境界線がなめらかでない場合も多い．仮に

メッシュの節点数を大きくすれば，幾ばくかなめらかにすることもできるが，なめらかさを追及することで，多くの点数が必要となるため，設計に要する計算時間などの懸念が生じてしまう．そのため，可展面を記述する形状モデルにおいては，なるべく連続的な表現を用いつつ，3次元形状が設計された際，同時に展開形状も導出できることが求められる．

また，2つ目として，既存の研究においては，主に形状の表現方法など，設計目的が限定的であった点が挙げられる．前述したように，設計においてはある意図する形状から復元を行うリバースエンジニアリングや，FEM解析などの性能値など，様々な目的に合わせて形状が設計される．こうした形状設計への要求に対しては，既存の設計支援手法だけでは，対応することができない．

上記に述べた問題を解決するため，本研究では,「曲げ」操作により生成される1枚の可展面を対象とした，曲面の設計支援手法を提案する．

この手法を提案するにあたっては，その要素技術として，以下の2つの技術が必要である．

要素技術1. 可展面の形状を表現するモデリング技術

要素技術2. 設計者の目的に合わせた設計支援技術

要素技術1. については，可展面の3次元形状およびその展開形状との結びつきを表現できるモデルについて提案する．そして，設計者の形状制約に応じた形状の生成および，幾何情報の編集が要求された場合における手法について述べる．要素技術2. については，本研究では，以下に挙げる2つの設計目的に応じた設計支援手法を提案する．

目的1. 点群に対する設計支援

目的2. 性能値に対する設計支援手法

目的1. に関しては，設計者の意図をより直接的に表現できる，または，モック形状などを計測し読み込むことで，直接可展面形状を設計できるという点で，目的2. に関しては，FEMをはじめとする様々な性能値に対する要求に対応できるという点で，目的の選定を行った．

このような2つの題目を達成し，設計効率化を計算機によって支援することを，本研究の大目的として定める．

1.4 本研究の活用分野

本節では，本研究により提案された手法が，どのような製品への設計支援に応用されるかについて，いくつかの例を通して述べる．

船舶設計

船体の側面部は，古くは木を用いて作られていたが，溶接技術をはじめとする生産技術の発展により，現在では主に板金を曲げて作成されるようになった．造船の設計には，海上における流体抵抗に対する性能の他，その施工性などが評価基準となる．造船過程ではまず，過去の設計データや実験データを基に，船型線図を決定する．その後，船体基本構造図と合わせて現図作業が行われ，加工，組み立て用の図となる．そして，生産工程では，線図から展開図を設計し，NC 機械を用いて鋼板を展開図に合わせて切断し，形状を作成する．そして製造工程では，ローラーやプレス機による成形や，溶接などで生じたひずみを取り除くため，熱処理などを経て，形状を形成していく [62]．2 つの 0 でない主曲率方向を持つ，二重曲面の場合には，圧延後に熱処理を行い，曲率を作り出す．この熱処理は，熟練の作業者が手作業で行い，適切な曲げを実現するが，非常に時間と労力のかかる作業であることに加え，熟練者の減少なども相まって，造船過程においてしばしば問題となっている．Avondale/IHI Shipbuilding Technology Transfer 社のタンカーのデータによれば，船体の曲面プレートのうち，一方向にのみ曲率が存在しているのは 15.1%である一方，65.8%はローラーと熱処理工程を必要とする，二重曲面の状態である [63]．この熱処理の工程をなるべく少なくし，生産効率化を図る試みとして，船体形状をなるべく可展面で表現しようとする試みが数多く行われている [64]．例えば [63] では，Burmeister & Wain Shipyard 社は船体の面に占める可展面の割合を増やそうとする集中的な取り組みを行い，その結果，船体の製造に必要なコストが 20%削減されたことが報告されている．他にも，前述した研究の中にも，造船における設計工程に可展面を応用する研究が様々行われている．本研究の提案する手法は，可展面の形状表現性を高め，設計をより効率化するための技術であるため，船舶設計に関しても，手法の応用を期待できる．

建築設計

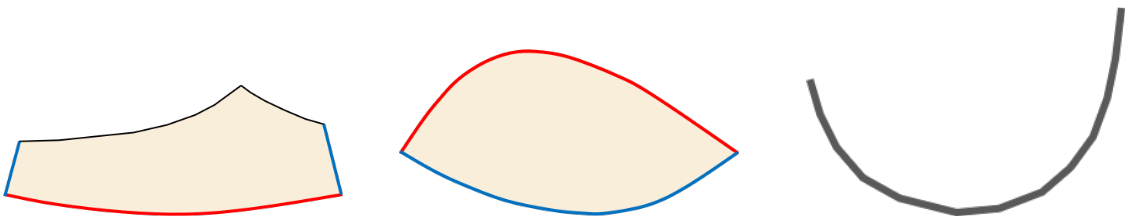
近年の建築設計技術の進歩により，建築意匠に応じた複雑な曲面形状を持つ建築物が作成されるようになった．建築物の形状は意匠的評価や力学的性能に大きく影響する他，複雑な曲面を有する建築物においては，断熱設計や音響設計などの，流れ場の設計も非常に難しいとされている．その一方で，施工の際に用いられる材質は，木やガラスなど，双方向に曲がりづらい性質を持っており，仮に無理に曲げてしまうと，その分の応力がかかることになり，建築物のメンテナンスに対するコストがかかってしまうという問題が発生する．そのため，曲面の施工性は，合理的な建築を達成するために，非常に重要な観点であり，そのため設計者は，意匠性，力学的合理性およびその性能などを総合的に勘案して，形状を設計することが要求される．曲面の施工性については，その材質の特性から，理想的な形状は可展面である．こうした中，建築物に対して可展面を応用させた研究が様々行われている．しかし，これらはあくまでモデリ

ングにのみ注力しているため，より抽象的な設計意図に対して応用させることが難しい．本研究の提案する手法においては，より多様な設計意図に応じた可展面設計について言及しており，建築物における意匠性と合理性を調和させる現代建築において，その設計工程を支援できるものと考えられる．

衣服

衣服は，パターンと呼ばれる布地を縫い合わせることで生産される製品である．衣服製品に対する要求は，人体にフィットするというサイズ的な要求から発展し，非常に多様になりつつある．衣服製品には，T シャツやスカートなど，着装時に比較的「ゆとり」を持つことが求められる製品と，靴や下着類，スポーツ用品などに挙げられる着装時に「ゆとり」を持ってはいけない製品の二種類が存在する．後者の製品においての「ゆとり」を持たせないための目的は，着装時の身体（一部）を設計者が意図する理想的な形状に合わせるためである．衣服における設計意図は,「美しさ」などの審美性に関する意図の他，力学的な性能に関する設計意図もある．例えばブラジャーカップにおいては，運動時におけるバストの振動の抑制などが相当し，靴などには，足のマメをできにくくさせるなどが存在する．これらは，着装する人体にも影響するため，サイズに合わせて設計されるだけでなく，多様な形状を持つ人体の細かな部分に合わせて設計される事が要求される．こうした観点から，設計工程の効率化が要求される一方，その体系的手法は確立されていない．その要因もまた，可展面の特性から来るものである．

一例として，ブラジャーカップの設計工程を説明する．ブラジャーカップとは，パターンと呼ばれる複数枚の布とワイヤーを用いて構成されており，構成されるパターンの枚数 n によって，n 枚接ぎブラジャーカップと呼ばれる．例えば 2 枚接ぎブラジャーカップは，Fig. 1.4 に示すように，(a) の上カップパターン，(b) の下カップパターン，(c) の下ワイヤーにより構成されている．二枚接ぎカップの製作工程では，はじめに，(a) の赤線で示した曲線と (b) の赤線で示した曲線をそれぞれ縫い合わせる．そして，その縫い合わせた形状の下カップパターン側の (b) の青線で示した曲線を，下ワイヤーに沿って縫い合わせることで，形状を作成する．



(a) Upper cup (b) Lower cup (c) Lower wire

Fig. 1.4 The Components of two piece brassiere cup

この設計工程では，企画や構想からスケッチ画までを決定する設計者（デザイナー）と，そ

の構想やスケッチ図からカップの設計を行う設計者（パタンナー）は別れている．以降の設計工程での説明では，パタンナーのことを設計者と呼ぶ．パターン設計では，紙模型で評価を行う工程と，布地を用いた工程の 2 種類が存在する．

紙模型での評価を行う工程について説明する．設計者ははじめに，そのデザイン画や構想から，カップに要求される機能および性能を決定し，それに合わせた理想的なバストの着後形状を考える．その後，そのバストの形に合わせてカップの 3 次元形状を考える．そして，その 3 次元形状を実現するための，パターン形状を設計する．この時点で初めてパターンは実体化される．この設計されたパターンは，設計者の経験や勘に基づいて設計されたものであるため，設計者の意図通りの形状を得られるかどうかについては分からない．そのため，パターン設計後は，紙で作ったパターンを貼り合わせた紙模型を作成し，その形状を視認したり，ダミーと呼ばれるマネキンの胸部に押し当てたりして，出来上がった 3 次元形状のチェックを行い，意図通りでない場合には，それをパターン形状にフィードバックし，修正を行う．この一連の作業を意図通りの形状を得るまで行う．

一方，布地を用いた工程では，前述した工程で設計されたパターンから，布地を用いてカップを作成する．そして，バストの異なるサイズに合わせるための設計を意味するサイジングや，バストの運動時の振動，布地の力学的特性による変形などに合わせて，パターン修正を行う工程である．

こうした一連の工程を，ほとんどの場合は並行しながら行うことになる．製品のライフサイクルについては，企画から設計までがおよそ半年程度，生産・工程設計がおよそ 1 か月から 2 か月程度，製品が店頭に並び，終売するまでがおよそ 3 か月程度である．この販売される期間のうち，店頭の最前列に並ぶのはおよそ 1 週間程度とされ，売上のほとんどはそこで発生している．

このように衣類製品のライフサイクルの半分は設計工程が占めており，設計の順序を考慮すると，特に紙模型を用いた設計段階における効率化は非常に重要である．本研究における設計手法により，特に「ゆとり」を持たない製品においては，その設計効率化に貢献することができると思われる．

1.5 本論文の構成

本論文は本章を含めて 7 章から構成されている．また，本論文構成のつながりを Fig. 1.5 に示す．

- 1 章では，研究背景や課題，および研究目的について述べた．また，本論文の提案手法の適用先にも言及を行っている．

- 2 章では，形状モデルについて，微分幾何学に基づくモデリング，およびそれを用いた過去の研究成果について述べる．
- 3 章では，可展面の境界線に基づく条件を述べた上で，形状制約に対する設計支援手法について述べる．
- 4 章では，可展面が通過する点の修正に合わせて，可展面形状を修正する手法について述べる．
- 5 章では，設計者が意図する理想形状を，点群として与えた場合における，可展面設計手法について述べる．
- 6 章では，ある性能値に対する可展面の設計支援として，機械学習を用いた回帰を行うことで達成する手法を提案する．
- 7 章では，本論文の結言について述べる．

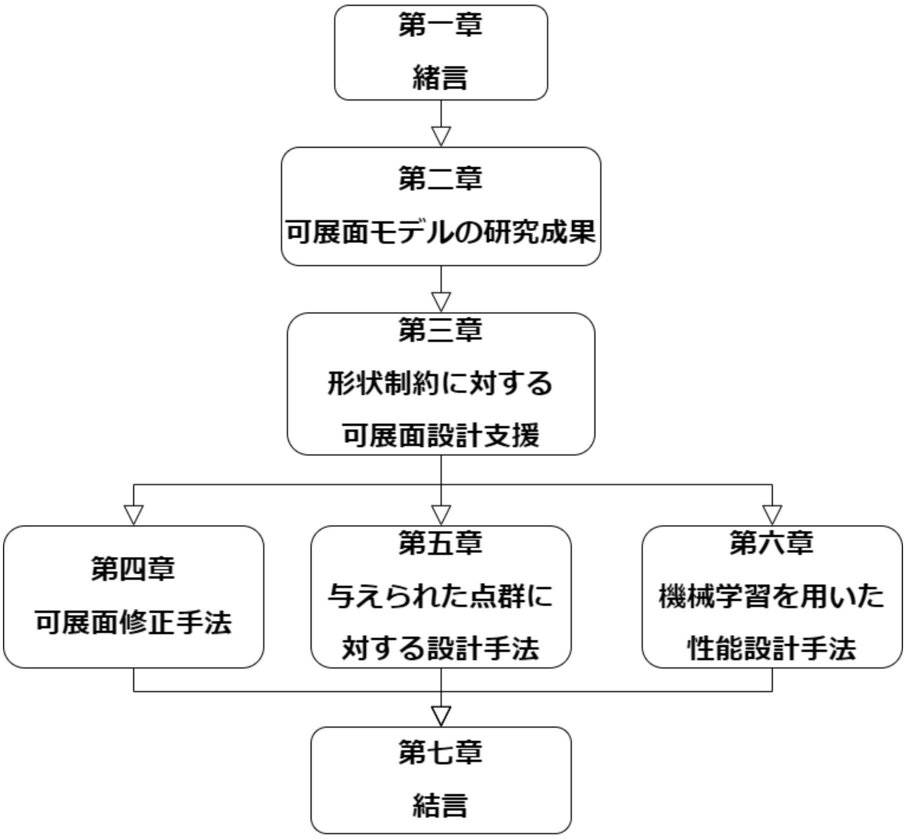


Fig. 1.5　Flow chart of this study

第2章　微分幾何学による可展面モデリング

本章では，微分幾何学を用いた可展面のモデリングおよび曲面形状をシミュレーションする手法について述べる．はじめに，微分幾何学に関する既知の事項を概説したのち，曲面形状のシミュレーションについて，

- 展開後の形状が既知の場合
- 曲面の 3 次元形状の概形（境界線）が与えられている場合

の 2 つの場合について，その手法を述べる．

2.1　曲線と曲面の微分幾何学

本節では，平面曲線，空間曲線の微分幾何学に関する既知の事項をまとめたのち，曲面の微分幾何学について既知の事項をまとめる [65].

2.1.1　平面曲線の微分幾何学

本節では，$\boldsymbol{e}_v, \boldsymbol{e}_w$ を基底とする vw 座標系における写像 $\boldsymbol{c}_p(\nu) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ が，ν が変化することによって描く軌跡によって形成する曲線を例にして考える．パラメータ区間 $[t_i, t_e]$ における曲線の長さを表す弧長 s は，微小区間においては，その長さを差分ベクトルのノルムとして表すことができるものとして，

$$s = \int_{t_i}^{t_e} |\dot{\boldsymbol{c}}_p| dt \tag{2.1}$$

と表される．また，これは任意の n 次元空間における曲線の長さにおいても同様に導くことができる．以後，ν による微分はドット記号を用いて表現するものとする．$\boldsymbol{c}_p(\nu)$ の接方向を表す単位ベクトルを $\boldsymbol{t}_p$ と表せば，$\boldsymbol{t}_p$ は

$$\boldsymbol{t}_p = \frac{\dot{\boldsymbol{c}}_p}{|\dot{\boldsymbol{c}}_p|} \tag{2.2}$$

と表される．

曲線の微小区間 $[\nu, \nu+\Delta\nu]$ を考え，その区間において曲線はある円弧の 1 部分であると近似できると仮定する．パラメータの ν に対する近似した円の半径 $R(\nu)$ は，微小区間における円弧の関係式 $\Delta s = R\Delta\theta$ の $\nu \to 0$ の極限を取ることで，

$$R = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta \theta} \tag{2.3}$$

と求めることができる．この半径の逆数を，平面曲線の曲がり具合を表す曲率 $\kappa(\nu)$ と定義する．ここで，Δs は区間 $[t, t+\Delta t]$ における曲線の長さであり，$\Delta\theta$ について考えると，Fig. 2.1 に示した関係より，$\boldsymbol{t}_p$ に直交するベクトル $\boldsymbol{n}_p \in \mathbb{P}$ とすると

$$\sin\Delta\theta \simeq \Delta\theta = -\Delta\boldsymbol{n}_p \cdot \boldsymbol{t}_p \tag{2.4}$$

と表すことができる．$\boldsymbol{n}_p \cdot \boldsymbol{t}_p = 0$ の等式における微小関係を考えると，$-\Delta\boldsymbol{n}_p \cdot \boldsymbol{t}_p = \boldsymbol{n}_p \cdot \Delta\boldsymbol{t}_p$ が成り立つことから，κ は

$$\kappa \triangleq \frac{1}{R} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{n}_p \cdot \Delta\boldsymbol{t}_p}{\Delta s} = \frac{\det(\dot{\boldsymbol{c}}_p, \ddot{\boldsymbol{c}}_p)}{|\dot{\boldsymbol{c}}_p|^3} \tag{2.5}$$

となる．特に，$\nu = s$ である場合には，$|\dot{\boldsymbol{c}}_p| = 1$ より，$\kappa = \det(\boldsymbol{c}'_p, \boldsymbol{c}''_p)$ と表される．以後では，とくにことわりがない限り，曲線を議論する際のパラメータには s を取り，s に関する微分をプライム記号を用いて表す．

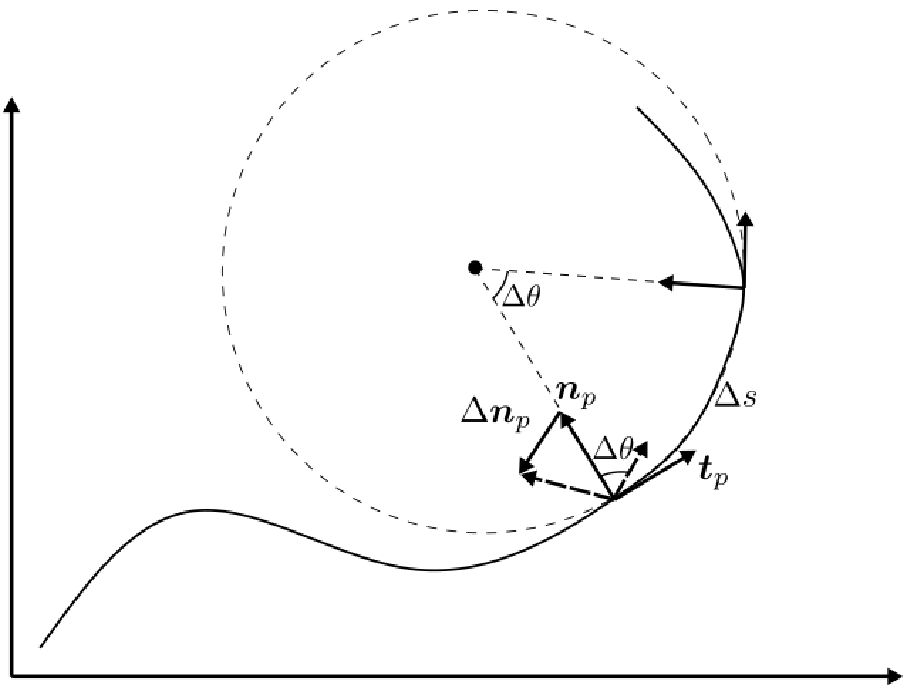


Fig. 2.1　An example of a curve line expressed by a set of control points

この平面曲率は

- 曲線を定義する座標の取り方によって不変である．
- 曲線のパラメータ変換によって不変である．

という性質を持っている．

また，平面曲面の基本定理として,「平面曲率を決めると，移動と回転の自由度を除いて曲線を一意に決める」が成立する．

次に，平面曲率 $\kappa(s)$ が与えられた場合における，平面曲線の導出方法を示す．まず，式 (2.5) より，v 軸と $\boldsymbol{t}_p$ のなす角度を θ とすると，

$$\theta = \theta_0 + \int_0^s \kappa(s)ds \tag{2.6}$$

これを用いて $\boldsymbol{t}_p$ の成分を表記すると，

$$\boldsymbol{t}_p = \begin{pmatrix} \cos\theta(s) \\ \sin\theta(s) \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

となり，平面曲線の位置ベクトル $\boldsymbol{x}_p$ は

$$\boldsymbol{x}_p = \boldsymbol{x}_0 + \int_0^s \boldsymbol{t}_p ds \tag{2.8}$$

と計算できる．この手続きからも，平面曲線の基本定理が成り立つことが分かる．

2.1.2　空間曲線の微分幾何学

次に，空間曲線の微分幾何学について述べる．$\mathbb{R}^3$ における空間曲線は，パラメータ s に対する写像 $\boldsymbol{r}(s) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ が，s が変化することで得られる軌跡である．曲線の内在的性質を議論するために，曲線の各点 $\boldsymbol{r}(s)$ ごとに，正規直交基底 $\boldsymbol{e}_i (i = 1, 2, 3)$ からなる局所座標系 $\boldsymbol{e_1}$ $\boldsymbol{e}_2$ $\boldsymbol{e}_3$ を定義する．正規直交基底 $\boldsymbol{e}_i$ のパラメータに関する微分 $\boldsymbol{e}'_i$ は，基底の性質から $\boldsymbol{e}_i$ を用いて表現可能であり，適当な重み $\omega_{i,j}$ を用いて

$$\boldsymbol{e}'_i = \sum_{k=1}^{3} \omega_{i,k} \boldsymbol{e}_k \tag{2.9}$$

と表現できる．また，$\boldsymbol{e}_i$ は正規直交基底であるから，各基底同士の内積は

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{else} \end{cases} \tag{2.10}$$

と計算される．$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j$ の微分を考えると，$\boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'_j = 0$ を得る．この等式から，重み $\omega_{i,j}$ の関係式として，

$$\omega_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{if } i = j \\ -\omega_{j,i} & \text{else} \end{cases} \tag{2.11}$$

と得る．この関係式を踏まえて，基底 $\boldsymbol{e}$ のパラメータによる微分 $\boldsymbol{e}'$ は

$$\boldsymbol{e}' \triangleq \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{e} \tag{2.12}$$

と書き直す．ただし，$\boldsymbol{\Omega}$ は

$$\boldsymbol{\Omega} \triangleq \begin{pmatrix} 0 & \omega_{1,2} & -\omega_{3,1} \\ -\omega_{1,2} & 0 & \omega_{2,3} \\ \omega_{3,1} & -\omega_{2,3} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

と定義している．

$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{r}', \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{r}''/|\boldsymbol{r}''|$ に対応させると，$\omega_{1,3} = 0$ となり，$\omega_{1,2}, \omega_{2,3}$ はそれぞれ空間曲線の曲率 κ と捩率 τ に対応する．このように定めた $\boldsymbol{e}$ をフレネ・セレ標講と呼び，明確に区別するため，各基底 $\boldsymbol{e}_i$ を $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{b}$ と表現し，式 (2.14) をフレネ・セレの式と呼ぶ．

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{t}' & \boldsymbol{m}' & \boldsymbol{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} & \boldsymbol{m} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{r}'(s)$ を用いれば，κ, τ は

$$\kappa = |\boldsymbol{r}''| \tag{2.15}$$

$$\tau = \frac{\det(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')}{|\boldsymbol{r}''|^2} \tag{2.16}$$

となる．曲線の基本定理として，曲線の曲率 κ と捩率 τ によって平行移動や回転を除いて一意に決定できることが示されている．また，κ および τ は平行移動や回転に対して不変であることから，曲線の持つ内在的性質として，重要な意味を持っている．

しかし，フレネ・セレにおいては，曲線の情報のみで議論が完結できる一方，曲線を用いて曲面を議論する際には，その表現は不十分である．曲線においては，接方向回りの回転は形状に影響することはない．一方で，曲線を用いて曲面を議論しようとすると，接ベクトル $\boldsymbol{t}$ を法線ベクトルする平面内に広がりを持ち，相対的な位置関係が変化しうる．

例として，合同な 2 つの曲面 $\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2$ において，$\boldsymbol{S}_1$ 上の曲線 $\boldsymbol{l}(s)$ に沿って，接方向回りに $\theta_l(s)$ で回転し，それに合わせて曲面の断面を回転させ，$\boldsymbol{S}_1$ を変位させ，新しい曲面 $\boldsymbol{S}_2$ を得る作用素 $\mathcal{A}(\boldsymbol{S}_1, \theta_l(s)) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を考える．

$\boldsymbol{S}_1$ に $\mathcal{A}$ を作用させた場合において，θ_l が一定である場合には，$\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2$ は合同である状態を保つ．しかし，θ_l が s に対して分布を持つ場合，2 つの曲面 $\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2$ はどのように移動や回転を行ったとしても重なり合うことはない，つまり合同でない曲面となる．このように，フレネ・セレで考えられてこなかった接方向回りの回転は，曲面の内在的性質に影響を与える．

そこで，接方向回りの回転を考慮できるモデルについて考える．弧長の性質として，$s \geq 0$ であることや座標系に対する不変性から，ちょうど物体の運動における時間パラメータ t とのアナロジーをとることができる．つまり式 (2.12) は，物体の角運動に関する運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r} \tag{2.17}$$

とのアナロジーを考える事ができる [66]．作用素 d/dt を d/ds に対応させて考えると，$\omega_{1,2}, \omega_{2,3}, \omega_{3,1}$ はそれぞれ単位弧長あたりの $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 軸回りの回転率であるという解釈を与えることができる．

このように $\omega_{1,2},\ \omega_{2,3},\ \omega_{3,1}$ を各軸回りの回転率と解釈し，$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{r}'$ と定めた $\boldsymbol{e}$ を物体標構と名付ける．以後では，この物体標構を表す $\boldsymbol{e}$ を明確に区別するため，各基底を $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}$ と表現し，各軸周りの回転率を $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ と表記する．

物体標構とフレネ・セレの関係を Fig. 2.2 に示し，曲線の曲率 κ および捩率 τ と，各軸の回転率 $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ の関係式について述べる．この 2 つの標構は，基底のうち $\boldsymbol{\zeta}$ と $\boldsymbol{t}$ は常に同じ向きではあるが，他の基底は同じ向きであるとは限らない．この事から，Fig. 2.2 に示すように $\boldsymbol{\xi}$ と $\boldsymbol{m}$ のなす角度を χ と置くと，$\boldsymbol{m}, \boldsymbol{b}$ はそれぞれ $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{\xi} \cos\chi + \boldsymbol{\eta} \sin\chi, \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{\xi} \sin\chi + \boldsymbol{\eta} \cos\chi$ と表現できる．これをフレネ・セレの式 $\boldsymbol{t}' = \kappa \boldsymbol{m}$ に代入すれば，

$$\boldsymbol{t}' = \kappa \left(\boldsymbol{\xi} \cos\chi + \boldsymbol{\eta} \sin\chi \right) \tag{2.18}$$

を得る．$\boldsymbol{\zeta}' = \boldsymbol{t}'$ および $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}$ が互いに直交することから κ は

$$\kappa^2 = \omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 \tag{2.19}$$

と求めることができ，χ は

$$\chi = \tan^{-1}\left(-\frac{\omega_\xi}{\omega_\eta} \right) \tag{2.20}$$

となる．$\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{\xi} \sin\chi + \boldsymbol{\eta} \cos\chi$ の両辺を微分すると $\boldsymbol{b}' = -(\chi' + \omega_\zeta)\boldsymbol{m}$ となることから，

$$\tau = \chi' + \omega_\zeta = \frac{\omega_\xi \omega_\eta' - \omega_\xi' \omega_\eta}{\kappa^2} + \omega_\zeta \tag{2.21}$$

が成り立つ．この式から，$\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ から κ, τ は一意に表現できるが，逆は成り立たないことが分かる．つまり，物体標構の方が表現力の高いモデルであると言えるため，本研究の曲線の表現には，物体標構を用いる．

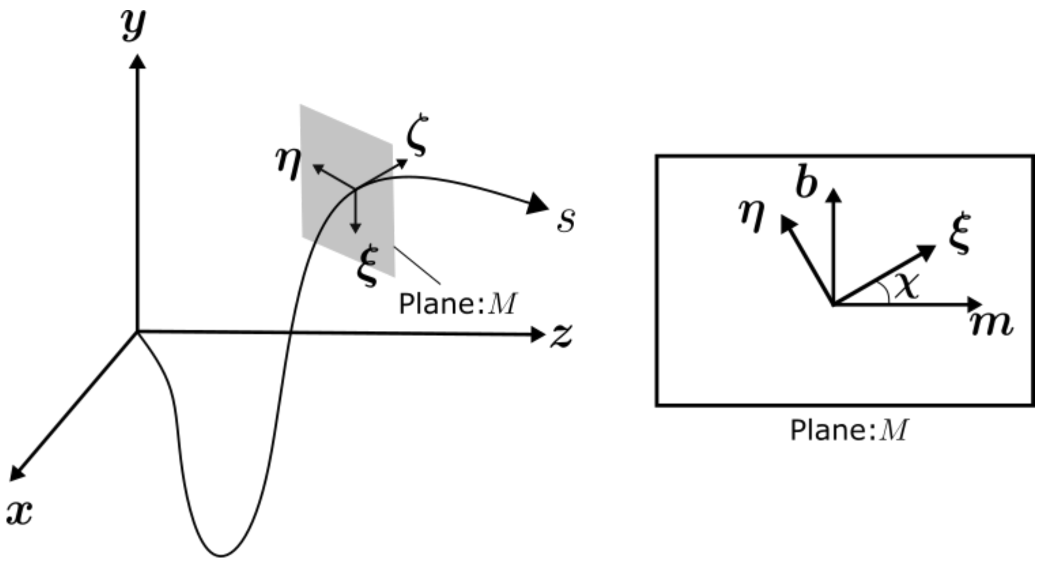


Fig. 2.2　Relationship between an object coordinate system and Frenet-Serret frame

2.1.3　空間曲面の微分幾何学

次に曲面の微分幾何学について述べる [67]．3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 上で，曲面はパラメータ u_1, u_2 によって $\boldsymbol{p}(u_1, u_2)$ と表現できる．

$$\boldsymbol{p}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} x(u_1, u_2) & y(u_1, u_2) & z(u_1, u_2) \end{pmatrix}^\top \tag{2.22}$$

u_2 を固定して u_1 を変化させた時に得られる曲線を u_1 曲線，u_1 を固定して u_2 を変化させた時に得られる曲線を u_2 曲線と呼ぶ．u_1, u_2 曲線の各点における接ベクトル $\boldsymbol{p}_{u_1}, \boldsymbol{p}_{u_2}$ は以下のように表される．

$$\boldsymbol{p}_u(u_1, u_2) = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u_1},\ \boldsymbol{p}_{u_2}(u_1, u_2) = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u_2} \tag{2.23}$$

また，$\boldsymbol{p}_{u_1}, \boldsymbol{p}_{u_2}$ が張る平面を接平面と呼ぶ[注 3)]．曲線の時と同様，曲面上の 2 点 $\boldsymbol{p}(u_1, u_2)$ と，$\boldsymbol{p}(u_1 + \Delta u_1, u_2 + \Delta u_2)$ とを結んだ微小距離の 2 乗 Δs^2 は，区間 $[u_1, u_1 + \Delta u_1] \times [u_2, u_2 + \Delta u_2]$ では曲面が局所的にユークリッド空間であると見なすことで議論できる．$\Delta u_1, \Delta u_2$ が微小であるならば，$\Delta \boldsymbol{p}$ が全微分形式

$$\Delta \boldsymbol{p} \simeq \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u_1} \Delta u_1 + \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u_2} \Delta u_2 \tag{2.24}$$

と近似的に表現できるとして計算すると

$$\begin{aligned} (\Delta s)^2 &\simeq |\boldsymbol{p}_{u_1} \Delta u_1 + \boldsymbol{p}_{u_1} \Delta u_2|^2 \\ &= (\boldsymbol{p}_{u_1} \cdot \boldsymbol{p}_{u_1})(\Delta u_1)^2 + 2(\boldsymbol{p}_{u_1} \cdot \boldsymbol{p}_{u_2}) \Delta u_1 \Delta u_2 + (\boldsymbol{p}_{u_2} \cdot \boldsymbol{p}_{u_2})(\Delta u_2)^2 \\ &\triangleq \mathrm{I} \end{aligned} \tag{2.25}$$

[注 3)] $\boldsymbol{p}_{u_1}$ および $\boldsymbol{p}_{u_2}$ は必ずしも平面の基底である必要性はないため，このような表記を行う

となる．このとき，式 (2.25) 内に表れる $\boldsymbol{p}_{u_1}$ および $\boldsymbol{p}_{u_2}$ の内積で表現される変数を曲面の第一基本量，またはリーマン計量と呼び，次式らで表される．

$$
\begin{aligned}
E &\triangleq \boldsymbol{p}_{u_1} \cdot \boldsymbol{p}_{u_1} \\
F &\triangleq \boldsymbol{p}_{u_1} \cdot \boldsymbol{p}_{u_2} \\
G &\triangleq \boldsymbol{p}_{u_2} \cdot \boldsymbol{p}_{u_2}
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

このように第一基本量を用いて表される形式 I を第一基本形式と呼ぶ．

次に，曲面の曲がり具合を定義するため，曲面上における曲率 κ_a を定義することを考える．基本的な方針は，平面曲線で議論した場合と同様，接方向に対して法線方向がどれだけ変化したかであるが，曲面の場合における法線は，曲面の接平面に垂直なベクトルとして定義する．

接平面に対する法線 $\boldsymbol{n}$ は，以下のように計算できる．

$$
\boldsymbol{n} \triangleq \frac{\boldsymbol{p}_{u_1} \wedge \boldsymbol{p}_{u_2}}{|\boldsymbol{p}_{u_1} \wedge \boldsymbol{p}_{u_2}|}
\tag{2.27}
$$

曲線の曲率を求めた場合と同様に，曲面の空間座標の微小変化 $\Delta\boldsymbol{p}$ に対する法線方向の変化量 $\Delta\boldsymbol{n}$ を考えることで，曲面の局所的な変化量を記述する第二基本形式 II を得る．

$$
\mathrm{II} \triangleq -\Delta\boldsymbol{p}\cdot\Delta\boldsymbol{n} = (-\boldsymbol{p}_{u_1}\cdot\boldsymbol{n}_{u_1})(\Delta u_1)^2 + (-\boldsymbol{p}_{u_1}\boldsymbol{n}_{u_2} - \boldsymbol{p}_{u_2}\boldsymbol{n}_{u_1})\Delta u_1 \Delta u_2 + (-\boldsymbol{p}_{u_2}\cdot\boldsymbol{n}_{u_2})(\Delta v)^2
\tag{2.28}
$$

ここで，$\boldsymbol{n}$ はその定義より $\boldsymbol{p}_{u_1}\cdot\boldsymbol{n} = 0, \boldsymbol{p}_{u_2}\cdot\boldsymbol{n} = 0$ を満たすことから，これらの等式を u_1, u_2 で微分することで以下の性質を持つことが分かる．

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{p}_{u_1}\cdot\boldsymbol{n}_{u_1} = -\boldsymbol{p}_{u_1u_1}\cdot\boldsymbol{n} \\
&\boldsymbol{p}_{u_1}\cdot\boldsymbol{n}_{u_2} = \boldsymbol{p}_{u_2}\cdot\boldsymbol{n}_{u_1} = -\boldsymbol{p}_{u_1u_2}\cdot\boldsymbol{n} \\
&\boldsymbol{p}_{u_2}\cdot\boldsymbol{n}_{u_1} = -\boldsymbol{p}_{u_1u_2}\cdot\boldsymbol{n}
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

式 (2.28) 内に現れる内積で表現されている量を第二基本量と呼び，上式の性質に注意しながら以下のように表される．

$$
\begin{aligned}
L &\triangleq -\boldsymbol{p}_{u_1}\cdot\boldsymbol{n}_{u_1} = \boldsymbol{p}_{u_1u_1}\cdot\boldsymbol{n} \\
M &\triangleq -\boldsymbol{p}_{u_1}\cdot\boldsymbol{n}_{u_2} = -\boldsymbol{p}_{u_2}\cdot\boldsymbol{n}_{u_1} = \boldsymbol{p}_{u_1u_2}\cdot\boldsymbol{e} \\
N &\triangleq -\boldsymbol{p}_{u_2}\cdot\boldsymbol{n}_{u_2} = \boldsymbol{p}_{u_2u_2}\cdot\boldsymbol{n}
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

この第一基本形式および第二基本形式を曲面上に図示したものを，Figs. 2.3 と 2.4 に示す．

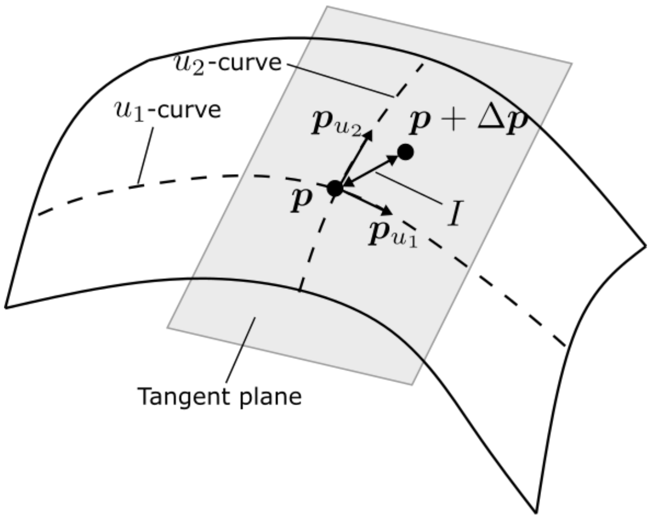


Fig. 2.3　The geometric description of the first fundamental form

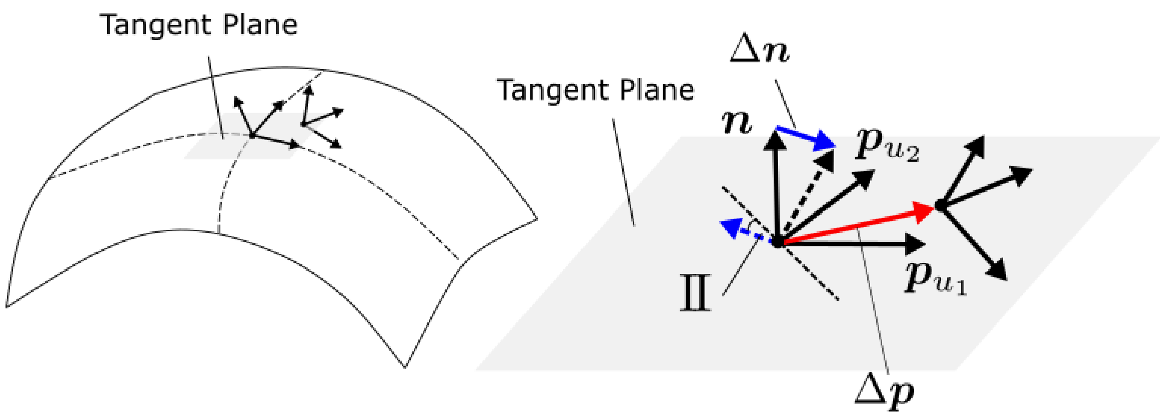


Fig. 2.4　The geometric description of the second fundamental form

こうすることで，曲面上における任意の曲率 κ_a は，平面曲率で求めた場合と同様に考えると，第一基本形式と第二基本形式の商により

$$\kappa_a = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = \frac{L\Delta u_1^2 + 2M\Delta u_1 \Delta u_2 + N\Delta u_2^2}{E\Delta u_1^2 + 2F\Delta u_1 \Delta u_2 + G\Delta u_2^2} \tag{2.31}$$

と表される．

次に，κ_a の極値について考える．式 (2.25) および式 (2.28) はともに，ベクトル $\boldsymbol{v} \triangleq (\Delta u_1, \Delta u_2)$ に関して二次形式として表現されているとも解釈できる．この時，第一基本形式を表す第一基本行列 $\boldsymbol{A}_1$ および第二基本形式を表す第二基本行列 $\boldsymbol{A}_2$ を

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

と定義しておく．こうすると，式 (2.31) は，以下のように整理される．

$$\boldsymbol{v}^\top (\boldsymbol{A}_2 - \kappa_a \boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{v} = 0 \tag{2.33}$$

$\boldsymbol{v}$ がゼロベクトル以外の解を持つためには，$\det(\boldsymbol{A}_2 - \kappa_a \boldsymbol{A}_1) = 0$ となる必要がある．すなわち

$$(EG - F^2)\kappa_a^2 - (EN - 2FM + GL)\kappa_a + (LN - M^2) = 0 \tag{2.34}$$

が成り立つ．この方程式が 2 つの実数解 $\kappa_{\max}, \kappa_{\min}$ を持つとき，曲面のガウス曲率および平均曲率を定義することができる．本研究では，この 2 つの曲率をそれぞれ最大主曲率，最小主曲率と呼び，$|\kappa_{\min}| \leq |\kappa_{\max}|$ の関係が成り立つように定義される．

ガウス曲率および平均曲率は，それぞれ最大主曲率，最小主曲率の積と和によって定義され，式 (2.34) における解と係数の関係を用いることで，第一基本量および第二基本量を用いて表すことができる．

$$K \triangleq \kappa_{\max}\kappa_{\min} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \tag{2.35}$$

$$H \triangleq \frac{1}{2}(\kappa_{\max} + \kappa_{\min}) = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} \tag{2.36}$$

2.2 測地的曲率が既知である場合における曲面形状導出手法

2.2.1 モデリングの概要

本章では，上記の微分幾何学を用いた可展面のモデリングについて述べる．モデリングの指針として，可展面であるならば線織面である，という命題が常に成り立つ事を用いる．

線織面とは曲面上の任意の点において，その点を通る直線が，少なくとも 1 つは必ず曲面上に含まれる曲面の事を指す．数学的に表現すれば，曲面上の任意の空間座標 $\boldsymbol{S}_R(s,t)$ が，ある基準となる曲線 $\boldsymbol{x}(s)$ と，その曲線上の点を通る母線と呼ばれる直線 $\boldsymbol{d}_g(s)$ により，

$$\boldsymbol{S}_R(s,t) = \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{d}_g \tag{2.37}$$

と表現される曲面である．s は曲線を表現するパラメータであり，任意のパラメータを取れるが，ここでは前節に倣い曲線の弧長パラメータとする．また，$\boldsymbol{d}_g$ は母線の方向ベクトルとし，t は曲面上の母線方向のパラメータとして，$t \in [0, D(s)]$ とする．ただし，$D(s)$ は曲線上の点で規定される母線の母線長である．

次に，式 (2.37) を用いて，可展面であるための条件を導く．ここで，曲線の表現方法に物体標構を用いるとし，$\boldsymbol{\zeta}$ を曲線の接線方向に，$\boldsymbol{\eta}$ を曲面の法線方向に常に一致させるようにとる．母線は曲面上に存在することから，母線は基底 $\boldsymbol{\zeta}$ および $\boldsymbol{\xi}$ を用いて，

$$\boldsymbol{d}_g = -\boldsymbol{\zeta}\sin\alpha + \boldsymbol{\xi}\cos\alpha \tag{2.38}$$

と表現できる．ただし，α は Fig. 2.5 における η 軸回りの回転を正として，ξ 軸と母線のなす角度を表している．以後，α を母線角と呼ぶ．これを用いて，パラメータ s, t に対する式 (2.37)

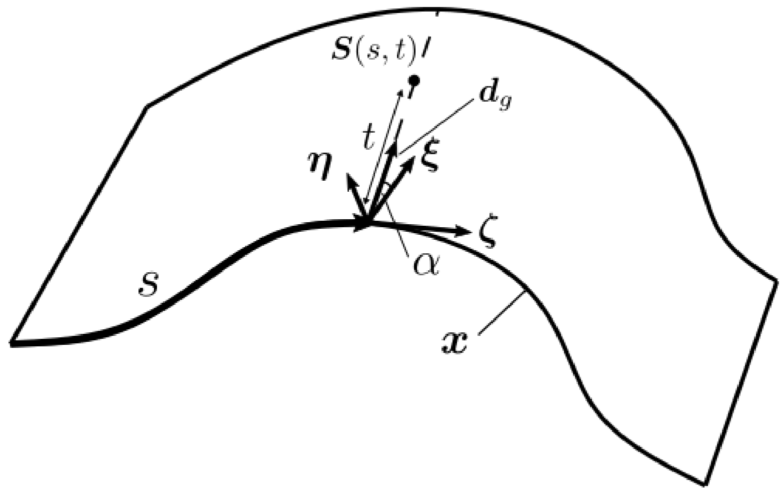


Fig. 2.5 The definition of α. α is the angle between $\boldsymbol{d}_g$ and ξ-axis

の偏微分はそれぞれ

$$\frac{\partial \boldsymbol{S}_R}{\partial s} = \boldsymbol{\zeta} + t\left(-(\alpha' + \omega_\eta)(\boldsymbol{\zeta}\cos\alpha + \boldsymbol{\xi}\sin\alpha) + (\omega_\xi \sin\alpha + \omega_\zeta \cos\alpha)\boldsymbol{\eta}\right) \tag{2.39}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{S}_R}{\partial t} = \boldsymbol{d}_g \tag{2.40}$$

と表される．この式らから，E, F, G, L, M, N は

$$E = (\alpha' + \omega_\eta)^2 t^2 - 2t(\alpha' + \omega_\eta)\cos\alpha + 1 \tag{2.41}$$

$$F = -\sin\alpha \tag{2.42}$$

$$G = 1 \tag{2.43}$$

$$L = -\omega_\xi + t\left(\omega_\eta(-\omega_\xi \cos\alpha + \omega_\zeta \sin\alpha) + \omega'_\zeta \cos\alpha + \omega'_\xi \sin\alpha\right) \tag{2.44}$$

$$M = \omega_\xi \sin\alpha + \omega_\zeta \cos\alpha \tag{2.45}$$

$$N = 0 \tag{2.46}$$

と，それぞれ計算される．ここで，可展面はガウス曲率が 0 である曲面であることから $K = 0$ を解くことで

$$\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{\omega_\zeta}{\omega_\xi}\right) \tag{2.47}$$

を得る．式 (2.35) の式より，$K = 0$ ならば，$\kappa_{\min} = 0$ であることから，$\kappa_{\max} = 2H$ と計算でき，この式から

$$\kappa_{\max} = \frac{\sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\zeta^2}}{\cos\alpha - t(\alpha' + \omega_\eta)} \tag{2.48}$$

と計算できる．以上をまとめると，$\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ を与えれば，曲面は平行移動と回転の自由度を除いて，一意に決定されることが分かる．

2.2.2 ポテンシャルエネルギーの定式化

ある2次元形状を空間的に曲げ，3次元の曲面形状を作ると，その形状は作用する力を始めとする，種々の環境における物理的な性質によって大きく変化する．本研究では，動力学的効果は無視し，静的で安定な形状を求めることに着眼する．ここで静的で安定な形状とは，物体の持つ全ポテンシャルエネルギーの総和が最小である時を指すことから，本節では，ポテンシャルエネルギーを定式化し，曲面形状生成問題を最適化問題として表現する手法について述べる．ここで，これまで定式化した曲面は，曲面法線方向には成分を持たない，いわゆる厚さが0である状態であった．しかし，実際の曲面，特に我々が対象としている曲げ加工により形状を形成する曲面は，微小な厚さを持つ薄板状物体であることから，ポテンシャルエネルギーを求める際は，曲面を薄板状物体であるとモデル化する．

本研究が扱う薄板状物体は，Kirchhoff理論に基づいてモデル化が行われ，中立面を基準面にして厚さhだけ肉付けしたものとして扱う．また，仮定として全ての変形過程において等方性弾性体であるとする．平面形状を曲げて曲面を形成した際に発生する曲面の内部エネルギーUを考える．この時，形成した曲面が可展面である場合には，前節の定式化およびKirchhoff理論の仮定より，曲面は最大主曲率κ_1で曲がっているのみであると考えることができるため，最大主方向の曲げエネルギーのみを考えればよいことが分かる．

s, tのパラメータの他に，法線方向の移動量を示す$\eta \in [-h/2, h/2]$を導入すると，最大主方向$\boldsymbol{d}_{\max}$に生じるひずみ$\varepsilon_{\max}$は

$$\epsilon_{\max} = \kappa_{\max}\eta \tag{2.49}$$

と表すことができる．変形過程で常に弾性変形であることから，ひずみによる応力$\sigma_{\max}$はヤング率Eを用いて$\sigma_{\max} = E\epsilon_{\max}$と表現でき，単位体積あたりの内部エネルギー$dU$は

$$dU = \frac{1}{2}E\sigma_{\max}\epsilon_{\max} = \frac{E}{2}\kappa_{\max}^2\eta^2 \tag{2.50}$$

と表すことができる．微小体積要素dSが$dV = dSd\eta$および微小面積要素dSが

$$dS = \sqrt{EG - F^2}dsdt \tag{2.51}$$

と表される事から，式(2.50)を体積分することで，Uを求めることができる．

$$\begin{aligned} U &= \frac{E}{2}\int_0^l \int_0^{D(s)} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \kappa_{\max}^2\eta^2\sqrt{EG - F^2}dsdtd\eta \\ &= \frac{Eh^3}{24}\int_0^l \frac{\omega_\xi^2(1+\tan\alpha)^2}{\alpha' + \omega_\eta}\log\left|\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha - D(\alpha' + \omega_\eta)}\right| ds \end{aligned} \tag{2.52}$$

以上より，式(2.52)を最小化するようなω_ξ, ω_ζを求める最適化問題を解けば，形状を得ることができる[注 4)]．

注 4)最適化問題の数値解法については後述する．

2.2.3　検証実験

本節では，提案した手法により，形状が正しく導出できるかどうかを確かめるため，Fig. 2.6 に示す型紙形状から，シミュレーションにより導出した形状と，紙模型の形状を比較することで，妥当性の検証を行う．この例では，合わせる境界曲線の形状は，$y = 0$ の平面内に分布する

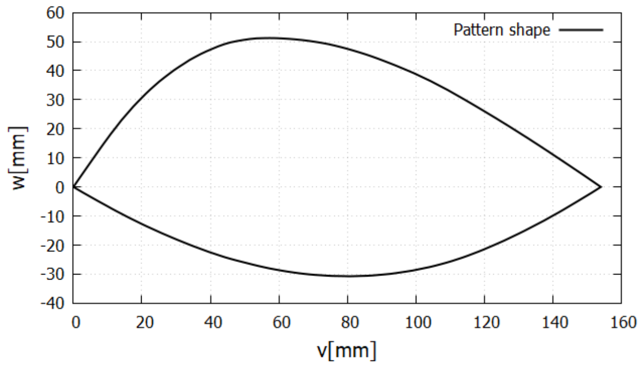
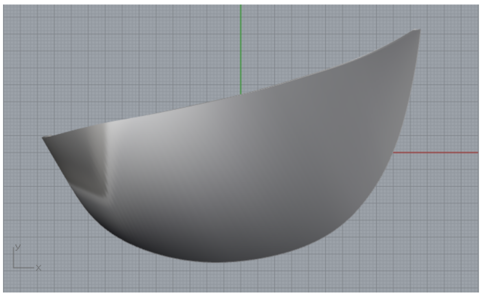
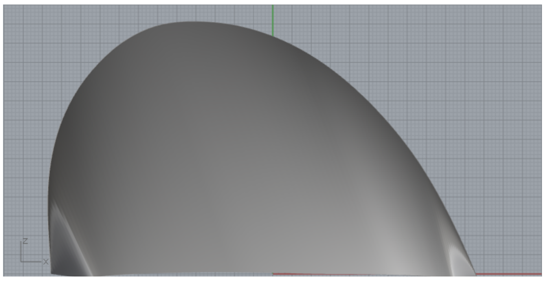


Fig. 2.6　The two-dimensional shape used in this experiment

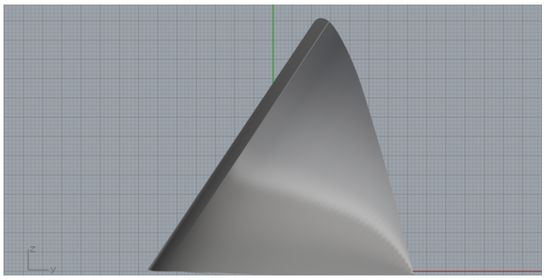
平面曲線である．また，作成する紙のヤング率や厚さに関しては，ポテンシャルエネルギーの値そのものに影響を与えるが，形状には直接影響を与えないため，$Eh^3/24 = 50$ と定めた．計算によって得られた曲面形状を，Fig. 2.7 に示す．(a),(b),(c) はそれぞれ xy, xz, yz 平面から見た図であり，(d) は曲面を三次元的に投影した図である．



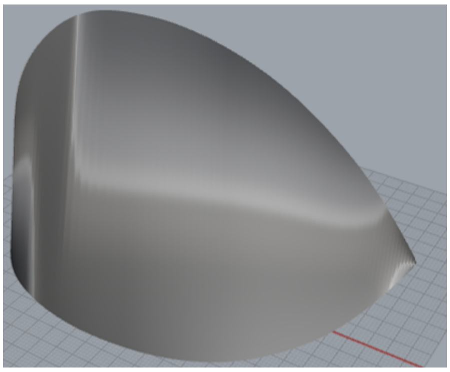
(a) zx-view



(b) zy-view



(c) xy-view



(d) Computational surface model in perspective view

Fig. 2.7　The computational surface obtained by minimizing potential energy

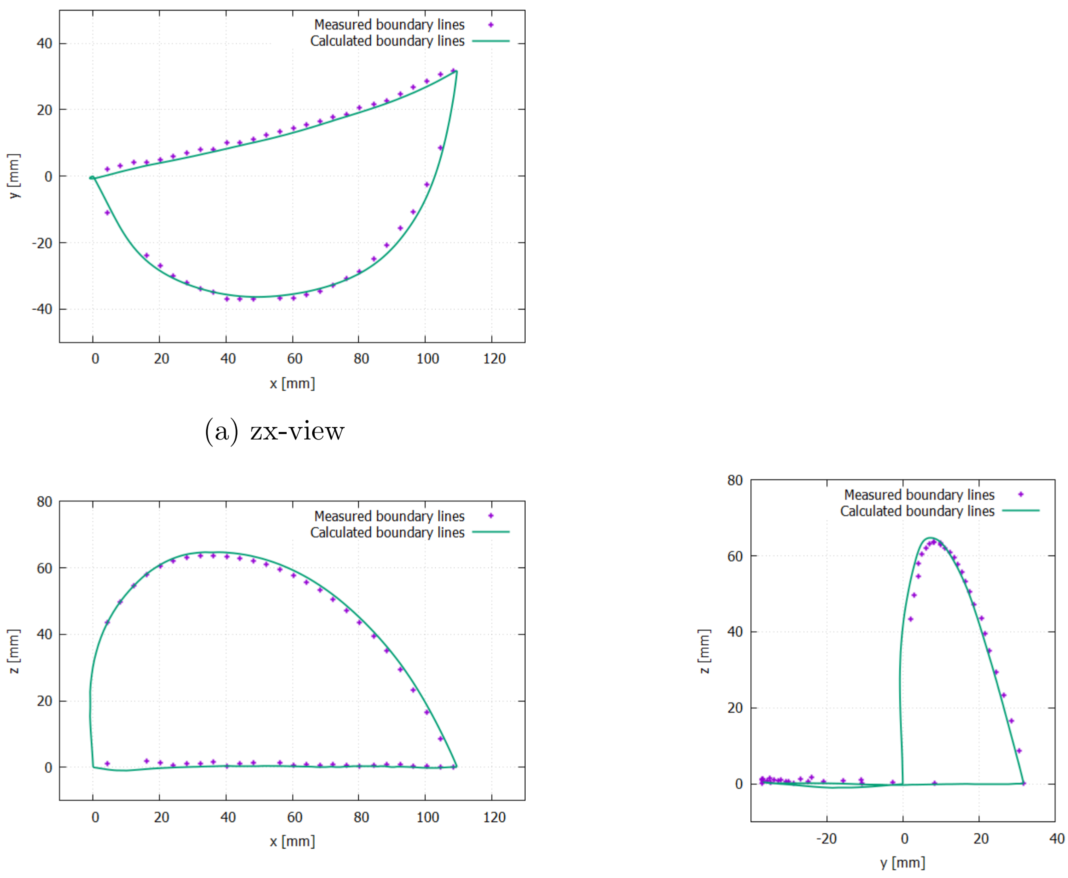
検証実験では，形成された曲面の境界線 $\boldsymbol{x}_L, \boldsymbol{x}_U$ と，実際の紙模型を計測することで得られる境界線 $\boldsymbol{x}_M$ の誤差を比較することで，妥当性を検証する．検証実験の誤差の求め方について示す．境界線 $\boldsymbol{x}_L$ を離散化した点列を $\boldsymbol{x}_{L,i}$ と表現し，計測点の点列を $\boldsymbol{x}_{M,j}$ と表現する．この 2 つの点列における誤差として，$\boldsymbol{x}_{L,i}$ と $\boldsymbol{x}_{L,i+1}$ を結び，その直線と $\boldsymbol{x}_{M,j}$ の最短距離 $e_{m,j}$ を誤差とする．これを定式化すると，

$$e_{m,j} = \min_{i \in [0,N-1]} \min_{t \in [0,1]} |(\boldsymbol{x}_{M,j} - (1-t)\boldsymbol{x}_i - t\boldsymbol{x}_{i+1})| \tag{2.53}$$

となる．なお，N が十分大きいとみなせる場合には，$\boldsymbol{x}_{M,j}$ に対応する $\boldsymbol{x}_{L,i}$ が存在し，$t \simeq 0$ となるため，

$$e_{m,j} = \min_{i \in [0,N]} |\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_i| \tag{2.54}$$

となる．この結果，境界線上の平均誤差は境界曲線の全長の 1% 以下である 1.53[mm] となり，精度よく形状を予測できることが示されている．



(a) zx-view

(b) zy-view

(c) xy-view

Fig. 2.8　Comparison between calculated and measured boundary lines

2.3 測地的曲率が既知でない場合における曲面導出手法

2.3.1 微分幾何学に基づく条件

次に，可展面がある 2 つの境界曲線を持つ場合について，その境界曲線から曲面を再現する手法および，展開形状の求め方について述べる．まずはじめに Fig. 2.9 のように，ある境界曲線に持つ平面を空間曲線に合わせて貼り付ける際，曲面が定まることを示す．

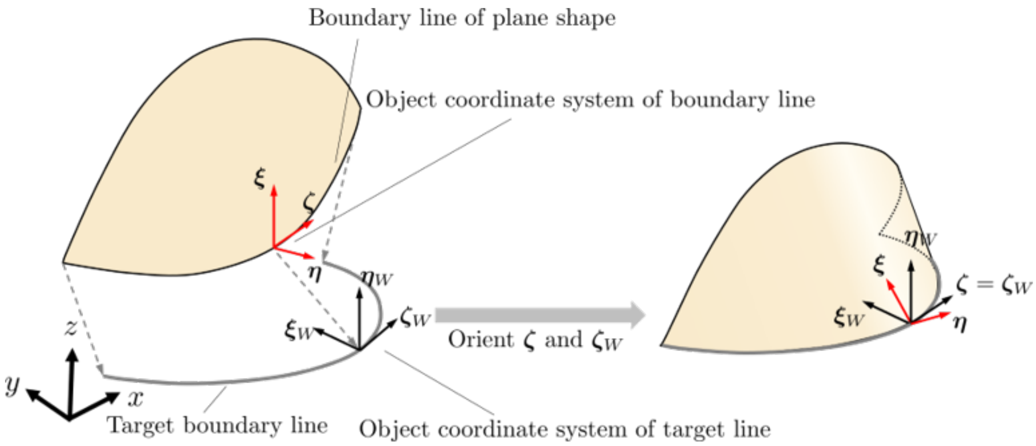


Fig. 2.9 The description of aligning a plane shape with a space curve so that $\boldsymbol{\zeta}$ corresponds to $\boldsymbol{\zeta}_W$

この境界曲線の平面曲率は，前節で定義したように曲面の法線方向が η と一致しているならば，その曲率は η 軸周りの回転率 ω_η と等しくなる．空間曲線に別の物体標構 $\boldsymbol{\xi}_W, \boldsymbol{\eta}_W, \boldsymbol{\zeta}_W$ による表現が与えられている場合において，この物体標構を決定する各軸周りの回転率 $\boldsymbol{\omega}_W$ との関係について述べる．

まず式で示した空間曲率が座標系に対して不変量であることから，

$$\omega_\xi = \sqrt{\omega_{\xi,W}^2 + \omega_{\eta,W}^2 - \omega_\eta^2} \tag{2.55}$$

が成り立つ．また，捩率も不変量であることから式 (2.21) より，

$$\omega_\zeta = \omega_{\zeta,W} + \frac{\omega_{\xi,W}\omega_{\eta,W}' - \omega_{\xi,W}'\omega_{\eta,W}}{\omega_{\xi,W}^2 + \omega_{\eta,W}^2} - \frac{\omega_\xi\omega_\eta' - \omega_\xi'\omega_\eta}{\omega_{\xi,W}^2 + \omega_{\eta,W}^2} \tag{2.56}$$

が成り立つ．この式と前節との議論により，題意を示すことができた．

上記の事実を踏まえて，2 つの境界曲線 $\boldsymbol{x}_L, \boldsymbol{x}_U$ が与えられた場合において，それに対応する展開後の形状を設計する問題について考える．ここで，パラメータ s, u は曲線の弧長に対応させる．仮に $\boldsymbol{x}_L$ に対応する $\omega_{\eta,L}$ が与えられれば，母線の方向が決定できるため，対応する $\boldsymbol{x}_U$ 上の点が決定される，つまり u は s の関数として $u = \hat{u}(s)$ と表現できる．また，$\boldsymbol{x}_U$ に対応する

$\omega_{\eta,U}$ が与えられれば，同様に $s = \hat{s}(u)$ と表現できる．2 つの境界曲線が可展面を形成するためには，$\hat{u}(s)$ および $\hat{s}(u)$ が逆像の関係にある必要がある．つまり，

$$s = \hat{s}(\hat{u}(s)) \tag{2.57}$$

$$u = \hat{u}(\hat{s}(u)) \tag{2.58}$$

が成り立つ．すなわち，展開後の形状を設計する事は $\omega_{\eta,L}, \omega_{\eta,U}$ を設計変数にして，式 (2.57) と (2.58) が弧長の定義域全体で成立することを意味する $\mathcal{F}$ を

$$\mathcal{F} = \int_0^{l_L} \quad (s - \hat{s}(\hat{u}(s)))^2 ds + \int_0^{l_U} \quad (u - \hat{u}(\hat{s}(u)))^2 du \tag{2.59}$$

と定義し，この目的関数を最小化する最適化問題を解けばよい．

次に，制約条件について述べる．まず，曲面の展開によって，曲面が伸縮しないという定理から導かれる制約について考える．曲面を展開することで得られる平面曲線を $\boldsymbol{x}_{p,L}, \boldsymbol{x}_{p,U} \in \mathbb{P}$ とする．曲面が伸縮しないならば，母線の長さもその操作によって変化しないことから，

$$D_L(s) \quad = \quad |\boldsymbol{x}_{p,U}(\hat{u}(s)) - \boldsymbol{x}_{p,L}(s)| \tag{2.60}$$

$$D_U(u) \quad = \quad |\boldsymbol{x}_{p,U}(u) - \boldsymbol{x}_{p,L}(\hat{s}(u))| \tag{2.61}$$

また，

$$\boldsymbol{x}_U(\hat{u}(s)) - \boldsymbol{x}_L(s) \quad = \quad |\boldsymbol{x}_{p,U}(\hat{u}(s)) - \boldsymbol{x}_{p,L}(s)|\boldsymbol{d}_g(s) \tag{2.62}$$

$$\boldsymbol{x}_L(\hat{s}(u)) - \boldsymbol{x}_U(u) \quad = \quad |\boldsymbol{x}_{p,U}(u) - \boldsymbol{x}_{p,L}(\hat{s}(u))|\boldsymbol{d}_g(u) \tag{2.63}$$

が，s, u の定義域全域で成り立つ．また，$\boldsymbol{x}_L$ の空間曲率を κ_L，$\boldsymbol{x}_U$ の空間曲率を κ_U とおくと，

$$-\kappa_L \leq \omega_{\eta,L} \leq \kappa_L \tag{2.64}$$

$$-\kappa_U \leq \omega_{\eta,U} \leq \kappa_U \tag{2.65}$$

が成り立つ．式 (2.64) と (2.65) の不等式制約は違反すると，式 (2.55) で示した式の根号内の値が負となってしまい，計算を続けることができなくなってしまう．そのため，式 (2.64) と (2.65) の不等式制約は，最適化計算の過程で常に満たし続ける必要がある．そこで，適当な関数 γ_L, γ_U を用いて $\omega_{\eta,L}, \omega_{\eta,U}$ を

$$\omega_{\eta,L} = \frac{2\kappa_L}{\pi} \tan^{-1} \gamma_L \tag{2.66}$$

$$\omega_{\eta,U} = \frac{2\kappa_U}{\pi} \tan^{-1} \gamma_U \tag{2.67}$$

と表現する．ただし，κ_L, κ_U は与える曲線の空間曲率である．このように表現すると，γ_L, γ_U に関する制約が存在しない，最適化計算として再定式化される．

2.3.2 検証実験

手法により設計された展開形状が，元の曲面を再現できるかを示すため，以下の手順で検証実験を行い，本手法が目的とした，曲面形状およびその展開形状の設計可能性についての議論を行う．

1. 与えた 3 次元形状に対して，手法を用いて曲面形状およびその展開形状を計算する．
2. 得られた展開形状を用いて実際に曲面を作成する．
3. 作成した曲面を計測し，与えた形状と比較する．

今回与える三次元形状は，以下に示す物体標構の回転率 $\boldsymbol{\omega}_{LW}, \boldsymbol{\omega}_{UW}$ により定める．

$$\boldsymbol{\omega}_{LW} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.91 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.68}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{UW} = \begin{pmatrix} 5.5(1 - \dfrac{u}{L_U}) \\ -0.4(1 + \cos(\dfrac{u}{L_U})) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.69}$$

この曲線の全長 l_L, l_U はそれぞれ 1.08, 1.0 と定める．これを用いて計算した結果を Fig. 2.10 に示す．(a),(b),(c) がそれぞれ zy, zx, xy 方向から見た図であり，(d) は曲面を三次元的に投影した図である．結果から自己交差を起こすことなく，2 つの境界線の間に可展面を形成できたことが確認される．また，得られた展開形状を，Fig. 2.11 に示す．この Fig. 2.11 を用いた展開形状を厚紙を用いて作成し，$\boldsymbol{\omega}_{LW}$ の曲線に沿うようにセロテープにより貼りつけて，曲面を作成した．この曲面を 3D スキャナーを用いて，もう片方の曲線を計測し，その形状を比較した様子を Fig. 2.12 に示す．この実験における誤差は，計算により求まった形状と元形状との誤差と，元形状と作成した紙模型との誤差の 2 種類がある．それぞれの平均及び最大誤差を Table 2.1 にまとめる．

Table 2.1 The average error and maximum error of calculated shape and measured shape against its given shape.

	Average error	Maximum error
Calculated shape	6.11×10^{-3}	9.75×10^{-3}
Measured shape	7.583×10^{-3}	2.22×10^{-2}

いずれの場合においても，曲線の全長と比較して 3% 以下であり，精度よく形状を設計できたと結論づけられる．

2.4 結言

本章では，微分幾何学に基づく可展面モデリングについて述べた．

本章のはじめには，平面曲線，空間曲線および空間曲面の微分幾何学に関する既知の事項をまとめた．その後，微分幾何学に基づく可展面のモデリングについて述べたのち，2 つの形状設計手法に関して概説した．

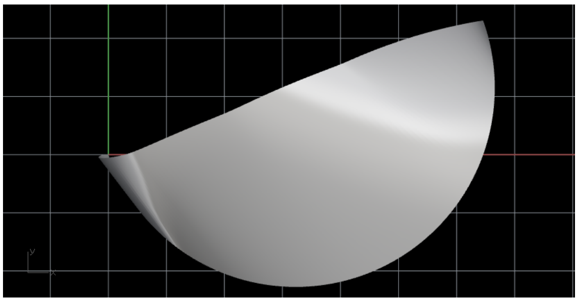
1 つの手法は，その展開後の形状が与えられている下で，それをある曲線に沿って組み立てた際の形状導出手法である．この手法では，実在する曲面においては，外力が加わらなければ静的で安定な形状であることから，曲面が変形により持つポテンシャルエネルギーを最小化する最適化問題として定式化した．ポテンシャルエネルギーの定式化の際には，可展面が曲げることによってのみ形成できることを考慮し，定式化を行った．検証実験においては，実際に組み立てた形状と比較することで，その妥当性に関して検討を行った．

もう一つは，3 次元曲面の境界線が与えられている仮定の下での，曲面および展開形状の設計導出手法である．始めに，沿わせる曲線の空間曲率や捩率と展開後の形状を決定する測地的曲率を用いて，母線角 α などが導出できることを示した．その後，互いの境界曲線から形成される曲面が一致する条件を導き，これを目的関数として，展開後の形状に関する最適化問題を定式化した．検証実験においては，設計された展開後の形状から，紙模型を作成し，元の形を再現できるかを確認することで，妥当性の検討を行った．

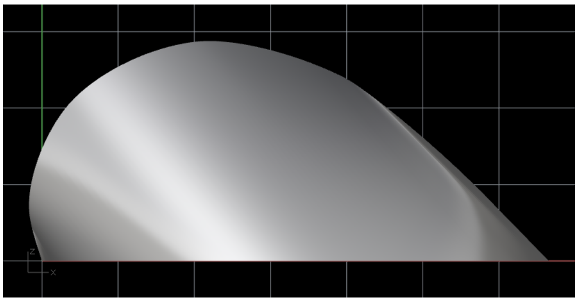
両者とも，シミュレーション結果とおおむね一致することが確認され，それぞれの手法としての妥当性を確認できた．しかし，この手法をそのまま設計プロセスに適用することは難しいと考えられる．

その要因は，3 次元形状に関する直接的な制約をかけることが難しい点である．展開後の形状に対して 3 次元形状がどのようになるかを予測できることは重要な一方で，意図する 3 次元形状に合わせてどのように展開後の形状を設計すればよいかについては，最適化を繰り返す必要があり，計算リソースの面から非効率的であると考えられる．また，曲面の境界線に応じて曲面を生成する場合においては，与える境界線の条件に関して述べられていない．これはつまり，設計者の与えた曲線間に可展面を形成できない場合，システムはそれが明らかに間違っていると判断することができない．

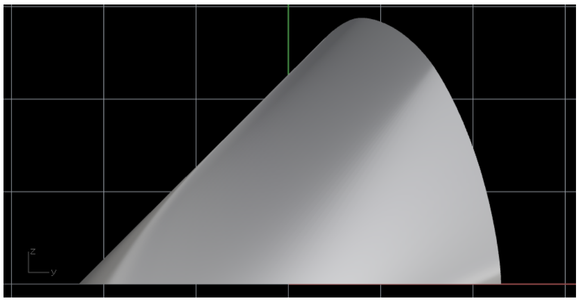
そこで次章では，可展面に関する性質を利用し，効率よく曲面を設計できる手法について提案する．



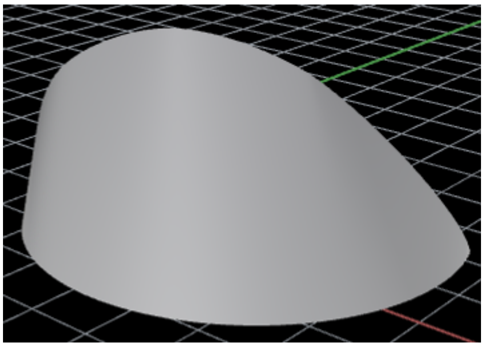
(a) zx-view



(b) zy-view



(c) xy-view



(d) Computational surface model in perspective view

Fig. 2.10 The computational surface obtained by minimizing potential energy

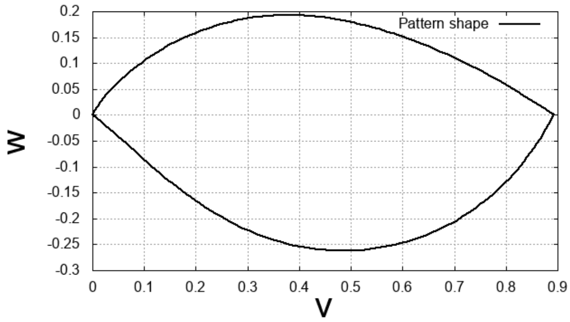
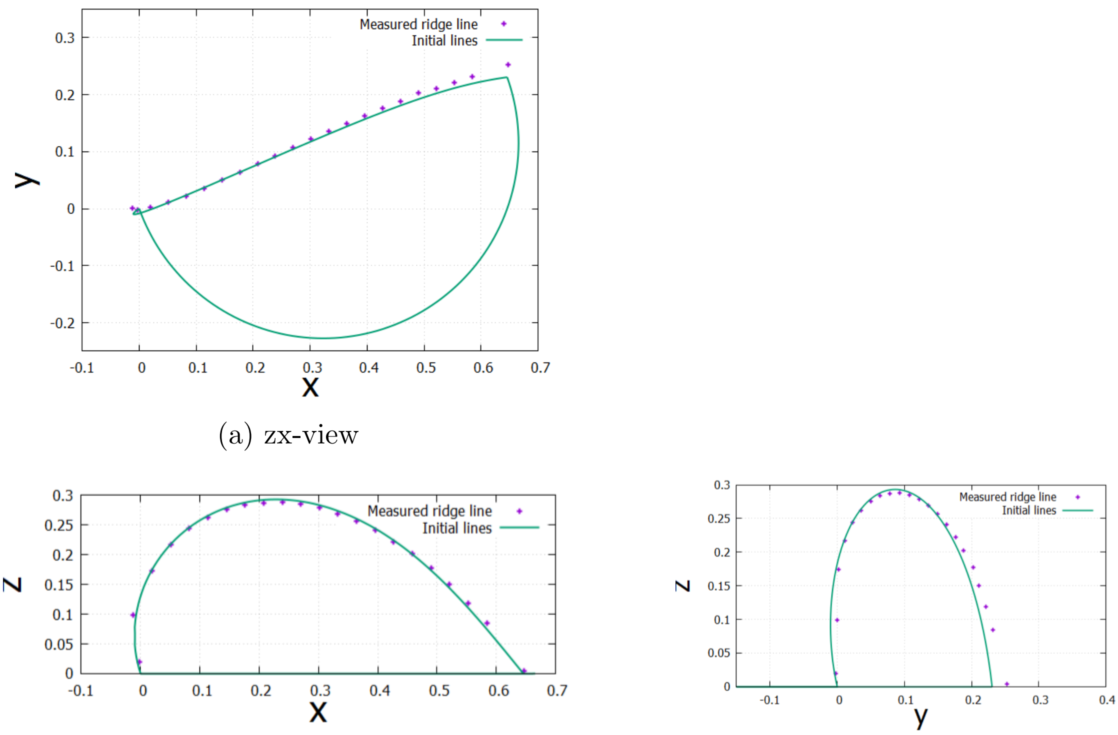


Fig. 2.11 The two-dimensional shape obtained by developing Fig. 2.10



(a) zx-view

(b) zy-view

(c) xy-view

Fig. 2.12 Comparison between the measured and given boundary line

第3章　幾何学的制約に基づく曲面設計支援

3.1　緒言

本章では，幾何学的制約に基づく曲面の設計支援について述べる．

可展面のモデリングに関する研究については，一章でも触れたようにベジエ曲面やB-spline曲面をはじめ，様々行われていることについて触れたが，曲面の生成を行えても，その展開操作を行うことができないなど，工学的に応用する上では不十分な点も見られた．そのような課題を解決するため2章では，微分幾何学に基づき，曲面およびその展開形状の設計を同時に行える可展面モデルについて提案した．

ただ，CADシステムの要件でもある,「設計者の入力が直感的であるか」という観点から手法を考察すると，設計問題においての手法の適用は限定的になると言える．

2章において，設計者が入力する情報はそれぞれ,

手法1 展開後の曲面形状および境界線の平面曲率

手法2 曲面の境界線の3次元形状

であった．

手法1において，展開後の曲面形状を与える場合，それがどのような3次元形状になるかは，最適化問題を解いて初めて設計者が評価できる．しかし，意図する3次元形状を得るために，どのように展開後形状を設計すればいいかについては述べることはできない．

また，手法2の境界線の3次元形状において，境界線の曲線を設計することは容易ではない．境界線には，微分可能性を持ったなめらかな形状が要求されることに加え，2つの曲線間に可展面が正しく形成される必要がある．しかし，境界線の形状が正しく可展面を形成するかを，計算前に判定することは難しい．結果，正しく形状を出力するかどうかは最適化問題を解いて初めて評価できる．

いずれにおいても，最適化問題を解いて初めて3次元曲面自体が評価可能となり，意図する形状を得るまで，入力形状の修正と最適化計算を繰り返し行う必要がある．このように，2章において提案した手法には，入力の与え方が設計者の経験と勘に依存する問題や，最適化計算の繰り返しによる計算コストの面の問題がある．

可展面設計において，設計者の要求や意図をなるべく直観的に入力できるような手法について考える．本章では，このような入力として，曲面がある点を通過するといった形状に関する制約について考える．

B-spline 曲線や曲面の場合では，このような制約については，制御点の操作の他，なめらかさに関する要求をしない場合には，ノットベクトルを多重化することで，位置制約を満たすことができるなど，制約に対する対応は比較的容易であった．しかし，前節で述べた手法においては，形状制約への対応を行うことは難しい．

そこで本研究では，曲面がある点を通過するといった形状に関する制約に合わせて，可展面を生成する手法について提案する．初めに，２つの境界曲線を持つ可展面において，境界線に関する幾何学的条件について述べ，これを用いて境界線の間に曲面を形成する手法について述べる．その後，形状制約に基づく可展面の設計を最適化問題として定式化する．最後に，シミュレーションにより得られた形状に関して考察を行い，本手法の妥当性に関して検討する．

3.2 幾何学的条件に基づいた可展面設計手法

3.2.1 境界線に関する可展開条件の定式化

本節では，2.3.1 節で言及しなかった可展面上の 2 つの境界線が満たすべき条件に着目し，それに基づいて曲面形状および展開形状を設計する手法について述べる．

可展面上の 2 つの境界曲線 $\boldsymbol{x}_L(s;\boldsymbol{\omega}_L(s)), \boldsymbol{x}_U(u;\boldsymbol{\omega}_U(u)) \in \mathbb{R}^3$ を考える．s, u は曲線の弧長パラメータであり，$\boldsymbol{x}_L, \boldsymbol{x}_U$ は少なくとも C^2 連続性を持っているなめらかな曲線であると定義しておく．2.3.1 節での定式化のように，s に対する u を対応づける写像 $\hat{u}(s)$ を決定すると，この 2 つの境界線の間には $\boldsymbol{x}_U(\hat{u}) - \boldsymbol{x}_L(s)$ を母線とする線織面 $\boldsymbol{R}$ が形成される．境界線内で定義される $\boldsymbol{R}$ は，パラメータ $t \in [0, 1]$ を用いて

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{x}_L(s) + t(\boldsymbol{x}_U(\hat{u}(s)) - \boldsymbol{x}_L(s)) \tag{3.1}$$

で表される．

Fig. 3.1 に示す $\boldsymbol{R}$ の微小変化 $d\boldsymbol{R}$ について考える．可展面は数学的な等長変形によって，平面に展開できることから，$\boldsymbol{R}$ が可展面ならば $d\boldsymbol{R}$ は常に曲面の接平面上に存在する．この事を式により表現すると，接平面に対する法線ベクトル $\boldsymbol{n}_r$ を用いて

$$d\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{n}_r = 0 \tag{3.2}$$

と表現できる．ここで，接平面に対する法線ベクトル $\boldsymbol{n}_r$ について考えると，母線も曲面上に存在することから，

$$\boldsymbol{n}_r = \frac{\boldsymbol{\zeta}_L \wedge (\boldsymbol{x}_U(\hat{u}(s)) - \boldsymbol{x}_L(s))}{|\boldsymbol{\zeta}_L \wedge (\boldsymbol{x}_U(\hat{u}(s)) - \boldsymbol{x}_L(s))|} \tag{3.3}$$

と表されることから，これを用いて式 (3.2) を計算し，スカラー 3 重積の公式 $\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \det(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を用いて整理すると

$$\det(\boldsymbol{\zeta}_L(s), \boldsymbol{\zeta}_U(\hat{u}(s)), \boldsymbol{x}_U(\hat{u}(s)) - \boldsymbol{x}_L(s)) = 0 \tag{3.4}$$

を得る．この等式の幾何学的意味について述べると，線織面が可展面であるためには，Fig. 3.2 のように $\boldsymbol{\zeta}_L(s), \boldsymbol{\zeta}_U(\hat{u}(s))$ および母線が全て同一の接平面上に存在することが成り立つことを意味している．

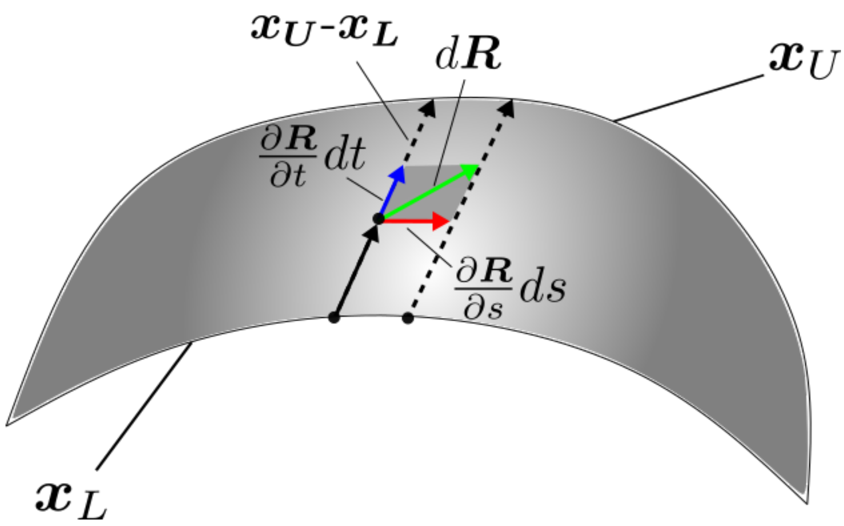


Fig. 3.1　The description of $d\boldsymbol{R}$ on the tangent plane.

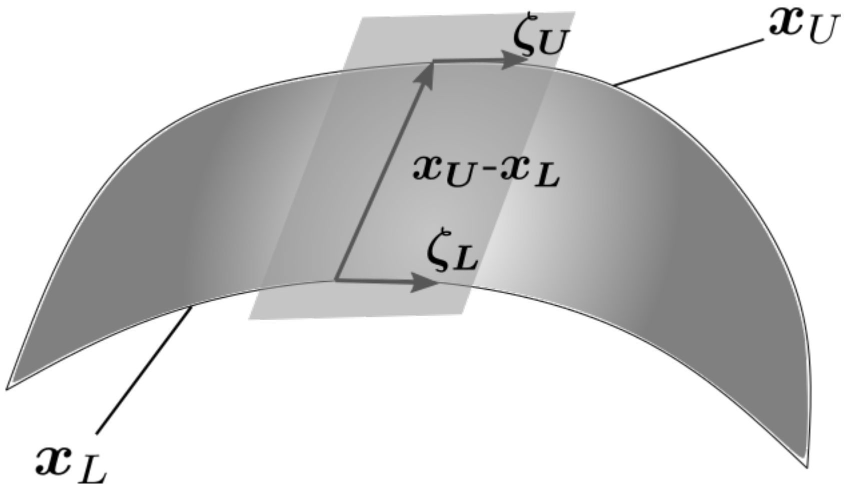


Fig. 3.2 The condition of a developable surface: $\boldsymbol{\zeta}_L, \boldsymbol{\zeta}_U$ and a generatrix exist in the same tangent plane.

　このような $\hat{u}(s)$ を，次の条件を満たすように求めることが出来れば，可展面を設計できる．

条件 1　任意の $s \in [0, l_L]$ に対し，$\hat{u} \in [0, l_U]$ である．

条件 2 $\hat{u}'$ の符号は，$|\boldsymbol{x}_L(0) - \boldsymbol{x}_U(0)|$ が $|\boldsymbol{x}_L(l_L) - \boldsymbol{x}_U(l_U)|$ より小さければ，常に正の値を取り，そうでなければ常に負の値を取る．

条件 2 は，数値計算による手続きで $\hat{u}$ を求める際に，母線が交差しないための条件となる．

上記を踏まえて，$u(s)$ を求める数値計算の手続きについて述べる．数値的に求める際には，$\hat{u}$ を連続関数として求めるのではなく，離散点の集合として求める．区間 $[0, l_L]$ を N により分割した点集合 $\boldsymbol{s} = \{s_i \mid il_L/N \ (i = 0, 1, 2, \cdots, N)\}$ に対して $\hat{\boldsymbol{u}} = \{\hat{u}_i\}$ を考え，以下に示すようなアルゴリズムで求める．注意するべきは，式 (3.4) を満たす $\hat{u}_j$ は必ずしも一意ではなく，複数の候補が考えられる．この時，どの $\hat{u}_j$ が適切かを判断するために，$\hat{u}'$ を後退差分により近似した式がどのような状態であるかを確かめる．$\hat{u}'$ が条件 1,2 を満たさない場合，母線が交差してしまうため，探索範囲を更新し，再び計算を行うようにする．この手法のメリットとして，

Algorithm 1 Calculate developable surface

$$flg = \begin{cases} -1 & \text{if} |\boldsymbol{x}_L(l_L) - \boldsymbol{x}_U(l_U)| \leq |\boldsymbol{x}_L(0) - \boldsymbol{x}_U(0)| \\ 1 & \text{else} \end{cases}$$

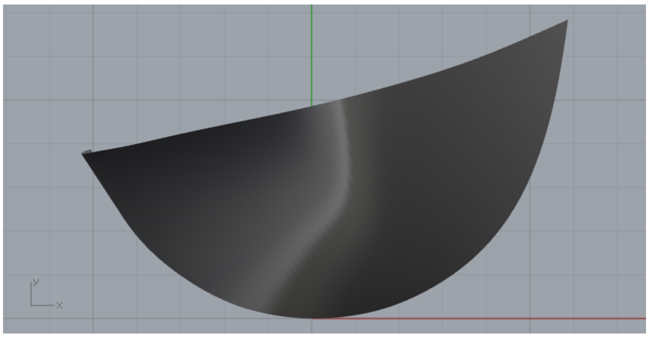
```
for i = 0 to n do
    initialize n_s = 0
    while n_s ≠ N do
        for j = n_s to N do
            û_j = j l_U / N
            if û_j ∈ [0, l_U] satisfying eq.(3.4) then
                break
            end if
        end for
        if û_j = l_U then
            Cannot find û_j
        else
            if (û_j − û_{j−1}) flg ≥ 0 then
                break
            else
                n_s = j + 1
            end if
        end if
    end while
end for
```

Fig. 3.3 The algorithm for calculating developable surface from its boundary lines

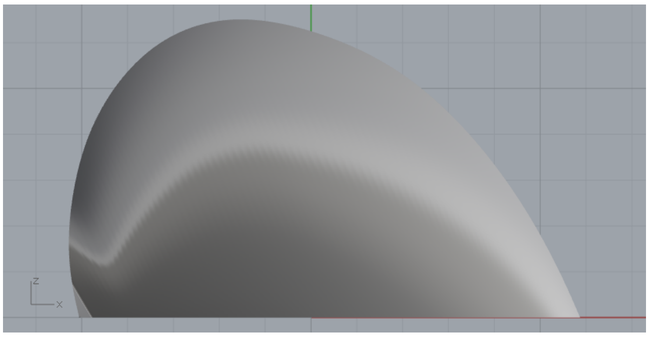
式 (3.4) を満たす解が得られない，または得られた解が前述した条件を満たさない場合においては，与えた境界曲線では可展面を形成できない事を，最適化の手続きを行う事なく判定することができる．この定式化を用いて，次節では実験を通して，手法の妥当性を確認する．

3.2.2 検証実験と結果

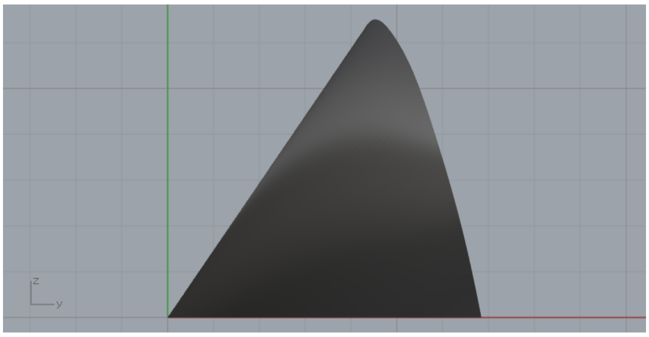
本節では，検証実験を通して前節で示した手法について検討する．今回の実験手順は，次の通りである．はじめに，ある平面形状を組み立て，3 次元形状を作成し，形状を計測する．次に，その形状から手法を用いて曲面を形成し，展開形状を求める．そして最後に，その展開形状と元の平面形状を比較することで，妥当性を検証する．この検証実験の意図は，境界線から曲面形状が再現できることである．ここで，可展面の展開操作においては 3 次元曲面を平面に展開する写像は全単射である．つまり，可展面の 3 次元形状を比較することは，展開後の形状を比較することと等しいと考えられる．この考えの下，手順 1-3 を行い，得られた形状を Fig. 3.4 を示す．また，計算により展開後の形状と計測した展開後の形状を比較した図を Fig. 3.5 に示す．Fig. 3.5 での結果を見ると，ほとんどの領域で一致することが示された．



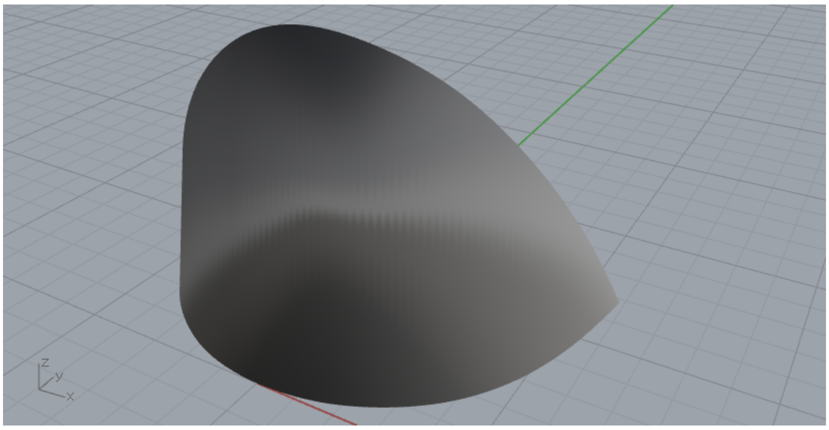
(a) xy-view



(b) xz-view



(c) yz-view



(d) Computational surface model in perspective view

Fig. 3.4 The computational surface obtained by proposed algorithm

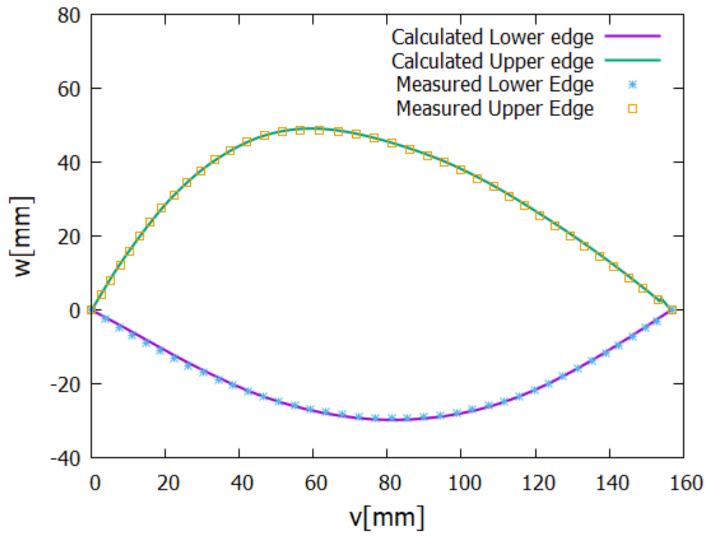


Fig. 3.5　Comparison between obtained pattern shape and measured pattern shape.

3.3　形状制約に対する可展面設計支援

3.3.1　設計問題への定式化

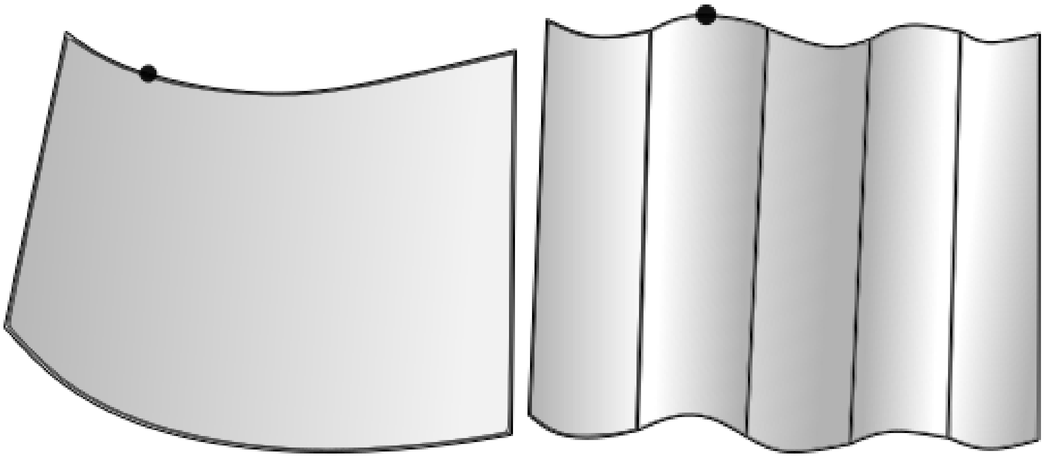
本節では，形状制約に対する可展面の設計問題を，最適化問題として定式化する手続きについて述べる．

前節の議論から，2 つの境界線に対して可展面を生成する手法について述べた．この手法が示すことは，可展面は，2 つの境界線 $\boldsymbol{x}_L(s), \boldsymbol{x}_U(u)$ および弧長間の関係 $\hat{u}(s)$ を求めることで設計できる，ということである．2 章での議論から，曲線の表現は各軸回りの回転率をまとめたベクトル $\boldsymbol{\omega}$ により決まることから，ある設計目的 $\mathcal{F}$ を満たす可展面の設計問題は，$\boldsymbol{x}_L$ を決定する回転率ベクトルを $\boldsymbol{\omega}_L$，$\boldsymbol{x}_U$ を決定する回転率ベクトルを $\boldsymbol{\omega}_U$，$\boldsymbol{x}_L, \boldsymbol{x}_U$ を決定する物体標構の初期値 $\boldsymbol{\xi}_{L,0}, \boldsymbol{\eta}_{L,0}, \boldsymbol{\zeta}_{L,0}, \boldsymbol{\xi}_{U,0}, \boldsymbol{\eta}_{U,0}, \boldsymbol{\zeta}_{U,0}$ とすると，

$$
\begin{aligned}
\text{find}\quad & \boldsymbol{\omega}_L, \boldsymbol{\omega}_U, \hat{u}, \boldsymbol{\xi}_{L,0}, \boldsymbol{\eta}_{L,0}, \boldsymbol{\zeta}_{L,0}, \boldsymbol{\xi}_{U,0}, \boldsymbol{\eta}_{U,0}, \boldsymbol{\zeta}_{U,0} \\
\text{minimize}\quad & \mathcal{F}(\boldsymbol{\omega}_L, \boldsymbol{\omega}_U, \hat{u}) \\
\text{s.t.}\quad & \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\omega}_L, \boldsymbol{\omega}_U, \hat{u}) = \boldsymbol{0}, \\
& \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\omega}_L, \boldsymbol{\omega}_U, \hat{u}) \preceq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

と定式化される．

この設計目的 $\mathcal{F}$ について考える．設計の目的自体はある点を通過するような可展面を設計することである．しかし，この条件だけでは設計解は唯一定めることはできず，多くの場合は Fig. 3.6 のように，そのような可展面は多数存在する．



(a) Potential energy is smaller　　(b) Potential energy is bigger

Fig. 3.6 Developable surfaces which pass the condition point: One is the shape whose potential energy is smaller. The other is that whose potential energy is bigger.

その場合，複数ある設計解のうち，最適な設計解を得る必要がある．本研究では，この設計解の選択をする観点として，物理的観点に基づいて最適な設計解を得ることを考える．

実際の曲面には，その曲がりやねじれに応じてひずみ・応力が発生する．曲がりやねじれが大きい形状を形成すれば，その分曲面にかかる応力も大きいものとなり，形成時に大きな力を要するなど曲面への負荷が非常に大きくなってしまう．そのため，物理的観点からの最適解は曲がりやねじれが小さい形状である．

曲がりやねじれを評価する指標にあたっては，曲面の持つ曲がり・ねじれによるひずみエネルギーにより評価することができる．2 章での議論より，可展面の場合には曲げのみが加わっている状態とみなせるため，式 (2.52) で表される曲げエネルギーを目的関数として考える．

$\boldsymbol{\omega}_L, \boldsymbol{\omega}_U, \hat{u}$ から $\alpha, \omega_\xi, \omega_\eta$ を求める手続きについて述べる．α は，$\boldsymbol{x}_U(\hat{u}) - \boldsymbol{x}_L(s)$ が母線に相当することから，

$$\alpha = -\sin^{-1}\left(\frac{(\boldsymbol{x}_U(\hat{u}) - \boldsymbol{x}_L(s)) \cdot \boldsymbol{\zeta}_L}{|\boldsymbol{x}_U(\hat{u}) - \boldsymbol{x}_L(s)|}\right) \tag{3.6}$$

と表される．α が求められると $\boldsymbol{\xi}_L$ は

$$\boldsymbol{\xi}_L = \frac{1}{\cos\alpha_L}\frac{\boldsymbol{x}_U(\hat{u}) - \boldsymbol{x}_L(s)}{|\boldsymbol{x}_U(\hat{u}) - \boldsymbol{x}_L(s)|} + \boldsymbol{\zeta}_L \tan\alpha_L \tag{3.7}$$

と求められる．また，正規直交基底から $\boldsymbol{\eta}_L = \boldsymbol{\zeta}_L \wedge \boldsymbol{\xi}_L$ と求めることができる．$\boldsymbol{\zeta}'_L = \omega_{\eta,L}\boldsymbol{\xi}_L - \omega_{\xi,L}\boldsymbol{\eta}_L$ と表されることから，$\omega_{\eta,L}, \omega_{\xi,L}$ を求めると，

$$\omega_{\eta,L} = \frac{\boldsymbol{\zeta}'_L \cdot (\boldsymbol{x}_U(\hat{u}) - \boldsymbol{x}_L(s))}{|\boldsymbol{x}_U(\hat{u}) - \boldsymbol{x}_L(s)|\cos\alpha} \tag{3.8}$$

$$\omega_{\xi,L} = \frac{\boldsymbol{\zeta}'_L \cdot (\boldsymbol{\zeta}_L \wedge (\boldsymbol{x}_U(\hat{u}) - \boldsymbol{x}_L(s)))}{|\boldsymbol{x}_U(\hat{u}) - \boldsymbol{x}_L(s)|\cos\alpha} \tag{3.9}$$

と計算することができる．これらの式から，2 つの境界線に形成される曲げエネルギーを求めることができる．

次に，制約条件について述べる．今回の形状制約は，境界線のある点 $\boldsymbol{x}_U(\hat{u}(s_c))$ が，$\boldsymbol{C}$ を通過するという制約を考える．この場合の制約を記述すると，

$$g_1 = (\boldsymbol{x}_U(\hat{u}(s_c)) - \boldsymbol{C}) \cdot \boldsymbol{e}_x \tag{3.10}$$

$$g_2 = (\boldsymbol{x}_U(\hat{u}(s_c)) - \boldsymbol{C}) \cdot \boldsymbol{e}_y \tag{3.11}$$

$$g_3 = (\boldsymbol{x}_U(\hat{u}(s_c)) - \boldsymbol{C}) \cdot \boldsymbol{e}_z \tag{3.12}$$

となる．

境界線に関する制約条件について述べる．境界曲線の表現には接方向回りの回転は影響しないため，$\omega_{\zeta,L} \equiv \omega_{\zeta,U} \equiv 0$ としてもよい．また，2 つの曲線間に可展面が形成されるための条件として，式 (3.4) が全域で満たされるための条件

$$g = \int_0^{l_L} |\det(\boldsymbol{\zeta}_L(s), \boldsymbol{\zeta}_U(\hat{u}(s)), \boldsymbol{x}_U(\hat{u}(s)) - \boldsymbol{x}_L(s))| ds \tag{3.13}$$

を制約条件に加える．

$\hat{u}$ に関する制約条件について述べると，$\hat{u}$ は弧長の性質を持っているため

$$\hat{u}(s) \geq 0, \forall s \in [0, l_L] \tag{3.14}$$

を満たす．また，s および u の進行方向は同方向に進行するものとすることから，母線が交差しないための条件として

$$\hat{u}'(s) \geq 0, \forall s \in [0, l_L] \tag{3.15}$$

が課せられる．

式 (3.14) と (3.15) は，最適化の過程で破られてしまうと計算がうまくできないため，式変換を利用し，自動的に満たすことを考える．

ある適当な関数 $\gamma(s)$ を用いて，$\hat{u}'$ を

$$\hat{u}' = \exp(\gamma(s)) \tag{3.16}$$

と表現する．このようにすると，式 (3.14) と (3.15) を最適化の過程で破ることなく，満たすことができる．ある u をパラメータとする関数 $g(u)$ と $\hat{u}(s)$ の合成関数を $\hat{g}(s)$ のように表現する．このようにすると，$\boldsymbol{x}_U$ を決める過程における微分方程式は

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\xi}}_U & \hat{\boldsymbol{\eta}}_U & \hat{\boldsymbol{\zeta}}_U \end{pmatrix}' \triangleq \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\xi}}_U & \hat{\boldsymbol{\eta}}_U & \hat{\boldsymbol{\zeta}}_U \end{pmatrix} \boldsymbol{\Omega}(\hat{\boldsymbol{\omega}}_U) \tag{3.17}$$

となり，パラメータ s に関する微分方程式となる．また，$\hat{\boldsymbol{x}}_U$ は

$$\hat{\boldsymbol{x}}_U = \int_0^s \hat{\boldsymbol{\zeta}}_U \hat{u}' ds \tag{3.18}$$

と求められる．$\boldsymbol{\omega}_U$ は u の関数だが，実際の計算に用いるのは $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ であるため，パラメータ s によって表現される $\boldsymbol{\omega}_L, \hat{\boldsymbol{\omega}}_U, \gamma$ が最適化の対象とする関数である．

3.3.2 最適化計算の手続き

設計変数である $\boldsymbol{\omega}_L, \hat{\boldsymbol{\omega}}_U, \gamma$ は，関数で表現されているため，式 (3.5) は関数を設計変数に取る変分問題である．変分問題に対する解法としては，Euler 法などの間接法や，Ritz 法やガラーキン法などの直接法の 2 種類が存在する．Euler 法に関しては停留条件を用いて得られる微分方程式を解く解法であり，等式制約や不等式制約が存在する場合には，KKT 条件を用いて解くことになる．しかし，この手法を本問題に適用するにあたっての問題点として，以下の 2 点が挙げられる．

- 停留条件が常に陽に定式化できない
- 微分方程式を解くことが一般的に難しい．

式 (3.17) により求まる空間座標 $\tilde{\boldsymbol{x}}_U$ および式 (3.6)，(3.8) および (3.9) によって目的関数や制約条件が表現されていることから，汎関数で表現されている目的関数などを，微分方程式の形で表現することは難しい．また，例え微分方程式が得られたとしても，KKT 条件を用いて定式化される連立微分方程式を解くことは難しい．以上の観点から，本問題への間接法の適用は困難である．

そこで，Ritz 法と非線形計画法を基にした，直接的な解法により形状を求める．Ritz 法とは，関数を基底 $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots, \varphi_n(s)$ を持つ有限次元の関数空間 $\mathcal{S}$ に属するものとして扱う手法である [68]．具体的には，$\boldsymbol{\omega}_L, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_U, \gamma$ を，例えば γ に関して $\gamma \in \mathcal{S}$ と仮定すると，υ は基底関数 $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots, \varphi_n(s)$ および係数ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1 \;\; a_2 \;\; \cdots a_n)^\top$ により

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(s) \triangleq \boldsymbol{a}\boldsymbol{\varphi}^\top(s) \tag{3.19}$$

と表現できる．ただし，$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1(x) \;\; \varphi_2(x) \;\; \cdots \;\; \varphi_n(x))^\top$ とする．これを設計対象となる全ての関数に適用すると，

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_L \\ \hat{\boldsymbol{\omega}}_U \\ \upsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{\xi,L} & \boldsymbol{a}_{\eta,L} & \boldsymbol{a}_{\xi,U} & \boldsymbol{a}_{\eta,U} & \boldsymbol{a}_{\gamma} \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\varphi}^\top \triangleq \boldsymbol{A}\boldsymbol{\varphi}^\top \tag{3.20}$$

となる．基底関数系には，例えば式 (3.21) に示すような三角関数などが挙げられる．

$$\varphi_i(s) = \begin{cases} 1 & (i=0) \\ \dfrac{s}{L_L} & (i=1) \\ \sin\left(\dfrac{i\pi s}{2l_L}\right) & (i=2k) \\ \cos\left(\dfrac{(i+1)\pi s}{2l_L}\right) & (i=2k+1) \end{cases} \tag{3.21}$$

この表現を用いると，式 (3.5) で表される変分問題は，各曲線の初期姿勢 $\boldsymbol{\xi}_{L,0}^\top, \boldsymbol{\eta}_{L,0}^\top, \boldsymbol{\zeta}_{L,0}^\top$ および，$\boldsymbol{\xi}_{U,0}^\top, \boldsymbol{\eta}_{U,0}^\top, \boldsymbol{\zeta}_{U,0}^\top$ を加えた全体の係数 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{all}} = (\mathrm{vec}(\boldsymbol{A}) \ \ \boldsymbol{\xi}_{L,0}^\top \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{\zeta}_{U,0}^\top)$ に関して，式 (3.22) のような制約付き非線形計画問題となる．

$$\begin{aligned} \text{find} \ \ & \boldsymbol{a}_{\mathrm{all}} \\ \text{minimize} \ \ & \mathcal{F}(\boldsymbol{a}_{\mathrm{all}}) \\ \text{s.t.} \ \ & \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}_{\mathrm{all}}) = \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{h}(\boldsymbol{a}_{\mathrm{all}}) \preceq \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{3.22}$$

この制約付き最適化問題は，拡張ラグランジュ乗数法を用いて数値的に解くことができる [69,70]．拡張ラグランジュ乗数法とは，ラグランジュ乗数法 (KKT 条件) およびペナルティ法を組み合わせた解法である．等式制約に対するラグランジュ乗数を $\boldsymbol{\lambda}^\dagger \in \mathbb{R}^{n_c}$ およびペナルティ項のパラメータ $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^{n_c}$，不等式制約に対するラグランジュ乗数を $\boldsymbol{\mu}^\dagger \in \mathbb{R}^{n_i}$ およびペナルティ項のパラメータ $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^{n_i}$ として，拡張ラグランジュ関数 $\mathcal{L}$ を次のように定義する．

$$\mathcal{L} \triangleq \mathcal{F} + \boldsymbol{\lambda}^\dagger \circ \boldsymbol{g} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{r} \circ \boldsymbol{g}^2) + \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\mu}^\dagger + \boldsymbol{t} \circ \boldsymbol{h}) \tag{3.23}$$

ただし，$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\mu}^\dagger + \boldsymbol{t} \circ \boldsymbol{h})$ は

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\mu}^\dagger + \boldsymbol{t} \circ \boldsymbol{h}) \triangleq \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\dfrac{(\mu_i^\dagger)^2}{t_i} & \mu_i^\dagger + t_i h_i(\boldsymbol{a}) \leq 0 \\ \mu_i^\dagger h_i + \dfrac{1}{2}(t_i h_i^2) & \mu_i^\dagger + t_i h_i(\boldsymbol{a}) > 0 \end{cases} \tag{3.24}$$

と定義している．このようにすると，拡張ラグランジュ関数 $\mathcal{L}$ に関する制約なし最適化問題として定式化でき，適当な最適化手法を用いて解くことができる．用いる最適化手法には，偏微分を陽に求めることの難しさから，ネルダーミード法や Brent 法や，実数型遺伝的アルゴリズムや PSO などのヒューリスティック手法など，微分を用いない手法を用いて解くことが望ましい．

3.3.3 検証実験

本節では，ブラジャーカップの設計工程において，本手法を適用し妥当性の検証を行う．ブラジャーカップにおいては，上下接ぎラインの設計がカップ形状に大きく影響を与えることか

ら，非常に重要とされている．中でも，Fig. 3.7 に示すトップ位置の設計により，衣服着用後のバストシルエットに大きな影響を与える．

ブラジャーカップの設計においては，ワイヤー形状に対して形状変更を行うことはほとんどないため，カップの設計工程においては形状が常に一定であるとする．このことから，式 (3.5) における設計変数は，$\hat{\boldsymbol{\omega}}_U, \hat{u}$ となる．本実験におけるワイヤー形状は円弧であるとする．この円

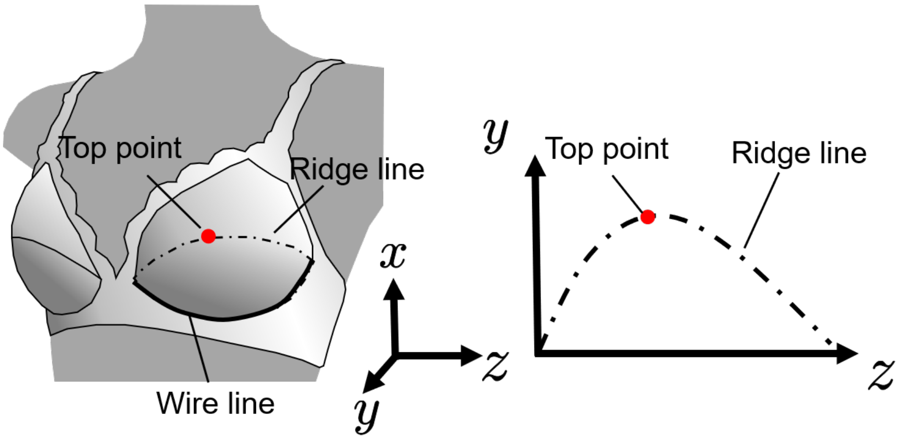


Fig. 3.7　The expression of the ridge line and top point.

弧の半径，全長および制約であるトップ位置を Table 3.1 にまとめる 次に，本研究における目

Table 3.1　The properties of experiment

The properties of experiment	The values
Radius of a wire	2.91
Length of a wire	1.08
Top point $\boldsymbol{C}_p$	$(0.228\ \ 0.086\ \ 0.293)^\top$

的関数の選択から，物理的観点の意味で最適な形状であるかを検討する．式 (3.13) を制約条件としてではなく，目的関数としておけば，形状制約を満たす解の 1 つを得ることができる．本実験では，形状制約を同じ値にし，式 (3.13) を制約条件ではなく目的関数とした場合において得られる形状とを比較することで，最適な形状であるかを検討する．まず，得られる主曲率分布の結果について，式 (2.52) を目的関数にした場合と，式 (3.13) を目的関数にした場合を並べた図を Fig. 3.8 に示す．また，両者の式 (2.52) および最大主曲率の最大値 $\max_{s,t} \kappa_{\max}$ の比較を Table 3.2 に示す．Table 3.2 に示した結果より，ポテンシャルエネルギーは，可展面条件のみを考慮した場合と比較し，13.09% ほど減少した．また，$\max_{s,t} \kappa_{\max}$ は Fig. 3.8 より，特に始端部分において大きく変化しており，可展面条件のみを考慮した場合と比較すると，74.21% ほど減少した．上記の結果から，物理的観点においてポテンシャルエネルギーを目的関数とすることは妥当であると考えられる．また，本手法が形状設計手法として妥当であるかについてを実験

Table 3.2 The comparison between different objective functions: comparing the potential energy and the maximum value of the maximum principal curvature in case that objective function is bending energy of the developable surface with that objective function is the condition of the developable surface.

Objective function	Bending energy	Developable condition
Potential energy	11.87	13.43
Maximum principal curvature	5.212	9.083

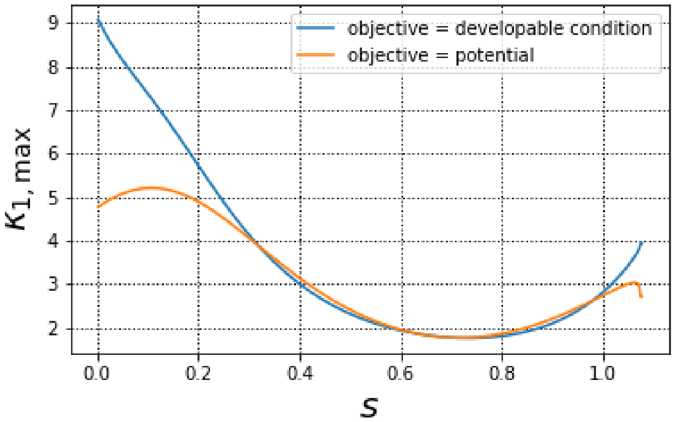
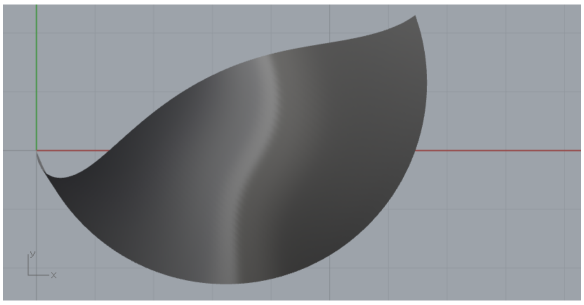
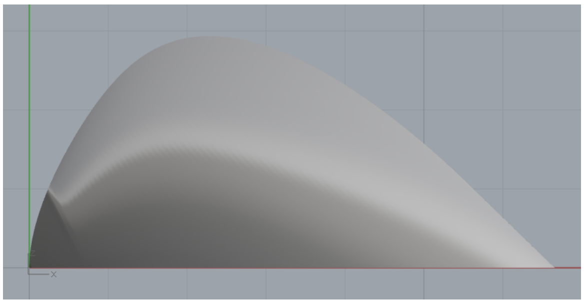


Fig. 3.8 Comparison between κ_1 obtained by minimizing potential energy and that by minimizing developable condition.

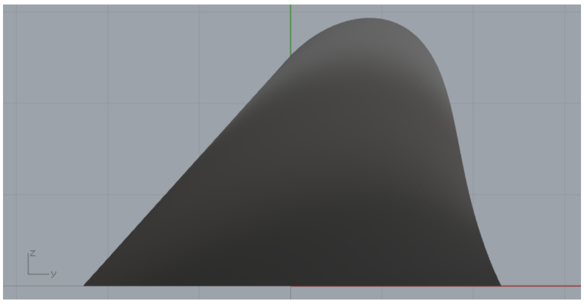
するため，2.3.2 節で行ったように，得られた型紙が三次元形状を再現するかを確かめる．ポテンシャルエネルギーを目的関数として最適化計算を行った結果，得られた形状を Fig. 3.9 に示す．(a),(b),(c) がそれぞれ xy, xz, yz 方向から見た図であり，(d) は曲面を三次元的に投影した図である．そして，この曲面を展開することで得られた形状を，Fig. 3.10 に示す．Fig. 3.10 を用いて検証実験を行い，得られた結果を Fig. 3.11 に示す．この結果における，最大誤差および平均誤差はいずれにおいても，ワイヤーの全長に対してそれぞれ 1.74%, 5.04% 程度であり，本手法は数%程度の誤差を持つ精度で，展開形状を設計できる手法であると示された．



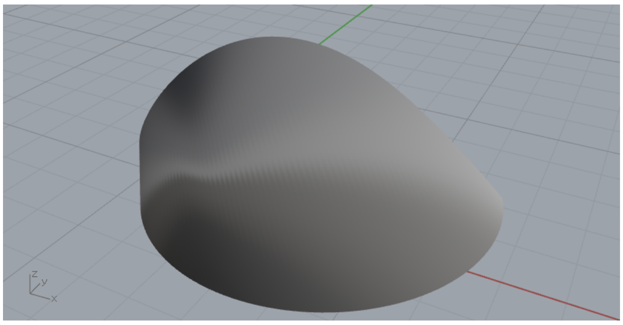
(a) xy-view



(b) xz-view



(c) yz-view



(d) Computational surface model in perspective view

Fig. 3.9 The computational surface obtained by proposed algorithm

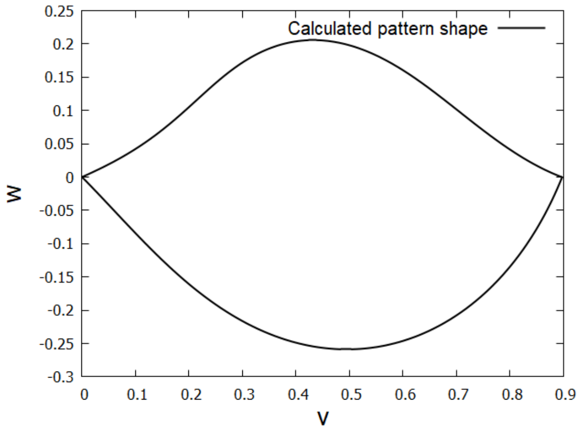


Fig. 3.10　The computational pattern shape by developing Fig. 3.9

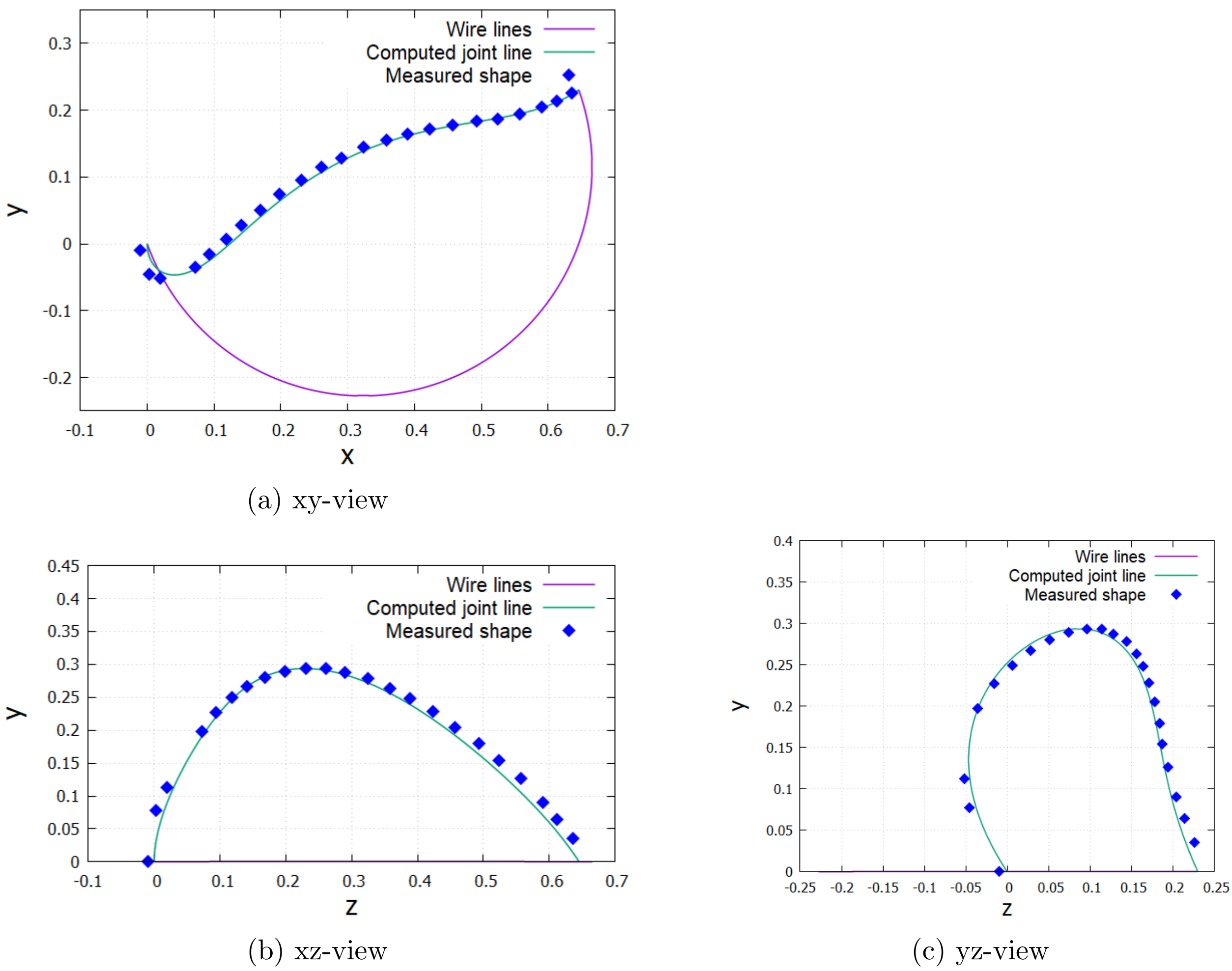
3.4　結言

本章では，幾何学的制約が与えられた場合において，可展面を自動設計する手法について提案した．緒言では，前章の設計支援の適用範囲について述べ，より効率よく計算を行う手法を構築することの必要性について述べた．

より効率よく計算を行う手法として，2 つの境界線に対して貼られる可展面をアルゴリズムにより求める手法を提案した．このアルゴリズムでは，最適化などの煩雑な計算を行う必要性がなく，また，形成できないことをシステムが判断できるという点において，2 章において提案した手法よりも優れている点について述べた．

提案したアルゴリズムの数学的主張は，2 つの境界線およびそのパラメータ間の関係を求めることで，可展面を形成できるということである．この主張から，2 つの境界線およびパラメータ間の関係を設計変数に取ることで，幾何学的制約を満たす可展面設計問題を最適化問題として表現できることを示した．最適化問題の目的関数については，物理的観点から物体の持つポテンシャルエネルギーを最小とする形状であることについて述べた．

検証実験では，ブラジャーカップの下カップを設計対象にとり，提案手法の物理的観点および曲面の再現性の 2 つの観点から考察した．1 つ目の物理的観点については，ポテンシャルエネルギーを考慮せず，可展面条件を最小化するような形状の最大主曲率およびポテンシャルエネルギーを比較することで検討を行った．2 つ目の曲面の再現性については，手法により得られた曲面から可展面を実際に作成し，元の得られた 3 次元形状と比較することで検討を行った．この結果，全体的に局所的に曲率が大きくない曲面形状が，平均誤差が 1%程度，最大誤差 5%程度の誤差を含む精度で，設計できることが示された．



(a) xy-view

(b) xz-view

(c) yz-view

Fig. 3.11 The comparison between calculated and measured ridge line.

第4章　可展面の形状修正手法について

4.1　緒言

1章でも触れたように，可展面のモデリングに関する研究が様々行われている他，これまでの議論で我々は，形状制約に基づく可展面の設計支援について述べた．しかし，CADの形状モデルにおける要求仕様の1つである「形状の編集機能」については，いずれの研究も触れられていなかった．岩田らによれば，CADシステムにおいて，設計者の望む変更や修正などの意向をどのように実現させるかが重要であるとされている．ここでいう変更や修正とは，形状の幾何データの変更（編集）に伴って，形状が変形することを指す．従来，自由曲面を表現するためのモデルとして用いられてきたベジエ曲面やB-spline曲面では，この形状編集は，制御点の編集を行うことで達成していた．

ベジエ曲面およびBspline曲面では，いずれにおいても，空間座標の数理表現は制御点の重み付き線形和の形となっている．すなわち，制御点の編集が行われた際には，編集された制御点を用いて総和を計算しなおすだけで，修正後の形状を求めることができた．また，これらのモデルが用いられる要因として，設計者の修正入力に対して形状の修正が局所的である点が挙げられる．特にB-spline曲面においては，用いられる基底関数が区分的な多項式であることから，制御点の修正に対して，編集した制御点の周辺のみが変化する，局所的な変形が起こる．この制御点に対する局所変形性は，設計者が意図通りに形状を修正する上で重要な性質である．上記の点から，自由曲面の表現方法には，B-splineやベジエ曲面の形状モデルが用いられている．

可展面における形状編集においては，その操作の前後で可展面の性質は保存されなければならない．しかし，前述したB-splineやベジエ曲面を用いてモデリングされた可展面においては，曲面の制御点の編集に対し，可展面の性質を保ったまま形状が修正される手法については言及されていない．また，前章で述べた形状制約を満たすように曲面を生成する手法では，形状制約の変更の度に繰り返し最適化を行う必要があり，計算コストの面で非効率的であると考えられる．

以上から，本章では可展面の幾何データの修正に合わせて，可展面形状をその性質を保ったまま曲面を変形させる手法について提案する．

4.2　修正作業の定式化

4.2.1　修正設計手法の提案

今回想定する修正作業は，Fig. 4.1 のように 2 つの境界線 $\boldsymbol{x}_L, \boldsymbol{x}_U$ を持つ可展面において，境界線のある点の位置 $\boldsymbol{x}_U(s_c) \equiv \boldsymbol{x}_{U,C}$ をある位置 $\boldsymbol{C}$ へ移動させ，それに合わせた新しい可展面を得ることと定義する．以後，簡単のため $\boldsymbol{x}_L, \boldsymbol{x}_U$ は同一のパラメータ s によって表現されているものとする．曲線の移動方向ベクトルを $\boldsymbol{d}(s)$ とし，それに応じた移動量を $\varepsilon(s)$ とすれば，修正

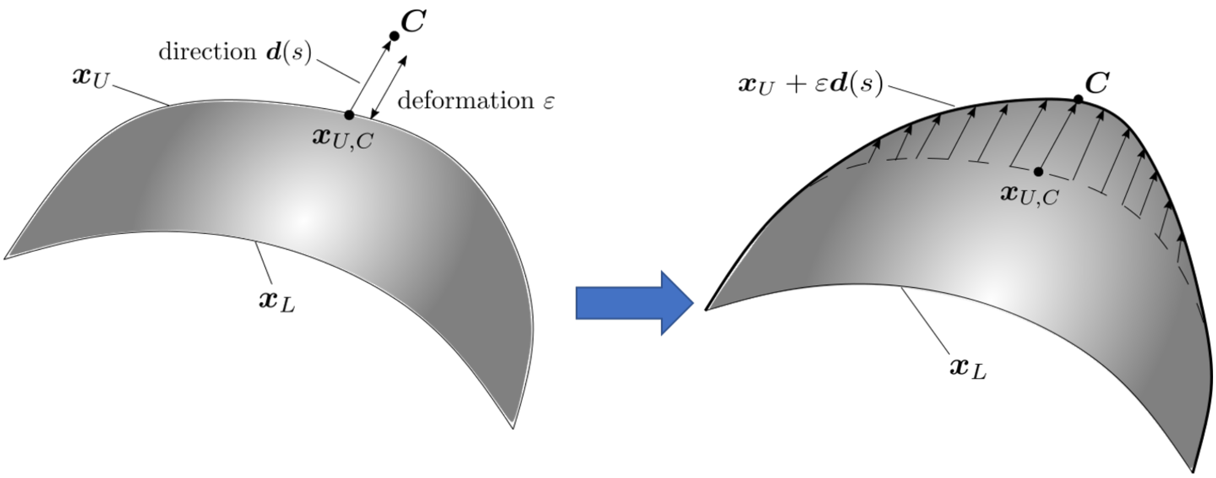


Fig. 4.1　The procedure of modifying process in this study.

された境界曲線の空間ベクトルは，$\boldsymbol{x}_U(s) + \varepsilon(s)\boldsymbol{d}(s)$ となる．ただし，$\varepsilon \geq 0$ を仮定しておく．この境界曲線が，式 (3.4) の可展開条件を満たすならば，

$$\det(\boldsymbol{\zeta}_L, \boldsymbol{x}'_U + \varepsilon'\boldsymbol{d} + \varepsilon\boldsymbol{d}', \boldsymbol{x}_U + \varepsilon\boldsymbol{d} - \boldsymbol{x}_L) = 0 \tag{4.1}$$

を満たす．$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{x}_U - \boldsymbol{x}_L$ とおき，この式を展開すると，ε に関する微分方程式を得る．

$$\varepsilon' = c_1\varepsilon^2 + c_2\varepsilon \tag{4.2}$$

ただし，c_1, c_2 は次式で定義している．

$$c_1 \triangleq -\frac{\det(\boldsymbol{d}', \boldsymbol{\zeta}_L, \boldsymbol{d})}{\det(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\zeta}_L, \boldsymbol{g})} \tag{4.3}$$

$$c_2 \triangleq -\left(\frac{\det(\boldsymbol{d}', \boldsymbol{\zeta}_L, \boldsymbol{g}) + \det(\boldsymbol{x}'_U, \boldsymbol{\zeta}_L, \boldsymbol{d})}{\det(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\zeta}_L, \boldsymbol{g})}\right) \tag{4.4}$$

この式から，方向 $\boldsymbol{d}(s)$ が決まればそれに応じた移動量 ε を得られる．局所的な修正を想定する場合には，編集する曲線の変化量は最小となることから，$\boldsymbol{d}(s)$ は，すでに存在する形状制約に関する条件の下で目的関数

$$\int_0^{l_L} \varepsilon^2 ds \rightarrow \min \tag{4.5}$$

となる最適化問題を解くことで得られる．この移動量 ε は局所的変形ならば，$s = s_c$ において ε が極大値を取るため，その条件として

$$\varepsilon(s)' \begin{cases} \geq 0 & s \in [0, s_c) \\ = 0 & s = s_c \\ \leq 0 & s \in (s_c, l_L] \end{cases} \tag{4.6}$$

が考えられる．さらに， 可展面の母線が交差する問題が起こる可能性もあるため，この事を考慮しなければならない．

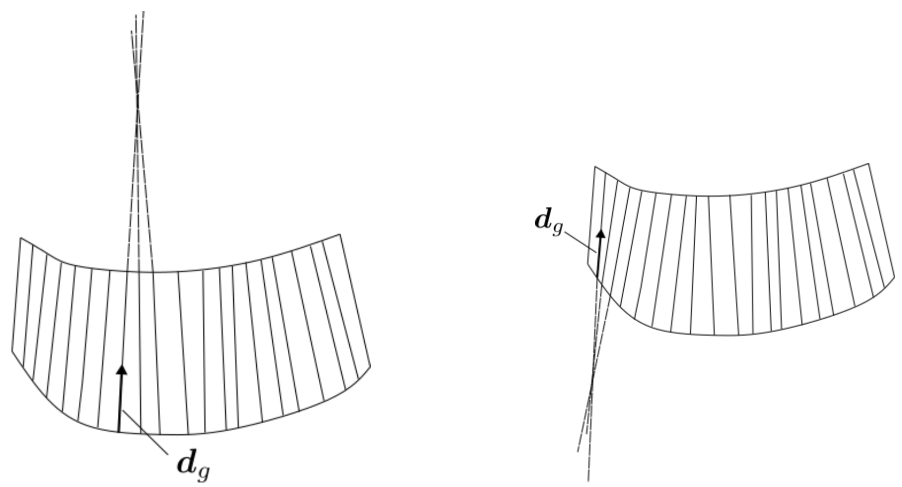
一般的に，可展面には，円柱のように母線角が恒等的に 0 の場合を除き，ねじれることなく形成可能である母線の最大長が存在している．母線が交差する時の母線長を T_D とするとき，$t = T_D$ において母線が一点に集中する，つまり $t = T_D$ 周辺の微小面積 $EG - F^2$ が 0 になる．$EG - F^2 = 0$ を解くことで T_D は

$$T_D = \frac{\cos\alpha}{\alpha' + \omega_\eta} \tag{4.7}$$

と求めることができる．T_D には正負の符号どちらも取る場合が考えられるが，これは母線の方向に由来するものである．例えば，Fig. 4.2(a) の場合には，$T_D \geq 0$ であり，母線方向に母線を伸ばし続けると，ある点で交差する．一方，Fig. 4.2(b) の場合には，$T_D < 0$ であるため，母線方向と反対方向に伸ばし続けることで，ある点で交差する．このため，計算の際には母線の方向に応じて T_D を考慮するかどうかを考えればよい．T_D を考慮する場合には，母線長 $|\boldsymbol{x}_U(s) + \varepsilon\boldsymbol{d} - \boldsymbol{x}_L|$ に対して

$$|\boldsymbol{x}_U(s) + \varepsilon\boldsymbol{d} - \boldsymbol{x}_L| \leq T_D \qquad T_D \geq 0 \tag{4.8}$$

を不等式制約に加える必要がある．つまり，可展面の性質を保存しながら形状を局所的に修正



(a) $T_D \geq 0$　　(b) $T_D \leq 0$

Fig. 4.2　Description of T_D

する問題は，$\boldsymbol{d}(s)$ に関する変分問題として，以下のように定式化される．

$$\text{find}\ \ \boldsymbol{d}(s), \varepsilon \tag{4.9}$$

$$\text{minimize}\ \ \int_0^l \varepsilon^2 ds \tag{4.10}$$

$$\text{s.t.}\ \ \varepsilon' = c_1\varepsilon^2 + c_2\varepsilon \tag{4.11}$$

$$\varepsilon \geq 0 \tag{4.12}$$

$$\varepsilon' \geq 0\ \ \forall s \in [0, s_c) \tag{4.13}$$

$$\varepsilon'(s_c) = 0 \tag{4.14}$$

$$\varepsilon' \leq 0 \forall s \in (s_c, l_L] \tag{4.15}$$

$$|\boldsymbol{d}| = 1\ \ \forall s \in [0, l_L] \tag{4.16}$$

$$|\boldsymbol{x}_U + \varepsilon\boldsymbol{d} - \boldsymbol{x}_L| \leq T_D\ \ \text{if}\ T_D \geq 0 \tag{4.17}$$

このような問題に対して，3.3.2 節で述べたように，Ritz 法を用いて基底関数の重み付き線形和として表現したのち，制約付き非線形計画問題として解く事で解を得る方法がある．しかし，制約付き非線形計画問題で広く用いられる拡張ラグランジュ乗数法などは，ラグランジュ乗数の更新に合わせて最適化計算を繰り返し行う必要性があることに加え，式 (4.2) で表される微分方程式は解析的に解くことができず, ルンゲクッタ法などの数値解法を用いなければならない点，また，不等式制約の実行可能領域が複雑である問題が存在する．これらは計算コストの問題に大きく影響を与え，結果として形状モデルの要件である対話的な修正を行うことは難しくなってしまう．そこで，今回はこのような煩雑な計算を極力避け，高速に局所変形形状を求める手法について提案する．

この局所変形手法を考えるにあたって，一番注意するべきは式 (4.2) の方程式の取り扱いである．この微分方程式は前述したように，一般的な解析解を求めることは難しい．しかし，特定の場合には方程式の解を解析的に求めることができるため，このことについて検討する．

はじめに，$\boldsymbol{d}(s)$ が s に依存しない定ベクトルである場合について述べる．この場合，$\boldsymbol{d}' \equiv \mathbf{0}$ であることから，$c_1 = 0$ となる．つまり，式 (4.2) は

$$\varepsilon' = c_2^c \varepsilon \tag{4.18}$$

と表される．この時の c_2^c は,

$$c_2^c = -\frac{|u'\boldsymbol{\zeta}_U \times \boldsymbol{\zeta}_L|}{D\cos\alpha}\mathrm{sgn}((\boldsymbol{\zeta}_L \times \boldsymbol{\zeta}_U)\cdot\boldsymbol{\eta}) \tag{4.19}$$

となり，$\boldsymbol{d}$ に依存しない形で表現できる．この方程式はいわゆる変数分離型の微分方程式であり，境界値条件 $\varepsilon(s_c) = \tilde{\varepsilon}_c$ の下で

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon}_c \exp\left[\int_{s_c}^{s} c_2^c ds\right] \tag{4.20}$$

となり，解析的に解を求めることができる．ただし，$D(s)=0$ または $\alpha=\pi/2+n\pi, n\in\mathbb{Z}$ を満たす s の場合には，便宜上 $\varepsilon(s)=0$ として扱うものとする．

次に，方向ベクトル $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{\zeta}_L,\boldsymbol{\zeta}_U,\boldsymbol{d}_g$ の場合について考察する．この場合，c_1 における分母 $\det(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\zeta}_L,\boldsymbol{g})$ が恒等的に 0 となるため，別途考察する必要がある．$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{\zeta}_L$ または $\boldsymbol{\zeta}_U$ については，式 (4.2) に代入すると，解として $\varepsilon\sim 0$ を得る．ここで $\sim$ 記号は同値類を表しており，例えば関数 $x(t), y(t)$ に対して，$x(t)\sim y(t)$ であれば $x(t)$ と $y(t)$ は t の定義域において，ほとんど至る所で一致することを意味する．このことは，$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{\zeta}_L$ または $\boldsymbol{\zeta}_U$ の場合には，曲面を修正できないことを意味している．一方，$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{d}_g$ の場合については，ε は不定となる．

4.2.2 局所修正アルゴリズム

前節で式 (4.2) の特殊な場合について考察をまとめると，次のようにまとめられる．

1. $\boldsymbol{d}$ が s によって依存しない場合には，ε の微分方程式は解析的に計算できる．
2. $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{\zeta}_L,\boldsymbol{\zeta}_U$ の場合は，どのように移動量を設計しても，曲面を修正することができない．
3. $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{d}_g$ の場合においては，母線の最大長に関する不等式に注意は必要であるが，どのような移動量 ε を設計したとしても，それに合わせて曲面を修正することができる．

この考察を基に，可展面の境界曲線を修正する場合におけるアルゴリズムについて提案する．アルゴリズムを提案するにあたっての基本的方針は，$\boldsymbol{x}_U(s_c)$ を $\boldsymbol{C}$ へ編集した際における曲面の局所変形を，母線方向から近づける操作と，母線方向に直交する方向から近づける操作を交互に繰り返すことで，達成させることである．以後では，母線方向から近づける操作を「Stretching」と呼び，母線方向に直交する方向から近づける操作を「Shifting」と呼ぶ．

step1.　「Stretching」操作を行う．

step2.　$|\boldsymbol{C}-\boldsymbol{x}_{U,n}(s_c)|$ が許容誤差 Δ_c 以下であれば終了，そうでなければ step.3 へ進む

step3.　「Shifting」操作を行う．

step4.　$|\boldsymbol{C}-\boldsymbol{x}_{U,n}(s_c)|$ が許容誤差 Δ_c 以下であれば終了，そうでなければ step1 へ戻る．

まず「Stretching」について述べる．はじめに，n 回目の操作終了時に得られている空間曲線を $\boldsymbol{x}_{U,n}$ とし，この操作による曲線の修正量を $\varepsilon_{\mathrm{stretch}}$ とする．母線方向に沿って曲線を変形させる場合，$\varepsilon_{\mathrm{stretch}}$ は不定になることから，$\varepsilon_{\mathrm{stretch}}$ の分布は任意に設計することができる．境界

線のある点 $\boldsymbol{x}_{U,n}(s_c)$ を点 $\boldsymbol{C}$ へ編集する際に，曲面が局所的に修正される問題は，以下のように $\varepsilon_{\mathrm{stretch}}$ に関する変分問題として定式化される．

$$\text{find} \quad \varepsilon_{\mathrm{stretch}} \tag{4.21}$$
$$\text{minimize} \quad \int_0^{l_L} \varepsilon_{\mathrm{stretch}}(s) \tag{4.22}$$
$$\text{s.t.} \quad \varepsilon_{\mathrm{stretch}}(s) \geq 0 \ \ \forall s \in [0, l_L] \tag{4.23}$$
$$\varepsilon'_{\mathrm{stretch}}(s) > 0 \ \ \forall s \in [0, s_c) \tag{4.24}$$
$$\varepsilon'_{\mathrm{stretch}}(s_c) = 0 \tag{4.25}$$
$$\varepsilon'_{\mathrm{stretch}}(s) < 0 \ \ \forall s \in (s_c, l_L] \tag{4.26}$$
$$\varepsilon_{\mathrm{stretch}}(s_c) = |\boldsymbol{d} \cdot (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{x}_{U,n})| \tag{4.27}$$

式 (4.27) は，$\min |\boldsymbol{C} - \boldsymbol{x}_U - \varepsilon(s_c)\boldsymbol{d}_g|^2$ を解くことで得られる制約式である．

この最適化問題を解くにあたって，例えば式 (4.23) のように，あるパラメータの区間の全域で成り立つような不等式制約は，既存の最適化で扱うことは困難であるため，$\varepsilon_{\mathrm{stretch}}$ の表現を工夫することで，式を自動的に満たせるように試みる．

まず，式 (4.24) と (4.25) の制約を自動的に解消するためには，ε' を全ての $s \in [0, l_L]$ に対して値域が常に 0 より大きい適当な関数 γ を用いて以下のように記述できればよい．

$$\varepsilon'_{\mathrm{stretch}} = \gamma(s)(s_c - s) \tag{4.28}$$

このようにおくと，最適化問題は，$\gamma(s) \geq 0$ を不等式制約を加えた，γ に関する変分問題として定式化される．

次に，$\gamma(s)$ を数理的に求める手続きについて説明する．まず，Ritz 法を用いて，γ を基底関数の線形和で表現する．

$$\gamma(s) = \sum_{i=1}^{N} a_i s^i \tag{4.29}$$

今回は，関数空間に多項式基底 $\{s^i | i = 1, 2, \cdots n\}$ を用いる．このようにすると，$\varepsilon_{\mathrm{stretch}}$ は以下のように表される．

$$\varepsilon_{\mathrm{stretch}} = \sum_{i=1}^{N} a_i \left(s_c \frac{s^{i+1}}{i+1} - \frac{s^{i+2}}{i+2} \right) \tag{4.30}$$

この時，式 (4.22) を式 (4.30) を用いて表すと

$$\int_0^{l_L} \varepsilon_{\mathrm{stretch}} ds = \sum_{i=1}^{N} a_i \left(s_c \frac{l_L^{i+2}}{(i+1)(i+2)} - \frac{l_L^{i+3}}{(i+2)(i+3)} \right) \tag{4.31}$$

となる．次に，制約条件について述べる．式 (4.27) を式 (4.30) を用いて表すと，

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \left(\frac{s_c^{i+2}}{(i+1)(i+2)} \right) = |\boldsymbol{d} \cdot (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{x}_{U,n})| \tag{4.32}$$

となり，$\boldsymbol{a}$ に関して一次式となる．不等式制約について述べると，式 (4.28) より，$\gamma \geq 0$ ならば，$\varepsilon_{\mathrm{stretch}}(s) \geq 0,\ \forall s \in [0, l_L]$ が成り立つ．すなわち，不等式制約については，$\gamma \geq 0$ のみを考えればよい．$\gamma \geq 0$ は区間 $[0, L]$ において成立する必要があるため，$s_j = jl_L/n_I,\ j = 1, 2 \cdots n_I$ として，

$$\sum_{i=1}^{N} a_i s_j^i \geq 0 \tag{4.33}$$

で表される n_I 個の離散的な不等式制約を用いて表現する．このようにすると，不等式制約もまた $\boldsymbol{a}$ に関して一次式で表される．

以上から，この変分問題は，目的関数および制約条件のいずれも $\boldsymbol{a}$ に関する一次式で表現できるため，比較的小規模な線形計画問題へ帰結させることができる．このような線形計画問題は，制約つき非線形計画問題と比較して計算コストをかけることなく解くことができる．「Stretching」操作により，母線方向においては十分局所的に変形させる事ができる．しかし，設計者が指定した点 $\boldsymbol{C}$ は常にその動かしたい点の母線上に存在するとは限らず，この操作だけでは，必ずしもその点を通ることを達成できない．また,「Stretching」操作では，その母線方向や曲率などの曲面の内在的性質は変更されないことから，次に示す「Shifting」操作により，曲面の内在的性質を変更させることで,「Stretching」操作を再び作用させることができる．

「Shifting」操作について説明する.「Stretching」操作完了時に得られた境界線の空間ベクトルを $\tilde{\boldsymbol{x}}_U$ と表現し，ある定方向 $\boldsymbol{d}_{\mathrm{shift}}$ に沿って変化量 $\varepsilon_{\mathrm{shift}}$ に従って変形させる操作を考える．この時，$\varepsilon_{\mathrm{shift}}$ は式 (4.20) から，境界値 $\tilde{\varepsilon}_c$ によって，一意に決定できる．

「Shifting」操作では，曲面形状をなるべく変形させないでいつつも，母線方向などの内在的性質のみを変更させることが望ましいため，未知である $\tilde{\varepsilon}_c, \boldsymbol{d}_{\mathrm{shift}}$ は，以下の 2 つの目的関数 $f_1(\boldsymbol{d}_{\mathrm{shift}}, \tilde{\varepsilon}_c), f_2(\boldsymbol{d}_{\mathrm{shift}}, \tilde{\varepsilon}_c)$ を最小化するように選ばれる事が望ましい．

$$f_1(\boldsymbol{d}_{\mathrm{shift}}, \tilde{\varepsilon}_c) = \int_0^{l_L} |\tilde{\boldsymbol{x}}_U + \boldsymbol{d}_{\mathrm{shift}} \varepsilon_{\mathrm{shift}} - \boldsymbol{x}_U|^2 ds \tag{4.34}$$

$$f_2(\boldsymbol{d}_{\mathrm{shift}}, \tilde{\varepsilon}_c) = |\tilde{\boldsymbol{x}}_U(s_c) + \varepsilon_{\mathrm{shift}} \boldsymbol{d}_{\mathrm{shift}} - \boldsymbol{C}| \tag{4.35}$$

ただし，$\boldsymbol{x}_U$ は変形させる前の曲線ベクトルである．式 (4.34) は過去の変形履歴と新たに加える変形の和が最小となる事を意味しており，式 (4.35) は操作によって指定する点 $\boldsymbol{C}$ になるべく近づく事を意味する．これを制約条件 $\varepsilon_c \geq 0, |\boldsymbol{d}_{\mathrm{shift}}| = 1$ の下で解くことを考える．

はじめに，$\boldsymbol{d}_{\mathrm{shift}}$ の表現について考える．内在的性質に編集を加えることを考えた際には，$s = s_c$ における曲面の最大主曲率方向 $\boldsymbol{d}_{\max}$ と法線方向 $\boldsymbol{\eta}$ を用いて $\boldsymbol{d}_{\mathrm{shift}}$ を表現すればよい．つまり $\boldsymbol{d}_{\mathrm{shift}}$ を，ある定数 ψ を用いて，次のように表現する．

$$\boldsymbol{d}_{\mathrm{shift}} = \boldsymbol{d}_{\max}(s_c) \cos\psi + \boldsymbol{\eta}(s_c) \sin\psi \tag{4.36}$$

このように整理すると，式 (4.34) と (4.35) に関する最適化問題は，$\tilde{\varepsilon}_c$ および ψ を求める最適化問題として定式化される．

次に，式 (4.34) と (4.35) で示した最適条件を，同時に求める手続きについて述べる．まず，式 (4.36) を用いて式 (4.34) と (4.35) を表現すると，次式らで表現される．

$$f_1(\boldsymbol{d}_{\mathrm{shift}}, \tilde{\varepsilon}_c) = Z\tilde{\varepsilon}_c^2 + 2\tilde{\varepsilon}_c(X_1 \cos\psi + X_2 \sin\psi) + C_1 \tag{4.37}$$

$$f_2(\boldsymbol{d}_{\mathrm{shift}}, \tilde{\varepsilon}_c) = \tilde{\varepsilon}_c^2 - 2\tilde{\varepsilon}_c(Y_1 \cos\psi + Y_2 \sin\psi) + C_2 \tag{4.38}$$

ただし，$X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2, C_1, C_2$ はそれぞれ次式らで表される．

$$X_1 = \int_0^{l_L} \exp\left[\int_{s_c}^{s} c_2^c ds\right] \boldsymbol{x}_U \cdot \boldsymbol{d}_{\max}(s_c) ds \tag{4.39}$$

$$X_2 = \int_0^{l_L} \exp\left[\int_{s_c}^{s} c_2^c ds\right] \boldsymbol{x}_U \cdot \boldsymbol{\eta}(s_c) ds \tag{4.40}$$

$$Y_1 = \boldsymbol{d}_{\max}(s_c) \cdot (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{x}_U) \tag{4.41}$$

$$Y_2 = \boldsymbol{\eta}(s_c) \cdot (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{x}_U) \tag{4.42}$$

$$Z = \int_0^{l_L} \exp\left[\int_{s_c}^{s} 2c_2^c ds\right] ds \tag{4.43}$$

$$C_1 = \int_0^{l_L} |\tilde{\boldsymbol{x}}_U - \boldsymbol{x}_U|^2 ds \tag{4.44}$$

$$C_2 = |\boldsymbol{C} - \boldsymbol{x}_U|^2 \tag{4.45}$$

式 (4.37) と (4.38) のいずれも，ε_c に関して 2 次式である．f_2 に関して極値となる条件を求めると，

$$\tilde{\varepsilon}_c = Y_1 \cos\psi + Y_2 \sin\psi \tag{4.46}$$

と表される．式 (4.46) が f_1 に関して極値条件を満たすためには，式 (4.46) を代入した $f_1(\psi)$ に関して，$df_1(\psi)/d\psi = 0$ が成り立つ．これを計算すると，

$$\psi = \frac{ZY_1Y_2 - Y_1X_2 - X_1Y_2}{Z(Y_1^2 - Y_2^2) + 2(X_1Y_1 - X_2Y_2)} \tag{4.47}$$

が得られる．このような手続きで求めた $\tilde{\varepsilon}_c, \psi$ を用いることで,「Shifting」操作を行うことができる．上記の操作を，$|\boldsymbol{C} - \boldsymbol{x}_{U,n}(s_c)| \leq \Delta_c$ を満たすまで繰り返し行うことで，局所的に修正された可展面を得ることができる．

4.2.3　修正の実行可能性

本節では，提案したアルゴリズムにおける修正の実行可能性については議論を行っていなかったため，その議論について述べる．3.1 節で述べたように，可展面には自己交差を起こす母線の

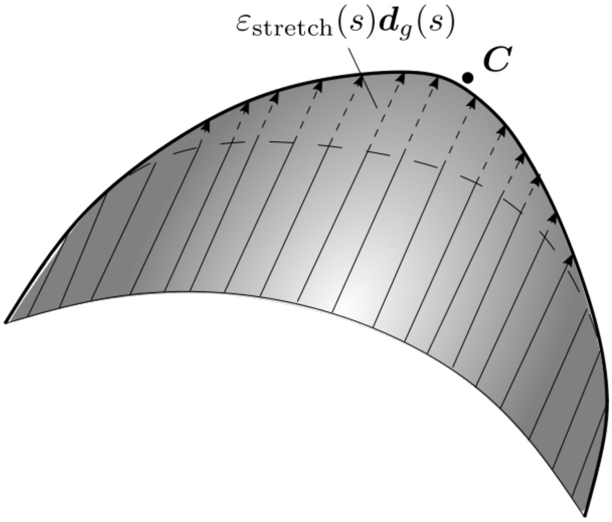


Fig. 4.3 Description of the operation of step 1: stretching a boundary line along the direction of a generatrix

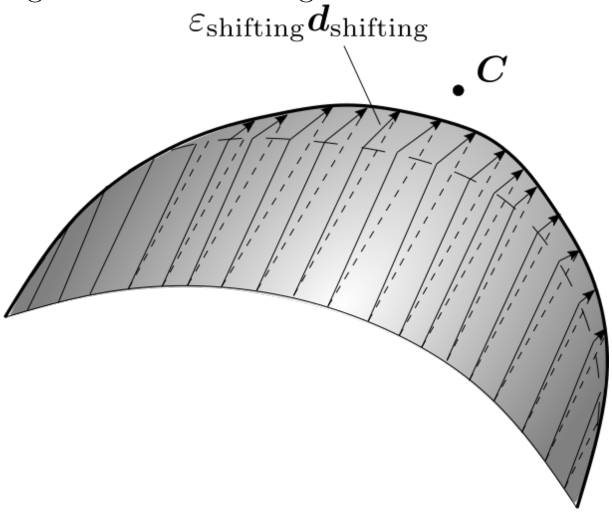


Fig. 4.4 Description of the operation of step 3: shifting a boundary line along the direction $\boldsymbol{d}_{\mathrm{shifting}}$

最大長が存在している．設計者が与えた点 $\boldsymbol{C}$ へ曲線を修正する際，提案アルゴリズムにおける「Stretching」の操作において，$\boldsymbol{d}_g \cdot (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{x}_U) < T_D$ を満たしていれば，修正可能である．満たされていない場合には，式 (4.27) で表されている制約を $\varepsilon_{\mathrm{stretch}} = T_D$ と置き換えて，最適化問題を解く必要がある．その後,「Shifting」操作を行うことになるが，この操作によって母線の最大長が大きくなるのであれば,「Stretching」と「Shifting」の操作を繰り返し行うことで修正を行うことが可能である．しかし,「Shifting」操作によって母線の最大長が小さくなる場合には,「Stretching」と「Shifting」の操作を繰り返し行っていても，修正を行うことができない．

この場合には，システムは設計者に対し，与えた点が修正の実行不可能であることを提示するべきである．そこで，本手法の今後の展望として，与えた点に対する修正の実行可能性を判

定する定式化について述べる．

「Shifting」の操作により，$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_1(s_c)\cos\psi + \boldsymbol{\eta}(s_c)\sin\psi$ 方向に微小な変化 $\delta\varepsilon(s)$ を与える場合について考える．この事により α, ω_η も変化するが，その変化量 $\delta\alpha, \delta\omega_\eta$ も十分微小であると考える事ができる．こうした条件の下，$s = s_c$ における母線の最大長の変化量 δT_D を考えると，

$$\delta T_D \simeq \frac{\partial T_D}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial T}{\partial \alpha'}\delta\alpha' + \frac{\partial T}{\partial \omega_\eta}\delta\omega_\eta \tag{4.48}$$

と表される．ここで，式 (2.47) を用いて計算すると，$\delta\alpha$ は以下の等式を満たす．

$$\sin(\alpha + \delta\alpha) = -\frac{\boldsymbol{\zeta}_L \cdot (\boldsymbol{x}_U - \boldsymbol{x}_L + \delta\varepsilon \boldsymbol{d}_{\text{shift}})}{|\boldsymbol{x}_U - \boldsymbol{x}_L + \delta\varepsilon \boldsymbol{d}_{\text{shift}}|} \tag{4.49}$$

$\delta\varepsilon \ll |\boldsymbol{x}_U - \boldsymbol{x}_L|$ が十分成立するとして，$\bar{\varepsilon}$ を

$$\bar{\varepsilon} \triangleq \frac{\delta\varepsilon}{|\boldsymbol{x}_U - \boldsymbol{x}_L|} \tag{4.50}$$

と定義すると，$\bar{\varepsilon} \ll 1$ となるため，$\bar{\varepsilon}$ に関して 1 次近似を行うことで，

$$\sin(\alpha + \delta\alpha) \simeq \sin\alpha - \bar{\varepsilon}\cos\alpha\cos\psi \tag{4.51}$$

と近似できる．さらに，$\sin(\alpha + \delta\alpha) \simeq \sin\alpha + \delta\alpha\cos\alpha$ を用いれば，

$$\delta\alpha = -\bar{\varepsilon}\cos\psi \tag{4.52}$$

と計算される．また，$\delta\alpha' = (\delta\alpha)'$ と考えられるので，

$$\delta\alpha' = \left(-\frac{|\boldsymbol{x}_U - \boldsymbol{x}_L|'\cos\psi}{|\boldsymbol{x}_U - \boldsymbol{x}_L|^2} + \frac{c_2^c\cos\psi}{|\boldsymbol{x}_U - \boldsymbol{x}_L|}\right)\bar{\varepsilon} \triangleq \varrho\bar{\varepsilon} \tag{4.53}$$

と表される．また，$\delta\omega_\eta$ は

$$\begin{aligned}\delta\omega_\eta &\simeq \boldsymbol{\zeta}_L'(\boldsymbol{d}_g + \bar{\varepsilon}\boldsymbol{d})\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}\delta\alpha\right) - \omega_\eta \\ &\simeq -\bar{\varepsilon}\frac{\omega_\xi\sin\psi}{\cos\alpha}\end{aligned} \tag{4.54}$$

となる．ただし，計算過程では，$1/\cos\alpha$ の 1 次近似

$$\frac{1}{\cos(\alpha + \delta\alpha)} \simeq \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\delta\alpha \tag{4.55}$$

を用いている．以上から，δT を書き直すと，

$$\begin{aligned}\delta T &= \left[-\frac{\partial T}{\partial \alpha}\cos\psi + \frac{\partial T}{\partial \alpha'}\varrho - \frac{\partial T}{\partial \omega_\eta}\frac{\omega_\xi\sin\psi}{\cos\alpha}\right]\bar{\varepsilon} \\ &= Q\bar{\varepsilon}\end{aligned} \tag{4.56}$$

ただし，Q は以下のように計算できる．

$$Q \triangleq \frac{\sin\alpha}{\alpha' + \omega_\eta}\cos\psi - \frac{\cos\alpha}{(\alpha' + \omega_\eta)^2}\left(-\frac{|\boldsymbol{x}_U - \boldsymbol{x}_L|'\cos\psi}{|\boldsymbol{x}_U - \boldsymbol{x}_L|^2} + \frac{c_2^c\cos\psi}{|\boldsymbol{x}_U - \boldsymbol{x}_L|}\right) + \frac{\omega_\xi\sin\psi}{(\alpha' + \omega_\eta)^2} \tag{4.57}$$

この定式化より，Q の符号について調べることによって，母線が「Shifting」の操作による変化に対して母線の最大長の改善が期待されるかどうかが分かる．

4.3 数値実験

4.3.1 実験概要と結果

本章では，数値実験を通して提案した手法の妥当性について考察する．今回は，2 つのデータに対して検証を行った．なお，数値実験における数字の単位は全て [cm] に統一してある．1 つ目は，半径 3.43 の円弧を境界線に持つ可展面を修正対象に扱う．この境界線の弧長パラメータを s_L, s_U とすれば，$s_U(s_L) = s_L$ を満たしている必要がある．収束条件 Δ_c を 1.0×10^{-4}，曲線の全長 l_L を 10.8 とし，境界曲線上の $s_c = 2.0$ における点 $\boldsymbol{x}_U$ をそれぞれ

ケース 1-1. $\boldsymbol{C} = (4.41 \;\; 3.09 \;\; 4.80)^\top$

ケース 1-2. $\boldsymbol{C} = (0.4 \;\; 3.09 \;\; 4.80)^\top$

へ移動させる場合について求めた[注 5)]．

また，もう一つのデータは 3.2 節で用いた実際の可展面を計測することで得られた形状を用いた．このとき，$s_c = 8.43$ における境界線上の点 $\boldsymbol{x}_U$ を以下のケースによって移動させた場合について計算を行った．

ケース 2-1. $\boldsymbol{C} = (-1.43 \;\; 5.33 \;\; 7.39)^\top$

ケース 2-2. $\boldsymbol{C} = (-1.43 \;\; 3.33 \;\; 5.89)^\top$

今回提案する修正手法は，緒言で述べたような対話性が要求されるため，計算コスト，特に計算時間の面で高速に計算できる必要がある．そのため，今回は計算に用いたマシンスペックも記載する．このアルゴリズムは C++言語，ベクトル演算ライブラリ Eigen [71] および Visual Studio を用いて実装した．また，IBM 社 CPLEX の API [72] を線形計画問題のソルバーに用いており，計算に用いたマシンスペックは，OS が Windows10 Pro，CPU が 3.2GHz の Intel(R) Core(TM) i7-8700，メモリが 32GB であった．

[注 5)] 本研究では，修正対象とする点の弧長の値が必要であるため，設計者が弧長で指定するものと仮定する．しかし，それが点自体であっても，求根アルゴリズムにより対応する弧長を探索すればよいので，大きく一般性に欠ける仮定ではない

上記のケースに基づいて境界曲線の変化を示した図およびパターン形状を，Figs. 4.5，4.7，4.9 および 4.11 に示す．(a),(b),(c) は，境界曲線の変化を xy, xz, yz 平面に示した図である．実線は，与えた境界曲線であり，点線が条件に基づいて変更した境界曲線である．また，通過させる条件として与えた点もプロットしている．また，(d) は変更後の曲面から得られた展開後の形状である．

また，上記のケースに基づいて変化した曲面を Figs. 4.6，4.8，4.10 および 4.12 に示す．このうち (a),(b),(c) は，曲面を xy, xz, yz 平面に射影した図であり，(d) は，曲面を三次元的に投影した図である．

4.3.2　考察

いずれの結果も，与えた点周辺のみが大きく変化し，その他の部分は変化が抑えられていることが見て取れる．また，展開後の 2 次元形状においても，変更された曲面形状に合わせて形状が変化していることが見て取れる．

計算時間はいずれにおいてもおよそ 10 秒程度であり，修正作業に要求される十分な対話性については，本手法は達成できていると考えられる．

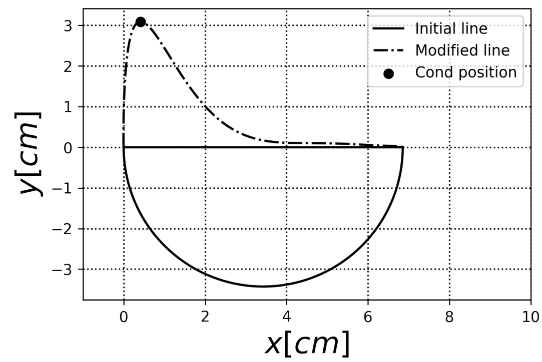
Figs. 4.6(a) と 4.8(a) を比較すると，特に Fig. 4.8(a) の方が，曲線の変化量が大きいことが見て取れる．これは，与えた点が Case1-1 と比較して，母線方向以外に大きく変化しなければならないためである.「Shifting」操作において，$\varepsilon_{\mathrm{shift}}$ がどのような分布になり，どの点において極値を持つかは，与えた曲面により一意に決まってしまうため，与えた点付近が変化の大きい部分になるとは限らない．このため，曲線の変化量が大きくなってしまったと考えられる．

今後の課題としては，式 (4.2) の特異性や計算時間を考慮しながら,「Shifting」操作による変形量を抑えながら局所変形を達成する必要がある．

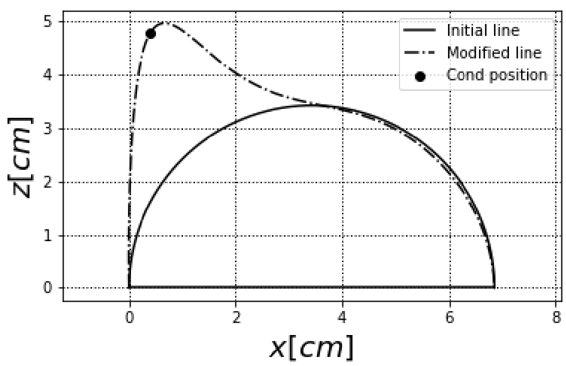
4.4　結言

本研究では，可展面形状の設計効率化を目的に，可展面を形成する境界曲線の修正に合わせて曲面形状を局所的に修正する手法を提案した．本章のはじめには，CAD システムで広く用いられる自由曲面の表現方法と比較して，可展面の修正設計手法の確立に向けた必要性について述べた．その後，3 章で定式化した可展面条件を用いて，境界曲線の変形に関する微分方程式を定式化した．その後，この微分方程式の特異性を利用し，曲面修正アルゴリズムを提案した．最後に，いくつかの数値計算例を通して，その妥当性について確認した．この結果から，曲線形状に関する変更に応じて，曲面形状を局所的に修正できることおよび，それに合わせて展開後の形状を修正できることが示された．

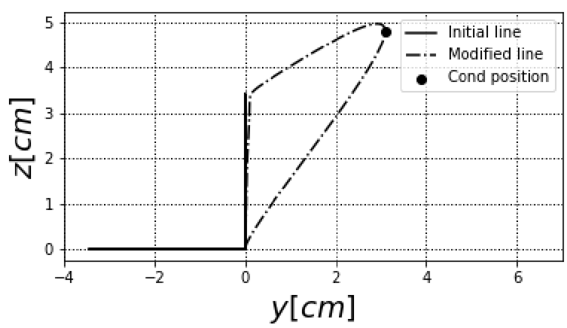
ただ，本手法では，１つの可展面に関する修正手法についてのみの言及である．実際の製品形状は，１つの曲面で表現されていることはほとんどなく，いくつかの曲面が多くの場合，G^0連続性のみの保証で接続されているような形状が多い．こうした複数枚で形成されている曲面の１つを修正する場合，曲面の修正に応じて他の曲面が可展面条件を満たさなくなる可能性がある．そのため，こうした別の可展面との接続関係を有している可展面の修正においては，修正操作に対する，相互の可展面条件を考慮しながら変形させていくアルゴリズムを考えていく必要がある．



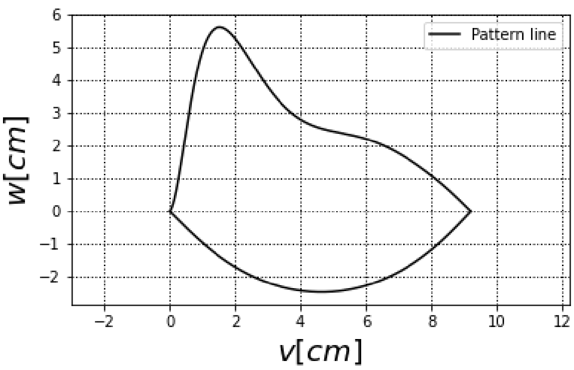
(a) xy-view



(b) xz-view

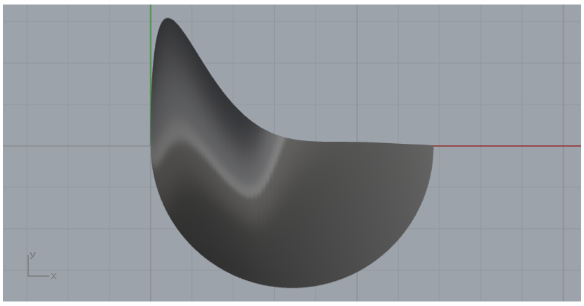


(c) yz-view

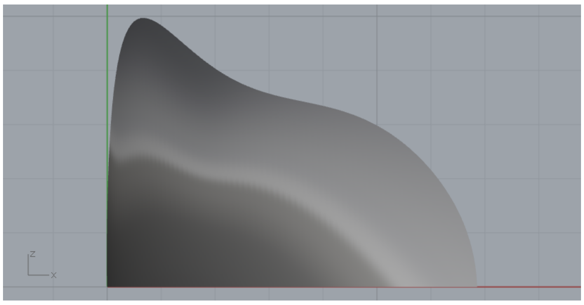


(d) developed shape

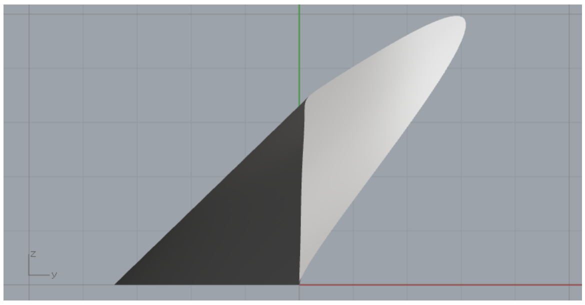
Fig. 4.5 The calculated boundary lines and its developed shape of Case1-1



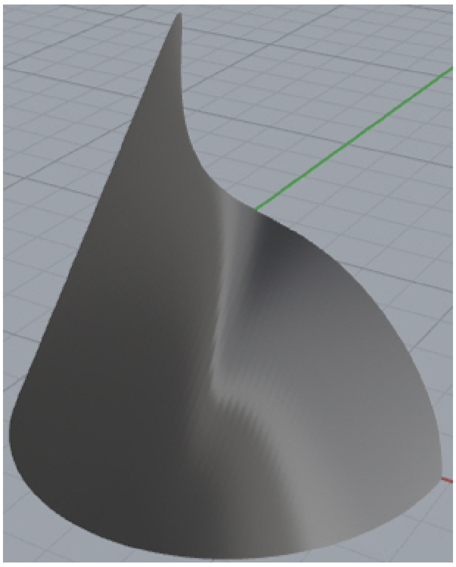
(a) xy-view



(b) xz-view

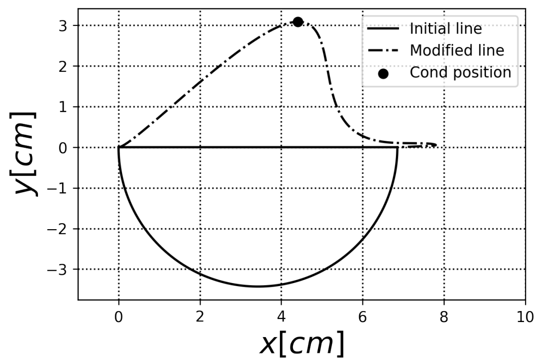


(c) yz-view

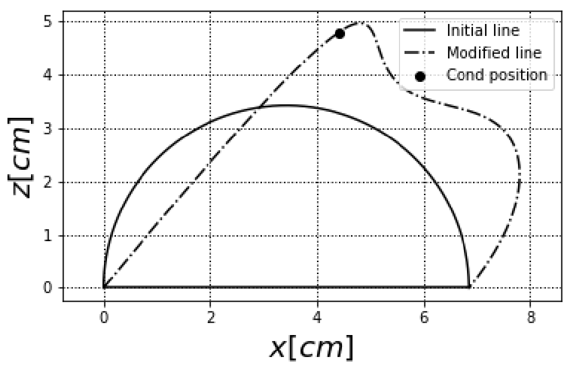


(d) Perspective view

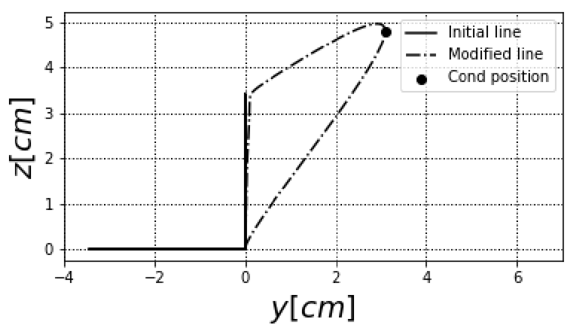
Fig. 4.6 The computational surface of Case1-1



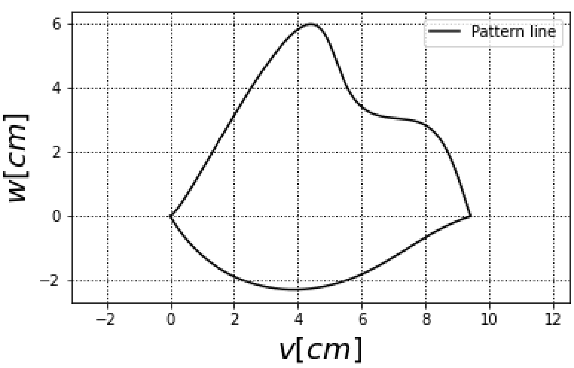
(a) xy-view



(b) xz-view

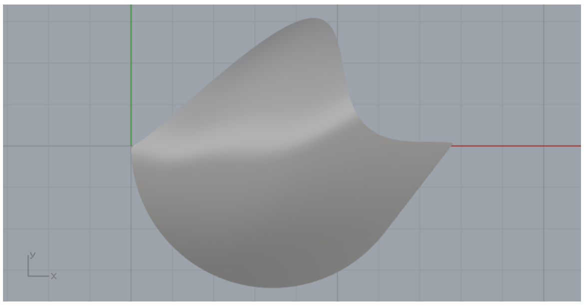


(c) yz-view

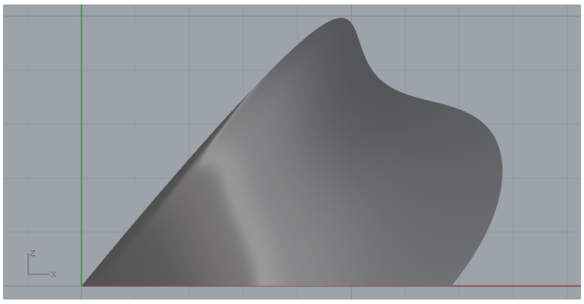


(d) developed shape

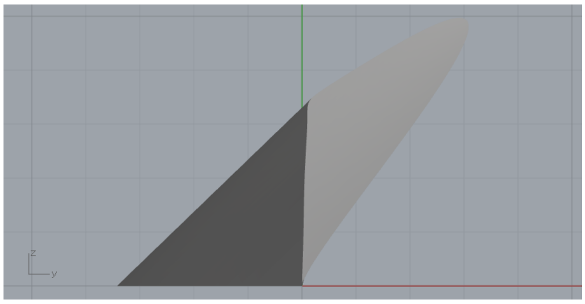
Fig. 4.7 The calculated boundary lines and its developed shape of Case1-2



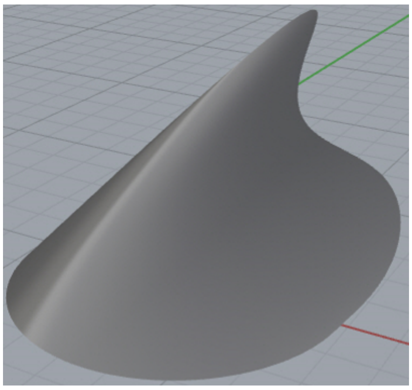
(a) xy-view



(b) xz-view

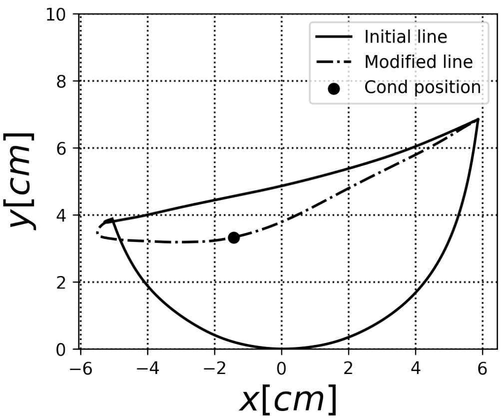


(c) yz-view

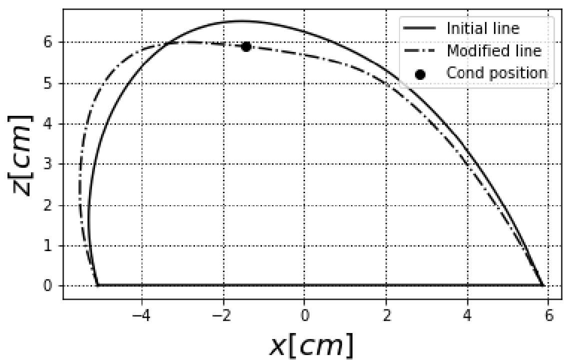


(d) Perspective view

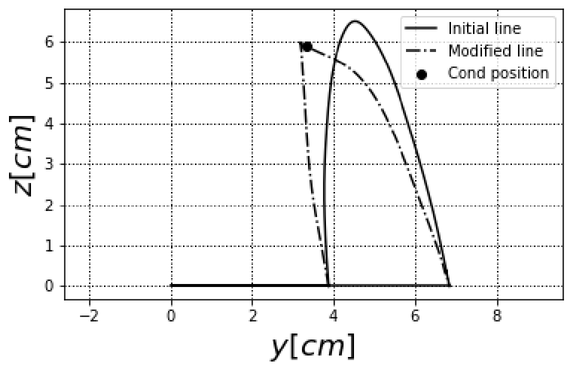
Fig. 4.8 The computational surface of Case1-2



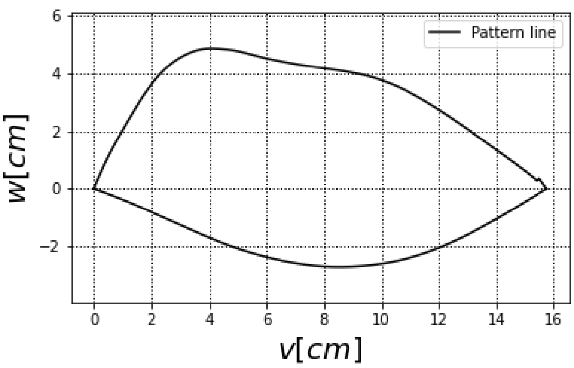
(a) xy-view



(b) xz-view

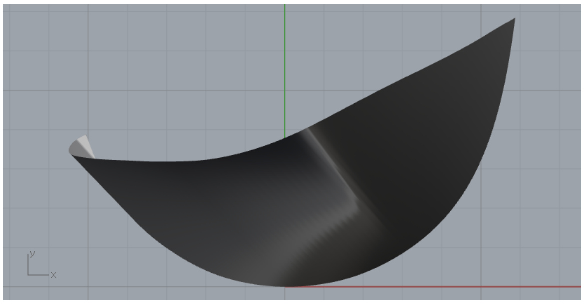


(c) yz-view

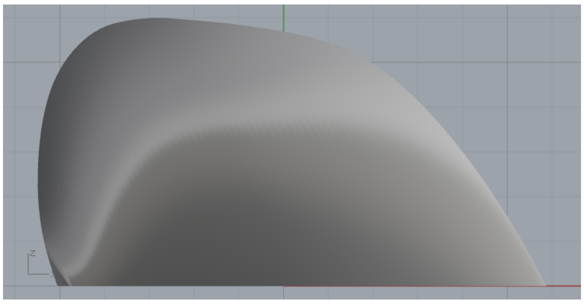


(d) developed shape

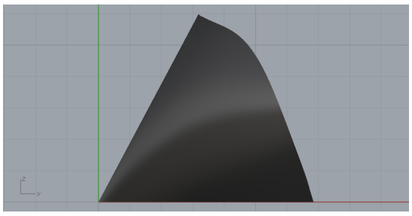
Fig. 4.9 The calculated boundary lines and its developed shape of Case2-1



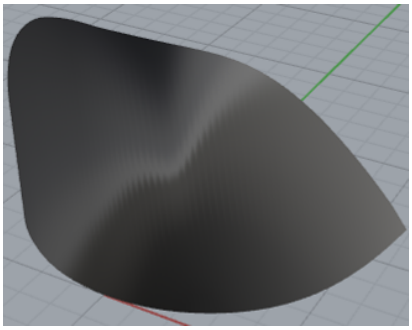
(a) xy-view



(b) xz-view

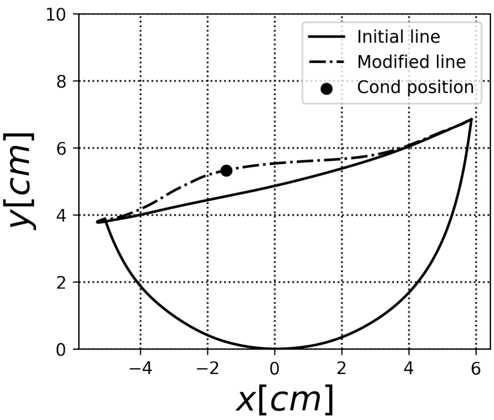


(c) yz-view

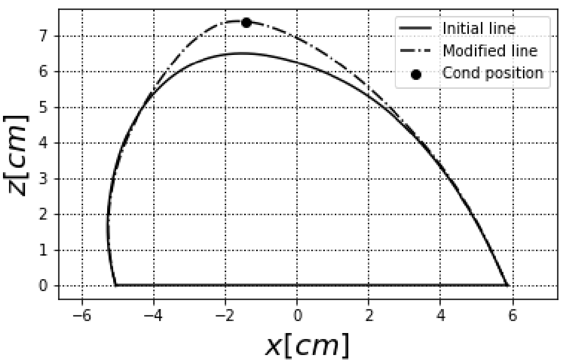


(d) Perspective view

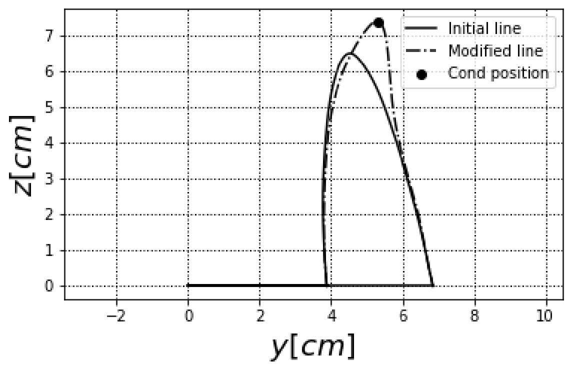
Fig. 4.10 The computational surface of Case2-1



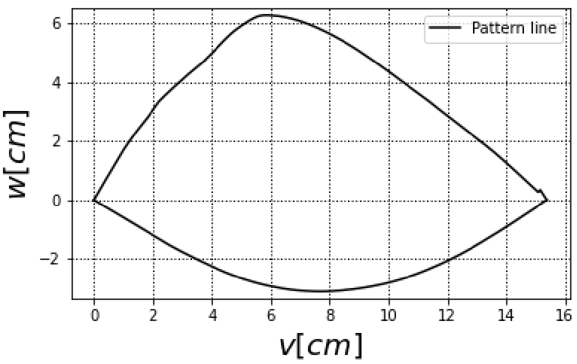
(a) xy-view



(b) xz-view

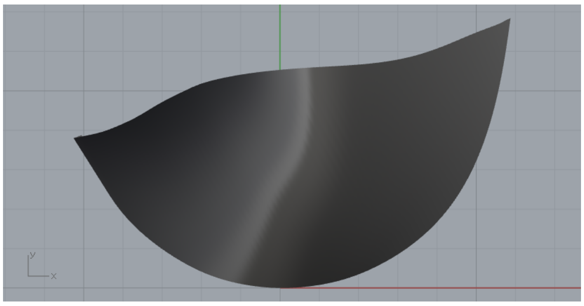


(c) yz-view

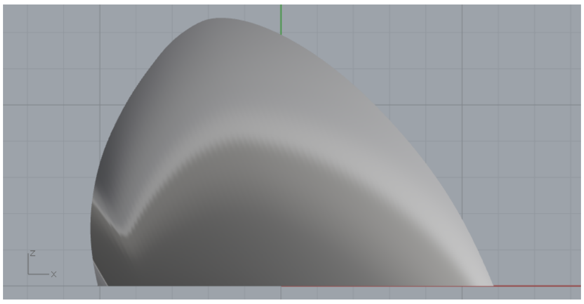


(d) developed shape

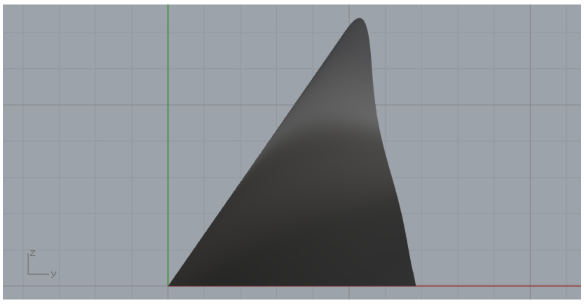
Fig. 4.11 The calculated boundary lines and its developed shape of Case2-2



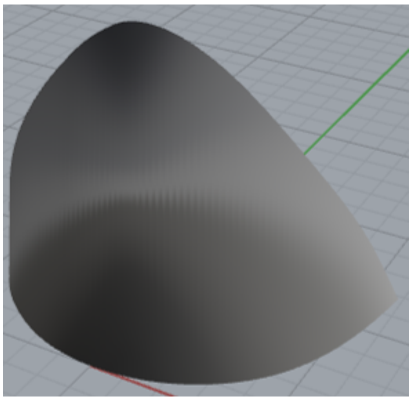
(a) xy-view



(b) xz-view



(c) yz-view



(d) Perspective view

Fig. 4.12 The computational surface of Case2-2

第5章　点群形状に対する可展面設計支援

5.1　緒言

近年のコンピュータや計測機器の高性能化，低価格化に伴い，現物をレーザスキャナやX線CTスキャナなどの装置によって計測することで得られる点群データや画像データを用いて，コンピュータ上に仮想的にモデルを再現させる「リバースエンジニアリング」を実現させる試みが盛んに行われている．特に3DCADにおけるリバースエンジニアリングは，計測した三次元点群データから，CADデータへ変換させる手法全般を指す．リバースエンジニアリングの達成により，計測する形状情報をCADデータにフィードバックすることができ，設計寸法の評価や，形状の再設計，解析を用いた性能評価を行うことができるため，設計作業の効率化に対して大きな貢献が期待されている．こうした背景から，これまでも様々な取り組みが行なわれており，3D点群データからメッシュ形状としてのCADデータ情報に変換する取り組みや，近年では，直接フィーチャのソリッド情報や形状パラメータを出力させる手法に関する研究が行われている [73–78].

可展面設計においても，リバースエンジニアリングの実現により，設計者が直接設計した物を用いて，曲面を設計することができるため，形状設計の効率化へ繋げることができると考えられる．その際注意するべきことは2つある．

1. 点群形状が常に正しく可展面を表現できているとは限らない点

   設計者が作成した現物を計測することで形状を得た場合，その作成した現物は必ずしも可展面条件を満たすとは限らない．また，仮に現物が厳密な可展面であったとしても，測定した際に発生する測定ノイズにより，得られる形状が可展面の点群でない場合がある．

   さらに，曲面の再現という考えだけではなく，非可展面形状に微小な許容を加えて平滑化する観点で用いられる場合もある．感度解析法や随伴変数法などを用いた形状最適化法では，メッシュ形状そのものを最適化するが，得られた最適化形状をそのまま製品にすることは難しい場合がしばしばある．この問題を解決するために，可展面形状の組み合わせにより近似的に形状を表現する試みが行われている．

   このように，与えられる形状は非可展面的性質を持つが，出力としてなめらかで性質のよい可展面形状で表現したい場合も多い．

2. リバースエンジニアリングにより得たい形状には，完全な曲面情報が望まれる点

   可展面の設計時には，1 章で述べたようにその展開後の形状も要求されることから，数理的に展開できるなめらかな曲面情報として出力される必要がある．

そこで本章では，可展面のリバースエンジニアリング達成に向けて，与えられた点群から複数枚の可展面集合を設計する手法について提案する．目標の点群に対する曲面設計問題の基本方針は，曲面と点群との誤差を最小化するように曲面を設計することである．そこではじめに，可展面と点との誤差に関する定式化を行い，そののち，複数枚の可展面で近似するための，点群のセグメンテーション手法について述べ，曲面設計を最適化問題として表現する．最後に，二枚接ぎブラジャーカップの設計工程に対して本手法を適用し，その妥当性を検証する．

5.2　誤差の定式化

本節では，1 枚の曲面と点群との誤差の定式化について述べる．本研究では，ある点群集合 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{set}}$ に属する点 $\boldsymbol{p}$ と曲面の空間座標 $\boldsymbol{S}(s,t)$ の差分ベクトルの 2 乗ノルム $\delta = |\boldsymbol{p} - \boldsymbol{S}(s,t)|$ の最小値

$$e(\boldsymbol{p}) \triangleq \min_{s,t} \delta \tag{5.1}$$

を全ての点群に対し求め，それを足し合わせた E_r を誤差として定義する．

$$E_r(\boldsymbol{P}_{\mathrm{set}}) \triangleq \sum_{\forall \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{P}_{\mathrm{set}}} e(\boldsymbol{p}) \tag{5.2}$$

点群から曲面を生成するためには，この E_r を最小化するように曲面を設計すればよい．

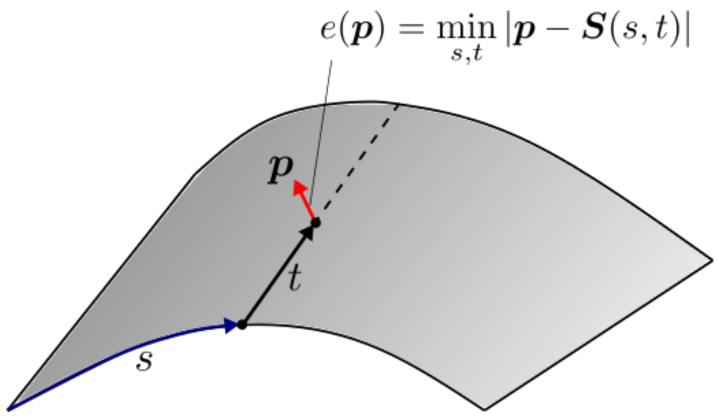


Fig. 5.1　Description of the error

E_r を評価するためには，全ての $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{P}_{\mathrm{set}}$ に対して式 (5.1) を，解く必要がある．ここで，可展面を表現するパラメータ (s,t) は，2 章の定式化に倣って，曲面を規定する曲線の弧長パラメー

タおよび母線方向の距離と定義する．この定義から，変数の定義域には不等式制約 $s \in [0, l]$ および $t \in [0, D(s)]$ が存在し，これらの条件下で求める必要がある．

この不等式付き最適化問題におけるラグランジュ関数 $\mathcal{L}$ を求めると，

$$\mathcal{L} = \delta + \lambda_1 s + \lambda_2(l - s) + \lambda_3 t + \lambda_4(D(s) - t) \tag{5.3}$$

となる．ただし，$\lambda_i, (i = 1, 2, 3, 4)$ はラグランジュ乗数である．この $\mathcal{L}$ に対する KKT 条件を求めると，次式らを得る．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta}{\partial s} + \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4 \frac{\partial D}{\partial s} &= 0 && (5.4)\\
\frac{\partial \delta}{\partial t} + \lambda_3 - \lambda_4 &= 0 && (5.5)\\
\lambda_1 s + \lambda_2(l - s) + \lambda_3 t + \lambda_4(D(s) - t) &= 0 && (5.6)\\
\lambda_i &\geq 0 \ (i = 1, 2, 3, 4) && (5.7)\\
s &\geq 0 && (5.8)\\
s &\leq l && (5.9)\\
t &\geq 0 && (5.10)\\
t &\leq D(s) && (5.11)
\end{aligned}$$

これらの得られた等式および不等式を連立して解くことで，最適パラメータ (s^*, t^*) が得られる．しかし，不等式を含む連立非線形方程式を解くことは一般的に難しいことに加え，KKT 条件が極値に関する必要条件を示しているだけに過ぎず，δ がその実行可能領域で凸である保証がないという問題がある．ここで関数の凸性とは，関数 $f(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ において，パラメータの集合 $\boldsymbol{X}$ の任意の 2 元 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ および $q \in [0, 1]$ について，

$$f(q\boldsymbol{x}_1 + (1 - q)\boldsymbol{x}_2) \leq qf(\boldsymbol{x}_1) + (1 - q)f(\boldsymbol{x}_2) \tag{5.12}$$

が成り立つことを言う．つまり，仮に連立非線形方程式から解が得られたとしても，その解が常に意図する解である保証はないという問題がある．

こうした問題を取り除き，数値的に安定に目的関数を計算するため，この不等式付き最適化問題を，幾何学的な視点から考える．ここで，点 $\boldsymbol{p}$ が曲面上に存在しないということは，曲面上における任意の点での主方向 $\boldsymbol{d}_{\max}, \boldsymbol{d}_{\min}$ を用いても $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{S}$ を表現できない，つまり，$\boldsymbol{p} - \boldsymbol{S}$ の $\boldsymbol{\eta}$ 方向成分が 0 でない状態を指す．つまり，δ が最小であるならば，$\boldsymbol{p} - \boldsymbol{S}$ は曲面が表現できない $\boldsymbol{\eta}$ 成分のみで表現されているべきである．すなわちパラメータ (s^*, t^*) が δ を最小にするならば

$$\boldsymbol{d}_{\max} \cdot (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{S}(s^*, t^*)) = 0 \tag{5.13}$$

$$\boldsymbol{d}_g \cdot (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{S}(s^*, t^*)) = 0 \tag{5.14}$$

が成り立つ．式 (5.14) について解けば，パラメータ t^* は

$$t^* = \boldsymbol{d}_g \cdot (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{x}_L(s^*)) \tag{5.15}$$

と表される．また，曲面の主方向に関する性質から $\boldsymbol{d}_{\max}$ と $\boldsymbol{d}_g$ は直交する，つまり式 (5.13) は単に s のみによって決まる非線形方程式なので，これを区間 $[0, L]$ 内で適当な探索アルゴリズムを用いて解けばよい．このような形式で表現することで，解くべき式がシンプルに表現できるほか，曲面がなめらかである場合においては，$\boldsymbol{d}_{\max}$ の方向が反転したりすることがないことから，区間の始端と終端で式 (5.13) の符号は異なるため，二分法や Brent 法など，解を安定して求めることができる探索アルゴリズムの適用条件を満たす可能性を高めることができる[注 6)]．

5.3 点群のセグメンテーション

次に目標とする点群に対して，図に示すような n_c 枚の可展面が接続されている集合体 $\mathcal{M}$ を設計する手法について考える．この集合体 $\mathcal{M}$ に対して点群 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{set}}$ との誤差を正しく求めるためには，$\mathcal{M}$ を構成する全ての可展面 $\boldsymbol{S}_k$ に対応して，誤差の評価を行うべき点群 Ξ_k を求める，つまり，$\boldsymbol{P}_{\mathrm{set}}$ を $\Xi_1, \Xi_2, \cdots, \Xi_{n_c}$ へ分割させる必要がある．そこで本節では，点群の分割手法について述べる．点群を分割するための方針として，点群に属する全ての点に対して，どの曲面領

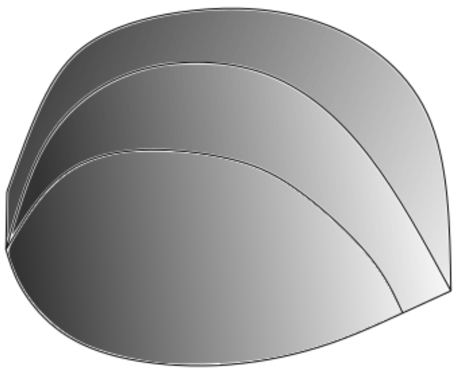


Fig. 5.2　Example of the set $\mathcal{M}$ which our proposed method aim to design

域内に属しているかを判定すればよいと考えられる．ある曲面 $\boldsymbol{S}_{d,k}$ における領域内に点群が属するかの判定は， Fig. 5.4 に示すように，極小値条件時における母線長と可展面自体の母線長によって評価できると考えられる．この事を踏まえて点群が領域内に存在するかは，以下の手順を行うことで判断することができる．

注 6) ニュートン法などは，探索区間での正負を要求しないが，与える初期値やパラメータによって解を求められないことが知られている．

1. $\boldsymbol{S}_{d,k}$ における誤差最小化が行われる時のパラメータ (s_k^*, t_k^*) について求める．また，得られたパラメータ s_k^* に対して $t_{\max} \triangleq D(s_k^*)$ と定義する．

2. この時，$t^* \leq t_{\max}$ の場合，図に示すように点群は $\boldsymbol{S}_{d,k}$ の曲面領域内に存在する．$t^* > t_{\max}$ の場合，図に示すように $\boldsymbol{p}$ は，曲面の領域外に存在することが分かる．

この手順を用いて，曲面領域に基づく点群集合の分割アルゴリズムを以下のように提案する．このアルゴリズムによって，$\boldsymbol{P}_{\text{set}}$ を $\Xi_1, \Xi_2, \cdots, \Xi_{n_c}$ へ分割できれば，$\boldsymbol{P}_{\text{set}}$ に対する集合体 M

Algorithm 2 dividing a point cloud from surface information

```
for i = 0 to n do
    initialize k = 1
    while k < n_c do
        searching (s_k^*, t_k^*) = arg min e_i^k
        calculate t_max,k ← D(s_k^*)
        if t > t_max,k  then
            k ← k + 1
        else
            Ξ_k ← P_i
            break
        end if
    end while
    if  k is n_c then
        Ξ_{n_c} ← P_i
    end if
end for
    return Ξ_1, Ξ_2, ··· , Ξ_{n_c}
```

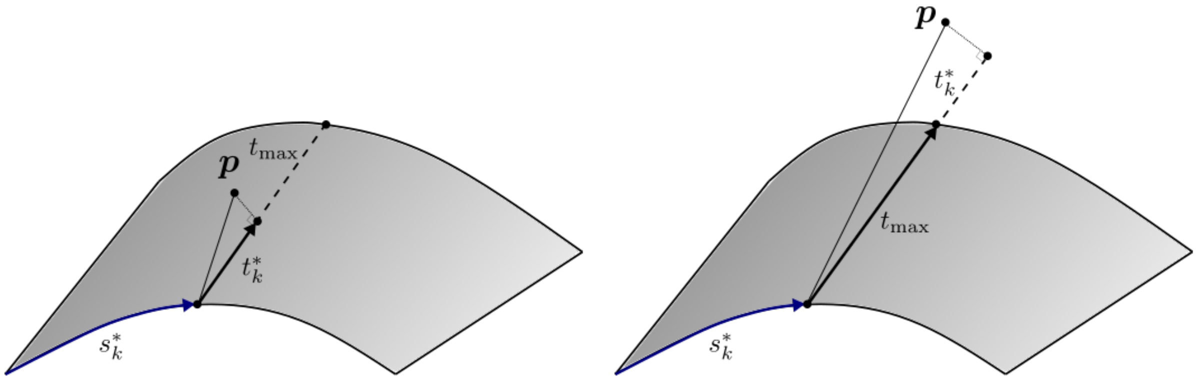
Fig. 5.3　The algorithm of dividing a point cloud

との誤差 Λ は

$$\Lambda = \sum_{k=1}^{n_c} \sum_{\forall \boldsymbol{p} \in \Xi_k} e_k(\boldsymbol{p}) \tag{5.16}$$

と計算することができる．ただし，$e_k(\boldsymbol{p}) = \min |\boldsymbol{p} - \boldsymbol{S}_k(s_k^*, t_k^*)|$ である．以上より，点群データに対する可展面形状設計問題は，可展面の設計変数に対して，式 (5.16) を目的関数とする最適化問題を解くことで得られる．

可展面における設計変数は，3 章での議論から，曲線を決定するパラメータ $\omega_{\xi,k}, \omega_{\eta,k}$ および曲線における弧長間の関係 s_k を設計変数に取ればよい．また，弧長間の関係に関する制約および曲線に関する制約は，いずれも式 (3.16) を用いて同様に表現できる．



(a) $t^* \leq t_{\max}$ (b) $t^* > t_{\max}$

Fig. 5.4 Relationship between t^* and $t_{\max}$. Comparing t^* to $t_{\max}$ determines whether $\boldsymbol{p}_k$ is evaluated by a lower cup or an upper cup.

最適化の手続きについては，曲線の数に合わせて $\omega_{\xi,k}, \omega_{\eta,k}$ および弧長間の関係 υ_k を用意し，それぞれを Ritz 法の考え方を用いて基底関数の線形和

$$\begin{pmatrix} \omega_{\xi,k} & \omega_{\eta,k} & u_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{\xi,k} & \boldsymbol{a}_{\eta,k} & \boldsymbol{a}_{u,k} \end{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}^\top \tag{5.17}$$

と表現することで，3 章と同様に重み $\boldsymbol{a}_{\xi,1}, \boldsymbol{a}_{\eta,1}, \boldsymbol{a}_{u,1}, \boldsymbol{a}_{\xi,1}, \boldsymbol{a}_{\eta,1}, \boldsymbol{a}_{u,1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{\xi,n_c}, \boldsymbol{a}_{\eta,n_c}, \boldsymbol{a}_{u,n_c}$ に関する非線形計画問題へ変換することができ，最適化手法を用いた解法を利用することができる．

5.4 妥当性の検証

5.4.1 数値実験の概要

本研究では，ブラジャーカップの 2 枚接ぎカップの設計工程を対象に，数値実験を行う．今回の数値実験では，

目的 1. 可展面の点群データを与えた場合に，そのデータから曲面形状を復元できるか

目的 2. 非可展面の点群データを与えた場合に，そのデータを十分近似する形状を得る事ができるか

の 2 点を検証することを目的とする．ここで，ブラジャーカップにおいては，下ワイヤーが与えられていることから，設計するべき曲線は上下接ぎラインおよび上カップラインの 2 本の曲線である．下ワイヤーの弧長パラメータを s_W，空間座標を $\boldsymbol{x}_W$ とし，上下接ぎライン，上カップラインのそれらを，それぞれ $s_R, \boldsymbol{x}_R, s_U, \boldsymbol{x}_U$ と表現する．ブラジャーカップの構造上の制約を考慮すると，曲線の始端および終端が一致することから，

$$\boldsymbol{x}_L(0) = \boldsymbol{x}_R(0) = \boldsymbol{x}_U(0) \tag{5.18}$$

$$\boldsymbol{x}_L(L) = \boldsymbol{x}_R(s_R(L)) = \boldsymbol{x}_U(s_U(L)) \tag{5.19}$$

が成り立つ．

次に，ブラジャーカップの設計における曖昧な制約について考える．ブラジャーカップにおいては，図に示すような肩ひもとカップを結ぶ点が存在し，この点をコネクションポイントと呼ぶ．

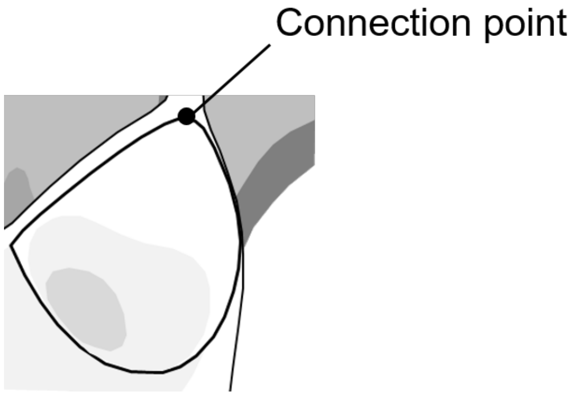


Fig. 5.5 Expression about the connection point of a brassiere cup given as a fuzzy condition of the cup shape.

コネクションポイントは，設計時には必ずしも完全に通過する必要のない点として考慮される，つまり，曖昧な制約として考える必要がある．曖昧な制約においては，ただ制約の満足度のみをロバストに定義できればよく，KKT 条件の満足度については考慮する必要はない．本手法で制約つき最適化問題を解く際に利用する拡張ラグランジュ乗数法における更新則は，KKT 条件および制約そのものの満足度の両方を満たすようにラグランジュ乗数を更新することから，このような曖昧な制約に対して適用することはできないと考えられる．そこで，曖昧な制約 $y \simeq Y$ を考慮するため，Fuzzy 理論の考え方を用いた以下の関数 $C(y, Y)$ を定義する．

$$C(y, Y) = k_1 \exp(k_2(y - Y)^2) \tag{5.20}$$

ここで，y は変数で，Y は y の目標値である．また，k_1, k_2 は定数であり，このパラメータを調整することで，制約の満足度を制御することができる．このように設計工程における n_p 個の曖昧な制約に対して求まる $C(y_i, Y_i), (i = 1, 2, \cdots n_p)$ を，点群との誤差に加えた $\Lambda + w\sum_{i=1}^{n_p} C(y_i, Y_i)$ を目的関数として再定義することで，最適化問題におけるよりよい解への収束を期待することができる．

今回の数値実験においては，3 つの数値実験例を通して結果に対して検討を行う．

例 1 2 枚の可展面から 3200 個の点群を抽出したデータを元に曲面生成を行う．この実験の目的は，目的 1 に述べた通りである．

例 2 1/4 球の形状から 1000 個の点群を抽出したデータを元に曲面生成を行う．球は一般的に非可展面であることが知られており，実験の目的は目的 2 に述べた通りである．

例 3 ブラジャーカップ設計工程において重要な,「バストにフィットする」という目的を考えるため，トルソーのバスト形状を計測し，図のように $y \leq 0.2$ 以降の部分を抽出した 1704 個のデータを元に曲面生成を行う．実験目的は目的 2 に加え，実際の設計現場においても有効な手法であることを示すことを目的としている．

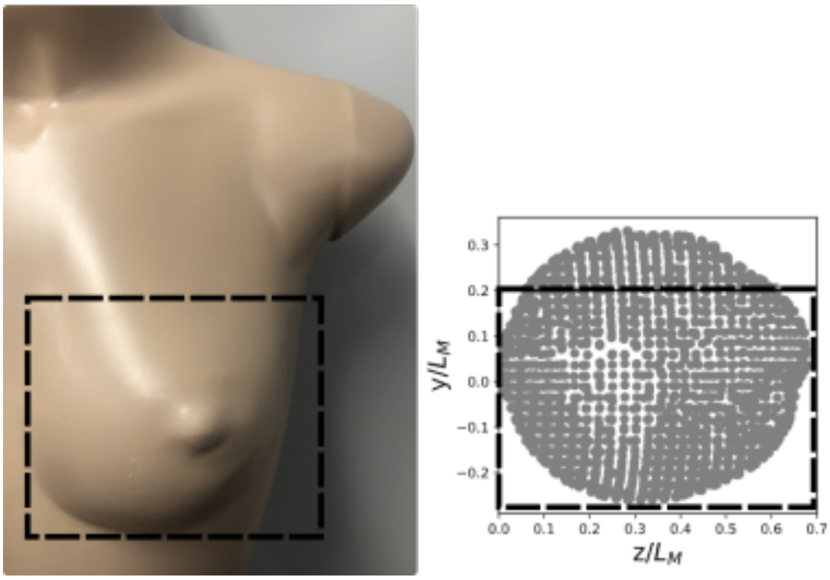


Fig. 5.6　Border line to use as the point cloud in the experiment.

例 1,2 の数値実験においては，全て下ワイヤーの曲線長で正規化されているため，単位は無単位で統一してあり，下ワイヤーには半径 0.343 の円弧曲線を用いている．例 1,2 では，コネクションポイント $\boldsymbol{X}_C$ を以下のように与えている．

$$\boldsymbol{X}_C = \begin{pmatrix} 0 & 0.34 & 0.34 \end{pmatrix}^\top \tag{5.21}$$

また，例 3 においては，例 1,2 と同じ下ワイヤー曲線を用いるために，スケールファクター $L_M = 72.8$[mm] で正規化しており，コネクションポイント $\boldsymbol{X}_C$ は

$$\boldsymbol{X}_C = \begin{pmatrix} 0.22 & 0.40 & 0.27 \end{pmatrix}^\top \tag{5.22}$$

と与えている．提案した手法により得られた形状を，Figs. 5.7，5.9 および 5.11 に示す．それぞれの図においては，(a),(b),(c) が最適化計算により得られた曲面を，それぞれ xy,yz,zx 平面へ投影した図となっており，(d) は 3 次元 CAD 上での図である．また (e),(f) は，(d) の曲面を展開し得られた展開形状である．また，(d) は曲面を三次元的に投影した図である．また，Figs. 5.8,

5.10 および 5.12 は，点群に対して誤差の大きさを色付けしたものを，それぞれ xy,yz,zx 平面へ投影した図となっている．

また，それぞれの誤差総和，最大誤差，平均誤差，コネクションポイントとの差および計算時間を Table 5.1 にまとめる．

Table 5.1 The error and calculation time of our proposed method in each example. Note that the errors of Example 1 and Example 2 are normalized by the length of a wire line and those of Example 3 are normalized by the scale factor L_M

-	$\Lambda(\boldsymbol{D})$	$\max_{(\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{D})}\varepsilon(\boldsymbol{p})$	$\bar{\varepsilon}(\boldsymbol{p})_{\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{D}}$	$\lvert\boldsymbol{X}_C - \boldsymbol{x}_U(s_c)\rvert^2$
Example 1	1.12×10^{-1}	2.41×10^{-4}	3.49×10^{-5}	8.26×10^{-4}
Example 2	5.99×10^{-2}	6.95×10^{-4}	5.99×10^{-5}	5.52×10^{-5}
Example 3	7.57×10^{-1}	1.25×10^{-2}	4.44×10^{-4}	3.94×10^{-3}

5.4.2 考察

例 1 の結果について考察する．Fig. 5.7 の結果および Table 5.1 から，特に上下接ぎラインの付近に誤差が相対的に大きく出ていることが確認できるが，たかだか 10^{-4} オーダーの誤差であるため，提案した手法により，可展面から抽出した点群から曲面を再現できることが示された．

また，例 2 の結果について考察する．ここで，一般的に球は紡錘型の展開形状を複数枚合わせることで，その形を近似できることが知られている．今回得られた Fig. 5.9 の結果からは，その点群形状を近似できていることが確認出来るほか，Fig. 5.9 の結果から，前述した球の展開形状に関する傾向と一致している．

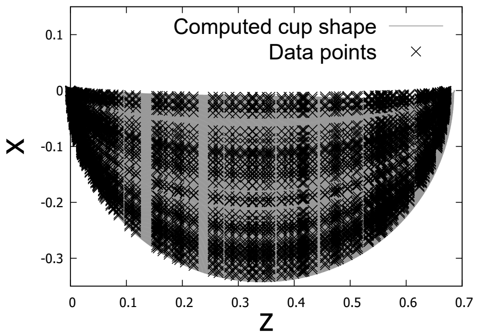
例 3 に関しては，例 2 と同じ非可展面形状を近似させる問題を扱っているが，誤差和，最大誤差および計算時間のいずれも例 2 よりも大きいことが確認できる．これは，形状の差に起因するもので，実際のバスト形状が球よりも複雑な形状であるためである．今回は 2 枚の可展面を組み合わせることで，複雑な形状を表現しようとしているため，Fig. 5.11 から，複雑な曲面形状および複雑な展開形状になっていることが確認できる．また，可展面の境界線に対する測地的曲率の連続性については議論していないため，上カップラインはコネクションポイントをなるべく通ろうとするように最適化された結果，曲線が不連続である点が存在していることが確認できる．展開後の形状においても，形状のなめらかさを要求する場合には，測地的曲率である ω_η の連続性やなめらかさに関する制約を議論する必要がある．

5.5 結言

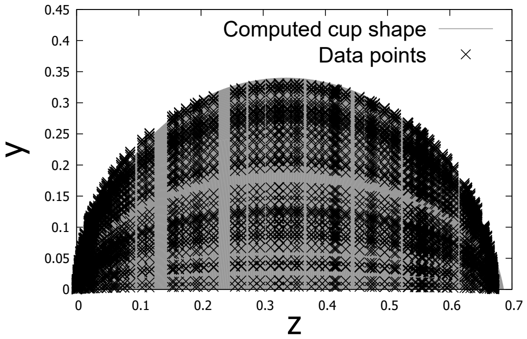
本章では，可展面のリバースエンジニアリング達成に向けて，点群を複数枚の曲面で覆う場合についてその手法を提案し，二枚接ぎブラジャーカップの設計において，3 つのデータを用いた計算を行い，その結果から妥当性に関して検討した．いずれのデータの場合においても，与えた曲面形状をうまく近似できるような二枚接ぎブラジャーカップを設計することができ，

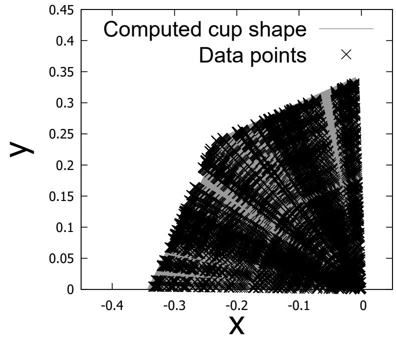
本手法の妥当性を確認することができた．2 枚以上の可展面で覆う場合に関しては，今回の実験で検討を行わなかったが，本章で示した提案手法を適用することで，全く同様に設計することができると考えられる．

ただ，本手法の適用により得られる形状は，Fig. 5.2 に示されるような，2 つの境界線により表現された曲面が接続されたような形状のみである．Wakamatsu らや白井らは，3 つ以上の境界曲線を用いて表現される可展面には，どの曲線に沿った母線によっても定義できない平面の領域が存在することが示されており，このことを考慮した可展面モデリングに関する研究が行われている [79,80]．したがって，Fig. 5.13 のような曲面を得るためには，可展面モデルの拡張を含めて，さらなる手法の拡張を行う必要がある．

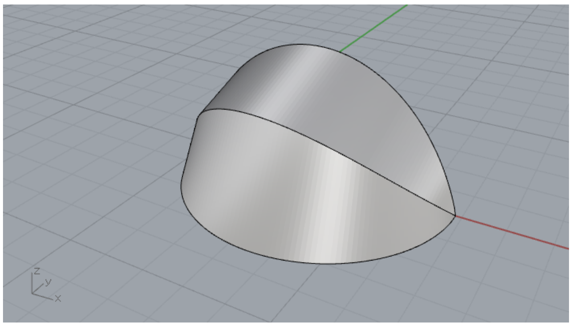


(a) zx-view

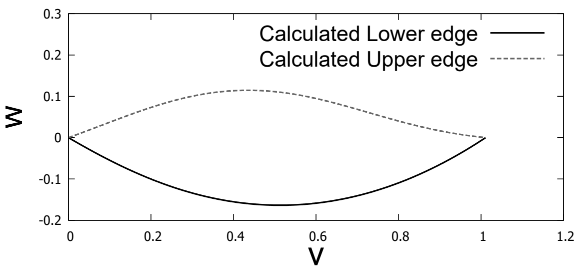


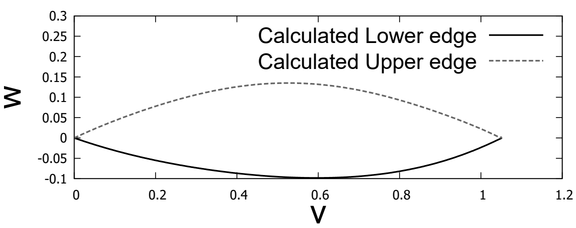


(b) zy-view (c) xy-view



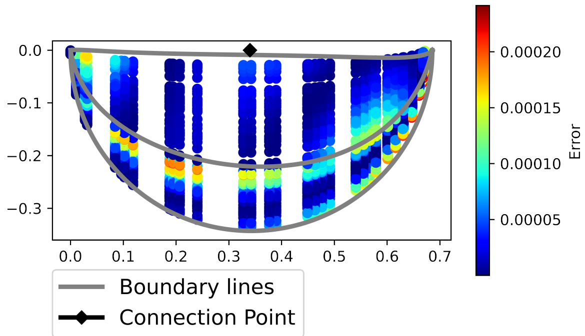
(d) Computational surface model in perspective view



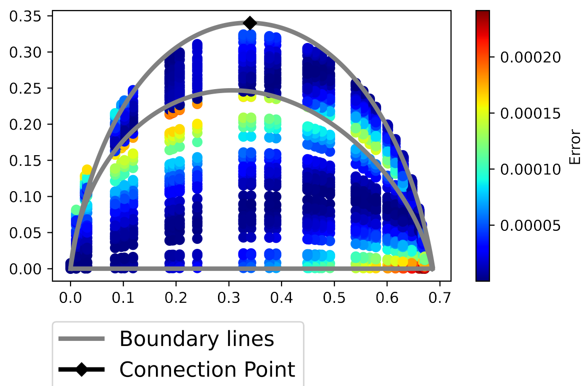


(e) Lower pattern (f) Upper pattern

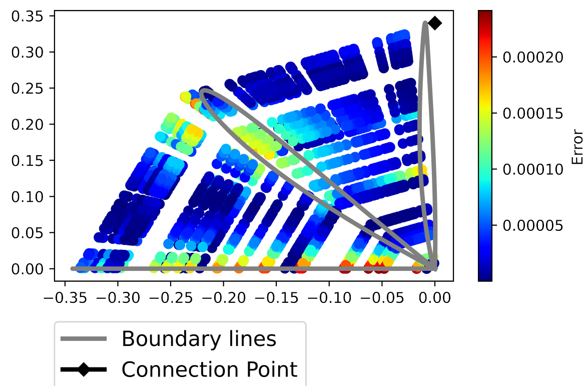
Fig. 5.7 Obtained result and its developed shapes of Example 1 by our proposed method. Input data points are the shape of the two developable surfaces.



(a) zx-view

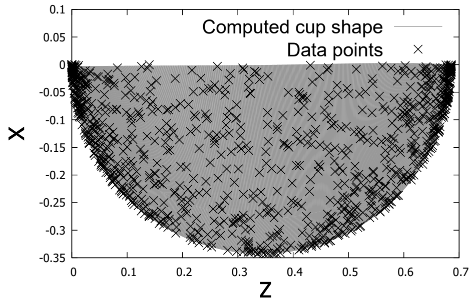


(b) zy-view

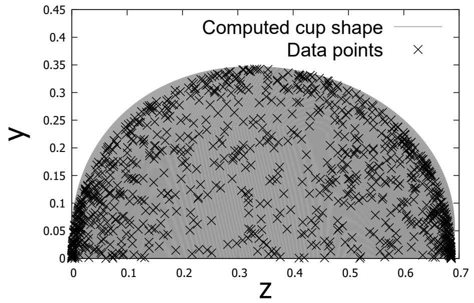


(c) xy-view

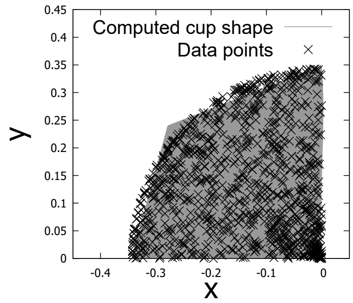
Fig. 5.8 The input data points with colored by the error between the obtained surfaces in Example 2.



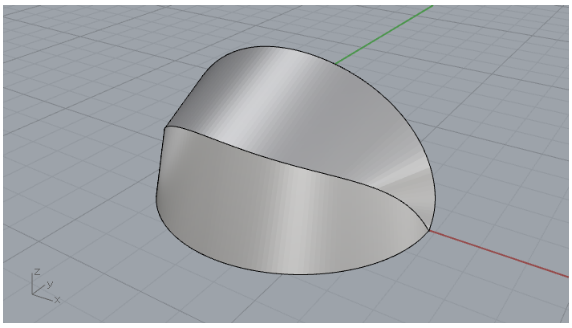
(a) zx-view



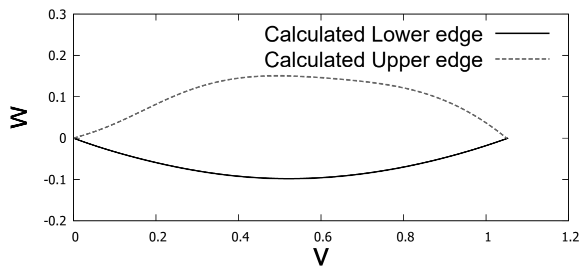
(b) zy-view



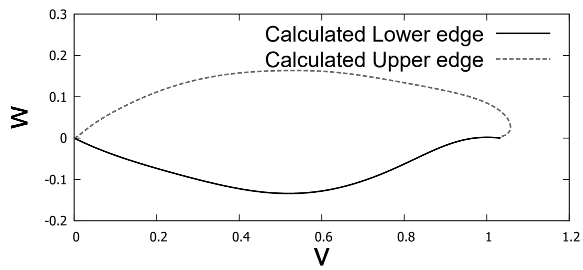
(c) xy-view



(d) Computational surface model in perspective view

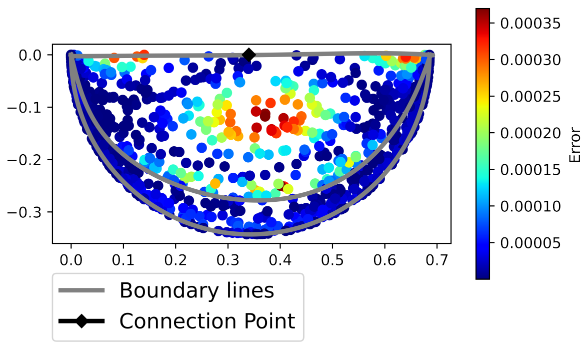


(e) Lower pattern

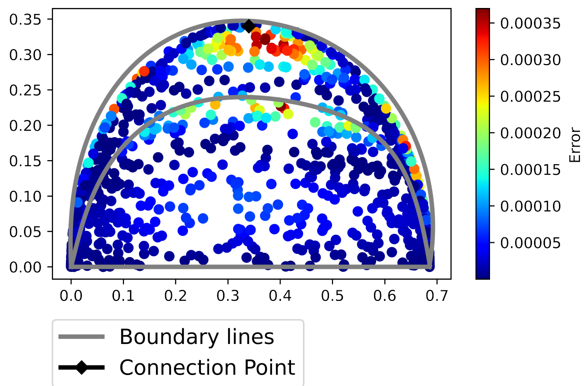


(f) Upper pattern

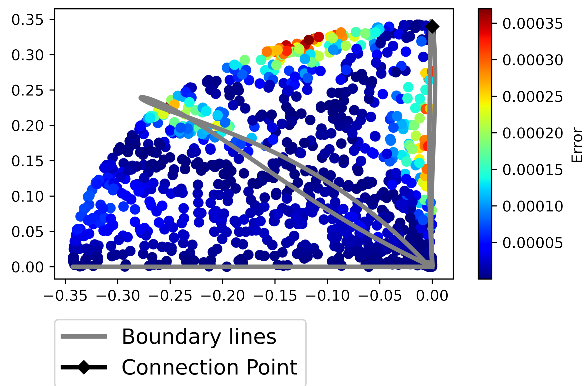
Fig. 5.9 Obtained result and its developed shapes of Example 2 by our proposed method. Input data points are the shape of the two developable surfaces.



(a) zx-view

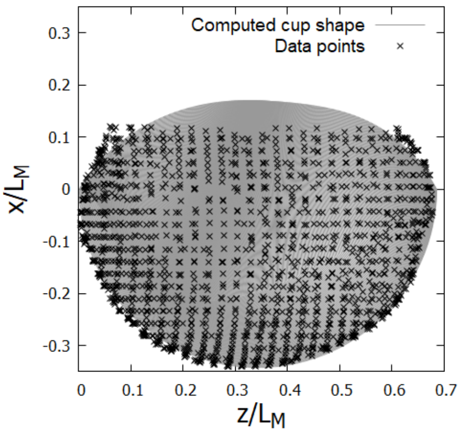


(b) zy-view

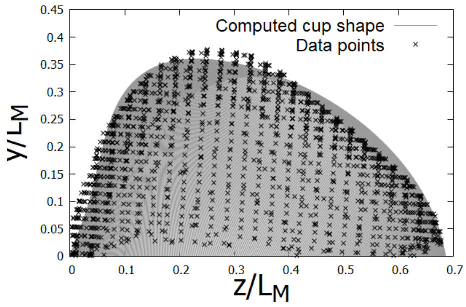


(c) xy-view

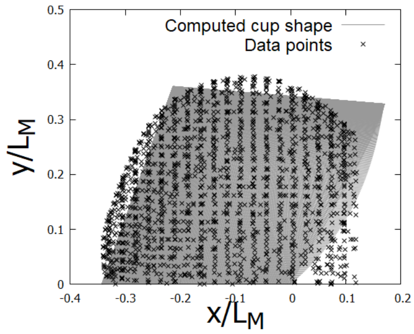
Fig. 5.10 The input data points of Example 2 with colored by the error between the obtained surfaces.



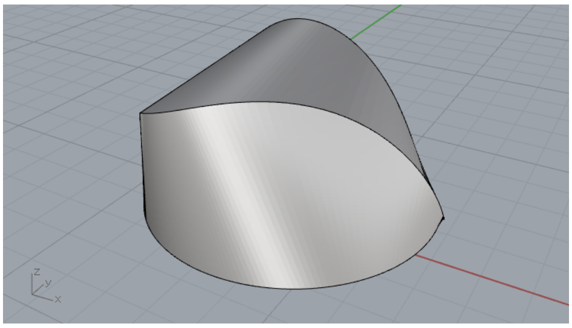
(a) zx-view



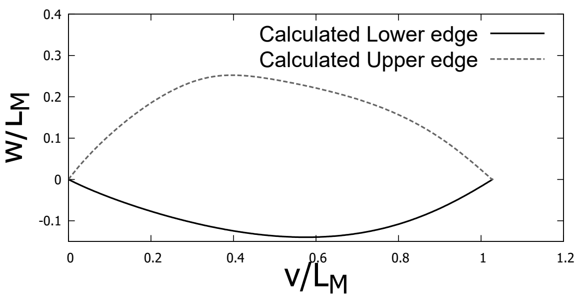
(b) zy-view



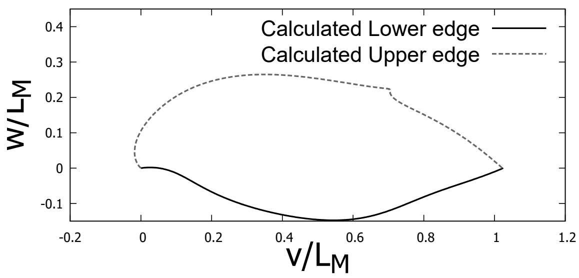
(c) xy-view



(d) Computational surface model in perspective view

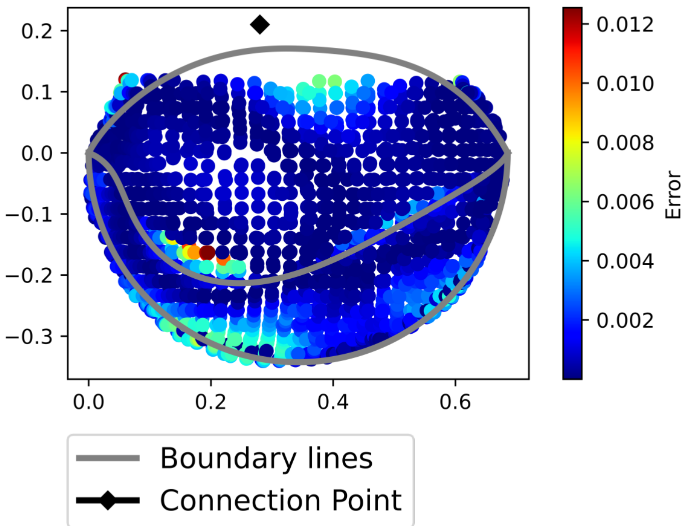


(e) Lower pattern

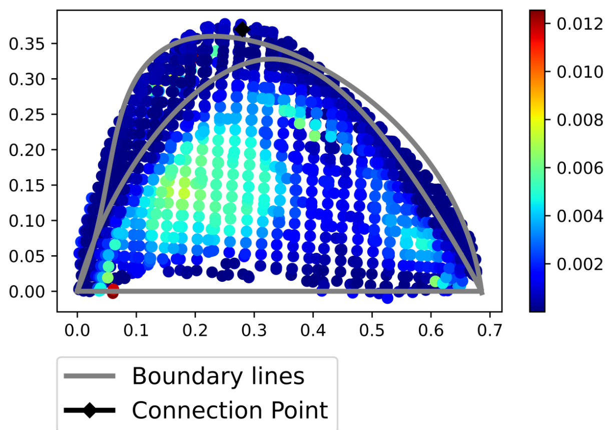


(f) Upper pattern

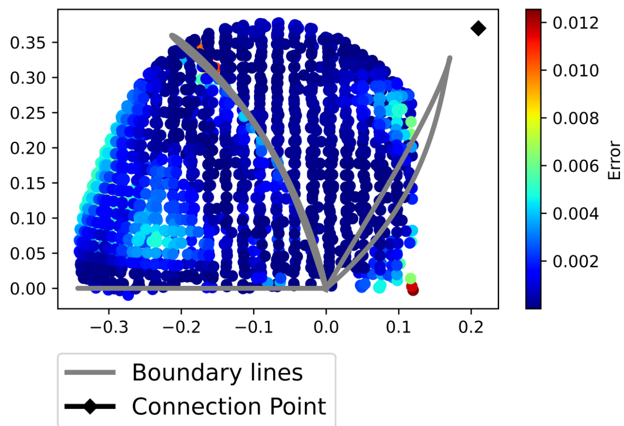
Fig. 5.11 Obtained result and its developed shapes of Example 3 by our proposed method. Input data points are the shape of the two developable surfaces.



(a) zx-view



(b) zy-view



(c) xy-view

Fig. 5.12 The input data points of Example 3 with colored by the error between the obtained surfaces.

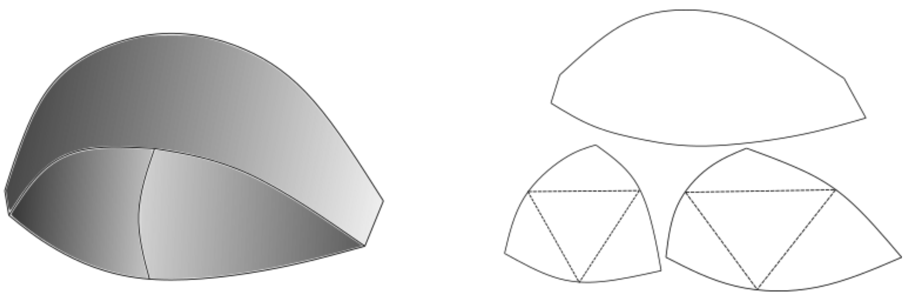


Fig. 5.13 Example of the set of developable surfaces that cannot be designed by our proposed method

第6章　機械学習を用いた曲面設計支援

6.1　緒言

本章では，可展面の性能設計支援のため，機械学習を用いた曲面設計支援手法について述べる．一般的に，設計者が形状を設計する際には，製品に対して求められる性能，あるいはそれに相当する形状への評価を満足するように，形状を設計している．

こうした性能評価に基づく設計は，形状を表現するパラメータ $\boldsymbol{x}$ を設計変数として，性能の評価関数 f に関する最適化問題として記述することができる．設計変数と性能評価値の関係が明確に表現されている場合に関しては，可展面の最適設計に関する研究が行われている．しかし，その関係は常に明確であるとは限らず，有限要素解析や実験を行うことで初めて評価ができる場合も多い．一般的に用いられる最適化手法では，関数の評価回数については考慮されていない．そのため，このように設計変数に対して性能評価値の関係が暗黙的であり，特に一回あたりの評価に対する計算コストが大きい場合，最適化計算における計算コストの問題が発生する．

このような問題に対し，有限要素法を用いて性能評価を行う場合においては，メッシュの節点を設計パラメータとして，感度解析を用いて最適設計を行う試みが行われている [81,82]．しかし，例えば可展面の展開可能条件のように，形状の全域で満たされる必要があるような形状制約など，メッシュによる表現が困難である制約を考慮することは難しい．

また，計算コストの問題を解決するための一般的な方法として，応答曲面法やＮＮ（Neural-Network）に基づき，設計パラメータと出力結果の関係を，近似モデル $\hat{f}$ で表現し，これを目的関数や制約条件の関数に置き換えて最適化計算を行う試みが行われている [83,84]．このような手法は，メタモデルやサロゲートモデルとも呼ばれており，目的関数を直接計算する機会を大きく減らすため，最適化問題の計算コストを大きく減らすことができる．

しかし，この手法は形状に対する設計パラメータが，形状の特徴を明示的に表現している場合に限り使用することができる．形状特徴に対する設計パラメータを得る場合，円柱や四角形などのプリミティブ形状を組み合わせた形状においては，形状を設計パラメータで表現することは容易である．その一方で，曲面のように複雑な形状の場合には，B-spline 曲面やベジエ曲面の制御点を設計パラメータにする方法なども考えられる．しかし，形状表現にあたって，その複雑度合に応じて制御点の個数を調整する必要がある他，可展面設計において近似回帰モデ

ルを応用する場合は，展開可能な制約を考慮する必要があり，最適設計を行う際の設計空間が複雑になってしまうという問題がある．

こうした問題を解決するために，可展面形状を，その性質を考慮した状態で，直接設計パラメータとして表現し，性能評価の近似式を作成することができれば，設計の効率化に繋がると考えられる．そこで，本章では可展面の性能設計効率化のため，微分幾何学に基づき得られる形状特徴パラメータを用いた近似回帰モデルの構築，および形状特徴パラメータに対する形状の復元手法について述べる．

6.2　可展面形状に対する性能予測手法

6.2.1　微分幾何学に基づく特徴量抽出

今日では，3 次元形状をパラメータ化し，機械学習を用いるための画一的手法は存在しておらず，いくつかの研究が行われている．例えば [85] では，物体の 3 次元形状の空間から，有限次元のパラメータ空間へ写像する手法として，形状のモーメント，オイラー標数などの位相不変量や，フーリエ変換した際のスペクトラムなどに変換し，それを特徴量として捉える手法を紹介している．また [86] では，メッシュのネットワーク構造をそのまま入力する手法などを紹介している他，点群をそのまま入力データとして用いて深層学習を行う研究も行われている [87,88]．今回想定するような可展面形状に対する性能設計に応用させる場合，位相などの大域的な特徴よりも，曲面における「曲がり方」などの情報が重要であること，可展面の性質を加味した状態で特徴量を抽出できることが求められる．しかし，従来機械学習において提案されているような手法では，今回のような問題に対応させることは難しい．

そこで，本研究では，曲面の基本定理「第一基本形式および第二基本形式を決めると曲面が一意に決定される」という定理に基づき，これを形状の特徴量として用いる事を考える．ここで，第一基本形式 I および第二基本形式 II については，式 (2.25) と (2.28) で表されているように，ds, dt に関する 2 次式であるため，2 次式の係数である E, F, G, L, M, N が I, II を特徴づける関数である．また，E, F, G, L, M, N について，線織面を基に定式化した式 (2.26) と (2.30) を考察すると，t に関して 2 次式以下で表現されており，また，t に関する係数は，いずれも $\alpha, \omega_\eta, \omega_\xi$ によって表されている．以上から，$\alpha, \omega_\eta, \omega_\xi$ に加え，t の定義域の区間を決定する D の 4 つの関数が，第一基本形式 I および第二基本形式 II を決定するため，これらの関数を学習させる手法について述べる．ある入力 x_i に対する出力 f_i の分布を入力とする場合は，離散的なデータ集合 $D_f = \{[x_i, f_i] | i = 0, 1, 2, \cdots n_p - 1\}$ をそのままパラメータとする他，Ritz 法による重みをパラメータとして表現する方法がある．具体的には，x_i と f_i が $f_i = f(x_i), f(x_i) = \boldsymbol{p}\boldsymbol{\varphi}^\top(x_i)$ と表現できると仮定し，パラメータ $\boldsymbol{p}$ を以下に示す最小二乗法により求める方法である．ただし，

$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1(x) \;\; \varphi_2(x) \;\; \cdots \;\; \varphi_n(x))^\top$ とする．

$$\min_{\boldsymbol{p}} \sum_{i=0}^{n_p-1} |f_i - \boldsymbol{p}\boldsymbol{\varphi}^\top(x_i)|^2 \tag{6.1}$$

しかし，関数の性質によって必要なパラメータ数が異なってしまう可能性があり，最適な $\dim \boldsymbol{p}$ を求めることが難しい．また，$\dim \boldsymbol{p}$ が大きすぎると，過剰適応の問題も発生してしまう．そこで，本研究ではガウス過程回帰 [89] の考え方を用いた特徴量抽出手法について提案する．

6.2.2 ガウス過程回帰

ガウス分布

ガウス分布は正規分布とも呼ばれ，連続変数に対する確率モデルとして，広く利用されている確率分布である．例えば変数 x が 1 次元の場合は，ガウス分布 $\mathcal{N}(x|\mu, \varsigma^2)$ は，x の平均を μ，分散を ς^2 として

$$\mathcal{N}(x|\mu, \varsigma^2) = \frac{1}{(2\pi\varsigma^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\varsigma^2}(x-\mu)^2\right) \tag{6.2}$$

と表される．また，$\boldsymbol{x}$ が n_d 次元である場合には多変量ガウス分布 $\mathcal{N}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ は，平均を $\boldsymbol{\mu}$，共分散行列を $\boldsymbol{\Sigma}$ として，

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi \det \boldsymbol{\Sigma})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right) \tag{6.3}$$

と表される．ガウス分布の特徴として，平均と分散に対して情報量最小（エントロピー最大）の確率分布であるため，標本サイズが比較的小さい場合でも，安定してよい近似を得ることができる点があり，誤差分布のモデルなどに広く用いられている．

線形回帰との関連性

n_x 次元の $\boldsymbol{x}$ に対して 1 次元の出力 y の対応を表すデータ集合 $\mathcal{D} = \{[\boldsymbol{x}_i, y_i]|i = 1, 2, \cdots N_D\}$ が与えられた場合の $\boldsymbol{x}$ に対する y の写像を予測する回帰問題を考える．なお，今回は出力が 1 次元の場合についてのみを述べるが，一般に出力が多次元の場合でも同様の議論が行える．

この問題を考えるにあたって，$\boldsymbol{x}$ に対する y を Ritz 法と同様の考えで，ある有次元の関数空間 $\mathcal{S}$ の基底 $\varphi_j \in \mathcal{S}$ により表現することを考える．

$$y = \sum_{j=0}^{N_R} w_j \varphi_j(\boldsymbol{x}) + \varepsilon \tag{6.4}$$

ただし，ε は，回帰を行った際の誤差である．式 (6.4) が全ての $[\boldsymbol{x}, y] \in \mathcal{D}$ に対して成り立つ場合，$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1 \;\; \boldsymbol{x}_2 \;\; \cdots \;\; \boldsymbol{y}_{N_D})$，$\boldsymbol{w} = (w_1 \;\; w_2 \;\; \cdots w_{N_R})^\top$ および $\boldsymbol{Y} = (y_1 \;\; y_2 \;\; \cdots \;\; y_{N_D})$ とすれば，

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{6.5}$$

ただし，$\boldsymbol{\Phi}$ は

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \varphi_0(\boldsymbol{x}_1) & \varphi_1(\boldsymbol{x}_1) & \cdots & \varphi_{N_R}(\boldsymbol{x}_1) \\ \varphi_0(\boldsymbol{x}_2) & \varphi_1(\boldsymbol{x}_2) & \cdots & \varphi_{N_R}(\boldsymbol{x}_2) \\ \vdots & & & \vdots \\ \varphi_0(\boldsymbol{x}_{N_D}) & \varphi_1(\boldsymbol{x}_{N_D}) & \cdots & \varphi_{N_R}(\boldsymbol{x}_{N_D}) \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

と定義している．この $\boldsymbol{w}$ および $\boldsymbol{\varepsilon}$ がそれぞれガウス分布 $\mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \lambda^2\boldsymbol{I})$ および $\mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \varsigma^2\boldsymbol{I})$ に従っているとする．この時，$\boldsymbol{Y}$ もまた，ガウス分布に従うことから，平均および分散は，次式のように求められる．

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{Y}] = \mathbb{E}[\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{w}] + \mathbb{E}[\boldsymbol{\varepsilon}] = \boldsymbol{0} \tag{6.7}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\boldsymbol{Y} \cdot \boldsymbol{Y}^\top] &= \mathbb{E}[(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{w})(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{w})^\top + \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{w})^\top + (\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{w})\boldsymbol{\varepsilon}^\top + \boldsymbol{\varepsilon}^\top \cdot \boldsymbol{\varepsilon}] \\ &= \lambda^2\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi}^\top + \varsigma^2\boldsymbol{I} \end{aligned} \tag{6.8}$$

この時，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の関係はガウス過程に従うという．また，$\boldsymbol{K} \triangleq \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi}^\top$ と定義し，この行列をグラム行列という．グラム行列の要素 $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j)$ は $\boldsymbol{\varphi}$ を用いて以下のように表現される．

$$k(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) \triangleq \sum_{m=0}^{N_R} \boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{\varphi}_m^\top(\boldsymbol{x}_j) \tag{6.9}$$

カーネル関数と尤度最適性

$\boldsymbol{K}$ に要求されることは，行列の半正定値性[注 7)]である．この事が示唆することは，$\boldsymbol{\varphi}_i$ を明示的に設計する必要がなく，$\boldsymbol{k}$ を直接設計すればいいことが分かる．この性質をカーネルトリックという．$\boldsymbol{k}$ の性質を満たすものには，例えば一例として，以下のような RBF カーネルが挙げられる．

$$k(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = \theta_1 \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|^2}{\theta_2^2}\right) \tag{6.10}$$

ここで，$\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \;\; \theta_2]$ は，カーネル関数のハイパーパラメータと呼ばれるパラメータである．また，カーネル関数の性質として，カーネル関数同士の和や積に関して，その性質が保存される．このため，既知のカーネル関数を組み合わせることで，回帰問題に対して高い表現力を持つことができる．

[注 7)] 行列の固有値全てが非負であること．

次に，$\mathcal{D}$ が与えられている場合における，ハイパーパラメータの求め方について述べる．y がガウス過程回帰に従う場合，全ての $[\boldsymbol{x}, y] \in \mathcal{D}$ が独立であるとすれば，その確率分布 p_{all} はガウス過程 $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma} + \varsigma^2 \boldsymbol{I})$ に従う．観測されたデータ集合の確率を最大化する最尤推定法に基づいて考えると，ハイパーパラメータは以下に示す対数尤度関数 $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \varsigma)$ を最大化する最適化問題を解くことで得られる．

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \varsigma) = -\frac{1}{2} \ln \det(\boldsymbol{K} + \varsigma^2 \boldsymbol{I}) - \frac{1}{2} \boldsymbol{Y}^\top (\boldsymbol{K} + \varsigma^2 \boldsymbol{I})^{-1} \boldsymbol{Y} \tag{6.11}$$

事後分布

最後に，訓練データを与え学習させた結果から，新しい入力 $\boldsymbol{x}_*$ に対する予測値 y_* を回帰させる手法について述べる．これを考えるにあたっては，訓練データ集合が与えられた場合における条件つき確率 $p_c(y_*, \boldsymbol{Y})$ を用いて考える．$p_c(y_*, \boldsymbol{Y})$ を求めるためには，まず $\boldsymbol{x}_*$ を $\boldsymbol{X}$ に加えた集合 $\tilde{\boldsymbol{X}}$ の同時分布を求める．この場合においても，同じようにガウス過程 $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \tilde{\boldsymbol{K}})$ に従うものとする．この時，$\tilde{\boldsymbol{K}}$ をブロック行列を用いて書き下すと，以下のようになる．

$$\tilde{\boldsymbol{K}} = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{K} + \varsigma^2 \boldsymbol{I} & \boldsymbol{k}_* \\ \hline \boldsymbol{k}_*^\top & k_{**} \end{array}\right) \tag{6.12}$$

ただし，

$$\boldsymbol{k}_* = \begin{pmatrix} k(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_*) \\ k(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_*) \\ \vdots \\ k(\boldsymbol{x}_{N_D}, \boldsymbol{x}_*) \end{pmatrix} \tag{6.13}$$

であり，$k_{**} = k(\boldsymbol{x}_*, \boldsymbol{x}_*)$ である．つまり，$p_c(y_*, \boldsymbol{Y})$ は

$$p_c(y_*, \boldsymbol{Y}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{k}_*^\top (\boldsymbol{K} + \varsigma^2 \boldsymbol{I})^{-1} \boldsymbol{Y}, k_{**} - \boldsymbol{k}_*^\top (\boldsymbol{K} + \varsigma^2 \boldsymbol{I})^{-1} \boldsymbol{k}_*) \tag{6.14}$$

と表すことのできる確率分布である．入力 $\boldsymbol{x}_*$ に対する予測値，つまり予測される期待値を μ_* とし，期待値に対する分散 ς_* とすると，

$$\mu_* = \boldsymbol{k}_*^\top (\boldsymbol{K} + \varsigma^2 \boldsymbol{I})^{-1} \boldsymbol{Y} \tag{6.15}$$

$$\varsigma_* = k_{**} - \boldsymbol{k}_*^\top (\boldsymbol{K} + \varsigma^2 \boldsymbol{I})^{-1} \boldsymbol{k}_* \tag{6.16}$$

ここで，期待値に対する分散 ς_* の解釈について述べる．この分散とは，予測された解がどれだけ統計的に妥当であるかを計算する際に用いることができる．統計学では，分散を用いて解の信頼区間を計算することができ，例えば正規分布における p_b% 信頼区間とは，真値 y に対して予測値 y_* および分散 ς が得られた場合において，$|y - y_*| \leq \iota\varsigma$ を，p_b% の確率で満たすことを表現している．p_b に対する ι は $\mathcal{N}(0, 1)$ の正規分布における関係から読み取ることができる．こ

の時，ς が大きければ，その分真値とのずれが大きい可能性も十分高くなり，結果として y_* の信頼度は低いと解釈できる．このように，テストデータによる回帰性能予測を行わずとも，解の妥当性を解釈できる点がガウス過程のメリットでもある．

6.2.3 選定した関数の特徴量抽出

. カーネルトリックの性質が示唆することは，3.3.2 節で議論した Ritz 法において，数値計算の制約上 $\dim \mathcal{S}$ を有限に制限せざるを得なかったが，$\boldsymbol{K}$ を求める際には，φ_i を明示的に設計する必要がないため，$\dim \mathcal{S}$ を無限としても扱うことができるようになることである．つまり，前述で Ritz 法を用いてパラメータを推定する際に問題であった，関数形状の性質によって次元を調整する必要がなくなり，表現性の高いかつ有限のハイパーパラメータで関数を表記できる．

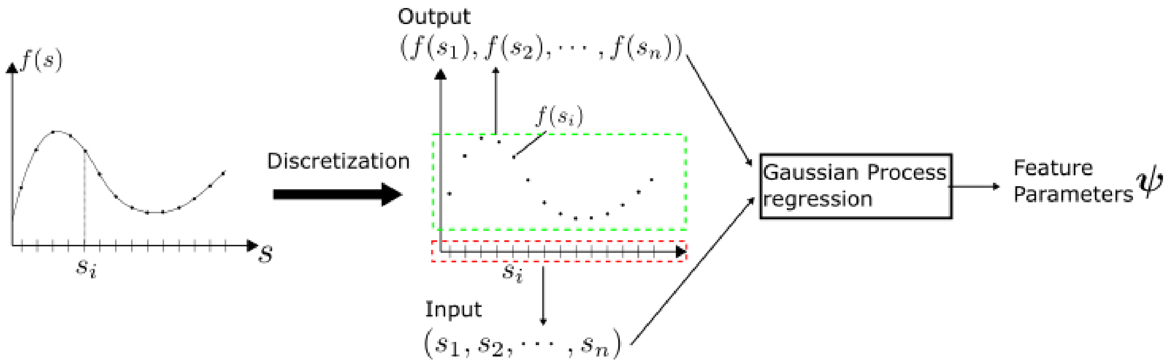


Fig. 6.1 The proposed method to obtain parameters: First, discretize the target function and obtain the dataset. Then, apply the gaussian process regression to this dataset and calculate feature parameters

以上より，可展面から微分幾何学の性質を用いたパラメータ抽出は，以下のようにまとめられる．

1. 可展面形状から，$\alpha, \omega_\eta, \omega_\xi, D$ を算出する．

2. 得られた $\alpha, \omega_\eta, \omega_\xi, D$ を離散化し，ガウス過程回帰を行って，ハイパーパラメータおよび各平均値を抽出し，これを形状特徴量とする．

ガウス過程回帰の定式化は，平均 0 であることを前提にしばしば定式化されることから，離散化の際には，例えば α に関して，平均値を $\bar{\alpha}$ として，$\hat{\alpha} = \alpha - \bar{\alpha}$ を定義し，この $\hat{\alpha}$ を離散化し，パラメータを抽出する．この場合，各関数の平均値に関する情報が欠落してしまうため，ガウス過程回帰によるパラメータに加え，各関数の平均値 $\bar{\alpha}, \bar{\omega}_\xi, \bar{\omega}_\eta, \bar{D}$ を特徴量に加える．このように抽出した形状特徴量と出力を合わせて，出力に対するメタモデルを作成することができる．このパラメータを得るまでの手続きを，Fig. 6.1 に示す．また，性能値に対する回帰全体の手順を，Fig. 6.2 に示す．

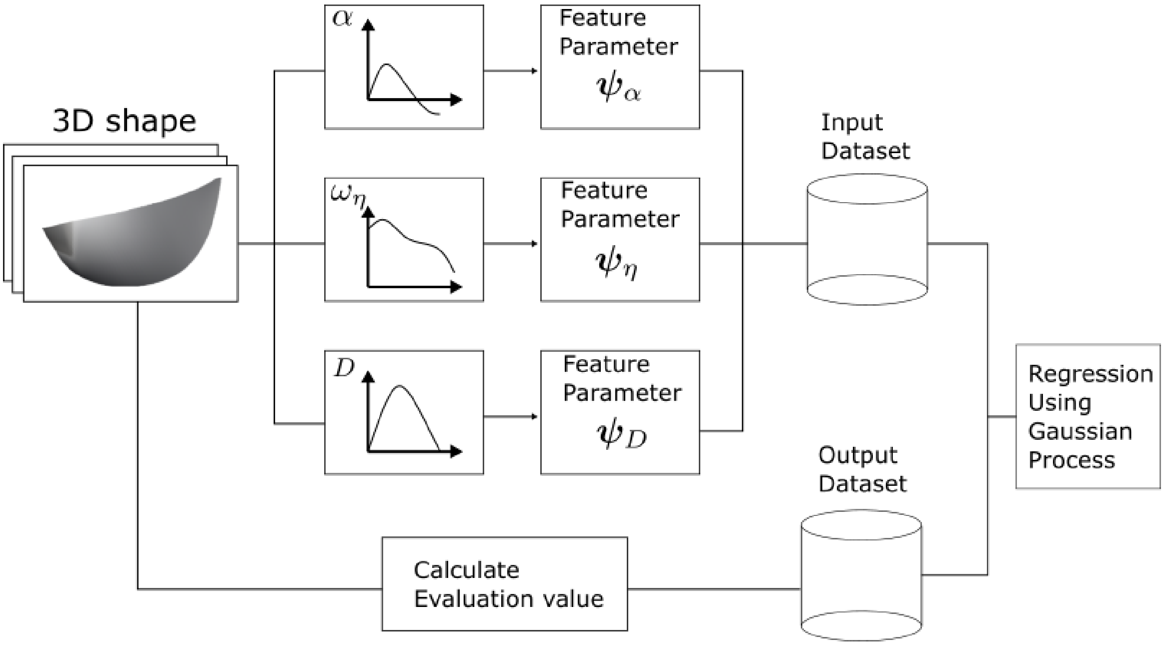


Fig. 6.2 The procedure of applying the machine learning method to calculate the relationship between a developable surface and its functional evaluation value: the input is the feature parameters obtained by which Fig. 6.1 shows

6.3 形状特徴量に対する可展面形状設計

前節では，曲面形状に対する出力を回帰させるメタモデルについて述べた．このメタモデルは，精度が保証されている仮定の下では，FEM や実験による解析を行うことなく，既存の最適化手法を用いることで入力パラメータの最適化をすることができる．しかし，入力パラメータは情報を圧縮し低次元化しているため，入力パラメータに対する曲面形状を設計する手法が必要である．

そのため，本節では形状特徴パラメータから曲面形状を設計する手法について述べる．設計問題においては，3 章で示したように，最適化問題として定式化することができる．今回は，可展面形状の設計のみを目的とするため，目的関数には式 (3.13) を設定する．これに加え，式 (3.8) を用いて求められる $\alpha, \omega_\eta, \omega_\xi, D$ には，式 (6.11) で示した尤度最適の条件が加わることになる．つまり，この設計問題は多目的最適化問題として定式化される．

この最適化問題においては，完全最適解を持つ可能性もあるが，それでもこの問題を直接的に解こうとする場合，計算コストの面などで非効率的であると言える．そこで，この問題を単目的最適化問題へと帰着させる方法について示す．

まず，式 (6.11) は，$\boldsymbol{Y}$ に関する最適化問題であると捉えた場合には，以下のような 2 次形式の最小化問題に帰結できる．

$$\min_{\boldsymbol{Y}} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \varsigma) \equiv \min_{\boldsymbol{Y}} \boldsymbol{Y}^\top (\boldsymbol{K} + \varsigma^2 \boldsymbol{I})^{-1} \boldsymbol{Y} \tag{6.17}$$

$\boldsymbol{Y}$ に関する 2 次形式の最適化問題を，$\boldsymbol{Y} \neq \boldsymbol{0}$ の条件下で求めることを考える．このために，以下のように実行列 $\boldsymbol{A}$ が与えられた場合における $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ の最適化問題を考える．

$$\min_{\boldsymbol{x}} \frac{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top} \tag{6.18}$$

$\boldsymbol{A}$ が対角化可能な行列と仮定すると，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}^{-1}\mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}_A)\boldsymbol{V}$ と分解できる．ただし，$\boldsymbol{\lambda}_A$ は固有値ベクトルを表し，$\boldsymbol{V}$ は対角化行列を表す．対角化行列は，直交性 $\boldsymbol{V}^\top \cdot \boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}$ を満たしているとする．$\boldsymbol{y} \triangleq \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}$ として，これを式 (6.18) に代入すると，

$$\min_{\boldsymbol{y}} \frac{\boldsymbol{y}^\top \mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}_A)\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^\top} \tag{6.19}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{y}^\top \mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}_A)\boldsymbol{y}$ は以下の 2 つの不等式を満たす．

$$\boldsymbol{y}^\top \mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}_A)\boldsymbol{y} \leq \max(\boldsymbol{\lambda}_A)\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^\top \tag{6.20}$$

$$\boldsymbol{y}^\top \mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}_A)\boldsymbol{y} \geq \min(\boldsymbol{\lambda}_A)\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^\top \tag{6.21}$$

つまり，式 (6.18) の最大値および最小値は $\boldsymbol{A}$ の最大・最小固有値と一致することが示される．つまり，式 (6.11) の最適条件は

$$\frac{\boldsymbol{Y}^\top (\boldsymbol{K} + \varsigma^2 \boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{Y}}{|\boldsymbol{Y}|^2} = \min(\boldsymbol{\lambda}_K) \tag{6.22}$$

と制約条件として置き換えることができる．ただし，$\boldsymbol{\lambda}_K$ は $(\boldsymbol{K} + \varsigma^2 \boldsymbol{I})^{-1}$ の固有値を並べたベクトルである．

この最適化問題も，Ritz 法により $\omega_{\xi,U}, \omega_{\eta,U}$ および γ を基底関数の線形和で表現する．

$$\omega_{\xi,U} = \boldsymbol{a}_\xi^\top \boldsymbol{e} \tag{6.23}$$

$$\omega_{\eta,U} = \boldsymbol{a}_\eta^\top \boldsymbol{e} \tag{6.24}$$

$$\gamma = \boldsymbol{a}_u^\top \boldsymbol{e} \tag{6.25}$$

$$\tag{6.26}$$

ただし，$\boldsymbol{e}$ は関数系である．このように表現し $\boldsymbol{a}_{\mathrm{all}} = [\boldsymbol{a}_\xi^\top \ \ \boldsymbol{a}_\eta^\top \ \ \boldsymbol{a}_u^\top]$ に関する非線形計画問題へと帰結できる．この問題を解くことで，入力パラメータから可展面形状を設計することができる．

6.4 検証実験

本節では，ブラジャーカップの設計工程を対象とし，2 つのケーススタディに対し本手法を適用し，回帰精度に基づいてパラメータ選定の妥当性を検討する．

1. ブラジャーカップの「上げる」機能の発現

2. ブラジャーカップの布物性による力学的変形予測

また，形状予測問題では，ブラジャーカップの「上げる」機能の予測値に基づいた形状復元を行い，妥当性を検証する．

今回の対象とするブラジャーカップの設計工程では，以下のような前提を設ける．

前提 1. 下ワイヤーは，その設計工程で変更されないため，常に同じである．

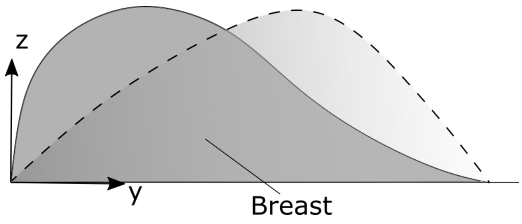
前提 2. 形状に対する評価値は，設計者間で常に同じであるとする．

前提 1 より，ワイヤーの曲率 κ_{LW} が与えられることになるので，機械学習で評価するべき関数は ω_η, α, D の 3 つとなる．

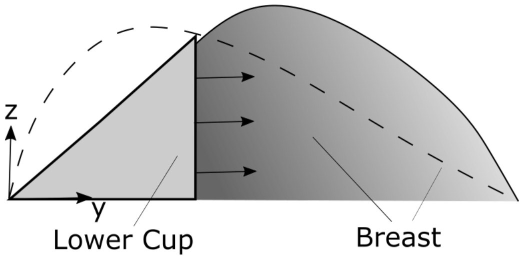
6.4.1 「上げる」機能発現に対する性能予測

この数値実験においては，ブラジャーカップの「上げる」機能を対象とする．現状のブラジャーカップの設計において，カップの持つ機能の 1 つに,「上げる」機能があることは，設計者全員のコンセンサスが得られているが，当該機能の統一的な定量化が行われている訳ではない．しかし，それでは当該機能を十分発揮できるようなカップの設計支援を行うことができないため，本研究では,「上げる」機能については，定量的・客観的に評価できると仮定する．その場合であっても，カップの展開形状と,「上げる」機能値の間の関係を明示することは困難であるため，本章が提案する手法が有効となる．上げる機能のモデル化においては，実際の設計者からのヒアリングに基づいて行う．それによると．この機能は，Fig. 6.3 のように，ある 3 次元絶対座標系に対するバストの体積分布を等積的に変位させる行為を表現しており，その体積分布の変化度合は，主にバストとカップ曲面が形成する体積の差分によって決定される．これをまとめると,「上げる」機能における評価の性質として，カップの体積が大きい場合，カップ外に押し出されるバストの体積の割合が小さくなるため，機能評価は小さくなり，体積が小さい場合には，カップ外に押し出されるバストの割合が大きくなるため，機能評価は大きくなるという性質が得られる．以降は，身体に対する正中線が y 軸，身体に対する正面方向が z 軸と一致するように座標系を設定されているとする．カップ曲面が形成する体積 V_{cup} は，ワイヤーとカップ曲面が囲う体積であると定義し，次式のように曲面の空間座標 $\boldsymbol{X}(s,t)$ におけるワイヤーの従法線ベクトル $\boldsymbol{b}$ 成分の面積分によって定式化する．

$$V_{\mathrm{cup}} = \int_S \boldsymbol{X}(s,t) \cdot \boldsymbol{b}(s) dS \tag{6.27}$$



(a) Isovolumetric change of a breast



(b) Isovolumetric change by a lower cup

Fig. 6.3 Description of the function of a two-piece brassiere cup, "lift up": it is an isovolumetric change of a breast by a lower cup.

ここで，面積分要素については，第一基本量を用いて

$$dS = \sqrt{EG - F^2} dsdt \tag{6.28}$$

と表すことができることから，V_{cup} は式 (6.28) を用いて

$$V_{\mathrm{cup}} = \int_0^{L_L} \int_0^{D(s)} \boldsymbol{X}(s,t) \cdot \boldsymbol{b} \quad |\cos\alpha - t(\alpha' + \omega_\eta)| dtds \tag{6.29}$$

を計算することで得られる．また，表面積 S_{cup} については，

$$S_{\mathrm{cup}} = \int_0^{L_L} \int_0^{D(s)} \cos\alpha - t(\alpha' + \omega_\eta)| dtds \tag{6.30}$$

と求めることができる．この体積および面積を用い，「上げる」機能は

$$y_{\mathrm{out}} = \phi_1 \frac{V_{\mathrm{cup}}}{S_{\mathrm{cup}}} \tag{6.31}$$

で表される y_{out} によって評価できる．y_{out} は広義の意味での「高さ」を表しており，カップが同じ体積であっても，曲面の表面積の割合が大きければ，それだけ「高さ」が小さくなる，つまりバストを押し上げる機能は高く評価され，カップの面積が小さければ,「高さ」は大きくなり，押し上げる機能は小さいと評価されるといった，機能評価の特性を表現できる．また，今回の機能は，主に下カップがその機能評価を決定することから，下カップのみを対象とする．

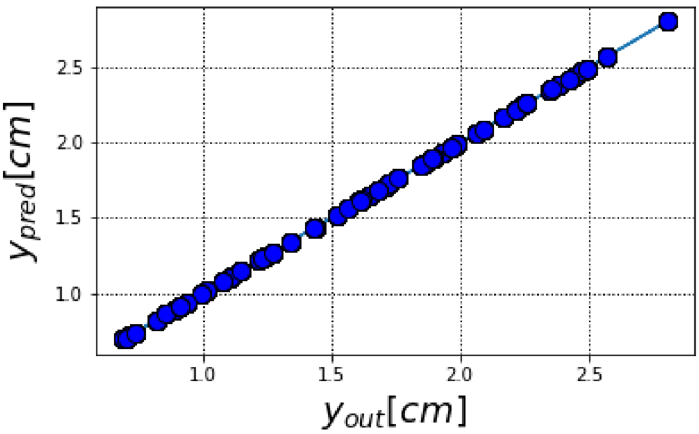
入力関数のパラメータ化については，RBF カーネルを用いてパラメータを抽出する．この得られた入力パラメータに対する出力の関係を求める際には，以下のように変数により重みが変

化する関連度自動決定 (ARD) カーネルを用いて，以下のように RBF カーネルと線形カーネルを組み合わせたカーネル関数を用いる．

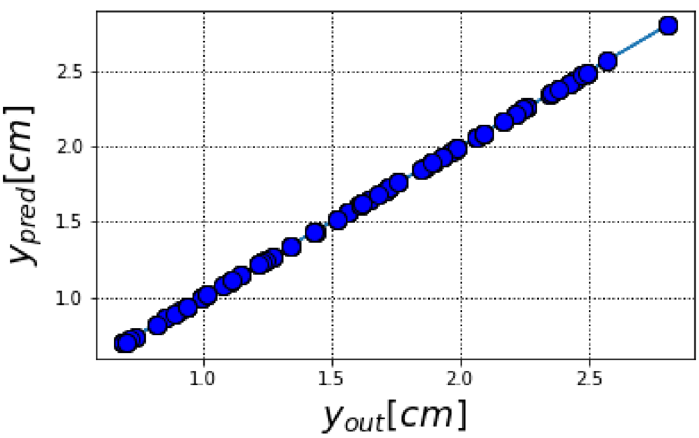
$$k(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = \theta_1 \exp\left((\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j)^\top \mathrm{diag}(\boldsymbol{\theta}_R)^{-1}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j)\right) + \boldsymbol{x}_i^\top \mathrm{diag}(\boldsymbol{\theta}_L)\boldsymbol{x}_j \tag{6.32}$$

今回は，1800 個のデータに対し，1300 個を教師データ，500 個を検証データに分け，検証を行った．その結果を Fig. 6.4 に示す．Fig. 6.4 においては，横軸は真の値 y_{out} であり，縦軸は予測結果 y_{pred} である．

この結果により，非常に高い回帰性能が発揮されたことが示された．



(a) Training data set



(b) Test data set

Fig. 6.4 The relationship between true value and prediction and its confidence interval in case of function 'Lift up'

6.4.2 着用時における力学的条件下での変形量予測

ブラジャーカップの設計工程において，設計者は着装した後のバストの理想的な形を想像し，カップのパターン形状を設計し，紙模型を作成して意図通りの形状を得られているかをチェックしている．一方，実際のブラジャーカップは布でできているため，着用時のバストからの圧力によって，紙模型のように可展面形状になるとは限らず，紙模型の工程により得られた理想の形とは異なってしまう．つまり，設計工程では，パターン形状の確認において紙模型で設計されることから，布による試作を極力減らし，設計時のコストを削減するためには，布物性および力学的条件による変形を予測することが重要となる．

そこで本実験では，カップの布モデルを FEM(有限要素法) を用いた解析を行うことで得られる，カップの変位総和を回帰させる出力 y_{out} として扱う．

解析モデル

本実験における布物性のモデリングについて述べる．ブラジャーカップにおける成形機能を実現させるためには，通常の布地よりも厚く，また伸縮性の少ない布地が採用される場合が多い．実際にブラジャーカップに使用される布地を Fig. 6.5 に示す．例えば Fig. 6.5 の場合は，トリコット編みと呼ばれる経編，不織布，そして天竺編みと呼ばれる丸編の 3 層構造を持つ布地である．今回の着用時の想定においては，力学的挙動に貢献するのは主に不織布であるため，本実験では 3 層の布地を，1 層の不織布の性質を持つ布地であるとモデル化する．不織布は，繊

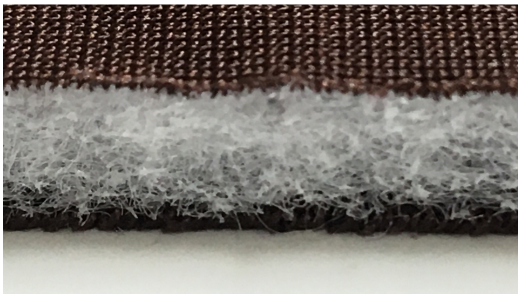


Fig. 6.5 The cloth used in an actual brassiere cup

維を一定方向またはランダムに集積して接着樹脂で化学的に結合させる他，機械的に絡ませたり，圧力をかけた水流で絡ませたりすることを行って作る布である．詳細にモデリングするためには，その繊維 1 つ 1 つの挙動や摩擦などの相互作用をモデル化する必要があるが，これを簡単にモデリングすることはできない．しかし，応力を加えれば変形し，除荷すると元の形状に戻るという弾性的な挙動を示す点，ブラジャーの素材となるポリウレタンやナイロンはゴムと同様エラストマー（弾性のあるポリマー）に分類されることを踏まえ，1 つの超弾性体であるとして解析を行う．

超弾性体の概説を行う．超弾性体とは，式 (6.33) のように，変形やひずみの成分の微分により共役な応力成分を生じる弾性ポテンシャル関数 W が存在する物質である [90].

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}} \tag{6.33}$$

ただし，$\boldsymbol{\sigma}$ は第 2Piola-Kirchhoff 応力テンソルであり，$\boldsymbol{E}$ は Green-Lagrange ひずみテンソルである．

$\boldsymbol{\sigma}$ を右 Cauthy-Green テンソル $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ を用いて表現する．$\boldsymbol{E}\boldsymbol{\mathcal{E}}$ と $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ の関係には

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mathcal{C}} - \boldsymbol{I}) \tag{6.34}$$

がある．$\boldsymbol{\mathcal{C}}$ はテンソル量であるため，その座標の取り方に応じて変化する．一方で，ポテンシャル関数はテンソルの取り方に依存せず一意に決まる必要がある．そこで，$\boldsymbol{\mathcal{C}}$ が持つ不変量により評価することを考える．$\boldsymbol{\mathcal{C}}$ のテンソル不変量は，$\dim \boldsymbol{\mathcal{C}}$ だけ存在する．今回は 3 次元座標系における運動に関して記述しているため，$\dim \boldsymbol{\mathcal{C}} = 3$ であり，各不変量を $\mathcal{I}_k(k = 1, 2, 3)$ は $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ の固有値 $\lambda_{C,m}(m = 1, 2, 3)$ を用いて次式らのように表現される．

$$\mathcal{I}_1 = \sum_{m=1}^{3} \lambda_{C,m} = \mathrm{tr}\boldsymbol{C} \tag{6.35}$$

$$\mathcal{I}_2 = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{3} \sum_{p\in[1,3]\setminus m} \lambda_{C,m}\lambda_{C,p}(1 - \delta_{m,p}) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{I}_1^2 - \mathrm{tr}\boldsymbol{\mathcal{C}}^2\right) \tag{6.36}$$

$$\mathcal{I}_3 = \prod_{m=1}^{3} \lambda_{C,m} = \det \boldsymbol{\mathcal{C}} \tag{6.37}$$

不変量 $\mathcal{I}_k$ を $\boldsymbol{C}$ の微分は

$$\frac{\partial \mathcal{I}_1}{\partial \boldsymbol{C}} = \boldsymbol{I} \tag{6.38}$$

$$\frac{\partial \mathcal{I}_2}{\partial \boldsymbol{C}} = \mathcal{I}_1\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\mathcal{C}} \tag{6.39}$$

$$\frac{\partial \mathcal{I}_3}{\partial \boldsymbol{C}} = \mathcal{I}_3\boldsymbol{\mathcal{C}}^{-1} \tag{6.40}$$

となり，これらを用いると，応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ は

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial \mathcal{I}_1} + \frac{\partial W}{\partial \mathcal{I}_2}\mathcal{I}_1\right)\boldsymbol{I} - \frac{\partial W}{\partial \mathcal{I}_2}\boldsymbol{\mathcal{C}} + \frac{\partial W}{\partial \mathcal{I}_3}\mathcal{I}_3\boldsymbol{\mathcal{C}}^{-1}\right\} \tag{6.41}$$

と計算される．非圧縮性のひずみエネルギー密度関数の形式は様々提案されているが，本研究では布のひずみがせいぜい 30% 程度であるため，以下に示す Neo-Hookean モデルを用いる．

$$W = \mathcal{B}_1(\mathcal{I}_1\mathcal{I}_3^{-\frac{1}{3}} - 3) + \left(\frac{\mathcal{B}_1}{6} + \frac{\mathcal{B}_2}{8}\right)\left(\mathcal{I}_3^2 + \frac{1}{\mathcal{I}_3^2} - 2\right) \tag{6.42}$$

布物性の測定においては，Fig. 6.5 に示す試料に対して応力ひずみ関係を得るため，引っ張り試験を行った．幅 20[cm] の生地を 5[cm] 間隔で固定し，引張方向に対して垂直な方向に，生地が 1 秒あたり 0.2[mm] 伸びるように，最大 4.90[N/cm] の荷重を加え，荷重と伸びを逐次測定する．最大荷重に達したあとは，次に生地が 1 秒あたり 0.2[mm] ずつ縮むように除荷する．このように荷重と除荷のサイクルを 1 サイクルとし，このサイクルにおける応力とひずみの関係を Fig. 6.6 に示す．

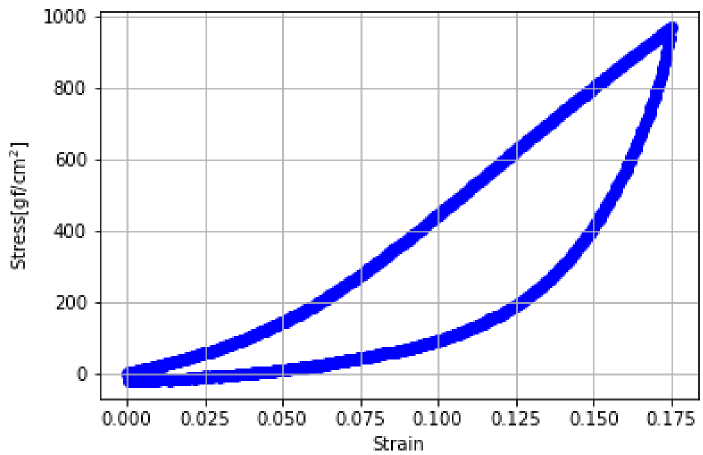


Fig. 6.6　Strain-Stress distribution obtained by tensile testing

引っ張り試験におけるひずみと応力の関係として，加力時においては指数関数的な関係を示し，除荷時においてはほとんど直線的な関係を示す．本研究における有限要素解析では，カップに対して無荷重の状態から，バストが元に戻ろうとする加力によるカップの変形を解析するため，応力ひずみ関係のヒステリシスから，加力時のみの応力ひずみ関係を用いて解析を行った．

今回の実験では，ワイヤー形状は半径が 5[cm] の円弧であるとする．また，バストにおける内圧は，カップの法線方向に一様に作用すると仮定し，その大きさは [91] から 1.0[KPa] とする．解析計算および布物性 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ の同定には，汎用 FEM 解析ソフト ABAQUS のソルバーおよびフィッティング関数を用いた．

回帰結果と考察

今回のデータセットは 316 個あり，そのうち 236 個を教師データに，80 個をテストデータに分割した．回帰の際に用いるカーネル関数には，以下のような関数を設定した．

$$k(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = \theta_1^2 \exp\left(1 + \boldsymbol{x}_i^\top \mathrm{diag}(\boldsymbol{\theta}_R)^{-1} \boldsymbol{x}_j\right)^\top + \boldsymbol{x}_i^\top \mathrm{diag}(\boldsymbol{\theta}_L) \boldsymbol{x}_j \tag{6.43}$$

以上の設定により得られた結果を Fig. 6.7 に示す．Fig. 6.7 においても，横軸は真の値 y_{out} であり，縦軸は予測結果 y_{pred} である．

形状特徴に対する変位総和の回帰結果を確認する指標として，最大誤差，平均誤差，$y = x$ に対する分散および決定係数を求めたものを，Table 6.1 に示す．

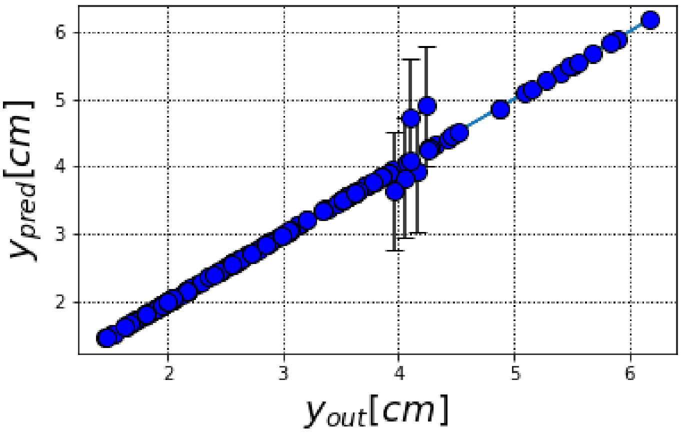
Table 6.1 The table of each values

	Train dataset	Test dataset
Maximum error	6.63×10^{-1}	1.87
Average error	8.79×10^{-3}	2.15×10^{-1}
Variance	4.41×10^{-3}	1.36×10^{-1}
R^2	9.96×10^{-1}	8.78×10^{-1}

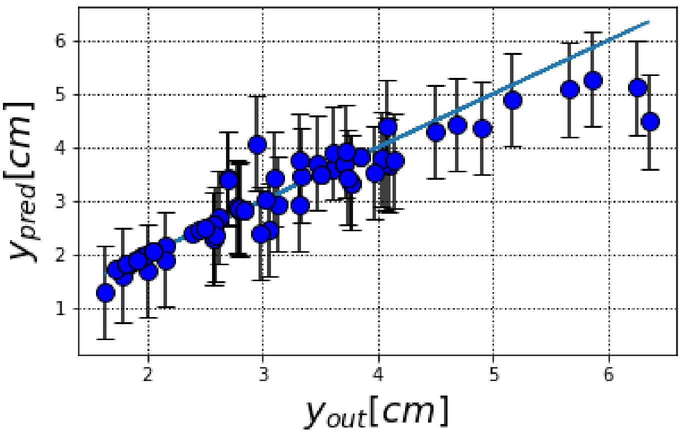
回帰精度を評価するためには，特に分散と決定係数について確認すればよい．この 2 つから確認すると，回帰精度がよいことが確認できる．

「上げる」機能評価値に対する回帰結果と比較すると，全体的に分散が大きいことが分かる．これは与える教師データ数が「上げる」機能の場合と比較して多くないため，得られる結果が曖昧さを持つという，統計モデルを基にしたガウス過程回帰特有の性質が見られる．

また，誤差に関しては，誤差が大きければ分散も大きく出力される点，特に $y_{out} \geq 6$ の部分で誤差が大きい点が確認される．これは，与えた教師データにおける $y_{out} \geq 6$ のデータ数の密度が，他の部分に比べ低いことが要因とされる．そのため，$y_{out} \geq 6$ のデータを追加していけば，回帰性能の改善を期待できると思われる．



(a) Training data set



(b) Test data set

Fig. 6.7 The relationship between true value and prediction and its confidence interval in case of the summation of displacement

6.4.3 形状特徴に基づく可展面設計手法の計算例

本節では，6.3 節で示した手法に従い，実際に性能値を満たす可展面を設計できるかを検討する．本実験では，プラジャーカップにおける「上げる」機能の評価値を対象にし，この機能評価値が与えられる場合において，形状の設計を行う．

実験の手続きを以下に示す．

1. 「上げる」評価値 f_v を無作為に与える．

2. 与えた性能値を実現するための形状特徴パラメータを求める．

3. その特徴パラメータから，手法用いて形状を設計する．

4. 式 (6.31) に基づいて評価値を再算出し，与えた評価値と比較する．

今回の実験では，$f_v = 0.082$ と定めた．この評価値に対する特徴パラメータ $\theta_1, \theta_2, \varsigma$ は，回帰式の方程式を数値的に解くことで，Table 6.2 のように得られた．そして，この特徴量から手法

Table 6.2 Parameters used for this experiment

	α	ω_η	D
θ_1	3.48×10^{-1}	6.78	6.03×10^{-2}
θ_2	1.76×10^{-1}	9.30×10^{-2}	2.86×10^{-1}
ς	9.94×10^{-4}	1.37×10^{-2}	2.065×10^{-13}

を用いて設計した曲面を，Fig. 6.8 に示す．(a)，(b)，(c) は曲面を xy, xz, yz 平面から見た図であり，(d) は曲面を三次元的に投影した図であり．また，(e) は，この曲面を展開して得られた形状を表している．この形状から式 (6.31) を用いて得た評価値は 0.082 であり，その誤差はおよそ 8.76×10^{-5}[%] であった．この結果より，評価値に対して 10^{-5}[%] の精度で形状を設計できることが示された．

6.5 結言

本研究では，可展面形状の設計効率化を目的として，形状に対する性能予測を，機械学習を用いて表現する手法について提案した．また，性能回帰モデルを用いた設計支援を行うために，入力パラメータに対して形状を復元させる手法について述べた．

はじめに，曲面の基本定理に基づく曲面形状の特徴量として，第一基本量および第二基本量を学習させる手法を述べた．第一基本量および第二基本量は関数分布として与えられるため，これをパラメータ化するために，ガウス過程回帰手法を用いたパラメータ化について述べた．

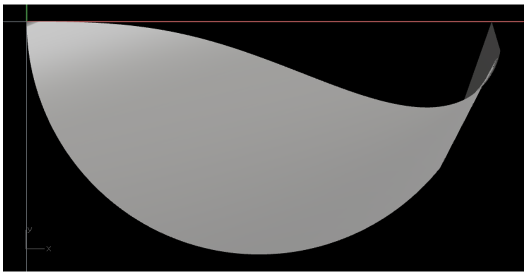
次に，パラメータ化することで得られる回帰モデルを用いて形状設計支援を行うため，特徴パラメータに対して曲面を設計する手法について述べた．曲面を設計するにあたって，多目的最適化問題として定式化されたこの問題を，尤度最適の条件の特性を考慮することで，単目的最適化問題として定式化する手法について述べた．

検証実験では，

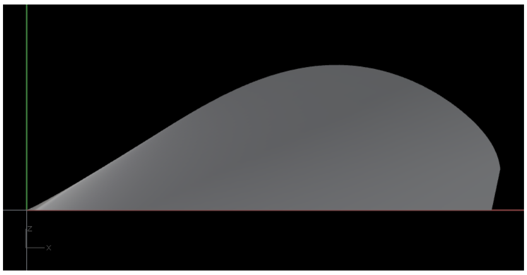
- 設計者のヒアリングに基づき定式化した評価値
- FEM 解析を用いて得られた解析値

のケーススタディにおいて，回帰予測を行い，本手法の妥当性について検討した．また，入力パラメータに対する形状設計においては，ある評価値に対する入力パラメータを得て，これを基に曲面を設計し，その設計した曲面から得られる評価値を比較することで，手法について検討を行った．上記の実験から，回帰精度に関しては，テストデータにおいても決定係数 0.87 以上の回帰精度を得られるようなモデルの構築を行うことができた．また，評価値に関しては，評価値の誤差として，10^{-5}[%] 程度の精度で設計できることが示された．

ただ，本手法では性能評価の対象を 1 つの曲面形状であるとしているが，4 章でも述べたように，実際の製品形状は複数枚の可展面を接続することで形成している．こうした場合には，ただ曲面の数だけ特徴量を用意するだけでなく，曲面の接続関係も含めた特徴量を出力する必要があるため，手法の拡張を行う必要がある．

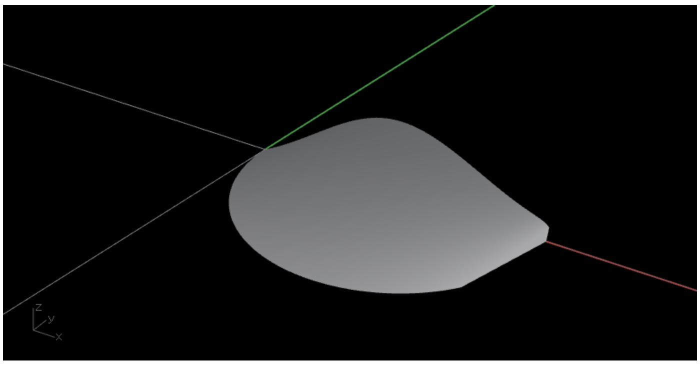


(a) xy-view

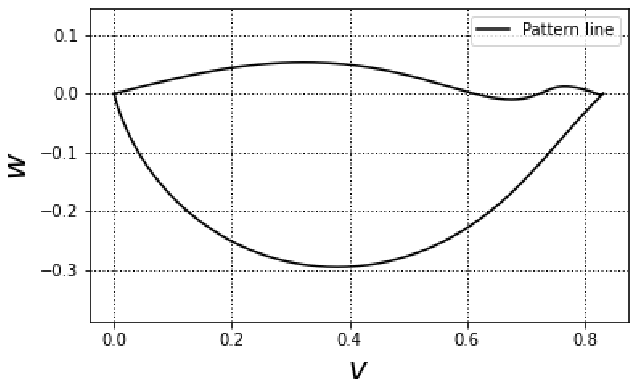


(b) xz-view

(c) yz-view



(d) Perspective view



(e) The developed shape

Fig. 6.8 The computational surface that our proposed method reconstructed

第7章　結論

本研究では，従来設計者の経験や勘に基づき行われていた，可展面の設計支援を行うため，展開形状を考慮できる形状モデルの構築および，いくつかの設計目的に対して，それに合わせた曲面形状を設計する手法について提案を行った．本章では各章のまとめを行った上で，最終的な結論を述べる．

第一章ではまず，設計行為に関する一般的事項，および計算機による設計支援におけるCADシステムの歴史，およびそれに関連するシステムについて述べた．その上で，設計支援に関する課題として，暗黙的制約の考慮という課題がある事について述べた．暗黙的制約には，設計意図に関するものから，製造性に関するものまで様々存在しているが，本研究では，曲げて作るという製造特性を持つ曲面の設計課題に着眼した．このような曲面では，設計工程において3次元形状や図面を中心に設計が行われ，生産工程でそれに基づいて展開作業が行われる．この生産工程においては，設計工程で得られる形状を忠実に再現するように展開することが要求されるが，その作業は熟練者に依存する．こうした課題を解決するためには，設計工程の段階から，展開可能性を意識した設計を，計算機により支援する必要であることを導いた．展開可能性を持つ曲面は，可展面と呼ばれる特殊な性質を持つ曲面となることについて触れ，その設計支援に関する既存の研究について述べた．その上で，達成されていない課題として，

- 展開形状を自動導出できる体系的な形状モデルが存在しない
- 設計目的に合わせた設計支援手法が確立されていない

という2つの課題が存在することについて触れ，これらを計算機により支援することを本研究の目的として定めた．

第二章では，可展面を特徴づける微分幾何学の基礎的な事項について述べた上で，微分幾何学に基づく，可展面モデルおよびその形状設計支援に関する2つの研究成果について触れた．これらの成果と既存の研究との異なる部分は，展開形状との結びつきを明らかにした可展面モデルであるという部分である．1つ目の研究成果については，展開された形状を基に，それを曲げた際にどのような形状になるかを予測する手法である．これは，力学的観点からポテンシャルエネルギーを最小にするという目的関数とし，これを最小化する最適化問題として記述できることについて述べた．2つ目の研究成果については，微分幾何学に基づく条件を基に，境界曲線の間に形成される曲面およびその展開形状を設計する手法である．この手法では，2つの

曲線の弧長間の関係が互いに逆像となることを利用し，これを最小化するような最適化問題として記述できることについて述べた．この 2 つのアプローチにより，展開形状とその 3 次元形状の相関関係を考慮できることを示した．

第三章ではじめに，二章で提案された手法についての課題が存在していることについて触れた．その課題とは，二章で提案された手法のいずれも，非線形性の強い制約付き最適化問題を解く必要があるため，設計目的に合わせた設計解を得るためには，計算コストが大きくかかってしまうという課題である．こうした課題を解決するため，2 つの境界曲線間に形状を形成する場合について，境界曲線が満たすべき制約について述べた上で，その制約に基づいた曲面の設計手法について述べた．この手法では，制約を満たす解の探索コストのみであり，二章で述べた手法と比べ，計算量を大きく削減できる．そして，この手法および二章で述べた形状モデリング手法を組み合わせ，曲面がある点を通過するという形状制約に基づく曲面およびその展開形状の設計支援手法について述べた．この手法により，既存の CAD システムの曲面設計のように，より直観的に可展面を設計できることを示した．

第四章以降では，いくつかの設計目的に合わせた，可展面の設計支援手法について述べた．第四章では，可展面の通過点修正を設計目的とし，第三章における形状制約を変更した場合における形状修正手法について述べた．修正設計を目的としたこの手法では，計算コストを低減させるため，可展開条件に関する特性を活かした曲面修正アルゴリズムを提案した．このアルゴリズムでは，二章や三章で提案した手法と異なり，最適化問題を線形計画問題として表現しているため，計算コストを大きく低減させることができ，対話的な修正が可能となっている．この手法により，三章と同様に，直観的に可展面を形状修正できることを示した．

第五章では設計目的として，意図する形状を直接データとして与える場合について考えた．計測データなどに基づいて形状を復元させる手法は，リバースエンジニアリングとも呼ばれており，粘土などのモック形状を基に設計できるため，設計をより直観的にかつ効率的に行うことができるとして，近年の設計において注目されている．こうした背景を受けて，設計者が与えた点群データから可展面を設計させることを目的として定めた．この手法では，曲面と点群との誤差を定式化するため，KKT 条件を満たしながら探索できるアルゴリズムについて提案した．さらに，複数枚の曲面により近似させるための拡張として，誤差を評価するための可展面の点群分けアルゴリズムについても提案した．この手法により，実物などの計測データを用いた設計ができることを示した．

第六章では設計目的として，性能に関する要求に対して設計を行う場合について考えた．こうした性能設計では，FEM 解析および感度解析に基づく形状最適化の他，データを基にした回帰による設計支援が行われている背景について述べた．一章で述べたように，メッシュでの可展面設計は非常に難しいことから，データを用いた回帰による性能に対する形状設計支援を目的として定めた．この目的を達成する場合には，可展面をいくつかの特徴量によって記述する

事，およびその特徴量から可展面を復元させる手法が必要であることについて述べた上で，それぞれについて提案した．特徴量抽出には，微分幾何学の基本定理およびガウス過程回帰に基づいた抽出方法について述べた．また，特徴量から形状を復元させる手法については，ガウス過程回帰に基づく制約条件を加えた設計問題として記述できることについて述べた．検証実験では，FEM の解析データを用いた回帰やブラジャーカップを対象とした性能設計における適用を行い，その妥当性について確認した．この手法により，可展面の性能に基づいた形状設計を行えることを示した．

本論文では，曲げ加工を行い形状を形成する製品の設計支援のため，可展面に関する設計支援手法について述べてきた．しかし，ものづくりへの応用にあたっては，その課題は多く残されている．1 つは，形状モデルに関する課題である．今回の可展開性は，数学的に厳密に保証されているものとして行っており，曲面の伸び縮みなどは考慮していない．しかし，実際の曲面，特に施工時には材料特性による伸縮は多かれ少なかれ発生する．今後は，こうした伸縮を含めた可展開性を議論していく必要がある．もう 1 つは，設計目的についてである．今回はいずれにおいても 1 つの目的に応じた形状設計手法について提案している．しかし，実際の設計においてはいわゆる多目的であり，その多くの場合は目的が互いに相反しあう関係にある場合がほとんどである．こうした多目的な形状設計への対応を行うためには，三章などの修正方法を含めたパレート解の創出方法や，設計解導出方法などの手法が構築される必要がある．このように，実際のものづくりにおける可展開曲面設計の計算機支援は，まだまだ始まったばかりであり，手法の確立には，多くの課題が残されている．しかし，本研究がその確立に少しでも役立つことを，大いに期待したい．

参考文献

[1] 岩田一明. 基礎教育　コンピュータ設計・製図. 1987.

[2] G. ポール/W. バイツ, ケン・ワラス. 工学設計-体系的アプローチ. 1995.

[3] 日経 CG. 新 CAD の基礎知識. 1996.

[4] 武藤一夫. はじめての CAD/CAM. 2000.

[5] 穂坂衛, 佐田登志夫. 統合化 CAD/CAM システム. 1994.

[6] 竹内芳美. デザインエンジニアリング総覧. 1996.

[7] 淳一, 篠田. リバースエンジニアリングの現状と課題. シミュレーション, Vol. 25, No. 4, pp. 231–236, 2006.

[8] 経済産業省. ものづくり白書, 2020.

[9] 吉川弘之, 冨山哲男. インテリジェント CAD（上・下）-理念とパラダイム-. 1989.

[10] 平田宏一. 加工しやすい設計，加工しにくい設計を理解する！, 2005.

[11] 本間精一. 基礎から学ぶ射出成形の不良対策. 2011.

[12] 岩田一明. 例題演習 CAD/CAM/CAE/CIM. 1991.

[13] 松尾宏平, 藤本修平, 島田道男. 曲率線情報に基づく造船プレス加工支援システムに関する研究. 日本船舶海洋工学会論文集, Vol. 28, pp. 189–201, 2018.

[14] 松尾宏平, 松岡一祥. 船舶の曲り外板製造を支援する新しい 外板展開システムの開発. 日本機械学会論文集（C 編）, Vol. 76, No. 771, pp. 51–56, 2010.

[15] 今岡春樹, 渋谷惇夫, 相坂登. 力学的面展開手法を用いた自動型紙作成法. 日本繊維学会誌, Vol. 45, No. 10, pp. 427–434, 1989.

[16] 外山眞也, 冨田重幸, 吉冨康成, 春成嘉広. 遺伝的アルゴリズムを用いた板金構造物の展開図作成手法. 日本オペレーションズ・リサーチ学会, Vol. 44, No. 3, pp. 230–250, 2001.

[17] 外山眞也, 冨田重幸. 動的計画法を用いた最適板金展開図の自動設計システム. 日本機械学会論文集（C 編）, Vol. 69, No. 679, pp. 256–262, 2003.

[18] Rashad Abdel-Baky and Yasin Ünlütürk. The relatively osculating developable surfaces of a surface along a direction curve. *Communications Faculty Of Science University of Ankara Series A1Mathematics and Statistics*, Vol. 26, No. 03, pp. 511–527, 2020.

[19] Jun Mitani. A design method for 3D origami based on rotational sweep. *Computer-Aided Design and Applications*, Vol. 6, No. 1, pp. 69–79, 2009.

[20] Xiang Zhou, Hai Wang, and Zhong You. Design of three-dimensional origami structures based on a vertex approach. *Proceedings of the royal society A*, 2015.

[21] Martin Kilian, Simon Flöry, Zhonggui Chen, Niloy J. Mitra, Alla Sheffer, and Helmut Pottmann. Curved folding. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 27, No. 3, 2008.

[22] Daniela Rus and Michael T. Tolley. Design, fabrication and control of origami robots. *Nature Reviews Materials*, Vol. 3, pp. 101–112, 2018.

[23] Ankur Mehta, Joseph DelPreto, and Daniela Rus. Integrated Codesign of Printable Robots. *Journal of Mechanisms and Robotics*, Vol. 7, No. 2, 2015.

[24] Pengbo Bo and Wenping Wang. Geodesic-controlled developable surfaces for modeling paper bending. Vol. 26, No. 3, pp. 365–374, 2007.

[25] Hongyan Zhao and Guojin Wang. New method for designing a developable surface utilizing the surface pencil through a given curve. *Progress in Natural Science*, Vol. 18, No. 1, pp. 105–110, 2008.

[26] B. Ravani and T. S. Ku. Bertrand offsets of ruled and developable surfaces. *Computer-Aided Design*, Vol. 23, No. 2, pp. 145–152, 1991.

[27] Günter Aumann. A simple algorithm for designing developable Bézier surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 20, No. 8-9, pp. 601–619, 2003.

[28] L. Fernández-Jambrina. B-spline control nets for developable surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 24, No. 4, pp. 189–199, 2007.

[29] Leonardo Fernandez-Jambrina Naval Francisco Perez-Arribas. Computer-aided design of developable surfaces. *Journal of Computers*, Vol. 13, No. 10, pp. 1171–1176, 2018.

[30] Kenneth Rose, Alla Sheffer, Jamie Wither, Marie-Paule Cani, and Boris Thibert. Developable Surfaces from Arbitrary Sketched Boundaries. In *Eurographics Symposium on Geometry Processing*, pp. 163–172. Michael Garland, 2007.

[31] M Talat Sariaydin. A New Approach to Inextensible Flows of Curves with Ribbon Frame. Vol. 8, No. 12, pp. 1350–1356, 2017.

[32] Justin Solomon, Etienne Vouga, Max Wardetzky, and Eitan Grinspun. Flexible developable surfaces. *Eurographics Symposium on Geometry Processing*, Vol. 31, No. 5, pp. 1567–1576, 2012.

[33] Pengbo Bo, Yujian Zheng, Xiaohong Jia, and Caiming Zhang. Multi-strip smooth developable surfaces from sparse design curves. *CAD Computer Aided Design*, Vol. 114, No. April, pp. 1–12, 2019.

[34] Pengbo Bo, Yujian Zheng, Dianhui Chu, and Caiming Zhang. As-developable-as-possible B-spline surface interpolation to B-spline curves. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 79, No. March, 2020.

[35] Huanxin Cao, Hongchan Zheng, and Gang Hu. Design of developable surface via CSA-based modification of boundary curves. *Journal of Advanced Mechanical Design, Systems and Manufacturing*, Vol. 14, No. 7, 2020.

[36] Helmut Pottmann and Johannes Wallner. Approximation Algorithms for Developable Surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 16, pp. 539–556, 1998.

[37] R. M.C. Bodduluri and B. Ravani. Design of developable surfaces using duality between plane and point geometries. *Computer-Aided Design*, Vol. 25, No. 10, pp. 621–632, 1993.

[38] Caiyun Li and Chungang Zhu. Designing developable c-bezier surface with shape parameters. *Mathematics*, Vol. 8, No. 402, pp. 1–21, 2020.

[39] M. Hoffmann and E. Kovács. Developable Surface Modelling by Neural Network. *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 38, No. 7-9, pp. 849–853, 2003.

[40] Sun Meng and Fiune Eugene. A Technique for Constructing Examples. In *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 16, p. 1320, 1965.

[41] Chih Hsing Chu, Charlie C.L. Wang, and Chi Rung Tsai. Strip Approximation Using Developable Bézier Patches: A Local Optimization Approach. *Computer-Aided Design and Applications*, Vol. 4, No. 6, pp. 807–816, 2007.

[42] Chih Hsing Chu, Charlie C.L. Wang, and Chi Rung Tsai. Computer aided geometric design of strip using developable Bézier patches. *Computers in Industry*, Vol. 59, No. 6, pp. 601–611, 2008.

[43] Kai Tang and Ming Chen. Quasi-developable mesh surface interpolation via mesh deformation. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, Vol. 15, No. 3, pp. 518–528, may 2009.

[44] Ming Chen and Kai Tang. G2 quasi-developable Bezier surface interpolation of two space curves. *CAD Computer Aided Design*, Vol. 45, No. 11, pp. 1365–1377, 2013.

[45] Konstantinos Gavriil. Interactive Freeform Architectural Design with Nearly Developables and Cold Bent Glass. Technical report.

[46] Michael Rabinovich, Tim Hoffmann, and Olga Sorkine-Hornung. Discrete geodesic nets for modeling developable surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 37, No. 2, 2018.

[47] Yang Liu, Helmut Pottmann, Johannes Wallner, Yong Liang Yang, and Wenping Wang. Geometric modeling with conical meshes and developable surfaces. *ACM SIGGRAPH 2006 Papers, SIGGRAPH '06*, pp. 681–689, 2006.

[48] Yong Jin Liu, Kai Tang, Wen Yong Gong, and Tie Ru Wu. Industrial design using interpolatory discrete developable surfaces. *CAD Computer Aided Design*, Vol. 43, No. 9, pp. 1089–1098, 2011.

[49] William H. Frey. Modeling buckled developable surfaces by triangulation. *CAD Computer Aided Design*, Vol. 36, No. 4, pp. 299–313, 2004.

[50] Martin Peternell. Recognition and Reconstruction of Developable Surfaces from Point Clouds. *IEEE Computer Society*, Vol. 1, p. 301, 2004.

[51] Martin Peternell. Developable surface fitting to point clouds. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 21, No. 8, pp. 785–803, 2004.

[52] H. Y. Chen, I. K. Lee, S. Leopoldseder, H. Pottmann, T. Randrup, and J. Wallner. On surface approximation using developable surfaces. *Graphical Models and Image Processing*, Vol. 61, No. 2, pp. 110–124, 1999.

[53] Oded Stein, Eitan Grinspun, and Keenan Crane. Developability of triangle meshes. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 37, No. 4, 2018.

[54] Amélie Fondevilla, Adrien Bousseau, Damien Rohmer, Stefanie Hahmann, Amélie Fondevilla, Adrien Bousseau, Damien Rohmer, Stefanie Hahmann, Marie-paule Cani Mod, Amélie Fondevilla, Adrien Bousseau, Damien Rohmer, Stefanie Hahmann, and Marie-paule Cani. Modeling Symmetric Developable Surfaces from a Single Photo. In *Journées Françaises d'Informatique Graphique*, 2017.

[55] Linbo Luo, Suiping Zhou, Wentong Cai, Malcolm Yoke, Hean Low, Feng Tian, Yongwei Wang, Xian Xiao, and Dan Chen. A computational model of bounded developable surfaces with application to image-based three-dimensional reconstruction. *Computer Animation And Virtual Worlds*, Vol. 24, pp. 457–475, 2008.

[56] 渡辺義浩, 柴山 裕樹, 石川 正俊. 高速書籍電子化に向けた単眼動画像からの三次元変形とその展開テクスチャの復元. 一般社団法人電子情報通信学会, Vol. J96-D, No. 8, pp. 1731–1742, 2013.

[57] Chih Hsing Chu and Jang Ting Chen. Tool path planning for five-axis flank milling with developable surface approximation. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 29, No. 7-8, pp. 707–713, 2006.

[58] Jinglan Cui, Makoto Ohsaki, and Keigo Nakamura. Shape optimization of free-form shells consisting of developable surfaces. *Journal of Structural and Construction Engineering*, Vol. 82, No. 737, pp. 1137–1143, 2017.

[59] Mitchell J.H. Lum, Jacob Rosen, Mika N. Sinanan, and Blake Hannaford. Optimization of a spherical mechanism for a minimally invasive surgical robot: Theoretical and experimental approaches. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, Vol. 53, No. 7, pp. 1440–1445, 2006.

[60] Todd G. Nelson, Trent K. Zimmerman, Spencer P. Magleby, Robert J. Lang, and Larry L. Howell. Developable mechanisms on developable surfaces. *Science Robotics*, Vol. 4, No. 27, feb 2019.

[61] Kenny Seymour, Jacob Sheffield, Spencer P. Magleby, and Larry L. Howell. Cylindrical developable mechanisms for minimally invasive surgical instruments. *Proceedings of the ASME 2019 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, pp. 1–8, 2019.

[62] （社）日本造船学会・数値制御委員会. 造船における NC 技術. 1972.

[63] Julie Steele Chalfant. *Analysis and design of developable surfaces for shipbuilding.* PhD thesis, 1997.

[64] A Sh Gotman, D Tech Sci, and Professor Gotman ASh. Use of Developable Surfaces for Designing Well-Streamlined Ship Shapes. *Oceanic Engineering International*, Vol. 9, No. 2, pp. 81–96, 2005.

[65] 梅原雅顕, 山田光太郎. 曲線と曲面ー 微分幾何学的アプローチ. 2002.

[66] 原島鮮. 力学. 1985.

[67] 和達三樹. 微分・位相幾何. 1996.

[68] Elsgolc LE. *Calculus of Variations.* 1961.

[69] 平井慎一. 機械システム学のための数値計算法. 2008.

[70] 今野浩, 山下浩. 非線形計画法. 1978.

[71] Gaël Guennebaud and Benoît Jacob and others. Eigen v3. http://eigen.tuxfamily.org, 2010.

[72] IBM ILOG Cplex. V12. 1: User's manual for cplex. *International Business Machines Corporation*, Vol. 46, No. 53, p. 157, 2009.

[73] Yutao Wang, Hsi Yung Feng, Félix Étienne Delorme, and Serafettin Engin. An adaptive normal estimation method for scanned point clouds with sharp features. *Computer Aided Design*, Vol. 45, No. 11, pp. 1333–1348, 2013.

[74] Roseline Bénière, Gérard Subsol, Gilles Gesquière, François Le Breton, and William Puech. A comprehensive process of reverse engineering from 3D meshes to CAD models. *Computer Aided Design*, Vol. 45, No. 11, pp. 1382–1393, 2013.

[75] Francesco Buonamici, Rocco Furferi, Lapo Governi, Alessandro Lapini, Monica Carfagni, and Yary Volpe. Reverse engineering modeling methods and tools: a survey Reverse engineering modeling methods and tools: a survey Reverse engineering modeling methods and tools: a survey. *Computer Aided Design & APPLICATIONS*, pp. 1686–4360, 2017.

[76] Yukie Nagai, Yutaka Ohtake, and Hiromasa Suzuki. Tomographic surface reconstruction from point cloud. *Computers and Graphics (Pergamon)*, Vol. 46, pp. 55–63, 2015.

[77] A. Durupt, S. Remy, G. Ducellier, and B. Eynard. From a 3D point cloud to an engineering CAD model: A knowledge-product- based approach for reverse engineering. *Virtual and Physical Prototyping*, Vol. 3, No. 2, pp. 51–59, 2008.

[78] Yu Zhang. Research into the engineering application of reverse engineering technology. *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 139, No. 1-3 SPEC, pp. 472–475, 2003.

[79] Hidefumi Wakamatsu, Eiji Morinaga, Eiji Arai, and Takahiro Kubo. A virtual paper model of a three piece brassiere cup to improve the efficiency of cup design process. In *2017 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pp. 1169–1174, 2017.

[80] 白井恭介, 若松栄史, 森永英二, 久保貴裕, 堤誠一郎. ブラジャーカップの設計支援のための紙模型の三次元形状予測第二報：3 枚接ぎカップへの適用. *Journal of Textile Engineering*, Vol. 67, No. 3, pp. 41–56, 2021.

[81] Gustavo L.O. Halila, Joaquim R.R.A. Martins, and Krzysztof J. Fidkowski. Adjoint-based aerodynamic shape optimization including transition to turbulence effects. *Aerospace Science and Technology*, Vol. 107, p. 106243, 2020.

[82] Dheeraj Agarwal, Trevor T. Robinson, Cecil G. Armstrong, Simão Marques, Ilias Vasilopoulos, and Marcus Meyer. Parametric design velocity computation for CAD-based design optimization using adjoint methods. *Engineering with Computers*, Vol. 34, No. 2, pp. 225–239, 2018.

[83] Hong Seok Park and Xuan Phuong Dang. Structural optimization based on CADCAE integration and metamodeling techniques. *CAD Computer Aided Design*, Vol. 42, No. 10, pp. 889–902, 2010.

[84] Shun Maruyama, Shintaro Yamasaki, Kentaro Yaji, and Kikuo Fujita. Topology optimization incorporating external variables with metamodeling. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 62, No. 5, pp. 2455–2466, 2020.

[85] Eman Ahmed, Alexandre Saint, Abd El Rahman Shabayek, Kseniya Cherenkova, Rig Das, Gleb Gusev, Djamila Aouada, and Bjorn Ottersten. A survey on Deep Learning Advances on Different 3D Data Representations. Vol. 1, No. 1, pp. 1–35, 2018.

[86] Federico Monti, Davide Boscaini, Jonathan Masci, Emanuele Rodolà, Jan Svoboda, and Michael M. Bronstein. Geometric deep learning on graphs and manifolds using mixture model CNNs. *Proceedings - 30th IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR 2017*, Vol. 2017-Janua, pp. 5425–5434, 2017.

[87] Charles R Qi, Hao Su, Kaichun Mo, and Leonidas J Guibas. PointNet: Deep Learning on Point Sets for 3D Classification and Segmentation.

[88] Siamak Ravanbakhsh, Jeff Schneider, and Barnabás Póczos. Deep learning with sets and point clouds. *5th International Conference on Learning Representations, ICLR 2017 - Workshop Track Proceedings*, pp. 1–12, 2019.

[89] Carl Edward Rasmussen and Christopher K. I. Williams. *Gaussian Processes for Machine Learning*. The MIT Press, 2005.

[90] Javier Bonet and Richard D. Wood. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis (2nd edition ed.)*. 2008.

[91] 岡部和代, 黒川隆夫. ブラジャーの官能評価に基づく判定者の類型化：若年女子について. 日本家政学会誌, Vol. 57, No. 11, pp. 743–751, 2006.

研究業績

査読付き投稿論文

1. 若松栄史，吉田皓太郎，森永英二，荒井栄司．ブラジャーカップの設計支援のための紙模型の三次元形状予測．　第一報：2 枚接ぎカップへの適用,　*Journal of Textile Engineering*, Vol. 65, No. 3, pp. 35-46, 2019.

2. Kotaro Yoshida, Hidefumi Wakamatsu, Eiji Morinaga, Eiji Arai, Seichiro Tsutsumi and Takahiro Kubo. Pattern Shape Optimization of a Two-piece brassiere cup to improve its design efficiency. *Transactions of the Institute of Systems, Control and Information Engineers*, Vol.32, No.5, pp.192-202, 2019.

3. 吉田皓太郎，若松栄史，森永英二，久保貴裕．曲げエネルギーを考慮した展開可能な曲面の設計支援．日本機械学会論文集，Vol. 86, No. 891, p. 20-00169, 2020.

4. Kotaro Yoshida, Hidefumi Wakamatsu, Eiji Morinaga, Seichiro Tsutsumi and Takahiro Kubo. Design of developable surfaces using the given data points. *Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing*, Vol. 15, No. 5, p. JAMDSM0056, 2021.

5. 吉田皓太郎，若松栄史，岩田剛治，久保貴裕．ガウス過程回帰を用いたブラジャーカップの形状設計支援．日本機械学会論文集，Vol. 87, No. 903, p.21-00201．

6. 吉田皓太郎，若松栄史，岩田剛治，久保貴裕．可展面の局所修正設計に関する研究．システム制御情報学会論文集（投稿中）．

査読付き国際会議発表

1. Kotaro Yoshida, Hidefumi Wakamatsu, Eiji Morinaga, Eiji Arai, Seichiro Tsutsumi and Takahiro Kubo. Design Support of Paper Patterns for Two Piece Brassiere Cup, *Proceeding of the International Symposium on Flexible Automation, ISFA2018*, Vol. 2018-Japan pp.444-450, 2018

2. Kotaro Yoshida, Hidefumi Wakamatsu, Eiji Morinaga, and Takahiro Kubo. A method to design the pattern shape satisfying design parameters of a brassiere cup, *Proceeding of IEEE/SICE International Symposium on System Integration, SII2020*, Vol. 2020-Hawaii pp.700-705, 2020

3. Kotaro Yoshida, Hidefumi Wakamatsu, Eiji Morinaga, and Takahiro Kubo. Design of a Two-Piece Brassiere Cup From Its Data Points Toward Its Automation, *Proceeding of the International Symposium on Flexible Automation, ISFA2020*, Vol. 2020-Online, p.V001T07A001, 2020

その他国内会議発表

1. 吉田皓太郎，若松栄史，森永英二，荒井栄司，久保貴裕．二枚接ぎブラジャーカップの型紙設計支援，第 61 回システム制御情報学会研究発表講演会講演論文集，Paper No. 111-5.

2. 吉田皓太郎，若松栄史，森永英二，荒井栄司，久保貴裕．ブラジャーカップの型紙設計支援，日本機械学会第 28 回設計工学・システム部門講演会講演論文集，Paper No. 2403.

3. 吉田皓太郎，若松栄史，森永英二，久保貴裕．微分幾何学に基づく展開可能な曲面の設計支援，日本機械学会第 29 回設計工学・システム部門講演会講演論文集，Paper No. 2309.

4. 吉田皓太郎，若松栄史，森永英二，久保貴裕．外力による微小変形の生じたブラジャーカップの変形形状簡易予測手法，日本繊維機械学会第 73 回年次大会，pp.76-77.

5. 吉田皓太郎，若松栄史，岩田剛治，久保貴裕．ガウス過程回帰を用いたブラジャーカップの機能設計支援，日本機械学会第 30 回設計工学・システム部門講演会講演論文集，Paper No. 3202.

6. 吉田皓太郎，若松栄史，岩田剛治．　可展面設計における形状の修正法に関する研究，第 65 回システム制御情報学会研究発表講演会講演論文集，Paper No. 325-328.

7. 百崎敬晴，吉田皓太郎，若松栄史，岩田剛治．詳細設計段階におけるブラジャーカップ形状の最適化に関する研究，日本繊維機械学会第 74 回年次大会，pp.27-28.

8. 川村俊貴，峯田龍志，吉田皓太郎，岩田剛治，若松栄史．能動学習を用いた機械学習による解析近似器の精度向上に関する研究，日本機械学会第 31 回設計工学・システム部門講演会講演論文集，Paper No. 3209.

謝辞

本研究は，大阪大学大学院工学研究科　若松栄史准教授のご指導およびご鞭撻の下，遂行したものである．ここに，心より深く感謝の意を表します．若松栄史准教授には，研究議論の場において，丁寧に粘り強く討論して頂き，論文執筆や学会発表など，様々な場面で多大なご助力を頂きました．ご指導いただきまして，本当にありがとうございました．

立命館大学理工学部　平井慎一教授，大阪大学大学院工学研究科　倉敷哲生教授，福本信次教授，および岩田剛治准教授には，副査を引き受けて頂き，本論文への貴重なご意見，ご指導を頂きました．ここに厚く御礼申し上げます．

大阪大学大学院工学研究科　荒井栄司教授（現　同大学院　名誉教授）には，懇切丁寧なご指導を頂くとともに，研究者としての姿勢を学べばせて頂きました．また，本論文に関するご相談をさせて頂いた際も，非常に貴重なご意見を頂きました．ここに深く感謝の意を表します．

大阪大学大学院工学研究科　森永英二助教（現　大阪府立大学大学院　人間社会システム科学研究科　准教授）には，研究を遂行する上での様々なご助言を頂き，研究生活においても強くご支援頂きました．ここに厚くお礼申し上げます．

大阪大学　接合科学研究所の　堤誠一郎准教授には，検証実験などの際に測定にご協力頂きました．ここに厚く御礼申し上げます．

ワコール人間科学研究所の岸本泰蔵氏，久保貴裕氏，加藤誠氏には，研究を進める上で，産業界における視点から，様々なご意見，ご助言を頂きました．ここに厚く御礼申し上げます．

また，笠泰徳氏（現　日本航空株式会社），白井恭介氏（現　秋田大学），後藤祐輔氏（現　川崎重工業株式会社），修士 1 年生の百崎敬晴氏には，ブラジャー設計支援の研究グループとして，プログラムや考え方に関するご助言を頂きました．ここに厚く御礼申し上げます．

また，日々の研究生活を送る上で，卒業された研究室の御先輩，同輩，後輩諸氏を始めとして，研究生活を含め多大なご援助を頂きました．心より感謝いたします．

最後に，9 年間におよぶ大学生活を見守り，時には支えてくれた家族や友人，愛する人に最大限の敬意と謝意と愛情を表し，謝辞といたします．

付録

Appendix A　球曲面の非展開性について

半径 r の球曲面における任意の空間座標 $\boldsymbol{x}$ は，助変数 θ, ϕ を用いて式 (A-1) のように表される．

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \end{pmatrix} \tag{A-1}$$

この表記を用いて第一基本量 E, F, G および第二基本量 L, M, N は，次のように表される．

$$E = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} = r^2 \tag{A-2}$$

$$F = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} = 0 \tag{A-3}$$

$$G = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \phi} = r^2 \sin^2\theta \tag{A-4}$$

$$L = \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial^2 \theta} \cdot \boldsymbol{n} = -r \tag{A-5}$$

$$M = \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial \theta \partial \phi} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \tag{A-6}$$

$$N = \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial^2 \phi} \cdot \boldsymbol{n} = -r\sin^2\theta \tag{A-7}$$

ただし，$\boldsymbol{n}$ は

$$\boldsymbol{n} = \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \phi}}{\left| \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \phi} \right|} \tag{A-8}$$

と計算できる．これを用いてガウス曲率 K を計算すれば，

$$K = \frac{1}{r^2} \tag{A-9}$$

となる．以上より r が定数であることから球の曲面は，どのようなパラメータを用いて表現しても展開することができないことが，数学的に示された．

Appendix B　B-spline・ベジエ曲線と曲面

ベジエ曲線・曲面について

ベジエ曲線は3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ における n 個の制御点 $\boldsymbol{C}_i \in \mathbb{R}$ からなる制御点の集合 $\boldsymbol{C}_{\mathrm{set}} = (\boldsymbol{C}_0, \boldsymbol{C}_1, \cdots, \boldsymbol{C}_{n-1})$ に対し $n-1$ 次曲線によって表現する手法である．フランスの自動車メーカ，シトロエン社のド・カステリョとルノー社のピエール・ベジェにより独立に考案された表現方法であり，CAD だけでなく Inkscape などのベクターグラフィクスソフトなどにも採用されている手法である．曲線のパラメータには $[0,1]$ を定義域に持つパラメータ $t \in [0,1]$ を用いて表現される曲線 $\boldsymbol{x}_{bezier}$ であり，以下のように表される．

$$\boldsymbol{x}_{bezier} = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}\boldsymbol{C}_i \tag{B-1}$$

ただし，$B_{i,n}$ はバーンスタインの基底関数と呼ばれ，$(t+(1-t))^n$ を二項展開した際に得られる一般項によって定義される．

$$B_{i,n} = {}_n\mathrm{C}_i t^i (1-t)^{n-i} \tag{B-2}$$

ただし，${}_n\mathrm{C}_i$ は二項係数を表している．曲線の特徴として，両端の制御点 $\boldsymbol{C}_0, \boldsymbol{C}_{n-1}$ は通るが，それ以外の制御点は通らない．始端および終端の接線ベクトルは $\boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{C}_0$ および $\boldsymbol{C}_{n-1} - \boldsymbol{C}_n$ の方向に一致するといった特徴がある．

ベジエ曲面は，ベジエ曲線の表現方法を拡張したもので，パッチと呼ばれる部分的な曲面の連続で曲面形状を表現する手法である．パラメータ u の制御点 $\boldsymbol{C}_i$ を別の制御点の集合 $\boldsymbol{C}_{\mathrm{set}}$ および定義域 $[0,1]$ のパラメータ v の関数として表現すれば，ベジエパッチは，

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} B_{i,n}(u)B_{j,m}(v)\boldsymbol{C}_{\mathrm{set},i,j} \tag{B-3}$$

と定義されている．

ベジエ曲線・曲面の特性として，以下の特性を持っている．

- $\boldsymbol{C}_{\mathrm{set}}$ の凸包内に存在する．
- アフィン変換（回転移動・平行移動・拡大・縮小・ずれ変換）に対して不変である．
- 境界はベジエ曲線になる．
- 疑似局所変形性（制御点を移動させると，曲線全体にわたって曲面形状は変化するが，その制御点付近の面が一番大きく変化する．
- ベジエ曲線・曲面の偏導関数も，ベジエ曲線・曲面の形である．

B-spline 曲線・曲面について

ベジエ曲線では，制御点の個数に対して常に $n-1$ 次式の多項式で表される．しかし，表現性を確保するために制御点を増やすと，その分曲線を表現する多項式の次数が増加するという欠点がある．そこで，ベジエ曲線を複数接続して曲線を区分的な多項式によって表現しようとする試みによって提案されたのが，B-spline 曲線である．適当な任意の区間 $[t_k, t_{k+1}]$ において変数変換 $\tau = (t-t_k)/(t_{k+1}-t_k), t \in [t_k, t_{k+1}]$ を用いると，$\tau \in [0,1]$ であることから，τ をパラメータとする n 次ベジエ曲線が定義できる．

$$\boldsymbol{x}_{bezier,n} = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(\tau)\boldsymbol{C}_{\mathrm{set},i} \tag{B-4}$$

制御点は始端と終端を通るため，$k \in [0,n]$ として式 (B-4) で定義された曲線の始端と終端を結ぶと，区分的に表現された n 次 B-spline 曲線が定義される．B-spline 曲線の基底関数を新たに $N_{k,p}(t)$ と表すと，基底関数は区分的な多項式で

$$N_{k,0}(t) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{if } t \in [t_k, t_{k+1}) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \tag{B-5}$$

$$N_{k,p}(t) \triangleq \frac{t-t_k}{t_{k+p}-t_k}N_{k,p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1}-t}{t_{i+p+1}-t_{i+1}}N_{k+1,p-1}(t) \tag{B-6}$$

と表される．この点列 $\boldsymbol{t} = [t_0, t_1, \cdots, t_n]$ はノットベクトルと呼ばれ，$t_k, k \in [0,n]$ は公差 Δt の等差数列である．また，ノットベクトルの間隔を非一様にしたものを，NURBS 曲線という．

B-spline 曲面は B-spline 曲線を拡張したもので，

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_{i,k}(u)N_{j,k}(v)\boldsymbol{C}_{\mathrm{set},i,j} \tag{B-7}$$

として表される．ここで，$\boldsymbol{C}_{\mathrm{set},i,j}$ は制御点で，$N_{i,k}(u)$ は基底関数で，DeDoor アルゴリズムにより求められる．B-spline 曲面に関する特徴は，以下にまとめられる．

- 凸閉包性（曲面の凸閉包は，$\boldsymbol{C}_{\mathrm{set}}$ からなる凸包になる）
- 局所性（ベジエ曲線と異なり，制御点の移動は曲線の全体形状に影響を及ぼさない）
- 連続性（多重度を k とすると，$N_{i,p}(t)$ は C^{p-k} 連続である．

ここで，ノットベクトルに同じ値を挿入することを，ノットの多重化といい，多重度は同じ値を挿入した回数として定義している．

Appendix C　可展面における弧長間の関係について

2.3 節における手法では，可展面における弧長間の関係を逆像となるように，という意図を持った目的関数を設定している．この手法における弧長間の関係 $\hat{u}(s), \hat{s}(u)$ は，ある関数として陽に表されている訳ではなく，ある条件 $\psi^*(s,u)=0$ を満たす関数として定義されている．

$$\hat{s}(u) = \{s^* \mid \psi(s^*, u) = 0\} \tag{C-1}$$

$$\hat{u}(s) = \{u^* \mid \psi(s, u^*) = 0\} \tag{C-2}$$

この条件式 $\psi(s,u)$ の求め方について述べる．Fig. C-1 のように，vw 平面上に展開した可展面上の 2 つの境界曲線において，弧長 s,u における平面座標 $(v_L(s)\ \ w_L(s))^\top$, $(v_U(u)\ \ w_U(u))^\top$ を用いて，θ^* を定義する．

$$\theta^*(s,u) = \tan^{-1}\left(\frac{w_U - w_L}{v_U - v_L}\right) \tag{C-3}$$

この θ^* は，適当に s,u を対応させた場合における，母線と v 軸のなす角度である．ある s に対して，可展面における母線に一致するときの弧長を u^* とするとき，次式で表される ψ^* は，$\psi^*(s,u)=0$ を満たす．

$$\psi^*(s,u) = \theta^*(s,u) - \alpha + \theta_0 + \int_0^s \omega_\eta ds \tag{C-4}$$

つまり，ある s に対応する u^* は，$\psi^*(s,u^*)=0$ を解くことで得られる．このようにして得られた対応を用いて，目的関数の計算や制約条件の計算を行っている．

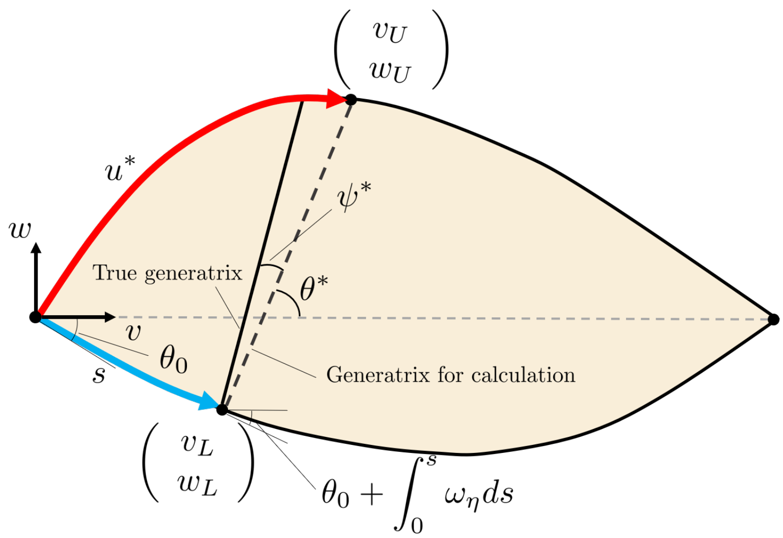


Fig. C-1　The description of calculating ψ^*