The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	微分信号抽出手法によるシステム同定と制御系構成に関する研究
Author(s)	立花, 康夫
Citation	大阪大学, 1977, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/883
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

微分信号抽出手法によるシステム同定と制御系構成に関する研究

1977年1月

立　花　康　夫

序　　論

近年各種の工業プラントは高度化複雑化し高品位の製品を生み出すことが可能となってきた。これに伴いプラント各部の制御性能の向上が要求され制御系にも大きな発展がみられる。そして一方では電子計算機の目覚ましい発達により工業プラントの制御にもそれが適用され，数々の成果をあげつつある。計算機を制御に用いること（計算機制御）により従来のアナログ・ワイアド・ロジック方式では不可能であった複雑な計算を実施することも可能となり，多くの制御理論の結果が実用化されつつあり，制御の範囲がより広められている。

一般に制御系を構成するには次の段階を踏まねばならない。すなわち

〔1〕　対象とするシステムの特性をより適確に把握すること（同定）。

〔2〕　その対象システムを制御するのにより高性能で，しかも安価な実現の可能性のある制御システムを見出すこと（制御系の構成）。

である。通常はこの二つの段階は切り離されているが，より高度な制御システムでは，これらが同時に実施される場合もあり，計算機の有効な利用が期待されるわけである。ところが電子計算機を用いる場合には信号を必然的にサンプル値（ディジタル信号）として扱う必要があり計算機の基礎的な技法としてディジタル信号処理技術の高揚が計られなければならなくなって来ている。

本論文は著者が三菱電機株式会社において計算機制御に関する研究を進める過程で，ディジタル信号処理の技法としてのディジタル・フィルタで特に微分信号を抽出するようなフィルタに着目し，その性質の検討を行ない，いくつかの設計法を考案した。そしてこのフィルタをシステムの同定と発電用ボイラの起動時での昇温昇圧制御系に適用した結果をまとめたもので以下の5つの章より成りたっている。

第1章　線形システムおよびディジタル信号処理の基礎

第2章　微分信号を抽出する手法について

第3章　ディジタル微分フィルタを用いた同定

第4章　実プラントの同定

第5章　微分フィルタのボイラ昇温昇圧制御系への適用

第1章はこの論文の論述を円滑にするための基礎事項として，線形システム理論の必要事項，同定に関する一般事項およびディジタル信号処理のうちで特にディジタル・フィルタに関する必要事項を簡単にまとめた。

第2章ではこの論文の骨子であるディジタル微分フィルタの設計法とその性質について論ずる。一般に信号の微分を抽出することは困難視され，できれば避けて通ろうとする傾向がある。この大きな理由として微分フィルタの周波数特性の形から，入力信号の高調波成分が強調される点にあろう。すなわち制御系で扱う信号は多くの場合に低域に限られているにもかかわらず，雑音のスペクトルはそれに比べると相当に広範囲に分布しており，微分フィルタを通すことによりまったく意味のない信号を生成してしまうことが多かったことによると考えられる。そこで入力信号のうち有用な信号のみを通す低域フィルタと微分フィルタを組み合わせれば，本当に必要とする微分信号を抽出することが可能となるであろう。ところが，このようなフィルタをアナログ系で構成しようとすると，超低域成分の信号処理の必要から装置は著しく高価になってしまうばかりでなく，ドリフト現象等のために実現が困難なことが多い。一方このような超低域の信号処理にはディジタル・フィルタがたいへん適している。この論文では信号の低域の成分の微分を抽出するようなディジタル微分フィルタとして特に有限インパルス応答形フィルタ（ＦＩＲ形と略す。Finite Impulse Response）に着目し，そのいくつかの設計法を提案する。はじめに最小自乗法の意味でもっとも狭帯域のＦＩＲ形ディジタル微分フィルタの設計を与える。次に1階の狭帯域のＦＩＲ形ディジタル微分フィルタと同じ次数のＦＩＲ形の狭帯域の低域フィルタを考え，それらの周波数特性に対して，低域フィルタの零点の近傍を除けば，両者の比がほぼ理想的な微分演算子 $i\omega$ となるように選定することができることを示す。そして前者を κ 段，後者を $M-\kappa$ 段カスケード接続することにより，同じ低域成分の $\kappa=0,1,2,\cdots,M$ 階の微分が抽出できるようなＦＩＲ形の微分フィルタの構成法と設計例を与える。このフィルタをカスケード・ディジタル微分フィルタと名付け第2章以下に述べた各種の制御問題へ適用する。このフィルタを構成するのに必要であった1階の狭帯域のディジタル微分フィルタとしては最初の最小自乗法によるものと，Tschebyscheff の意味で最適なZolotarev の多項式を用いるものを考え，両者の特性の比較を行った。ただし容易に狭帯域の微分フィルタが得られる点から第2章以下では総て最小自乗法により設計したものを使用してある。

第3章は著者の提案した同定法についてまとめた。すなわち第2章で得られるカスケード・ディジタル微分フィルタを用いてシステムの入出力の観測値よりその伝達関数を推定する手法を提案する。線形システムではシステムの入出力信号は伝達関数で定まる線形の微分方程式を満足している。もし仮に入出力信号の必要な階数までの微分信号が得られるならば，それらはシステムを表わす微分方程式で定まる一定の線形結合で規定されることになるから，これを用いてこれらの係数，従って伝達関数が推定できるであろう。しかし多くの場合，実際に入出力信号の微分信号を直接計測することは不可能なので，直接このようにして伝達関数を推定することはできない。ところで入出力成分の一部の成分でも同じ帯域のものであれば，元の信号と同じ微分方程式を満たすこと，又各微分値の時間軸を同じ時間だけずらせてもやはり同じ微分方程式を満足すること

を考えると，カスケード・ディジタル微分フィルタから得られる信号もやはり元の微分方程式を満たしていることがわかる。そこでこれを利用して伝達関数を推定する手法を与える。そしてこの手法の妥当性を示すために，あらかじめ知られている1入力1出力の2次系と，2入力1出力の1次系に対する伝達関数の推定をシミュレーションにより実施した結果を示してある。またこの手法でのパラメータ推定は式誤差の自乗和を最小にするように行っているので，推定値に定常偏差が発生するが，フィルタの特性を選べば，この偏差は十分に小さくできることを中心に，推定値の統計的性質を論ずる。そして特に1入力1出力系の場合に終結式を用いる構造の決定法についても触れている。また無定位形システムと無駄時間を含むシステムに対する配慮についても論ずる。

第4章では第3章で提案する同定手法の有効性を確かめるために実プラントの同定に適用した結果を示す。はじめに事業用の火力発電所におけるタービン発電機システムの特性の推定結果を与える。次に製紙工業における最終工程である抄紙機の坪量系および水分系の同定例を与える。このシステムの特徴としては非常に大きな無駄時間が含まれることで，この処理に工夫を施してある。最後に鉄鋼圧延プラントにおけるレバーシング・コールド・ミルと呼ばれる一段形の圧延機の特性（圧下影響係数）を推定した例を与える。この例では特に板の厚さを測定するためのX線厚み計と圧延面が離れているための走行無駄時間が，X線厚み計の遅れ時間と同程度となるので，その補償に微分フィルタを用いた点が特徴である。

第5章はディジタル微分フィルタを火力発電用ボイラの起動時での昇温昇圧制御系の構成に適用した例について示す。はじめにドラム式ボイラの昇温昇圧制御系の構成について述べ，シミュレーションにより制御性能を確かめた例を示す。次に超臨界圧ボイラの昇温制御系の構成を考えまずシミュレーションにより制御系が妥当であることを示す。次にテスト用に設置された実ボイラを用いた実験により，その有効性を示すことにする。このボイラには制御用計算機が設置されＤＤＣ（Direct Digital Control）によりボイラ制御系が構成（アナログ・ワイアド・ロジックとの2重計装）されており，その一部に昇温制御系が組み込まれている。何回かの起動実験での記録により，この制御系が十分に実用的であることを示してある。

一般的常識に反し，注意深くさえ用いると，微分フィルタは大変に便利であること，さらに広い制御の問題にも適用できるであろうことを強調して結論とした。

微分信号抽出手法によるシステム同定と制御系構成に関する研究

目　　次

第1章　線形システムおよびディジタル信号処理の基礎 …… 1

1.1　序 …… 1

1.2　線形システム理論 …… 1

1.2.1　動的システム …… 1

1.2.2　定常線形動的システムの表現（アナログ系） …… 2

1.2.3　定常線形動的システムの表現（ディジタル系） …… 4

1.2.4　可制御可観測性 …… 5

1.2.5　線形システムの安定性 …… 7

1.3　同定問題 …… 8

1.3.1　同　定 …… 8

1.3.2　アナログ系よりディジタル系への変換 …… 9

1.3.3　可同定性 …… 11

1.3.4　雑音を考慮したシステム …… 12

1.3.5　試験信号法および相関法 …… 13

1.3.6　インパルス応答の推定法 …… 14

1.3.7　パルス伝達関数の推定法 …… 16

1.3.8　構造決定の問題 …… 17

1.4　ディジタル信号の処理 …… 17

1.4.1　確定信号 …… 18

1.4.2　不規則信号 …… 20

1.4.3　ディジタル信号 …… 21

1.4.4　アナログ・フィルタ …… 22

1.4.5　ディジタル・フィルタ …… 23

1.4.6　ディジタル・フィルタの設計 …… 23

1.4.7　ＦＩＲ形ディジタル・フィルタ …… 24

第2章　微分信号を抽出する手法について …… 27

2.1　序 …… 27

2.2　微分信号 …… 27

2.3　最小自乗法によるディジタル微分フィルタ …… 28

2.3.1 時間領域での性質 …… 36
2.3.2 応答波形 …… 37
2.3.3 種々の特性のフィルタ …… 37
2.4 カスケード・ディジタル微分フィルタ …… 41
2.4.1 周波数領域での設計 …… 41
2.4.2 基礎となるフィルタおよび設計例 …… 43
2.4.3 応答波形 …… 51
2.5 Zolotarev の多項式によるディジタル微分フィルタ …… 54
2.5.1 Zolotarev の多項式 …… 54
2.5.2 Zolotarev の多項式を用いた微分フィルタ …… 56
2.6 ディジタル微分フィルタの比較 …… 61
2.7 ハイブリッド形微分フィルタ …… 63
2.7.1 アナログＦＩＲ微分フィルタ …… 63
2.7.2 サンプリング …… 64
2.7.3 ハイブリッド・フィルタとしての構成 …… 67
2.7.4 応答性評価のためのシミュレーション …… 68
2.8 まとめ …… 71

第3章 ディジタル微分フィルタを用いた同定 …… 72
3.1 序 …… 72
3.2 伝達関数への変換で生ずる誤差 …… 72
3.3 ディジタル微分フィルタによる伝達関数の推定 …… 74
3.3.1 手法の説明 …… 75
3.3.2 具体的な処置 …… 77
3.3.3 簡単な例－1 …… 78
3.3.4 簡単な例－2 …… 80
3.4 推定値の統計的な性質 …… 84
3.5 終結式による構造の決定 …… 87
3.6 無定位形システムに対する配慮 …… 90
3.7 無駄時間を含むシステムに対する配慮 …… 90
3.8 前置フィルタについて …… 91
3.9 遂次推定のアルゴリズムについて …… 93
3.10 プログラム・システムについて …… 95
3.11 まとめ …… 95

第4章　実プラントの同定 …… 96
4.1　序 …… 96
4.2　火力発電所での例 …… 96
4.2.1　対象システム …… 96
4.2.2　計測と同定の結果 …… 99
4.3　抄紙プラントでの例 …… 103
4.3.1　対象システム …… 103
4.3.2　坪量系の同定 …… 103
4.3.3　水分系の同定 …… 105
4.4　圧延プラントでの例 …… 114
4.4.1　対象システム …… 114
4.4.2　レバーシング・コールド・ミルの数学モデル …… 115
4.4.3　観測システムの補償 …… 117
4.4.4　A，Bの推定 …… 118
4.4.5　硬さの変化 …… 118
4.4.6　同定の結果 …… 119
4.5　まとめ …… 126

第5章　微分フィルタのボイラ昇温昇圧制御系への適用 …… 127
5.1　序 …… 127
5.2　ドラム式ボイラの昇温昇圧制御 …… 127
5.2.1　ドラム式ボイラの構造と起動 …… 128
5.2.2　ドラム式ボイラの動特性 …… 130
5.2.3　昇温昇圧制御系 …… 131
5.2.4　昇温昇圧制御系のテスト …… 132
5.3　超臨界圧ボイラの昇温制御 …… 134
5.3.1　超臨界圧ボイラの構造と起動 …… 134
5.3.2　超臨界圧ボイラの動特性 …… 138
5.3.3　ボイラ制御系 …… 140
5.3.4　水冷壁出口流体温度昇温制御系 …… 144
5.3.5　シミュレーションによるテスト …… 146
5.4　テスト用ボイラによるテスト …… 147
5.4.1　テスト用コンバインド・サーキュレーション・ボイラ …… 147
5.4.2　計装とDDCシステム …… 147

5.4.3 昇温制御系のテスト結果 …… 148
5.5 まとめ …… 148

結 論 …… 151
謝 辞 …… 152
付 録 …… 153
参考文献 …… 154
著者発表関連論文一覧表 …… 160

第1章　線形システムおよびディジタル信号処理の基礎

1.1　序

本論文は計算機制御を念頭においてディジタル信号の処理のうち，特にディジタル微分フィルタについて考察を行ない，その結果を定常な線形システムの同定問題と，火力発電用ボイラの起動時での昇温制御系へ適用したものをまとめたものである。第1章ではこれらの論述を円滑にするために線形システム理論，同定問題およびディジタル信号処理技法について簡単に解説する。

1.2　線形システム理論

この節ではシステムを取りあつかってゆくうえで必要となる重要な概念と，既に得られている主要結果について，主として定常な線形システムに限定して概説する。特に本論文では考えている時間軸が実数であるものを**アナログ系**，離散的であるものを**ディジタル系**と名付けていて，両者の対比のもとで議論が展開されることが多いので，この節の中でも，これらを対比しながら説明する。はじめに線形に限らない一般的な動的システムに関する主要概念を説明した後に，定常な線形システムに限ってシステムの表現法，可制御可観測性および安定性等に関連する諸概念と主要結果について説明する。

1.2.1　動的システム

システムにはいくつかの外部に表われる変数があり，これを**外部変数**という。この中で独立なものを**入力**とよび，従属変数となるものを**出力**とよぶ。システムの機能は，これらの入力と出力の関係により表わされる。[2]しかしより高度な制御目的のためにはシステムをさらに分割し，いくつかの構成要素に分けて，それぞれの動作も記述する必要のある場合もある。前者は**外部記述**後者は**内部記述**といわれる。これらのシステムの数学的記述をシステムの**数学モデル**という。

入力と出力が一つの場合を**1変数系**，入力と出力が複数個の場合を**多変数系**とよぶ。システムが r 個の入力 $u_1, u_2, \cdots u_r$ と p 個の出力 y_1, y_2, y_p をもつとして，これらを列ベクトルであらわ

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_r)^T \qquad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_p)^T \tag{1.2.1}$$

す。右肩の"T"は転置をあらわす。また時刻 t での値を $\mathbf{u}(t)$，$\mathbf{y}(t)$ 等と記す。$\mathbf{y}(t)$ が t と $\mathbf{u}(t)$ のみで定まるものを**静的システム**とよび，そうでないものを**動的システム**とよぶ。

動的システムでは，出力 $\mathbf{y}(t)$ は n 次のベクトル

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \tag{1.2.2}$$

を用いてはじめて

$$\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\eta}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \tag{1.2.3}$$

と表わされ得る。$\mathbf{x}$のことをシステムの状態変数，$\boldsymbol{\eta}(\cdot)$ を出力関数とよぶ。変数$\mathbf{x}$の中でnを最小に選んだ場合に，nのことをシステムの次数とよぶ。

アナログ系では，状態変数が微分方程式の初期値問題

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)$$
$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_I \qquad (1.2.4)$$

の解として得られる。$\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)$ は$\mathbf{x},\mathbf{u},t$ の適当な関数である。同じようにディジタル系ではサンプル周期をTs として，時刻 $k\cdot Ts$ での値を$\mathbf{x}_k,\mathbf{u}_k$ 等とあらわすと，$\mathbf{x}_k$ は

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k,\mathbf{u}_k)$$
$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_I \qquad (1.2.5)$$

のような差分方程式の初期値問題として得られる。（1.2.4）と（1.2.3）または，（1.2.5）と（1.2.3）をまとめてシステムの状態方程式という。

1.2.2 定常線形動的システムの表現（アナログ系）

はじめに時間軸が実数の場合（アナログ系または連続系と呼ぶ）に定常線形なシステム，すなわちシステムの状態方程式が

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{u} \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_I \qquad (1.2.6)$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{D}\cdot\mathbf{u} \qquad (1.2.7)$$

で表わされる場合を考察する。$\mathbf{A}$は$n\times n$ 定数行列，$\mathbf{B}$は$n\times r$ 定数行列，$\mathbf{C}$は$p\times n$ 定数行列そして$\mathbf{D}$は$p\times r$ 定数行列である。$\mathbf{x}_I$ は初期状態とする。

このような場合には遷移行列$\Phi(t)$ を考えると便利である。すなわち$\Phi(t)$ は

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \mathbf{A}\cdot\Phi(t) \qquad \Phi(0) = \mathbf{I} \qquad (1.2.8)$$

のような微分方程式の解である。$\mathbf{I}$は単位行列である。この初期値問題は[1]

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}\cdot t} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\mathbf{A}\cdot t)^k \qquad (1.2.9)$$

で与えられる一意解を持っている。この$\Phi(t)$ を用いると（1.2.6）の一意解は

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\cdot\left(\mathbf{x}_I + \int_0^t \Phi(-\tau)\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}(\tau)\,d\tau\right) \qquad (1.2.10)$$

で与えられる。

すなわちn次の線形動的システムは4つの行列$\Sigma=(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})$ により特徴付けられることがわかる。

定常な系の場合にはさらに種々の積分変換によりより多角的にシステムの表現をおこなうことができ，それによりさらに詳細に性質を調べることが可能である。

入力の変化，従って状態変数や出力を時間区間（0，∞）でのみあつかえば良い場合で特に初期値の近傍の値すなわち過渡的な解析を重視するような場合にはLaplace 変換が有効である。このときには入力として許される関数族は非常に大きくなる。Laplace 変換演算子を $\mathcal{L}\{\cdot\}$ 逆変換演算子を $\mathcal{L}^{-1}\{\cdot\}$ と表わすと（1.2.6）又は（1.2.10）より

$$\mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\} = (S\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathcal{L}\{\mathbf{u}(t)\}+(S\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{x}_I \qquad (1.2.11)$$

となる。特に $\mathbf{x}_I = 0$（零ベクトル）の場合には（1.2.7）と（1.2.11）より

$$\mathcal{L}\{\mathbf{y}(t)\} = \{\mathbf{C}\cdot(S\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{D}\}\cdot\mathcal{L}\{\mathbf{u}(t)\} \qquad (1.2.12)$$

と表わされる。そして $\mathbf{x}_I = 0$ の場合の入出力のLaplace 変換の比を伝達関数

$$\mathbf{R}(S) = \mathbf{C}\cdot(S\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{D} \qquad (1.2.13)$$

という。伝達関数はシステムの持つ外部からみた総ての特徴を表わしているので，システムの一つの記述法である。（1.2.11）と（1.2.12）を比較すると伝達関数は十分時間が経過し初期条件の影響が無くなったときの入出力の関係を示している。

定常な状態ではFourier 変換も有効な手段である。（−∞，∞）上での信号を考えて，エネルギー有界すなわち二乗可積分ならFourier 変換が可能である。今Fourier 変換を $\mathcal{F}\{\cdot\}$，Fourier 逆変換を $\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$ とする。（1.2.6）および（1.2.7）から，

$$\mathcal{F}\{\mathbf{x}(t)\} = (i\omega\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathcal{F}\{\mathbf{u}(t)\} \qquad (1.2.14)$$

および

$$\mathcal{F}\{\mathbf{y}(t)\} = \mathbf{R}(i\omega)\cdot\mathcal{F}\{\mathbf{u}(t)\} \qquad (1.2.15)$$

を得る。すなわち入出力のFourier 変換の比は $\mathbf{R}(i\omega)$ でこれは伝達関数において $S = i\omega$ と置いたものに相当する。これをシステムの周波数特性という。周波数特性もシステムの特徴を表わしている。

システムの記述法としては周波数特性と関連してインパルス応答による表現法がある。

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{R}(i\omega)\} \qquad (1.2.16)$$

をインパルス応答という。[3]物理的に存在する $\mathbf{R}(i\omega)$ に対しては必ず

$$\boldsymbol{\rho}(t) = 0 \qquad (t<0) \qquad (1.2.17)$$

となることが証明されている。[9]

このインパルス応答を用いると（1.2.15）の関係式よりわかるように $\mathbf{y}(t)$ は $\boldsymbol{\rho}(t)$ と $\mathbf{u}(t)$ のコンボリューションにより表わされる。[21] すなわち

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^\infty \boldsymbol{\rho}(\tau)\cdot\mathbf{u}(t-\tau)\,d\tau \qquad (1.2.18)$$

となる。$\boldsymbol{\rho}(t)$ もまたシステムの特徴を表わしている。

以上をまとめるとシステムの特徴は$\Sigma=(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})$ ，$\mathbf{R}(S)$ ，$\mathbf{R}(i\omega)$,$\boldsymbol{\rho}(t)$ のいずれによっても表現され得る。

1.2.3 定常線形動的システムの表現（ディジタル系）

次に時間軸が離散的な場合について定常線形なシステム（ディジタル系またはサンプル値系と呼ぶ）を考える。この場合には各変数の時間依存は右下につけた添字k で示し，これは整数値をとる。これはサンプル周期をTs として時刻$k\cdot Ts$ での値を示す。そこでシステムの状態方程式が

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\cdot\mathbf{u}_k \qquad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_I \qquad (1.2.19)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\cdot\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\cdot\mathbf{u}_k \qquad (1.2.20)$$

で与えられる場合を考察する。ここで$\mathbf{A}$は$n\times n$ 定数行列，$\mathbf{B}$は$n\times r$ 定数行列，$\mathbf{C}$は$p\times n$ 定数行列，そして$\mathbf{D}$は$p\times r$ 定数行列である。ここでこれらの行列はアナログ系の場合と混同することはないので同じ記号で説明した。その他についても同じ記号を用いている。後で両者を交えて議論する場合には記号を改めて区別する。このとき遷移行列$\boldsymbol{\Phi}_k$ は

$$\boldsymbol{\Phi}_{k+1} = \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\Phi}_k \qquad \boldsymbol{\Phi}_0 = \mathbf{I} \qquad (1.2.21)$$

の一意解である。ここで$\mathbf{I}$は単位行列である。（1.2.21）を解いて

$$\boldsymbol{\Phi}_k = \mathbf{A}^k \qquad (1.2.22)$$

これを用いると（1.2.19）の一意解は

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\cdot\left(\mathbf{x}_I + \sum_{j=1}^{k}\mathbf{A}^{-j}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}_{j-1}\right) \qquad (1.2.23)$$

で与えられる。

この場合にも有用な積分変換によりシステムを詳細にあつかうことができる。

時間軸を0および自然数に限って議論することができる場合には z－変換が有用である。z－変換演算子を$\mathscr{Z}\{\cdot\}$，逆変換演算子を$\mathscr{Z}^{-1}\{\cdot\}$とする。（1.2.19）又は（1.2.23）より

$$\mathscr{Z}\{\mathbf{x}_k\} = (z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathscr{Z}\{\mathbf{u}_k\} + (z\mathbf{I}-\mathbf{A}^{-1})\cdot\mathbf{x}_I \qquad (1.2.24)$$

と表わされる。特に$\mathbf{x}_I = 0$の場合の入出力の z－変換の比をパルス伝達関数といい$\mathbf{Z}(z)$ であらわす。すなわち

$$\mathbf{Z}(z) = \mathbf{C}\cdot(z\cdot\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{D} \qquad (1.2.25)$$

である。これを用いると十分時間の経過した後の入出力関係が，

$$\mathcal{Z}\{\mathbf{y}_k\}=\mathbf{Z}(z)\cdot\mathcal{Z}\{\mathbf{u}_k\} \tag{1.2.26}$$

と表わされる。

又定常的な場合にはFourier 変換も有用である。ディジタル系でのFourier 変換[15]演算子を$\mathcal{F}\{\cdot\}$，逆変換演算子を$\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$とする。（1.2.19）で初期時刻を$k=-\infty$，初期値を0とすると

$$\mathcal{F}\{\mathbf{y}_k\}=\mathbf{Z}(e^{i\omega T_s})\cdot\mathcal{F}\{\mathbf{u}_k\} \tag{1.2.27}$$

となる。ディジタル系では，あつかえる周波数が

$$|\omega|\leqq\omega_f \tag{1.2.28}$$

に限られてしまう。

$\mathbf{Z}(e^{i\omega T_s})$をシステムの周波数特性という。

周波数特性に関連してインパルス応答によるシステムの表現法がある。すなわち

$$\boldsymbol{\rho}_k=\mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{Z}(e^{i\omega T_s})\} \tag{1.2.29}$$

をシステムのインパルス応答という。物理的に存在する$\mathbf{Z}(e^{i\omega\cdot T_s})$に対しては

$$\boldsymbol{\rho}_k=0 \qquad (k=-1,-2,\cdots\cdots) \tag{1.2.30}$$

となる。このインパルス応答を用いると

$$\mathbf{y}_k=\sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{\rho}_j\cdot\mathbf{u}_{k-j} \tag{1.2.31}$$

と表わされる。

ディジタル系においてもシステムの表現には，$\Sigma=(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})$，$\mathbf{Z}(z)$，$\mathbf{Z}(e^{i\omega\cdot T_s})$ $\{\boldsymbol{\rho}_k\}_{k=0}^{\infty}$ 等があることがわかる。

1.2.4. 可制御可観測性

システムの構造を知る上で重要な可制御性と可観測性について述べておく。この論文ではこの概念を主としてアナログ系で用いるので状態方程式が（1.2.6）と（1.2.7）で与えられる場合すなわち，$\Sigma=(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})$について考えてみる。

はじめに（$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$）に関する特徴を表わす可制御性について述べる。[2]

〔（$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$）の可制御性〕　時刻t_0で$\mathbf{X}_0$にあるシステムが許容される入力の範囲でしかも有限の時間内に状態値を0にすることが可能ならば，対（$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$）はt_0で可制御であるという。

すべての t_0 で可制御の場合**完全可制御**といわれる。ただ定常なシステムの場合には可制御性と完全可制御性は同義語となる。

次に（**A**，**C**）に関する特徴をあらわす可観測性について述べる。[2]

〔（**A**，**C**）の可観測性〕　システムの入力が $\mathbf{u}=0$ である場合に時刻 t_0 で状態が $\mathbf{X}_0$ とする。もし区間〔t_0，t_f〕での出力 $y[t_0, t_f]$ を観測するとき $\mathbf{X}_0$ が一意に定められる場合状態 $\mathbf{X}_0$ が区間〔t_0，t_f〕で可観測という。任意の時刻 t_0，任意の状態 $\mathbf{X}_0$ に対して有限の t_f が存在して $\mathbf{X}_0$ が〔t_0，t_f〕で可観測なら（**A**，**C**）は**完全可観測**という。
ただ定常なシステムでは可観測性と完全可観測性は同義語となる。
完全可制御可観測なシステム $\Sigma=(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})$ の状態変数の数 n は 1. 2. 1 で述べたシステムの次数である。すなわち n より小さい状態変数では出力を一意に定め得なくなるからである。
これらに関しては次の定理が重要である。

〔**定理 1. 2. 1**〕　定常系の（**A**，**B**）が完全可制御であるための必要十分条件は

$$\mathrm{rank}\ \mathbf{V}=n \tag{1.2.32}$$

で与えられる。ただし **V** は**可制御行列**という。

$$\mathbf{V}=[\mathbf{B},\mathbf{A}\cdot\mathbf{B},\cdots\cdots,\mathbf{A}^{n-1}\cdot\mathbf{B}] \tag{1.2.33}$$

で与えられる。

〔**定理 1. 2. 2**〕　定常系の（**A**，**C**）が完全可観測であるための必要十分条件は

$$\mathrm{rank}\ \mathbf{N}=n \tag{1.2.34}$$

で与えられる。ただし **N** は**可観測行列**という。

$$\mathbf{N}=[\mathbf{C}^T,\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{C}^T,\cdots\cdots,(\mathbf{A}^T)^{n-1}\cdot\mathbf{C}^T] \tag{1.2.35}$$

で与えられる。

特に 1 入力 1 出力のシステムの場合に伝達関数が

$$R(S)=\frac{B(S)}{A(S)}=\frac{b_0+b_1S+\cdots+b_{n-1}\cdot S^{n-1}}{1+a_1\cdot S+a_2\cdot S^2+\cdots+a_n\cdot S^n} \tag{1.2.36}$$

で与えられる場合を考える（$a_n \neq 0$）。

このような伝達関数を持つようなシステムの状態方程式は多様に作ることが可能である。そのなかで

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & \\ \vdots & \mathbf{I}_{n-1} \\ 0 & \\ -a_1 \cdots\cdots, & -a_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\left[b_0,\ b_1,\ \cdots\cdots,\ b_{n-1}\right], \qquad \mathbf{D}=0 \tag{1.2.37}$$

で与えられる場合が重要である。$\mathbf{I}_{n-1}$ は $(n-1)\times(n-1)$ の単位行列である。この時（**A**，**B**）は常に完全可制御である。このような表現は**可制御正準形**という。

ところで次の定理は重要である。[2]

〔**定理 1. 2. 3**〕 伝達関数 $R(S)$ を持つ（1.2.37）で与えられる**A**，**B**，**C**，**D**を持つシステムに対して（**A**，**C**）が完全可観測であるための必要十分条件は $R(S)$ の分子分母の多項式 $A(S)$，$B(S)$ が既約であることである。

1. 2. 5 線形システムの安定性

まずアナログ系の安定性についての結果を述べる。状態方程式が（1. 2. 6），（1. 2. 7）で与えられるシステムの遷移行列 $\Phi(t)$ を考える。

〔**アナログ系の安定性**〕 任意の $t \geq t_0$ に対して $\beta > 0$，$r > 0$ が存在して

$$\| \Phi(t) \| < \beta \cdot e^{-r(t-t_0)} \tag{1.2.38}$$

となる場合このシステムは**安定**であるという。

この安定性に関しては次の定理が大切である。[2]

〔**定理 1. 2. 4**〕 定常な線形アナログ形が安定であるための必要十分条件は行列**A**の固有値の実部がすべて負であることである。

特に（1. 2. 36）で与えられるような1入力1出力系の場合には**特性方程式**

$$A(S)=0 \tag{1.2.39}$$

の根の実数部が総て負であることが安定であるための必要十分条件となる。

次にディジタル系の安定性についての結果を述べる。

状態方程式が（1.2.19），（1.2.20）で与えられるシステムの遷移行列Φ_kを考える。

〔**ディジタル系の安定性**〕 任意の時刻kに対して$\beta>0$，$0<\alpha<1$が存在して

$$\|\Phi_k\|<\beta\cdot\alpha^k \tag{1.2.40}$$

となる場合このシステムは安定であるという。

この安定性に関しては次の定理が大切である。

〔**定理 1.2.5**〕 定常な線形ディジタル系が安定であるための必要十分条件は行列**A**の固有値の絶対値が1以下であることである。

特に1入力1出力系でパルス伝達関数が

$$Z(z)=\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}=\frac{b_0+b_1\cdot z^{-1}+\cdots\cdot+b_{n-1}\cdot z^{-n+1}}{1+a_1\cdot z^{-1}+\cdots\cdot+a_n\cdot z^{-n}} \tag{1.2.41}$$

で与えられる（$a_n\neq 0$）場合を考える。

パルス伝達関数が（1.2.41）となるようなシステムでは，その特性方程式

$$A(z^{-1})=0 \tag{1.2.42}$$

のすべての根の絶対値が1より小であることが安定であるための必要十分条件となる。

1.3 同定問題

次に同定問題に関する基礎的な事項について述べ，その手法に関して既に得られている典型的な手法を述べ，著者が第3章で提案する手法との比較検討のための参考とする。

1.3.1 同 定

定常な線形システムでは伝達関数（パルス伝達関数），周波数特性およびインパルス応答等の外部変数の関係によりシステムを表わす外部記述と状態方程式による内部記述がある。いずれの記述法であるにせよ，より実システムを表現するように作られねばならない。[21]

システムの入出力の数が定まっている場合を考えてみる。システムが伝達関数（パルス伝達関数）で表わされる場合にはその特性方程式の次数のことを，又状態方程式で表現した場合には状態変数の次元のことを定めることをそれぞれの表現での構造を定めるという。周波数特性および

インパルス応答の場合には表現法を定めたことで構造は定まったということにしよう。

構造を定めるとパラメータの決定によりシステムの表現すなわち数学モデルができあがる。この構造およびパラメータ決定の過程は**同定**と呼ばれる。

システムの同定を行うにはシステムの実体であるプラント等を物理的あるいは化学的な法則を基にして解析し，それらを構成する要素の物性や化学的性質から構造を決定する方法がある。これは比較的単純な系には極めて有用であり自然の法則がその形の上に反映しているので種々の利点を持っている。しかし大規模かつ複雑なシステムでは解析の過程で生ずる近似や，その表現に要する変数の数が多くなるので，この方法は困難な点が多くなる。

そこでむしろモデルの構造を仮りに選定して入出力の観測値よりパラメータを定めそれを基に数学モデルを求める方が工学的にはより重要な意味をもつ。このような場合の取りあつかいについてのみこの論文ではあつかうことにする。

同定の手法としては，入力として都合のよいものを選び，これをシステムに加えた時の入出力の観測値を用いる**試験信号法**と，通常の操業時の状態における入出力の観測値を用いる**操業時のデータに基づく方法**とが考えられている。

又実際のシステムでは観測することのできない種々の外部入力や観測の機構や伝送記録等の過程で不用な信号すなわち雑音が混入する。従ってこれらの雑音に埋もれた信号より種々のパラメータを求めるには確率統計学の力を借りる必要がある。

そして一般に同定のための計算はアナログ系で実施するのは相当複雑であるので，ディジタル系（サンプル値系）で計算することになる。ディジタル系においてはディジタル電子計算機の力を借りればきわめて複雑な計算も可能となる。その場合工業プラント等は殆んどアナログ系で表現されるものであるからアナログ系よりディジタル系への変換法等も重要な意味をもってくる。この問題をまず始めに考察し，つづいて同定に関する重要事項と手法等について述べる。

1.3.2 アナログ系よりディジタル系への変換

アナログ系の入力，出力および状態値などをサンプル周期T_s でサンプリングして

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(k \cdot T_s),\ \mathbf{y}_k = \mathbf{y}(k \cdot T_s),\ \mathbf{x}_k = \mathbf{x}(k \cdot T_s) \qquad (1.3.1)$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

とする。$\mathbf{u}(t)$，$\mathbf{y}(t)$，$\mathbf{x}(t)$ は，アナログ系の状態方程式（1.2.6），（1.2.7）を満たしている。この場合に，$\mathbf{u}_k$，$\mathbf{y}_k$，$\mathbf{x}_k$ はどのような関係を満たすかを考える。この方法についてよく使用されるものをながめておくことにする。[31]

はじめの方法は微分演算子を差分演算子で置きかえる方法である。たとえば

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \rightarrow \frac{z-1}{T_s} \qquad (1.3.2)$$

とすると（1.2.6）と（1.2.7）より

$$\mathbf{x}_{k+1} = (\mathbf{I}+T_s\cdot\mathbf{A})\cdot\mathbf{x}_k+T_s\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}_k,\ \mathbf{x}_0=\mathbf{x}_I \tag{1.3.3}$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\cdot\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\cdot\mathbf{u}_k \tag{1.3.4}$$

（1.3.3）で $\mathbf{I}+T_s\cdot\mathbf{A}$ および $T_s\cdot\mathbf{B}$ を改めて $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ とすればディジタル系の状態方程式（1.2.19）と（1.2.20）を得る。

次の方法はいわゆるインパルス・サンプラを用いる方法である。すなわち $\delta(t)$ を Dirac のデルタ関数とした場合システムへの入力として $\mathbf{u}(t)$ でなくインパルス・サンプラで変調された

$$\mathbf{u}^*(t)=T_s\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{u}_k\cdot\delta(t-k\cdot T_s) \tag{1.3.5}$$

を抽入してやるとシステムの状態および出力は入力のサンプル値 $\mathbf{u}_k$ のみで表わすことが可能となる。すなわち（1.2.10）より

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= e^{\mathbf{A}\cdot T_s}\cdot\mathbf{x}_k+T_s\cdot\int_{k\cdot T_s}^{(k+1)\cdot T_s}\exp[\mathbf{A}\{(k+1)\cdot T_s-\tau\}]\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}^*(\tau)\,d\tau\\ &= e^{\mathbf{A}\cdot T_s}\cdot\mathbf{x}_k+T_s e^{\mathbf{A}T_s}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}_k\end{aligned} \tag{1.3.6}$$

を得る。$e^{\mathbf{A}\cdot T_s}$ および $e^{\mathbf{A}\cdot T_s}\cdot\mathbf{B}$ を夫々 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ と置き換えればディジタル系の状態方程式（1.2.19）と（1.2.20）を得る。

又サンプル周期の間を何等かの方法で補間する方法がある。たとえば

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{u}_k \qquad k\cdot T_s \leqq t < (k+1)\cdot T_s \tag{1.3.7}$$

のような階段関数を考え，システムへの入力として $\mathbf{u}(t)$ の代りに $\mathbf{u}'(t)$ を用いる方法である。$\mathbf{u}'(t)$ は $\mathbf{u}(t)$ を 0 一次保持した信号といい信号 $\mathbf{u}^*(t)$ を伝達関数が

$$H_0(S) = \frac{1-e^{-T_s\cdot S}}{S} \tag{1.3.8}$$

で与えられるシステムを通せば得られる。このシステムを 0 一次保持という。このときは

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{\mathbf{A}\cdot T_s}\cdot\mathbf{x}_k+\left[\int_{k\cdot T_s}^{(k+1)\cdot T_s}\exp[\mathbf{A}\{(k+1)\cdot T_s-\tau\}]\cdot\mathbf{B}d\tau\right]\cdot\mathbf{u}_k \tag{1.3.9}$$

を得る。補間の方法を適当に選ぶことにより色々な処理方法が考えられている。

周波数領域で考えるともう一つ別の変換法が考えられる。すなわち伝達関数を双一次変換

$$S = \frac{2}{T_s} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \qquad (1.3.10)$$

により形式的にパルス伝達関数を作る方法で**双一次変換法**といわれる。この方法の論拠は周波数ωを低域に限れば

$$i\omega \doteqdot \frac{2}{T_s} \cdot \frac{1-e^{-i\omega T_s}}{1+e^{i\omega T_s}} = i\omega \cdot \left(\tan\frac{\omega T_s}{2} \Big/ \frac{\omega \cdot T_s}{2}\right) \qquad (1.3.11)$$

となり周波数特性が一致するからである。

安定性に関しては，変換（1.3.2）による方法では，元のアナログ系が安定ならば，**定理1.2.4**により$\mathbf{A}$の固有値の実部は負となり，T_s を適当に小さく選べば，$\mathbf{I}+T_s \cdot \mathbf{A}$ の固有値の絶対値は1より小となり，変換して得られるシステムは安定となる。またインパルス・サンプラによる方法では，$e^{\mathbf{A} \cdot T_s}$ の固有値の絶対値は1より小となり，変換して得られる（1.3.6）は安定となる。

そして良く知られているように双一次変換で円（直線を含む）は円に変換され[20] $S=-2/T_s$ は $z=0$ に対応するから図1.3.1のようにS平面の左半平面はz平面の単位円内に写像され従って双一次変換で得られたパルス伝達関数の特性方程式の根は単位円内にある。

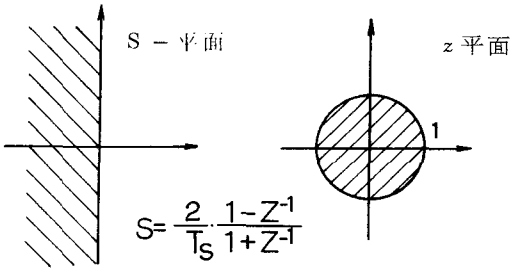


図1.3.1　双一次変換による写像

従って**定理1.2.5**およびその下で述べた論述により，アナログ系よりこれらの方法で変換して得られたディジタル系のシステムは安定となる。

1.3.3　可同定性

斉次なシステム

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_k \qquad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_I \qquad (1.3.12)$$

を考える。もしすべての $\mathbf{x}_k$ が観測できるならば

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x}_0, \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_0, \cdots, \mathbf{A}^{n-1} \cdot \mathbf{x}_0) \qquad (1.3.13)$$

となるから

$$\mathrm{rank}(\mathbf{x}_0, \mathbf{A}\mathbf{x}_0, \cdots, \mathbf{A}^{n-1} \cdot \mathbf{x}_0) = n \qquad (1.3.14)$$

のとき$\mathbf{A}$を一意に定めることが可能となる。これを**n－可同定性**という。[21]

また出力

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\cdot\mathbf{x}_k \tag{1.3.15}$$

のみが観測できる場合には（1.3.12）と（1.3.15）により

$$(\mathbf{y}_k,\ \mathbf{y}_{k+1},\cdots,\mathbf{y}_{k+n}) = \mathbf{x}_k^T\cdot(\mathbf{C}^T,\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{C}^T,\cdots,(\mathbf{A}^T)^{n-1}\cdot\mathbf{C}^T) \tag{1.3.16}$$

となるので（**A**，**C**）が完全可観測ならばすべての$\mathbf{x}_k$が求まり（1.3.13）が成立しておれば，**A**が求まる。（1.3.14）と（1.2.42）が同時に成立するとき**p－可同定性**が満足されるという。

1.3.4 雑音を考慮したシステム

ここではディジタル系のシステムのみを考えてみる。システムへ加わる入力のうちで外界の変化やシステムの内部より発生してくるような種類のものは直接観測することができない。また観測の機構や信号の伝送とか記録等の過程で多くの雑音が混入される。そこで実際に観測される入力信号は $\mathbf{u}_k$ でなくて

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \mathbf{u}_k + \mathbf{e}_k \tag{1.3.17}$$

となる。$\mathbf{e}_k$ は雑音を表わす。また出力も（1.2.20）ではなく雑音$\boldsymbol{\varepsilon}_k$ を含んだ

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \mathbf{C}\cdot\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\cdot\mathbf{u}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_k \tag{1.3.18}$$

が観測されると考えられる。

ここで，$\mathbf{e}_k$，$\boldsymbol{\varepsilon}_k$は夫々$r$行，$p$行の列ベクトルである。

$\mathbf{e}_k$，$\boldsymbol{\varepsilon}_k$は雑音という不確かさをもつがために確率過程としてあつかわれる。[10]ここでは$\mathbf{e}_k$ $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ は夫々弱定常であり，E{・}を平均値，V{・}を分散を表わすものとして

$$\mathrm{E}\{\mathbf{e}_k\} = 0\ ,\quad \mathrm{E}\{\boldsymbol{\varepsilon}_k\} = 0 \tag{1.3.19}$$

$$\mathrm{V}\{\mathbf{e}_k\} = \mathbf{Q}_e\ ,\quad \mathrm{V}\{\boldsymbol{\varepsilon}_k\} = \mathbf{Q}_\varepsilon \tag{1.3.20}$$

としておく。このような雑音が加わる場合にはシステムの状態も出力も確率過程となる。もちろん入力自身も確率過程の場合も多い。

特に1入力1出力系の場合ではパルス伝達関数が（1.2.41）であたえられる場合では

$$\hat{y}_k = \sum_{j=0}^{n-1} b_j\cdot u_{k-j} - \sum_{l=1}^{n} a_l\cdot y_{k-l} + \varepsilon_k \tag{1.3.21}$$

とあらわされる。

またインパルス応答でシステムが表現されている場合には

$$\hat{y}_k = \sum_{j=0}^{\infty} \rho_j\cdot u_{k-j} + \varepsilon_k \tag{1.3.22}$$

となる。

1. 3. 5　試験信号法及び相関法

試験信号法というのは都合のよい入力をシステムに加えてその応答出力により同定を行う方法である。試験信号としてはステップ状に変化する確定信号を用いる方法や白色性の弱定常雑音を用いる方法などが考えられ多くの分野で実際に使用されている。前者について述べるのはここでは省略して後者と関係の深い相関法について述べてみる。[9], [23]

入力信号は平均値0の弱定常過程で確率連続[6], [10], [13]とすると1. 4で述べるように直交測度[10] $\zeta_u(\omega)$ を用いて

$$u_k = \int_{-\omega_f}^{\omega_f} e^{i\omega k \cdot T_s} \, d\zeta_u(\omega) \tag{1.3.23}$$

と表わされる。これは u_k のスペクトル分解を[6]表わしている。同様に観測雑音も

$$\varepsilon_k = \int_{-\omega_f}^{\omega_f} e^{i\omega k \cdot T_s} \, d\zeta_\varepsilon(\omega) \tag{1.3.24}$$

と表わされるものとする。ただし u_k と ε_k は無相関とする。ω_f は（1. 2. 28）で与えた折り曲げ周波数である。

そして特に入力は雑音を含まずに観測できるものとする。このとき出力は

$$\hat{y}_k = \int_{-\omega_f}^{\omega_f} e^{i\omega \cdot kT_s} \cdot Z(e^{i\omega T_s}) \, d\zeta_u(\omega) + \varepsilon_k \tag{1.3.25}$$

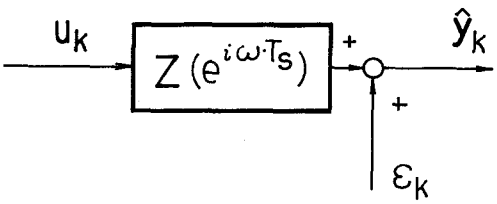


図 1. 3. 2　u_k と $\hat{y}_k$ の関係

となる。u_k と $\hat{y}_k$ の相関関数 $R_{u,\hat{y},k}$ を考え u_k と ε_k が無相関であることと（1. 2. 29）により

$$\begin{aligned} R_{u,\hat{y},k} &= E\{\bar{u}_j \cdot \hat{y}_{k+j}^T\} \\ &= \int_{-\omega_f}^{\omega_f} e^{i\omega \cdot k \cdot T_s} \cdot Z(e^{i\omega \cdot T_s}) \, dS_u(\omega) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \rho_l \cdot R_{u,k-l} \end{aligned} \tag{1.3.26}$$

を得る。ここで変数の頭部の"－"は共役を示すものとする。そして $R_{u,k}$ は u の自己相関関数[10]，$S_u(\omega)$ はそのスペクトル測度である。[10]

$R_{u,\hat{y},k}$ それ自身をスペクトル分解しそのスペクトル測度を $S_{u,\hat{y}}(\omega)$ とすると

$$R_{u,\hat{y},k} = \int_{-\omega_f}^{\omega_f} e^{i\omega k \cdot T_s} \, dS_{u,\hat{y}}(\omega) \tag{1. 3. 27}$$

となる。（1.3.26）と（1.3.27）を比較するともし$\mathbf{Su}(\omega)$ と$\mathbf{Su,\hat{y}}(\omega)$ が絶対連続とすれば

$$Z(e^{i\omega T_s}) = \frac{d\mathbf{Su,\hat{y}}(\omega)}{d\omega} \cdot \left(\frac{d\mathbf{Su}(\omega)}{d\omega}\right)^{-1} \qquad (1.3.28)$$

を得る。$\mathbf{Ru},k$，$\mathbf{Ru},\hat{\mathbf{y}},k$ としてサンプリングして得られたサンプル値より得られる標本相関々数を用いると(D3)（1.3.26）および（1.3.28）よりインパルス応答または周波数特性を得ることができる。

もし入力$\mathbf{u}_k$ として白色信号すなわち

$$\frac{d\mathbf{Su}(\omega)}{d\omega} = \frac{\sigma^2}{2\omega_f} \cdot I \qquad (1.3.29)$$

の場合には

$$\mathbf{Ru},k = \begin{cases} \sigma^2 \cdot \mathbf{I} & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \qquad (1.3.30)$$

となるから

$$\rho_k = \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{Ru},\hat{\mathbf{y}},k \qquad (1.3.31)$$

又は

$$\mathbf{Z}(e^{i\omega T_s}) = \frac{2\cdot\omega_f}{\sigma^2} \cdot \frac{d\mathbf{Su},\hat{\mathbf{y}}(\omega)}{d\omega} \qquad (1.3.32)$$

と簡単にインパルス応答および周波数特性が得られる。

実際には正しい意味での白色信号は得られないのでM系列信号のような擬似白色信号を用いる方法等がかなり詳細に研究されているが，この論文で言及することは省略した。

1.3.6 インパルス応答の推定法

インパルス応答は$k \to \infty$と共に $\rho_k \to 0$ となるので十分に大きな値N_0 を定めると（1.3.22）は十分良い近似として

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \sum_{j=0}^{N_0} \rho_j \cdot \mathbf{u}_{k-j} + \varepsilon_k \qquad (1.3.33)$$

と置くことが可能である。ここでは特に1入力1出力の場合を考えてみる。

ε_k は平均0分散 σ^2 の定常な正規過程とすると$\varepsilon_{N+1}, \varepsilon_{N+2} \cdots, \varepsilon_{N+K}$ の同時確率密度は(14)

$$d(\varepsilon_{N+1}, \varepsilon_{N+2}, \cdots, \varepsilon_{N+M}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}} \cdot |\mathbf{Q}_M|} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi_M^T \cdot \mathbf{Q}_M^{-1} \cdot \xi_M\right) \qquad (1.3.34)$$

で与えられる。ここで

$$\xi_M = (\varepsilon_{N+1}, \varepsilon_{N+2}, \cdots, \varepsilon_{N+M})^T \qquad (1.3.35)$$

であり，$\mathbf{Q}_M$ は $\boldsymbol{\zeta}_M$ の共分散行列である。ところで関数 d(・) を ρ_k の関数とみたときこれのことを**尤度関数**と呼ぶ。尤度を最小にするような ρ_k は2次形式

$$\boldsymbol{\xi}_M^T \cdot \mathbf{Q}_M^{-1} \boldsymbol{\xi}_M = \| \boldsymbol{\xi}_M \|^2_{\mathbf{Q}_M^{-1}} = \| \hat{\mathbf{y}}_M - \mathbf{U}_M \cdot \mathbf{a} \|^2_{\mathbf{Q}_M^{-1}} \qquad (1.3.36)$$

を最小にする解と一致する。ここで

$$\hat{\mathbf{y}}_M = (\hat{y}_{N_0+1}, \hat{y}_{N_0+2}, \cdots, \hat{y}_{N_0+M})^T \qquad (1.3.37)$$

$$\mathbf{a} = (\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_{N_0})^T \qquad (1.3.38)$$

$$\mathbf{U}_M = \begin{bmatrix} u_{N_0}, u_{N_0+1}, \cdots, u_{N_0+M-1} \\ u_{N_0-1}, u_{N_0}, \cdots, u_{N_0+M} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ u_1, u_2, \cdots, u_M \end{bmatrix} \qquad (1.3.39)$$

である。$\mathbf{Q}_M$ は正値2次形式であるから，$\mathbf{Q}_M^{\frac{1}{2}}$ を定義することができて[1]これを用いると（1.3.36）を最小にする解は

$$\mathbf{a} = (\mathbf{Q}_M^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{U}_M)^+ \cdot \mathbf{Q}_M^{-\frac{1}{2}} \cdot \hat{\mathbf{y}}_M \qquad (1.3.40)$$

で与えられる。右肩の“＋”は**一般化逆行列**を表わす（付録参照）。更に雑音が白色ならば

$$\mathbf{Q}_M = \sigma^2 \cdot \mathbf{I} \qquad (1.3.41)$$

であるから（1.3.36）は単に

$$\| \hat{\mathbf{y}}_M - \mathbf{U}_M \cdot \mathbf{a} \|^2 \qquad (1.3.42)$$

を最小にする問題となる。これから得られる a はいわゆる最小自乗解であり[4]

$$\mathbf{a} = \mathbf{U}_M^+ \cdot \hat{\mathbf{y}}_M \qquad (1.3.43)$$

で与えられる。正規性雑音の場合は（1.3.40）又は（1.3.43）は**最尤推定量**と[14]なる。

雑音に正規性が仮定できない場合にも（1.3.40）および（1.3.43）は一つの推定量を与えるがこれらは夫々**マルコフ推定量**および**最小自乗推定量**という。[21]，[24]

又一般に最尤推定値は正規分布への**法則収束性**，**漸近的不偏性**と**不変性**等の性質を持つことが知られている。

最小自乗法による推定量を求める過程は更に遂次形等に変形され種々実用され好結果を出している。N_0 の大きさが多少大きくなることもあるが漸近的不偏性を有するなど優れた性質を持っているのが注目されている。

1.3.7 パルス伝達関数の推定法

ここでも1入力1出力系の場合を考えてみる。すなわち（1.3.21）で入出力関係が与えられる場合にそのパラメータ $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}$ を推定する手法を考察する。

今便宜上

$$\hat{\mathbf{y}}_M = (\hat{y}_n, \hat{y}_{n-1}, \cdots, \hat{y}_{n+M-1})^T \tag{1.3.46}$$

$$\hat{\mathbf{W}}_M = \begin{bmatrix} u_n & , u_{n-1} & , \cdots, u_1, & -\hat{y}_{n-1} & , \cdots, -\hat{y}_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{n+M-1}, & u_{n+M-2}, & \cdots, u_M, & -\hat{y}_{n+M-2}, & \cdots, -\hat{y}_{M-1} \end{bmatrix} \tag{1.3.47}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = (b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}, a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \tag{1.3.48}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_M = (\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}, \cdots, \varepsilon_{n+M-1})^T \tag{1.3.49}$$

とすると（1.3.21）は

$$\hat{\mathbf{y}}_M = \hat{\mathbf{W}}_M \cdot \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon}_M \tag{1.3.50}$$

と表わされる。[25]インパルス応答の推定法のときと同じように形式的に $\| \boldsymbol{\varepsilon}_M \|^2$ を最小にするように $\boldsymbol{\alpha}$ を求める方法が一番最初Kalmanにより考えられた。ところがインパルス応答による表現では $\boldsymbol{\varepsilon}_M$ を最小にすることは実システムの出力とモデルの出力をできるだけ良く一致させるという明確な物理的意味を持っていたのに反しパルス伝達関数の場合には単に式の差をできるだけ0にしようとすることだから物理的な意味が明確でない。実際このようにして得られた推定量は漸近的にも不偏性をもたない。

そこで漸近的に不偏な推定量を求める方法がいくつか考えられている。[26] このためにはインパルス応答の推定の場合と同じように実システムの出力とモデルの出力を小さくするようにもって行くのが一つの方法である。今出力とモデルの出力の差を e'_k とすると（1.2.41）の $Z(z)$ を用いて

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} e_k'^2 = \frac{1}{2\pi i} \oint \left| \mathcal{Z}(y_k) - \frac{B(z)}{A(z)} \cdot \mathcal{Z}(\mathbf{u}_k) \right|^2 dz \tag{1.3.51}$$

となる。ここで複素積分の積分路は原点を内点とする閉曲線である。J を最小にする $\boldsymbol{\alpha}$ を求めるには**非線形計画法**を用いる必要がある。

雑音の特性を利用してこれに基づく推定偏差を補償する方法がいくつか考案されている。そのうちで興味ある方法として**確率縮少変換法**と言われるものを簡単に紹介しておく。[27]

ここでは入力の観測に際しても雑音を考え

$$\mathbf{n}_k = (\varepsilon_k, \varepsilon_{k-1}, \cdots, \varepsilon_{k-n+1}, -e_{k-1}, \cdots, -e_{k-n})^T \tag{1.3.52}$$

としたとき共分散行列およびベクトルを信号に弱定常性を考えて

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_k^T\} \qquad \mathbf{r} = E\{\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{n}_k^T\} \tag{1.3.53}$$

を定義しておく。

次に

$$\mathbf{R}^*_k = \mathbf{R}^*_{k-1} + \frac{1}{k}(\hat{\mathbf{W}}_k^T \cdot \hat{\mathbf{W}}_k - \mathbf{R}^*_{k-1}), \quad \mathbf{R}^*_0 = 0 \tag{1.3.54}$$

$$\mathbf{r}_k^* = \mathbf{r}_{k-1}^* + \frac{1}{k}(\hat{\mathbf{W}}_k^T \cdot \hat{\mathbf{y}}_k - \mathbf{r}_{k-1}^*)\ ,\ \mathbf{r}_0^* = 0 \qquad (1.3.55)$$

により　$\mathbf{R}_k^*$, $\mathbf{r}_k^*$ をつくる。この時α_0^* を適当に与えて，$\beta > 0$ として

$$\alpha_k^* = \alpha_{k-1}^* - \frac{\beta}{k}\{(\mathbf{R}_k^* - \mathbf{R})\alpha_{k-1}^* + (\mathbf{r}_k^* - \mathbf{r})\} \qquad (1.3.56)$$

により逐次α_k^*をつくればα_k^* はαへ次の意味で収束する。

$$\mathrm{E}\{\|\alpha_k^* - \alpha\|\} \to 0 \qquad (k \to \infty) \qquad (1.3.57)$$

ただこの方法では雑音の分散$\mathbf{R}$，$\mathbf{r}$が知られていないと用いることができない。
このような事前の情報を要しないアルゴリズムも考察されている。(45)

1.3.8　構造決定の問題

同定の方法にはインパルス応答や周波数特性のようにシステムの次数が不明でも決定できる種類のものと，パルス伝達関数のように次数として何等かの値を仮定しないと決定できないような種類のものとがある。これらが求まった場合に全体のシステムの次数を決定し，その最小の次数を持つシステムの状態方程式を求める問題をシステムの**最小実現問題**という。(2)，(28)

詳細な手法については省略して最小化実現とは何かという定義のみを与えておく。すなわち状態方程式（1.2.19）と（1.2.20）において（**A**，**B**）が完全可制御で，（**A**，**C**）が完全可観測であるような表現である場合には，これをシステムの最小化実現という。この概念はアナログ系でも同じように用いられる。

最後にディジタル系で得られた結果をアナログ系にもどすには1.3.2で考えた変換を逆にたどることにより達成される。

1.4　ディジタル信号の処理

自然現象として出現する殆んどの信号は時間軸が実数すなわちアナログ信号である。一般的に信号は時刻を定めると値が確定するような信号すなわち**確定信号**と，時刻を定めると確率変数としてしか定まらないような**不規則信号**が考えられる。確定信号は数学的にはいわゆる時間を変数とする関数であり，不規測信号は確率過程としてとらえられる。そこでこれらの信号の性質を論じシステムとの関連を明らかにする助けとする。特に信号を**単振動の線形結合**で表現するいわゆる**調和解析**の手法を概説する。次に1.3でも述べたように同定をはじめ高度な制御系においてはディジタル電子計算機の助けを借りる場合が多くディジタル（サンプル値）信号としての処理が必要となり時間軸が整数である信号のとりあつかいが重要となる。そこでディジタル信号の性質についても概説した。そしてこの論文の主題をなしているディジタル・フィルタといわれる信号処理についての一般的事項をまとめ**第2章**への準備とする。(31)

1.4.1 確定信号

確定信号すなわち時間 t の関数 $x(t)$ について考えてみる。$x(t)$ がたとえば電圧で1Ωの抵抗に加えられるものとすれば $|x(t)|^2$ は瞬時的なパワーを表わしている。さて次の積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt \tag{1.4.1}$$

は信号の持つエネルギーを表わしている。[15] エネルギーが有界すなわち（2乗可積分）

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt < \infty \tag{1.4.2}$$

である信号すなわち関数 $x(t)$ の族を L_2 と名付ける。

また全時間区間での平均パワーの有界な信号

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} |x(t)|^2 \, dt < \infty \tag{1.4.3}$$

全体を W_2 と名付ける。明らかに

$$L_2 \subset W_2 \tag{1.4.4}$$

である。

我々が普通あつかっているそれ自身有界であるような信号は L_2 には含まれず W_2 に属しているものが多い。たとえばステップ信号や周期的信号などである。またランプ信号のように W_2 にも含まれないものもあるが物理的にはこれもある有界信号のある時間区間を指定しているに過ぎないのでやはり W_2 に含まれると考えても良い。

ここではこれらの信号のスペクトル分解について考えておく。[D1]，[D5]

L_2 に属する信号 $x(t)$ はFourier 変換

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} x(t) \, dt \tag{1.4.5}$$

が可能であり逆に[15]

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} X(\omega) d\omega \tag{1.4.6}$$

と表わされる。$y(t)$ のFourier 変換を $Y(\omega)$ とするとPlancherel の定理[12]，[15]

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \overline{y(t)} \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot Y(\omega) d\omega \tag{1.4.7}$$

がなり立つ。

W_2 の中で特に重要なのは周期関数である。$x(t)$ が周期 T の周期関数ならば[12]，[15]

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi k}{T} \cdot t} \tag{1.4.8}$$

と表わされる。ここで

$$C_k = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-i\frac{2\pi k}{T}t}\cdot x(t)\,dt \qquad (1.4.9)$$

である。この場合も $y(t)$ の Fourier 係数を D_k とすれば同じく

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cdot\overline{y(t)}\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k\cdot\overline{D_k} \qquad (1.4.10)$$

が成立する。

W_2 の中で興味あるのは概周期関数である。[12],[15],[7] 今 ω_k は

$$\cdots < \omega_{-2} < \omega_{-1} < \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots \qquad (1.4.11)$$

を満たす数列とするとき収束する級数

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k\cdot e^{i\omega_k t} \qquad (1.4.12)$$

は概周期関数といわれ C_k は

$$C_k = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} e^{-i\omega_k t}\,x(t)\,dt \qquad (1.4.13)$$

で与えられる。C_k はやはり $x(t)$ の Fourier 係数と言われる。$y(t)$ の Fourier 係数を D_k とすると

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} x(\tau)\cdot\overline{y(\tau)}\,d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k\cdot\overline{D_k} \qquad (1.4.14)$$

がなり立つ。

W_2 に属する任意の $x(t)$ に対しては

$$\hat{U}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-e^{-i\omega t}}{it}\right)\cdot x(t)\,dt$$

$$+\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\ \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-A}^{-1}+\int_{1}^{A}\right\}\frac{e^{-i\omega t}x(t)}{it}\,dt \qquad (1.4.15)$$

を作ると

$$x(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\,d\hat{U}(\omega) \qquad (1.4.16)$$

と表わされる。[7] l.i.m. は平均収束極限（Limit in the mean）を表わす。～の意味は（C，1）総和可能なことすなわち

$$\widetilde{U}(f) = \int_{-f}^{f} e^{i\omega t}\,d\hat{U}(\omega) \qquad (1.4.17)$$

とすると

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \tilde{U}(f)\cdot df = x(t) \quad (a.e.) \tag{1.4.18}$$

これは $a.e.$ （almost everywhere） の収束を表わす。この場合

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} |x(t)|^2 dt = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{U}(\omega+\varepsilon)-\hat{U}(\omega-\varepsilon)|^2 d\omega \tag{1.4.19}$$

となる。

すなわち工学上で現われてくる確定信号は殆んどすべて単振動の線形結合すなわちスペクトル分解ができるので考えているシステムが定常な線形系であるかぎり単一の周波数に対する解析を行なっておけば**重ね合わせの原理**により考えている信号に対する影響がわかるわけである。

1.4.2 不規則信号

時刻を指定しても確率変数としてしか定まらないような信号は数学的には確率過程となる。基礎となる**確率空間** Prob（Λ，B） を考える。Λ は確率パラメータ λ の空間，B は Λ 上の Borel 集合族で Prob（・） はその上に定義された確率とする。このとき時間軸をパラメータとする確率変数 $x(\lambda, t)$ 全体を**確率過程**と呼ぶ。時刻を固定すれば単なる確率変数である。λ を固定すると時間の関数となるが，これを**見本過程**という。λ の明示が必要のない場合単に $x(t)$ と書き単に信号と呼ぼう。見本過程はサンプル値ともいい確定信号である。

$x(t)$ に対して

$$R_x(t) = \mathrm{E}\{\overline{x(\tau)}\cdot x(t+\tau)\} \tag{1.4.20}$$

を $x(t)$ の**自己相関々数**と呼ぶ。平均 $\mathrm{E}\{x(t)\}$ と自己相関々数が時刻 t に無関係となる**時弱定常過程**という。

$R_x(t)$ が $t=0$ で連続のとき $x(t)$ は**確率連続**といい[6] この場合には

$$R_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\, S_x(\omega) \tag{1.4.20}$$

と表わされる。ここで $S_x(\omega)$ は $R_x(\omega)$ の**パワースペクトル測度**という。ここで $S_x(\omega)$ は

$$\frac{S_x(\omega_2+)+S_x(\omega_2-)}{2} - \frac{S_x(\omega_1+)+S_x(\omega_1-)}{2}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-i\omega_2 t}-e^{-i\omega_1 t}}{-it} R_x(t)\, dt \tag{1.4.21}$$

で与えられる。[6] またこのときには信号自身も

$$x(t) = \mathrm{E}\{x(t)\} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\zeta_x(\omega) \tag{1.4.22}$$

と表わされる。$\zeta_x(\omega)$ は信号の**直交測度**と[10]いう。ここで

$$E\{|d\zeta_x(\omega)|^2\} = dS_x(\omega) \qquad (1.4.23)$$

という関係があり，不規則信号も単振動の線形結合で表現できることがわかる。

従って定常な線形システムを考えている限り単一周波数に対する性格すなわち周波数特性のみにより信号に対する影響を知ることができる。又確定信号でも不規則信号でもどれか一つのスペクトル分解される信号について議論しておけば他の信号での取りあつかいは同じである。

1.4.3 ディジタル信号

ディジタル（サンプル値）信号の場合も 1.4.1，1.4.2 で述べたような表現が可能であるがただし周波数は $|\omega| \leqq \omega_f$ に限られる。ω_f はすでに（1.3.24）で与えられ折り曲げ周波数（Folding Frequency）という。弱定常過程の場合のみ考察しておく。

信号 x_k の自己相関々数は

$$R_{x,k} = E\{\overline{x_l} \cdot x_{k+l}\} = \int_{-\omega_f}^{\omega_f} e^{i\omega t}\, dS_x(\omega)$$

となり，パワースペクトル測度は(6)

$$\frac{S_x(\omega_2+) + S_x(\omega_2-)}{2} - \frac{S_x(\omega_1+) + S_x(\omega_1-)}{2} = R_{x,0} + \lim_{N\to\infty} \sum_{\substack{-N \\ (k\neq 0)}}^{N} R_{x,k} \cdot \frac{e^{-ik\omega_2} - e^{-ik\omega_1}}{-ik} \qquad (1.4.24)$$

で与えられる。又 x_k は

$$x_k = E\{x_k\} + \int_{-\omega_f}^{\omega_f} e^{i\omega t}\, d\zeta_x(\omega) \qquad (1.4.25)$$

で $\xi_x(\omega)$ は(1.4.23)を満たす。ここではアナログ系と同じ記号を使用した。区別する必要のあるときは別の記号を用いることにする。

次にアナログ系の信号 $x(t)$ をサンプル周期 T_s でサンプリングした場合

$$x_k = x(k \cdot T_s) \qquad (1.4.26)$$

を考える。便宜上 $x(t)$ は平均値 0 の弱定常信号であるとすると（1.4.22）より

$$x_k = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega k \cdot T_s}\, d\zeta_x(\omega) \qquad (1.4.27)$$

であるが一方で（1.4.25）で示されているように

$$x_k = \int_{-\omega_f}^{\omega_f} e^{i\omega k \cdot T_s}\, d\zeta'_x(\omega) \qquad (1.4.28)$$

と表わされる。そこで $\zeta_x(\omega)$ と $\zeta'_x(\omega)$ の間には

$$\zeta_x^{'}(\omega) = \zeta_x(\omega) + \sum_{j=1}^{\infty} \{ \zeta_x(\omega+2j\cdot\omega_f) + \zeta_x(\omega-2\cdot j\cdot\omega_f) \} \qquad (1.4.29)$$

という関係があることがわかる。すなわちサンプル周期T_s でサンプリングすると$|\omega| > \omega_f$ であるようなスペクトル成分はすべて$|\omega| \leqq \omega_f$ の周波数成分として認識されてしまう。これがいわゆるサンプリングに伴う別名効果（Aliasing Effect） といわれるものである。すなわち（1.4.29）の右辺の第2項はサンプリングにともなう別名によって発生する誤差となって現われる。元のアナログ信号において$|\omega| > \omega_f$ の成分を持たない場合すなわち

$$S_x(\omega) = 0 \qquad |\omega| > \omega_f \qquad (1.4.30)$$

のような場合には（1.4.29）が

$$\zeta_x^{'}(\omega) = \zeta_x(\omega) \qquad (1.4.31)$$

となる。このような信号は**帯域制御信号**といわれる。この場合には$\zeta_x^{'}(\omega)$ と$\zeta_x(\omega)$ は区別しなくとも良い。この論文であつかうディジタル信号はこのような条件を満足しているものと考えることにする。

1.4.4 アナログ・フィルタ

定常な線形システムで（1.2.36）のような伝達関数$R(S)$ を持つシステムを考える。このシステムは安定であるとして**1.4.1**および**1.4.2**で述べたようなスペクトル分解のできる信号を入力とした場合の出力波形について考えてみる。ここでは平均値0の確率連続な弱定常信号を考える。すなわちシステム$R(S)$ への入力$u(t)$ は

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\zeta_u(\omega) \qquad (1.4.32)$$

とスペクトル分解ができ，このとき出力$y(t)$ は

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\cdot R(i\omega)\, d\zeta_u(\omega) \qquad (1.4.33)$$

となる。そして$R^{*}(\omega)$をωの実関数として

$$R(i\omega) = R^{*}(\omega)\cdot e^{-i\cdot b(\omega)} \qquad (1.4.34)$$

と分解した場合$R^{*}(\omega)$ は**振巾特性**,$b(\omega)$ は**位相特性**といわれる。またパワー・スペクトル測度との間には

$$dS_y(\omega) = |R(i\omega)|^2\cdot dS_u(\omega) \qquad (1.4.35)$$

という関係がある。$|R(i\omega)|^2$ はパワー**伝送特性**という。

このようにシステムの周波数特性$R(i\omega)$ を適当に選べば入力信号をいろいろに変形加工することができる。このような観点よりシステムをみたときこれをアナログ・フィルタという。

1.4.5 ディジタル・フィルタ

パルス伝達関数$Z(z)$ が（1.2.41）のように与えられる定常なディジタル線形システムを考える。このシステムは安定であるとして1.4.3で述べたようなスペクトル分解のできる信号を入力とした場合の波形について考えてみる。ここでは平均値0の弱定常信号を考えシステム$Z(z)$ への入力u_k を

$$u_k = \int_{-\omega_f}^{\omega_f} e^{i\omega k \cdot T_s} \, d\zeta_u(\omega) \qquad (1.4.36)$$

とすると出力$y(t)$ は

$$y_k = \int_{-\omega_f}^{\omega_f} e^{i\omega k \cdot T_s} \, Z(e^{i\omega \cdot T_s}) \, d\zeta_u(\omega) \qquad (1.4.37)$$

となる。そして

$$Z(e^{i\omega \cdot T_s}) = Z^*(\omega \cdot T_s) \cdot e^{-i \cdot b(\omega)} \qquad (1.4.38)$$

と分解する。ただし$Z^*(\omega \cdot T_s)$，$g(\omega)$はωの実関数である。 $Z^*(\omega \cdot T_s)$，$b(\omega)$は夫々振巾特性，位相特性といわれる。またパワー・スペクトル測度の間には

$$dS_y(\omega) = |Z(e^{i\omega \cdot T_s})|^2 \cdot dS_u(\omega) \qquad (1.4.39)$$

という関係がある。$|Z(e^{i\omega \cdot T_s})|^2$ はパワー伝送比という。

このように信号の処理系としてシステムを眺めた場合をディジタル・フィルタと呼ぶことにする。

ディジタル・フィルタでは（1.2.41）の$Z(e^{i\omega T_s})$ の他に

$$G(z) = \sum_{k=1}^{N} g_k \cdot z^{1-k} \qquad (1.4.40)$$

のようなものを考えることができやはり（1.4.37），（1.4.39）と同じ式を成立させる。

このような形態のものをＦＩＲ（Finite Impulse Response）形という。[52]，[53] また（1.2.41）のようにz^{-1}の有理式となっているものをＩＩＲ（Infinite Impulse Response）形または自己回帰形といわれる。

ＦＩＲ形はシステムが常に安定でありＩＩＲ形では得られない有用な性質を示し，本論文で用いたフィルタもこれに属する。

1.4.6 ディジタル・フィルタの設計

ディジタル・フィルタの設計法は大きく分けて2つすなわち

〔1〕 アナログ・フィルタを先に設計しディジタル・フィルタへ変換する方法。[30]

〔2〕 直接周波数特性が理想形となるようにパラメータを選ぶ方法。[52]

がある。前者はＩＩＲ形のフィルタにしか適用できない。すなわち得られたアナログ・フィルタを1.3.2で述べた種々の変換でディジタル・フィルタ化する方法である。

2番目の方法も広く研究されているが，その中で特に本論文で主題となるＦＩＲ形フィルタの設計法について詳説しておく。

1.4.7　ＦＩＲ形ディジタル・フィルタ

パルス伝達関数（1.4.40）で与えられる $G(z)$ を持つＦＩＲディジタル・フィルタの周波数特性は[52]

$$G(e^{i\omega T_s}) = \sum_{k=1}^{N} g_k \cdot e^{i\omega\cdot(1-k)\cdot T_s} \qquad (1.4.41)$$

と表わされる。設計したいと考えている理想的な周波数特性を $I_*(i\omega)$ とする。そうするとＦＩＲフィルタの設計とは係数 $g_1, g_2, \cdots, g_N$ を選んで $G(e^{i\omega T_s})$ と $I_*(i\omega)$ ができるだけ近くなるようにするような最適化問題となる。そこで良く用いられる理想特性と評価基準および解法等について簡単に述べておく。

理想特性としては次のようなものが考えられる。

〔１〕 理想低域フィルタ [52]

$$I_L(i\omega) = \begin{cases} e^{-i\cdot\omega\cdot b} & |\omega| \leqq \omega_c (< \omega_f) \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} \qquad (1.4.42)$$

〔２〕 理想微分フィルタ [50]

$$I_D(i\omega) = \begin{cases} i\omega e^{-i\cdot\omega\cdot b} & |\omega| \leqq \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} \qquad (1.4.43)$$

〔３〕 理想Hilbert 変換 [51]

$$I_H(i\omega) = \begin{cases} i\cdot e^{-i\omega\cdot b} & 0 \leqq \omega \leqq \omega_c \\ -i\cdot e^{-i\omega\cdot b} & -\omega_c \leqq \omega < 0 \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} \qquad (1.4.44)$$

ここで $\omega_c (< \omega_f)$ は遮断周波数（Cut Off Frequency）という。

評価のための評価指標としては次のようなものがある。

1° 最小自乗誤差

$$C_L = \int_{-\omega_f}^{\omega_f} W(\omega\cdot T_s)^2 \cdot |G(e^{i\cdot\omega\cdot T_s}) - I_*(i\cdot\omega)|^2 d\omega \qquad (1.4.45)$$

2° 一様最良化誤差

$$C_U = \underset{g}{\mathrm{Min}}\ \underset{\omega}{\mathrm{Max}}\ W(\omega\cdot T_s)\cdot|G(e^{i\omega\cdot T_s}) - I_*(i\cdot\omega\cdot)| \qquad (1.4.46)$$

ここで　$g = (g_1, g_2, \cdots, g_N)^T$　である。

ここで $W(\cdot)$ は荷重関数である。[51]

最小自乗誤差C_Lを最小にするようなgは単に線形方程式を解くだけで良く従ってgについて陽の形に解くことができる。

一様最良化誤差C_Uを最小にするようなgはRemezの交替法[51]等により解くことができ解法プログラムをはじめとして数多くの設計例が発表されている。

次にＦＩＲフィルタの特別の形態について述べておく。ここでNとして$N=2\cdot m$（偶数）と$N=2m+1$（奇数）の場合について分けて考える。またフィルタは係数gが

$$g_k = g_{N+1-k} \qquad (k=1,2,\cdots,N) \qquad (1.4.47)$$

をみたすとき対称形

$$g_k + g_{N+1-k} = 0 \qquad (k=1,2,\cdots,N) \qquad (1.4.48)$$

をみたすとき反対称形という。

これら４つの場合の周波数特性について考えてみる。[51] この中で$\theta=\omega\cdot T_s$を用いてある。

〔１〕 対称形で偶数（$N=2\cdot m$） の場合

$$G(e^{i\omega\cdot T_s}) = G^*(\omega\cdot T_s)\cdot e^{-i(m-\frac{1}{2})\cdot\omega\cdot T_s} \qquad (1.4.49)$$

$$G^*(\theta) = 2\cdot\sum_{k=1}^{m} g_k\cdot\cos(m+\frac{1}{2}-k)\cdot\theta \qquad (1.4.50)$$

〔２〕 対称形で奇数（$N=2\cdot m+1$） の場合

$$G(e^{i\cdot\omega\cdot T_s}) = G^*(\omega\cdot T_s)\cdot e^{-i\cdot m\cdot\omega\cdot T_s} \qquad (1.4.51)$$

$$G^*(\theta) = g_{m+1}+2\cdot\sum_{k=1}^{m} g_k\cdot\cos(m+1-k)\cdot\theta \qquad (1.4.52)$$

〔３〕 反対称形で偶数（$N=2\cdot m$） の場合

$$G(e^{i\cdot\omega\cdot T_s}) = i\cdot G^*(\omega\cdot T_s)\cdot e^{-i\cdot(m-\frac{1}{2})\cdot\omega\cdot T_s} \qquad (1.4.53)$$

$$G^*(\theta) = 2\cdot\sum_{k=1}^{m} g_k\cdot\sin(m+\frac{1}{2}-k)\cdot\theta \qquad (1.4.54)$$

〔４〕 反対称形で奇数（$N=2\cdot m+1$）の場合

$$G(e^{i\cdot\omega\cdot T_s}) = i\cdot G^*(\omega\cdot T_s)\cdot e^{-i\cdot m\cdot\omega\cdot T_s} \qquad (1.4.55)$$

$$G^*(\theta) = 2\cdot\sum_{k=1}^{m} g_k\cdot\sin(m+1-k)\cdot\theta \qquad (1.4.56)$$

となる。

これらの特徴を述べると次のようになる。

1° $G^*(\theta)$はθの実関数である。

2° 位相特性が線形（線形位相特性という）である。

3° 〔３〕と〔４〕では一様に90°（$\pi/2$）だけ位相が進んでいる。

そこで低域（帯域，高域等も含めて）フィルタのためには〔 1 〕と〔 2 〕がまた微分や Hilbert 変換には〔 3 〕と〔 4 〕が用いられる。

線形位相特性の場合たとえば（1.4.38）で $b(\omega) = b\cdot\omega\cdot T_s$ の場合には（1.4.37）より

$$y_k = \int_{-\omega_f}^{\omega_f} e^{i\omega\cdot(k-b)\cdot T_s\cdot Z^*(\omega\cdot T_s)}\, d\zeta_u(\omega) \qquad (1.4.57)$$

となるから理想的な遅れのないフィルタ $Z^*(\omega\cdot T_s)$ を通した信号を b だけ遅らせた信号となる。

第2章　微分信号を抽出する手法について

2.1　序

この章では観測信号より微分成分を抽出する手法について，主として著者の行った研究結果について論ずる。まず我々の欲する微分信号とは何かということを考察する。そしてディジタル系で微分信号を抽出できるようなフィルタをディジタル微分フィルタと名付けその設計法を示す。ディジタルフィルタとしてはＦＩＲ形のものを考え，はじめに最小自乗法の意味で最適な微分フィルタの設計法とその性質を示す。次に高階の微分フィルタを容易に実現できるカスケード形接続の微分フィルタの設計法とその性質を示す。このフィルタが第３章以下の同定手法および他の制御問題に有効に用いられているわけである。次にZolotarev　の多項式と呼ばれる多項式を用いると一様最良な意味で最適な微分フィルタを得ることができることを示し，その設計法と性質を与える。そしてこれらいくつかのディジタル微分フィルタの性質を遮断周波数や減衰特性等を基準に比較した結果を与えて利用する際の目安としている。

最後にＦＩＲ形フィルタに類するものをアナログ系で実現する手法を考え，微分フィルタの場合アナログ・ディジタルのハイブリッド系でこれが実現できることを示す。

2.2　微分信号

微分というのは本来時間軸が実数すなわちアナログ系に固有の概念である。従ってディジタル系で微分信号を抽出するというのは何らかの意味のアナログ系での微分信号のサンプル値を得ることを意味する。我々がでくわす自然界よりのアナログ信号のほとんどは1.4.1ないし1.4.2のように単振動の線形結合で表わすこと（スペクトル分解）ができる。そこで微分という演算子は線形であることを考えると，信号の微分を考えるには，単に角周波数ωの単振動$e^{i\omega t}$に対して我々の欲する微分を考察しておけばよいわけである。

ところで$x(t)=e^{i\omega t}$を数学的に正しく微分すると$dx(t)/dt=i\omega\cdot e^{i\omega t}=i\omega\cdot x(t)$となる。すなわち正しい微分子の周波数特性は$i\omega$である。そこでもし仮に周波数特性が$i\omega$となるフィルタができたとしても，このフィルタに（1.4.12）のような概周期関数

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k\cdot e^{i\omega_k t} \qquad (2.2.1)$$

を入力として加えると各調和成分（単振動）が微分されて，出力信号として

$$X^{(1)}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k\cdot i\cdot\omega_k\cdot e^{i\omega_k t} \qquad (2.2.2)$$

が出力される。このとき$dx(t)/dt=X^{(1)}(t)$であることも，$X^{(1)}(t)$が有界であるということも

保証されない。そこで工学的な立場からは全調和成分を一様に微分するのではなく，必要とする成分のみの微分を抽出するフィルタに興味がある。レーダでの飛翔体位置の観測信号の中からその速度や加速度を知ろうとするとき，プラントにおいて温度，圧力，流量電力等の工学量の観測値の中からそれらの変化率を求めようとするとき，またこの論文であつかっているように同定や制御系の構成そして推定等の制御問題の解決のために用いようとする場合等は観測信号の成分のうち有用成分の含まれている低域成分のみの微分を必要とする。

そこで我々は（1.4.43）のようなフィルタ

$$I_D(i\omega)=\begin{cases} i\cdot\omega\cdot e^{-i\cdot\omega\cdot b} & |\omega|\leqq\omega_c \\ 0 & |\omega|>\omega_c \end{cases} \qquad (2.2.3)$$

に（2.2.1）の信号を通した時の出力信号

$$x_I^{(1)}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k\cdot I_D(i\omega_k)\cdot e^{i\omega_k\cdot t}$$

$$=i\omega\cdot\sum_{|\omega_k|\leqq\omega_c} C_k\cdot e^{i\cdot\omega_k\cdot(t-b)} \qquad (2.2.4)$$

を求めようとする。というのは$I_D(i\omega)$のような特性にいくらでも近い特性のものが作り得るということと（2.2.4）の級数は有限級数となり常に存在するという保証が得られるという点に着目しているわけである。

他のスペクトル分解の可能な信号に対しても$I_D(i\omega)$を通した信号は存在する。又$I_D(i\omega)$という周波数特性を近似するフィルタがあったとき、それを一つのシステムとして考え伝達関数又は時間領域での定常な線形微分方程式で考えるとスペクトル分解が可能でないような信号に対しても取り扱うことができるが、このように周波数領域で作った微分フィルタはこのような信号に対しても微分演算子として働く。これは以下の節で別個にあつかわれることになろう。

又$x_{I_D}^{(1)}(t)$は正しい微分$dx(t)/dt$よりもスペクトル成分が限られているばかりでなく時間的にもbだけ遅れている。遅れのない微分信号は色々な分野で重要となるが，この点に関しては状態観測器を用いる方法等がある。

2.3 最小自乗法によるディジタル微分フィルタ（D2），（D5），（E1），（E5）

平均値0で確率連続な弱定常信号で$|\omega|\leqq\omega_f$に帯域制限された信号$x(t)$を考え，これに基づいてディジタル微分フィルタを設計してみよう。$\omega_c\leqq\omega_f$として2.2の議論により

$$x_I^{(1)}(t)=\int_{-\omega_f}^{\omega_f} e^{i\omega\cdot t}\cdot I_D(i\omega)\cdot d\zeta x(\omega) \qquad (2.3.1)$$

$$= \int_{-\omega_c}^{\omega_c} i\omega \cdot e^{i\omega \cdot (t-b)} d\zeta_x(\omega) \qquad (2.3.2)$$

を求めたい微分信号とする。

ところで $x(t)$は直接観測できず雑音 $e(t)$の加わった信号

$$\hat{x}(t) = x(t) + e(t) \qquad (2.3.3)$$

が観測できるとする。ただし $x(t)$と $e(t)$は無相関とする。ここで

$$T_s = \pi / \omega_f \qquad (2.3.4)$$

として$\hat{x}(t)$をT_s ごとにサンプリングしたもの を $\hat{x}_k = \hat{x}(k \cdot T_s)$とする。 信号 $\hat{x}_k$をディジタル・フィルタ

$$D(z) = \sum_{k=1}^{N} d_k \cdot Z^{1-k} \qquad (2.3.5)$$

$$d_k + d_{N+1-k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots, N)$$

に通すとする。$D(z)$の周波数特性は 1. 4. 7 の後半で考えたように

$$D(e^{i\omega \cdot T_s}) = i\omega \cdot D^*(\omega \cdot T_s) \cdot e^{-i\omega \cdot (\frac{N-1}{2}) \cdot T_s} \qquad (2.3.6)$$

と表わされ，$\theta = \omega \cdot T_s$ とすると，$\theta \cdot D^*(\theta)$は θ の実関数で具体的には（1. 4. 5 4），（1. 4. 5 6）で $g_k \to d_k$ と置換した式に相当する。

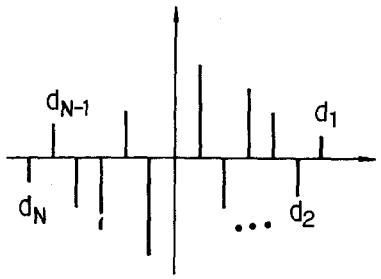


図 2. 3. 1　d_k の変化

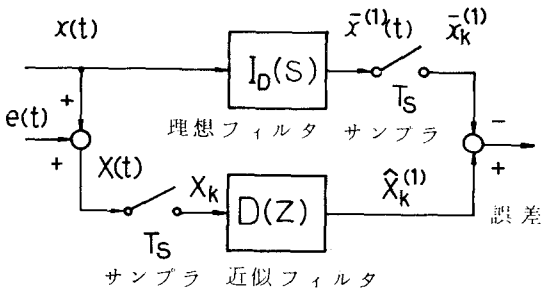


図 2. 3. 2　求めたい微分信号

信号$\hat{x}_k$を$D(z)$に通して得られる信号を$\hat{X}_k^{(1)}$とする。$\hat{X}_k^{(1)}$も　$x_{I,k}^{(1)}=x_I^{(1)}(k\cdot T_s)$　も弱定常信号であるので，これらの差の絶対値の2乗の平均値

$$C_L=E\{|\hat{X}_k^{(1)}-x_{I,k}^{(1)}|^2\}=\int_{-\omega_f}^{\omega_f}|D(e^{i\omega\cdot T_s})-I_D(i\omega)|^2 dS_x(\omega)$$

$$+\int_{-\omega_f}^{\omega_f}|D(e^{i\omega\cdot T_s})|^2 dS_e(\omega) \qquad (2.3.7)$$

は時間に依存しなくなる。また（2.2.3）と（2.3.7）を比較するとbとしては

$$b=(N-1)\cdot T_s/2 \qquad (2.3.8)$$

とすれば位相特性に考慮を払う必要がなくなる。さらにC_Lは次の$I^*_{\omega_c}(\omega)$を用いると

$$I^*_{\omega_c}(\omega)=\begin{cases}1 & ,|\omega|\leqq\omega_c<\omega_f\\ 0 & ,|\omega|>\omega_c\end{cases} \qquad (2.3.9)$$

$$C_L=\int_{-\omega_f}^{\omega_f}\{\omega^2\cdot|D^*(\omega\cdot T_s)-I^*_{\omega_c}(\omega)|^2 dS_x(\omega)+|D(e^{i\omega T_s})|^2 dS_e(\omega)\} \qquad (2.3.10)$$

となる。これは雑音の項を除けば1.4.6で考察した（1.4.45）の場合にあたる。
$E\{|\hat{X}_k^{(1)}-x_{I,k}^{(1)}|^2\}$を最小にする$D(z)$を定めればその入力に対して最適な出力を得る。ただしこれは入力のスペクトル（パワースペクトル測度を通して）に依存するので他の入力では最適でなくなる。そこで入力としては最も共通的な性格のものを選び，それに対してC_L式を最小にする$D(z)$を選ばねばならない。そのようなものとして白色信号すなわち

$$\frac{dS_x(\omega)}{d\omega}=\begin{cases}\sigma_x^2/2\cdot\omega_f & |\omega|\leqq\omega_f\\ 0 & 他\end{cases} \qquad (2.3.11)$$

$$\frac{dS_e(\omega)}{d\omega}=\begin{cases}\sigma_e^2/2\cdot\omega_f & |\omega|\leqq\omega_f\\ 0 & 他\end{cases} \qquad (2.3.12)$$

を考える。σ_x^2，σ_e^2は夫々$x(t)$，$e(t)$の分散である。そして特に（2.3.10）でbがT_sの整数倍になる。

$$N=2m+1 \qquad (2.3.13)$$

の場合に計算を進めてみる。このときC_Lは

$$C_L=\frac{\sigma_x^2}{2\omega_f}\{\int_{-\omega_f}^{\omega_f}|2\cdot\sum_{k=1}^{m}d_k\cdot\sin(m+1-k)\omega\cdot T_s-\omega\cdot I^*_{\omega_c}(\omega)|^2 d\omega$$

$$+4\gamma\cdot\omega f\cdot\sum_{k=1}^{m} d_k^2 \}$$

$$= 2\cdot\sigma_x^2\cdot(1+\gamma)\cdot(\|\mathbf{d}-\mathbf{a}\|^2-\|\mathbf{a}\|^2+\frac{2}{3}\cdot\omega_c^3) \qquad (2.3.14)$$

となる。ここで，γは信号対雑音比である。すなわち

$$\gamma=\sigma_e^2/\sigma_x^2 \qquad (2.3.15)$$

$$\mathbf{d}=(d_1, d_2, \cdots, d_m)^T \qquad (2.3.16)$$

$$\mathbf{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_m)^T \qquad (2.3.17)$$

とし

$$a_k=\frac{1}{2\omega s\cdot(1+\gamma)}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\omega\cdot\sin\{(m+1-k)\omega\cdot T_s\}\,d\omega \qquad (2.3.18)$$

$$(k=1,2,\cdots,m)$$

となる。従ってC_Lを最小にする$\mathbf{d}$を求めるには（2.3.14）式よりわかるように$\|\mathbf{d}-\mathbf{a}\|$を最小にする$\mathbf{d}$を求めればよい。$\mathbf{d}$に何の制限もなければ$\mathbf{d}=\mathbf{a}$でよいが，これば微分フィルタとして少しあいまいになる点がある。それは時間領域で考えた場合当然満たさねばならない条件があるからである。ランプ状の信号

$$x(t)=A\cdot t+B \qquad (2.3.19)$$

を微分フィルタに加えた場合にはその出力がAとならなければならないことである。これはフィルタのパルス伝達関数を時間域にもどした差分方程式を用いて

$$\sum_{j=1}^{N} d_j\cdot\{A\cdot(k+1-j)\cdot T_s+B\}=A \qquad (2.3.20)$$

と表わされる。（2.3.20）と係数の満たす条件（2.3.6）を考慮すると

$$\mathbf{N}=(m, m-1, \cdots, 1),\ b=-1/2\cdot T_s \qquad (2.3.21)$$

として

$$\mathbf{N}\cdot\mathbf{d}=b \qquad (2.3.22)$$

と表わされる。そこで条件（2.3.22）を満たし$\|\mathbf{d}-\mathbf{a}\|$を最小にする$\mathbf{d}$を求めることになる。まず（2.3.22）を満たす$\mathbf{d}$は

$$\mathbf{d}=\mathbf{N}^+\cdot b+(\mathbf{I}-\mathbf{N}^+\cdot\mathbf{N})\cdot\mathbf{v} \qquad (2.3.23)$$

となる。ここで$\mathbf{v}$は任意のn次元列ベクトルである。そこで

$$\|\mathbf{d}-\mathbf{a}\|=\|(\mathbf{I}-\mathbf{N}^+\cdot\mathbf{N})\cdot\mathbf{v}+\mathbf{N}^+\cdot b-\mathbf{a}\| \qquad (2.3.24)$$

となりこれを最小にする$\|\mathbf{v}\|$の最小のものは

$$\mathbf{v}=(\mathbf{I}-\mathbf{N}^+\mathbf{N})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{N}^+\cdot b) \qquad (2.3.25)$$

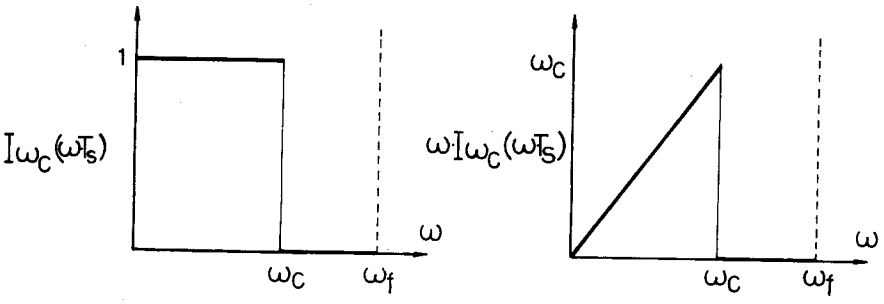


図 2. 3. 3　理想微分フィルタ $I_D(i\omega)$ の振巾特性

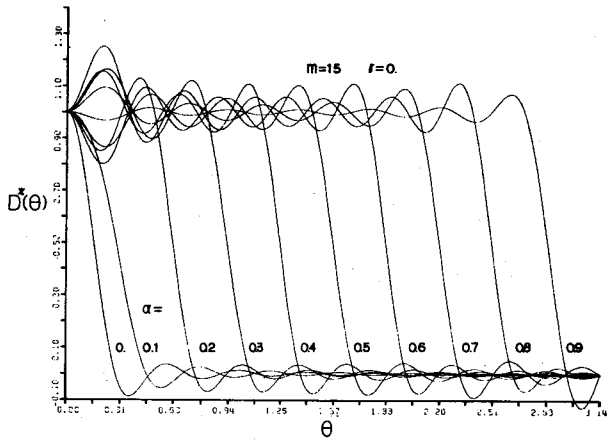


図 2. 3. 4　$D^*(\theta)$ の変化（$m=15$, $r=0$）

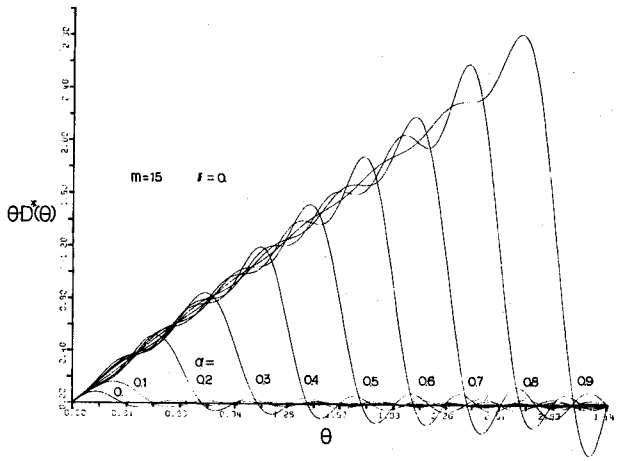


図 2. 3. 5　$\theta \cdot D^*(\theta)$ の変化（$m=15$, $r=0$）

N= 3 m = 1 γ = 0.0

L	L	ALPHA=0.0	ALPHA=0.1	ALPHA=0.2	ALPHA=0.3	ALPHA=0.4	ALPHA=0.5	ALPHA=0.6	ALPHA=0.7	ALPHA=0.8	ALPHA=0.9
1	3	0.50000E 00	0.50000E 00	0.50000E 00	0.50000E 00	0.50000E 00	0.50000E 00	0.50000E 00	0.50000E 00	0.50000E 00	0.50000E 00
2		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

N= 5 m = 2 γ = 0.0

L	L	ALPHA=0.0	ALPHA=0.1	ALPHA=0.2	ALPHA=0.3	ALPHA=0.4	ALPHA=0.5	ALPHA=0.6	ALPHA=0.7	ALPHA=0.8	ALPHA=0.9
1	5	0.20000E 00	0.19996E 00	0.19884E 00	0.19193E 00	0.17007E 00	0.12268E 00	0.43930E-01	0.61092E-01	0.17358E 00	-0.26389E 00
2	4	0.10000E 00	0.10008E 00	0.10232E 00	0.11613E 00	0.15987E 00	0.25465E 00	0.41214E 00	0.62218E 00	0.84716E 00	0.10278E 01
3		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

N= 7 m = 3 γ = 0.0

L	L	ALPHA=0.0	ALPHA=0.1	ALPHA=0.2	ALPHA=0.3	ALPHA=0.4	ALPHA=0.5	ALPHA=0.6	ALPHA=0.7	ALPHA=0.8	ALPHA=0.9
1	7	0.10714E 00	0.10696E 00	0.10190E 00	0.75315E-01	0.10469E-01	-0.80840E-01	-0.14664E 00	-0.12548E 00	-0.36467E-02	0.15191E 00
2	6	0.71429E-01	0.71614E-01	0.76557E-01	0.10156E 00	0.15750E 00	0.21968E 00	0.21990E 00	0.89480E-01	-0.16921E 00	-0.44619E 00
3	5	0.35714E-01	0.35903E-01	0.41182E-01	0.70943E-01	0.15359E 00	0.30315E 00	0.50012E 00	0.69747E 00	0.84935E 00	0.93664E 00
4		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

N= 9 m = 4 γ = 0.0

L	L	ALPHA=0.0	ALPHA=0.1	ALPHA=0.2	ALPHA=0.3	ALPHA=0.4	ALPHA=0.5	ALPHA=0.6	ALPHA=0.7	ALPHA=0.8	ALPHA=0.9
1	9	0.66667E-01	0.66162E-01	0.53992E-01	0.37445E-02	-0.70920E-01	-0.66628E-01	0.95675E-02	0.12473E 00	0.98128E-01	-0.74274E-01
2	8	0.50000E-01	0.50246E-01	0.55623E-01	0.72106E-01	0.71257E-01	-0.65877E-02	-0.15484E 00	-0.23239E 00	-0.87757E-01	0.21558E 00
3	7	0.33333E-01	0.33807E-01	0.45704E-01	0.99416E-01	0.19803E 00	0.26919E 00	0.21443E 00	0.18205E-01	-0.22528E 00	-0.40374E 00
4	6	0.16667E-01	0.16999E-01	0.25756E-01	0.69873E-01	0.17385E 00	0.32790E 00	0.49739E 00	0.66183E 00	0.82131E 00	0.95786E 00
5		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

N=11 m = 5 γ = 0.0

L	L	ALPHA=0.0	ALPHA=0.1	ALPHA=0.2	ALPHA=0.3	ALPHA=0.4	ALPHA=0.5	ALPHA=0.6	ALPHA=0.7	ALPHA=0.8	ALPHA=0.9
1	11	0.45455E-01	0.44423E-01	0.23078E-01	-0.37789E-01	-0.58021E-01	0.33107E-01	0.90682E-01	-0.26403E-01	-0.12272E 00	0.16607E-01
2	10	0.36364E-01	0.36547E-01	0.38607E-01	0.28937E-01	-0.32239E-01	-0.10870E 00	-0.50887E-01	0.14233E 00	0.17994E 00	-0.85346E-01
3	9	0.27273E-01	0.28034E-01	0.44084E-01	0.91001E-01	0.10027E 00	-0.23141E-01	-0.20018E 00	-0.21919E 00	-0.26399E-01	0.20727E 00
4	8	0.18182E-01	0.19000E-01	0.38012E-01	0.11201E 00	0.21737E 00	0.25815E 00	0.18420E 00	0.27006E-01	-0.18437E 00	-0.40928E 00
5	7	0.90909E-02	0.95955E-02	0.21910E-01	0.76171E-01	0.18352E 00	0.32238E 00	0.48228E 00	0.66623E 00	0.84177E 00	0.95509E 00
6		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

N=13 m = 6 γ = 0.0

L	L	ALPHA=0.0	ALPHA=0.1	ALPHA=0.2	ALPHA=0.3	ALPHA=0.4	ALPHA=0.5	ALPHA=0.6	ALPHA=0.7	ALPHA=0.8	ALPHA=0.9
1	13	0.32967E-01	0.31179E-01	0.88443E-03	-0.45763E-01	0.85715E-02	0.65144E-01	-0.45022E-01	-0.63822E-01	0.95377E-01	0.25747E-01
2	12	0.27473E-01	0.27416E-01	0.22595E-01	-0.12828E-01	-0.62696E-01	-0.24258E-02	0.11524E 00	0.84090E-02	-0.17474E 00	0.25631E-02
3	11	0.21978E-01	0.22942E-01	0.38221E-01	0.48906E-01	-0.35579E-01	-0.12713E 00	-0.31241E-01	0.17018E 00	0.13832E 00	-0.96581E-01
4	10	0.16484E-01	0.17830E-01	0.42795E-01	0.10598E 00	0.97463E-01	-0.44461E-01	-0.18545E 00	-0.19830E 00	-0.57613E-01	0.19885E 00
5	9	0.10989E-01	0.12197E-01	0.37819E-01	0.12200E 00	0.21550E 00	0.24394E 00	0.19403E 00	0.40931E-01	-0.20518E 00	-0.41490E 00
6	8	0.54945E-02	0.61942E-02	0.21813E-01	0.81163E-01	0.18258E 00	0.31528E 00	0.48719E 00	0.67319E 00	0.83136E 00	0.95228E 00
7		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

N=15 m = 7 γ = 0.0

L	L	ALPHA=0.0	ALPHA=0.1	ALPHA=0.2	ALPHA=0.3	ALPHA=0.4	ALPHA=0.5	ALPHA=0.6	ALPHA=0.7	ALPHA=0.8	ALPHA=0.9
1	15	0.25000E-01	0.22236E-01	-0.14115E-01	-0.25276E-01	0.48277E-01	-0.18015E-01	-0.46924E-01	0.82361E-01	-0.40382E-01	-0.54960E-01
2	14	0.21429E-01	0.20917E-01	0.73992E-02	-0.34097E-01	-0.13710E-01	0.73459E-01	-0.23364E-01	-0.10183E 00	0.11402E 00	0.51113E-01
3	13	0.17857E-01	0.18863E-01	0.28024E-01	-0.31052E-02	-0.81265E-01	0.45031E-02	0.13329E 00	-0.23268E-01	-0.15921E 00	0.23701E-01
4	12	0.14286E-01	0.16100E-01	0.42564E-01	0.56684E-01	-0.50834E-01	-0.13158E 00	-0.16803E-01	0.14484E 00	0.15074E 00	-0.79670E-01
5	11	0.10714E-01	0.12699E-01	0.47052E-01	0.11181E 00	0.86322E-01	-0.40304E-01	-0.17462E 00	-0.21731E 00	-0.48294E-01	0.21153E 00
6	10	0.71429E-02	0.87760E-02	0.39991E-01	0.12589E 00	0.20807E 00	0.24671E 00	0.20125E 00	0.28260E-01	-0.19897E 00	-0.40644E 00
7	9	0.35714E-02	0.44837E-02	0.22899E-01	0.83108E-01	0.17887E 00	0.21666E 00	0.49080E 00	0.66686E 00	0.83447E 00	0.95651E 00
8		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

N=17 m = 8 γ = 0.0

L	L	ALPHA=0.0	ALPHA=0.1	ALPHA=0.2	ALPHA=0.3	ALPHA=0.4	ALPHA=0.5	ALPHA=0.6	ALPHA=0.7	ALPHA=0.8	ALPHA=0.9
1	17	0.19608E-01	0.15678E-01	-0.21698E-01	0.58629E-02	0.24366E-01	-0.51927E-01	0.58236E-01	-0.33371E-01	-0.17093E-01	0.72503E-01
2	16	0.17157E-01	0.15964E-01	-0.54361E-02	-0.27621E-01	0.38531E-01	0.27557E-02	-0.70219E-01	0.95709E-01	-0.33545E-01	-0.83961E-01
3	15	0.14706E-01	0.15541E-01	0.14836E-01	-0.36107E-01	-0.22064E-01	0.91263E-01	-0.43331E-01	-0.90393E-01	0.11988E 00	0.26255E-01
4	14	0.12255E-01	0.14384E-01	0.34224E-01	-0.47813E-02	-0.98226E-01	0.19340E-01	0.11665E 00	-0.13734E-01	-0.15432E 00	0.29843E-02
5	13	0.98039E-02	0.12516E-01	0.47523E-01	0.55343E-01	-0.56403E-01	-0.11971E 00	-0.30114E-01	0.15247E 00	0.15465E 00	-0.96242E-01
6	12	0.73529E-02	0.10011E-01	0.50772E-01	0.11081E 00	0.82145E-01	-0.31402E-01	-0.18460E 00	-0.21159E 00	-0.45364E-01	0.19910E 00
7	11	0.49020E-02	0.69842E-02	0.42470E-01	0.12522E 00	0.20529E 00	0.25264E 00	0.19459E 00	0.32074E-01	-0.19702E 00	-0.41473E 00
8	10	0.24510E-02	0.35878E-02	0.24139E-01	0.82772E-01	0.17748E 00	0.31963E 00	0.48747E 00	0.66877E 00	0.83545E 00	0.95237E 00
9		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

N=19 m = 9 γ = 0.0

L	L	ALPHA=0.0	ALPHA=0.1	ALPHA=0.2	ALPHA=0.3	ALPHA=0.4	ALPHA=0.5	ALPHA=0.6	ALPHA=0.7	ALPHA=0.8	ALPHA=0.9
1	19	0.15789E-01	0.10561E-01	-0.21964E-01	0.26544E-01	-0.23104E-01	0.11326E-01	0.77540E-02	-0.31741E-01	0.57136E-01	-0.79762E-01
2	18	0.14035E-01	0.11951E-01	-0.13946E-01	-0.35054E-02	0.32520E-01	-0.55925E-01	0.55500E-01	-0.22169E-01	-0.37259E-01	0.10065E 00
3	17	0.12281E-01	0.12703E-01	0.13471E-02	-0.35819E-01	0.45666E-01	-0.74195E-03	-0.72614E-01	0.10551E 00	-0.51190E-01	-0.59329E-01
4	16	0.10526E-01	0.12746E-01	0.26653E-01	-0.43133E-01	-0.15948E-01	0.88265E-01	-0.45384E-01	-0.81991E-01	0.10475E 00	0.47369E-01
5	15	0.87719E-02	0.12054E-01	0.39069E-01	-0.10637E-01	-0.83130E-01	0.16841E-01	0.11494E 00	-0.67319E-02	-0.16693E 00	0.20581E-01
6	14	0.70175E-02	0.10653E-01	0.51399E-01	0.50659E-01	-0.52326E-01	-0.12171E 00	-0.31483E-01	0.15807E 00	0.14457E 00	-0.82167E-01
7	13	0.52632E-02	0.86134E-02	0.53679E-01	0.10729E 00	0.85203E-01	-0.32901E-01	-0.18563E 00	-0.20739E 00	-0.52926E-01	0.20966E 00
8	12	0.35088E-02	0.60523E-02	0.44408E-01	0.12287E 00	0.20733E 00	0.25164E 00	0.19391E 00	0.34874E-01	-0.20206E 00	-0.40769E 00
9	11	0.17544E-02	0.31219E-02	0.25108E-01	0.81601E-01	0.17850E 00	0.31913E 00	0.48713E 00	0.67017E 00	0.83293E 00	0.95588E 00
10		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

表 2. 3. 1　微分フィルタの係数 d の表（ $\gamma = 0$ ）

N=13 m = 6 γ= 0.10000E 00

L	L	ALPHA=0.0	ALPHA=0.1	ALPHA=0.2	ALPHA=0.3	ALPHA=0.4	ALPHA=0.5	ALPHA=0.6	ALPHA=0.7	ALPHA=0.8	ALPHA=0.9
1	13	0.32967E-01	0.31342E-01	0.38010E-02	-0.38605E-01	0.10789E-01	0.62219E-01	-0.37932E-01	-0.55023E-01	0.89704E-01	0.26404E-01
2	12	0.27473E-01	0.27421E-01	0.23039E-01	-0.91641E-02	-0.54499E-01	0.29222E-03	0.10726E 00	0.10142E-01	-0.15636E 00	0.48276E-02
3	11	0.21978E-01	0.22854E-01	0.36744E-01	0.46458E-01	-0.30710E-01	-0.12266E 00	-0.26403E-01	0.15671E 00	0.12774E 00	-0.85803E-01
4	10	0.16484E-01	0.17708E-01	0.41312E-01	0.97842E-01	0.90101E-01	-0.38921E-01	-0.16709E 00	-0.17877E 00	-0.50877E-01	0.18227E 00
5	9	0.10989E-01	0.12087E-01	0.35380E-01	0.11191E 00	0.19691E 00	0.22276E 00	0.17739E 00	0.38209E-01	-0.18553E 00	-0.37618E 00
6	8	0.54945E-02	0.61306E-02	0.20330E-01	0.74284E-01	0.16649E 00	0.28712E 00	0.44340E 00	0.61250E 00	0.75628E 00	0.86621E 00
7		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

N=15 m = 7 γ= 0.10000E 00

L	L	ALPHA=0.0	ALPHA=0.1	ALPHA=0.2	ALPHA=0.3	ALPHA=0.4	ALPHA=0.5	ALPHA=0.6	ALPHA=0.7	ALPHA=0.8	ALPHA=0.9
1	15	0.25000E-01	0.22487E-01	-0.10559E-01	-0.20705E-01	0.46161E-01	-0.14105E-01	-0.40386E-01	0.77146E-01	-0.34439E-01	-0.47691E-01
2	14	0.21429E-01	0.20963E-01	0.86746E-02	-0.29049E-01	-0.10516E-01	0.68729E-01	-0.19292E-01	-0.90639E-01	0.10560E 00	0.48415E-01
3	13	0.17857E-01	0.18772E-01	0.27100E-01	-0.12004E-02	-0.72254E-01	0.57171E-02	0.12279E 00	-0.19530E-01	-0.14311E 00	0.23170E-01
4	12	0.14286E-01	0.15935E-01	0.39993E-01	0.52829E-01	-0.44914E-01	-0.11832E 00	-0.13977E-01	0.13297E 00	0.13834E 00	-0.71129E-01
5	11	0.10714E-01	0.12518E-01	0.43749E-01	0.10262E 00	0.79448E-01	-0.35666E-01	-0.15777E 00	-0.19658E 00	-0.42930E-01	0.19327E 00
6	10	0.71429E-02	0.86275E-02	0.37004E-01	0.11509E 00	0.18381E 00	0.22493E 00	0.18360E 00	0.26340E-01	-0.18023E 00	-0.36884E 00
7	9	0.35714E-02	0.44008E-02	0.21142E-01	0.75877E-01	0.16293E 00	0.28820E 00	0.44650E 00	0.60656E 00	0.75893E 00	0.86988E 00
8		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

N=17 m = 8 γ= 0.10000E 00

L	L	ALPHA=0.0	ALPHA=0.1	ALPHA=0.2	ALPHA=0.3	ALPHA=0.4	ALPHA=0.5	ALPHA=0.6	ALPHA=0.7	ALPHA=0.8	ALPHA=0.9
1	17	0.19608E-01	0.16036E-01	-0.17943E-01	0.71125E-02	0.23933E-01	-0.45624E-01	0.54725E-01	-0.28555E-01	-0.13757E-01	0.67695E-01
2	16	0.17157E-01	0.16073E-01	-0.33822E-02	-0.23550E-01	0.36568E-01	0.40649E-02	-0.62276E-01	0.98568E-01	-0.28936E-01	-0.74769E-01
3	15	0.14706E-01	0.15465E-01	0.14826E-01	-0.31488E-01	-0.18721E-01	0.84303E-01	-0.38055E-01	-0.80838E-01	0.11031E 00	0.25205E-01
4	14	0.12255E-01	0.14190E-01	0.32226E-01	-0.32326E-02	-0.79092E-01	0.18695E-01	0.10716E 00	-0.11371E-01	-0.13918E 00	0.38289E-02
5	13	0.98039E-02	0.12270E-01	0.44094E-01	0.51204E-01	-0.50384E-01	-0.10794E 00	-0.26485E-01	0.13950E 00	0.14148E 00	-0.86602E-01
6	12	0.73529E-02	0.97695E-02	0.46825E-01	0.10140E 00	0.75346E-01	-0.27879E-01	-0.16715E 00	-0.19688E 00	-0.40572E-01	0.18167E 00
7	11	0.49020E-02	0.67949E-02	0.39055E-01	0.11428E 00	0.18707E 00	0.23012E 00	0.17735E 00	0.29603E-01	-0.17866E 00	-0.37658E 00
8	10	0.24510E-02	0.34845E-02	0.22167E-01	0.75471E-01	0.16157E 00	0.29080E 00	0.44338E 00	0.60819E 00	0.75972E 00	0.86601E 00
9		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

N=19 m = 9 γ= 0.10000E 00

L	L	ALPHA=0.0	ALPHA=0.1	ALPHA=0.2	ALPHA=0.3	ALPHA=0.4	ALPHA=0.5	ALPHA=0.6	ALPHA=0.7	ALPHA=0.8	ALPHA=0.9
1	19	0.15789E-01	0.11036E-01	-0.18532E-01	0.25566E-01	-0.19569E-01	0.11732E-01	0.84845E-02	-0.27420E-01	0.53377E-01	-0.71075E-01
2	18	0.14035E-01	0.12141E-01	-0.11402E-01	-0.19108E-02	0.30840E-01	-0.49565E-01	0.51730E-01	-0.18877E-01	-0.32596E-01	0.92780E-01
3	17	0.12281E-01	0.12665E-01	0.23410E-02	-0.31446E-01	0.42631E-01	0.44192E-03	-0.64896E-01	0.97036E-01	-0.45420E-01	-0.52819E-01
4	16	0.10526E-01	0.12544E-01	0.19722E-01	-0.38255E-01	0.13542E-01	0.81198E-01	-0.40301E-01	-0.73580E-01	0.96186E-01	0.44019E-01
5	15	0.87719E-02	0.11756E-01	0.36314E-01	0.88722E-02	-0.74775E-01	0.16108E-01	0.10529E 00	-0.55225E-02	-0.15095E 00	0.19507E-01
6	14	0.70175E-02	0.10322E-01	0.47365E-01	0.46692E-01	-0.46931E-01	-0.11001E 00	-0.27983E-01	0.14434E 00	0.13206E 00	-0.74059E-01
7	13	0.52632E-02	0.83088E-02	0.49277E-01	0.98017E-01	0.77936E-01	-0.29432E-01	-0.16827E 00	-0.18805E 00	-0.47636E-01	0.19108E 00
8	12	0.35088E-02	0.59211E-02	0.46690E-01	0.11202E 00	0.18880E 00	0.22909E 00	0.17660E 00	0.32023E-01	-0.18337E 00	-0.37031E 00
9	11	0.17544E-02	0.29976E-02	0.22985E-01	0.74343E-01	0.16243E 00	0.29028E 00	0.44300E 00	0.60940E 00	0.75736E 00	0.86915E 00
10		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

N=13 m = 6 γ= 0.20000E 00

L	L	ALPHA=0.0	ALPHA=0.1	ALPHA=0.2	ALPHA=0.3	ALPHA=0.4	ALPHA=0.5	ALPHA=0.6	ALPHA=0.7	ALPHA=0.8	ALPHA=0.9
1	13	0.32967E-01	0.31477E-01	0.62315E-02	-0.32641E-01	0.12637E-01	0.59782E-01	-0.32024E-01	-0.47690E-01	0.84975E-01	0.26951E-01
2	12	0.27473E-01	0.27425E-01	0.23408E-01	-0.61110E-02	-0.47668E-01	0.25572E-02	0.10061E 00	0.11586E-01	-0.14104E 00	0.67147E-02
3	11	0.21978E-01	0.22781E-01	0.35513E-01	0.44618E-01	-0.26320E-01	-0.11061E 00	-0.22371E-01	0.14548E 00	0.11893E 00	-0.76821E-01
4	10	0.16484E-01	0.17606E-01	0.39243E-01	0.91062E-01	0.83966E-01	-0.34304E-01	-0.15179E 00	-0.16250E 00	0.45264E-01	0.18845E 00
5	9	0.10989E-01	0.11996E-01	0.33367E-01	0.10350E 00	0.18141E 00	0.20511E 00	0.16352E 00	0.35940E-01	-0.16915E 00	-0.34392E 00
6	8	0.54945E-02	0.60776E-02	0.19394E-01	0.68552E-01	0.15307E 00	0.26365E 00	0.40691E 00	0.56191E 00	0.69372E 00	0.79448E 00
7		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

N=15 m = 7 γ= 0.20000E 00

L	L	ALPHA=0.0	ALPHA=0.1	ALPHA=0.2	ALPHA=0.3	ALPHA=0.4	ALPHA=0.5	ALPHA=0.6	ALPHA=0.7	ALPHA=0.8	ALPHA=0.9
1	15	0.25000E-01	0.22697E-01	-0.75960E-02	-0.16897E-01	0.44398E-01	-0.10846E-01	-0.34937E-01	0.72800E-01	-0.29485E-01	-0.41633E-01
2	14	0.21429E-01	0.21002E-01	0.97374E-02	-0.24842E-01	-0.78538E-02	0.64787E-01	-0.15899E-01	-0.81290E-01	0.98584E-01	0.46166E-01
3	13	0.17857E-01	0.18696E-01	0.26330E-01	0.38769E-03	-0.64744E-01	0.67288E-02	0.11405E 00	-0.16414E-01	-0.12970E 00	0.22727E-01
4	12	0.14286E-01	0.15798E-01	0.37851E-01	0.49617E-01	-0.39980E-01	-0.10727E 00	-0.11622E-01	0.12800E 00	0.12800E 00	-0.64011E-01
5	11	0.10714E-01	0.12368E-01	0.40996E-01	0.94961E-01	0.73721E-01	-0.31801E-01	-0.14373E 00	-0.17930E 00	-0.38459E-01	0.17806E 00
6	10	0.71429E-02	0.85038E-02	0.34516E-01	0.10639E 00	0.17458E 00	0.20678E 00	0.16890E 00	0.24740E-01	-0.16462E 00	-0.33751E 00
7	9	0.35714E-02	0.43317E-02	0.19678E-01	0.69851E-01	0.14965E 00	0.26448E 00	0.40959E 00	0.55631E 00	0.69599E 00	0.79769E 00
8		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

N=17 m = 8 γ= 0.20000E 00

L	L	ALPHA=0.0	ALPHA=0.1	ALPHA=0.2	ALPHA=0.3	ALPHA=0.4	ALPHA=0.5	ALPHA=0.6	ALPHA=0.7	ALPHA=0.8	ALPHA=0.9
1	17	0.19608E-01	0.16333E-01	-0.14814E-01	0.81538E-02	0.23573E-01	-0.40005E-01	0.51798E-01	-0.24541E-01	-0.10976E-01	0.63687E-01
2	16	0.17157E-01	0.16163E-01	-0.16706E-02	-0.20158E-01	0.34969E-01	0.51559E-02	-0.55656E-01	0.82617E-01	-0.25095E-01	-0.67108E-01
3	15	0.14706E-01	0.15402E-01	0.14816E-01	-0.27638E-01	-0.15936E-01	0.78503E-01	-0.33658E-01	-0.72876E-01	0.10235E 00	0.24330E-01
4	14	0.12255E-01	0.14029E-01	0.30562E-01	-0.19420E-02	-0.71479E-01	0.18159E-01	0.99249E-01	-0.94021E-02	-0.12656E 00	0.45310E-02
5	13	0.98039E-02	0.12064E-01	0.41237E-01	0.47754E-01	-0.45368E-01	-0.98127E-01	-0.23461E-01	0.12869E 00	0.13051E 00	-0.78568E-01
6	12	0.73529E-02	0.95681E-02	0.43535E-01	0.93563E-01	0.69680E-01	-0.24943E-01	-0.15261E 00	-0.17510E 00	-0.36578E-01	0.16714E 00
7	11	0.49020E-02	0.66372E-02	0.36209E-01	0.10516E 00	0.17189E 00	0.21135E 00	0.16298E 00	0.27545E-01	-0.16336E 00	-0.34479E 00
8	10	0.24510E-02	0.33983E-02	0.20524E-01	0.69386E-01	0.14831E 00	0.26677E 00	0.40663E 00	0.55771E 00	0.69661E 00	0.79405E 00
9		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

N=19 m = 9 γ= 0.20000E 00

L	L	ALPHA=0.0	ALPHA=0.1	ALPHA=0.2	ALPHA=0.3	ALPHA=0.4	ALPHA=0.5	ALPHA=0.6	ALPHA=0.7	ALPHA=0.8	ALPHA=0.9
1	19	0.15789E-01	0.11432E-01	-0.15672E-01	0.24751E-01	-0.16622E-01	0.12070E-01	0.90933E-02	-0.23819E-01	0.50245E-01	-0.63837E-01
2	18	0.14035E-01	0.12298E-01	-0.82827E-02	-0.58202E-03	0.29439E-01	-0.44265E-01	0.48589E-01	-0.16135E-01	-0.29710E-01	0.86218E-01
3	17	0.12281E-01	0.12633E-01	0.31693E-02	-0.27802E-01	0.40102E-01	0.14285E-02	-0.58465E-01	0.89973E-01	-0.40612E-01	-0.47394E-01
4	16	0.10526E-01	0.12376E-01	0.18965E-01	-0.34190E-01	0.11536E-01	0.75308E-01	-0.36065E-01	-0.66571E-01	0.89047E-01	0.41228E-01
5	15	0.87719E-02	0.11507E-01	0.34019E-01	-0.74018E-02	-0.67813E-01	0.15496E-01	0.97244E-01	-0.41479E-02	-0.13764E 00	0.18613E-01
6	14	0.70175E-02	0.10047E-01	0.44002E-01	0.43386E-01	-0.42435E-01	-0.10026E 00	-0.25066E-01	0.13289E 00	0.12164E 00	-0.67303E-01
7	13	0.52632E-02	0.80550E-02	0.45610E-01	0.90287E-01	0.71880E-01	-0.26541E-01	-0.15381E 00	-0.17194E 00	-0.43228E-01	0.17559E 00
8	12	0.35088E-02	0.56284E-02	0.37592E-01	0.10298E 00	0.17336E 00	0.21029E 00	0.16217E 00	0.29647E-01	-0.16780E 00	-0.33916E 00
9	11	0.17544E-02	0.28940E-02	0.21216E-01	0.68294E-01	0.14904E 00	0.26623E 00	0.40623E 00	0.55876E 00	0.69440E 00	0.79686E 00
10		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

表 2. 3. 2　微分フィルタ係数 d の表（ $r=0.1$, 0.2 ）

従って

$$\mathbf{d} = \mathbf{N}^{+} \cdot b + (\mathbf{I} - \mathbf{N}^{+} \cdot \mathbf{N}) \cdot \mathbf{a} \qquad (2.3.26)$$

となる。具体的に計算を実行すると $\delta_{k,j}$ をクロネッカのデルタとして

$$d_{m+1-k} = \frac{1}{T_s}\left[\frac{3 \cdot k}{m \cdot (m+1) \cdot (2m+1)} \cdot \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{1+\gamma} \sum_{\ell=1}^{m} \left(\cos \pi \ell \alpha - \frac{\sin \pi \ell \alpha}{\pi \ell \alpha} \right) \right\} - \frac{\alpha}{(1+\gamma) \cdot k} \cdot \left\{ \cos \pi k \alpha - \frac{\sin \pi k \alpha}{\pi k \alpha} (1 - \delta_{k,o}) \right\} \right] \qquad (2.3.27)$$

$$(k = m, m-1, \cdots, 1, 0)$$

となる。また $D^*(\theta)$ は

$$D^*(\theta) = \frac{3}{(2m+1) \cdot (1 - \cos \theta)} \left\{ \frac{\sin m\theta}{m\theta} - \frac{\sin(m+1)\theta}{(m+1)\theta} \right\} \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{1+\gamma} \cdot \sum_{k=1}^{m} \left(\cos \pi k \alpha - \frac{\sin \pi k \alpha}{\pi k \alpha} \right) \right\} - \frac{2\alpha}{1+\gamma} \sum_{k=1}^{m} \left(\cos \pi k \alpha - \frac{\sin \pi k \alpha}{\pi k \alpha} \right) \cdot \frac{\sin k\theta}{k\theta} \qquad (2.3.28)$$

と表わされる。ここで

$$\alpha = \omega_c / \omega_f \qquad (2.3.29)$$

である。

図 2.3.3 は理想微分フィルタ $I_D(i\omega)$ の振幅特性を，図 2.3.4 には $\gamma = 0$ とした場合の $D^*(\theta)$ ($|\theta| \leq \pi$) をそして図 2.3.5 には $\theta \cdot D^*(\theta)$ の値を $\alpha = 0., 0.1, \cdots, 0.9$，$m = 15$ の場合について描いてみた。又表 2.3.1，表 2.3.2 に係数 d の表を与えた。

γ の効果をみるために $\alpha = 0, 0.2$，$m = 3, 7, 15$ の場合について $D^*(\theta)$ を描いたのが図 2.3.6 であり，$\gamma = 0.2$ の方が $\gamma = 0.$ の方より通過帯域における値が小となるが，これは雑音除去の効果として評価関数 C_L の中に効いてくることによると考えられる。

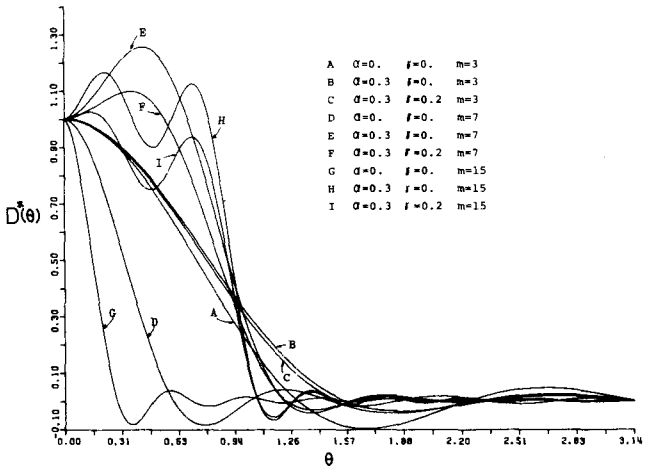


図 2.3.6　周波数特性に対する γ の影響

2.3.1 時間領域での性質

ここで得られた微分フィルタのうち$\alpha=0$と設定して得られるものについて更に議論を進めておく。$\alpha=0$は（2. 3. 29）より$\omega c=0$に対応する。このとき求めようとする理想微分フィルタは$I_D(i\omega)=0$となって無意味になってしまうが，ここで作った近似フィルタは意味を持ち（2. 3. 27）と（2. 3. 28）より

$$d_{m+1-k}=\frac{3k}{m\cdot(m+1)\cdot(2m+1)\cdot T_s} \qquad (2.3.30)$$

$$(k=m,\ m-1,\ \cdots,\ 1,\ 0)$$

$$D^*(\theta)=\frac{3}{(2m+1)\cdot(1-\cos\theta)}\cdot\left\{\frac{\sin m\theta}{m\theta}-\frac{\sin(m+1)\theta}{(m+1)\theta}\right\} \qquad (2.3.31)$$

となる。これは最小自乗法の意味では最も狭帯域の微分フィルタとなることを意味する。

このフィルタは時間領域よりながめてみても最適なフィルタとなっている。入力のサンプル列x_kを考え，現在および$2m\cdot T_s$までの過去の点$x_{k-2m}, x_{k-2m+1}, \cdots, x_k$に直線

$$h(t)=A\cdot t+B \qquad (2.3.32)$$

を最小自乗法であてはめてみよう（図2. 3. 7参照）。すなわち

$$J=\sum_{j=1}^{2m+1}|x_{k+1-j}-A\cdot(k+1-j)\cdot T_s-B|^2 \qquad (2.3.33)$$

を最小にするAを求めると

$$A=\frac{3}{m\cdot(m+1)\cdot(2m+1)\cdot T_s}\sum_{j=1}^{2m+1}(m+1-j)x_{k+1-j} \qquad (2.3.34)$$

となる。これは実は（2. 3. 30）を係数とするフィルタ（2. 3. 5）の出力となるわけである。ここでは$N=2m+1$の場合に限って議論を進めてきたが，$N=2m$の場合にも同様にあつかうことができる。$\alpha=0$の特別な場合については次の2. 4でNが偶奇両方について用いているのでそこで説明を加えてある。

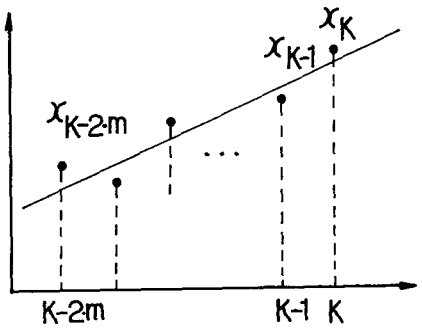


図2. 3. 7　サンプル点の直線近似

2.3.2　応答波形

フィルタの実際の応答を調べてみる。図 2.3.8 は発電所における発電機出力をT_s＝１０秒でサンプリングした例で縦軸は 0.2 を掛けるとMWとなる。図 2.3.9 はその応答波形である。

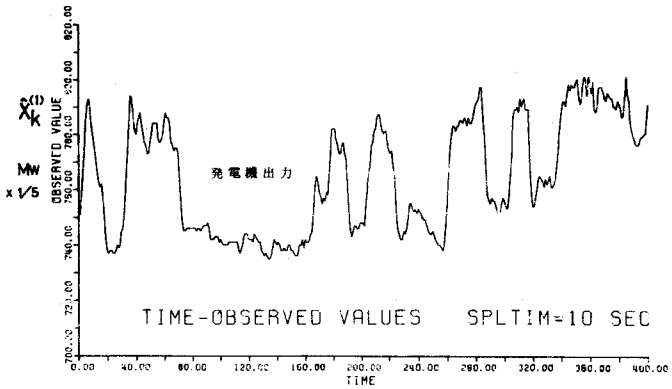


図 2.3.8　微分フィルタの入力

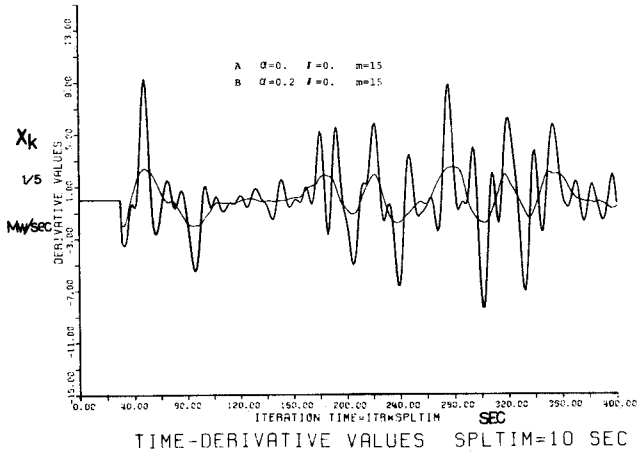


図 2.3.9　図 2.3.8 の入力波形に対する出力波形

図 2.3.9 でAのケースでは$\alpha=0$としたが，図 2.3.6 から実効的には$\omega c \fallingdotseq 0.064 \cdot \omega f$ となる。すなわち周期の半分が，10／0.064≒156 sec より早い変動は無視される。図 2.3.8 の 3,050 ～ 3,350 sec 目にわたる変動の周期は 3,350－3,050＝300 sec だが，この変動より早いものは無視されていて理論値と良く合う。Bの例ではやはり理論通り周期が 100 sec より早い変動が無視されているのがわかる。

2.3.3　種々の特性のフィルタ（$A2$），（$D2$）

ここで述べた 1 階の微分フィルタの設計法は他の色々な特性のフィルタの設計に応用することが可能である。2 階以上の高階の微分フィルタもこれで容易に設計することができるが，本論文

では高階微分フィルタとして次節で述べるカスケード形のものを用いているので．ここではこれ以上は述べない。ここではまず帯域フィルタを考える。

$$I_{\alpha,\beta}(\omega)=\begin{cases} e^{-i\cdot\omega\cdot m\cdot T_s} & \alpha\cdot\omega f\leqq|\omega|\leqq\beta\cdot\omega f \\ 0 & \text{他} \end{cases} \qquad (2.3.35)$$

ただし

$$0\leqq\alpha<\beta\leqq 1 \qquad (2.3.36)$$

とする。これを（2.3.8）で考えたと同じような最小自乗法で

$$G(z)=\sum_{k=1}^{2m+1} g_k\cdot z^{1-k},\quad g_k=g_{2m+2-k}\ (k=1,2,\cdots,m+1) \qquad (2.3.37)$$

で近似する。γは（2.3.15）で与えられるとして

$$g_{m+1-k}=\frac{1}{2m+1}\cdot\left\{1+\frac{\alpha-\beta}{1+\gamma}+2\cdot\sum_{j=1}^{m}\frac{\sin\pi j\alpha-\sin\pi j\beta}{\pi j(1+\gamma)}\right\}-\frac{\sin\pi k\alpha-\sin\pi k\beta}{\pi k(1+\gamma)}\cdot(1-\delta_{k,o})$$

$$(k=m,m-1,\cdots,0) \qquad (2.3.38)$$

となる。この時の周波数特性は

$$G(e^{i\omega Ts})=G^*(\omega\cdot Ts)e^{-i\cdot\omega m\cdot Ts} \qquad (2.3.39)$$

$$G^*(\theta)=\frac{1}{2m+1}\left\{1+\frac{\alpha-\beta}{1+\gamma}+2\cdot\sum_{j=1}^{m}\frac{\sin\pi j\alpha-\sin\pi j\beta}{\pi j(1+\gamma)}\right\}$$

$$-\frac{\alpha-\beta}{1+\gamma}-2\cdot\sum_{j=1}^{m}\frac{(\sin\pi j\alpha-\sin\pi j\beta)\cos j\theta}{\pi j(1+\gamma)} \qquad (2.3.40)$$

となる。

次にはHilbert 変換[49]

$$H_{\alpha,\beta}(\theta)=\begin{cases} i\cdot e^{-i\omega m\cdot Ts} & \alpha\cdot\omega f\leqq\omega\leqq\beta\cdot\omega f \\ -i\cdot e^{-i\omega m\cdot Ts} & -\beta\cdot\omega f\leqq\omega\leqq-\alpha\cdot\omega f \\ 0 & \text{他} \end{cases} \qquad (2.3.41)$$

を

$$H(z)=\sum_{k=1}^{2m+1} h_k\cdot z^{1-k}\qquad h_k=h_{2m+2-k}\qquad (k=1,2,\cdots,m+1) \qquad (2.3.42)$$

で近似すると，

$$h_{m+1-k}=\frac{\cos\pi k\alpha-\cos\pi k\beta}{\pi k(1+\gamma)}(1-\delta_{k,o}) \qquad (2.3.43)$$

$$(k=m,m-1,\cdots,1,0)$$

となる。このとき$H(z)$の周波数特性は

$$H(e^{i\omega Ts})=i\cdot H^{*}(\omega\cdot Ts)\cdot e^{-i\cdot\omega\cdot m\cdot Ts} \qquad (2.3.44)$$

となり$H^{*}(\theta)$は

$$H^{*}(\theta)=2\cdot\sum_{j=1}^{m}\frac{(\cos\pi k\alpha-\cos\pi k\beta)\sin j\theta}{\pi j(1+\gamma)} \qquad (2.3.45)$$

となる。

図2.3.10は$m=50$で$(\alpha,\beta)=(0.1\cdot(\ell-1),0.1\cdot\ell)$ $(\ell=1,2,\cdots,10)$，$\gamma=0.$の場合の$|G^{*}(\theta)|^{2}$の変化，図2.3.11は同じパラメータに対する$|H^{*}(\theta)|^{2}$を描いたものである。

図2.3.10のような帯域フィルタの集合はフィルタ・バンクといわれ，種々の周波数分析等に用いられる。図2.3.11のフィルタは図2.3.10のものとよく似ているが，$G^{*}(\theta)$が偶関数なのに$H^{*}(\theta)$は奇関数であり，$H(z)$を通した信号は$G(z)$を通した信号に対して，丁度90°位相が進んでおり，これらを用いるとシステムの周波数特性を直接推定することができる。（A2）

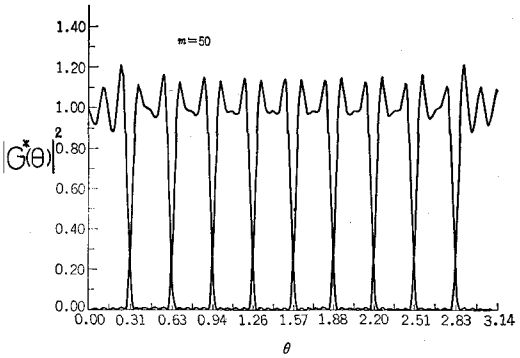


図 2. 3. 10 $|G^*(\theta)|^2$ の変化（ $m = 50$ ）

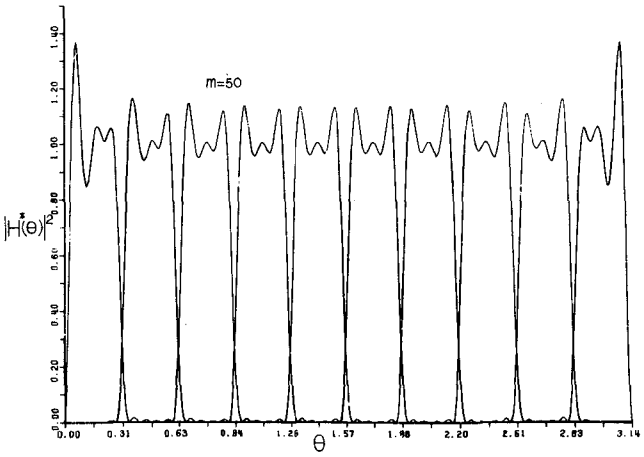


図 2. 3. 11 $|H^*(\theta)|^2$ の変化（ $m = 50$ ）

2.4 カスケード・ディジタル微分フィルタ（A4），（D7），（D9）

この節では周波数特性の比が $i\omega$ となるような微分および低域フィルタを考え，この2つをいくつかカスケード接続することにより任意階の微分フィルタを得る手法について説明し，その設計法と設計例および実際の応答性能などについての結果を与える。

2.4.1 周波数領域での設計

同じ次数の2つのFIRディジタル・フィルタ

$$P(z)=\sum_{k=1}^{N} p_k \cdot z^{1-k} \qquad p_k+p_{n+1-k}=0\ (k=1,2,\cdots,N) \qquad (2.4.1)$$

$$Q(z)=\sum_{k=1}^{N} q_k \cdot z^{1-k} \qquad q_k=q_{n+1-k}\ (k=1,2,\cdots,N) \qquad (2.4.2)$$

を考える。これらの周波数特性は1.4.7で述べたように

$$P(e^{i\omega T_s})=i\omega \cdot P^*(\omega \cdot T_s) \cdot e^{-i\cdot\omega\cdot(\frac{N-1}{2})\cdot T_s} \qquad (2.4.3)$$

$$Q(e^{i\omega T_s})=Q^*(\omega \cdot T_s) \cdot e^{-i\cdot\omega\cdot(\frac{N-1}{2})\cdot T_s} \qquad (2.4.4)$$

と表わされ $P^*(\theta)$，$Q^*(\theta)$ は θ の実関数となる。ここでもし

$$P^*(\theta)=Q^*(\theta) \qquad (|\theta|\leq\pi) \qquad (2.4.5)$$

であったとする。

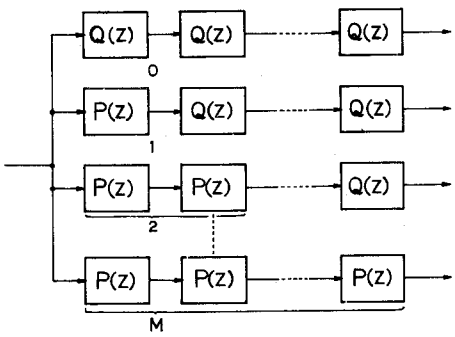


図 2.4.1　カスケード微分フィルタ

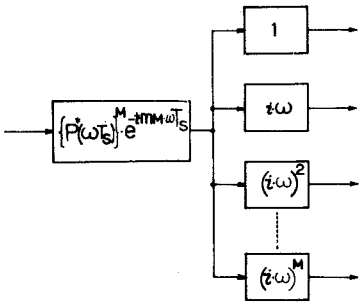


図 2.4.2　カスケード微分フィルタの周波数特性

この時M段のカスケードフィルタ（図 2. 4. 1 参照）

$$\mathcal{D}_M^{(k)}(z) = \{P(z)\}^k \cdot \{Q(z)\}^{M-k} \qquad (2.4.6)$$

$$(k = 0, 1, \cdots, M)$$

を考える。このフィルタの周波数特性は（ 2. 4. 5 ）を用いて

$$\mathcal{D}_M^{(k)}(e^{i\omega \cdot Ts}) = (i\omega)^k \cdot \{P^*(\omega \cdot Ts)\}^M \cdot e^{-i\omega \cdot M(\frac{N-1}{2}) \cdot Ts} \qquad (2.4.7)$$

$$(k = 0, 1, \cdots, M)$$

となる。これは図 2. 4. 2 からわかるように線形位相特性をもつフィルタ

$$\{P^*(\omega \cdot Ts)\}^M \cdot e^{-i\omega \cdot M \cdot (\frac{N-1}{2}) \cdot Ts} \qquad (2.4.8)$$

を通した後に数学的に正しい微分$(i\omega)^k$を行うことを意味する。そして$P^*(\theta)$を適当に選べば種々の信号成分の任意解の微分信号を得ることが可能となる。

しかし実際には（ 2. 4. 5 ）の条件を満たすものはおそらく存在せず近似的な意味でしか得られないであろう。この論文ではそのような一例を与える。これは次に述べるとして，その前にカスケード接続に対して成立する一般的な結果を与えておく。

〔**定理 2. 4. 1**〕　$\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$ を展開して

$$\mathcal{D}_M^{(k)}(z) = \sum_{j=1}^{N_M} d_{M,j}^{(k)} \cdot z^{1-j} \qquad (2.4.9)$$

とする。ここで　$N_M = (N-1) \cdot M + 1$　（2.4.10）

である。$P(z)$，$Q(z)$が（ 2. 4. 5 ）の条件を満たすか否かにかかわらず，

k が偶なら　$d_{M,j}^{(k)} = d_{M,N_M+1-j}^{(k)}$　$(j = 1, 2, \cdots, N_M)$　（2.4.11）

k が奇なら　$d_{M,j}^{(k)} + d_{M,N_M+1-j}^{(k)} = 0$　$(j = 1, 2, \cdots, N_M)$　（2.4.12）

〔証　明〕

$$d_{M,j}^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \oint \mathcal{D}_M^{(k)}(z) \cdot z^{j-2} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi \cdot T_s{}^k} \int_{-\pi}^{\pi} \{\theta \cdot P^*(\theta)\}^k \cdot \{Q^*(\theta)\}^{M-k} \cdot e^{-i\theta \cdot \{(\frac{N-1}{2})M+1-j\}} d\theta$$

$\theta \cdot P^*(\theta), Q^*(\theta)$ は作り方から夫々奇および偶関数だから

$$= \frac{(-1)^k}{2\pi \cdot T_s{}^k} \int_{-\pi}^{\pi} \{\theta \cdot P^*(\theta)\}^k \cdot \{Q^*(\theta)\}^{M-k} \cdot e^{-i\theta \{(\frac{N-1}{2}) \cdot M+1-j\}} d\theta$$

$$= \frac{(-1)^k}{2\pi \cdot T_s{}^k} \int_{-\pi}^{\pi} \{\theta \cdot P^*(\theta)\}^k \cdot \{Q^*(\theta)\}^{M-k} \cdot e^{-i\theta [(\frac{N-1}{2})M+1-\{(N-1)M+2-j\}]} d\theta$$

$$= (-1)^k \cdot d_{M,N_M+1-j}^{(k)} \qquad (j = 1, 2, \cdots, N_M) \qquad (2.4.13)$$

〔証明終り〕

2.4.2 基礎となるフィルタおよび設計例

次に近似的に（2.4.5）を満たす$P(z)$と$Q(z)$を与える。はじめに$P(z)$として

$$P(z) = \frac{12}{(N-1) \cdot N \cdot (N+1) \cdot T_s} \sum_{k=1}^{N} (\frac{N+1}{2} - k) \cdot z^{1-k} \qquad (2.4.14)$$

を考える。$N = 2 \cdot m + 1$の場合には2.3で与えてあった。$N = 2 \cdot m$の場合も2.3で行った議論より容易に得られる。（2.4.14）で$P(z)$が与えられる場合は

$$P^*(\theta) = \frac{3}{N \cdot (1 - \cos\theta)} \left\{ \frac{\sin(\frac{N-1}{2})\theta}{(\frac{N-1}{2})\theta} - \frac{\sin(\frac{N+1}{2})\theta}{(\frac{N+1}{2})\theta} \right\} \qquad (2.4.15)$$

である。

次に$Q(z)$は（1.4.45）で与えたと同じように

$$C_Q = \int_{-\pi}^{\pi} |Q^*(\theta) - P^*(\theta)|^2 \, d\theta \qquad (2.4.16)$$

を最小にするように$Q^*(\theta)$を定める。ただし$Q(z)$は直流を変形することなく通すという条件から

$$\mathbf{M} = (1, 1, \cdots\cdots, 1), \ \mathbf{q} = (q_1, q_2, \cdots\cdots, q_N)^T \qquad (2.4.17)$$

とすると

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{q} = 1 \qquad (2.4.18)$$

そこで（2.4.18）という拘束条件の下でC_Qを最小にする$\mathbf{q}$は2.3と同じ議論により

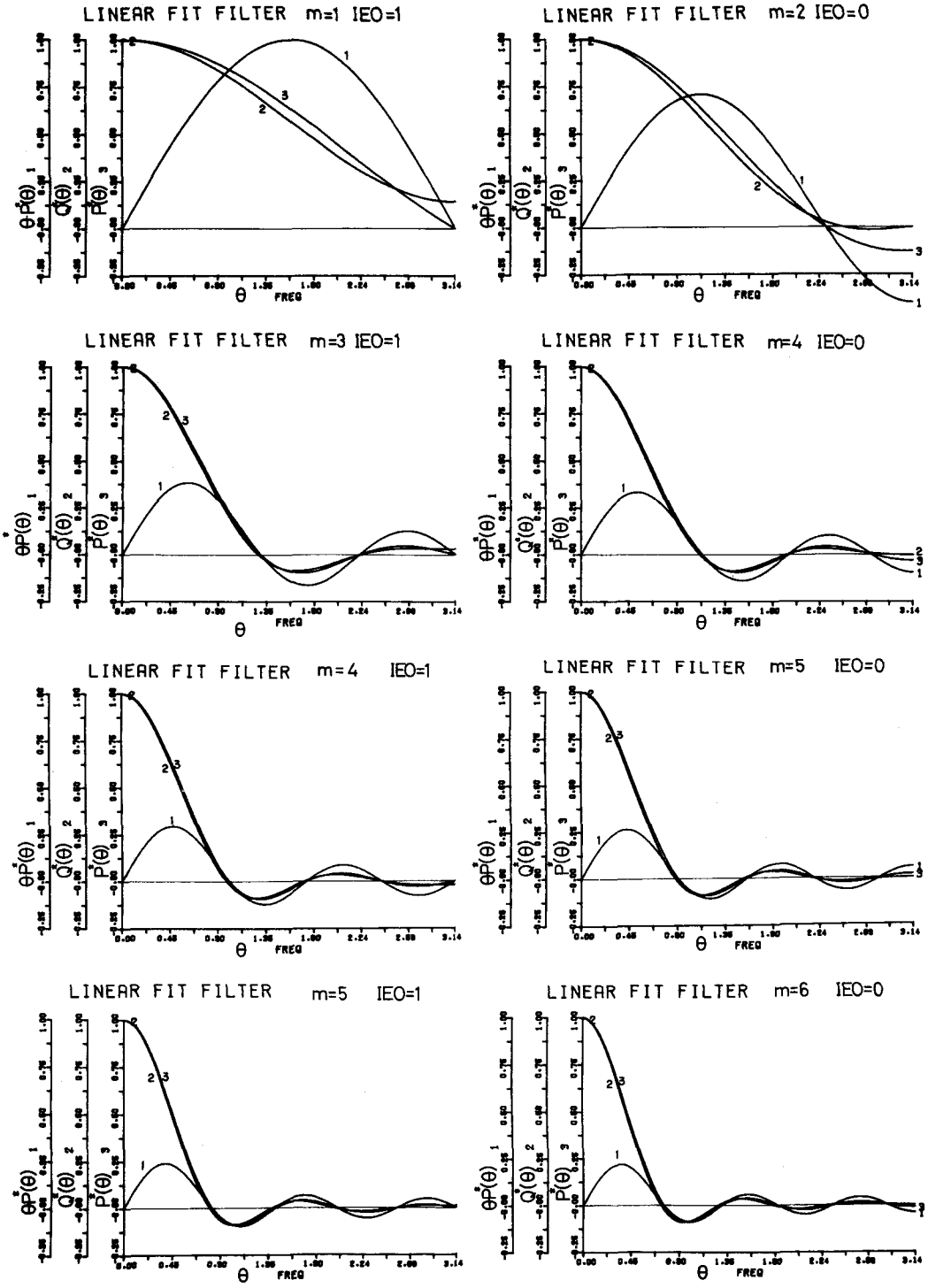


図 2. 4. 3　最小自乗法による $P(z)$, $Q(z)$ の周波数特性－1

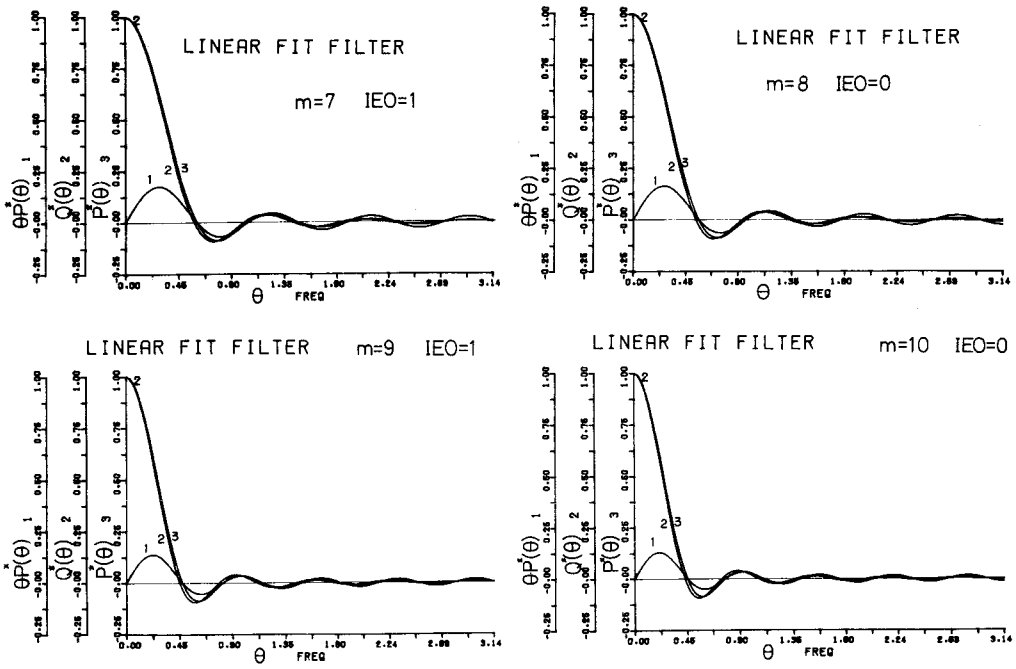


図 2.4.4　最小自乗法による $P(z)$, $Q(z)$ の周波数特性 −2

D : P (Z) の係数 L : Q (Z) の係数	1 6	2 7	3 8	4 9	5 10
LNRF D 1 m= 1 IEO=1	0.500000	0.0			
LNRF L 1 m= 1 IEO=1	0.214100	0.571801			
LNRF D 1 m= 2 IEO=0	0.300000	0.100000			
LNRF L 1 m= 2 IEO=0	0.140399	0.359601			
LNRF D 1 m= 3 IEO=1	0.107143	0.071429	0.035714	0.0	
LNRF L 1 m= 3 IEO=1	0.050353	0.150091	0.191681	0.215751	
LNRF D 1 m= 4 IEO=0	0.083333	0.059524	0.035714	0.011905	
LNRF L 1 m= 4 IEO=0	0.041370	0.117479	0.158915	0.182236	
LNRF D 1 m= 4 IEO=1	0.066666	0.05	0.033333	0.016666	0.
LNRF L 1 m= 4 IEO=1	0.029079	0.095331	0.132180	0.160970	0.164880
LNRF D 1 m= 5 IEO=0	0.054545	0.042424	0.030303	0.018182	0.006061
LNRF L 1 m= 5 IEO=0	0.028532	0.079942	0.111472	0.134790	0.145264
LNRF L 1 m= 5 IEO=1	0.024051	0.068377	0.094790	0.117762	0.128038
LNRF L 2 m= 5 IEO=1	0.133961				
LNRF D 1 m= 5 IEO=1	0.045455	0.036364	0.027273	0.018182	0.009091
LNRF D 2 m= 5 IEO=1	0.0				
LNRF L 1 m= 6 IEO=0	0.021387	0.058366	0.082534	0.102447	0.114411
LNRF L 2 m= 6 IEO=0	0.120855				
LNRF D 1 m= 6 IEO=0	0.038462	0.031469	0.024476	0.017483	0.010490
LNRF D 2 m= 6 IEO=0	0.003497				
LNRF D 1 m= 7 IEO=1	0.025000	0.021429	0.017857	0.014286	0.010714
LNRF D 2 m= 7 IEO=1	0.007143	0.003571	0.0		
LNRF L 1 m= 7 IEO=1	0.015240	0.040150	0.056628	0.072110	0.082162
LNRF L 2 m= 7 IEO=1	0.090717	0.094577	0.096832		
LNRF L 1 m= 8 IEO=0	0.014111	0.035860	0.051020	0.064718	0.074600
LNRF L 2 m= 8 IEO=0	0.082462	0.087327	0.089901		
LNRF D 1 m= 8 IEO=0	0.022059	0.019118	0.016176	0.013235	0.010294
LNRF D 2 m= 8 IEO=0	0.007353	0.004412	0.001471		
LNRF L 1 m= 9 IEO=1	0.011241	0.027202	0.038274	0.048998	0.056785
LNRF L 2 m= 9 IEO=1	0.063928	0.068655	0.072669	0.074475	0.075549
LNRF D 1 m= 9 IEO=1	0.015789	0.014035	0.012281	0.010526	0.008772
LNRF D 2 m= 9 IEO=1	0.007018	0.005263	0.003509	0.001754	0.0
LNRF L 1 m=10 IEO=0	0.010660	0.024984	0.035281	0.044957	0.052422
LNRF L 2 m=10 IEO=0	0.058960	0.063816	0.067626	0.070020	0.071274
LNRF D 1 m=10 IEO=0	0.014286	0.012782	0.011278	0.009774	0.008271
LNRF D 2 m=10 IEO=0	0.006767	0.005263	0.003759	0.002256	0.000752

表 2.4.1　最小自乗法による $P(z)$, $Q(z)$ の係数の表

M=3

LINEAR FIT m= 1 IEO=1

I	K= 0	K= 1	K= 2	K= 3
1	0.981408E-02	0.229194E-01	0.535250E-01	0.125000E 00
2	0.786319E-01	0.122423E 00	0.142950E 00	0.0
3	0.239446E 00	0.186397E 00	-0.535250E-01	-0.375000E 00
4	0.344218E 00	0.0	-0.285900E 00	0.0

LINEAR FIT m= 2 IEO=0

I	K= 0	K= 1	K= 2	K= 3
1	0.276753E-02	0.591356E-02	0.126359E-01	0.270000E-01
2	0.212652E-01	0.322637E-01	0.407880E-01	0.270000E-01
3	0.757313E-01	0.772127E-01	0.469202E-01	-0.180000E-01
4	0.163736E 00	0.964323E-01	-0.118479E-01	-0.979998E-01
5	0.236500E 00	0.455699E-01	-0.884960E-01	-0.480000E-01

LINEAR FIT m= 3 IEO=1

I	K= 0	K= 1	K= 2	K= 3
1	0.127666E-03	0.271653E-03	0.578033E-03	0.122996E-02
2	0.114163E-02	0.180059E-02	0.249370E-02	0.245993E-02
3	0.486093E-02	0.565207E-02	0.514001E-02	0.286991E-02
4	0.137140E-01	0.120206E-01	0.758198E-02	0.200438E-02
5	0.297455E-01	0.200092E-01	0.839230E-02	-0.273322E-03
6	0.534522E-01	0.273855E-01	0.640196E-02	-0.382655E-02
7	0.825598E-01	0.307980E-01	0.337171E-03	-0.829084E-02
8	0.111441E 00	0.269108E-01	-0.901274E-02	-0.819974E-02
9	0.132698E 00	0.156600E-01	-0.144475E-01	-0.491983E-02
10	0.140520E 00	0.0	-0.169298E-01	0.0

LINEAR FIT m= 4 IEO=0

I	K= 0	K= 1	K= 2	K= 3
1	0.708038E-04	0.142627E-03	0.287269E-03	0.578696E-03
2	0.603187E-03	0.911887E-03	0.122623E-02	0.124007E-02
3	0.252882E-02	0.288553E-02	0.266135E-02	0.162981E-02
4	0.719110E-02	0.633971E-02	0.441553E-02	0.152183E-02
5	0.159638E-01	0.111070E-01	0.534426E-02	0.804781E-03
6	0.297642E-01	0.164559E-01	0.544637E-02	-0.531454E-03
7	0.485190E-01	0.211184E-01	0.399076E-02	-0.240928E-02
8	0.706537E-01	0.233044E-01	0.458050E-03	-0.467583E-02
9	0.928634E-01	0.213374E-01	-0.431953E-02	-0.488942E-02
10	0.110881E 00	0.149538E-01	-0.846340E-02	-0.356669E-02
11	0.120960E 00	0.537483E-02	-0.108469E-01	-0.129575E-02

LINEAR FIT m= 4 IEO=1

I	K= 0	K= 1	K= 2	K= 3
1	0.245889E-04	0.563725E-04	0.129240E-03	0.296296E-03
2	0.241832E-03	0.411896E-03	0.617553E-03	0.666666E-03
3	0.112812E-02	0.142375E-02	0.142494E-02	0.544444E-03
4	0.347323E-02	0.334189E-02	0.242015E-02	0.101389E-02
5	0.822354E-02	0.622984E-02	0.333424E-02	0.805555E-03
6	0.162484E-01	0.986197E-02	0.389930E-02	0.291666E-03
7	0.280504E-01	0.137399E-01	0.379149E-02	-0.518518E-03
8	0.434853E-01	0.170535E-01	0.275981E-02	-0.158333E-02
9	0.614719E-01	0.187565E-01	0.541186E-03	-0.283333E-02
10	0.798703E-01	0.178040E-01	-0.246545E-02	-0.306481E-02
11	0.958369E-01	0.139170E-01	-0.526234E-02	-0.250000E-02
12	0.106684E 00	0.762550E-02	-0.723139E-02	-0.138889E-02
13	0.110520E 00	-0.628643E-08	-0.791749E-02	0.218279E-09

LINEAR FIT m= 5 IEO=1

I	K= 0	K= 1	K= 2	K= 3
1	0.139123E-04	0.262935E-04	0.496931E-04	0.939171E-04
2	0.118658E-03	0.170539E-03	0.220787E-03	0.225401E-03
3	0.501838E-03	0.555156E-03	0.513330E-03	0.349371E-03
4	0.145936E-02	0.128275E-02	0.904086E-03	0.431267E-03
5	0.336202E-02	0.241469E-02	0.133243E-02	0.446294E-03
6	0.660156E-02	0.394575E-02	0.173000E-02	0.378674E-03
7	0.115232E-01	0.579886E-02	0.200961E-02	0.220893E-03
8	0.183532E-01	0.781485E-02	0.209109E-02	-0.270481E-04
9	0.271235E-01	0.975857E-02	0.189708E-02	-0.358387E-03
10	0.376012E-01	0.113195E-01	0.133183E-02	-0.760352E-03
11	0.492189E-01	0.121214E-01	0.352274E-03	-0.121491E-02
12	0.610459E-01	0.118049E-01	-0.921251E-03	-0.136142E-02
13	0.719146E-01	0.102433E-01	-0.219027E-02	-0.115248E-02
14	0.806664E-01	0.754796E-02	-0.325644E-02	-0.946683E-03
15	0.863385E-01	0.400113E-02	-0.395413E-02	-0.507151E-03
16	0.883023E-01	-0.146683E-07	-0.420019E-02	0.0

LINEAR FIT m= 6 IEO=0

I	K= 0	K= 1	K= 2	K= 3
1	0.978249E-05	0.175927E-04	0.316383E-04	0.568978E-04
2	0.800905E-04	0.110416E-03	0.138114E-03	0.139659E-03
3	0.331824E-03	0.356366E-03	0.324329E-03	0.222890E-03
4	0.957557E-03	0.826498E-03	0.580743E-03	0.286501E-03
5	0.220482E-02	0.156950E-02	0.876382E-03	0.315359E-03
6	0.434746E-02	0.259975E-02	0.117263E-02	0.298947E-03
7	0.764859E-02	0.389077E-02	0.142316E-02	0.231020E-03
8	0.123194E-01	0.536977E-02	0.157774E-02	0.109270E-03
9	0.184756E-01	0.691810E-02	0.158752E-02	-0.650193E-04
10	0.260948E-01	0.837095E-02	0.140390E-02	-0.287315E-03
11	0.349750E-01	0.952274E-02	0.987693E-03	-0.550177E-03
12	0.446950E-01	0.101270E-01	0.297799E-03	-0.843605E-03
13	0.545989E-01	0.995354E-02	-0.586283E-03	-0.953642E-03
14	0.638750E-01	0.890754E-02	-0.148844E-02	-0.908502E-03
15	0.717003E-01	0.704113E-02	-0.228307E-02	-0.739475E-03
16	0.773586E-01	0.451113E-02	-0.286750E-02	-0.480246E-03
17	0.803257E-01	0.155314E-02	-0.317690E-02	-0.166211E-03

LINEAR FIT m= 7 IEO=1

I	K= 0	K= 1	K= 2	K= 3
1	0.353960E-05	0.580644E-05	0.952500E-05	0.156250E-04
2	0.279754E-04	0.355713E-04	0.414726E-04	0.401794E-04
3	0.113158E-03	0.113823E-03	0.990164E-04	0.679220E-04
4	0.322866E-03	0.265330E-03	0.132577E-03	0.940251E-04
5	0.742454E-03	0.511656E-03	0.186938E-03	0.114524E-03
6	0.147322E-02	0.867608E-03	0.405124E-03	0.126277E-03
7	0.262476E-02	0.133953E-02	0.526744E-03	0.126914E-03
8	0.430575E-02	0.192326E-02	0.640872E-03	0.114796E-03
9	0.661387E-02	0.260366E-02	0.734567E-03	0.889667E-04
10	0.962513E-02	0.335365E-02	0.795524E-03	0.491067E-04
11	0.133831E-01	0.413460E-02	0.810397E-03	-0.451007E-05
12	0.178881E-01	0.489616E-02	0.767591E-03	-0.710649E-04
13	0.230871E-01	0.557727E-02	0.654960E-03	-0.149236E-03
14	0.288636E-01	0.610663E-02	0.463418E-03	-0.237247E-03
15	0.350274E-01	0.640292E-02	0.182276E-03	-0.332911E-03
16	0.413105E-01	0.638929E-02	-0.166382E-03	-0.380106E-03
17	0.473907E-01	0.602752E-02	-0.534602E-03	-0.384569E-03
18	0.529319E-01	0.531908E-02	-0.887502E-03	-0.352590E-03
19	0.576172E-01	0.429634E-02	-0.119307E-02	-0.290908E-03
20	0.611746E-01	0.301653E-02	-0.142888E-02	-0.206633E-03
21	0.633959E-01	0.155517E-02	-0.157675E-02	-0.107142E-03
22	0.641512E-01	-0.954606E-08	-0.162753E-02	-0.145519E-10

LINEAR FIT m= 8 IEO=0

I	K= 0	K= 1	K= 2	K= 3
1	0.280976E-05	0.439739E-05	0.636640E-05	0.107339E-04
2	0.214213E-04	0.261314E-04	0.293513E-04	0.279084E-04
3	0.849150E-04	0.826981E-04	0.703002E-04	0.478012E-04
4	0.236677E-03	0.192126E-03	0.130190E-03	0.672389E-04
5	0.548074E-03	0.370661E-03	0.206305E-03	0.835691E-04
6	0.108502E-02	0.630478E-03	0.294224E-03	0.946362E-04
7	0.193312E-02	0.978392E-03	0.387694E-03	0.987548E-04
8	0.317683E-02	0.141456E-02	0.479428E-03	0.946846E-04
9	0.499584E-02	0.193191E-02	0.561309E-03	0.816039E-04
10	0.715814E-02	0.251561E-02	0.624743E-03	0.590866E-04
11	0.100129E-01	0.314293E-02	0.661135E-03	0.270761E-04
12	0.134830E-01	0.378325E-02	0.661817E-03	-0.141410E-04
13	0.175585E-01	0.439841E-02	0.618874E-03	-0.639605E-04
14	0.221892E-01	0.494291E-02	0.524460E-03	-0.121485E-03
15	0.272783E-01	0.536474E-02	0.372353E-03	-0.185553E-03
16	0.326757E-01	0.560473E-02	0.155538E-03	-0.254757E-03
17	0.381748E-01	0.560767E-02	-0.110592E-03	-0.290980E-03
18	0.435295E-01	0.534434E-02	-0.393644E-03	-0.297848E-03
19	0.484821E-01	0.481314E-02	-0.669108E-03	-0.279319E-03
20	0.527855E-01	0.403367E-02	-0.914976E-03	-0.239630E-03
21	0.562217E-01	0.304333E-02	-0.111457E-02	-0.183243E-03
22	0.586152E-01	0.189773E-02	-0.125471E-02	-0.114804E-03
23	0.598434E-01	0.642235E-03	-0.132698E-02	-0.390804E-04

LINEAR FIT m= 9 IEO=1

I	K= 0	K= 1	K= 2	K= 3
1	0.142041E-05	0.199510E-05	0.280230E-05	0.393608E-05
2	0.103117E-04	0.114293E-04	0.117632E-04	0.104965E-04
3	0.394627E-04	0.354041E-04	0.281709E-04	0.185151E-04
4	0.108922E-03	0.815720E-04	0.526967E-04	0.269655E-04
5	0.245784E-03	0.157260E-03	0.848035E-04	0.349570E-04
6	0.483211E-03	0.268777E-03	0.123513E-03	0.417296E-04
7	0.859060E-03	0.429906E-03	0.167025E-03	0.466426E-04
8	0.141407E-02	0.616463E-03	0.213293E-03	0.491808E-04
9	0.218986E-02	0.850021E-03	0.259713E-03	0.489379E-04
10	0.322668E-02	0.113766E-02	0.303619E-03	0.456171E-04
11	0.456106E-02	0.145635E-02	0.341980E-03	0.390244E-04
12	0.622345E-02	0.180634E-02	0.371876E-03	0.290620E-04
13	0.823575E-02	0.217619E-02	0.390165E-03	0.157249E-04
14	0.106089E-01	0.255372E-02	0.393972E-03	-0.906324E-06
15	0.133403E-01	0.292365E-02	0.380294E-03	-0.206695E-04
16	0.164120E-01	0.326815E-02	0.346560E-03	-0.433265E-04
17	0.197877E-01	0.356617E-02	0.290073E-03	-0.685704E-04
18	0.234110E-01	0.379750E-02	0.208794E-03	-0.960280E-04
19	0.272025E-01	0.393498E-02	0.100197E-03	-0.125267E-03
20	0.310589E-01	0.395559E-02	-0.298737E-04	-0.142687E-03
21	0.348598E-01	0.384596E-02	-0.169566E-03	-0.149340E-03
22	0.384780E-01	0.360260E-02	-0.309906E-03	-0.146397E-03
23	0.417885E-01	0.323010E-02	-0.442345E-03	-0.135085E-03
24	0.446747E-01	0.273985E-02	-0.560267E-03	-0.116700E-03
25	0.470339E-01	0.214881E-02	-0.657758E-03	-0.925896E-04
26	0.487820E-01	0.147836E-02	-0.730640E-03	-0.641491E-04
27	0.498565E-01	0.753140E-03	-0.775549E-03	-0.328032E-04
28	0.502189E-01	-0.465661E-09	-0.790794E-03	0.0

LINEAR FIT m= 10 IEO=0

I	K= 0	K= 1	K= 2	K= 3
1	0.121135E-05	0.162340E-05	0.217560E-05	0.291562E-05
2	0.851720E-05	0.906704E-05	0.899208E-05	0.782602E-05
3	0.319894E-04	0.277531E-04	0.215015E-04	0.139073E-04
4	0.872993E-04	0.635869E-04	0.402430E-04	0.204290E-04
5	0.195585E-03	0.122195E-03	0.649691E-04	0.267517E-04
6	0.382900E-03	0.203927E-03	0.950239E-04	0.323216E-04
7	0.678749E-03	0.327502E-03	0.129246E-03	0.366685E-04
8	0.111584E-02	0.450679E-03	0.166184E-03	0.394021E-04
9	0.172765E-02	0.669549E-03	0.204080E-03	0.402093E-04
10	0.254736E-02	0.893436E-03	0.240994E-03	0.388491E-04
11	0.360609E-02	0.114981E-02	0.274830E-03	0.351507E-04
12	0.493116E-02	0.143419E-02	0.303403E-03	0.290093E-04
13	0.654436E-02	0.174013E-02	0.324507E-03	0.203837E-04
14	0.846018E-02	0.205919E-02	0.335910E-03	0.929170E-05
15	0.106841E-01	0.238101E-02	0.335452E-03	-0.419305E-05
16	0.132107E-01	0.269330E-02	0.321102E-03	-0.199439E-04
17	0.160223E-01	0.293200E-02	0.290875E-03	-0.377844E-04
18	0.190969E-01	0.323123E-02	0.242896E-03	-0.574931E-04
19	0.223570E-01	0.342355E-02	0.175646E-03	-0.788055E-04
20	0.257671E-01	0.353954E-02	0.873105E-04	-0.101418E-03
21	0.292332E-01	0.356106E-02	-0.176977E-04	-0.115325E-03
22	0.326580E-01	0.347746E-02	-0.130704E-03	-0.121268E-03
23	0.359390E-01	0.328554E-02	-0.244963E-03	-0.120050E-03
24	0.389745E-01	0.299798E-02	-0.354169E-03	-0.112522E-03
25	0.416696E-01	0.259271E-02	-0.453218E-03	-0.995790E-04
26	0.439355E-01	0.211179E-02	-0.537660E-03	-0.821550E-04
27	0.457024E-01	0.156075E-02	-0.604071E-03	-0.612145E-04
28	0.469128E-01	0.957753E-03	-0.649786E-03	-0.377454E-04
29	0.475279E-01	0.322842E-03	-0.673089E-03	-0.127516E-04

表 2.4.2　最小自乗法によるカスケード微分フィルタ $\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$ の係数表

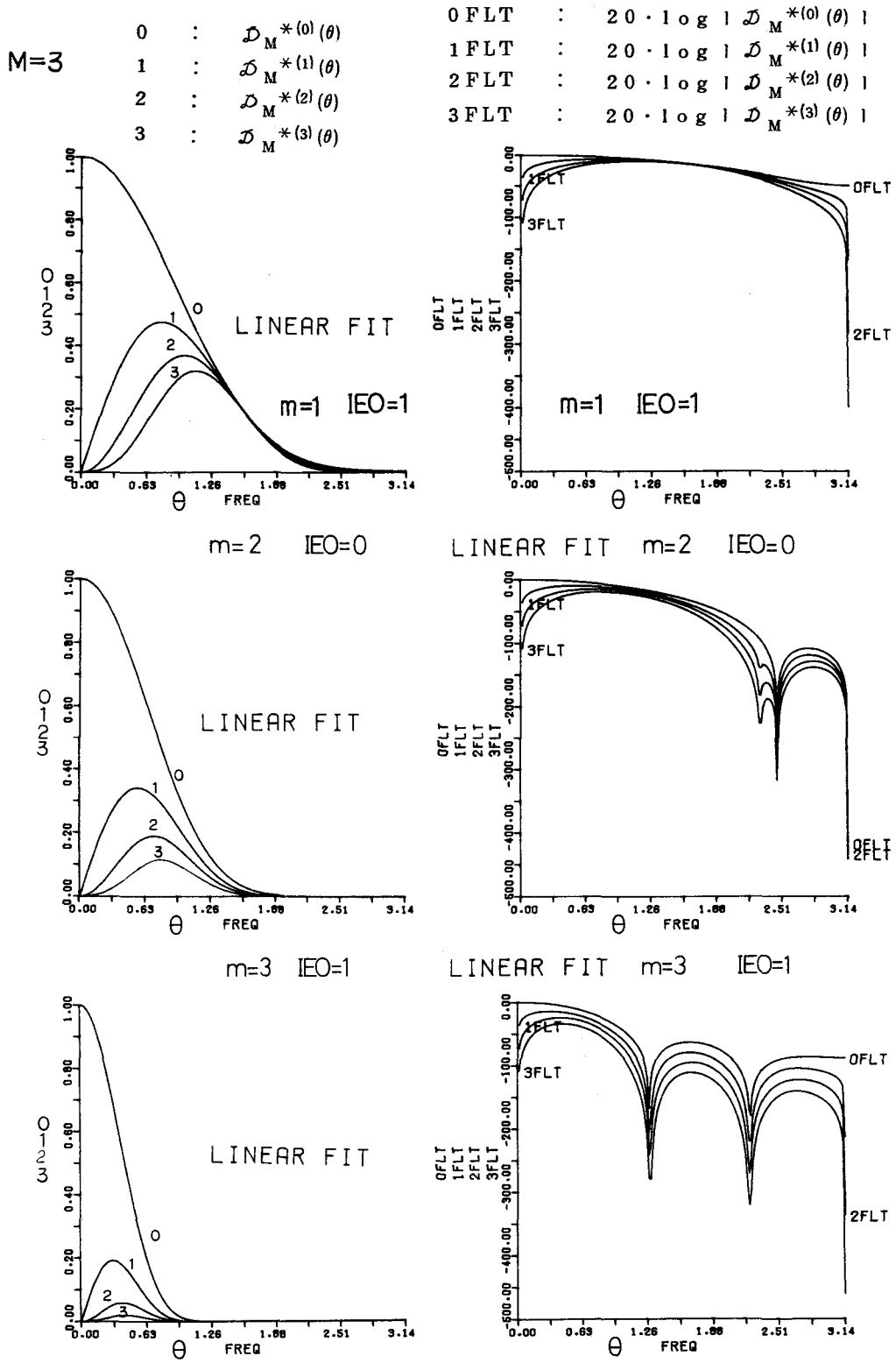


図 2.4.5　最小自乗法によるカスケード微分フィルタ $\mathcal{D}_M{}^{(k)}(z)$ の周波数特性－1

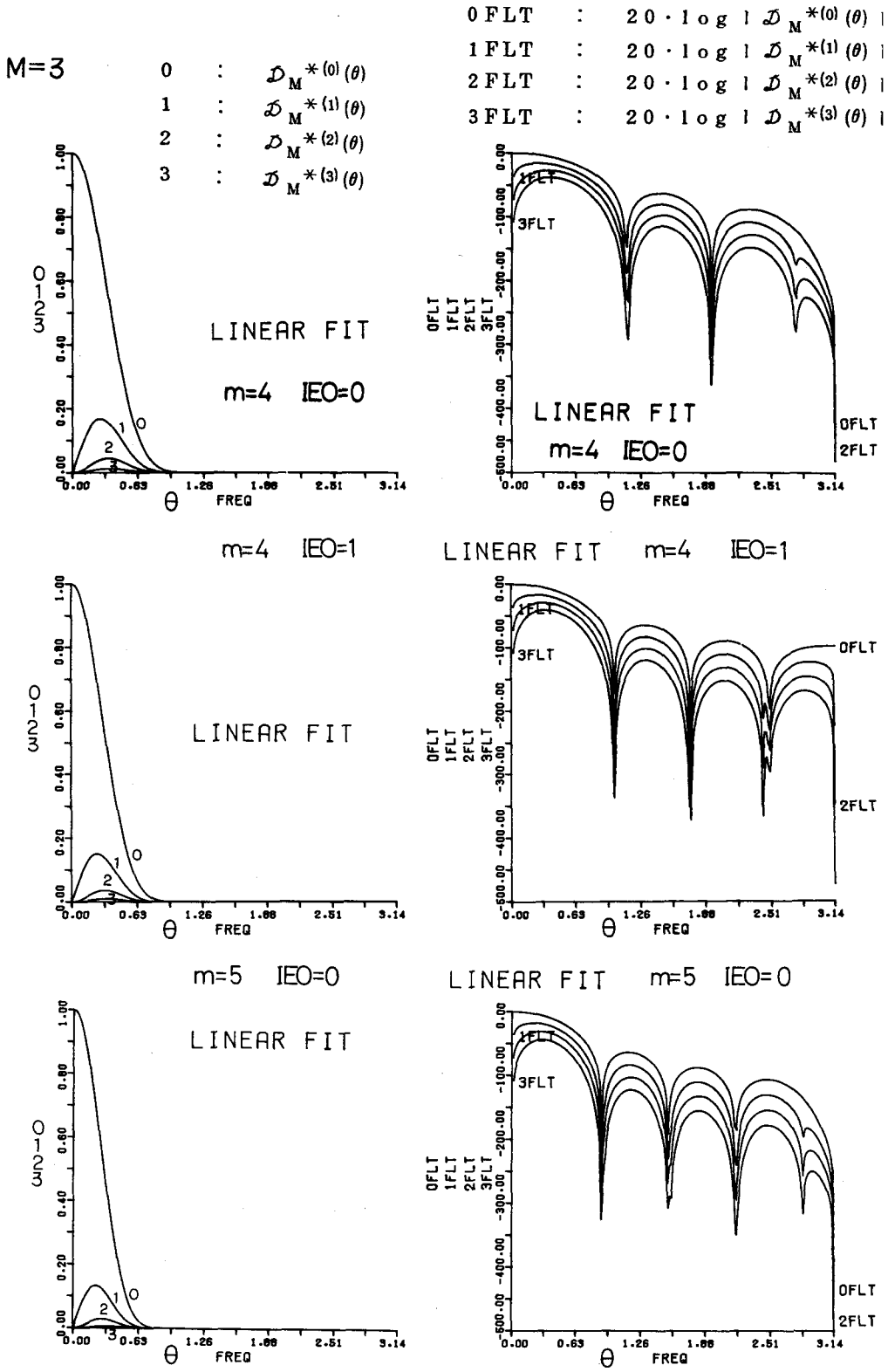


図 2. 4. 6　最小自乗法によるカスケード微分フィルタ $\mathcal{D}_M{}^{(k)}(z)$ の周波数特性－2

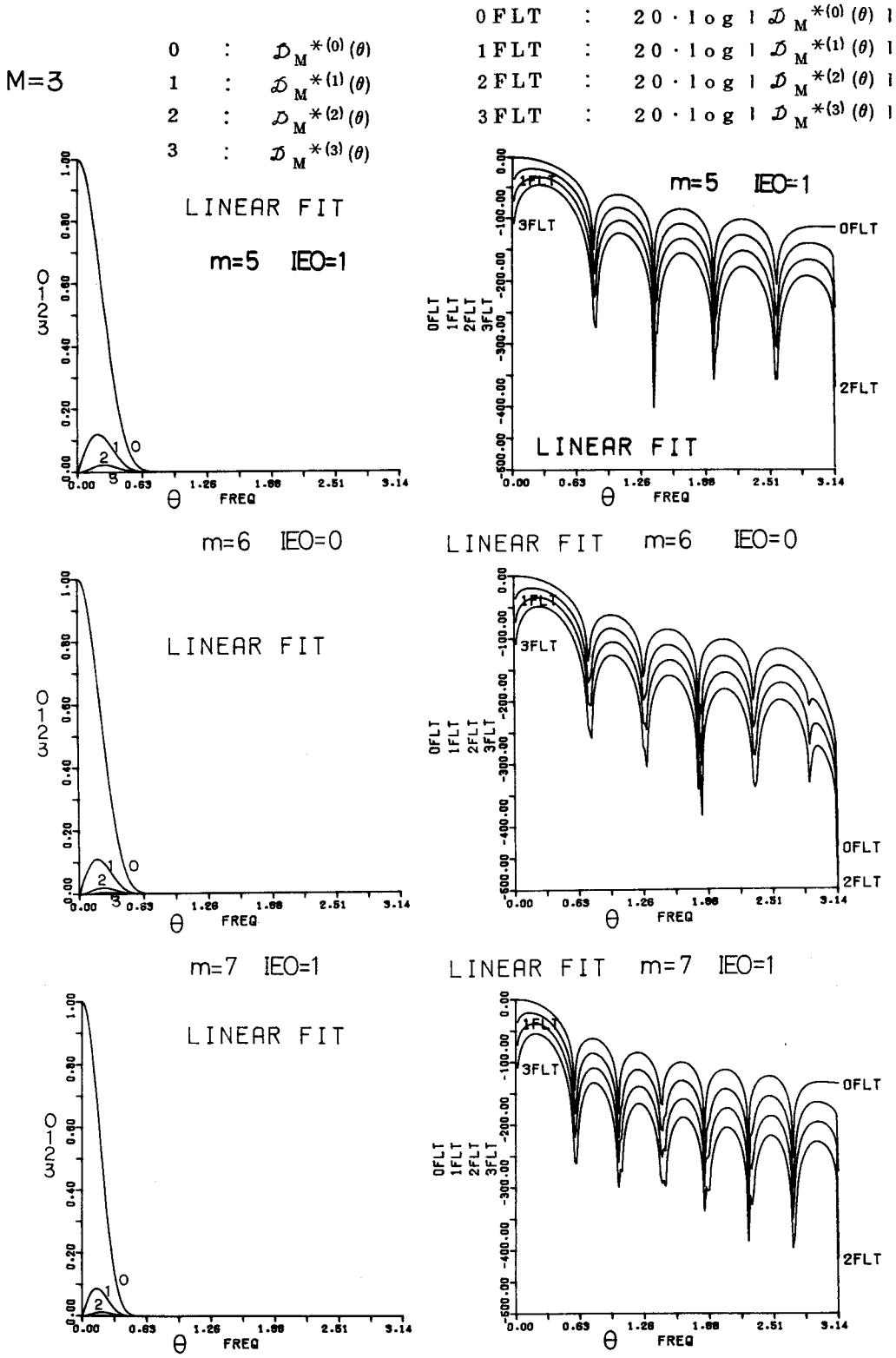


図 2. 4. 7　最小自乗法によるカスケード微分フィルタ $\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$ の周波数特性－3

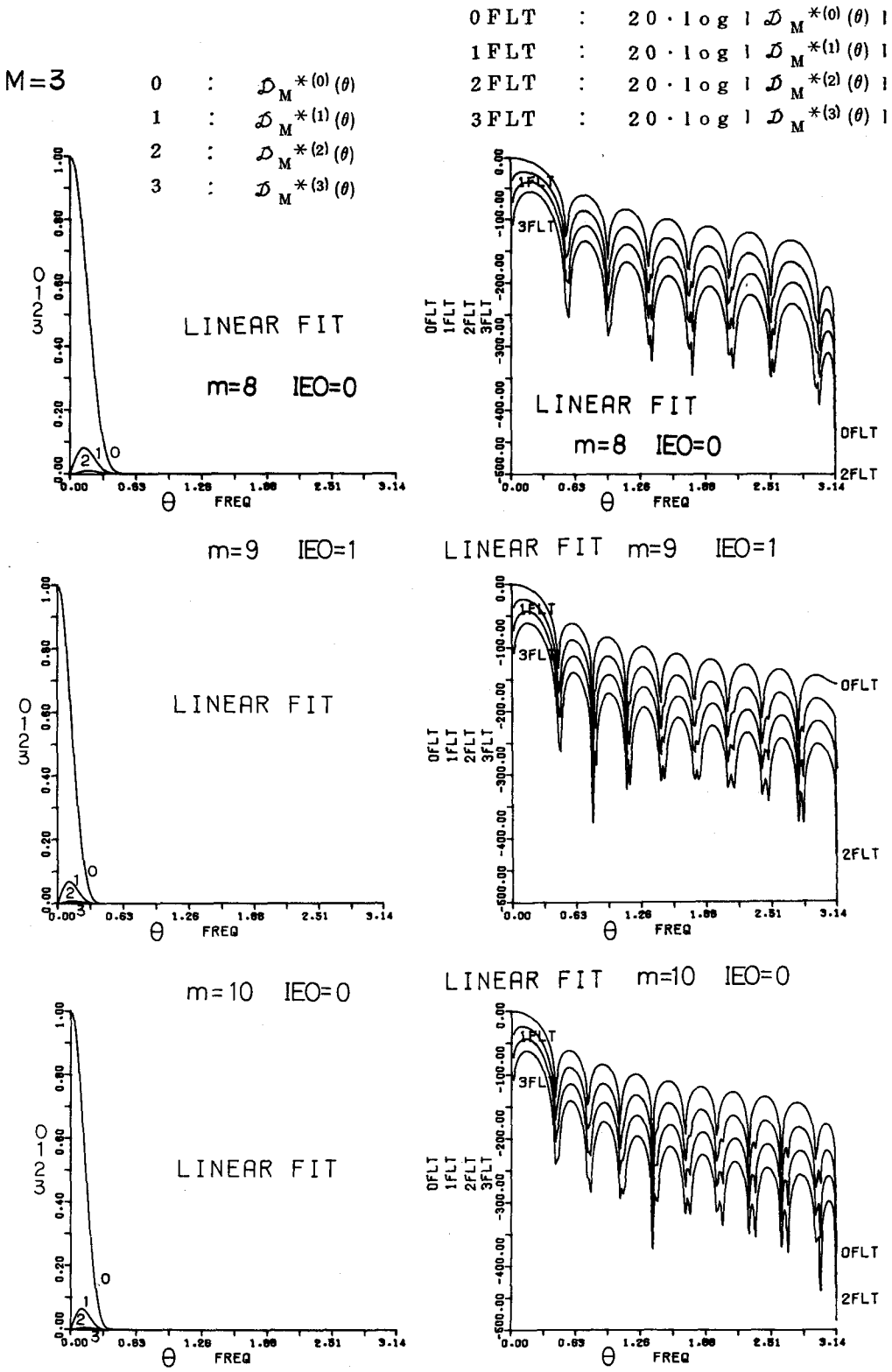


図 2. 4. 8　最小自乗法によるカスケード微分フィルタ $\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$ の周波数特性－4

$$\mathbf{q} = \beta + \mathbf{M}^{+} \cdot (1 - \mathbf{M} \cdot \beta) \qquad (2.4.19)$$

となる。ここで

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_N)^T \qquad (2.4.20)$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} P^*(\theta) \cdot \cos\left\{\left(\frac{N+1}{2} - k\right)\theta\right\} d\theta \qquad (2.4.21)$$

$$(k = 1, 2, \cdots, N)$$

となる。

このようにして得た$Q(z)$は低減フィルタなのでカスケード・フィルタ$\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$も狭帯域の微分フィルタとなる。これらの細かい性質は2.6で論じてある。カスケード微分フィルタは，M，m，kとNが偶（$N = 2m$）か奇（$N = 2m + 1$）を区別するIEO（$IEO = 1$：奇，$IEO = 0$：偶）を指定すればよい。ここで考えた$P(z)$，$Q(z)$，$\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$には「最小自乗法による」と形容詞を付けることにする。又$\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$の振幅特性を$\mathcal{D}_M^{*(k)}(\theta)$と表わしておく。すなわち

$$\mathcal{D}_M^{(k)}(e^{i\omega T_s}) = i^k \cdot \mathcal{D}_M^{*(k)}(\omega \cdot T_s) \cdot e^{-i\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)M \cdot T_s} \qquad (2.4.22)$$

2.4.3 応答波形

ここで提案したカスケード微分フィルタが実際の波形に対してどのように応答するかを調べるために図2.4.8のようなシステムを考える。2次系

$$R(S) = \frac{G}{A \cdot S^2 + B \cdot S + 1} \qquad (2.4.23)$$

に信号

$$x(t) = A_s \cdot \sin \omega_o t + B_s \cdot t^2 + C_s \cdot t + D_s + N(v, \sigma) \qquad (2.4.24)$$

を加えた時の出力$y(t)$に雑音$\varepsilon(t)$（$= N(0, \pi_o)$）を加えたものを$\hat{y}(t)$とし，このサンプル値$\hat{y}_n$（$T_s = 1\,sec$）の$\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$による応答を調べる。ここで$N(v, \sigma)$は平均0，標準偏差σの正規性雑音である。図2.4.9は$A_s = 0$，$B_s = 0$，$C_s = 1$，$D_s = 0$，$v = 0$，$\sigma = 5$ $k = 0$，$M = 3$，$m = 4$，$IEO = 1$の場合すなわち，ランプ状入力の応答波形である。ところで$m \cdot M \cdot T_s = 12\,sec$だけれど，図2.4.9には$\hat{Y}_n$が12秒遅れた$\hat{y}_n$の濾過値となっているのがわかる。図2.4.10と図2.4.11では$A_s = 0$，$B_s = 1$，$C_s = 0$，$D_s = 0$，$v = 0$，$\sigma = 100$の場合に対し$k = 1$および$k = 2$（他は図2.4.9と同じ）としたものである。すなわち時間の2次関数で与えられる信号の速度，加速度を求めるもので，図2.4.10，図2.4.11に雑音が除去され12 sec時間の遅れた速度，加速度が抽出されている様子がわかる。

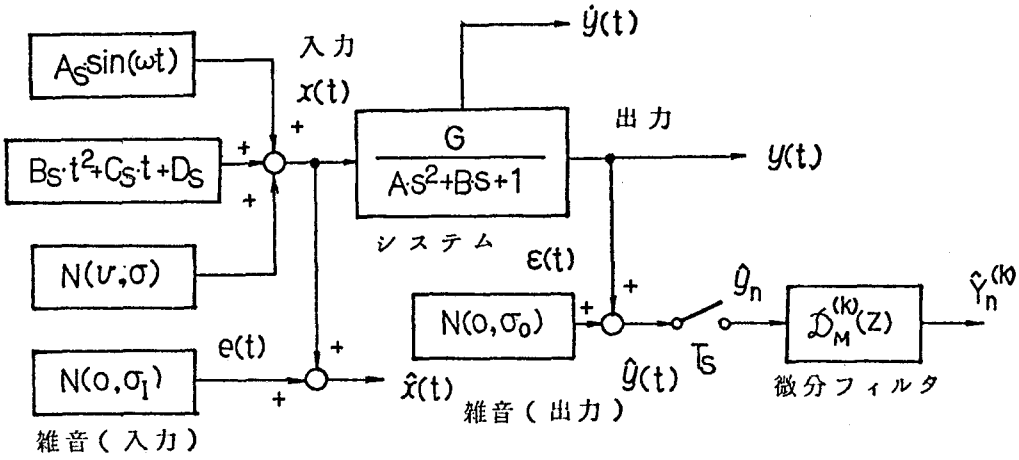


図 2. 4. 8　カスケード・ディジタル微分フィルタのテストのためのシステム

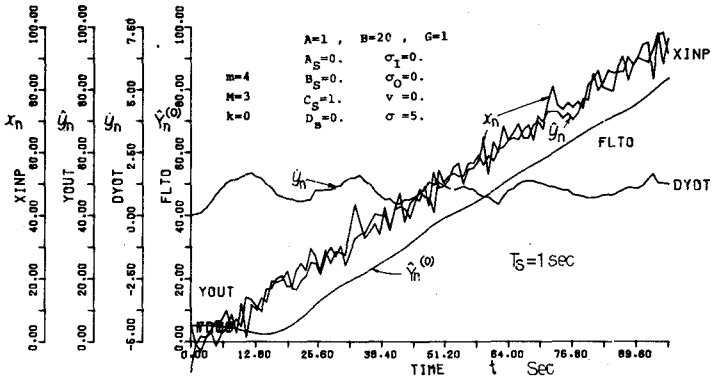


図 2. 4. 9　雑音を含むランプ状信号に対する応答

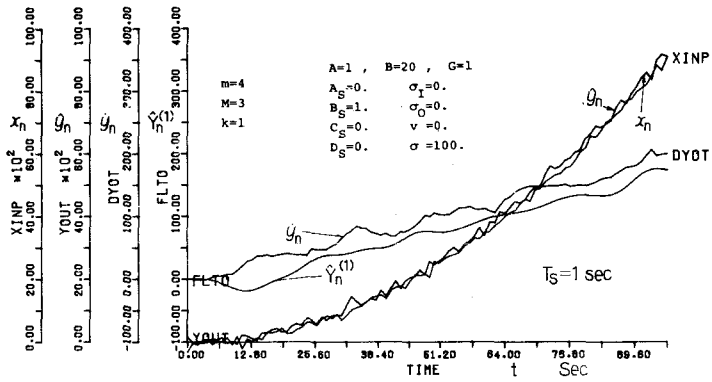


図 2. 4. 1 0　雑音を含む時間の 2 次関数に対する応答（ $k = 1$ ）

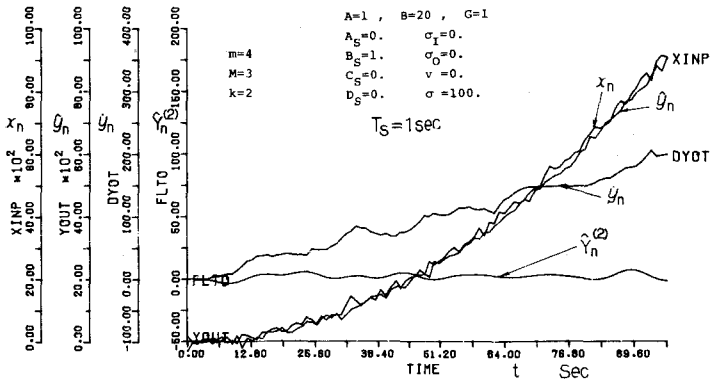


図 2. 4. 1 1　雑音を含む 2 次関数に対する応答（ $k = 2$ ）

2.5 Zolotarev の多項式によるディジタル微分フィルタ

カスケード・フィルタを作る際に基礎となるフィルタ$P(z)$として2.4では最小自乗法の意味で狭帯域の微分フィルタを用いた。しかしこの選び方は無数にあり得る。ただ低域成分の微分ということに興味があるから$P^*(\theta)$として狭帯域の低域特性のものが望ましい。*Zolotarev* の多項式を用いると（1.4.46）のような一様最良化誤差を最小にするという意味で最適な微分フィルタが得られ，これをカスケード・フィルタの基礎のフィルタとして用いることができる。*Zolotarev* 多項式の説明とそれによる微分フィルタ$P(z)$，またそれより得られる$Q(z)$とカスケード微分フィルタの設計例について与える。この節での$P(z)$，$Q(z)$を$\tilde{P}(z)$，$\tilde{Q}(z)$と記してある。

2.5.1 *Zolotarev* の多項式

Zolotarev の多項式というのは図2.5.1のようにλを(32)，(34)，(35)

$$0<\lambda<1 \qquad (2.5.1)$$

として

$$\lambda \leqq |x| \leqq 1 \qquad (2.5.2)$$

で等リプルとなり

$$|x|<\lambda \qquad (2.5.3)$$

で2つの極値をとり

$$|x|>1 \qquad (2.5.4)$$

には極値をもたないような奇数次の多項式である。正確には$2n+1$次の多項式

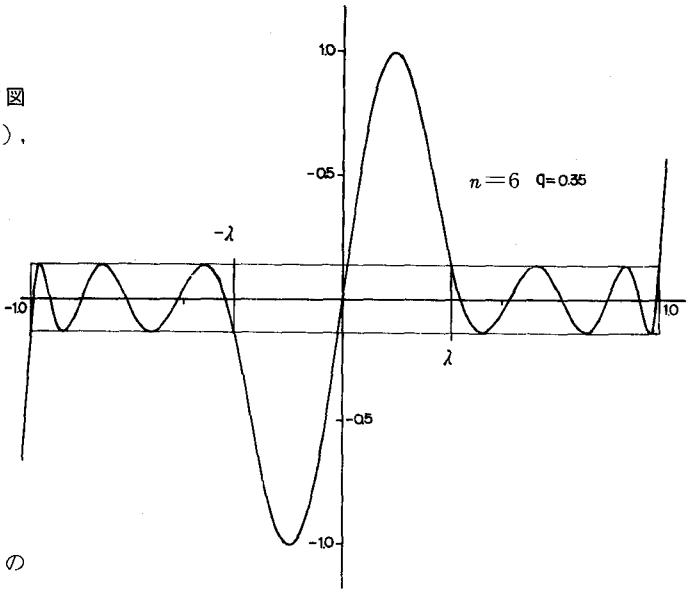


図 2.5.1 *Zolotarev* の多項式

$$F_{2n+1}(x)=\frac{L_0}{2}\left[\left\{\frac{\vartheta_1(a+v)}{\vartheta_1(a-v)}\right\}^{n+\frac{1}{2}}+\left\{\frac{\vartheta_1(a-v)}{\vartheta_1(a+v)}\right\}^{n+\frac{1}{2}}\right] \qquad (2.5.5)$$

を$2n+1$次の*Zolotarev* の多項式という

ここで

$$a=1/(4n+2) \qquad (2.5.6)$$

であり，又$\vartheta_1(v)$は*Weierstrass* の *Theta* 関数であり(33)，(36)

$$\vartheta_1(v) = 2\cdot\sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^{\ell}\cdot q^{(\ell+\frac{1}{2})^2}\cdot \sin(2\ell+1)\pi\cdot v \qquad (2.5.7)$$

で与えられる。(2.5.7)は

$$|q|<1 \qquad (2.5.8)$$

なら絶対一様収束する。

次に$Jacobi$の楕円関数での母数をk[36]，塡補母数を$k'=\sqrt{1-k^2}$とし

$$K=\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2\cdot u^2)}} \qquad (2.5.9)$$

$$K'=\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k'^2\cdot u^2)}} \qquad (2.5.10)$$

とする。そして

$$q=exp\left(-\frac{\pi K'}{K}\right) \qquad (2.5.11)$$

とする。K，K'が共に正なのでqは（2.5.8）の条件を満たしている。逆にqが定まると

$$K=\frac{\pi}{2}(1+2\cdot q+2\cdot q^4+2\cdot q^9+\cdots)^2 \qquad (2.5.12)$$

となりKが定まる。[36]　次に$sn(\cdot)$を$Jacobi$の楕円関数として

$$M'=2\cdot K\cdot a \qquad (2.5.13)$$

$$\lambda=sn\ M' \qquad (2.5.14)$$

$$u=2K\cdot v \qquad (2.5.15)$$

および

$$x=\frac{\lambda\cdot cn\ u}{\sqrt{\lambda^2-sn^2\ u}} \qquad (2.5.16)$$

とおく。$F_{2n+1}(x)$は次のようにして定まる。まず次数nおよび図2.5.1を参照　してλを定める。リブルの高さL_oは単に全体を伸縮するのみなので，後で考えることができる。次に（2.5.6）よりaを定め次に（2.5.14）よりM'を定める。次に（2.5.13）よりKを定め，（2.5.9）よりkを定め$k'=\sqrt{1-k^2}$　を求め（2.5.10）よりK'を計算する。次に（2.5.11）よりqを求める。次にxの値を与えて（2.5.16）よりuを求め，（2.5.15）よりvを求める。このようにして（2.5.7）と（2.5.5）により$F_{2n+1}(x)$が求まる。

これら一連の式をみると$F_{2n+1}(x)$はxの多項式であるような気がしないが，xの多項式であることが証明されている。[32]$F_{2n+1}(x)$の零点は$2n+1$個あるが，このうち$\lambda\leqq x\leqq 1$にはn個があり

$$\frac{\vartheta_1(a+i\cdot v_n)}{\vartheta_1(a-i\cdot v_n)}=exp\left(i\frac{2m-1}{2n+1}\cdot\pi\right) \qquad (2.5.17)$$

を満たす。この v_m を用いると根は

$$x_m = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + (1-\lambda^2)\cdot x_m^2\,(2K\cdot x_m, k')}} \qquad (2.5.18)$$

で表わされる。$F_{2n+1}(0) = 0$ および奇関数なることを用いて

$$F_{2n+1}(x) = L_o \cdot x \cdot \prod_{m=1}^{n} (x^2 - x_m^2) \qquad (2.5.19)$$

と表わされる。これを展開して

$$F_{2n+1}(x) = L_o \cdot \sum_{\ell=0}^{n} a_{n,\ell} \cdot x^{2\cdot(n-\ell)+1} \qquad (2.5.20)$$

を得る。

実際計算する場合には λ を与えるより q を与えた方が便利である。図 2.5.3 はいくつかの n と q に対して第 1 の極値が 1 となるようにして $F_{2n+1}(x)$ を描いたものである。

2.5.2 *Zolotarev* の多項式を用いた微分フィルタ (E15)

Zolotarev の多項式 $F_{2n+1}(x)$ を用いるとディジタル微分フィルタを作ることができる。すなわち（2.5.20）で

$$x = \sin\frac{\theta}{2} \qquad (2.5.21)$$

とすると図 2.5.2 のように $-1 \leqq x \leqq 1$ が $-\pi \leqq \theta \leqq \pi$ に対応する。そして $F_{2n+1}(\sin\frac{\theta}{2})$ を

$$F_{2n+1}(\sin\frac{\theta}{2}) = 2\cdot L_o \cdot \sum_{\ell=0}^{n} b_{n,\ell} \cdot \sin(n+\frac{1}{2}-\ell)\theta \qquad (2.5.22)$$

と表わすことができる。これを振幅特性としてもつパルス伝達関数は（1.4.54）より

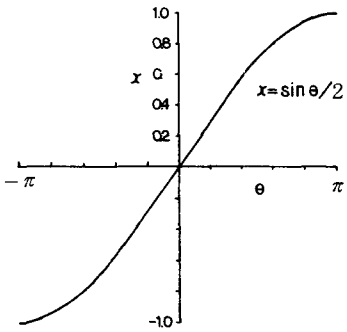


図 2.5.2　$x = \sin\frac{\theta}{2}$

$$\tilde{P}(z) = L_o \cdot \sum_{\ell=1}^{2\cdot(n+1)} b_{n,\ell-1} \cdot z^{1-\ell} \qquad (2.5.23)$$

$$b_{n,\ell-1} + b_{n,2n+2-\ell} = 0 \qquad (\ell = 1, 2, \cdots, 2n+2) \qquad (2.5.24)$$

となる。このフィルタにランプ信号を入力したとき出力がちょうどその勾配となるという条件を課すとL_oは

$$L_o = 1/2 \cdot Ts \cdot \sum_{\ell=1}^{n+1} \ell \cdot b_{n,n+1-\ell} \qquad (2.5.25)$$

となる。この$\tilde{P}(z)$に対して2.4.2で行ったと同じ方法で$\tilde{Q}(z)$を作る。そして（2.4.7）によりM段のカスケード・フィルタ$\tilde{\mathcal{D}}_M^{(k)}(z)$を作ることができる。ただしこの時は

$$N = 2n + 2 \qquad (2.5.26)$$

のような偶数に限られる。図2.5.3にはこのように$Zolotarev$の多項式より作った$\tilde{P}(z)$，$\tilde{Q}(z)$に対する$\tilde{P}^*(\theta)$，$\tilde{Q}^*(\theta)$，$\theta \cdot \tilde{P}^*(\theta)$を各$n$，$q$の値に対して描いてある。又図2.5.5にはこれらを用いた3段のカスケード・フィルタの特性を示した。又表2.5.1には$\tilde{P}(z)$，$\tilde{Q}(z)$の係数を示した。

$Zolotarev$多項式より得られた$\tilde{P}(z)$，$\tilde{Q}(z)$，$\tilde{\mathcal{D}}_M^{(k)}(z)$等には「Zolotarev多項式による」と形容詞をつけることにする。又$\tilde{\mathcal{D}}_M^{(k)}(z)$の振幅特性を$\tilde{\mathcal{D}}^*_M{}^{(k)}(\theta)$とする。すなわち

$$\tilde{\mathcal{D}}_M^{(k)}(e^{i\omega Ts}) = i^k \cdot \tilde{\mathcal{D}}^*_M{}^{(k)}(\omega \cdot Ts) \cdot e^{-i\omega \cdot (\frac{N-1}{2}) M \cdot Ts} \qquad (2.5.27)$$

D：$\tilde{P}$（Z）の係数　　L：$\tilde{Q}$（Z）の係数

	n	q	1	2	3	4	5
			6	7	8	9	10
ZOLO D	1 n= 1	q = 0.50000	0.254303	0.237092			
ZOLO L	1 n= 1	q = 0.50000	0.101818	0.398182			
ZOLO D	1 n= 3	q = 0.50000	0.032108	0.083438	0.103319	0.048100	
ZOLO L	1 n= 3	q = 0.50000	0.014162	0.071795	0.167565	0.246478	
ZOLO D	1 n= 6	q = 0.50000	0.006914	0.015461	0.026123	0.034192	0.035159
ZOLO D	2 n= 6	q = 0.50000	0.026621	0.009941			
ZOLO L	1 n= 6	q = 0.50000	0.004857	0.016290	0.036658	0.066159	0.099659
ZOLO L	2 n= 6	q = 0.50000	0.129424	0.146952			
ZOLO D	1 n= 9	q = 0.50000	0.003143	0.005408	0.008875	0.012527	0.015620
ZOLO D	2 n= 9	q = 0.50000	0.017352	0.017070	0.014469	0.009709	0.003421
ZOLO L	1 n= 9	q = 0.50000	0.003410	0.008021	0.015075	0.025589	0.038999
ZOLO L	2 n= 9	q = 0.50000	0.054565	0.070579	0.085175	0.096282	0.102305

表2.5.1　$Zolotarev$多項式による$\tilde{P}(z)$，$\tilde{Q}(z)$の係数

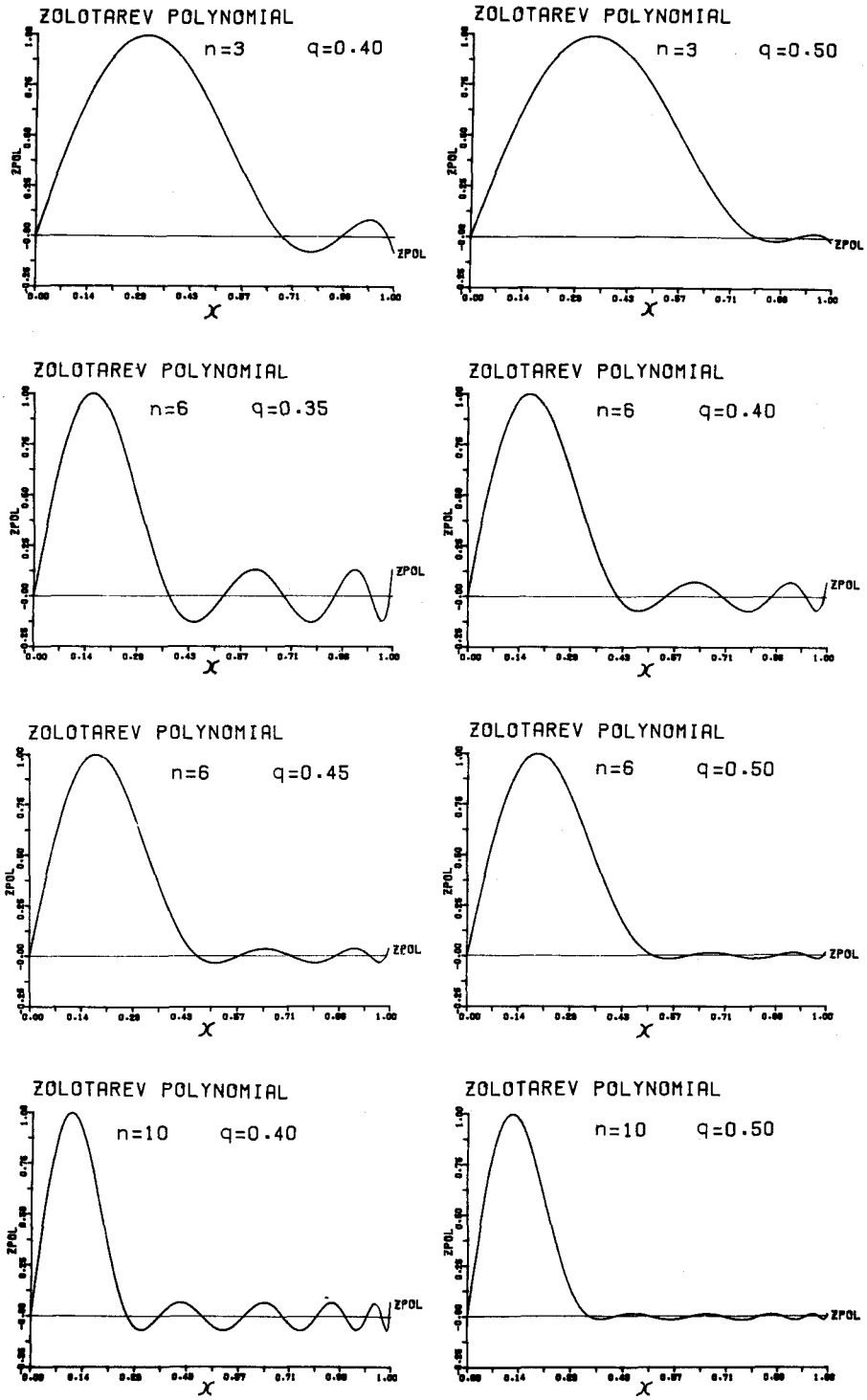


図 2. 5. 3　パラメータを種々変えたZolotarevの多項式

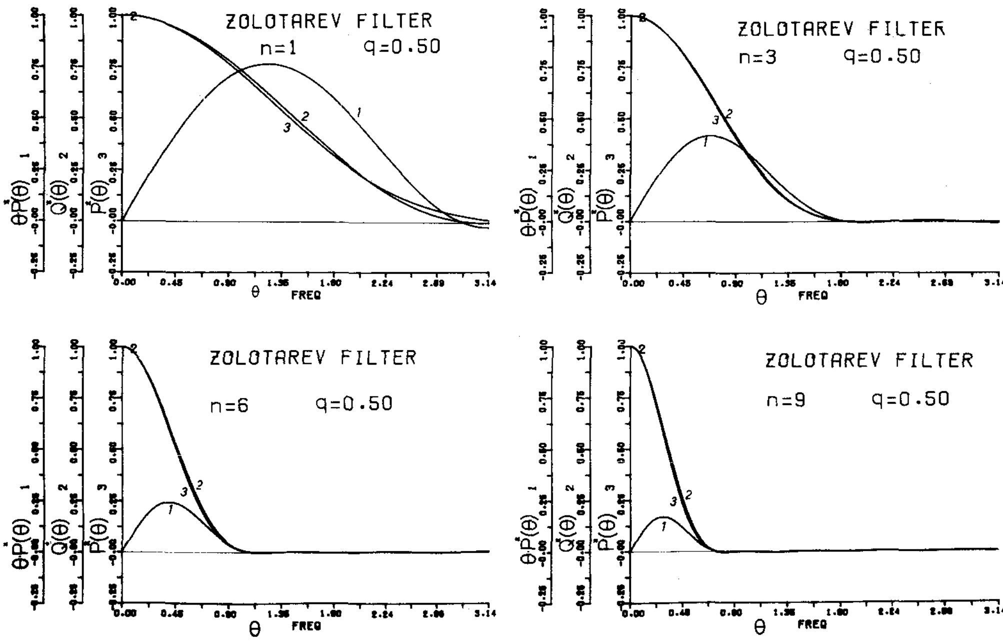


図 2. 5. 4 Zolotarev 多項式による $\theta\cdot\widetilde{P}^{*}(\theta),\widetilde{Q}^{*}(\theta),\widetilde{P}^{*}(\theta)$

M=3

ZOLOTAREV n=1 q= 05

I	K= 0	K= 1	K= 2	K= 3
1	0.105554E-02	0.263635E-02	0.658456E-02	0.164458E-01
2	0.123837E-01	0.230778E-01	0.380283E-01	0.459962E-01
3	0.608131E-01	0.777058E-01	0.672113E-01	-0.311311E-02
4	0.163156E 00	0.120466E 00	0.435139E-02	-0.121780E 00
5	0.262591E 00	0.836014E-01	-0.116175E 00	-0.890939E-01

ZOLOTAREV n=3 q= 05

I	K= 0	K= 1	K= 2	K= 3
1	0.284036E-05	0.643965E-05	0.145999E-04	0.331009E-04
2	0.431981E-04	0.820268E-04	0.149856E-03	0.258054E-03
3	0.319816E-03	0.508284E-03	0.749983E-03	0.990139E-03
4	0.154061E-02	0.204253E-02	0.241601E-02	0.239041E-02
5	0.543602E-02	0.598319E-02	0.553377E-02	0.391053E-02
6	0.149729E-01	0.133841E-01	0.930532E-02	0.354134E-02
7	0.334635E-01	0.237505E-01	0.111831E-01	-0.671346E-04
8	0.622237E-01	0.335644E-01	0.798116E-02	-0.646901E-02
9	0.978755E-01	0.370614E-01	-0.136244E-02	-0.119797E-01
10	0.131659E 00	0.296011E-01	-0.136137E-01	-0.119317E-01
11	0.152462E 00	0.113641E-01	-0.223577E-01	-0.504763E-02

ZOLOTAREV n=6 q= 05

I	K= 0	K= 1	K= 2	K= 3
1	0.114579E-06	0.163104E-06	0.232181E-06	0.330512E-06
2	0.115286E-05	0.145881E-05	0.181712E-05	0.221725E-05
3	0.646095E-05	0.735958E-05	0.815060E-05	0.870451E-05
4	0.264073E-04	0.272496E-04	0.269981E-04	0.253542E-04
5	0.872239E-04	0.817632E-04	0.725849E-04	0.598024E-04
6	0.245487E-03	0.209176E-03	0.166155E-03	0.119594E-03
7	0.607725E-03	0.470242E-03	0.332906E-03	0.206749E-03
8	0.135129E-02	0.947240E-03	0.593723E-03	0.312186E-03
9	0.273842E-02	0.173249E-02	0.951938E-03	0.410737E-03
10	0.511199E-02	0.290354E-02	0.137852E-02	0.461077E-03
11	0.886151E-02	0.448695E-02	0.180194E-02	0.417178E-03
12	0.143528E-01	0.641885E-02	0.211017E-02	0.238771E-03
13	0.218260E-01	0.851665E-02	0.216994E-02	-0.827960E-04
14	0.312806E-01	0.104773E-01	0.186245E-02	-0.512090E-03
15	0.423791E-01	0.119142E-01	0.112714E-02	-0.966316E-03
16	0.544046E-01	0.124312E-01	-0.132945E-05	-0.133109E-02
17	0.663027E-01	0.117215E-01	-0.137901E-02	-0.149209E-02
18	0.768152E-01	0.966213E-02	-0.277181E-02	-0.137344E-02
19	0.846881E-01	0.637493E-02	-0.390725E-02	-0.968354E-03
20	0.889080E-01	0.222799E-02	-0.454522E-02	-0.349202E-03

ZOLOTAREV n=9 q= 05

I	K= 0	K= 1	K= 2	K= 3
1	0.396518E-07	0.365471E-07	0.336855E-07	0.310480E-07
2	0.279807E-06	0.234817E-06	0.195157E-06	0.160265E-06
3	0.118404E-05	0.924380E-06	0.711557E-06	0.538778E-06
4	0.388264E-05	0.284368E-05	0.204316E-05	0.143451E-05
5	0.107543E-04	0.744236E-05	0.500473E-05	0.326182E-05
6	0.266034E-04	0.172933E-04	0.108673E-04	0.656079E-05
7	0.596617E-04	0.365805E-04	0.215497E-04	0.120464E-04
8	0.123829E-03	0.715939E-04	0.394065E-04	0.202904E-04
9	0.240670E-03	0.131108E-03	0.672732E-04	0.317328E-04
10	0.441789E-03	0.226483E-03	0.108010E-03	0.463392E-04
11	0.770931E-03	0.371299E-03	0.163951E-03	0.633674E-04
12	0.128531E-02	0.586369E-03	0.236144E-03	0.811676E-04
13	0.205557E-02	0.886005E-03	0.323505E-03	0.971141E-04
14	0.316368E-02	0.124559E-02	0.422045E-03	0.107737E-03
15	0.469830E-02	0.171862E-02	0.524344E-03	0.109100E-03
16	0.674739E-02	0.228556E-02	0.619525E-03	0.974165E-04
17	0.938813E-02	0.292511E-02	0.698538E-03	0.696288E-04
18	0.126749E-01	0.361436E-02	0.732048E-03	0.252311E-04
19	0.166267E-01	0.437658E-02	0.719255E-03	-0.350474E-04
20	0.212152E-01	0.495257E-02	0.643443E-03	-0.106889E-03
21	0.263561E-01	0.548470E-02	0.497855E-03	-0.183435E-03
22	0.319049E-01	0.583881E-02	0.284127E-03	-0.255785E-03
23	0.376593E-01	0.595570E-02	0.852251E-05	-0.314782E-03
24	0.433682E-01	0.578907E-02	-0.307982E-03	-0.349011E-03
25	0.487482E-01	0.531321E-02	-0.641008E-03	-0.353384E-03
26	0.535056E-01	0.452839E-02	-0.960405E-03	-0.323521E-03
27	0.573614E-01	0.346344E-02	-0.123487E-02	-0.260153E-03
28	0.600780E-01	0.217470E-02	-0.143604E-02	-0.168653E-03
29	0.614820E-01	0.741535E-03	-0.154243E-02	-0.584785E-04

表 2. 5. 2 Zolotarev 多項式によるカスケード微分フィルタ $\widetilde{\mathcal{D}}_M^{(k)}(z)$ の係数表

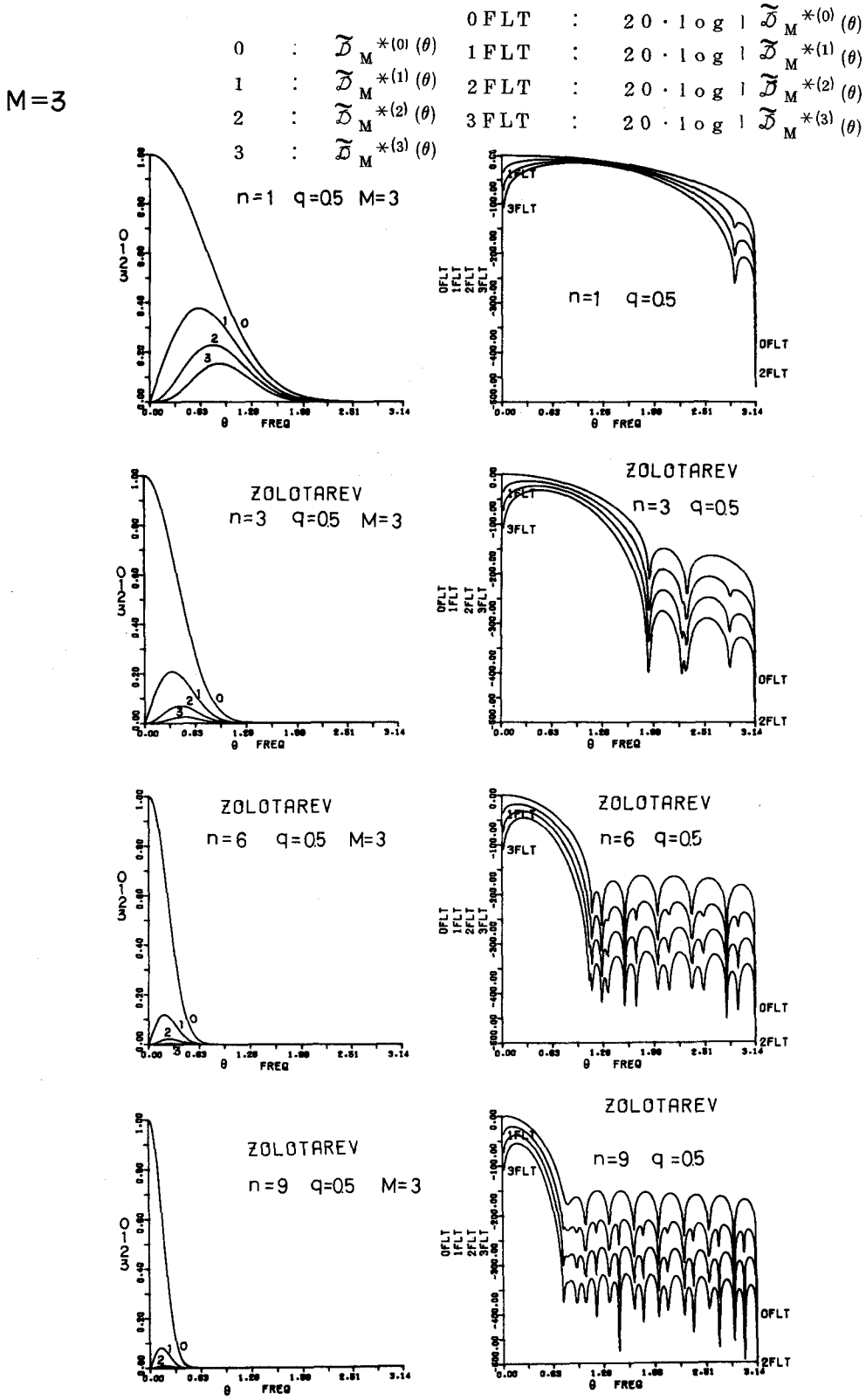


図 2.5.5　Zolotarev 多項式によるカスケード微分フィルタ $\tilde{\mathcal{D}}_M^{(k)}(z)$ の周波数特性

2.6　ディジタル微分フィルタの比較 $(E15)$

この論文ではFIR形の高階の微分フィルタを2種類の方法で構成する手法を述べた。すなわち，〔A〕最小自乗法を用いて直接高階の微分フィルタを近似する。

〔B〕基礎となる1階の微分フィルタと低域フィルタを用いてカスケード接続により高階の微分フィルタを構成する。

である。〔A〕ではそれぞれの階数毎に設計を行なわなければならないのに対し後者ではその接続個数だけで階数が自由に選べることで，この論文では応用問題に対してすべて〔B〕のフィルタを用いている。

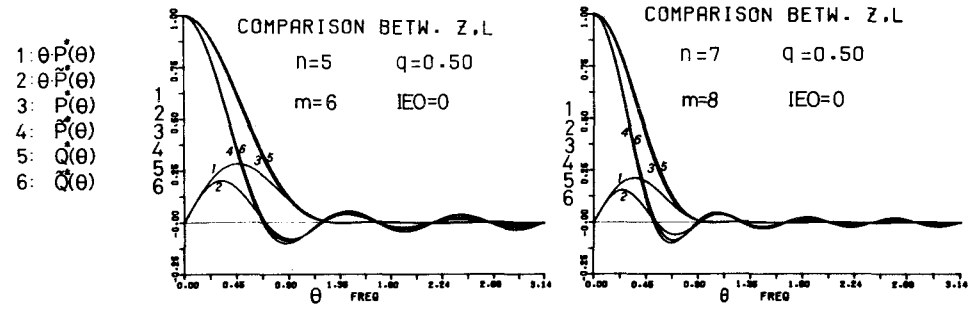


図 2.6.1　同じNに対する最小自乗法および$Zolotarev$多項式による微分フィルタの周波数特性の比較

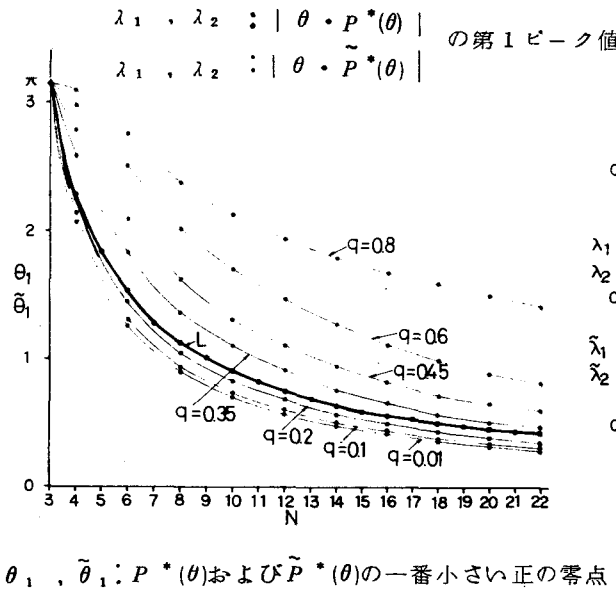


図 2.6.2　微分フィルタの第1零点

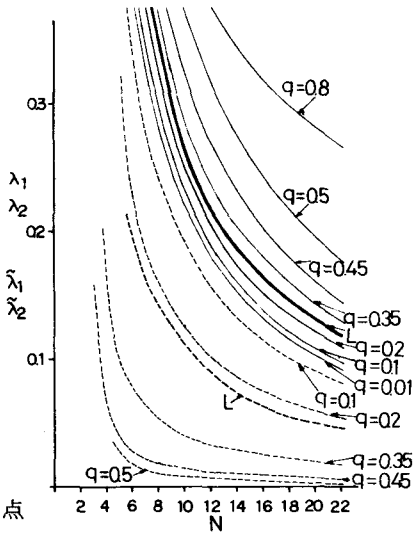


図 2.6.3　微分フィルタのピーク値

〔B〕の方法では同じ位数の微分および低域フィルタ$P(z)$，$Q(z)$を用いている。はじめに$P(z)$を与えて$Q(z)$は〔A〕と同じ最小自乗法により$E^*(\theta) \fallingdotseq Q^*(\theta)$（$|\theta| \leqq \pi$）が成立するように近似し，その近似の度合は実用上十分によいことは図2.4.3，図2.4.4，図2.5.4など数多くの例より確かめられるところである。

そして基になる微分フィルタ$P(z)$としては最小自乗法で直線をあてはめて作った「最小自乗法によるフィルタ」と*Zolotarev*多項式を用いて作った「*Zolotarev*多項式による」フィルタを与えた。実用上からはこの2種類のいずれかを用いることになるので，両者の比較をしておく。最小自乗法によるフィルタ$P(z)$はmとIEOで確定する。*Zolotarev*多項式によるフィルタ$\tilde{P}(z)$はnとqで確定する。$P(z)$，$\tilde{P}(z)$の係数の個数を（次数＋1）Nとすると

$$2 \cdot m + IEO = N \qquad (2.6.1)$$

$$2 \cdot (n+1) = N \qquad (2.6.2)$$

という関係があった。

$P^*(\theta)$および$\tilde{P}^*(\theta)$の一番小さい正の零点をθ_1，$\tilde{\theta}_1$とすると，2.4と2.5の結果からわかるように，カスケード・ディジタル微分フィルタを構成した場合に最小自乗法によるフィルタを用いた時は$|\theta| \geqq \theta_1$，*Zolotarev*多項式によるフィルタを用いた時には$|\theta| \geqq \tilde{\theta}_1$の成分はほとんど遮断される。すなわち$\theta_1$，$\tilde{\theta}_1$はフィルタの遮断周波数を定める量となる。又$|\theta \cdot P^*(\theta)|$の第1ピーク値と第2ピーク値を夫々$\lambda_1$，$\lambda_2$（$|\theta \cdot \tilde{P}^*(\theta)|$に対しては$\tilde{\lambda}_1$ $\tilde{\lambda}_2$とする）とする。このときλ_2 / λ_1の値が小さければ遮断の効果が大きいことを示すことになる。

図2.6.2にはθ_1，$\tilde{\theta}_1$のNに対する変化を示した。θ_1も$\tilde{\theta}_1$もqを固定するとNと共に単調に減少するのがわかる。又これらの曲線は交差することなくθ_1の曲線は$\tilde{\theta}_1$のqが0.2，0.35に対する曲線の間にはさまれている。又図2.6.3にはλ_1とλ_2および$\tilde{\lambda}_1$と$\tilde{\lambda}_2$の値を描いた。この図からもλ_1，λ_2は夫々qが0.2と0.35の値に対する$\tilde{\lambda}_1$と$\tilde{\lambda}_2$の間にはさまれていることがわかる。又一般にNを固定して，qを増加させると$\tilde{\theta}_1$は増加し，$\tilde{\lambda}_1$は増大し$\tilde{\lambda}_2$は減少する。従って$P^*(\theta)$はNを固定するとqと共に通過帯域は増加し遮断効果（$\tilde{\lambda}_2 / \tilde{\lambda}_1$を指標として）は増加する。我々の目的とする多くの場合帯域は狭く，しかも遮断効果の高いものが要求されるので，qは目的に応じて0～1の適当な値に選ばねばならない。

$P(z)$は遮断周波数と遮断効果の点から考えると$\tilde{P}(z)$の$0.2 < q < 0.35$を満たす適当なqの値の場合と等価となる。ただし$|\theta P^*(\theta)|$のピーク値の方は単調に減少するのに対して$|\theta P^*(\theta)|$の2番目以上のピーク値は全て等しいことに注意を要する。

図2.6.1には$N=12$，16の場合に$\theta \cdot P^*(\theta)$，$\theta \cdot \tilde{P}^*(\theta)$，$P^*(\theta)$，$\tilde{P}^*(\theta)$，$Q^*(\theta)$，$\tilde{Q}^*(\theta)$を描いたものである。この例では遮断周波数で$P(z)$が，遮断効果で$\tilde{P}(z)$が勝っている。カスケード接続すると遮断効果はいくらでも改善できるので，この論文の第3章以下では設計の簡単な最小自乗法によるフィルタ$P(z)$，$Q(z)$を用いて議論した。

2.7　ハイブリッド形微分フィルタ（A3）

ＦＩＲ形のディジタルフィルタはディジタルフィルタ特有の形でアナログフィルタで直接このような形を持つものは存在しない。しかし適当な工夫をすれば近似的にではあるが実現可能である。それはサンプリングを伴なうハイブリッド系とする方法である。この節ではこの方法で微分フィルタを構成する方法について述べる。

2.7.1　アナログＦＩＲ微分フィルタ

ディジタル微分フィルタ（2.4.14）への入力をx_k，出力をy_kとすると

$$y_k = \frac{12}{(N-1)\cdot N\cdot(N-1)\cdot T_s}\sum_{l=1}^{N}\left(\frac{N+1}{2}-l\right)\cdot x_{k+1-l} \qquad (2.7.1)$$

となる。いま

$$N\cdot T_s = T \qquad (2.7.2)$$

とし固定した時刻tに対して

$$t = k\cdot T_s \qquad (2.7.3)$$

とおく。ここでTとtを固定したままでNとkを増大させると$T_s \to 0$となりアナログ形

$$y(t) = \int_{t-T}^{t} w(t-\tau)\cdot x(\tau)\,d\tau \qquad (2.7.4)$$

ＦＩＲ微分フィルタを得る。

ここでインパルス応答$w(t)$は図2.7.1のような形をしている。具体的には

$$w(t) = \begin{cases} \dfrac{12}{T^3}\left(\dfrac{T}{2}-t\right) & 0 \leqq t \leqq T \\ 0 & \text{他} \end{cases} \qquad (2.7.5)$$

である。このフィルタにランプ状の信号

$$x(t) = \alpha\cdot t + \beta \qquad (2.7.6)$$

を加えると出力は　$y(t) = \alpha$となり入力信号の微分を表わしていることがわかる。

つぎにこのフィルタの周波数特性を調べるために入力信号として

$$x(t) = e^{i\omega t} \qquad (2.7.7)$$

を選んだ場合を考える。この場合の出力信号は

$$y(t) = i\omega\cdot I\left(\frac{\omega T}{2}\right)\cdot e^{i\omega\left(t-\frac{T}{2}\right)} \qquad (2.7.8)$$

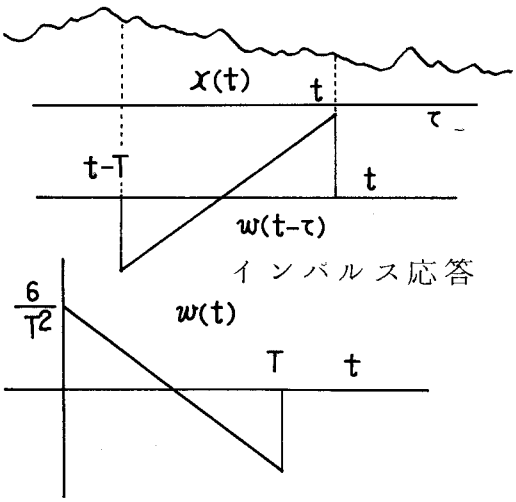


図2.7.1　$w(t)$の変化

と表わされる。ただしここで

$$I(\theta)=\frac{3(\sin\theta-\theta\cdot\cos\theta)}{\theta^3} \qquad (2.7.9)$$

である。図2.7.2に $|I(\theta)|^2$ および $|\theta\cdot I(\theta)|^2$ の変化を示した。この図からみると

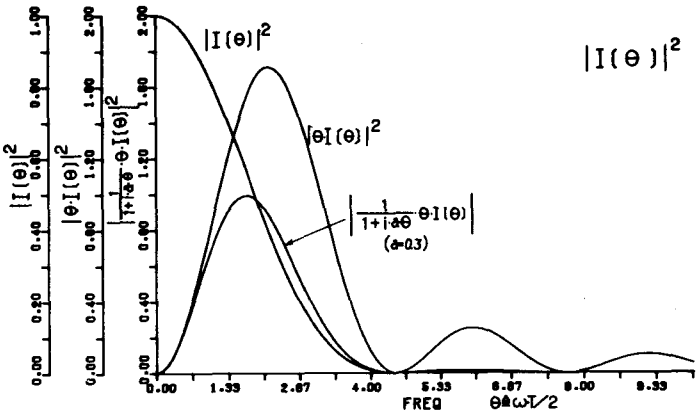


図2.7.2　アナログFIR微分フィルタの周波数特性

$\theta=\omega T/2$ として $|\theta|\leqq 2$ すなわち $|\omega|\leqq 4/T$ の範囲でほぼ微分特性を示していることがわかる。$|\theta\cdot I(\theta)|^2$ の変化をみると，第2，第3の山の高さも比較的高いが，これはこのフィルタ(2.7.4)を通す前に簡単な構造の低域アナログフィルタ，たとえば1次遅れ

$$F_{T_c}\left(\frac{\omega T}{2}\right)=\frac{1}{1+i\omega\cdot T_c} \qquad (2.7.10)$$

を通すことにより取り除くことが可能である。図2.7.2の例は $a=2\cdot T_c/T=0.3$ とした場合の総合特性

$$\left|\frac{1}{1+i\,a\cdot\theta}\cdot\theta\cdot I(\theta)\right|^2 \qquad (2.7.11)$$

を描いたものであり，ほぼ $|\omega|\leqq 3\pi/2T$ にわたる一つの山だけになる。もし(2.7.4)のようなフィルタが実現できるものならば T の選び方で入力信号の中の必要とする低域成分の微分値を抽出することができる。

2.7.2　サンプリング

しかし(2.7.4)のようなフィルタを実現はできない。ただしそのサンプル値を作ることは可能

である図2.7.2よりF_{T_c}（$\omega T/2$）通過後フィルタ2.7.4を通過した信号は

$$|\theta| \leqq 4.4443 \fallingdotseq 3\pi/2 \qquad (2.7.12)$$

の部分以外はほとんど減衰されてしまうので出力信号の周波数成分はほぼ

$$|\omega| \leqq 3\pi/T \qquad (2.7.13)$$

に限定されているものと考えられる。そこでサンプル周期をT_sとして折り曲げ周波数π/T_sを

$$T_s/\pi \geqq 3\pi/T \qquad (2.7.14)$$

を満足するように選べばサンプリングにより生ずる別名の誤差を十分に小さくすることが可能となる。そこで $T_s=T/3$ と選んだ場合について別名の誤差がどの程度におさえられるかについて詳論してみる。いま

$$y_k=\frac{12}{T^3}\int_{\frac{T}{3}(k-1)}^{\frac{T}{3}\cdot k}\left\{\tau-\left(\frac{k}{3}-\frac{1}{2}\right)\cdot T\right\}\tilde{x}(\tau)\,d\tau \qquad (2.7.15)$$

とする。ただし$\tilde{x}(t)$をフィルタ$F_{T_c}(\omega T/2)$に通して得られた信号とする。

いまこのサンプル値を$T/3$の間0次保持することにより得られた信号を$u(t)$として，その Laplace変換を$U(S)$とすると

$$U(S)=\frac{1-e^{-\frac{T}{3}\cdot S}}{S}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}y_k\cdot e^{-k\frac{T}{3}\cdot S} \qquad (2.7.16)$$

と表わされる。ただしここで時間軸の負の部分で信号の値は0とする。このフィルタの周波数特性を調べるために入力信号として$x(t)=e^{i\omega t}$と選んでみる。このとき

$$y_k=i\omega\cdot\frac{1}{1+i\omega\cdot T_c}\cdot I\left(\frac{\omega T}{2}\right)\cdot e^{i\omega\left(\frac{1}{3}k-\frac{1}{2}\right)\cdot T} \qquad (2.7.17)$$

と表わされるので

$$U(S)=i\omega\cdot\frac{1}{1+i\omega\cdot T_c}\cdot\frac{1-e^{-\frac{1}{3}T\cdot S}}{\frac{1}{3}\cdot T\cdot S}\cdot I\left(\frac{\omega T}{2}\right)\cdot\frac{e^{-\frac{i\omega\cdot T}{2}}}{1-e^{(i\omega-S)\frac{T}{3}}} \qquad (2.7.18)$$

となる。したがって出力$u(t)$は逆Laplace変換の公式より

$$u(t)=i\omega\cdot\frac{1}{1+i\omega\cdot T_c}\cdot I\left(\frac{\omega\cdot T}{2}\right)\cdot e^{-\frac{i\omega T}{2}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(S)\,dS \qquad (2.7.19)$$

ここで

$$F(S)=\frac{1-e^{-\frac{T\cdot S}{3}}}{\frac{1}{3}\cdot T\cdot S}\cdot\frac{e^{t\cdot S}}{1-e^{(i\omega-S)\frac{T}{3}}} \qquad (2.7.20)$$

であり，γは正数とする。ところで解析関数$F(S)$の極は$S=0$，$S=i\cdot(\omega+6\pi l/T)$（$l=0,\pm1,\pm2\cdots\cdots$）に分布している。またこれらの極はすべて一位の極であるから留数はそれぞれ

$$\lim_{S\to 0} S\cdot F(S) = 0 \qquad (2.7.21)$$

$$\lim_{S\to i(\omega+\frac{6\pi l}{T})}\left\{S - i(\omega+\frac{6\pi l}{T})\right\}\cdot F(S) = \frac{e^{-\frac{i\omega T}{6}}\cdot \sin\frac{\omega\cdot T}{6}}{\frac{1}{6}(\omega+\frac{6\pi l}{T})\cdot T}\cdot e^{i(\omega+\frac{6\pi l}{T})t} \qquad (2.7.22)$$

となり留数定理により

$$u(t) = i\omega\cdot\sum_{l=-\infty}^{\infty} P_l(\frac{\omega\cdot T}{2})\cdot e^{i\cdot(\omega+\frac{6\pi l}{T})\cdot t} \qquad (2.7.23)$$

ここで

$$P_l(\theta) = \frac{I(\theta)}{1+ia\cdot\theta}\cdot\frac{e^{-i\cdot\frac{3}{4}\theta}\cdot\sin\frac{\theta}{3}}{\frac{\theta}{3}+\pi\cdot l} \qquad (2.7.24)$$

を得る。(2.7.23) の $l\neq 0$ の項は第1章で述べた別名効果として生じたものであり，$l\neq 0$ の項の総和が別名の誤差となる。各項の影響の度合を調べるために図 2.7.3 には種々の l に対する $|\omega\cdot T/2\cdot P_l(\omega\cdot T/2)|^2$ を $\theta=\omega T/2$ として図示した ($a=0.3$)。これから (2.7.23) において $|l|\geqq 1$ の項は $|\omega|\leqq\pi/T_s|$ に対する影響は小さなものであることがわかり近似的に

$$u(t) \fallingdotseq i\omega\cdot P_0(\frac{\omega T}{2})\cdot e^{i\omega t} \qquad (2.7.25)$$

となる。

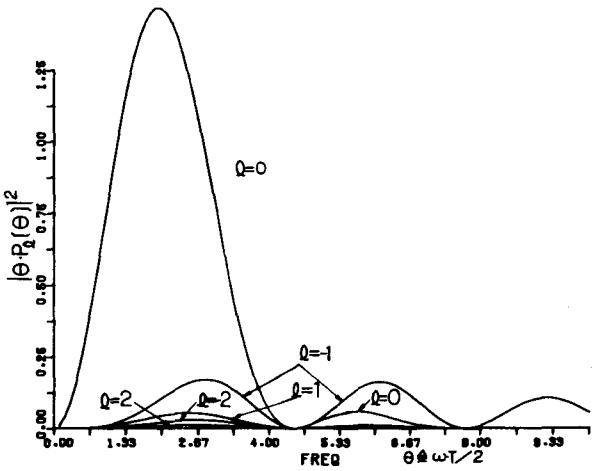


図 2.7.3　　$|\theta\cdot P_l(\theta)|^2$ の変化

そこでこのフィルタの周波数特性は近似的に

$$i\omega\cdot P_0\left(\frac{\omega\cdot T}{2}\right)\cdot V\left(\frac{\omega\cdot T}{2}\right)\cdot e^{-i\left(\frac{2}{3}\omega\cdot T+\tan^{-1}\omega\cdot T_c\right)} \qquad (2.7.26)$$

と表わされる。ここで

$$V(\theta)=\frac{1}{1+a^2\cdot\theta^2}\,\frac{\sin\frac{\theta}{3}}{\theta/3}\cdot I(\theta) \qquad (2.7.27)$$

である。$V(\theta)$はθの実関数である。（2.7.7）で与えられるアナログFIRフィルタの周波数特性（2.7.9）と比較してみると，前置した1次遅れフィルタおよび0次保持フィルタの効果により振巾特性では　$1/(1+\omega^2\cdot T_c^2)\cdot\sin(\omega T/6)/(\omega T/6)$だけ影響を受けている。すなわち$V(\omega T/2)$は$I(\omega T/2)$に比較考えてさらに狭帯域の低域特性となる。また（2.7.9）に比較して位相は$\tan^{-1}\omega\cdot T_c+\omega\cdot T/6$だけ遅れている。

振巾特性に関してはより狭帯域信号の微分をとるという意味で望ましいが，位相の遅れは好ましくない。T_cを大きくすると振巾特性は改良される。特に$|\theta|\geqq 3\pi/2$の範囲の$|\theta\cdot P_l(\theta)|^2$は$T_c$の増大に伴い，0に近づくから別名誤差を軽減する意味で望ましい。しかしT_cの増大に伴ない位相が遅れてくるから　$a=2\cdot T_c/T$を適当に選ぶ必要がある。

つぎに近似特性（2.7.26）と別名誤差を比較するために各lの値に対する信号のパワー$|i\omega\cdot P_l(\omega T/2)|^2$を考慮して歪の度合を表わす。

$$\hat{R}(\theta)=\frac{\sum_{l\neq 0}\{\theta\cdot P_l(\theta)\}^2}{\{\theta\cdot P_0(\theta)\}^2}=\sum_{l\neq 0}\left(\frac{\theta}{\theta+3l\pi}\right)^2 \qquad (2.7.28)$$

を考えてみる。図2.7.4は$\hat{R}(\theta)$を図示したものだが，$|\theta|\leqq 3\pi/2$では$\hat{R}(\theta)\leqq 0.75$であり，ほぼ微分特性を示す。$|\theta|\leqq\pi/2$では（図2.7.3の$l=0$に対するグラフ参照）$\hat{R}(\theta)\leqq 0.07$となることがわかる。

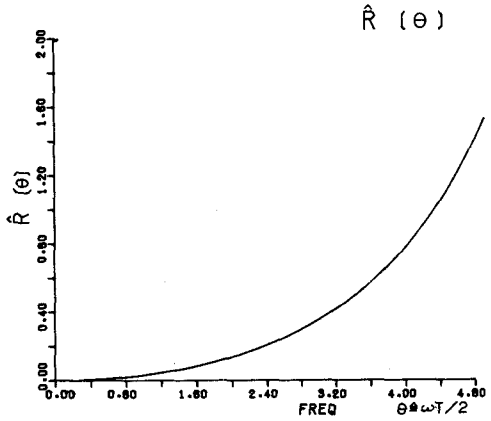


図2.7.4　　$\hat{R}(\theta)$の変化

2.7.3　ハイブリッド・フィルタとしての構成

いままでに述べたフィルタはつぎのように構成できる。図2.7.5のように周期$T/3$で発生するインパルスPL_0から，周期Tで$T/3$ずつ位相のずれたインパルスをつくりPL_1 PL_2，PL_3とする。三つの積分器IS_1，IS_2，IS_3で$12/T_3$という

定数を積分し三つの鋸歯状波を得る。これらの積分はPL_1, PL_2, PL_3のインパルスでリセットするものとする。積分IS_1, IS_2, IS_3の出力より$6/T^2$だけ引き去った信号ST_1, ST_2, ST_3はそれぞれ周期Tで$T/3$だけ位相の遅れた鋸歯状波である。信号$x(t)$に1次遅れ$F_{T_c}(\omega T/2)$を通した信号$x(t)$と各STとの積をIV_1, IV_2, IV_3で積分する。これらの積分はおのおのPL_1, PL_2, PL_3により0にリセットされる。リセットする寸前にサンプラにより信号y_1, y_2, y_3をT/3ごとにサンプリングしその他を0次保持フィルタを通したあとに，その出力を$y(t)$とする。実際にはインパルスの巾も考慮する必要がある。パルス巾をT_Pとすると(2.7.15)の積分は

$$y_k=\frac{12}{(T-T_P)^3}\cdot\int_{-\frac{T}{3}(k-3)+\frac{T_P}{2}}^{\frac{T}{3}k-\frac{T_P}{2}}\left\{\tau-\left(\frac{k}{3}-\frac{1}{2}\right)T\right\}\tilde{x}(\tau)\,d\tau \qquad (2.7.29)$$

のように変更しなければならない。しかし$T_P \ll T$の場合には2.7.2で与えた理想的な場合の結果が十分良好な近似を与える。

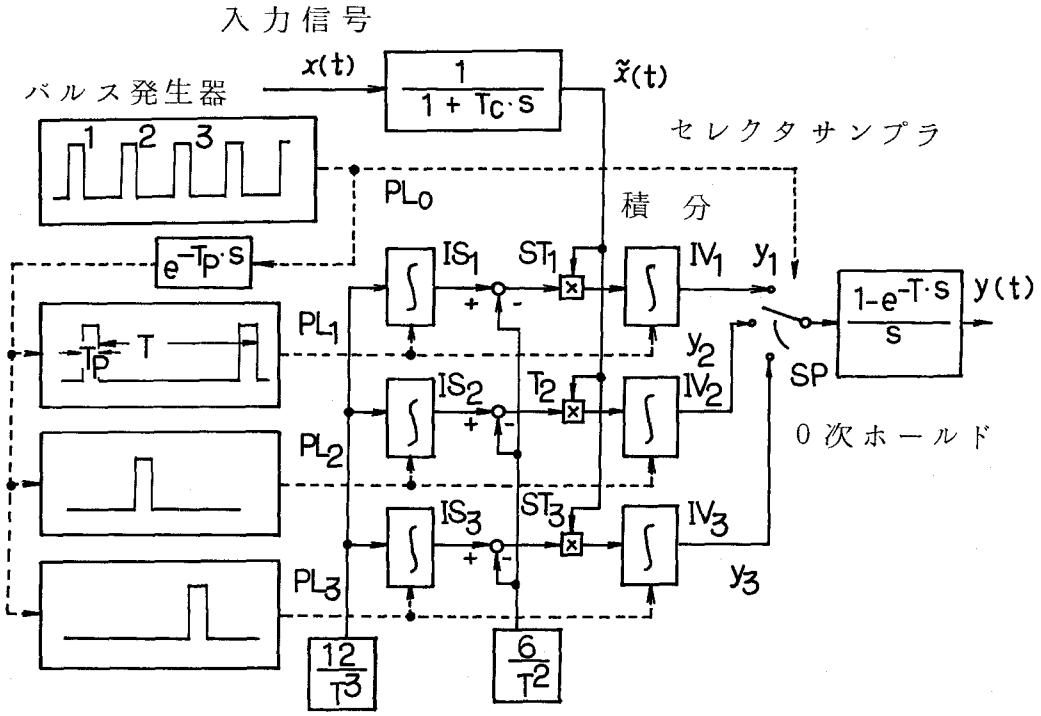


図2.7.5　ハイブリッド形微分フィルタの構成

2.7.4　応答性評価のためのシミュレーション

図2.7.5のように構成したフィルタの種々の信号に対する時間領域での応答特性を評価するために，ディジタル・シミュレーションを実行してみた。$T_P=0.1$, $T=3$としてパルスを発生させ，積分としては$h=0.05$でRunge-Kutta法を用いた。また1次遅れの時定数は$T_c=1/3$とし

た。フィルタへの試験入力として $1+N(0,0.1)$（図2.7.6），$t+N(0,0.5)$（図2.7.7）$t^2+N(0,5)$（図2.7.8），および $\sin 3t+N(0,0.1)$（図2.7.9）を選んだ。ここで $N(0,\sigma)$ は平均0，標準偏差 σ の正規性擬似雑音である。ただしきざみ巾 h の計算に伴う4回のステップ（Runge-Kutta 法のため）の間入力信号は値を保持した。

微分フィルタの特性からしてステップ入力に対して出力は0となるべきだが，入力信号の0から1への立ち上りの効果により $t=3$ のところから開始される計算値（出力）は，はじめ大きいが，やがて0となることを示している。図2.7.7では出力として1，図2.7.8では t が出力されるべきであるが，フィルタの出力はほぼその値を示している。図2.7.9の例では $\omega=3$ したがって $\theta=4.5$ であり図2.7.3より出力としてほぼ0がでてくるべきであるが，フィルタの出力はほぼその値を示している。

ハイブリッドFIRフィルタとしてはサンプル周期毎の平均値を生ずるようなものが積分形A/D変換器や，BM計（抄紙機等で用いられるBasis Weight 計）等で広く使用されている。この論文では信号に鋸歯状波を掛け有限区間の積分を実行することにより信号の微分値を観測できること，別名の誤差の発生することを極力防ぐために積分区間の1/3の間隔でサンプリングしなければならないことを示した。このサンプリングした信号は $|\omega|<\pi/T$ の範囲で入力信号の微分を表わし，$|\omega|>3\pi/T$ の信号をほぼ除去することを周波数特性の近似式を与えて示した。このフィルタは具体的なハードウェアとして構成したものではないが，微分信号の計測に対する新しい手法を提供するものと考えられる。

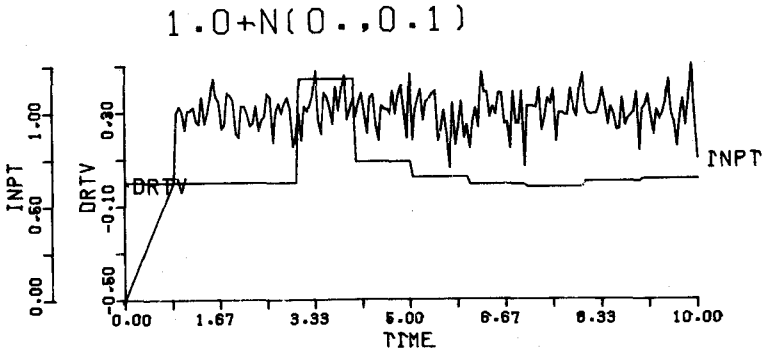


図2.7.6　雑音を含むステップ入力に対する応答

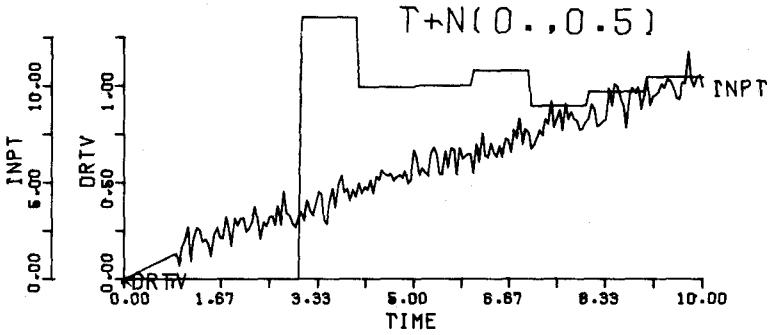


図 2. 7. 7　雑音を含むランプ状信号に対する応答

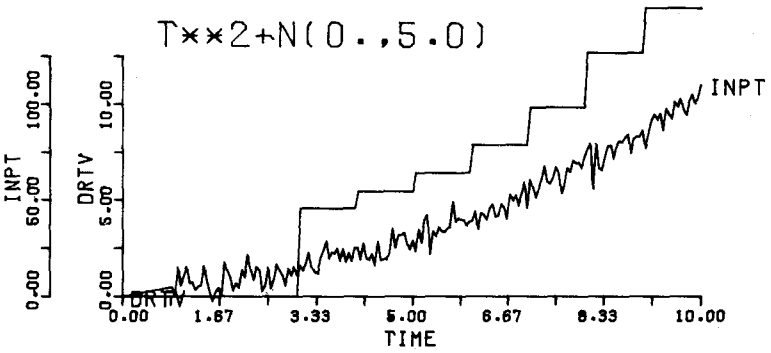


図 2. 7. 8　雑音を含む時間の２次関数に対する応答

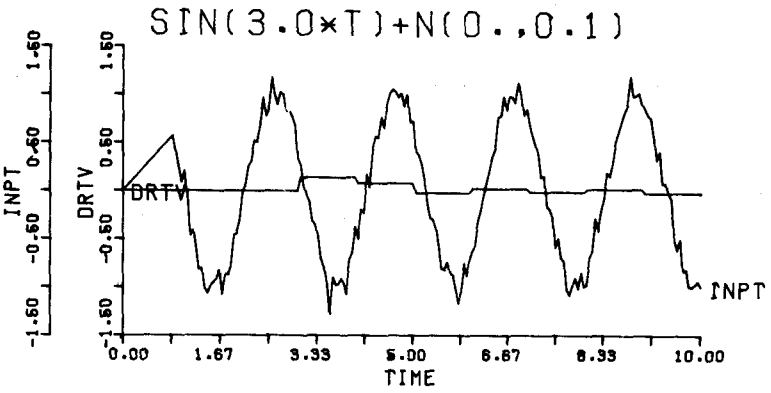


図 2. 7. 9　雑音を含む単振動に対する応答

2.8 まとめ

信号の低域成分のみの微分信号のサンプル値を抽出する手法としてディジタル微分フィルタを考え，特にＦＩＲ（*Finite Impulse Response*）形のものに着目して，その設計法について考察した。はじめに理想的な微分特性を最小自乗法の意味で近似する方法を考え，その設計例を与え応答特性についても議論した。次に同じ位数の微分フィルタと低域フィルタをその周波数特性の比が低域フィルタの零点の近傍を除いて丁度 $i\omega$ となるようなものを選べば，それらの適当な段数のカスケード接続により任意の階数の微分フィルタが得られることを示し，それをカスケード・ディジタル微分フィルタと命名した。このフィルタの基本となる微分フィルタの与え方の例を２つ考え低域フィルタは，これより最小自乗法により求めた。

この２つの方法というのは最小自乗法により有限個の継続するサンプル値に直線をあてはめ，その勾配を出力とする方法と *Zolotarev* の多項式を用いる方法とである。両者の方法とも多くの設計データとしてフィルタの係数表と周波数特性を与えた。そして時間領域での応答特性もシミレーションにより確かめた。最小自乗法による場合と *Zolotarv* 多項式による場合の２つに対してその特性の比較を与え，等価的には *Zolotarev* 多項式による場合の特別なケースとして最小自乗法によるものが考えられることを示した。しかし，設計の容易さと通過帯域が十分小さいことを考えこの論文の以下の章では最小自乗法によるカスケード・ディジタル微分フィルタのみを用いることにした。

第3章　ディジタル微分フィルタを用いた同定

3.1　序

この章では第2章で作成したカスケード形ディジタル微分フィルタを用いて伝達関数を推定する方法について著者の提案した手法を基にして述べる。はじめに伝達関数へ変換する際の誤差について述べた後に，ディジタル微分フィルタを用いた伝達関数の推定手法について述べる。そしてこの手法に基づいてあらかじめわかっている伝達関数の推定例を1入力1出力系の場合と2入力1出力系の場合に適用した例を与える。次に推定値の統計的な性質を論じ，その結果をここで与えた例で検討を加える。次にシステムの構造すなわちここでは伝達関数の次数の決定法について終結法を用いた方法を示し，上で与えた例につきその結果の有効性を確かめる。又実システムでよく現われる無定位系，無駄時間を含む系にもこの方法を容易に適用することができることを示す。又同定の計算を実施する際に用いられる逐次推定法についても簡単に触れる。又この手法を基にして構成したプログラムシステムについて説明を加える。そして実プラントの同定へ適用した例は第4章で詳しくその有効性を示してある。

3.2　伝達関数への変換で生ずる誤差

1.3で述べたように工業プラント等実際に同定の対象となるシステムはアナログ系である場合がほとんどであるが，同定のための計算はアナログ系のままで実行するのには複雑であるのでディジタル系に変換してディジタル電子計算機の力を借りる場合が多い。従って実際に得られるのはディジタル系でのインパルス応答またはパルス伝達関数である。ここではパルス伝達関数が得られた場合に元のアナログ系の伝達関数を求めると避けられない誤差が生ずることを示す。

話を簡単にするために対象としているシステムは1次遅れとする。

$$R(S)=\frac{g}{1+T_L\cdot S} \qquad (3.2.1)$$

特に入力$u(t)$として$u(t)=\sin\omega t$とすると出力$y(t)$は

$$y(t)=\frac{g}{\sqrt{1+\omega^2\cdot T_L{}^2}}\cdot\sin(\omega\cdot t-\tan^{-1}\omega\cdot T_L)+y_0\cdot e^{-\frac{t}{T_L}} \qquad (3.2.2)$$

と表わされる。y_0は$y(t)$の初期値$y(o)$である。従ってサンプル周期Ts毎のサンプル値は

$$u_k=\sin(\omega\cdot k\cdot Ts) \qquad (3.2.3)$$

$$y_k=\frac{g}{\sqrt{1+\omega^2\cdot T_L{}^2}}\cdot\sin(\omega\cdot k\cdot Ts-\tan^{-1}\omega\cdot T_L)+y_0\cdot e^{-\frac{Ts}{T_L}\cdot k} \qquad (3.2.4)$$

と表わされる。

$R(S)$を 1. 3. 2 で述べた（ 1. 3. 2 ）を用いる方法でディジタル系に変換すると

$$y_k = A \cdot y_{k-1} + B \cdot u_{k-1} \qquad (3.2.5)$$

を得る。ここで

$$A \fallingdotseq 1 - \frac{T_s}{T_L} \qquad (3.2.6)$$

$$B \fallingdotseq \frac{T_s}{T_L} \cdot g \qquad (3.2.7)$$

である。

（ 3. 2. 3 ）と（ 3. 2. 4 ）で与えられるu_kとy_kからAとBを求めてみよう。すなわち（ 3. 2 5 ）で$k \to k'$とすると

$$y_{k'} = A \cdot y_{k'-1} + B \cdot u_{k'-1} \qquad (3.2.8)$$

を得る。（ 3. 2. 5 ）と（ 3. 2. 8 ）により

$$A = (y_k \cdot u_{k'-1} - y_{k'} \cdot u_{k-1}) / (y_{k-1} \cdot u_{k'-1} - y_{k'-1} \cdot u_{k-1}) \qquad (3.2.9)$$

$$B = (y_{k-1} \cdot y_{k'} - y_{k'-1} \cdot y_k) / (y_{k-1} \cdot u_{k'-1} - y_{k'-1} \cdot u_{k-1}) \qquad (3.2.10)$$

（ 3. 2. 3 ）と（ 3. 2. 4 ）を（ 3. 2. 9 ）と（ 3. 2. 1 0 ）に代入すると

$$A = e^{-\frac{T_s}{T_L}} \qquad (3.2.11)$$

$$B = g \cdot \frac{\left(\cos\omega \cdot T_s + \omega \cdot T_L \cdot \sin\omega \cdot T_s - e^{-\frac{T_s}{T_L}}\right)}{\sqrt{1+\omega^2 \cdot T_L^2}} \qquad (3.2.12)$$

と表わされる。すなわち　T_L，g，T_s　とA，Bの関係は正しくは（ 3. 2. 1 1 ），（ 3. 2. 1 2 ）で与えられる。（ 3. 2. 6 ）および（ 3. 2. 7 ）が成立するとしてT_L，g　の推定値を求め$\hat{T}_L$，$\hat{g}$とすると

$$\hat{T}_L = T_s / \left(1 - e^{-\frac{T_s}{T_L}}\right) \qquad (3.2.13)$$

$$\hat{g} = g \cdot \frac{\left(\cos\omega \cdot T_s + \omega \cdot T_L \cdot \sin\omega \cdot T_s - e^{-\frac{T_s}{T_L}}\right)}{\left(1 - e^{-T_s/T_L}\right)\sqrt{1+\omega^2 \cdot T_L^2}} \qquad (3.2.14)$$

と表わされる。いま

$$\varphi = \frac{Ts}{T_L}, \qquad \theta = \omega \cdot Ts \tag{3.2.15}$$

とおくと

$$\frac{\hat{T}_L}{T_L} = \frac{\varphi \cdot e^{\varphi}}{e^{\varphi} - 1} \tag{3.2.16}$$

$$\frac{\hat{g}}{g} = \frac{\cos\theta + \varphi \cdot \theta \cdot \sin\theta - e^{-\varphi}}{(1 - e^{-\varphi})\sqrt{1 + \theta^2 \cdot \varphi^2}} \tag{3.2.17}$$

図 3. 2. 1 に $0 < \varphi < 1$ すなわち $Ts < T_L$ の範囲で $\hat{T}_L / T_L$ を作図してみた。又図 3. 2. 2 には $0 \leqq \theta \leqq \pi$ で $\varphi = 0.2$, 0.5 の場合を作図してみた。$\hat{T}_L / T_L$ および $\hat{g}/g$ の値の 1 よりのずれは変換法によるずれであるからどのように正確に A と B を推定しても取り除くことができない。

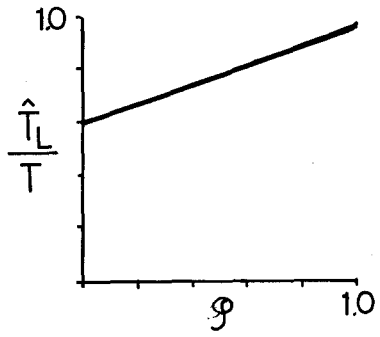


図 3. 2. 1　$\hat{T}_L / T_L$ の変化

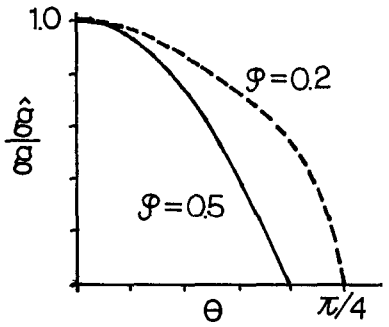


図 3. 2. 2　$\hat{g}/g$ の変化

これは 1. 3. 2 で与えた他のどのような変換法を用いても生じてくる避けることのできない誤差である。

実用上からは φ をできるだけ小にとり，θ を小さな値におさえてすなわちできるだけ低域成分を利用して同定を実施することが望ましい。この論文ではこの誤差をできる限りおさえるためにカスケード・ディジタル微分フィルタを用いている。

3. 3　ディジタル微分フィルタによる伝達関数の推定 (A1), (A2), (A4), (D6)

この節ではパルス伝達関数やインパルス応答等を介することなく直接に伝達関数を求める手法について論ずる。そしてあらかじめ知られている伝達関数を持った系に対する同定の結果を与え提案手法の妥当性を示した。

3.3.1　手法の説明

説明を簡単にするために1入力1出力系を考え入力を$u(t)$，出力を$y(t)$とする。このシステムの伝達関数を$R(S)$として

$$R(S)=\frac{b_0+b_1\cdot S+\cdots+b_{n-1}\cdot S^{n-1}}{1+a_1\cdot S+\cdots+a_n\cdot S^n} \qquad (3.3.1)$$

と表わしておく（図3.3.1）。ここでこのシステムの次数はnすなわち$a_n\neq 0$で$R(S)$の分子分母のSの多項式は既約であるとする。このときこのシステムを時間領域で考え微分方程式の形で表わしてみると

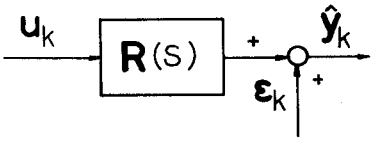


図3.3.1　1入力1出力系の伝達関数

$$y(t)=\sum_{k=0}^{n-1} b_k\cdot u^{(k)}(t)-\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell\cdot y^{(\ell)}(t) \qquad (3.3.2)$$

となる。ところで1.4で議論したように$u(t)$，$y(t)$が確定信号であるか不規則信号であるかにかかわらず工学的対象となる信号はスペクトル分解ができる場合が多い。

そこで特に$u(t)$が平均0の弱定常信号であり$|\omega|\leqq\omega_f$に帯域制限されているとすると

$$u(t)=\int_{-\omega_f}^{\omega_f} e^{i\omega t}\,d\zeta_u(\omega) \qquad (3.3.3)$$

と表わされる。いま　$H_*(\omega)$をωの実装数として

$$H(i\omega)=H^*(\omega)\cdot e^{-i\omega b} \qquad (3.3.4)$$

のようなフィルタを通した信号を$\widetilde{U}(t)$とすると

$$\widetilde{U}(t)=\int_{-\omega_f}^{\omega_f} e^{i\omega(t-b)}H^*(\omega)\,d\zeta_u(\omega) \qquad (3.3.5)$$

となる。$U(t)$のk階微分は存在して

$$\widetilde{U}^{(k)}(t)=\int_{-\omega_f}^{\omega_f}(i\omega)^k\cdot e^{i\omega(t-b)}\cdot H^*(\omega)\,d\zeta_u(\omega) \qquad (3.3.6)$$

と表わされる。同じように$y(t)$を$H(i\omega)$に通した信号を$\widetilde{Y}(t)$とするとそのℓ階微分は

$$\widetilde{Y}^{(\ell)}(t)=\int_{-\omega_f}^{\omega_f}(i\omega)^\ell\cdot e^{i\omega(t-b)}\cdot R(i\omega)\cdot H^*(\omega)\,d\zeta_u(\omega) \qquad (3.3.7)$$

と表わされる。ただし$R(S)$はシステム（ 3.3.2 ）の伝達関数で（ 3.3.1 ）で与えられる。

$\tilde{U}^{(k)}(t)$，$\tilde{Y}^{(\ell)}(t)$を用いると　$a_0 = 1$として

$$\sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot \tilde{U}^{(k)}(t) - \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \cdot \tilde{Y}^{(\ell)}(t)$$

$$= \int_{-\omega f}^{\omega f} e^{i\omega(t-b)} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot (i\omega)^k - \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \cdot (i\omega)^\ell \cdot R(i\omega) \right\} H^*(\omega)\, d\zeta u(\omega)$$

$$= \int_{-\omega f}^{\omega f} e^{i\omega(t-b)} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot (i\omega)^k - \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \cdot (i\omega)^\ell \cdot \frac{\sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot (i\omega)^k}{\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \cdot (i\omega)^\ell} \right\} H^*(\omega)\, d\zeta u(\omega)$$

$$= 0 \qquad (3.3.8)$$

となる。すなわちシステム（ 3.3.2 ）の入出力$u(t)$，$y(t)$に同じフィルタを通した信号を必要階まで微分するとやはり元の微分方程式と同じ微分方程式

$$\tilde{Y}^{(o)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot \tilde{U}^{(k)}(t) - \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell \cdot \tilde{Y}^{(\ell)}(t) \qquad (3.3.9)$$

を満足していることがわかった。

これは平均値0の弱定常過程で表わされるものであるが，他のスペクトル分解可能な信号に対しても同じように成立する。

信号を

$$Ts = \pi / \omega f \qquad (3.3.10)$$

でサンプリングすれば，（ 3.3.9 ）はサンプル値に対しても成立する。すなわち

$$\tilde{Y}_j^{(o)} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot \tilde{U}_j^{(k)} - \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell \cdot \tilde{Y}_j^{(\ell)} \qquad (3.3.11)$$

となる。ここで

$$\tilde{U}_j^{(k)} = \tilde{U}^{(k)}(j \cdot Ts), \quad Y_j^{(\ell)} = \tilde{Y}^{(\ell)}(j \cdot Ts) \qquad (3.3.12)$$

である。

ところで我々はすでに　$u_j = u(j \cdot Ts)$，$y_j = y(j \cdot Ts)$より$\tilde{U}_j^{(k)}$，$\tilde{Y}_j^{(\ell)}$などをディジタル微分フィルタにより近似できることを知っているので，（ 3.3.11 ）を用いてパラメータa_k，b_ℓを求めることができる。

これが著者の提案した伝達関数の推定法の骨子である。この手法は容易に多変数系に拡張する

ことができる。

3.3.2 具体的な処置

実際の問題では入出力値を直接観測することはできず雑音 e_j 、 ε_j を含んだ

$$\hat{u}_j = u_j + e_j \tag{3.3.13}$$

$$\hat{y}_j = y_j + \varepsilon_j \tag{3.3.14}$$

が観測されると考える。またフィルタ $(i\omega)^k \cdot H(i\omega)$ としてはカスケード・ディジタル微分フィルタ $\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$ を用いる。そして $\hat{u}_j$, $\hat{y}_j$ を $\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$ に通した信号を $\hat{U}_j^{(k)}$, $\hat{Y}_j^{(k)}$ としておく。そして

$$\hat{\mathbf{v}}_j = (\hat{U}_j^{(0)}, \hat{U}_j^{(1)}, \cdots, \hat{U}_j^{(n-1)}, -\hat{Y}_j^{(1)}, -\hat{Y}_j^{(2)}, \cdots, -\hat{Y}_j^{(n)}) \tag{3.3.15}$$

$$\mathbf{a} = (b_1, b_2, \cdots, b_m, a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})^T \tag{3.3.16}$$

$$\hat{\mathbf{V}}_J = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_0 \\ \hat{\mathbf{v}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{v}}_J \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{y}}_J = \begin{bmatrix} \hat{Y}_0^{(0)} \\ \hat{Y}_1^{(0)} \\ \vdots \\ \hat{Y}_J^{(0)} \end{bmatrix} \tag{3.3.17}$$

とすると

$$\hat{\mathbf{y}}_J \doteqdot \hat{\mathbf{V}}_J \cdot \mathbf{a} \tag{3.3.18}$$

となるので最小自乗解を $\hat{\mathbf{a}}_J$ とすれば

$$\hat{\mathbf{a}}_J = \hat{\mathbf{V}}_J^{+} \cdot \mathbf{y}_J \tag{3.3.19}$$

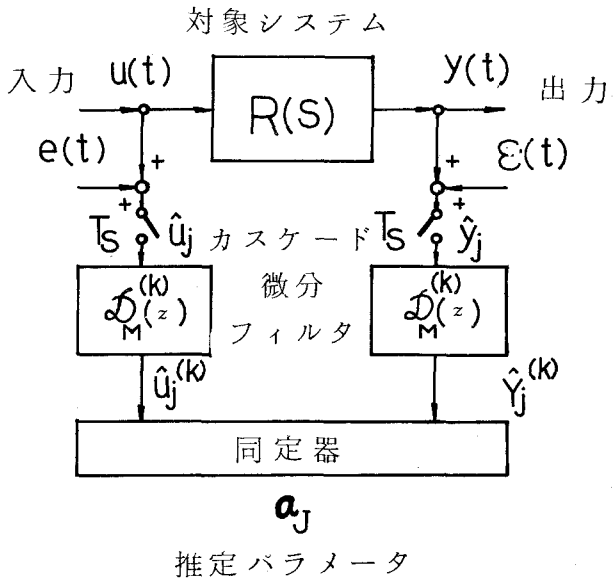


図 3.3.2 カスケード・ディジタル微分フィルタによる同定

と表わされる。伝達関数で $a_n \neq 0$ で分母分子の S の多項式が既約であることを仮定したので入力 $\hat{U}^{(1)}(t)$, $\hat{U}^{(1)}(t)$, …, $\hat{U}^{(n-1)}(t)$ が一次独立であれば $\hat{U}^{(1)}(t)$, $\hat{U}^{(1)}(t)$, …, $\hat{U}^{(n-1)}(t)$ $-\hat{Y}^{(1)}(t)$, $-\hat{Y}^{(2)}(t)$, …, $\hat{Y}^{(n)}(t)$ は一次独立であり，このような場合には（3.3.19）で十分 J を大きくとれば

$$rank\ \hat{\mathbf{V}}_J = 2 \cdot n \qquad (3.3.20)$$

となる。このときは[3]（付録）

$$\hat{\mathbf{a}}_J = (\hat{\mathbf{V}}_J{}^T \cdot \hat{\mathbf{V}}_J)^{-1} \cdot \hat{\mathbf{V}}_J{}^T \cdot \hat{\mathbf{y}}_J \qquad (3.3.21)$$

となる。

3.3.3 簡単な例－1

この手法の妥当性を調べるために図2.4.8のような2次系を考える。（A4）ここで

$$A = 1,\ B = 20,\ G = 1 \qquad (3.3.22)$$

$$As = 1,\ \omega_0 = 0.3,\ Bs = Cs = 0,\ Ds = 1 \qquad (3.3.23)$$

$$v = 0,\ \sigma = 0 \qquad (3.3.24)$$

$$e(t) = N(0,\ 0.1),\ \varepsilon(t) = N(0,\ 0.1) \qquad (3.3.25)$$

とする。この図の中の信号 $\hat{x}(t)$, $\hat{y}(t)$ の $Ts = 1$ 秒毎のサンプル値を $\hat{u}_j = \hat{x}(j \cdot Ts)$, $\hat{y}_j = \hat{y}(j \cdot Ts)$ とし，$D_M^{(k)}(z)$ として $m = 4$，$IEO = 1$，$M = 3$ の場合を選ぶものとする。このときの $\hat{U}_j$, $\hat{y}_j$ および推定値 $\hat{\mathbf{a}}_j = (\hat{G}_j, \hat{A}_j, \hat{B}_j)$ の変化を表わしたのが，図3.3.3である。フィルタの次数が $2 \cdot m \cdot M$ だから $(2 \cdot m \cdot M + 1) \cdot Ts = 25$ 秒より推定が始まり，80秒目では $\hat{G}_j \fallingdotseq 1.01$, $\hat{A}_j \fallingdotseq 0.998$, $\hat{B}_j = 20.02$ となる。

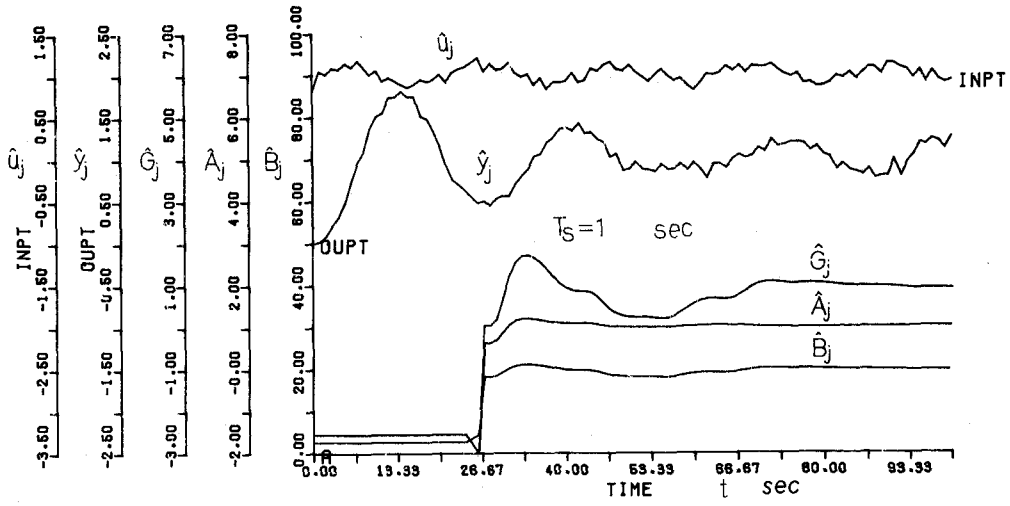


図 3.3.3 入出力観測波形と推定値（構造が既知の場合）

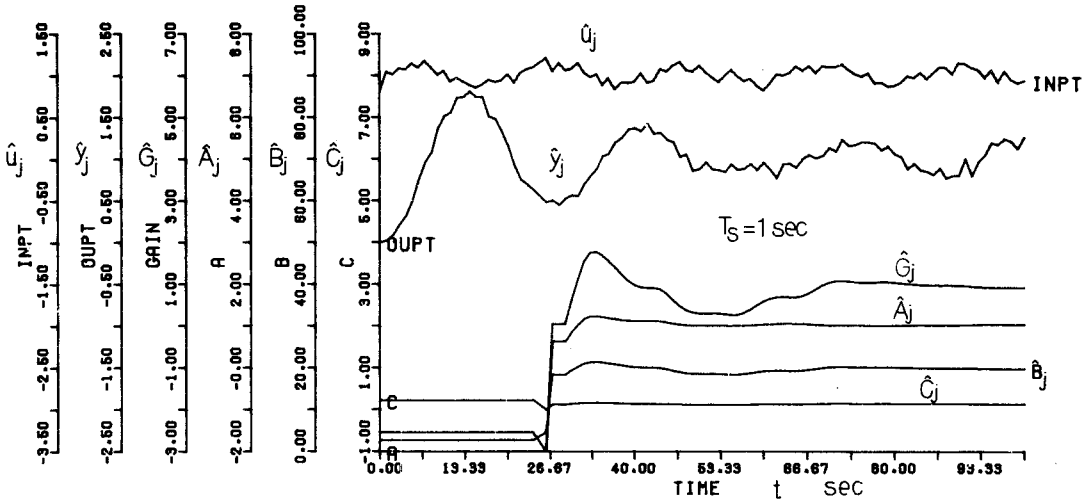


図 3. 3. 4　入出力観測波形と推定値（構造が未知の場合）

ここでシステムの出力は入力より解析的に求めた値を用いているので入出力の値に誤差は生じていない。図 3. 3. 3 については 3. 5 で説明する。推定された値の誤差は

〔1〕観測雑音による影響（自己回帰形モデルによる誤差も含む）。

〔2〕カスケード・フィルタの設計時の近似による影響（$P^*(\theta)$ と $Q^*(\theta)$ は近似的にしか等しくできないことによる）。

に起因する。〔1〕については 3. 4 で論ずる。又〔2〕に関しては次の例でわかるようにほとんど無視できることがわかる。

この例での推定値と真値との偏差およびそれらの 2 乗の和を図 3. 3. 6 に与えた。これをみるとこれらの値はほとんど 0 だが，しかし 0 でない値に漸近していることがわかる。

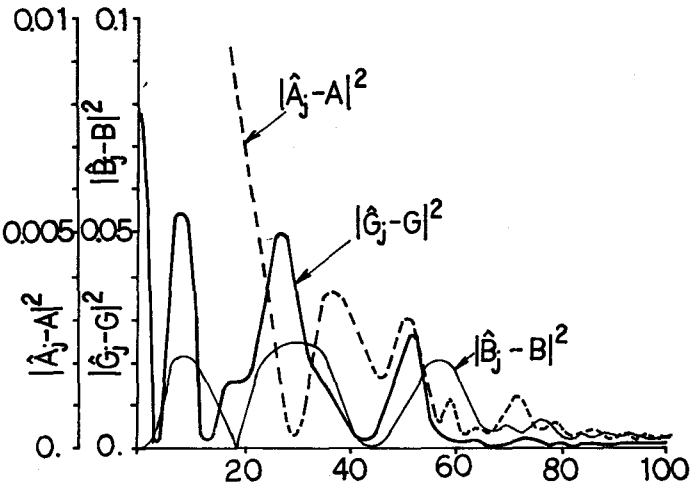


図 3. 3. 6　推定誤差の変化

3. 3. 4　簡単な例－2

次の例は図 3. 3. 7 のような2入力1出力系を考える。すなわち入力 $u(t)$, $v(t)$ に対して出力 $y(t)$ が

$$\mathcal{L}\{y(t)\}=\frac{g_u}{1+T_u\cdot S}\cdot\mathcal{L}\{u(t)\}+\frac{g_v}{1+T_v\cdot S}\cdot\mathcal{L}\{v(t)\} \qquad (3.3.26)$$

で表わされるとする。$u(t)$, $v(t)$, $y(t)$ に夫々 $e_u(t)$, $e_v(t)$, $\varepsilon_y(t)$ の加わった信号を $\hat{u}(t)$, $\hat{v}(t)$, $\hat{y}(t)$ とし，それらのサンプル値を $\hat{u}_j$, $\hat{v}_j$, $\hat{y}_j$ としてこれをフィルタ $\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$ に通した信号を $\hat{U}_j^{(k)}$, $\hat{V}_j^{(k)}$, $\hat{Y}_j^{(k)}$ とする。これらは近似的に

$$\hat{Y}_j^{(0)} \doteqdot A\cdot\hat{U}_j^{(0)}+B\cdot\hat{U}_j^{(1)}+C\cdot\hat{V}_j^{(0)}+D\cdot\hat{V}_j^{(1)}-E\cdot\hat{Y}_j^{(1)}-F\cdot\hat{Y}_j^{(2)} \qquad (3.3.27)$$

となる。ここで

$$A=g_u,\ B=g_u\cdot T_v,\ C=g_v,\ D=g_v\cdot T_u,\ E=T_u+T_v,\ F=T_u\cdot T_v \qquad (3.3.28)$$

となる。1変数の時と同じように

$$\sum_{j=0}^{J}\left(\hat{Y}_j^{(0)}-A\cdot\hat{U}_j^{(0)}-B\cdot\hat{U}_j^{(1)}-C\cdot\hat{V}_j^{(0)}-D\cdot\hat{V}_j^{(1)}+E\cdot\hat{Y}_j^{(1)}+F\cdot\hat{Y}_j^{(2)}\right)^2 \qquad (3.3.29)$$

を最小にする A, B, C, D, E, F を $\hat{A}_J$, $\hat{B}_J$, $\hat{C}_J$, $\hat{D}_J$, $\hat{E}_J$, $\hat{F}_J$ とする。

図 3. 3. 7 で

$$g_u = 1 \ , T_u = 2 \qquad (3.3.29)$$
$$g_v = 1 \ , T_v = 3$$

とし特に入力として

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{(1+T_L \cdot S)^2} \qquad (3.3.30)$$

$$\mathcal{L}\{v(t)\} = \frac{\omega^2}{S \cdot (S^2 + \omega^2)} \qquad (3.3.31)$$

で

$$T_L = 5 \quad , \quad \omega = \frac{\pi}{10} \qquad (3.3.32)$$

とする。そしてフィルタは例－1と同じもの

としサンプル周期は $T_s = 0.1$ とする。

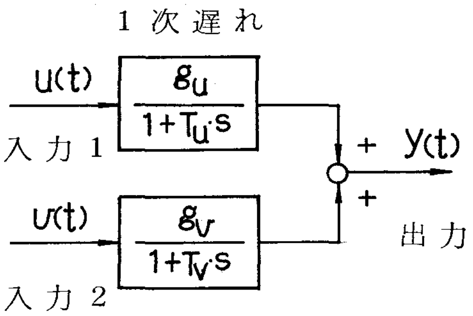


図 3. 3. 7　簡単な2入力1出力系

雑音を全く加えない場合の推定値 $\widehat{A}_J$, $\widehat{B}_J$, $\widehat{C}_J$, $\widehat{D}_I$, $\widehat{E}_J$, $\widehat{F}_J$ を表 3. 3. 1 に与えた。これらは正しい値 $A = 1.$, $B = 3.$. $C = 1.$, $D = 2.$, $E = 5.$, $F = 6.$ と全く一致しているといってよい。このことは 3. 3. 3 の〔2〕で述べたフィルタの近似誤差は無視できるものと考えてよいことを示している。

Time	u(t)	v(t)	y(t)	Â	B̂	Ĉ	D̂	Ê	F̂
.107000E 02	.159242E 01	.137302E 01	.313752E 01	.996468E 00	.309321E 01	.100765E 01	.206653E 01	.508876E 01	.618969E 01
.109000E 02	.149536E 01	.111221E 01	.304050E 01	.996731E 00	.308628E 01	.100688E 01	.206227E 01	.508215E 01	.617744E 01
.111000E 02	.135098E 01	.800070E 00	.288227E 01	.996993E 00	.307921E 01	.100618E 01	.205774E 01	.507543E 01	.616438E 01
.113000E 02	.147786E 01	.763120E 00	.298438E 01	.997316E 00	.307041E 01	.100537E 01	.205192E 01	.506713E 01	.614798E 01
.115000E 02	.142694E 01	.560070E 00	.289698E 01	.997641E 00	.306147E 01	.100460E 01	.204588E 01	.505869E 01	.613012E 01
.117000E 02	.125347E 01	.253440E 00	.267773E 01	.998008E 00	.305135E 01	.100378E 01	.203893E 01	.504913E 01	.611000E 01
.119000E 02	.136062E 01	.252920E 00	.273185E 01	.998372E 00	.304128E 01	.100298E 01	.203192E 01	.503963E 01	.609972E 01
.121000E 02	.135765E 01	.173300E 00	.267095E 01	.998550E 00	.303633E 01	.100260E 01	.202844E 01	.503496E 01	.607964E 01
.123000E 02	.116667E 01	-.590800E-01	.261959E 01	.998733E 00	.303125E 01	.100222E 01	.202483E 01	.503016E 01	.606917E 01
.125000E 02	.124329E 01	.142200E-01	.263594E 01	.998988E 00	.302696E 01	.100191E 01	.202175E 01	.502610E 01	.606026E 01
.127000E 02	.123627E 01	.932600E-01	.242129E 01	.998968E 00	.302475E 01	.100176E 01	.202016E 01	.502402E 01	.605564E 01
.129000E 02	.109076E 01	-.270800E-01	.217318E 01	.999069E 00	.302196E 01	.100156E 01	.201813E 01	.502138E 01	.604977E 01
.131000E 02	.112854E 01	.123120E 00	.216598E 01	.999186E 00	.301874E 01	.100136E 01	.201577E 01	.501833E 01	.604294E 01
.133000E 02	.121184E 01	.352720E 00	.221256E 01	.999314E 00	.301521E 01	.100109E 01	.201317E 01	.501498E 01	.603543E 01
.135000E 02	.102519E 01	.341540E 00	.200015E 01	.999412E 00	.301252E 01	.100091E 01	.201119E 01	.501244E 01	.602969E 01
.137000E 02	.101895E 01	.534050E 00	.197976E 01	.999504E 00	.301000E 01	.100074E 01	.200932E 01	.501005E 01	.602429E 01
.139000E 02	.113378E 01	.864040E 00	.209260E 01	.999577E 00	.300801E 01	.100061E 01	.200784E 01	.500815E 01	.602001E 01
.141000E 02	.968730E 00	.923040E 00	.193780E 01	.999626E 00	.300667E 01	.100052E 01	.200683E 01	.500688E 01	.601712E 01
.145000E 02	.916870E 00	.109626E 01	.190799E 01	.999436E 00	.300641E 01	.100050E 01	.200664E 01	.500664E 01	.601656E 01
.145000E 02	.105202E 01	.144954E 01	.207606E 01	.999659E 00	.300578E 01	.100046E 01	.200616E 01	.500603E 01	.601518E 01
.147000E 02	.919660E 00	.152070E 01	.198614E 01	.999719E 00	.300418E 01	.100035E 01	.200495E 01	.500451E 01	.601167E 01
.149000E 02	.824290E 00	.160700E 01	.194098E 01	.999759E 00	.300309E 01	.100028E 01	.200412E 01	.500347E 01	.600927E 01
.151000E 02	.966980E 00	.190352E 01	.213952E 01	.999781E 00	.300254E 01	.100025E 01	.200369E 01	.500294E 01	.600803E 01
.153000E 02	.375910E 00	.193290E 01	.210768E 01	.999800E 00	.300202E 01	.100021E 01	.200329E 01	.500244E 01	.600687E 01
.155000E 02	.742680E 00	.188322E 01	.203461E 01	.999819E 00	.300155E 01	.100018E 01	.200292E 01	.500195E 01	.600550E 01
.157000E 02	.879660E 00	.206413E 01	.225014E 01	.999820E 00	.300152E 01	.100015E 01	.200289E 01	.500193E 01	.600573E 01
.159000E 02	.835240E 00	.202341E 01	.224025E 01	.999834E 00	.300116E 01	.100016E 01	.200261E 01	.500161E 01	.600490E 01
.161000E 02	.672940E 00	.182514E 01	.212615E 01	.999847E 00	.300082E 01	.100014E 01	.200233E 01	.500128E 01	.600412E 01
.163000E 02	.791490E 00	.187041E 01	.228453E 01	.999856E 00	.300061E 01	.100012E 01	.200216E 01	.500107E 01	.600361E 01
.165000E 02	.795490E 00	.176760E 01	.231850E 01	.999375E 00	.300012E 01	.100009E 01	.200177E 01	.500059E 01	.600246E 01
.167000E 02	.615290E 00	.145212E 01	.215646E 01	.999395E 00	.299965E 01	.100007E 01	.200138E 01	.500013E 01	.600134E 01
.169000E 02	.704230E 00	.138352E 01	.225149E 01	.999906E 00	.299936E 01	.100005E 01	.200113E 01	.499985E 01	.600065E 01
.171000E 02	.754680E 00	.126124E 01	.229538E 01	.999927E 00	.299887E 01	.100002E 01	.200074E 01	.499937E 01	.599946E 01
.173000E 02	.569300E 00	.895570E 00	.209091E 01	.999929E 00	.299831E 01	.100002E 01	.200070E 01	.499931E 01	.599932E 01
.175000E 02	.619960E 00	.766370E 00	.211057E 01	.999936E 00	.299864E 01	.100001E 01	.200056E 01	.499915E 01	.599892E 01
.177000E 02	.711250E 00	.686100E 00	.216002E 01	.999939E 00	.299858E 01	.100030E 01	.200050E 01	.499908E 01	.599875E 01
.179000E 02	.533900E 00	.353090E 00	.195154E 01	.999936E 00	.299865E 01	.100001E 01	.200056E 01	.499913E 01	.599893E 01
.181000E 02	.540720E 00	.227010E 00	.187930E 01	.999937E 00	.299861E 01	.100000E 01	.200053E 01	.499911E 01	.599884E 01
.183000E 02	.664080E 00	.246240E 00	.193936E 01	.999943E 00	.299847E 01	.999907E 00	.200041E 01	.499897E 01	.599849E 01
.185000E 02	.507470E 00	.190800E-01	.171609E 01	.999952E 00	.299824E 01	.999934E 00	.200023E 01	.499875E 01	.599794E 01
.187000E 02	.468500E 00	-.533800E-01	.161013E 01	.999961E 00	.299800E 01	.999971E 00	.200003E 01	.499852E 01	.599736E 01
.189000E 02	.612730E 00	.963800E-01	.168953E 01	.999969E 00	.299780E 01	.999960E 00	.199987E 01	.499832E 01	.599680E 01
.191000E 02	.487970E 00	.165800E-01	.150454E 01	.999970E 00	.299776E 01	.999958E 00	.199984E 01	.499828E 01	.599679E 01
.193000E 02	.404990E 00	.168100E-01	.136817E 01	.999969E 00	.299778E 01	.999959E 00	.199986E 01	.499831E 01	.599685E 01
.195000E 02	.557320E 00	.287840E 00	.147593E 01	.999964E 00	.299792E 01	.999967E 00	.199997E 01	.499844E 01	.599718E 01
.197000E 02	.473080E 00	.353670E 00	.135757E 01	.999958E 00	.299811E 01	.999977E 00	.200011E 01	.499862E 01	.599761E 01
.199000E 02	.351470E 00	.408070E 00	.121350E 01	.999952E 00	.299826E 01	.999984E 00	.200023E 01	.499876E 01	.599794E 01

表 3. 3. 1　雑音を加えない場合の推定値

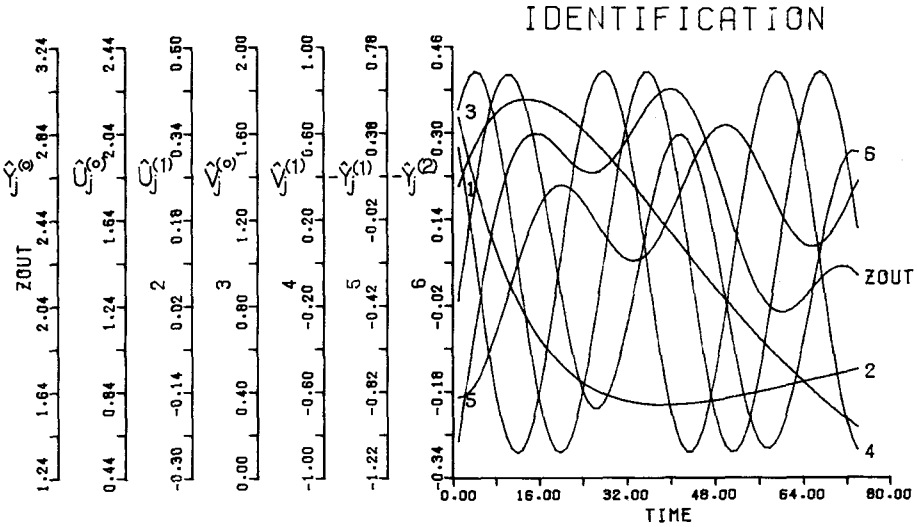


図 3. 3. 8　$\hat{U}_j^{(k)}$ 、$\hat{V}_j^{(k)}$ 、$\hat{Y}_j^{(k)}$ の変化

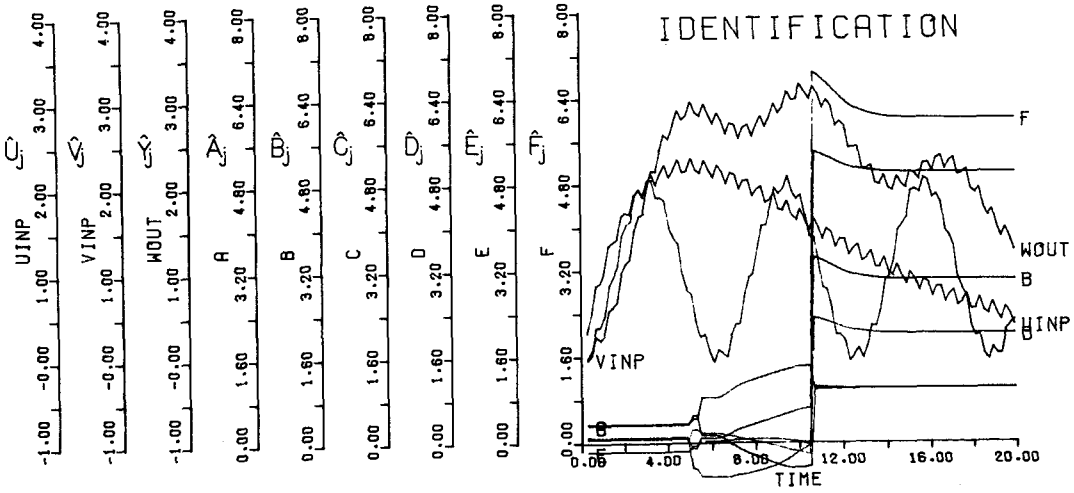


図 3. 3. 9　$\hat{A}$ 、$\hat{B}$ 、$\hat{C}$ 、$\hat{D}$ 、$\hat{E}$ 、$\hat{F}$ の推定の過程

次に

$$u(t) = 1.2 \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{5}} \quad , \quad e_u = 0.1 \cdot \sin 10t \tag{3.3.33}$$

$$v(t) = 1 - \cos t \quad , \quad e_v = 0.1 \cdot \sin 10t \tag{3.3.34}$$

$$\varepsilon_y(t) = 0.1 \cdot \sin 10t \tag{3.3.35}$$

を入力および雑音とした時の推定例を与えた。図 3. 3. 8 に$\hat{U}_j^{(k)}, \hat{V}_j^{(k)}, \hat{Y}_j^{(k)}$ の変化を図 3. 3. 9 に$\hat{u}_j, \hat{v}_j, \hat{y}_j$ および推定値$\hat{A}_J, \hat{B}_J, \cdots, \hat{F}_J$を描き，その値を表 3. 3. 2 に与えた。

表 3. 3. 1 と表 3. 3. 2 を比較する限りでは推定値の優劣はつけ難い。これは雑音が$\omega = 10$の単振動であり$Ts = 0.1$より$\theta = \omega \cdot Ts = 1$となり図 2. 4. 6 の$m = 4$，$IEO = 1$の場合をみると，これはほとんど完全に遮断されていることによる。

Time	u(t)	v(t)	y(t)	Â	B̂	Ĉ	D̂	Ê	F̂
0.107000E 02	0.159242E 01	0.137302E 01	0.313752E 01	0.984110E 00	0.343089E 01	0.103280E 01	0.230861E 01	0.540870E 01	0.689028E 01
0.109000E 02	0.149536E 01	0.111221E 01	0.304050E 01	0.985332E 00	0.339807E 01	0.102978E 01	0.228672E 01	0.537749E 01	0.682705E 01
0.111000E 02	0.135098E 01	0.800070E 00	0.288297E 01	0.986699E 00	0.336095E 01	0.102658E 01	0.226141E 01	0.534230E 01	0.675396E 01
0.113000E 02	0.147786E 01	0.769120E 00	0.298438E 01	0.988041E 00	0.332427E 01	0.102357E 01	0.223604E 01	0.530760E 01	0.668064E 01
0.115000E 02	0.142694E 01	0.560070E 00	0.289698E 01	0.989508E 00	0.328403E 01	0.102040E 01	0.220786E 01	0.526955E 01	0.659914E 01
0.117000E 02	0.125347E 01	0.253440E 00	0.267173E 01	0.991152E 00	0.323880E 01	0.101694E 01	0.217587E 01	0.522678E 01	0.650661E 01
0.119000E 02	0.136062E 01	0.252920E 00	0.279165E 01	0.992701E 00	0.319615E 01	0.101375E 01	0.214548E 01	0.518645E 01	0.641870E 01
0.121000E 02	0.135765E 01	0.173300E 00	0.267095E 01	0.994030E 00	0.315925E 01	0.101077E 01	0.209624E 01	0.512170E 01	0.627620E 01
0.123000E 02	0.116667E 01	-0.590600E-01	0.241959E 01	0.995185E 00	0.312767E 01	0.100877E 01	0.207794E 01	0.509782E 01	0.622320E 01
0.125000E 02	0.124329E 01	0.142700E-01	0.243594E 01	0.996100E 00	0.310243E 01	0.100698E 01	0.205233E 01	0.506464E 01	0.614900E 01
0.127000E 02	0.128627E 01	0.932600E-01	0.242129E 01	0.996809E 00	0.308290E 01	0.100561E 01	0.206370E 01	0.507933E 01	0.618194E 01
0.129000E 02	0.109076E 01	-0.270800E-01	0.217318E 01	0.997373E 00	0.306739E 01	0.100454E 01	0.205233E 01	0.506464E 01	0.614900E 01
0.131000E 02	0.112854E 01	0.123120E 00	0.216558E 01	0.997870E 00	0.305373E 01	0.100360E 01	0.204226E 01	0.505169E 01	0.611983E 01
0.133000E 02	0.171184E 01	0.352720E 00	0.221254E 01	0.998271E 00	0.304275E 01	0.100286E 01	0.203614E 01	0.504128E 01	0.609630E 01
0.135000E 02	0.102519E 01	0.341540E 00	0.200015E 01	0.998576E 00	0.303441E 01	0.100230E 01	0.202794E 01	0.503335E 01	0.607834E 01
0.137000E 02	0.101895E 01	0.534050E 00	0.197976E 01	0.998873E 00	0.302634E 01	0.100176E 01	0.202191E 01	0.502568E 01	0.606091E 01
0.139000E 02	0.113378E 01	0.864040E 00	0.209260E 01	0.999095E 00	0.302028E 01	0.100136E 01	0.201737E 01	0.501992E 01	0.604778E 01
0.141000E 02	0.968730E 00	0.923040E 00	0.193780E 01	0.999244E 00	0.301627E 01	0.100110E 01	0.201435E 01	0.501610E 01	0.603902E 01
0.143000E 02	0.916870E 00	0.109020E 01	0.190799E 01	0.999318E 00	0.301435E 01	0.100096E 01	0.201282E 01	0.501417E 01	0.603464E 01
0.145000E 02	0.105202E 01	0.144554E 01	0.207606E 01	0.999375E 00	0.301272E 01	0.100086E 01	0.201167E 01	0.501272E 01	0.603130E 01
0.147000E 02	0.919660E 00	0.152070E 01	0.198014E 01	0.999449E 00	0.301073E 01	0.100074E 01	0.201015E 01	0.501082E 01	0.602691E 01
0.149000E 02	0.824290E 00	0.160709E 01	0.194096E 01	0.999515E 00	0.300898E 01	0.100062E 01	0.200881E 01	0.500914E 01	0.602303E 01
0.151000E 02	0.966980E 00	0.190352E 01	0.213952E 01	0.999563E 00	0.300772E 01	0.100054E 01	0.200784E 01	0.500793E 01	0.602021E 01
0.153000E 02	0.875910E 00	0.193298E 01	0.210768E 01	0.999603E 00	0.300669E 01	0.100048E 01	0.200703E 01	0.500694E 01	0.601789E 01
0.155000E 02	0.742680E 00	0.188322E 01	0.203461E 01	0.999629E 00	0.300601E 01	0.100043E 01	0.200651E 01	0.500629E 01	0.601637E 01
0.157000E 02	0.879660E 00	0.206418E 01	0.223014E 01	0.999648E 00	0.300552E 01	0.100040E 01	0.200612E 01	0.500581E 01	0.601524E 01
0.159000E 02	0.835240E 00	0.202341E 01	0.224025E 01	0.999673E 00	0.300490E 01	0.100036E 01	0.200562E 01	0.500521E 01	0.601380E 01
0.161000E 02	0.672940E 00	0.182514E 01	0.212615E 01	0.999696E 00	0.300431E 01	0.100033E 01	0.200516E 01	0.500464E 01	0.601245E 01
0.163000E 02	0.791480E 00	0.187041E 01	0.228453E 01	0.999708E 00	0.300403E 01	0.100031E 01	0.200493E 01	0.500436E 01	0.601178E 01
0.165000E 02	0.795490E 00	0.176760E 01	0.231830E 01	0.999733E 00	0.300342E 01	0.100027E 01	0.200443E 01	0.500376E 01	0.601034E 01
0.167000E 02	0.615290E 00	0.145212E 01	0.215646E 01	0.999758E 00	0.300282E 01	0.100023E 01	0.200394E 01	0.500318E 01	0.600892E 01
0.169000E 02	0.704230E 00	0.133352E 01	0.225149E 01	0.999779E 00	0.300231E 01	0.100020E 01	0.200353E 01	0.500268E 01	0.600770E 01
0.171000E 02	0.754680E 00	0.126124E 01	0.229538E 01	0.999797E 00	0.300186E 01	0.100018E 01	0.200316E 01	0.500224E 01	0.600663E 01
0.173000E 02	0.569300E 00	0.695570E 00	0.209091E 01	0.999813E 00	0.300148E 01	0.100015E 01	0.200285E 01	0.500187E 01	0.600571E 01
0.175000E 02	0.619960E 00	0.766370E 00	0.211057E 01	0.999824E 00	0.300122E 01	0.100014E 01	0.200263E 01	0.500161E 01	0.600507E 01
0.177000E 02	0.711230E 00	0.686100E 00	0.216002E 01	0.999839E 00	0.300087E 01	0.100012E 01	0.200235E 01	0.500127E 01	0.600425E 01
0.179000E 02	0.533900E 00	0.353090E 00	0.193154E 01	0.999847E 00	0.300069E 01	0.100010E 01	0.200220E 01	0.500109E 01	0.600380E 01
0.181000E 02	0.540720E 00	0.227010E 00	0.187980E 01	0.999850E 00	0.300061E 01	0.100010E 01	0.200214E 01	0.500102E 01	0.600362E 01
0.183000E 02	0.664080E 00	0.246240E 00	0.193936E 01	0.999863E 00	0.300030E 01	0.100008E 01	0.200188E 01	0.500071E 01	0.600285E 01
0.185000E 02	0.507430E 00	0.190600E-01	0.171609E 01	0.999873E 00	0.300005E 01	0.100007E 01	0.200167E 01	0.500046E 01	0.600225E 01
0.187000E 02	0.468500E 00	-0.533800E-01	0.161013E 01	0.999887E 00	0.299969E 01	0.100004E 01	0.200138E 01	0.500011E 01	0.600140E 01
0.189000E 02	0.612730E 00	0.963800E-01	0.168953E 01	0.999897E 00	0.299943E 01	0.100003E 01	0.200118E 01	0.499986E 01	0.600078E 01
0.191000E 02	0.487970E 00	0.165800E-01	0.150454E 01	0.999908E 00	0.299916E 01	0.100001E 01	0.200097E 01	0.499960E 01	0.600016E 01
0.193000E 02	0.404990E 00	0.168100E-01	0.136817E 01	0.999913E 00	0.299901E 01	0.100001E 01	0.200085E 01	0.499946E 01	0.599981E 01
0.195000E 02	0.557320E 00	0.287840E 00	0.147593E 01	0.999911E 00	0.299907E 01	0.100001E 01	0.200090E 01	0.499951E 01	0.599995E 01
0.197000E 02	0.473080E 00	0.353670E 00	0.135757E 01	0.999907E 00	0.299918E 01	0.100001E 01	0.200098E 01	0.499962E 01	0.600021E 01
0.199000E 02	0.351470E 00	0.408070E 00	0.121350E 01	0.999905E 00	0.299923E 01	0.100002E 01	0.200102E 01	0.499967E 01	0.600031E 01

表 3. 3. 2　雑音を加えた場合の推定値

3.4 推定値の統計的な性質

3.3で考えた1入力1出力系の場合について最小自乗解の統計的性質について調べてみる。雑音が存在しない場合の$\hat{u}_j$, $\hat{y}_j$, $\hat{U}_j^{(k)}$, $\hat{Y}_j^{(k)}$, $\hat{\mathbf{v}}_j$, $\hat{\mathbf{V}}_j$, $\hat{\mathbf{y}}_J$を頭の記号"∧"を取った u_j, y_j, …, $\mathbf{y}_J$ などで表わすことにする。e_j, ε_j をフィルタ$\mathcal{D}_M^{(k)}$に通した信号を$e_j^{(k)}$, $\varepsilon_j^{(k)}$として

$$\mathbf{e}_j=(e_j^{(0)}, e_j^{(1)}, \cdots, e_j^{(n-1)}, -\varepsilon_j^{(1)}, -\varepsilon_j^{(2)}, \cdots, -\varepsilon_j^{(n)}) \quad (3.4.1)$$

$$\mathbf{E}_J=\begin{bmatrix}\mathbf{e}_0\\ \mathbf{e}_1\\ \vdots\\ \mathbf{e}_J\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_J=\begin{bmatrix}\varepsilon_0\\ \varepsilon_1\\ \vdots\\ \varepsilon_J\end{bmatrix} \quad (3.4.2)$$

とすると

$$\hat{\mathbf{V}}_J=\mathbf{V}_J+\mathbf{E}_J \quad (3.4.3)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_J=\mathbf{y}_J+\boldsymbol{\varepsilon}_J \quad (3.4.4)$$

と表わされている。

(3.3.21)を用いると

$$\hat{\mathbf{V}}_J^T\cdot\hat{\mathbf{V}}_J\cdot\hat{\mathbf{a}}_J=\hat{\mathbf{V}}_J^T\cdot\hat{\mathbf{y}}_J \quad (3.4.5)$$

と表わされる。一方3.3の例2で述べたようにフィルタによる誤差は全く無視してよいので

$$\mathbf{V}_J\cdot\mathbf{a}=\mathbf{y}_J \quad (3.4.6)$$

である。そこで(3.4.5)より

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{V}}_J^T\cdot\hat{\mathbf{V}}_J\cdot(\hat{\mathbf{a}}_J-\mathbf{a}) &= \hat{\mathbf{V}}_J^T\cdot(\hat{\mathbf{y}}_J-\hat{\mathbf{V}}_J\cdot\mathbf{a})\\ &= \hat{\mathbf{V}}_J^T\cdot(\mathbf{y}_J-\mathbf{V}_J\cdot\mathbf{a}+\boldsymbol{\varepsilon}_J-\mathbf{E}_J\cdot\mathbf{a})\\ \text{(3.4.6)を用いて} \quad &= \hat{\mathbf{V}}_J^T\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}_J-\mathbf{E}_J\cdot\mathbf{a})\\ &= \mathbf{V}_J^T\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}_J-\mathbf{E}_J\cdot\mathbf{a})+\mathbf{E}_J^T\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}_J-\mathbf{E}_J\cdot\mathbf{a}) \quad (3.4.7)\end{aligned}$$

いま入力も雑音も定常信号としてさらにエルゴード性を仮定すると(45), (A4)

$$\lim_{J\to\infty}\frac{1}{J}\cdot\mathbf{V}_J^T\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}_J-\mathbf{E}_J\cdot\mathbf{a})=E\{\mathbf{V}_J^T\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}_J-\mathbf{E}\cdot\mathbf{a})\} \quad (3.4.8)$$

$$\lim_{J\to\infty}\frac{1}{J}\cdot\mathbf{E}_J^T\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}_J-\mathbf{E}_J\cdot\mathbf{a})=E\{\mathbf{E}_J^T\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}_J-\mathbf{E}_J\cdot\mathbf{a})\} \quad (3.4.9)$$

が確率1で成立する。ここで入力と雑音が無相関であれば(3.4.8)の右辺は0となる。またエルゴード性を仮定していたので

$$\mathbf{M} = \lim_{J\to\infty} \frac{1}{J} \hat{\mathbf{V}}_J^T \cdot \mathbf{V}_J = E\{ \hat{\mathbf{V}}_J^T \cdot \hat{\mathbf{V}}_J \} \qquad (3.4.10)$$

がなりたつ。また

$$\mathbf{S} = E\{ \mathbf{E}_J \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_J - \mathbf{E}_J \cdot \mathbf{a}) \} \qquad (3.4.11)$$

とすると

$$\lim_{J\to\infty} (\hat{\mathbf{a}}_J - \mathbf{a}) = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{S} \qquad (3.4.12)$$

である。すなわち$\hat{\mathbf{a}}_J$はaの一致推定量ではなく（6.4.12）より

$$\lim_{J\to\infty} E\{\hat{\mathbf{a}}\} = \mathbf{a} + \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{S} \qquad (3.4.13)$$

を得るが，これは漸近的に推定値$\hat{\mathbf{a}}$は不偏でないことを示している。

これはパルス伝達関数の推定の場合にもいえることであるが，自己回帰形の推定に伴う欠点である。ただし明らかなことであるが雑音が存在しなければ（3.4.6）がなりたつので

$$\hat{\mathbf{a}}_J = \mathbf{a}_J \qquad (6.4.14)$$

である。

次にフィルタによって**M**と**S**の値がどのように変化するかを調べてみよう。この行列の要素は$E\{\hat{U}_j^{(k)} \cdot \hat{U}_j^{(l)}\}$，$E\{\hat{U}_j^{(k)} \cdot \hat{Y}_j^{(l)}\}$，$E\{\hat{Y}_j^{(k)} \cdot \hat{Y}_j^{(l)}\}$等から成りたっている。まず，$E\{\hat{U}_j^{(k)} \cdot \hat{U}_j^{(l)}\}$について調べてみる。（3.3.5）および雑音もスペクトル分解できるとして$\hat{U}_j^{(l)}$は実数なので$\overline{\hat{U}_j^{(l)}} = \hat{U}_j^{(l)}$であるから

$$E\{\hat{U}_j^{(k)} \cdot \hat{U}_j^{(l)}\} = E\{\hat{U}_j^{(k)} \cdot \overline{\hat{U}_j^{(l)}}\}$$

$$= (-1)^l \cdot \int_{-\omega f}^{\omega f} (i\omega)^{k+l} \cdot \{P^*(\omega \cdot T_s)\}^{2M} (dS_u(\omega) + dS_e(\omega))$$

$$(3.4.15)$$

カスケード・フィルタの通過帯域に信号$u(t)$の主要スペクトルがほとんど含まれていて，その範囲では信号のパワーが雑音のそれより十分大きいならば（3.4.15）は

$$E\{\hat{U}_j^{(k)} \cdot \hat{U}_j^{(l)}\} \doteqdot (-1)^l \cdot i^{k+l} \cdot \int_{-\omega f}^{\omega f} (i\omega)^{k+l} \cdot dS_u(\omega) \qquad (3.4.16)$$

となり，フィルタにほとんど影響されない値となる。他の項についても同様なことがいえる。そして**S**の方は$E\{e_j^{(k)} \cdot \varepsilon_j^{(l)}\}$，$E\{e_j^{(k)} \cdot e_j^{(l)}\}$，$E\{\varepsilon_j^{(k)} \cdot \varepsilon_j^{(l)}\}$などの項よりなっている。$e_j^{(k)}$と$\varepsilon_j^{(l)}$が無相関であると考えるのは自然なので

$$E\{e_j^{(k)} \cdot \varepsilon_j^{(l)}\} = 0 \qquad (3.4.17)$$

である。また（6.4.15）を導いたのと同じ理由で

$$E\{e_j^{(k)}\cdot e_j^{(l)}\}=(-1)^l\int_{-\omega f}^{\omega f}(i\omega)^{k+l}\{P^*(\omega\cdot Ts)\}^{2M}\cdot dSe(\omega) \tag{3.4.18}$$

となる。雑音 e_j は白色性すなわち

$$\frac{dSe(\omega)}{d\omega}=\frac{\sigma e^2}{2\omega f} \qquad |\omega|\leqq\omega f \tag{3.4.19}$$

とし $\{P^*(\omega\cdot Ts)\}^{2M}$ の遮断周波数（たとえば第2章で述べた $P^*(\omega\cdot Ts)$ の第1零点)を ωc とすると $k+l=$ 偶数のとき

$$\begin{aligned}E\{e_j^{(k)}\cdot e_j^{(l)}\}&=\frac{(-1)^k\cdot i^{k+l}\cdot\sigma e^2}{2\omega f}\int_{-\omega f}^{\omega f}\omega^{k+l}\cdot\{P^*(\omega\cdot Ts)\}^{2M}\cdot d\omega\\&\doteqdot\frac{(-1)^k\cdot i^{k+l}\cdot\sigma e^2}{2\omega f}\int_{-\omega c}^{\omega c}\omega^{k+l}\,d\omega\\&=\frac{(-1)^k\cdot i^{k+l}\cdot\sigma e^2}{2\omega f}\cdot\frac{2\cdot\omega c^{k+l+1}}{k+l+1}\end{aligned} \tag{3.4.20}$$

フィルタを通さないときには ωc が ωf となり（3.4.20）は著しく大きくなる。すなわちフィルタを通すことにより $E\{e_j^{(k)}\cdot e_j^{(l)}\}$（$k+l=$ 偶）は十分小さくなる。信号に白色性があれば $k+l=$ 奇のときは

$$E\{e_j^{(k)}\cdot e_j^{(l)}\}=0 \tag{3.4.21}$$

となる。$E\{\varepsilon_j^{(k)}\cdot\varepsilon_j^{(l)}\}$ 等についても事情は全く同様である。

すなわち**M**の値は入力信号の有効成分がカスケードフィルタの通過帯域に入っている限りフィルタを通す通さないにかかわらずほぼ一定の値となる。それに反し**S**の方はフィルタを通したことにより十分その値が小さくなっていることがわかった。これはこの論文で提案する手法によれば推定値の定常偏差を実用上さしつかえない程度におさえ得ることを示している。

従ってパルス伝達関数等を経由して伝達関数を求めた時に生ずる変換誤差よりこれらの偏差は十分小さなものであろう。しかもこの方法では変換の誤差というものは存在しないので，その意味からも実用上有効な方法と考えられる。

3.3.3で与えた例－1で $\mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{S}$ を計算してみる。（3.4.20）より k と l に関係なく（k $l=0,1,\cdots$）

$$|E\{e_j^{(k)}\cdot e_j^{(l)}\}|\leqq\frac{\omega c}{\omega f}\cdot\sigma e^2 \tag{3.4.23}$$

同じく

$$|E\{\varepsilon_j^{(k)}\cdot\varepsilon_j^{(l)}\}|\leqq\frac{\omega c}{\omega f}\cdot\sigma_\varepsilon^2 \qquad (3.4.24)$$

が成立するので

$$\mathbf{S}=(S_1,S_2,\cdots,S_n)^T \qquad (3.4.25)$$

とすると（3.4.11）より

$$|S_l|\leqq\frac{\omega c}{\omega f}[\sigma_\varepsilon^2+Max\{\sigma_e^2,\sigma_\varepsilon^2\}\cdot|a_l|] \qquad (3.4.26)$$

$$(l=1,2,\cdots,n)$$

となる。これを用いて$\mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{S}$の要素の評価ができる。

例－1の場合には$M=3$，$m=4$であったので図2.4.6より

$$\omega c/\omega f\fallingdotseq 1/\pi=0.3183 \qquad (3.4.27)$$

また

$$\sigma_e^2=0.01 \qquad \sigma_\varepsilon^2=0.01 \qquad (3.4.28)$$

であり$J=80$の時の$\hat{\mathbf{V}}_J^T\cdot\mathbf{V}_J$を$\mathbf{M}$と考えれば

$$\mathbf{M}^{-1}=\begin{bmatrix}0.15248E-01 & -0.58500E-03 & -0.62433E-02\\ -0.58525E-03 & 0.12065E\ 01 & -0.17851E\ 00\\ -0.62435E-02 & -0.17851E\ 00 & 0.99869E-01\end{bmatrix}\times 80 \qquad (3.4.29)$$

であるので

$$|\hat{\mathbf{a}}_J-\mathbf{a}|\leqq(0.018,8.1,1.2) \qquad (3.4.30)$$

となる。ただしベクトル間の不等式は要素毎に不等式が成立するものと考える。図3.3.3に与えたシミュレーションの結果は（3.4.30）の評価の妥当性を示している。

3.5 終結式による構造の決定

今まではシステムの次数を知った上でその係数を推定する手法について述べてきた。しかし実システムの同定を実施しようとすると次数そのものが不明である場合の方が多い。このような場合にはまずシステムの次数を推定してからでないと今まで述べてきた手法を用いることはできない。この節では1入力1出力系の場合について次数を推定する方法について終結式を用いる方法を説明し例1で与えた例題を基にしてこの手法の妥当性を示した。

問題を明確化するためにシステムの正しい次数はnで伝達関数が（3.3.1）のようになるとしておく。我々ははじめnの値を知らないとして

$$R'(S)=\frac{b_0'+b_1'\cdot S+\cdots+b'_{n'-1}\cdot S^{n'-1}}{1+a_1'\cdot S+\cdots+a'_{n'}\cdot S^{n'}} \qquad (3.5.1)$$

であるとしよう。ただし

$$n \leqq n' \qquad (3.5.2)$$

であるものとする。$R'(S)$では$a'_{n'} \neq 0$という仮定はおけない。もしかすると$a'_{n'}=0$となる場合もあり得る。ところで1入力1出力系の場合には次数がnであるというのは定理1, 2, 3によりa_{n} $\neq 0$で分母分子のSに関する多項式が既約であることが必要十分であった。すなわち我々が仮に選んだ伝達関数$R'(S)$の次数n'がシステムの次数nに等しいか否かを調べるには次のようにすればよい。

$$a_{n'} \neq 0 \qquad (3.5.3)$$

でしかも分母分子の多項式

$$A'(S) = 1 + a'_1 \cdot S + a'_2 \cdot S^2 + \cdots + a'_{n'} \cdot S^{n'} \qquad (3.5.4)$$

$$B'(S) = b_0' + b_1' \cdot S + \cdots + b'_{n'-1} \cdot S^{n'-1} \qquad (3.5.5)$$

が既約であれば$n'=n$となり，そのいずれかが満足されなければ$n'>n$である。

ところで非常に都合のよい定理が存在する。すなわち

〔定理 3.5.1〕　Sの2つの多項式(20)

$$F_n(S) = f_0 + f_1 \cdot S + \cdots + f_n \cdot S^n \qquad (3.5.5)$$

$$G_m(S) = g_0 + g_1 \cdot S + \cdots + g_m \cdot S^m \qquad (3.5.6)$$

に対して

$$Res(F_n, G_m) = \begin{vmatrix} f_n & f_{n-1} & \cdots & f_0 & & & \\ & f_n & f_{n-1} & \cdots & f_0 & & \\ & & & f_n & f_{n-1} & \cdots & f_0 \\ g_m & g_{m-1} & \cdots & g_0 & & & \\ & g_m & g_{m-1} & \cdots & g_0 & & \\ & & & g_m & g_{m-1} & \cdots & g_0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \end{matrix} \qquad (3.5.7)$$

という行列式を$Fn(S)$, $Gm(S)$の終結式という。この終結式に対して

$Res(Fn, Gm)=0$　は　$fn=g_m=0$　または　$Fn(S)$と$Gm(S)$が可約の場合かでありしかもその時に限る。

これはまた$Res(Fn, Gm) \neq 0$　なら　f_n　又はg_mの少なくとも一方は0でなくしかも$Fn(S)$と$Gm(S)$は既約であることを示している。

そこでこの定理をシステムの次数の決定に用いることができる。すなわち

$$Res(A', B') = 0 \qquad (3.5.8)$$

ならば　$a'_{n'} = b'_{n'-1} = 0$　又は　$A'(S)$, $B'(S)$　が可約なので　$n < n'$　である。

$$Res(A', B') \neq 0 \qquad (3.5.9)$$

ならば　$a'_{n'} \neq 0$　又は $b'_{n'-1} \neq 0$ で $A'(S)$ と $B'(S)$ が既約である。そこで $a'_{n'} \neq 0$　なら $n' = n'$，$a'_{n'} = 0$ のときは $b'_{n'-1} \neq 0$ だが物理的に考えて $a'_{n'-1} \neq 0$　でなければならないから $n = n'-1$ となる。これをまとめると

$$A'(S), B'(S) \text{ の作成} \rightarrow \begin{cases} Res\ (A', B') = 0 \rightarrow n < n' \\ Res\ (A', B') \neq 0 \rightarrow \begin{cases} a'_{n'} = 0 \rightarrow n = n'-1 \\ a'_{n'} = 0 \rightarrow n = n' \end{cases} \end{cases} \qquad (3.5.10)$$

となる。すなわち先に述べた係数の推定法は仮の次数さえ仮定すれば $a'_{n'} \neq 0$　という仮定を用いることなく実行できるので，仮の次数 n' に対し $A'(S)$，$B'(S)$ を作り終結式を計算し（3.5.10）で述べた方法によれば次数 n を推定できる。すなわち雑音を含む観測値より得られた係数の推定値では（3.5.10）で現われる＝0という係数は近似的にしか成立しないであろうからである。

3.3.3 で考えた例では正しいシステムは $1/(1+S+20 \cdot S^2)$ であり，構造がわかったとして推定した結果は　$1.01/(1+0.998 \cdot S^2+20.02S^2)$ だったので終結式は

$$\begin{vmatrix} 0 & 1.01 & 0 \\ 0 & 0 & 1.01 \\ 20.02 & 0.998 & 1 \end{vmatrix} \doteqdot 20.42 \qquad (3.5.11)$$

システムが $G/(1+A \cdot S+B \cdot S^2+C \cdot S^3)$ として推定した結果が図 3.3.4 の場合で，80 秒目では $\hat{G}j \doteqdot 0.91$，$\hat{A}j = 1.03$　，$\hat{B}j = 19.75$，　$\hat{C}j = 0.13$　となるので終結式は

$$\begin{vmatrix} 0 & 0.91 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.91 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.91 & 0 \\ 0.13 & 19.75 & 1.03 & 0 & 0 \\ 0 & 0.13 & 19.75 & 1.03 & 1 \end{vmatrix} \doteqdot 0.012 \qquad (3.5.12)$$

となる。これは（3.5.11）に比べて0と考えて良いので次数は2以下（従って2）という結論を出すことができる。

ところで（3.5.1）を入出力の微分方程式で表わすと

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n'-1} b_{k'} \cdot u^{(k)}(t) - \sum_{l=1}^{n'} a'_l \cdot y^{(l)}(t) \qquad (3.5.11)$$

となる。もし　$n' = n$　の場合に，

$$u^{(0)}(t),\ u^{(1)}(t),\ \cdots,\ u^{(n'-1)}(t) \qquad (3.5.12)$$

が一次独立であれば関数列

$$u(t),\ u^{(1)}(t),\ \cdots,\ u^{(n'-1)}(t), -y^{(1)}(t), -y^{(2)}(t),\ \cdots,\ -y^{(n)}(t) \qquad (3.5.13)$$

は一次独立となる。しかし$n'>n$ならば関数列（3.5.13）は一次従属となり，（3.5.11）を満たす係数の組は無数に存在するが，そのどの組をとってもやはり$Res\ (A',B')=0$であるか$Res\ (A',B')\neq 0$で$a'_{n'}=0$である。もしそうでないとすれば$Res\ (A',B')\neq 0$，$a'_{n'}\neq 0$となり$n'=n$となるからでありこの場合解は一組しか存在しない。

3.6 無定位形システムに対する配慮

実際の工業プラント（後で出てくる蒸気発生用ボイラ等）では一定の入力を加えると出力の絶対値が増加するようなシステムが多く存在する。このようなシステムは（3.3.1）のような形の伝達関数では表現できず(18),(19)

$$R(S)=\frac{b_0+b_1\cdot S+\cdots+b_{n-1}\cdot S^{n-1}}{S^r\cdot(1+a_1\cdot S+\cdots+a_n\cdot S^n)} \qquad (3.6.1)$$

と表わされなければならない。ここで

$$r\geqq 1 \qquad (3.6.2)$$

である。工業プラント等ではその物理的構成・記録データ等からrの値を知ることは比較的容易であるので，rは既知として見る。（3.6.1）は微分方程式になおすと

$$y^{(r)}(t)=\sum_{k=0}^{n-1} b_k\cdot u^{(k)}(t)-\sum_{l=1}^{n} a_l\cdot y^{(l+r)}(t) \qquad (3.6.3)$$

となるので，（3.3.5）の$\hat{\mathbf{v}}_j$と(3.3.17)の$\hat{\mathbf{y}}_J$で

$$\hat{Y}_j^{(l)}\rightarrow\hat{Y}_j^{(l+r)} \quad (l=1,2,\cdots,n) \qquad (3.6.4)$$

と置きかえれば全く同じ手法が用い得る。これはカスケード・ディジタル微分フィルタにより任意の階数の一定低域スペクトル成分の微分を容易に得ることができることによる。

3.7 無駄時間を含むシステムに対する配慮(D6)

実際の工業プラントでは第4章で述べるような抄紙機，鉄鋼圧延機等のように大きな無駄時間を含むものが存在する。このようなシステムはやはり（3.3.1）のような形の伝達関数では表現できず

$$R(S)=\left(\frac{b_0+b_1\cdot S+\cdots+b_{n-1}\cdot S^{n-1}}{1+a_1\cdot S+\cdots+a_n\cdot S^n}\right)\cdot e^{-T_D\cdot S} \qquad (3.7.1)$$

と表わされなければならない。ところでT_Dがわかっている場合には〔・〕を$Gauss$の記号として

$$l_D = [T_D / T_S] \qquad (3.7.2)$$

とすれば（3.7.1）は

$$\hat{Y}_j^{(0)} \doteqdot \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot \hat{U}_j^{(k)} l_D - \sum_{l=1}^{n} a_l \cdot \hat{Y}_j^{(l)} \qquad (3.7.3)$$

と表わされるので全く同じ手法が適用できる。ディジタル系ではサンプル周期T_sの整数倍であれば自由に時間軸をずらせることが可能であり，この点がアナログ系に比べて著しく有利な点であるということができる。

T_Dが不明の場合でもいくつかのT_Dを仮定し，その中より妥当な値を選ぶことができる。これは第4章の抄紙機の同定の部分で扱われている。

3.8 前置フィルタについて

この章で提案した同定法の基本はシステムの入出力の観測サンプル値$\hat{u}_j$，$\hat{y}_j$にカスケード・ディジタル微分フィルタ$\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$を通して微分 $\hat{U}_j^{(k)}$，$\hat{Y}_j^{(k)}$を作り，これをもとにシステムの伝達関数を求める方法であった。しかし3.3.1の手法の説明をふり返ってみると，$\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$の前に別のフィルタ$Pre(z)$を通してもよいことがわかる。

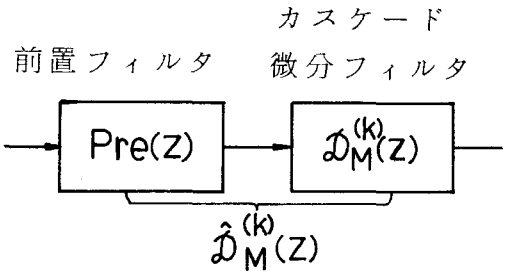


図 3.8.1　前置フィルタ

ただし$Pre(z)$は

$$Pre(e^{i\omega \cdot T_s}) = Pre^*(\omega \cdot T_s) \cdot e^{-i\omega \cdot \tau_0} \qquad (3.8.1)$$

のような線形位相特性をもつものとする。

すなわち $\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$ の代りに

$$\hat{\mathcal{D}}_M^{(k)}(z) = Pre(z) \cdot \mathcal{D}_M^{(k)}(z) \qquad (3.8.2)$$

を用いてもよい。

これは$\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$の特性だけでは帯域が広すぎるような場合とか，低域に強い点状のスペクトルが存在するような場合には$Pre(z)$として狭帯域の低域フィルタやノッチ・フィルタ等をとる。このようなもので簡便なものを示しておくことにする。これらは第4章の実システムの同定の際に利用されている。

〔狭帯域フィルタの例〕　　入力x_j，出力y_jに対して相加平均

$$y_j = \frac{1}{L} \cdot \sum_{l=1}^{L} x_{j+1-l} \qquad (3.8.3)$$

を考える。このフィルタのパルス伝達関数を$Pre(z)$とすると

$$Pre\ (e^{i\omega\cdot Ts}) = Pre^{*}(\omega\cdot Ts)\cdot e^{-i\omega(\frac{L-1}{2})\cdot Ts} \qquad (3.8.4)$$

となる。ここで

$$Pre^{*}(\theta) = \frac{\sin\frac{L\cdot\theta}{2}}{L\cdot\sin\frac{\theta}{2}} \qquad (3.8.5)$$

である。$Pre^{*}(\theta)$ の変化は$L=16$の場合を示すと図 3.8.2 のようになる。後置されている$\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$ 自身狭帯域の低域特性であることを考えると$Pre^{*}(\theta)=0$ の第 1 零点が$\theta=\frac{2\pi}{L}$だから，このフィルタによりその半分（図 3.8.2 参照）の

$$|\omega| \leqq (\pi/Ts)\cdot/L \qquad (3.8.6)$$

の成分のみが通過すると考えてよい。

〔ノッチ・フィルタの例〕(31) 超低域に不用な単一の点状スペクトルの雑音が加わっている場合にはノッチ・フィルタを用いると便利である。たとえばこれは入出力の関係が

$$y_j = (1/2)\cdot(x_j + x_{j-L}) \qquad (3.8.7)$$

で与えられるフィルタで，このフィルタの周波数特性は

$$Pre(e^{i\omega Ts}) = Pre^{*}(\omega\cdot Ts)\cdot s^{-i\omega\cdot\frac{L}{2}\cdot Ts} \qquad (3.8.8)$$

と表わされる。ここで

$$Pre^{*}(\theta) = \cos\left(\frac{L\cdot\theta}{2}\right) \qquad (3.8.9)$$

となる。$|Pre^{*}(\theta)|^2$ の変化は$L=10$の場合を示すと図 3.8.4 のようになる。
$Pre^{*}(\theta)$ は

$$\theta = \frac{2}{L}\left(\frac{\pi}{2} + k\cdot\pi\right) = \frac{\pi}{L}(1+2k) \qquad (3.8.10)$$
$$(k = 0, 1, \cdots)$$

で零となる。これは

$$\omega = \frac{\pi}{Ts}\cdot\frac{1+2k}{L} \qquad (k = 0, 1, \cdots) \qquad (3.8.11)$$

の周波数の信号を完全に遮断することを意味する。

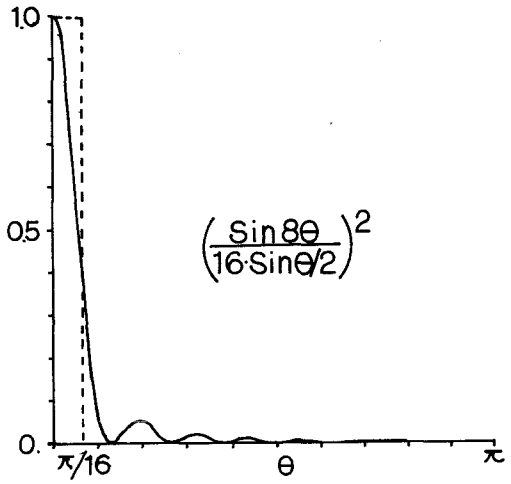


図 3. 8. 3　狭帯域フィルタ

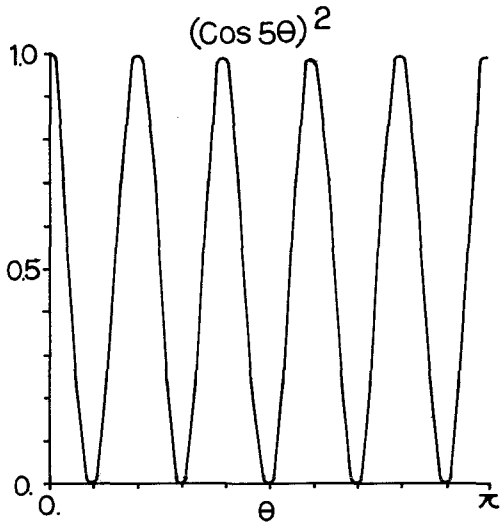


図 3. 8. 4　ノッチ・フィルタ

フィルタ$\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$，$Pre(z)$，$\hat{\mathcal{D}}_M^{(k)}(z)$ などのフィルタを定めるには信号のパワー・スペクトルを知る必要があり，これらは同定を実施する前に実施される。

3. 9　逐次推定のアルゴリズムについて

オンラインの時等のように（3. 3. 1 9）でJの値が1つづつ増加していくような場合にはその都度（3. 3. 1 9）式を計算していたのでは効率が悪い。このような場合には逐次形のアルゴリズムを用いると便利である。これはGreville の公式に基礎を置いている。[5]（3. 3. 1 7）より

$$\hat{\mathbf{V}}_J = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{V}}_{J-1} \\ \hat{\mathbf{v}}_J \end{bmatrix} \qquad (3.9.1)$$

と表わすことができる。次に

$$\boldsymbol{\beta}_J = \hat{\mathbf{v}}_J \cdot \hat{\mathbf{V}}_{J-1}^{+} \qquad (3.9.2)$$

として

$$\boldsymbol{\gamma}_J = \hat{\mathbf{v}}_J - \boldsymbol{\beta}_J \cdot \hat{\mathbf{V}}_{J-1} \qquad (3.9.3)$$

とおくと

$$\hat{\mathbf{V}}_J^{+} = [\hat{\mathbf{V}}_{J-1}^{+} - \boldsymbol{\delta}_J \cdot \boldsymbol{\beta}_J, \boldsymbol{\delta}_J] \qquad (3.9.4)$$

となる。ここで

$$\boldsymbol{\delta}_J = \begin{cases} \boldsymbol{\gamma}_J{}^{+} & \boldsymbol{\gamma}_J \neq 0 \\ (1+\boldsymbol{\beta}_J \cdot \boldsymbol{\beta}_J{}^T)^{-1} \cdot \hat{V}^{+}_{J-1} \cdot \boldsymbol{\beta}_J{}^T & \boldsymbol{\gamma}_J = 0 \end{cases} \qquad (3.9.5)$$

である。これを*Greville* の公式という。

ところで（3.3.17）より

$$\hat{\mathbf{y}}_J = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{y}}_{J-1} \\ \hat{y}_J \end{bmatrix} \qquad (3.9.6)$$

でもある。そこで，（3.9.6）と（3.9.4）を（3.3.19）に代入して

$$\hat{\mathbf{a}}_J = \hat{\mathbf{V}}_J{}^{+} \cdot \hat{\mathbf{y}}_J = [\ \hat{\mathbf{V}}^{+}_{J-1} \ \ -\boldsymbol{\delta}_J \cdot \boldsymbol{\beta}_J, \boldsymbol{\delta}_J\ ] \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{y}}_{J-1} \\ \hat{y}_J \end{bmatrix}$$

$$= \hat{\mathbf{V}}^{+}_{J-1} \cdot \hat{\mathbf{y}}_{J-1} - \boldsymbol{\delta}_J \cdot \boldsymbol{\beta}_J \cdot \hat{\mathbf{y}}_{J-1} + \boldsymbol{\delta}_J \cdot \hat{y}_J$$

$$= \hat{\mathbf{a}}_{J-1} + \boldsymbol{\delta}_J \cdot (\hat{y}_J - \hat{\mathbf{v}}_{J-1} \cdot \hat{\mathbf{a}}_{J-1}) \qquad (3.9.7)$$

を得る。この際 $J < 2n$ でもかまわないから $\hat{\mathbf{V}}_0{}^{+} = \hat{\mathbf{v}}_0{}^{+}$ より始めてよい。ただし（3.9.5）の判別には注意を要する。数値計算上では“＝0”となる事は整数値の計算以外ではあり得ないからである。これはたとえば正数 $\varepsilon > 0$ を設定しておいて

$$\| \boldsymbol{\gamma}_J \| / \| \hat{\mathbf{v}}_J \| < \varepsilon \qquad (3.9.8)$$

を“$\boldsymbol{\gamma}_J = \mathbf{0}$”と定義してプログラムを組むことで実際的となる。

又 $\hat{\mathbf{V}}_J$ も $\hat{\mathbf{V}}_J{}^T$ も行と列が J と共に増加するので記憶の点で不利であるが，

$$\mathbf{E}_J = \hat{\mathbf{V}}_J{}^T \cdot \hat{\mathbf{V}}_J \qquad (3.9.9.)$$

$$\mathbf{F}_J = \hat{\mathbf{V}}_J{}^{+} \cdot (\hat{\mathbf{V}}_J{}^{+})^T = \mathbf{E}_J{}^{+} \qquad (3.9.10)$$

とすると（付録　参照）

$$\mathbf{E}_J = \mathbf{E}_{J-1} + \hat{\mathbf{v}}_J{}^T \cdot \hat{\mathbf{v}}_J \qquad (3.9.11)$$

$$\mathbf{F}_J = \mathbf{F}_{J-1} + (\boldsymbol{\delta}_J - \mathbf{F}_{J-1} \cdot \hat{\mathbf{v}}_J{}^T)(\boldsymbol{\delta}_J - \mathbf{F}_{J-1} \cdot \hat{\mathbf{v}}_J{}^T)^T \qquad (3.9.12)$$

と表わされる。そして

$$\boldsymbol{\gamma}_J = \hat{\mathbf{v}}_J \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{F}_J \cdot \mathbf{E}_J) \qquad (3.9.13)$$

$$\boldsymbol{\delta}_J = \begin{cases} \boldsymbol{\gamma}_J{}^{+} & , \boldsymbol{\gamma}_J \neq 0 \\ (1+\hat{\mathbf{v}}_J \cdot \mathbf{F}_{J-1} \cdot \hat{\mathbf{v}}_J{}^T)^{-1} \cdot \mathbf{F}_{J-1} \cdot \hat{\mathbf{v}}_J{}^T & , \boldsymbol{\gamma}_J = 0 \end{cases} \qquad (3.9.14)$$

と表わされるので $\mathbf{E}_J$，$\mathbf{F}_J$，$\mathbf{a}_J$ を記憶しておけばよい。これらは夫々 $2n \times 2n$，$2n \times 2n$，$2n \times 1$ の行列であり J に依存しないので固定した記憶域でよい。又 $\mathbf{E}_J$，$\mathbf{F}_J$ は対称行列であるから

その分だけ記憶域も少なくてよい。

又$\hat{a}_J$ の初期値$\hat{a}_0$ は

$$\hat{a}_0 = \hat{v}_0^{+} \cdot y_0 \qquad (3.9.15)$$

とすれば一意的に確定する。

このようにして実際的な逐次推定公式が得られた。

3.10 同定のプログラム（D6）

この節で述べた手法を*FORTRAN* プログラムにより作成してオンラインの同定の便をはかり，この論文にのせてある同定例の殆んどはこのプログラム・システムにより計算したものである。具体的なプログラム内容は（D6）に発表されているので，この論文ではその説明を省略した。

3.11 まとめ

定常な線形システムの入出力信号の部分的スペクトル成分もやはり元の入出力信号と同じシステムを規定する微分方程式を満足すること，第2章で作成したカスケード・ディジタル微分フィルタにより入出力信号の部分的スペクトル成分の任意階の微分信号のサンプル値が得られることを利用してシステムの伝達関数を推定できることを示した。この手法では無定位形システム，無駄時間を含むシステム等にも容易に適用できることを示した。又1入力1出力系では終結式を用いると構造が決定できることについても論じた。そしてこの手法の有効性を示すために1入力1出力系，2入力1出力系の簡単な問題についてシミュレーションをもとに推定を実行し，その数値結果を与えた。

第4章　実プラントの同定

4.1　序

この章では第3章で提案した手法を実際の工業プラントの同定に使用した例を与える。最初に火力発電所でのタービン発電機系，次に製紙工場抄紙機の坪量，水分系の，最後に製鉄工場レバシング・コールドミル系の同定結果を与える。

4.2　火力発電所での例

実際の火力発電プラントの操業時のデータに基づく同定に関しては，インパルス応答推定に基づく詳細な結果が鈴木等により発表されている[16],[17],[22]。ここで紹介する例も鈴木氏と関西電力㈱総研内田義久氏が関西電力大阪発電所において同定を実施する際に著者がお手伝いをし，そのときいただいた例である。同発電所の2号ユニットの構成は次のようである。

ボ　イ　ラ：石炭だきコントロール・サーキュレション形ドラム式
　　容量500 *ton*／*hour*，蒸気温度538℃，蒸気圧力169 kg／cm^2

タービン発電機：タンデム結合
　　60 *Hz*　　定格出力156 *MW*

計　算　機：*MELCOM*330　制御用計算機

又このユニットにはプラントの起動停止の際に実施する複雑な操作シーケンスをモニタリングするために制御用の計算機*MELCOM*330　が据付けられていた。この計算機を用いて2つのアナログ入力をほとんど同時に（約17*msec*の間隔がある）計測記録することができた。アナログ入力は電圧，電流，空気圧等で計測点より伝送され最終的に電圧の形で適当に増巾され10　ビットのディジタル値信号に変換されて計算機内メモリにとり込まれる。そのアナログ値の持つ工学単位へは適当な変換を施せばよい。このようにして時間的同時性も良く正確な計測値がディジタル値信号で得られた。

4.2.1　対象システム

同定の対象としてはタービンに供給される水蒸気の流量と発電機出力の間のシステムの特性を考える。火力発電所での主要な機器は水蒸気を発生するボイラ，蒸気の持つエネルギーを回転エネルギーに変換する蒸気タービン，そして回転エネルギーを電気エネルギーに変換する発電機の3つである。蒸気タービンと発電機は軸が連結され回転のエネルギーは直接タービンより発電機へ伝送されるようになっている。タービンの発生するパワーすなわち単位時間当りのエネルギーは蒸気の圧力と温度と流量によって定まる。しかしこの3つの変数を自由に変化させたのではタービンの製作が困難になるばかりでなく制御を行うのも困難となるので平常の運転時　では圧力と温度を一定に保ち（圧力169kg／cm^2，温度538℃，再熱温度538℃）蒸気の流量のみでタービ

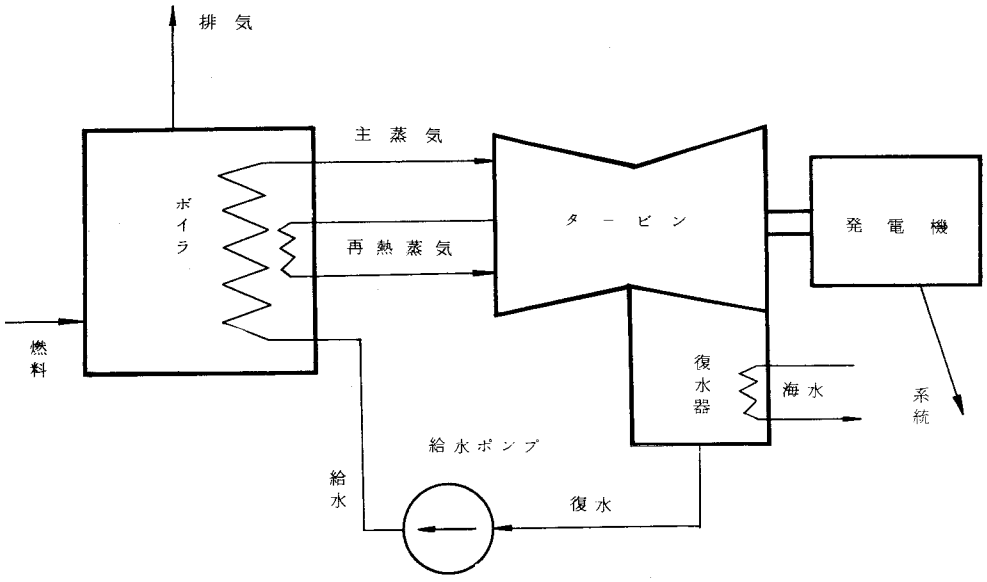


図 4. 2. 1　火力発電所の機器構成図

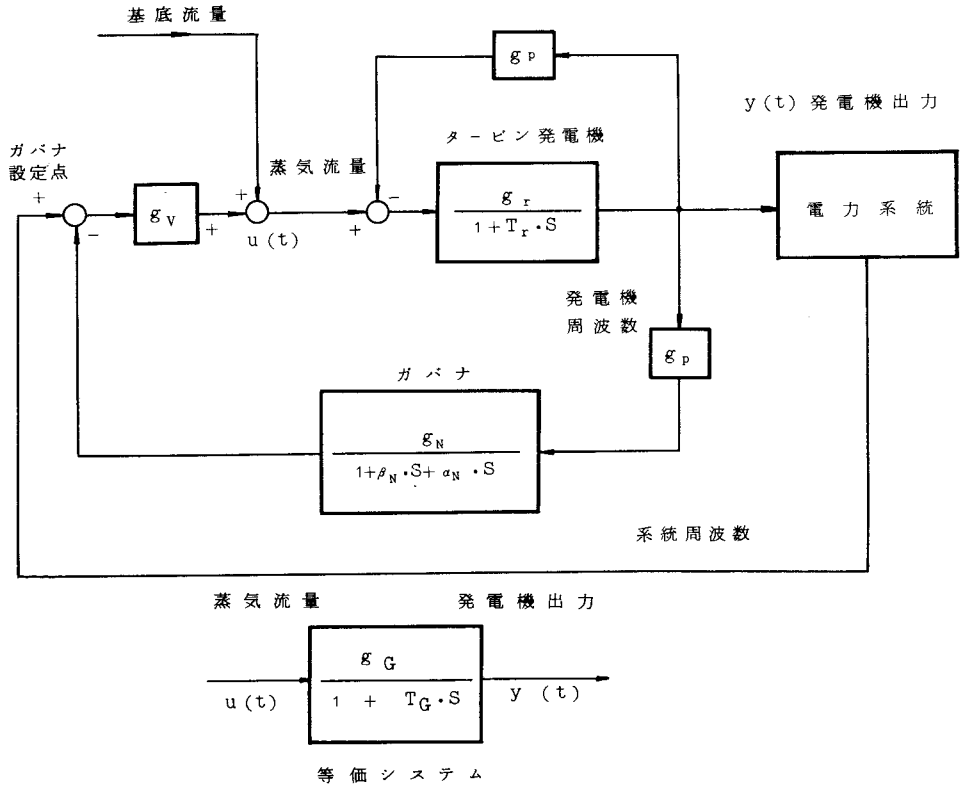


図 4. 2. 2　タービン発電機とガバナ・システム及びその等価システム

ンの出力が定まるように構成されている。そのために常に一定の蒸気条件（定められた圧力，温度）の水蒸気が発生蒸気の流量に無関係にタービンに供給できるようにボイラが制御される。

ボイラの制御系の概要は第5章で述べるが，要は要求発生電力を指定されるとそれにより燃料流量（石炭および一部重油の混焼）と空気および給水の流量の設定値の基底が作られる（フィードフォワード成分）。そしてさらに発電機出力，蒸気温度等の設定値よりの偏差により燃料量と空気および給水の流量が修正される（フィードバック成分）ようになっている。

次にタービン発電機の動作について簡単に述べておく。タービン回転数は直接発生電力の周波数となるので，常に正確に一定値（60 Hz で 3,600 PRM または 1,800 PRM 等）に保たれるようになっている。ところで発電機の出力は発電機の位相と電力を供給する系統の位相との差により定まってくる。[38] すなわち回転数を一定にすると蒸気流量と発電機出力との間には平衡状態が存在する。これは次のように考えればよい。蒸気流量を増すとわずかに回転数が増し，同期発電機の界磁を流れる電流が増大する。そのため反作用として回転数が減少する。そのために平衡状態ができるわけである。

そこでタービン回転数と発電機出力を設定値に保つように蒸気流量を操作する制御系が必要になるが，これがいわゆるガバナ・システムである。現在タービンの回転数等は12ビットのディジタル式カウンタにより読み込まれて制御演算は電子式で行ない，蒸気流量調整弁（ガバナ弁）は油圧式制御弁を用いるような電子式油圧ガバナ・システム（*Electro-Hydrolyic Governor*）が用いられている。[37] ガバナシステムを動作させれば，ガバナの発電機出力の設定を変化させることで蒸気流量が変化し従って発生電力が変化ししかも回転数は一定値に保たれている。このような状態での蒸気流量と発生電力の特性はガバナ・フリー特性と呼ばれる。平常の運転状態ではすべてガバナ・フリーの状態であるので，この時の特性がすなわちタービン発電機の特性として役立つわけである。

図 4. 2. 2 はタービン発電機およびガバナの特性のブロック図である。この図から，ガバナ・フリー状態での蒸気流量 $u(t)\,ton/Hour$ と発電機出力 $y(t)\,KW$ の関係は

$$\mathcal{L}\{y(t)\}=\frac{g_G}{1+T_G\cdot S}\cdot\mathcal{L}\{u(t)\} \qquad (4.2.1)$$

と等価的に表わされる。ここで

$$T_G=\frac{T_T}{1+g_T\cdot g_P}\quad,\quad g_G=g_T\cdot(1+g_T\cdot g_B) \qquad (4.2.2)$$

である。T_G と g_G は蒸気流量と発電機出力の間のみかけ上の時定数とゲインとなる。

4.2.2 計測と同定の結果

図 4.2.3 は昭和45年 3 月27日に $T_s=5$秒および $T_s=10$ 秒として計測した例である。この図は計算機を用いて収集した10ビットのディジタル値信号を工学単位に変換して図示したものである。これを $M=3$, $m=4$, $IEO=1$ のカスケード微分フィルタを用いて $\hat{U}_j^{(0)}, \hat{Y}_j^{(0)}, \hat{Y}_j^{(1)}$ を計算したものが夫々図 4.2.4 と図 4.2.5 の上段の図である。g_G, T_G の推定値 $g_G, \hat{T}_G$ を描ったのが，図 4.2.4 と図 4.2.5 の下段の図である。両方の推定値より

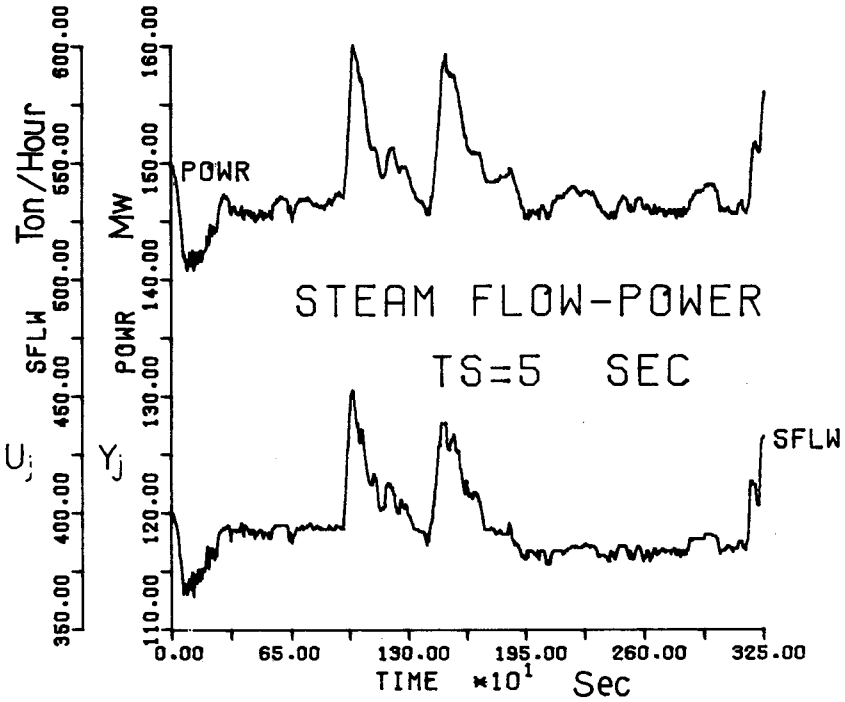
$$g_G \fallingdotseq 0.37\,MW/(Ton/Hour) \qquad (4.2.3)$$

$$T_G \fallingdotseq 8 \sim 12\ Sec$$

という結果が得られる。

ただ蒸気流量と発電機出力の絶対値が（ 4.2.1 ）に従っているとしたが，これは大分無理があったかもしれない。むしろ定格の近傍での平衡のまわりで（ 4.2.1 ）がなり立つとすべきものであったかもしれない。しかし（ 4.2.3 ）の値は発電所の過去の経験データと良く合う値であった。[40]

この手法ではサンプル周期 T_s がシステムの時定数 T_G と同程度であっても無理なく推定値を得ることができる。このような場合にパルス伝達関数を求めて逆算すると 3.2 で述べたように大きな誤差を生じてしまう。この点にもこの論文の提案手法の利点があると考えられる。



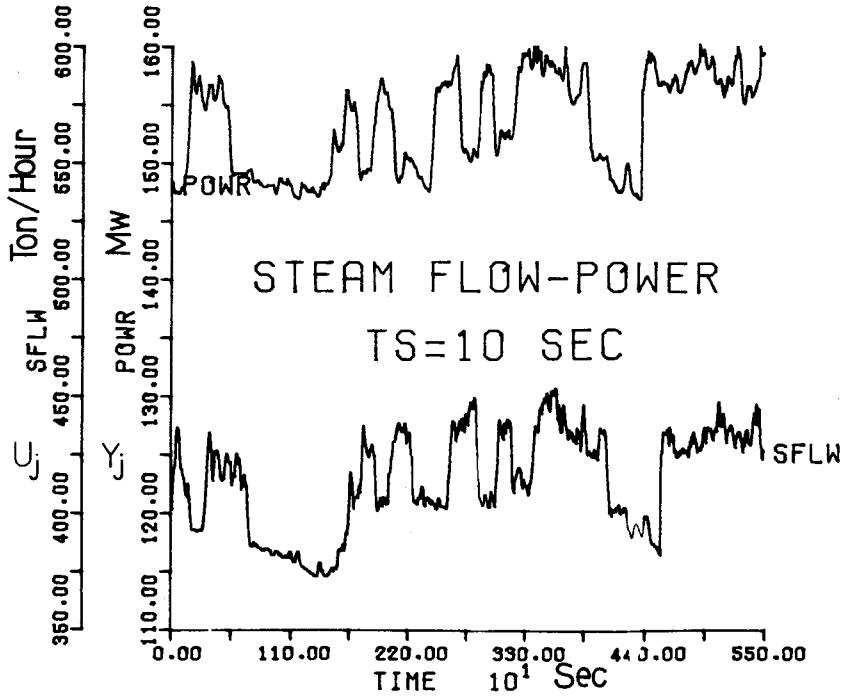
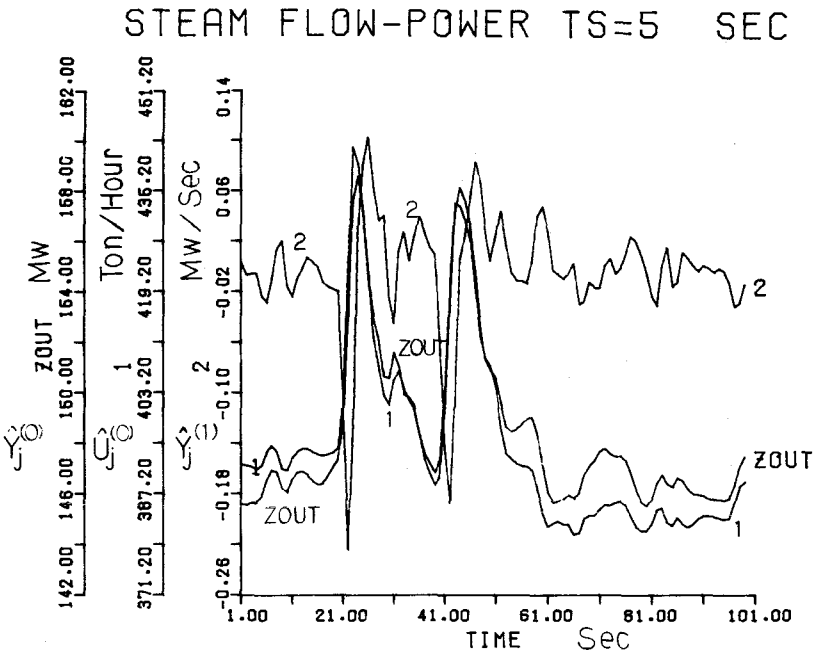


図 4. 2. 3　蒸気流量と発電機出力の計測値



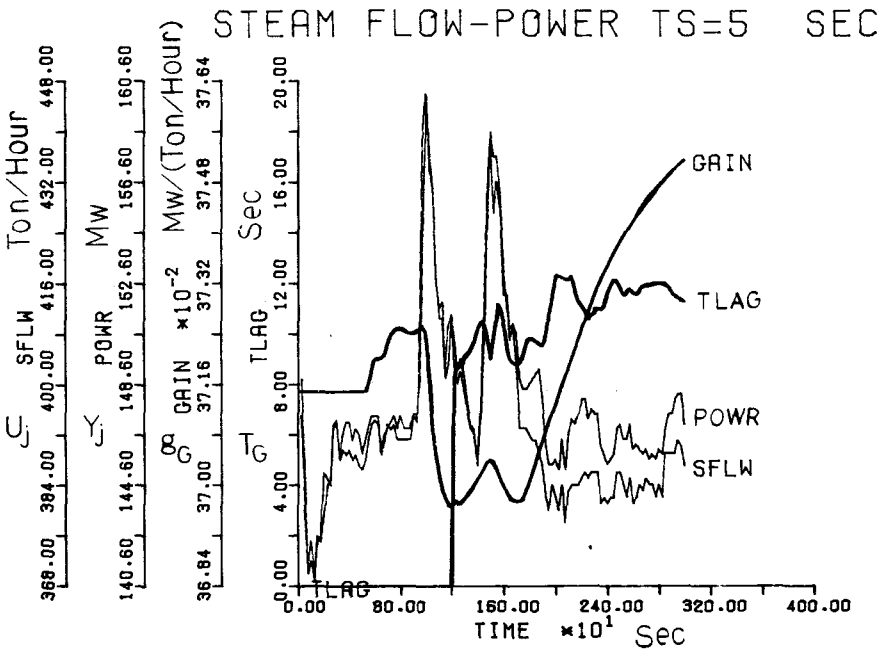
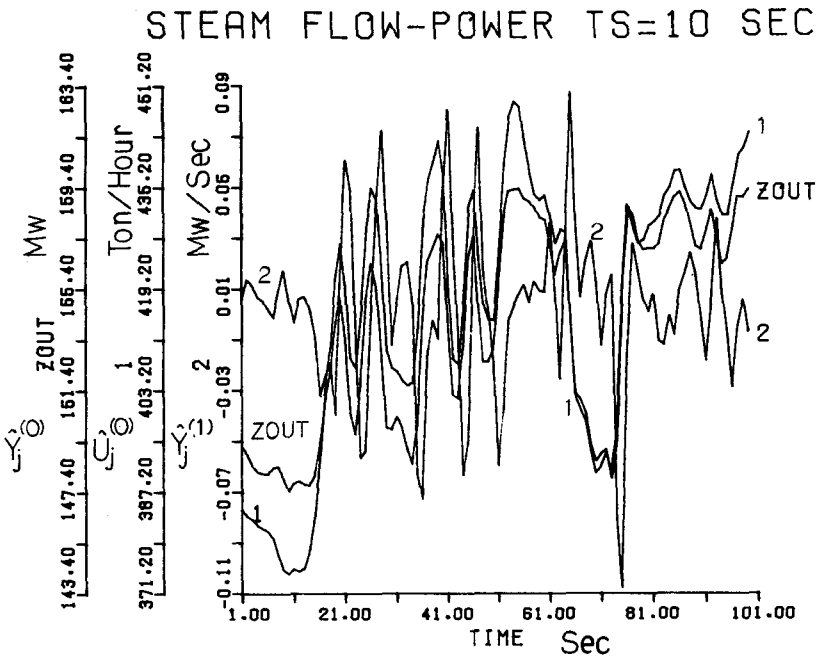


図 4. 2. 4　T_s＝5秒のときの微分信号と推定結果



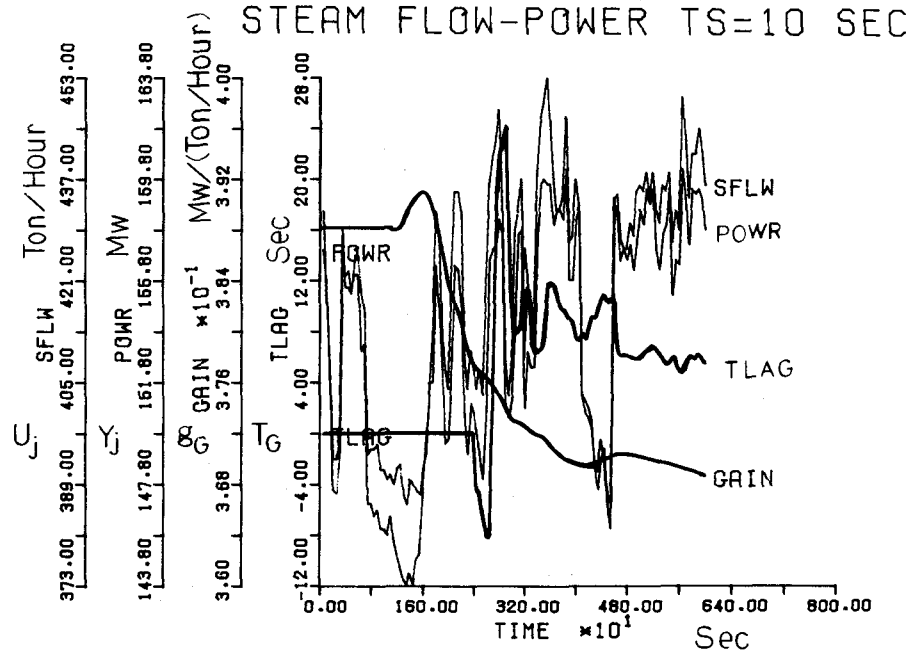


図 4. 2. 5　T_s＝１０秒のときの微分信号と推定結果

4.3 抄紙プラントでの例 (F3),(F4)

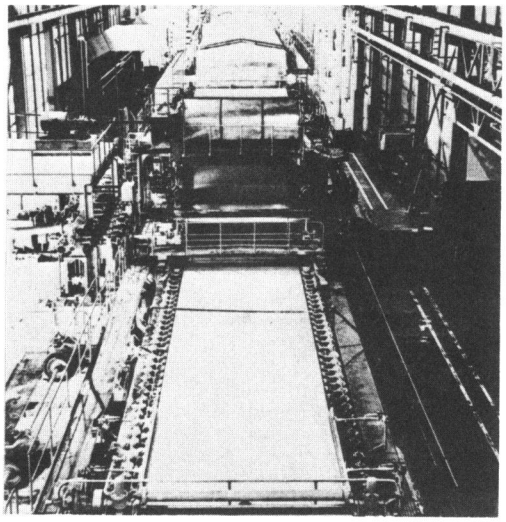
製紙工業における最終のプロセスが抄紙プロセスである。すなわちパルプより紙をつくる工程でありその意味で最も重要なものといえる。このためには抄紙機が用いられる。紙の質は単位面積当りのパルプ等の固形成分の重さ(坪量：*Basis Weight*)と，単位面積当りの水分の重量%(水分率：*Moisture*)により決定される。坪量は種口弁により,水分は長大な乾燥機の水蒸気の圧力により制御される。この系は1分前後の極めて長い無駄時間を持つことが特徴である。三菱製紙㈱八戸工場の抄紙機の制御用計算機*MELOM*350-30*F*を用いた坪量・水分率を中心にした*DDC*制御システムを作る際の前調査として坪量系，水分率系の同定を実施した。ここに記したものはそれを再編成したものである。

4.3.1 対象システム

図4.3.1は抄紙機の概念図を描いたものである。この図に沿ってその機能構造を簡単に説明しておく。白液タンクには白液と呼ばれるパルプと水の混合物が貯えられている。白液はポンプによりストックインレットに種口弁を通して供給される。ストックインレット内の白液はスライスギャップの間をくぐり抜けて回転するワイヤの上へ平らにのせられる。これが紙の原形となる。ワイヤの上を通った後蒸気乾燥機のローラの間を通って水分が蒸発させられる。ワイヤよりこぼれ落ちた白液は更にポンプによりストックインレットへ戻される。乾燥機は2ブロックありその中間で種々の薬液が塗工され，さらに乾燥されて最後に巻きとられてゆく。中間および最終出口には坪量と水分率を計測するためのBasis Weight Meter と水分率計が設置されている。そして坪量は種口弁の開度により,水分率は蒸気圧により制御される。従って坪量では種口弁の変化が最終出口での坪量の計測値に影響するまでに，走行する紙の移動する時間(走行時間)だけの無駄時間が生ずる。これは紙の速度等に影響され，紙の速度(抄紙速度)はたびたび変更されるのでこの無駄時間も変動している。水分率の方もドライヤが長い距離に分布しているので等価的にやはり大きな無駄時間を含むことになる。

4.3.2. 坪量系の同定

同定を実施する必要のあった時期は制御用計算機を設置する以前であったので，計算機を用いたデータ収集を実施することはできなかった。従ってここで使用したデータはアナログ式のペンレコーダにより描かれた図形を写真に撮り拡大しサンプリングしたものでありサンプル周期はT_s=0.026316 分である。坪量の操作は種口弁によって行なわれる。この弁は電動式の調整弁となっており常に一定の速度で開閉される。0～100%の開閉に約5.54 分を要するが，このデータを得た時のように約1%の変化に要する時間は約0.0923分でありT_sと殆んどかわらないのでほぼステップ状に値を変化させることができる。従って動特性の試験としてはステップ応答を求めることがもっとも容易なことであった。図4.3.2に与えた6つの例は表4.3.1のような条件



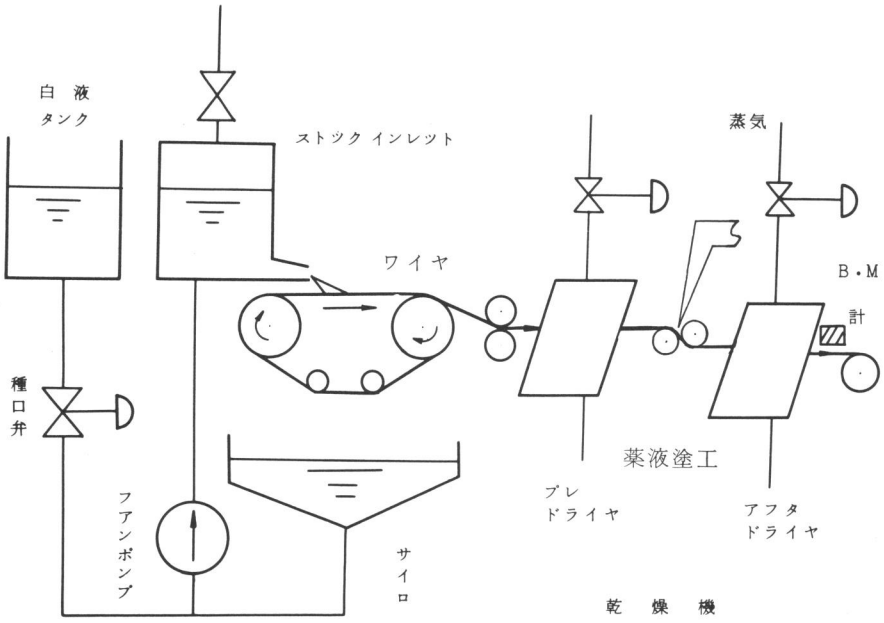


図 4.3.1　抄紙機の写真および概観図

で採取したものである。これらのステップ応答を眺めてみると先に説明したように明らかな無駄時間が含まれていることがわかる。従って線形近似する場合においても（3.7）に述べたような系として表現する必要があることがわかる。また第1次近似としては無駄時間を含む1次遅れとして表現するのが妥当であろう。そこで種口弁のバルブ開度の基準値よりの値を $u_{(t)}$%，坪量の基準値よりの値を $y_{(t)}$ g/cm^2 とする（基準値については表 4.3.1 を参照）とき

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{g \cdot e^{-T_D \cdot S}}{1+T_L S} \cdot \mathcal{L}\{u(t)\} \qquad (4.3.1)$$

で表わすことにする。[43] そこで u , y の観測サンプル値を u_j, y_j としたとき，これをカスケード微分フィルタ $M^{(h)}(Z)$ に通して得られた信号を $\hat{U}_j^{(k)}$ $\hat{Y}_j^{(k)}$ とすれば

$$\hat{Y}_j^{(0)} = g \cdot \hat{U}_{j-j_D}^{(0)} + T_L \hat{Y}_j^{(1)} \qquad (4.3.2)$$

ここで

$$j_D = [T_D / T_S] \qquad (4.3.3)$$

となる。

カスケード微分フィルタとしては $m=8$, $IEO=0$ の場合を用いた。図 4.3.3 は仮に $T_D=1$ 分として $\hat{Y}_j^{(0)}, U_{j-j_D}^{(0)}$, $-\hat{Y}_j^{(1)}$ を描いたものである。しかしこの図からわかるようにおよそ周期 $20 \cdot T_s$ 分の振動が坪量の変化の中に現われている。そこで，この超低域単一スペクトル成分を 3.8 に述べたようなノッチ・フィルタを前置して取り除くことにした。図 4.3.4 は 3.8 に述べたノッチ・フィルタで $L=10$ としたものを用いた場合の微分値を描いたものである。こうするとほぼ大きな雑音成分は取り除かれたと考えてもよい。このようなピーク状のスペクトルを持つ雑音はシステム内部より発生するものであろう。たとえば回転するワイヤの存在等はこの種の点状スペクトルの雑音発生に寄与していると思われる。

このような前置フィルタを用いたカスケード・ディジタル微分フィルタを用いて推定した $\hat{g}$, $\hat{T}_L$ を T_D を色々変えた場合の表 4.3.1 に示した。又図 4.3.5 には各ケースに対して $\hat{g}$, $\hat{T}_L$ を描いた。$\hat{g}$ は $\hat{T}_D$ の値にあまり影響されないが，$\hat{T}_L$ は $T_D+\hat{T}_L$ が一定になる傾向があるのがわかる。これは

$$\frac{g}{1+T_L \cdot S} e^{-(T_D+\triangle T_D)S} \fallingdotseq \frac{g}{1+(T_L+\triangle T_D)} e^{-T_D \cdot S} \qquad (4.3.4)$$

という関係のあることからも理解できる。

推定値に対する評価をしておく。この例ではステップ応答が容易に得られるので，フィールドにおいてはこのステップ応答にグラフ $g(1-e^{-t/T_L})$ をあてはめて，g と T_L を求めている。T_D の値は目視によって求めている。 図 4.3.5 ～ 4.3.6 にはこのようにしてフィールドで求めた値を併記したが，これはここで求めた値と良く一致している。

4.3.3 水分系の同定

図 4.3.7 は 抄紙機の系統図である。ドライヤーは 6 つの群に分れていて夫々別々に操作できるようになっている。1 ～ 3 群のドライヤーは前段ドライヤー，4 ～ 6 群のドライヤーは後段ドライヤーといわれ，その間に薬液を塗工する部分が設けられている。最終段である第

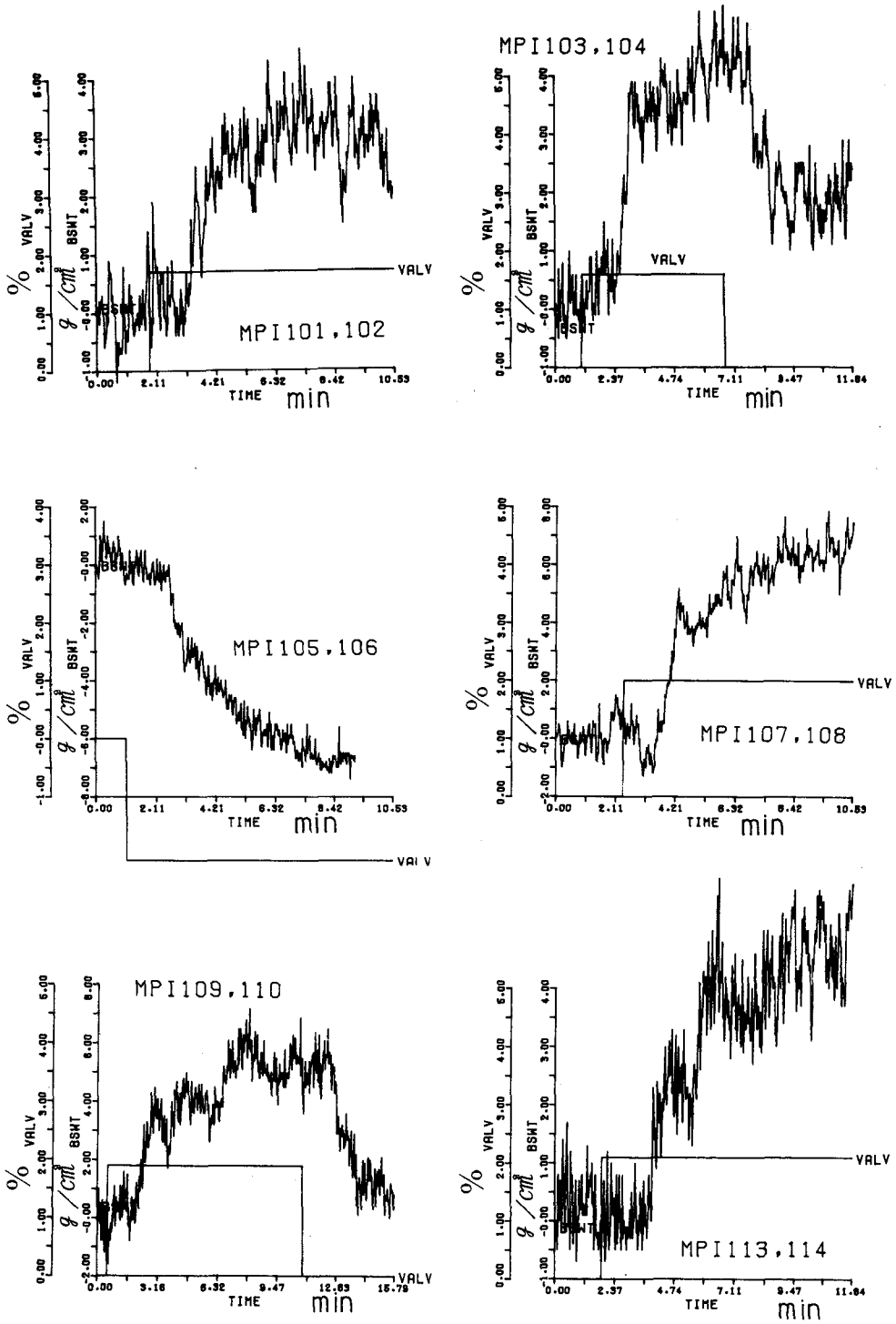


図 4. 3. 2　種口弁のステップ変化に対する秤量の変化

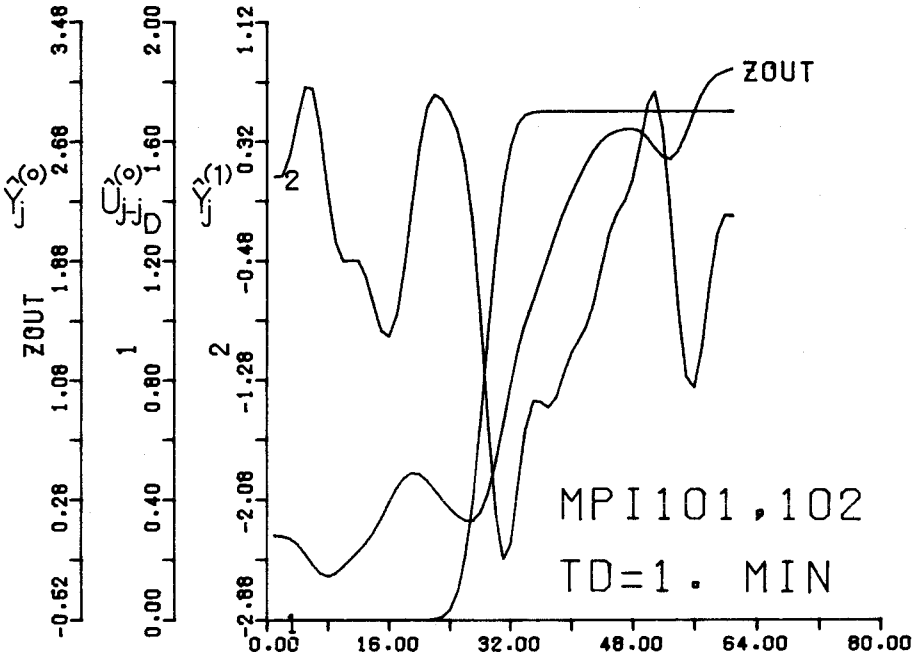


図 4. 3. 3　カスケード微分フィルタだけによる微分値

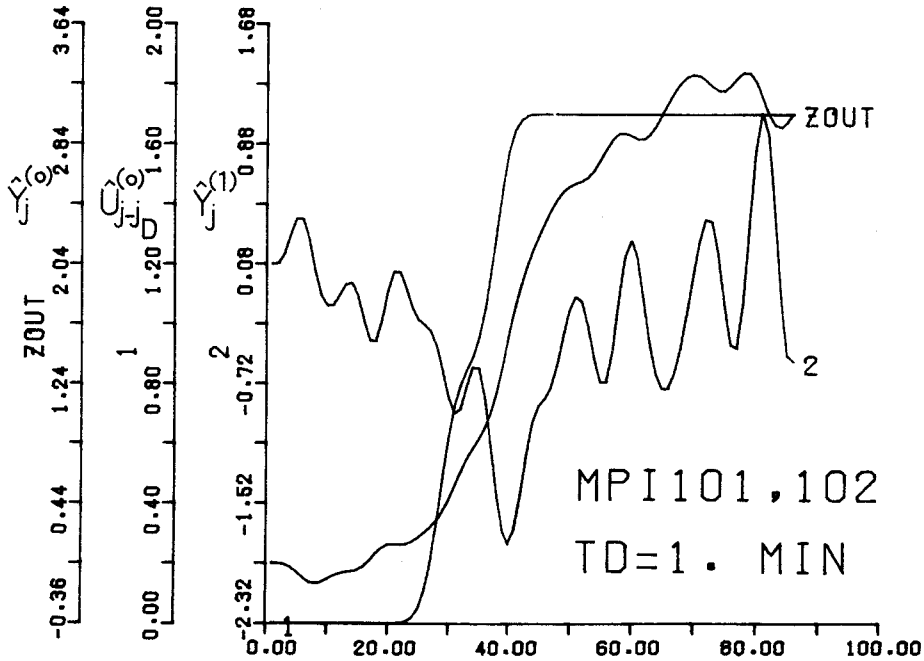


図 4. 3. 4　前置ノッチフィルタを併用したときの微分値

上段 $=\hat{g}$　　下段 $=\hat{T}_L$

ケース	$\hat{T}_D=$ 0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	坪量	速度	蒸気流量	弁開度
101	1.63	1.66	1.71	1.80	1.76	55.	580.	57.5	64.85
102	0.54	0.50	0.61	0.68	0.37				
103	2.71	2.67	2.62	2.49	2.50	55.	560.	55.0	63.4
104	1.34	1.16	1.00	0.51	0.47				
105	3.01	3.02	3.02	2.96	3.01	78.	610.	43.0	73.5
106	1.74	1.62	1.50	1.24	1.19				
107	2.81	2.89	2.92	2.90	2.89	101.	570.	48.0	77.75
108	0.94	0.95	0.88	0.58	0.55				
109	2.30	2.31	2.32	2.30	2.35	124.	460.	35.0	103.0
110	0.80	0.67	0.61	0.45	0.41				
113	1.55	1.64	1.71	1.70	1.77	124.	460.	37.0	79.5
114	0.64	0.75	0.85	0.96	0.76				
						g/cm^2	m/min	m^3/min	%

工学単位　$\hat{g}$: $g/cm^2.\%$　$\hat{T}_L$, $\hat{T}_D$: min

表 4. 3. 1　　推定値　T_D , g , T_L の値（坪量系）

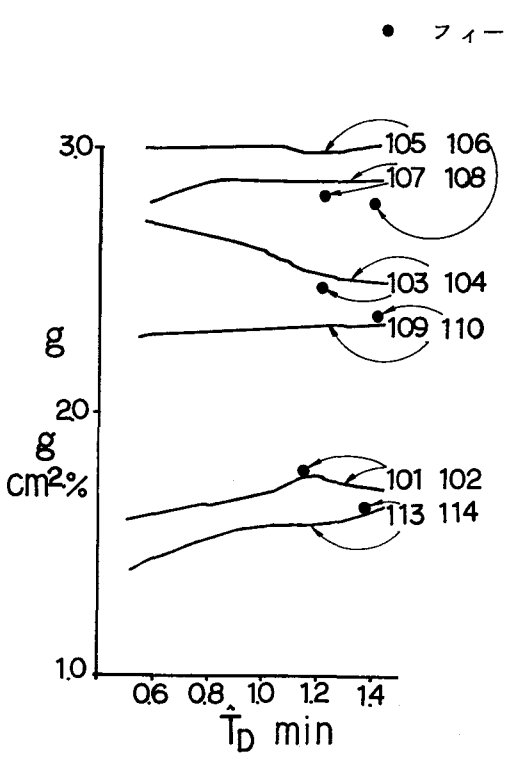


図 4. 3. 5　$\hat{g}$ に対する $\hat{T}_D$ の影響

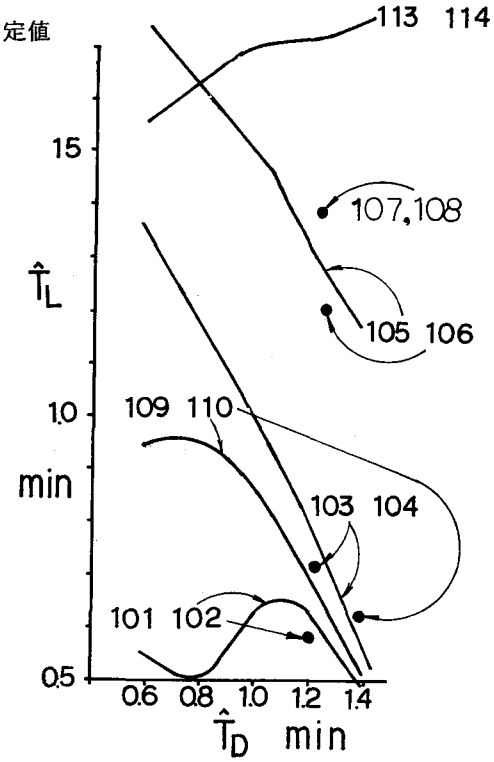


図 4. 3. 6　$\hat{T}_L$ に対する $\hat{T}_D$ の影響

6群ドライヤーの蒸気圧を調整して水分率を制御することができる。

あきらかなようにドライヤーは一種の熱交換器である。約3kg／cm^2 程度の圧力で150℃～220℃に過熱された蒸気はローラの内部を通って飽和蒸気となり潜熱を失って水分を増し，しめり蒸気，あるいは一部飽和にないしは冷却水となって排出する。この際紙の乾燥に用いられる熱量はほぼ潜熱が大部分を占めている。すなわちローラの中では蒸気は殆んど飽和状態にあると考えられる。ところでローラから紙に伝達される熱流の速度は，紙の温度，スピードと共に蒸気の温度等から決定される。蒸気が飽和状態にあると考えれば温度は飽和温度であり，それはそのときの蒸気の圧力（飽和蒸気圧）で決定される。すなわち水分率の制御は蒸気の圧力の調整により達成される。蒸気圧は弁の関度で調整され，この為の圧力制御系が付づいしている。

ここに与えた例は三菱製紙八戸工場において水分率の制御を DDC により達成することを実施するに際し6群蒸気圧・水分率系の動特性の把握が必要となり同定を行った時の結果を整理したものである。

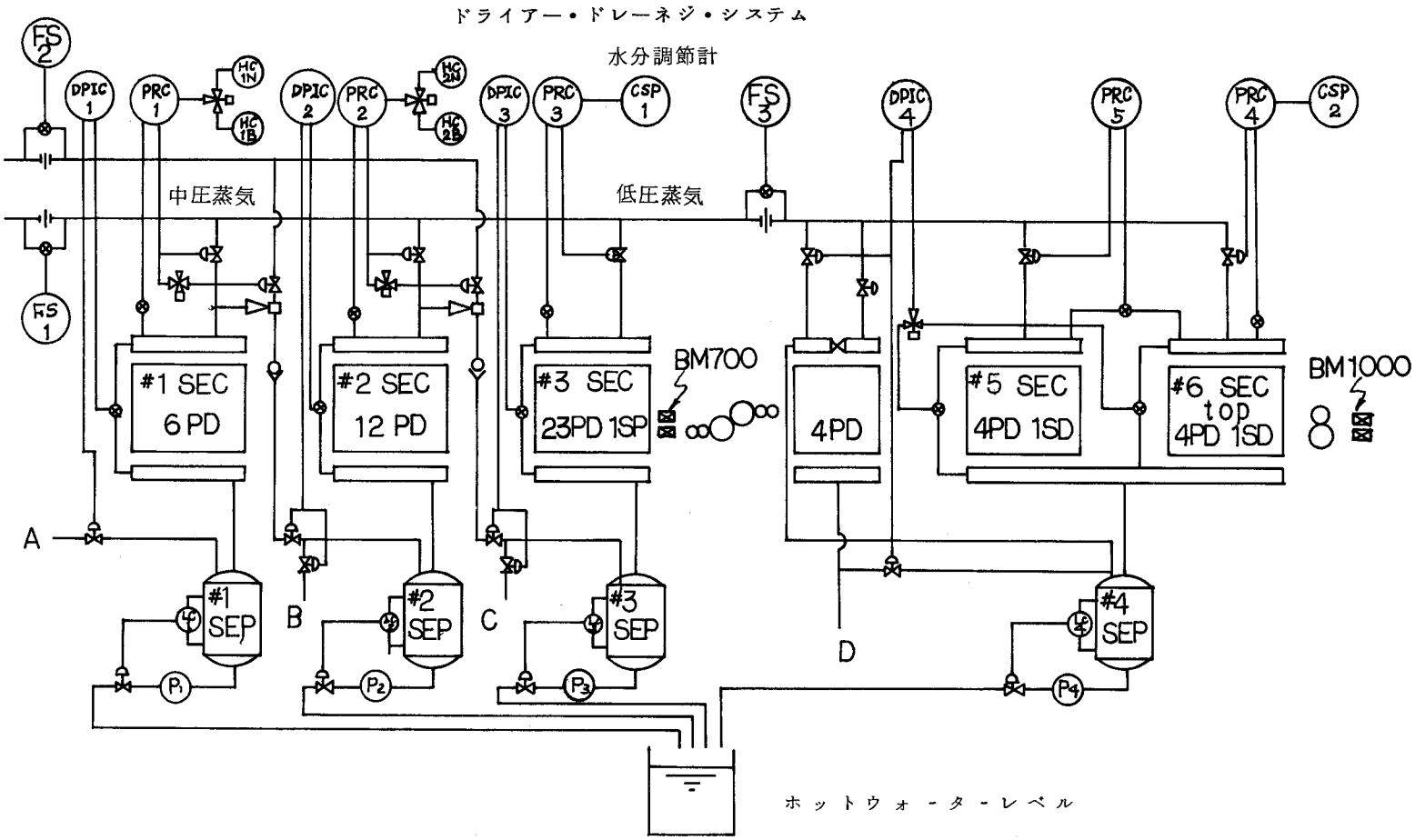
図4.3.8は1～5群の蒸気圧を一定に保ち，坪量は113g／cm^2 に設定し，紙の速度（抄速）は503m／Minとして6群蒸気圧を1.5kg／cm^2 から1.0kg／cm^2 に圧力の設定値を変化させた場合の蒸気圧および水分率の変化をペンレコーダにより記録したものの一部である。同定を実施したのは計算機導入前であったのでこのようなペンレコーダによる記録を写真により引伸ばし方眼紙に読み取りこれらのデータをディジタル化し同定を実施した。

蒸気圧を$u(t)$ 水分率を$y(t)$とすると

$$\{y(t)\} = \frac{g \cdot e^{-T_D \cdot S}}{1+T_L \cdot S} \cdot \iota \{u(t)\} \qquad (4.3.8)$$

が成立すると仮定する。

カスケード微分フィルタ$\mathcal{D}_M^{(k)}(Z)$ として　$m=20, IEO=O, M=1$ を選び，サンプル周期は $T_S=0.053min$ とした。表4.3.3には同定を実施した時の条件と推定結果を表にしたものである。図4.3.9は推定の過程を描いたものであり$\hat{u}_j, \hat{y}_j$ と共に推定値$\hat{g}, \hat{T}_L$を描いたもので表の11，12のケースで，夫々$\hat{T}_D=0.5, 0.7min$とした場合である。$\hat{T}_D$ をどこに選ぶかはむずかしい問題だが，$\hat{g}_J, \hat{T}_{L,J}$等の変化の少ない所を選ぶのが一つの方法である。図4.3.10 にはT_DとT_L の関係を描いてみたが，ほぼ各ケース直線にのり$\hat{T}_D$と$\hat{T}_L$ を明確に分離することの困難なことを示している。



低圧蒸気　3 Kg／cm　150℃
中圧蒸気　3 Kg／cm　220℃

図 4. 3. 7　水分系の系統図

$\hat{T}_L, \hat{T}_D, \hat{g}$ は抄速，坪量等により変化する。抄速，坪量，水分率の目標設定値は紙の等級，製造速度におけるもので，夫々$\hat{g}$の値は経験上の値（その値は製品を品質管理することで重要なので記録データの平衡点をもとに計算されている）とほぼ一致している。また$\hat{T}_L, \hat{T}_D$に関しては水分制御系（$MELCOM350-30F$によるDDC システム）に用いて良い結果を得ているが，絶対値の正しいと思われる値は不明である。

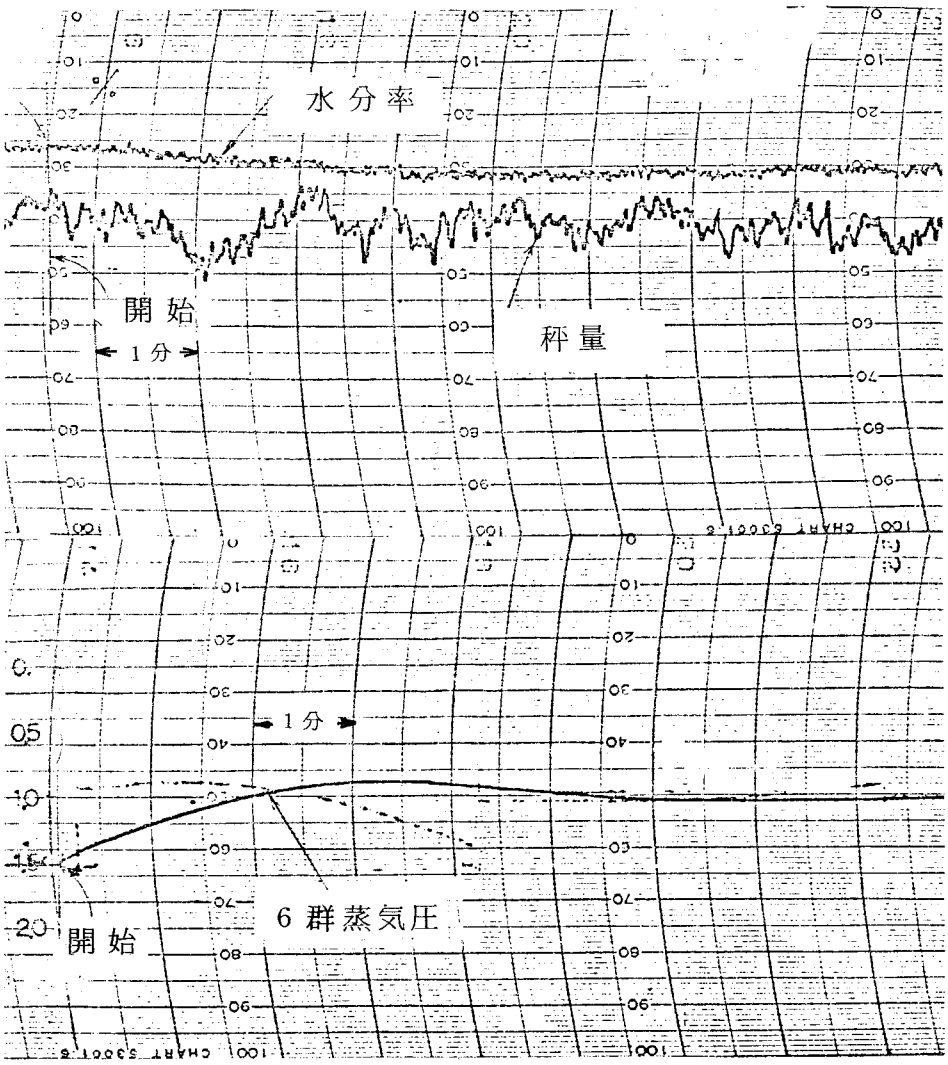
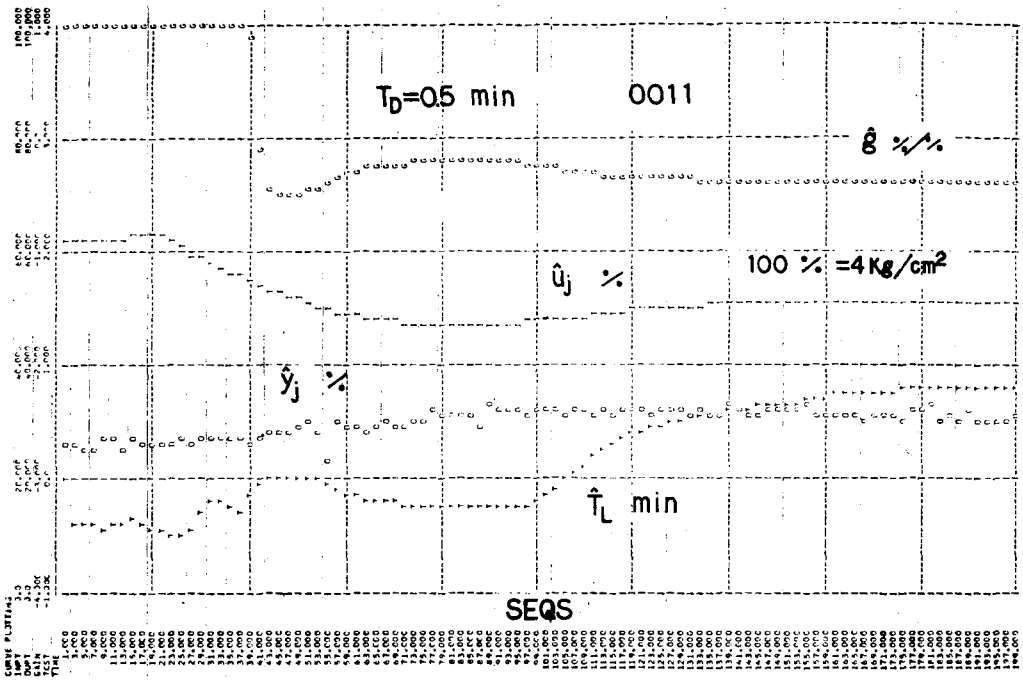


図 4. 3. 8　蒸気圧の変化に対する水分率の変化



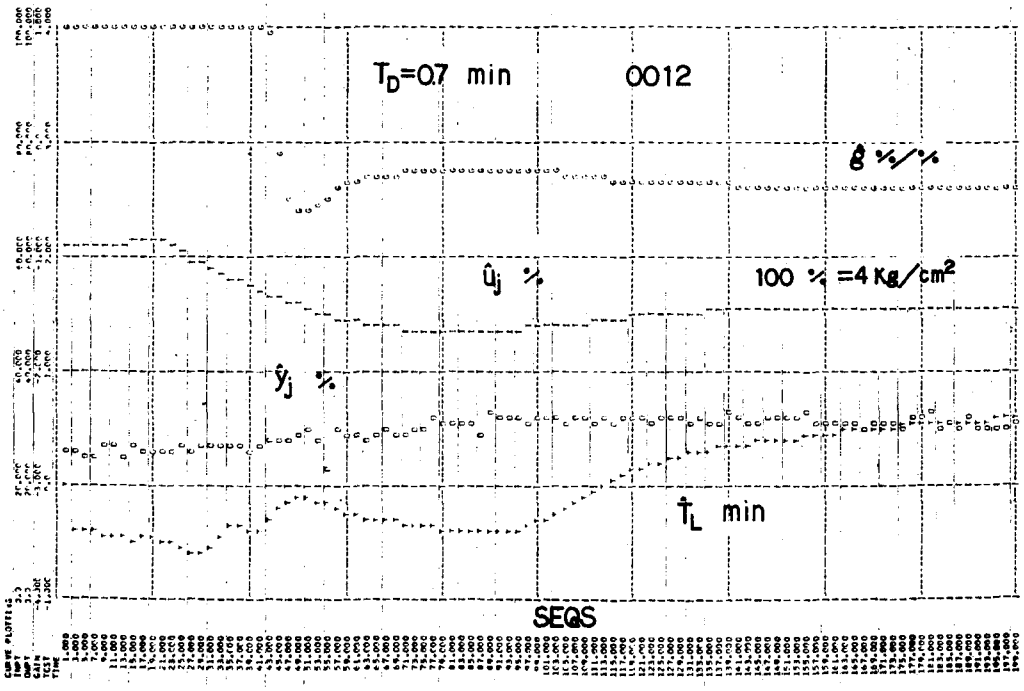


図 4. 3. 9　抄紙機水分系に対する $\hat{g}$, $\hat{T}_L$ の推定の過程

ケース	坪量	圧力		速度	$\hat{T}_D$	$\hat{g}$	$\hat{T}_L$
		前	後				
0009	113	1.5	1.0	503	0.0	0.4	1.28
0010	"	"	"	"	0.3	0.4	1.00
0011	"	"	"	"	0.5	0.4	0.80
0012	"	"	"	"	0.7	0.4	0.56
0013	101	2.0	1.0	585	0.0	0.36	1.71
0014	"	1.0	2.0	"	0.0	0.32	1.1
0015	"	"	"	"	0.3	0.36	0.95
0016	"	"	"	"	0.5	0.36	0.8
単位	$\frac{g}{cm^2}$	$\frac{Kg}{cm^2}$	$\frac{Kg}{cm^2}$	$\frac{m}{min}$	min	%/%	min

図 4. 3. 3　同定の条件と推定値（水分系）

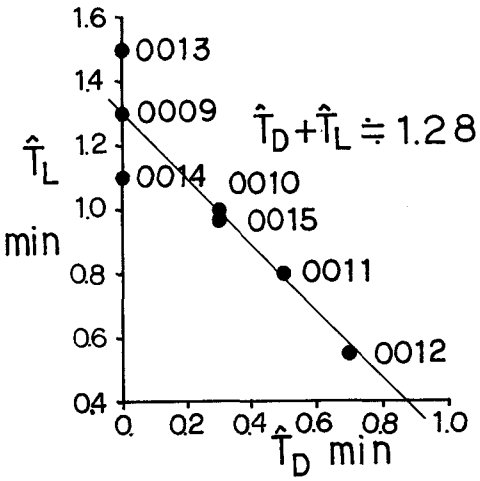


図 4. 3. 10　$\hat{T}_L$に対する$\hat{T}_D$の影響

4.4　圧延プラントでの例（E13），（F14）

連続形圧延機の中で比較的簡単な構造を持っているレバーシング・コールド・ミルの圧下影響係数の推定の結果を述べる。このシステムは2入力1出力系であり各入力の変化の出力への変化は相当に早く単なる2重回帰分析を行うような場合であるが，雑音の混入，計測システムの遅れ走行時間による無駄時間等から考えて著者の提案した同定法を0次系の場合として扱うと良い推定値が得られることを示す。

4.4.1　対象システム

図4.4.1はレバーシング・コールド・ミルの主要部を一つの固定した側面から眺めたときの概観図であり，左とか右とかはその点に立って（図上）いうことにする。一枚の長い板片（**ストリップ**）は始め左側（又は右側）より右側に巻き取られ途中でミルにより圧延される。巻き取りが終了すると今度は逆に右側より左側に巻き取られつつ圧延される。このようにして何回か往復させることにより所定の厚さに圧延するわけである。

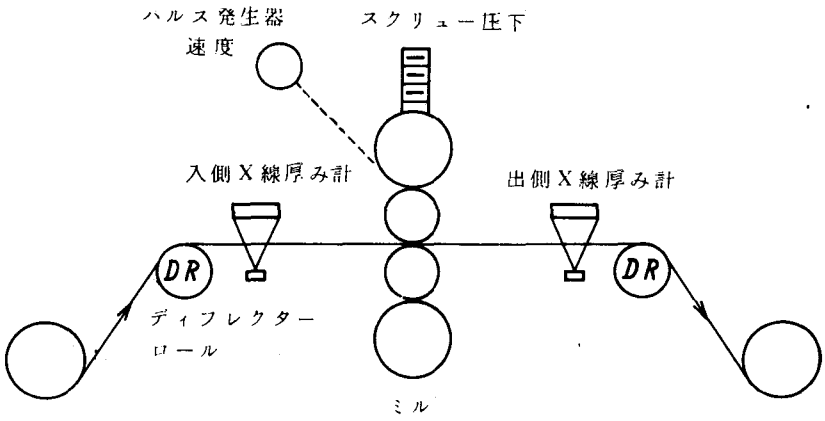


図4.4.1　レバーシング・コールド・ミルの概観図

左側より右側にストリップが移動しているときは左側を**入側**（$Entry$），右側を**出側**（$Delivery$）と呼ぶ。従ってストリップの走向方向により入側，出側は交互に入れ替ることになる。

又ミルの回転速度が計測でき，これによりミルを通過するストリップの速度を求めることが可能である。又右側左側共にミルより一定距離れた点に**X線厚み計**が設置され，板厚を計測することができる。これらの厚み計はストリップの走行方向により入側，出側と形容される。又ミルのスクリュの圧下位置を計測することができる。

4.4.2 レバーシング・コールド・ミルの数学モデル

図4.4.2は図4.4.1に示した各装置のモデルを左側より右側にストリップが走行している状態を示したものである。

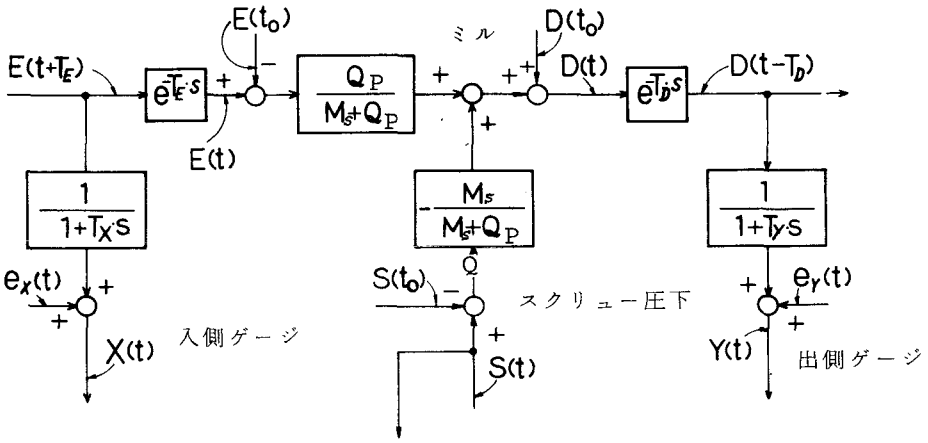


図4.4.2 レバーシング・コールド・ミルのブロック図

この図の中で用いられている記号は次のようになっている。ただし他の章節で既に定義したものと重複するものもあるが，ここでの記号はこのレバーシング・コールド・ミルに関係する部分にのみ使用するものとする。

Q_P	：	板片の塑性係数	Ton/μ
M_S	：	ミル・スプリング定数	Ton/μ
T_E	：	入側ストリップ走行時間（X線厚み計よりミルまでの時間）	$msec$
T_D	：	出側ストリップ走行時間	$msec$
T_X	：	入側X線厚み計時定数	$msec$
T_Y	：	出側X線厚み計時定数	$msec$
L_G	：	下側圧延面（図4.4.3参照）とスクリュ原点の間隔	μ
l_G	：	無負荷時のスプリングの長さ	μ
$E(t)$	：	ミル入側ストリップの厚さ	μ
$D(t)$	：	ミル出側ストリップの厚さ	μ
$S(t)$	：	圧下位置（スクリュー位置）	μ

$e_X(t)$ ： 入側X線厚み計観測雑音 μ

$e_Y(t)$ ： 出側X線厚み計観測雑音 μ

$X(t)$ ： 入側X線厚み計観測値 μ

$Y(t)$ ： 出側X線厚み計観測値 μ

$F(t)$ ： 圧　延　力 Ton

このミルの数学モデルを考えるために図4.4.3のような2種類のバネによる模形を考える。すなわち一つはミル自身であり，もう一は板片である。ミルは上下2段の圧延ローラとスプリングにより構成されているが，理解を容易にするため図4.4.3では下端を硬く変形しない平面と考えている。

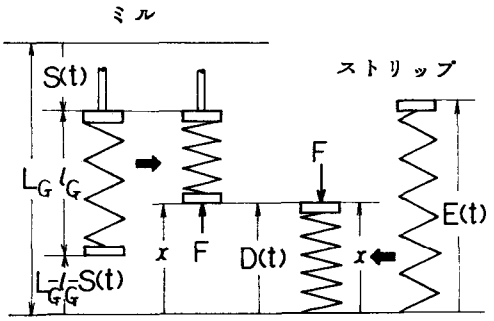


図4.4.3　二つのスプリングによるミルの模形

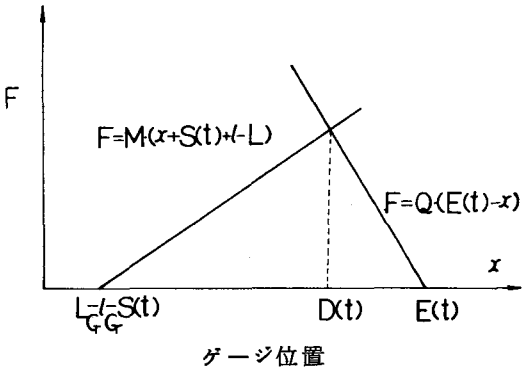


図4.4.4　$E(t)$, $D(t)$, $S(t)$の間の関係

ミル・スプリングの位置$S(t)$が定まったとする。無負荷時の圧延面とスプリングの位置の間隔をl_Gとし，$S(t)$の測定原点と下面との間隔をL_Gとする。従って無負荷時の圧延面の間隔は$L_G-l_G-S(t)$となる。いま圧延中の板の厚さがxであれば$Hooke$の法則から

$$F(t)=M_s\cdot\{x-(L_G-l_G-S(t))\} \qquad (4.4.1)$$

と表わされる。

一方板そのものも塑性変形を受けるわけだが，変形の度合は圧延力に比例すると考える。$E(t)$の板が圧延面でxになったとすれば圧延力は

$$F(t)=Q_P\cdot\{E(t)-x\} \qquad (4.4.2)$$

となる。(4.4.1)と(4.4.2)で表わされる力が釣合った状態で圧延が行なわれ　このときのxの値が出側板厚$D(t)$となる。

図 4. 4. 4 はそのときの関係を図示したものである。(4. 4. 1) と (4. 4. 2) より x を消去して

$$D(t)=\frac{Q_P}{M_S+Q_P}\cdot E(t)-\frac{M_S}{M_S+Q_P}\cdot S(t)\ \frac{M_S}{M_S+Q_P}\cdot(L_G-l_G) \qquad (4.4.3)$$

と表わされる。そこで

$$dD=\left(\frac{\partial D}{\partial E}\right)_S \alpha E+\left(\frac{\partial D}{\partial S}\right)_E \alpha S \qquad (4.4.4)$$

と書けることがわかる。

$$A_o=\left(\frac{\partial D}{\partial E}\right)_S,\quad B_o=\left(\frac{\partial D}{\partial S}\right)_E \qquad (4.4.5)$$

とすると (4. 4. 4) より

$$\alpha D=A_o\cdot dE+B_o\cdot dS \qquad (4.4.6)$$

となる。図 4. 4. 3 で考えたモデルが正しければ

$$A_o=\frac{Q_P}{M_s+Q_P},\quad B_o=-\frac{M_S}{M_s+Q_P} \qquad (4.4.7)$$

となり

$$A_o-B_o=1 \qquad (4.4.8)$$

となる。[44] $-B_o$ は**圧下影響係数**という。

4. 4. 3 観測システムの補償

図 4. 4. 2 からわかるように $E(t)$ と $D(t)$ を直接観測することはできない。すなわち X 線厚み計よりの観測値 $X(t)$, $Y(t)$ は夫々

$$\mathcal{L}\{X(t)\}=\frac{1}{1+T_X\cdot S}\cdot e^{T_E\cdot S}\cdot\mathcal{L}\{E(t)\}+\mathcal{L}\{e_X(t)\} \qquad (4.4.9)$$

$$\mathcal{L}\{Y(t)\}=\frac{1}{1+T_Y\cdot S}\cdot e^{-T_D S}\cdot\mathcal{L}\{D(t)\}+\mathcal{L}\{e_Y(t)\} \qquad (4.4.10)$$

で表わされる。T_X と T_Y は 200 ～ 300 $msec$, T_E と T_D は 200 $msec$ 前後であるから無駄時間および一次遅れの効果を無視することはできない。

また得られるのは $X(t)$ と $Y(t)$ のサンプル周期 T_s (= 10 $msec$ 程度) のサンプル値 X_j, Y_j である。そこで 3. 1 で考えたように前置フィルタを伴うカスケード微分フィルタ $\widehat{\mathcal{D}}_M^{(k)}(Z)$ を考える。前置フィルタとしては (3. 8. 3) で与えられる狭帯域のフィルタを選んだ。

X_j, Y_j, E_j, D_j, $e_{x,j}$, $e_{y,j}$ を $\widehat{\mathcal{D}}_M^{(k)}(z)$ に通した信号を $\widehat{X}_j^{(k)}$, $\widehat{Y}_j^{(k)}$, $\widehat{E}_j^{(k)}$, $\widehat{D}_j^{(k)}$, $\widehat{e}_{x,j}^{(k)}$

$\hat{e}_{y,j}^{(k)}$等とすると3.3.1で述べたと同じ理由で

$$\hat{E}_j^{(0)} = \hat{X}_{j-j_E}^{(0)} + T_X \cdot \hat{X}_{j-j_E}^{(1)} - (\hat{e}_{x,j-j_E}^{(0)} + T_X \cdot \hat{e}_{X,j-j_E}) \qquad (4.4.11)$$

(4.4.11)の雑音による項は前の項に比べて無視できるようになるので

$$\hat{E}_j^{(0)} \fallingdotseq \hat{X}_{j-j_E}^{(0)} + T_X \cdot \hat{X}_{j-j_E}^{(1)} \qquad (4.4.12)$$

同じようにして

$$\hat{D}_j^{(0)} \fallingdotseq \hat{Y}_{j+j_D}^{(0)} + T_Y \cdot \hat{Y}_{j+j_D}^{(1)} \qquad (4.4.13)$$

となる。ここで

$$j_E = [T_E / T_s],\ j_D = [T_D / T_s] \qquad (4.4.14)$$

である。

S_j を$\hat{\mathcal{D}}_M^{(0)}(z)$に通した信号を$\hat{S}_j^{(0)}$とすると(4.4.3)より

$$\hat{D}_j^{(0)} - \hat{D}_{j_o}^{(0)} \fallingdotseq A \cdot (\hat{E}_{j_o}^{(0)} - \hat{E}_{j_o}^{(0)})\ \ B \cdot (\hat{S}_j^{(0)} - \hat{S}_{j_o}^{(0)}) \qquad (4.4.15)$$

となる。j_o は$j \geqq j_o$ なる時刻で，A，Bは定数である。

4.4.4 A，Bの推定

(4.4.15)より

$$C_J = \sum_{j=j_o}^{J} \{(\hat{D}_j^{(0)} - \hat{D}_{j_o}^{(0)}) - A \cdot (\hat{E}_j^{(0)} - \hat{E}_{j_o}^{(0)}) - B \cdot (\hat{S}_j^{(0)} - \hat{S}_{j_o}^{(0)})\}^2 \qquad (4.4.16)$$

を最小にするA，Bを$\hat{A}_J$，$\hat{B}_J$とする。

4.4.5 硬さの変化

(4.4.15)は時刻j_o とjで板の硬さ(Q_Sの値)が一定であるという条件で求めたものである。j_oとjでの板の硬さが変われば(4.4.15)は当然成立しなくなる。

j_oからjまでの硬さが一定で$j+1$時間で硬さが変われば

$$V_{j+1} = \hat{D}_{j+1}^{(0)} - \hat{D}_{j_o}^{(0)} - \{\hat{A}_j \cdot (\hat{E}_{j+1}^{(0)} - \hat{E}_{j_o}^{(0)}) + \hat{B}_j \cdot (\hat{S}_{j+1}^{(0)} - \hat{S}_{j_o}^{(0)})\} \qquad (4.4.17)$$

の値は大きく変化する(イノベーション)。

$$S_{V,J} = \sum_{j=j_o+1}^{J} V_j \qquad (4.4.18)$$

が大きく0からずれたならば，j_o を変更すれば良い。

又コントローラが挿入されている場合を考える。すなわち

$$\mathcal{L}\{S(t)\}=\alpha\cdot\mathcal{L}\{X(t)-\overline{\overline{X}}\}+(\beta+\frac{\gamma}{S})\cdot\mathcal{L}\{Y(t)-\overline{\overline{Y}}\} \qquad (4.4.19)$$

ここで（4.4.19）の第1項はフィード・フォワード，第2項$P+I$フィード・バック成分であり，$\overline{\overline{X}}$，$\overline{\overline{Y}}$は入側，出側板厚の設定値である。板の厚さは入側，出側共に平均的には$\overline{\overline{X}}$，$\overline{\overline{Y}}$のまわりを変化している。もし硬さが変われば板厚を平均的に設定値より変化させないためには$S(t)$の平均値が大きく変化しなければならない。これはフィードバックのI成分の存在により達成される。そこで逆に$S(t)$の大きなずれを検出して硬さの変化を見出すことができる。

4.4.6 同定の結果

ここで与えた例は新日本製鉄㈱八幡製鉄所第3冷延工場のレバーシング・コールド・ミルにおける結果である。ミルモータのスピード，右側板厚，左側板厚，圧下位置をM_i，R_i，L_i，P_iと名付けておく。ただしiは1～6でデータの番号である。これらのデータは最初アナログ式のデータレコーダに記録して，これをサンプル周期$T_s=10msec$で継続して4,096点（約41秒間）を符号付10ビットのディジタル値信号（CV：$Centi\ Volt$）に変換し磁気テープへ記録した。これら4つの信号の同時性はほぼ完全と考えられる。表4.4.1は各データの特性をまとめたものである。これらのデータは表4.4.1中の変換式により所定の工学単位に変換される。図4.4.5にはM_3，R_3，L_3，P_3，M_6，R_6，L_6，P_6について描いた。又図4.4.6には図4.4.5のパワースペクトルをdB単位で描いた。このスペクトルから判断して$L=16$，$m=4$，$IEO=1$　$M=3$に対する$\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$が適当であると考えた。

4.4.3の議論ではT_E, T_Dの具体的求め方は与えていなかった。そこで

d_T：X線厚み計とミル中心までの距離　mm

V_E：入側板のスピード　mm／msec

V_D：出側板のスピード　mm／msec

V_M：ミルのスピード　mm／msec

$\rho \fallingdotseq V_D/V_M$：先進係数

とすると

$$T_E=\frac{d_T}{V_E},\quad T_D=\frac{d_T}{V_D} \qquad (4.4.20)$$

ここで

$$V_E=\frac{\overline{\overline{Y}}}{\overline{\overline{X}}}\cdot\rho\cdot V_M,\quad V_D=\rho\cdot V_M \qquad (4.4.21)$$

である。この装置の場合

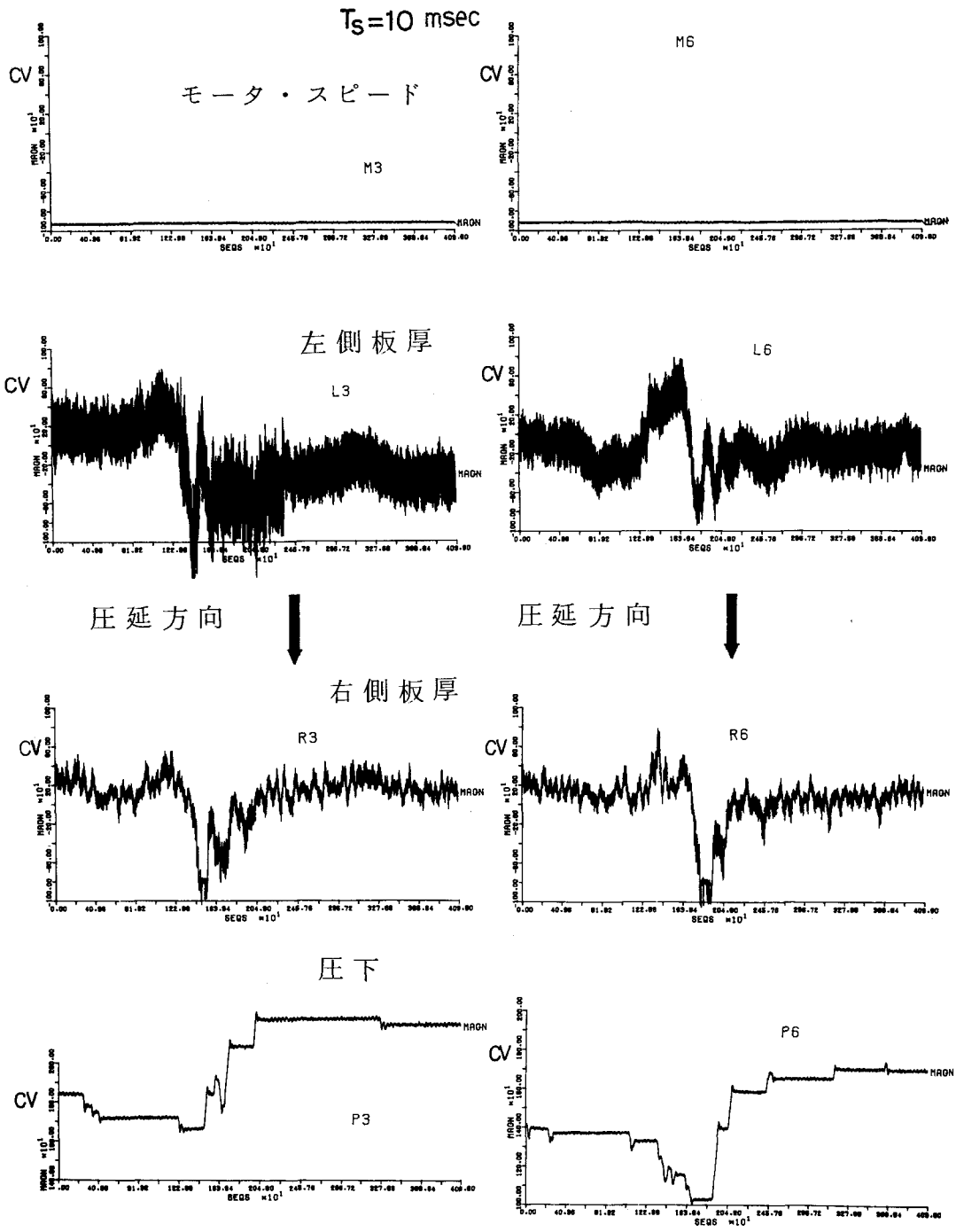


図 4. 4. 5　レバーシング・コールド・ミルよりの計測値

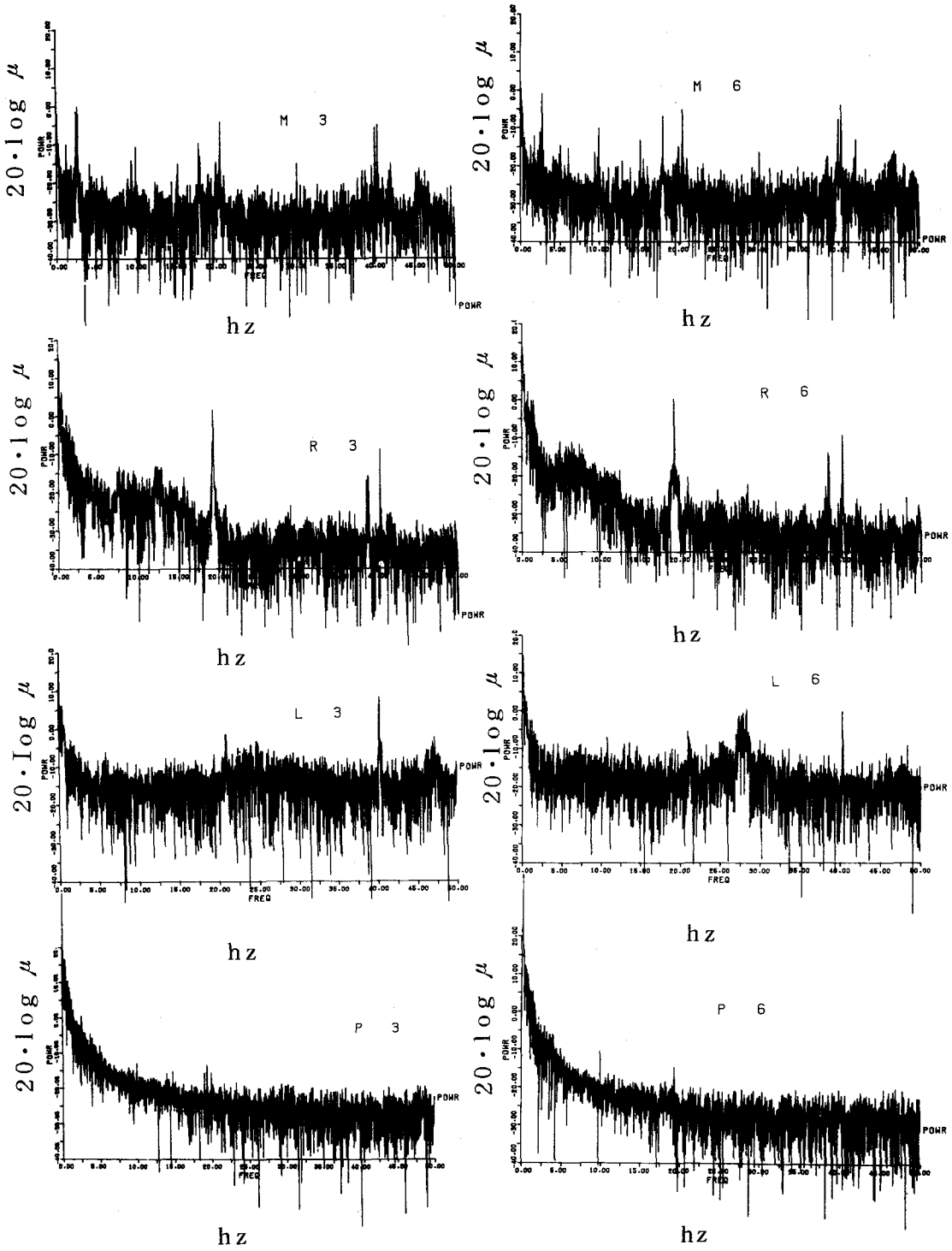
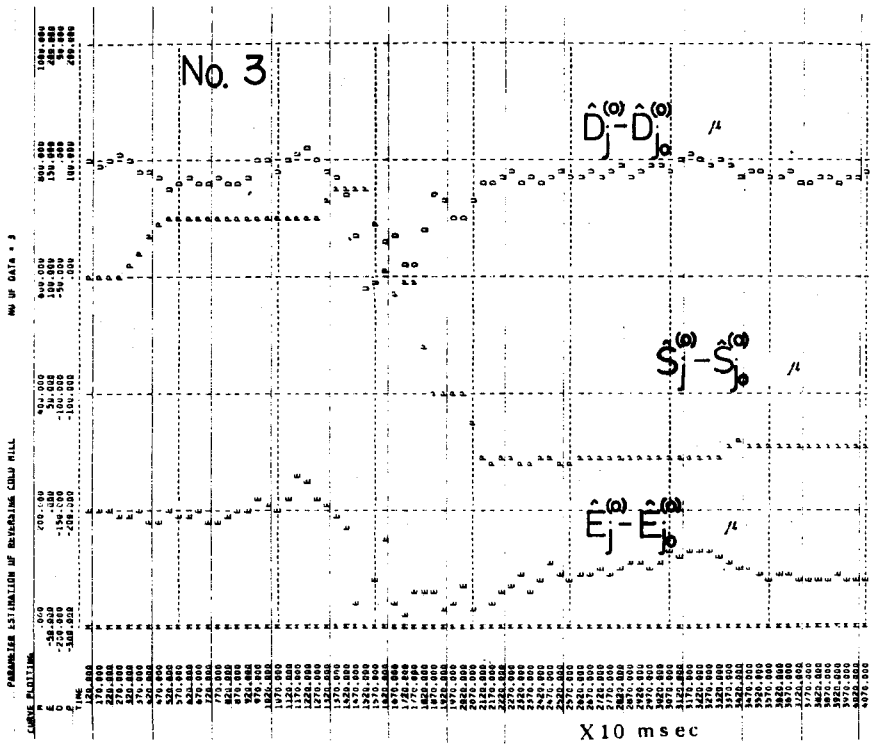


図 4. 4. 6　レバーシング・コールド・ミルよりの計測値のパワースペクトル



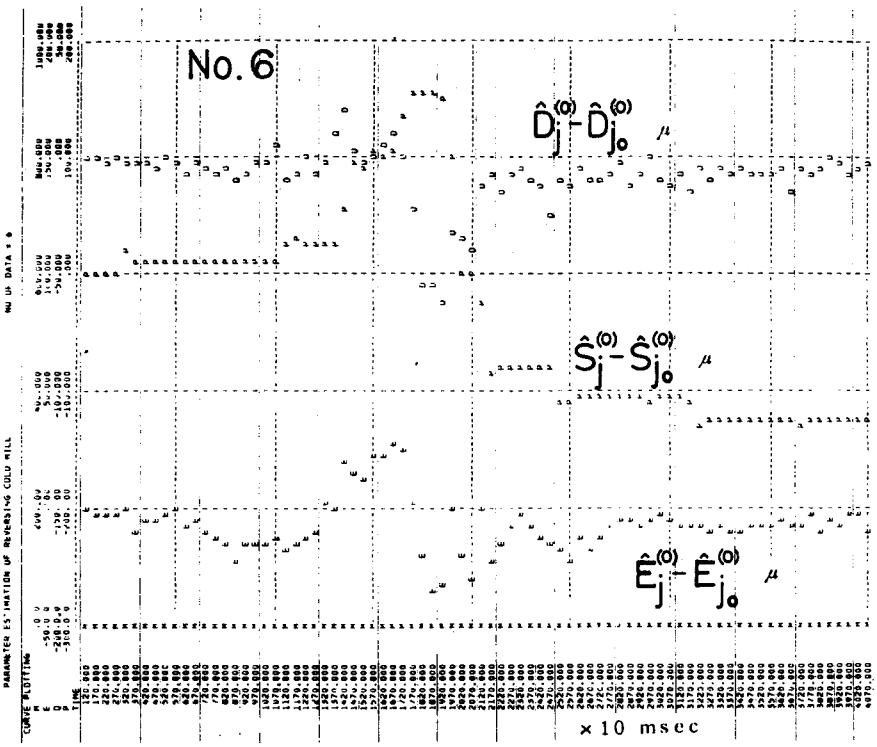


図 4. 4. 7　フィルタにより補償したデータ

$$d_T = 1{,}663\ mm$$

ρは状況により変化するが

$$\rho = 1.1$$

とした。また右側X線厚み計の時定数は200$msec$，左側は300$msec$であった。

図4.4.7は3番および6番目のデータにつき$\hat{E}_j^{(0)} - \hat{E}_{j_0}^{(0)}$, $\hat{S}_j^{(0)} - \hat{S}_{j_0}^{(0)}$, $\hat{D}_j^{(0)} - \hat{D}_{j_0}^{(0)}$を描いたものである。図4.4.8～図4.4.10には$\hat{A}_J$, $\hat{B}_J$およびその標準偏差を描いた。

3番目のデータはミル圧下位置を手動で動かした場合であり，板は左より右へ走っている。この例では推定開始後30秒目で，

$$\hat{A}_J \fallingdotseq 0.865,\ \hat{B}_J \fallingdotseq -0.13 \qquad (4.4.22)$$

であり

$$\hat{A}_J = \hat{B}_J = 0.995 \fallingdotseq 1 \qquad (4.4.23)$$

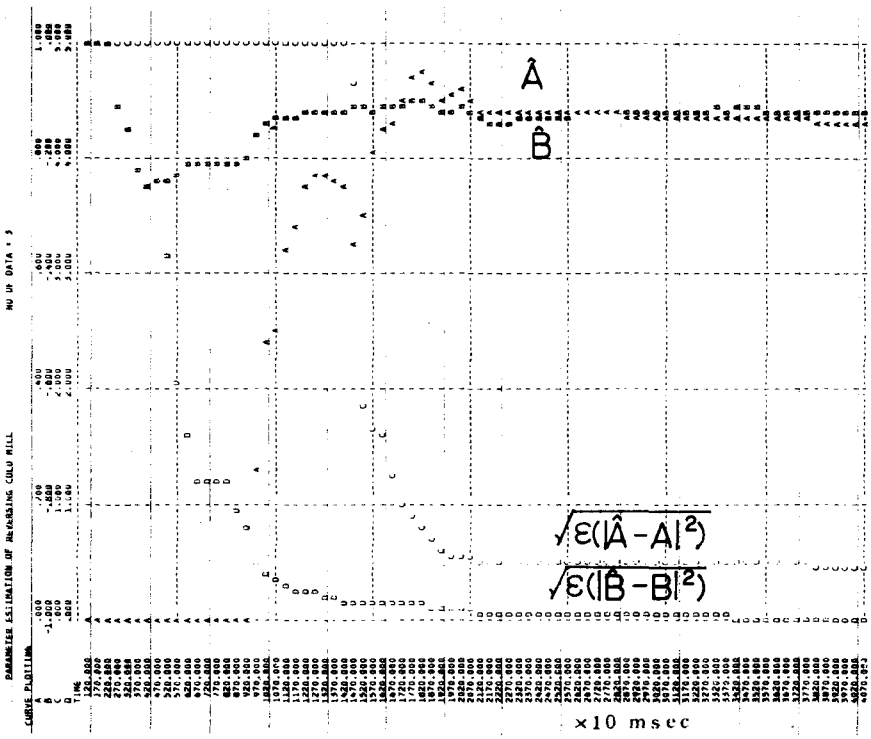


図4.4.8　3番データの場合の推定値

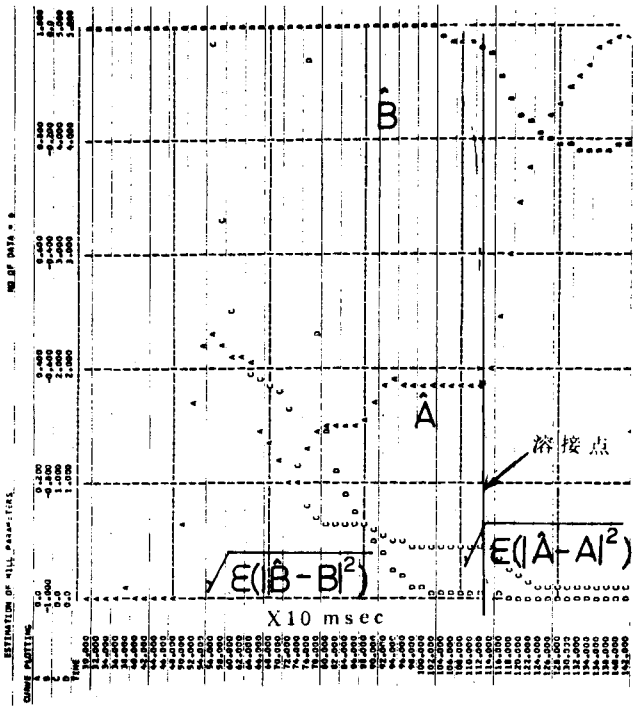


図 4. 4. 9　6番データの場合の推定値（前半）

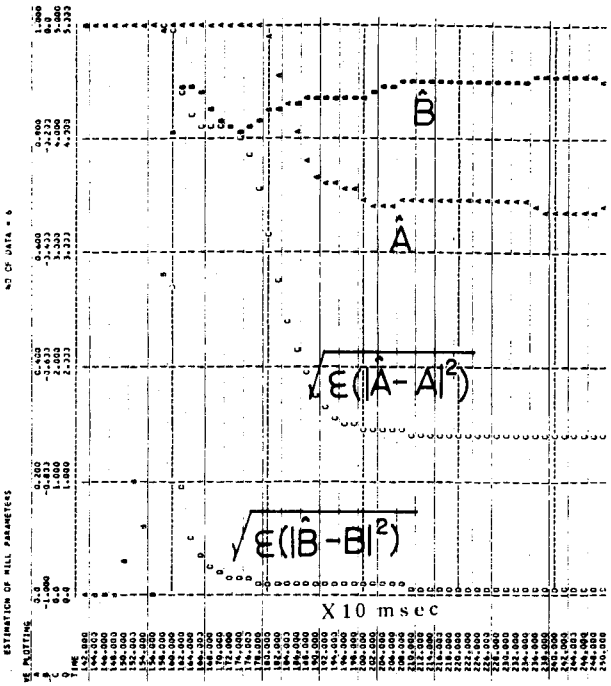


図 4. 4. 1 0　6番データの場合の推定値（後半）

となる。図4.4.8にはA，Bの推定値とその標本標準偏差を描いたものである。これをみると20秒以後推定値は落ちついてくることを示している。また4.4.2で述べた2つの線形スプリングによるモデルの正しさをみる目やすとして（4.4.8）の成立のいかんを考えることができるが，この例では（4.4.23）の成立することから，モデルが良く適合していることがわかる。

6番目のデータは計測開始後18秒後程の所で溶接点にでくわしている。すなわちこの点で製造期日の異なる2種のストリップを溶接してあり塑性係数のちがいで板の硬さが大きく変化する。6番目のデータは$P+I$制御系が働いている例でストリップは左側より左側より右側へ走っている。図4.4.5の計測データをみると入側の板厚は平均して変化していないにもかかわらず，圧下位置は大きく変化している。これは先に述べたように硬さの大きな変化を表わして事実と良く一致する。溶接点の前では

$$\hat{A}_J = 0.37 \quad , \quad \hat{B}_J = -0.03 \qquad (4.4.24)$$

溶接点の後では

$$\hat{A}_J = 0.71 \quad , \quad \hat{B}_J = -0.101 \qquad (4.4.25)$$

であるが，この場合では$\hat{A}_J - \hat{B}_J = 0.811$である。他のデータに対する結果は表4.4.1に与えた。この表をみると，$\hat{A}_J - \hat{B}_J$の値が1より大分小のもの，5番データの$\hat{A}_J$のように1を越えるようなものもあるが，これらは溶接点の存在，硬さの急変などで，特に塑性係数の線形性が成立しなくなる為と考えられ，この場合には4.4.5で述べたように基準点を変化させる必要がある。圧延制御に必要な$\hat{B}$の値については，ここで得られた値は実際の圧延時に経験により設定している値にほぼ近いものである。しかし実際には$\hat{B}$の値は正確には知られていなかったものであり，このような推定値により圧延機の制御系の適応化を行うべく考察を進めている。

換　算　表　　ξ ：$\pm 10^3$ C.V. の生データ

$\eta = C_E \cdot \xi + D_E$　　η ：工学単位

計測点	名　称	C_E	D_E	工学単位
M	スピード	0.008749	0.21872	mm／msec
R	右側板厚	0.055335	−5,53350	μ
L	左側板厚	0.053527	1.60580	μ
P	圧下位置	−0.416670	1216.67	μ

同　定　結　果

データ	制御モード	溶接点	溶接点前		溶接点後	
			$\hat{A}$	$\hat{B}$	$\hat{A}$	$\hat{B}$
1	手	無	***	−0.311		
2	手	有	0.37	***	(1.14)	−0.25
3	手	無	0.865	−0.13		
4	手	無	0.65	−0.19		
5	$FF+FB$	無	(1.03)	−0.33		
6	FB	有	0.37	−0.03	0.71	−0.101

手：手動
FF：フィードフォワード
FB：フィードバック
***：推定不可

表 4. 4. 1　単位変換表と同定の結果

4. 5　ま　と　め

第3章で提案したカスケード微分フィルタを用いた伝達関数の推定手法をいくつかの実プラントの同定に用いた結果につき与えた。すなわち火力発電所でのタービン発電機系の同定，製紙工場での抄紙機の坪量水分系の同定そして製鉄工場でのレバーシング・コールド・ミルの同定を実際のプラントよりの実測データを基に実施した。これらの例より判断して提案手法が十分実用的なものであることが確かめられた。

第5章　微分フィルタのボイラ昇温昇圧制御系への適用

5.1　序

観測信号の中からその低域成分の微分を抽出する手法は同定問題に限らず，種々の変化率を制御する必要のある場合に，その制御系を構成するのに有効に用い得るものである。著者は業務の一つとして発電用ボイラの起動時の昇温昇圧制御系の構成にたずさわってきた。この章ではドラム式ボイラの昇温昇圧制御系を微分フィルタを用いて構成する方法とシミュレーションによるテスト結果，コンバインド・サーキュレーション形超臨界圧ボイラの昇温制御系をやはり微分フィルタを用いて構成する方法とシミュレーションによるテスト結果とテスト用の実ボイラを用いてのテスト結果を与え微分フィルタの制御系への応用の有効性を示す。特にこのテスト用ボイラではボイラ制御系が殆んどDDC化（アナログ・ワイアド・ロジック系との2重計装）されており，その点も含めて解説した。

5.2　ドラム式ボイラの昇温昇圧制御系

図5.2.1はドラム式ボイラを用いた火力発電所の蒸気の流れの系統を描いたものである。これによりボイラの動作を簡単に説明し，起動時における昇温昇圧の過程を説明してみる。

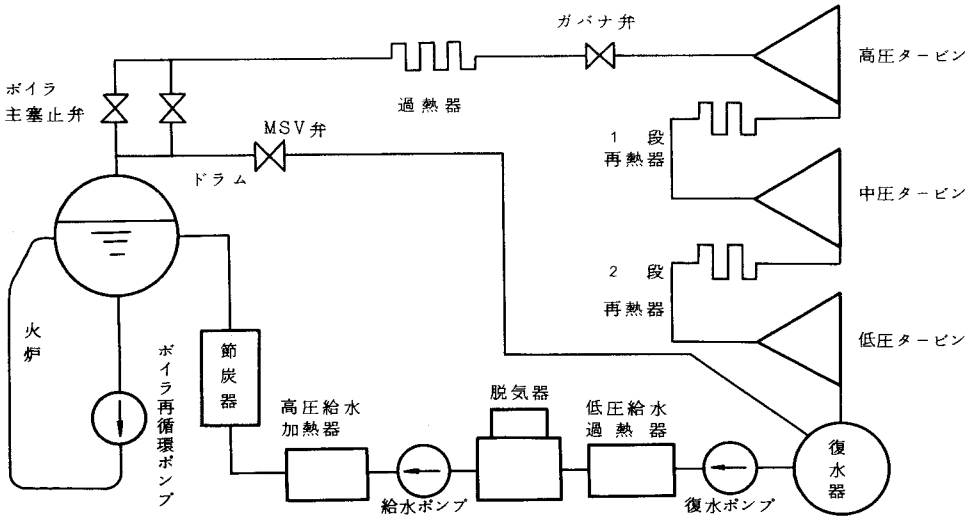


図5.2.1　ドラム式ボイラを用いた火力発電所系統図

5.2.1　ドラム式ボイラの構造と起動

図5.2.1に示したボイラは強制循環形（コントロール・サーキュレーション・ボイラ）といわれるものである。[40]水をある圧力で加熱してゆくとその圧力で定まる一定の温度（飽和温度）で水から蒸気に遷移する。この時非常に大量の潜熱を吸収する。すなわち飽和状態では水と蒸気が共存し，潜熱の大きいことでこの境界は大容量の加熱を行なっても割合と安定である。そこでドラムと称する円筒形の容器に加熱した水を送り込みドラム内に水と蒸気の境界を作り，そこで蒸気の発生を行なわせる。この境界の位置はドラム水位といい，供給される水（給水）の流量と水蒸気の出口にある各種の弁を用いて一定に保たれるように制御されている。ドラム内の蒸気は飽和状態にあるのでほぼ給水の圧力によりその状態が定まるわけである。

次に定格負荷時のボイラの働きを考えてみる。まず給水の圧力は主として給水を加圧する給水ポンプにより操作されている。又コントロール・サーキュレーション・ボイラでは火炉で加熱する流体を再循環水ポンプにより再循環させ加熱効率を向上させている。発生した蒸気は過熱器により過熱され高圧タービンに入る。高圧タービンを出た蒸気はさらに再熱器により再熱されて中圧又は低圧タービンに入り復水器を通って水となり給水加熱器給水ポンプそして節炭器を通ってドラムに供給されるわけである。

次にドラム式ボイラの起動時の状況について説明をしておこう。起動時には蒸気はタービンに入らず各種のバイパス弁でボイラへ循環される。ドラム・ボイラの定格圧力は169 kg／cm^2　前後であり，起動時に際してはこの圧力まで昇圧してゆく必要がある。ただしボイラの構造や疲労の許容限界などからむやみに早く昇圧することはできない。勿論ゆっくり昇圧させたのでは種々の経済的損失が生じてくる。そこで電力会社ではこれらのボイラの起動時の昇圧パタンを規則で定めている。図5.2.2はその種のパタンの一例である。水の物性より約60kg／cm^2　程までは飽和圧力より飽和温度の方が同じ供給熱量に対して変化が大きいので，ボイラ蒸気温度（飽和温度）を制御した方が良い。そこで，図5.2.2のようにボイラ蒸気圧力（飽和圧力）が60kg／cm^2　の近辺まではドラム内の蒸気温度の昇温率を一定に保つように制御される。さらに圧力が60kg／cm^2　以上になれば，それ以上定格圧力までは，ドラム内の蒸気圧力の昇圧率を一定に保つように制御される。

このような過程で昇温昇圧を行なおうとすると，ドラム水位制御系の働いている状態では，給水の流量，燃料流量および空気の流量を操作してやればよい。殆んどの場合，起動パタンとしては，給水の流量を一定に保って，燃料および空気の流量によりドラム温度およびドラム圧力が制御されるわけであるが，空気流量の設定値は燃料流量の設定値に比例するように設定されるので基本的な操作変数は燃料流量だけということになる。

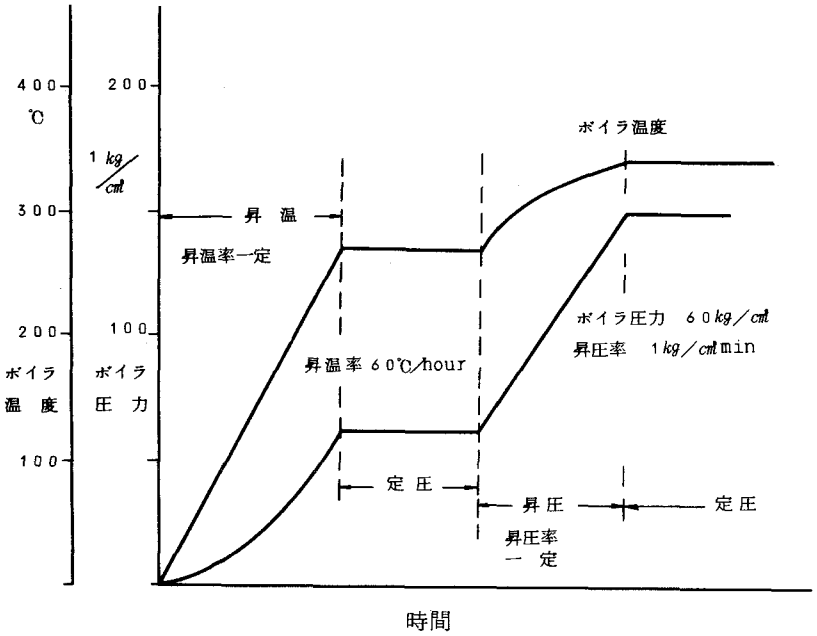


図 5. 2. 2　ドラム式ボイラ起動パタン

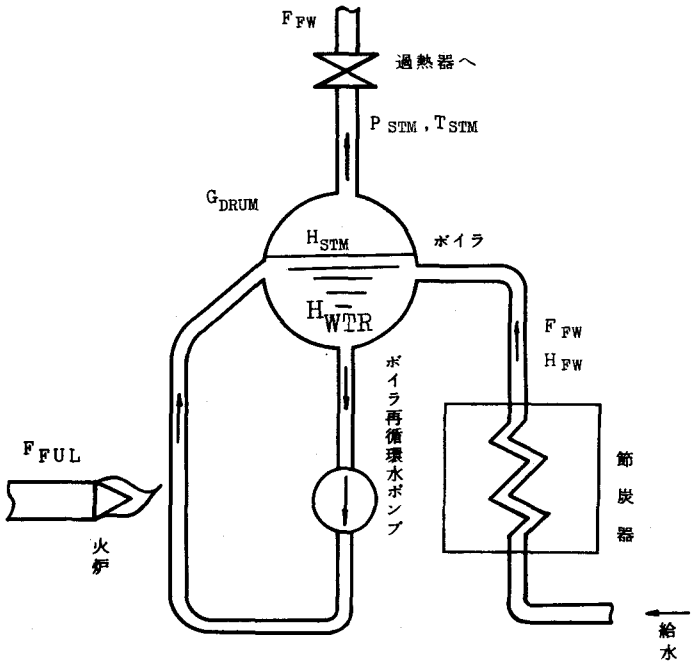


図 5. 2. 3　ドラム式ボイラのモデル

5.2.2 ドラム式ボイラの動特性

ドラム式ボイラのドラム水位制御系が働いている状態で，ドラム式ボイラの動特性について考察を行ってみる。ここで用いた記号は次のようなものである。

F_{FW}	：給水流量	kg／min
F_{FUL}	：燃料流量	kg／min
H_{FW}	：給水エンタルピ	Kcal／kg
H_{STM}	：蒸気エンタルピ	Kcal／kg
H_{WTR}	：ドラム水エンタルピ	Kcal／kg
P_{STM}	：ドラム圧力	kg／cm^2
T_{STM}	：ドラム温度	℃
G_{DRUM}	：ドラム内流体重量	kg
C_{FUL}	：燃料発熱量	Kcal／kg
ξ_{FUL}	：発熱効率	
η_{FURN}	：ボイラ吸熱効率	

図 5.2.3 でドラム内の飽和水に加えられる熱量は蒸気流量が給水流量に等しいとすると

$$Q_{WTR}=\eta_{FURN}\cdot\{\xi_{FURN}\cdot C_{FUL}\cdot F_{FUL}+(H_{FW}-H_{STM})\cdot F_{FW}\} \tag{5.2.1}$$

$Kcal$ だけ単位時間に加えられる。そこでドラム水のエンタルピの上昇は

$$\frac{dH_{WTR}}{dt}=\frac{Q_{WTR}}{G_{DRUM}} \tag{5.2.2}$$

で規定される。G_{DRUM} はドラム温度 T_{STM} により規定される。また H_{WTR}，T_{STM}，P_{STM} の間には水の物性として定まる状態方程式が存在する。すなわち

$$T_{STM}=\theta_W(H_{WTR}) \tag{5.2.3}$$

$$P_{STM}=\varphi_W(H_{WTR}) \tag{5.2.4}$$

$$H_{STM}=\Psi_S(P_{STM})$$

となる関数 $\theta_W(\cdot)$，$\varphi_W(\cdot)$，$\Psi_S(\cdot)$ が存在する。これらの関係を図示すると図 5.2.4 のようになる。$\theta_W(\cdot)$，$\varphi_W(\cdot)$，$\Psi_S(\cdot)$ はすべて単調な関数なので既略的に述べるならば，ドラム圧力と燃料流量との間には[39]

$$L\{P_{STM}\} \sim \frac{1}{S} \cdot L\{F_{FUL}\} \qquad (5.2.5)$$

という関係のあるのがわかる。

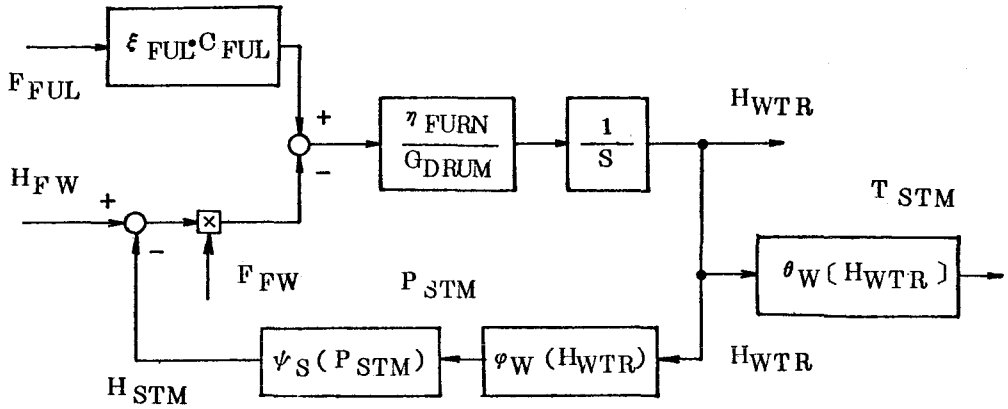


図 5.2.4　ドラム式ボイラの動特性

5.2.3　昇温昇圧制御系

5.2.1 で述べたように昇温・昇圧の際の目標値は温度又は圧力の変化率であるので，第2章で考えたような微分フィルタが用い得ることがわかる。そこで P_{STM} のサンプル周期 T_S 毎の値を $P_{STM,j}$ としカスケード・ディジタル微分フィルタ $\mathcal{D}_M^{(1)}(Z)$ を通した後の信号を $\hat{P}^{(1)}_{STM,j}$ として燃料流量の設定値を S_{FUL}，昇圧率を S_{DP}，制御周期を $T_C = I_C \cdot T_S$ として

$$S_{FUL,j} = \alpha_P \cdot (\hat{P}^{(1)}_{STM} - S_{DP}) + \beta_P \cdot \sum_{k=0}^{j} (\hat{P}^{(1)}_{STM} - S_{DP}) \qquad (5.2.6)$$

$$S_{FUL}(t) = S_{FUL,k} \cdot I_C \qquad , k \cdot (I_C \cdot T_S) \leqq t < (k+1) \cdot (I_C \cdot T_S) \qquad (5.2.7)$$

のようなＰＩ制御系を作ることができる。[42] すなわち微分フィルタを用いることによりドラム圧力の小刻みの微小変化を取り除いた後の平均的な圧力の変化を取り出すことができ，これをあたかも観測され得る制御量と同じように扱うことができる。昇温部分についても（5.2.6），（5.2.7）と全く同じようなアルゴリズムを用いれば良い。制御定数 α_P, β_P は P_{STM}（又は T_{STM}）

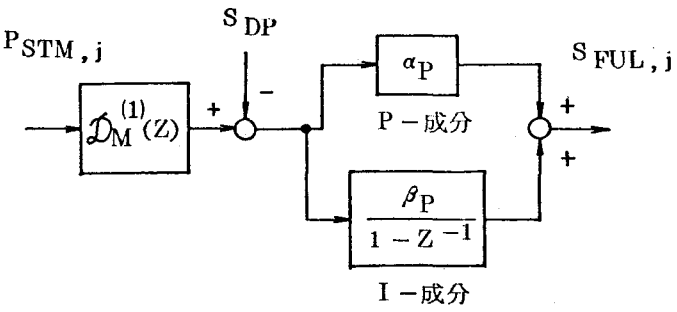


図 5.2.5　ドラム式ボイラの昇圧制御系

の関数として変化させることもできる。

5.2.4　昇温昇圧制御系のテスト

5.2.3で与えた昇温昇圧制御系の性能をテストするためにシミュレーションを実施してみた。図5.2.2は中国電力㈱岩国発電所の出力35万KWのボイラの起動パタンを示したものである。5.2.2で考えたボイラ・モデルをもとにシミュレーションを実施した。図5.2.6はその為のブロック図を描いたものであり，書かれている数値は上記発電所の場合である。又この図中の時間の単位はすべて分である。

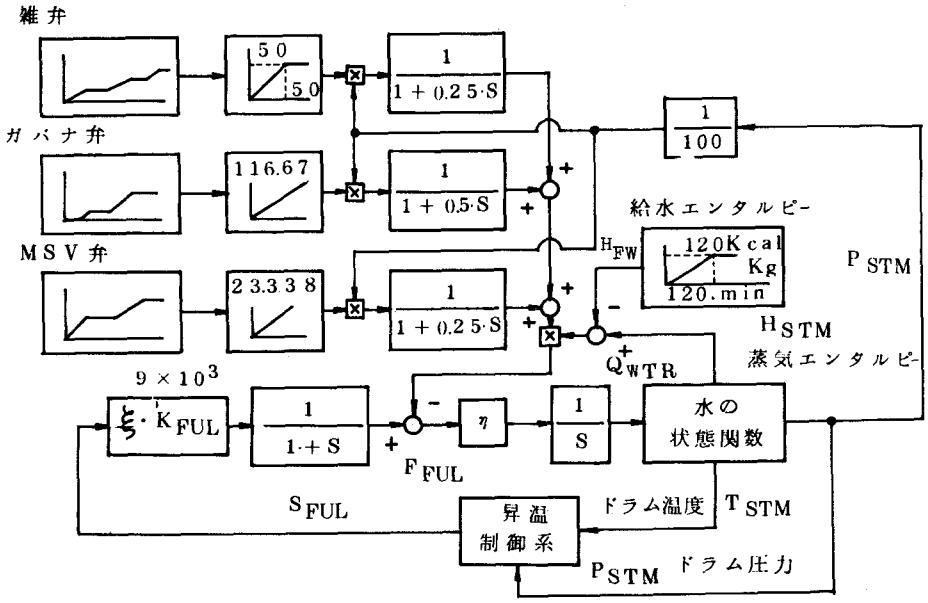
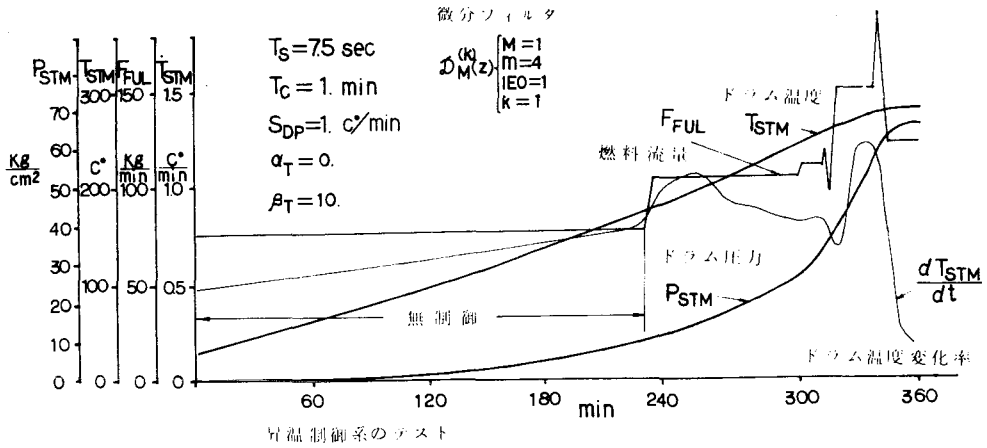


図5.2.6　シミュレーションのためのブロック図

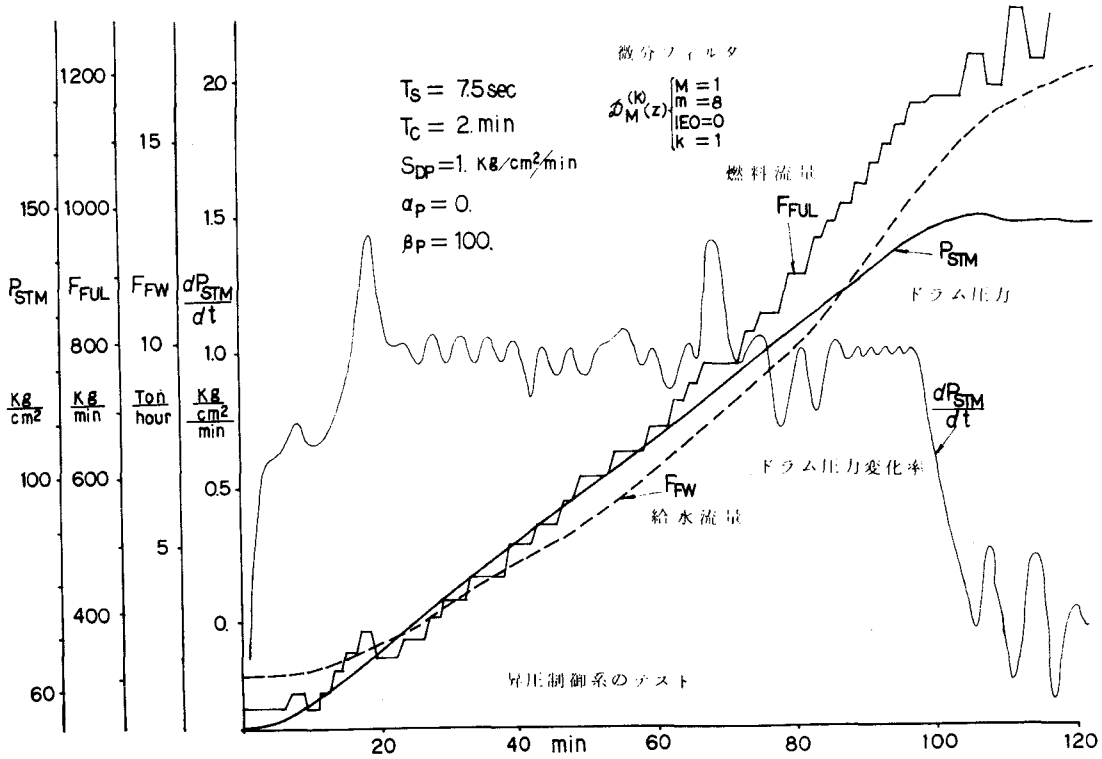
このシミュレーションのためにはBACS（*Block Diagram Analogous Compiler System*）を用いた。このプログラム・システムでは積分は*Runge - Kutta*法を用いている。

図5.2.7はシミュレーションによる昇温昇圧制御系のテスト結果を示したものである。同図の上段はドラム圧力が60kg／cm² 以下の昇温制御の状態にしている。これは実際の運転でも実施されることで（5.2.5）の関係が比較的に良く成立するからである。昇温制御は制御周期1分で希望昇温率1℃／min，昇圧制御は制御周期2分で希望昇圧率1kg／cm² ・minであり，昇温昇圧率一定の目的はほぼ達成されていると同時に操作量である燃料も無駄な動きをせず単調に増大しているので，無理のない制御が行われていると考えられる。実際このシミュレーションの結果

に基づき，これと同等の制御系が中国電力㈱岩国発電所の35万KWのドラム式ボイラ制御のための制御用計算機*MELCOM* 350－30による計算機制御系の中の起動時昇温昇制御系として組込まれ実際の起動制御に用いられ好結果を得たものである。



昇温制御の状態（ $P_{STM} \leqq 60$ kg／cm² ）



昇圧制御の状態

図 5. 2. 7　ドラム式ボイラの昇温昇圧制御系のシミュレーション・テスト

5.3 超臨界圧ボイラの昇温制御 (B4)

水の物性は氷点以上，圧力では300 kg／cm^2 ，温度は800℃程度までの範囲は工業的応用の目的等から詳細に調べつくされている。この範囲には水と蒸気の飽和域をその極限の状態である臨界点を含んでいて水はこれらの点を境にして著るしい状態の変化を示す。このような水の物性を余すところなく用いた装置としてこの節で述べる超臨界圧ボイラがある。このボイラは種々の有効性を持っているが，反面その制御は難かしくなる。特に起動時における昇温制御は重要となる。最近はDDC によりこの昇温制御系を構成する場合が多くなってきた。

この昇温制御にもディジタル微分フィルタが有効に使用できる。その場合の制御系の構成を示すと共に，それのシミュレーションによるテスト結果およびテスト用に設置された実ボイラによるテスト結果を示し，その有効性を示した。

5.3.1 超臨界圧ボイラの構造と起動

図5.3.1は超臨界圧ボイラのうちでコンバインド・サーキュレーション・ボイラと名付けられる一形式を用いた火力発電所の系統図である。[41] この種のボイラの動作を理解するのには水の物性

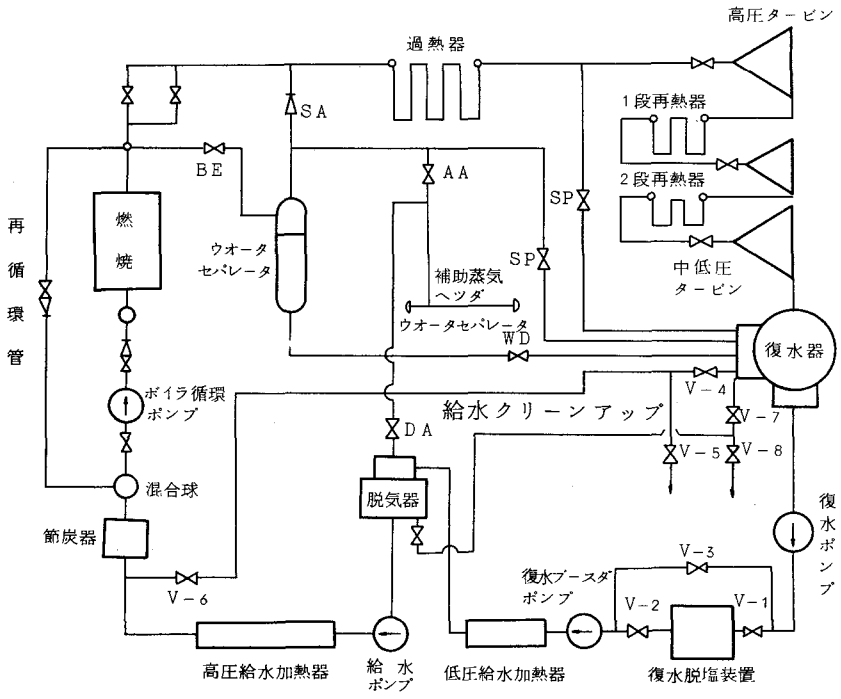


図5.3.1 コンバイド・サーキュレーション・ボイラを用いた発電所

を理解しなければならない。図5 3. 2は圧力Pと，エンタルピーHにより水の状態を表わしたものである。圧力を一定に保って熱を加えてゆくと，エンタルピーは次第に増加する。**臨界圧力**P_C（=2255 kg／cm^2 ）より低い圧力では，はじめに水（液体）であったものが，飽和域に入り一定の熱量（潜熱）を吸収して蒸気（気体）に変化する。ところが圧力を臨界圧P_C 以上に保つと，飽和領域は存在せず，熱量を加えてゆくと，水から蒸気への遷移が連続的に行なわれる。ただしこの間では**定圧以熱**が非常に大きくなり，流体の温度の上昇の度合はにぶくなってくるのである。

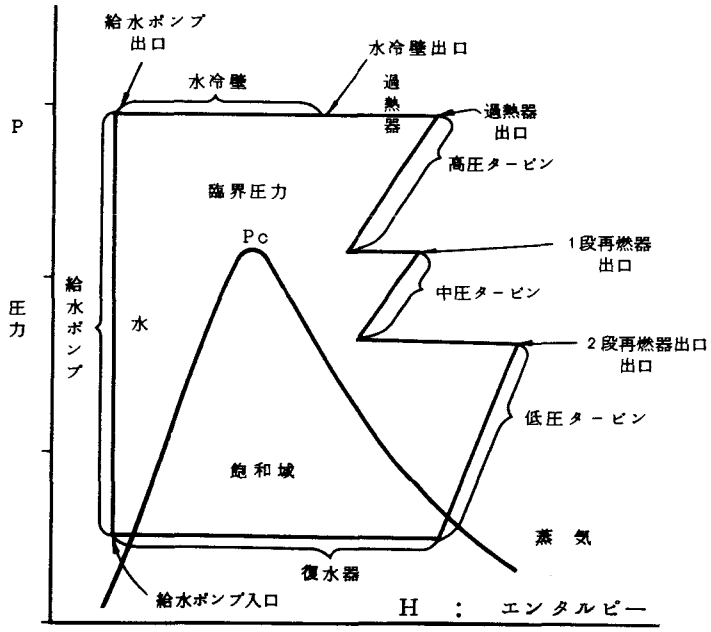


図5. 3. 2 水 の 状 態 図

ドラム式ボイラでは圧力が臨界圧以下のため，飽和域が存在し，これをドラムの中に封じ込める方法をとっていたが，超臨界ボイラでは長い管に沿って水を加熱し，途中で蒸気に変換するようにしている。これはいわゆる**貫流ボイラ**（*Once-Through Boiler*）と言われるものである。

次に図5. 3. 1と図5. 3. 2を用いて超臨界ボイラの動きを考えてみる。具体性を明確にするために，出力60万KWのタービン発電機に供給するための水蒸気出力1,950*Ton／hour* 級のコンバインド・サーキュレーション・ボイラを例にとって説明する。定格負荷時では主として給水ポンプと各種の弁類により，水は288kg／cm^2 程度の超臨界圧に加圧され，途中で高圧給水加熱器，節炭器等により，加熱されてから，ボイラの水冷壁で加熱され，水冷壁の出口で流体の温度が約443℃となるように火炉の燃焼状態により制御される。ここでは既に水蒸気であるが，さらに過熱器により過熱され，最終的に圧力288 kg／cm^2 ，温度543 ℃の過熱水蒸となり，高圧タービに供給される。高圧タービンを出て圧力が下り，温度も下った蒸気はさらに再熱

器により過熱され，圧力約 72.6 kg／cm^2 ，温度554℃の過熱水蒸気となり，これが中圧タービンに供給される。中圧タービンを出た蒸気は又再熱されて圧力約 25.5 kg／cm^2 ，温度568℃の過熱水蒸気となって低圧タービンに供給される。低圧タービンの出口は復水器となっていて蒸気は海水により冷却される。そこで蒸気は飽和状態となっており，圧力は約－720 $mmHg$ ，温度34℃でここで蒸気は水となって，さらに低圧給水加熱器，脱水器などを通って，再びボイラに供給されるわけである。又タービンの各段階では抽気と称し，蒸気の一部を取り出し，給水加熱器の一次系（加熱源）として用い，使用した後は，再びボイラへ戻している。このような巧妙な方法を用いて，全体として高い効率を達成することができるように工夫されている。超臨界圧ボイラはドラム式と異なり，ドラムのように大きな熱容量を持つ装置を含まないので高い応答性能を持たせることが可能であるが，反面制御は難かしくなるという特徴を持っているわけである。

次に超動時の模様について説明しておく。図 5.3.3 はいま述べた出力 1,950 $Ton/Hour$ のコンバインド・サーキュレーション・ボイラの起動状態を規定する起動パタン（冷態起動）を描いたものである。これに沿って説明してゆく。点火前の種々の準備がととのうと，火炉に点火される。この時点では給水の流量は定格時の約 5 %に保たれる。そして給水の圧力は約 250 kg／cm^2 程度の超臨界に保たれている。給水は給水過熱器，節炭器，水冷壁を通って加熱される。起動昇温時にはこの水冷壁出口における流体の温度が制御変数となり，この温度が，起動パタンに示されているように約 200℃／$Hour$ 程度の一定の昇温率となるように制御されるわけである。水冷壁出口の流体の温度はいろいろの変数により変化するが，起動においては，基本的には，給水流量，燃料流量，および空気流量であり，給水が一定に保たれる範囲では燃料流量のみとなる。空気流量は普通のばあい，燃料流量に比例するように設定される。水冷壁出口流体温度を定格の温度（420℃前後）まで昇温した後にその状態でじょじょに給水を増加させる。この期間では，蒸気は直接過熱器へは行かず，ウォーター・セパレータと称する容器の中で減圧され，タービン起動前ならさらに給水ポンプの方へ循環させられ，タービン起動後ならさらにそこから過熱器へ入り過熱され，タービンへ供給される。特にコンバインド・サーキュレーション・ボイラでは，起動時に水冷壁出口流体の大部分を水冷壁入口へ戻すようにボイラ再循環水ポンプが設けられており給水流量よりもはるかに大量の流体を水冷壁へ流し，火炉よりの熱の吸収を良くすると同時に水冷壁の保護ができるような工夫が施こされている点が特徴である。水冷壁出口流体と節炭器を出た流体は混合球と名付けられた容器の中で混合される。

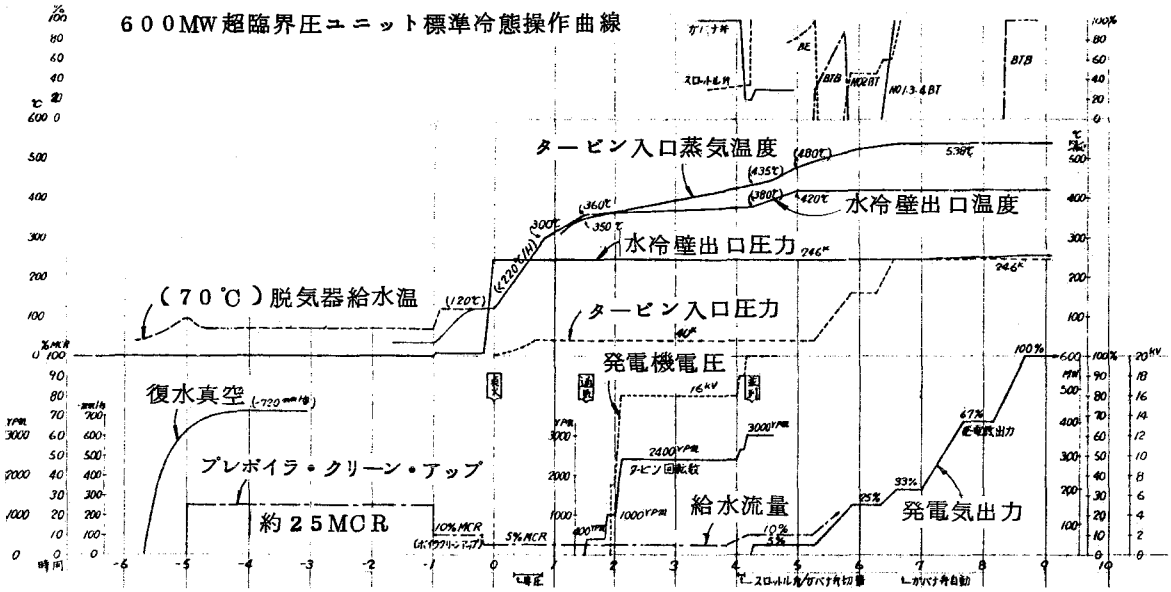


図 5. 3. 3　超臨界ボイラの起動パタン

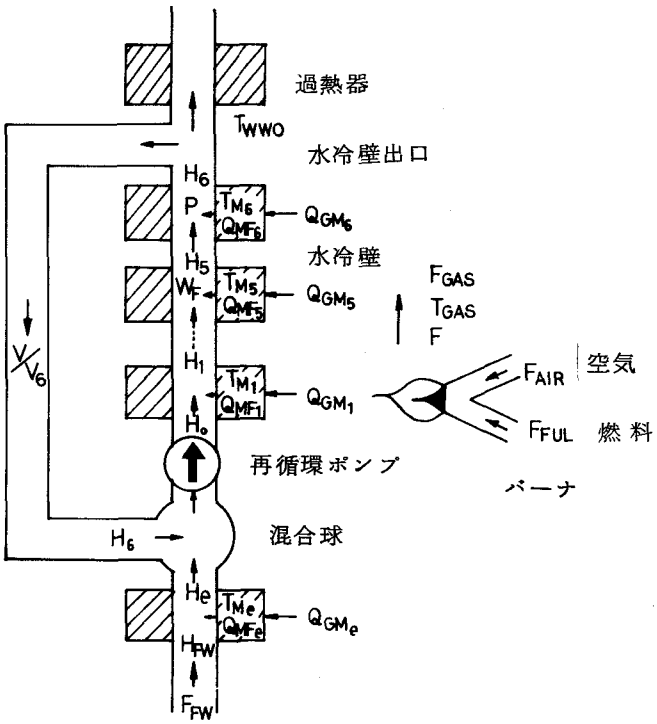


図 5. 3. 4　コンバインド・サーキュレーション・ボイラのモデル

5. 3. 2　超臨界圧ボイラの動特性 (A1)

コンバインド・サーキュレーション・ボイラのもつ動特性について概観してみよう。このボイラの基本要素は図5. 3. 4のように火炉，節炭器，水冷壁，過熱器，再熱器，混合球，再循環ポンプ等である。ここでは起動時だけを考え，過熱器と再熱器については論じない。水冷壁は火炉を取りまく管壁で，ここで熱が流体に吸収される。この管壁は熱の吸収を良くするために細く極めて長い管状になっているので，正しくは分布定数系として動特性をとらえる必要があるが，ここでは構造の似かよった部分を寄せ集め6つの部分に分割して集中定数系としてとりあつかった。以下ここで用いた記号を始めに定義しておく。

F_{FW}	:	給水流量	kg/min
F_{FUL}	:	燃料流量	kg/min
F_{AIR}	:	空気流量	kg/min
F_{GAS}	:	ガス流量	kg/min
Q_{TTL}	:	燃料の総発熱量	Kcal
Q_B	:	ボイラ吸収熱量	Kcal
$Q_{GM,j}$	:	ガスより j ーブロックメタルへの伝達熱 ($j=1,2,\cdots\cdots,6,e$)	Kcal/min
$Q_{MF,j}$	:	j ーブロックメタルより流体への伝達熱	Kcal/min
T_{AIR}	:	入口空気温度	℃
H_{FW}	:	給水エンタルピ	Kcal/kg
$H_{E,j}$	:	j ーブロック出口流体エンタルピー	Kcal/kg
$H_{E,o}$	:	混合球出口流体エンタルピー	Kcal/kg
T_{GAS}	:	ガス温度	℃
$T_{F,j}$	:	j ーブロック平均流体温度	℃
$T_{M,j}$	:	j ーブロック平均メタル温度	℃
V_{RES}	:	再循環路流体体積流量	m^3/min
W_F	:	混合球出口より水冷壁出口までの質量流量	kg/min
P_B	:	ボイラ内流体圧力	kg/cm^2
C_{FUL}	:	燃料の発熱量	Kcal/kg
C_{GAS}	:	燃火然ガスの比熱	Kcal/kg
v_M	:	混合球流体比容積	m^3/kg
v_j	:	j ーブロック出口流体比容積	m^3/kg
$C_{GM,j}$	:	ガスより j ーブロックメタルへの接触熱伝達係数	
$S_{GM,j}$	:	ガスより j ーブロックメタルへの輻射熱伝達係数	
$C_{MF,j}$	:	j ーブロックメタルより流体への熱伝達係数	
$C_{M,j}$	:	メタルの熱方程式に関する定数	

$C_{F,j}$	：	流体の熱方程式に関する定数
$v=v(P,H)$	：	比容積を圧力とエンタルピで表わした水の状態方程式
$T=d(P,H)$	：	温度を圧力とエンタルピで表わした水の状態方程式
$j=1,2,\cdots\cdots,6,e$	：	e：節炭器
T_{WWO}	：	水冷壁出口流体温度　℃

起動時においては先にも述べたように水冷壁出口流体は再循環され混合球で節炭器より入ってきた流体と混合して再び水冷壁で加熱されるようになっている。この際再循環路を流れる流体の体積流量はほぼ一定である。この点を考慮して次のような数式モデルを作ることができる。

〔火　炉〕　連続式より

$$F_{GAS} = F_{FUL} + F_{AIR} \qquad (5.3.1)$$

燃料の発生する熱量は，水冷壁，節炭器へ吸収される熱量と，ガスの持ち去る熱量の和と考えてエネルギ保存則を用いて

$$T_{GAS} = T_{AIR} + (Q_{TTL}-Q_B)/C_{GAS}\cdot T_{GAS} \qquad (5.3.2)$$

$$Q_{TTL} = C_{FUL}\cdot F_{FLL} \qquad (5.3.3)$$

$$Q_B = \sum_{j=1}^{6} Q_{GM,j} + Q_{GM,e} \qquad (5.3.4)$$

〔混合球〕　水冷壁出口流体と，節炭器出口流体が流体が混合されて，水冷壁へ流れる。連続の式から

$$F_{FW} - V_{RES} / v_6 = W_F \qquad (5.3.5)$$

また水冷壁内流体の質量は一様であるとすれば

$$W_F = V_{RES} / v_0 \qquad (5.3.6)$$

と表わすこともできる。エネルギー保存則により

$$H_{FW}\cdot F_{FW} + H_{E,6}\cdot(V_{RES}/v_6) = H_{E,0}\cdot W_F \qquad (5.3.7)$$

（5.3.5）と（5.3.7）より，混合球出口エンタルピ

$$H_{E,0} = H_{E,6}-(H_{E,6}-H_{FW})\cdot F_{FW}/W_F \qquad (5.3.8)$$

を得る。

〔節炭器と水冷壁〕　各ブロック内部の平均流体温度は

$$T_{F,e}=d(P_B,\alpha_e\cdot H_E+(1-\alpha_e)\cdot H_{FW}) \qquad (5.3.9)$$

$$T_{F,j}=d(P_B,\alpha_j\cdot H_{E,j}+(1-\alpha_j)\cdot H_{E,j-1}) \qquad (5.3.10)$$

$(j=1,2,\cdots\cdots,6)$

ここで　$0 \leqq \alpha_e, \alpha_j \leqq 1 \quad (j=1,2,\cdots\cdots,6)$　(5.3.11)

なる定数である。この平均温度を用いて，各伝達熱は

$$Q_{GM,k} = C_{GM,k} \cdot F_{GAS}^{0.6} \cdot (T_{GAS} - T_{M,k})$$

$$+ S_{GM,h} \cdot \{(T_{GAS}+273.15)^4 - (T_{M,k}+273.15)^4\} \quad (5.3.12)$$

$$Q_{MF,e} = C_{MF,e} \cdot F_{FW}^{0.8} \cdot (T_{M,e} - T_{F,e}) \quad (5.3.13)$$

$$Q_{MF,j} = C_{MF,j} \cdot W_F^{0.8} \cdot (T_{M,j} - T_{F,j}) \quad (5.3.14)$$

$$(k=1,2,\cdots\cdots,6,e, \quad j=1,2,\cdots\cdots,6)$$

と表わされるから，熱方式はメタルに対して

$$\frac{d\,T_{M,k}}{d\,t} = C_{M,k} \cdot (Q_{GM,k} - Q_{MF,k}) \quad (5.3.15)$$

流体に対して　$\dfrac{d\,H_e}{d\,t} = C_{F,e}\{(H_{FW} - H_{E,o}) \cdot F_{FW} + Q_{MF,e})$　(5.3.16)

$$\frac{dH_j}{d\,t} = C_{F,j}\{(H_{E,j-1} - H_{E,j})W_F + Q_{MF,j}\} \quad (5.3.17)$$

$$(k=1,2,\cdots\cdots,6,e \quad j=1,2,\cdots\cdots,6)$$

そして水冷壁出口流体温度は

$$T_{WWO} = d\ (P_B, H_{E,6}) \quad (5.3.18)$$

で定まる。

このモデルの妥当性を確かめるために定格出力60万KWの発電所に設置された定格出力1,950 *ton/hour* のコンバインド・サーキュレーション・ボイラの場合にこのモデルを使用してシミュレーションを行ない実測値と比較してみた。パラメータは表5.3.1のように設定して起動時の動作をシミュレーションした結果が図5.3.5と図5.3.6であり，実測値と良く合致している。このモデルで起動時の状況はほぼ表現できると考えて良い。

5.3.3　ボイラ制御系

図5.3.7はボイラの制御系を描いたものである。概略的にいえば2段のカスケード制御系である。要求発生出力により給水，燃料，空気の流量の設定値のフィードフォワード成分を作り，こ

CFUL CF(E) CF(1) CF(2) CF(3) CF(4) CF(5) CF(6)	CAIR CM(E) CM(1) CM(2) CM(3) CM(4) CM(5) CM(6)	CGAS SG(E) SG(1) SG(2) SG(3) SG(4) SG(5) SG(6)	CGM(E) CGM(E) CGM(E) CGM(E) CGM(E) CGM(E) CGM(E)	CMF(E) CMF(1) CMF(2) CMF(3) CMF(4) CMF(5) CMF(6)	定数
HE(E) HE(1) HE(2) HE(3) HE(4) HE(5) HE(6) FLGT	TM(E) TM(E) TM(E) TM(E) TM(E) TM(E) TM(E)	PB PB PB PB PB PB PB	VRES	TGAS	初期条件
M2 FFW	MI HFW	H FFUL	ALPHA FAIR	FLWS	流れの設定

0.9579E 4	0.0049E 3	0.0026E 2		
0.0200	0.0234E-3	0.	0.0779E 2	0.0234E 4
0.1770	0.1960E-3	0.	0.	0.0647E 2
0.0960	0.0962E-3	0.0306E-5	0.	0.0696E 3
0.4450	0.4865E-3	0.	0.	0.0147E 3
0.0375	0.0276E-3	0.1186E-5	0.	0.1882E 3
0.0895	0.0758E-3	0.	0.	0.0776E 3
0.0947	0.0750E-3	0.0483E-5	0.	0.0463E 3
0.0765E 3	0.6000E 2	0.0257E 8		
0.2222E 3	0.2150E 3	0.0257E 8	0.7000E 1	0.3800E 3
0.2222E 3	0.2150E 3	0.0257E 8		
0.2222E 3	0.2150E 3	0.0257E 8		
0.2222E 3	0.2150E 3	0.0257E 8		
0.2222E 3	0.2150E 3	0.0257E 8		
0.2222E 3	0.2150E 3	0.0257E 8		
0				
25	100	0.0600E 0	1.0000E 0	
0.2083E 4	0.7650E 2	0.0700E 3	0.7952E 4	0.
0.2067E 4	0.7650E 2	0.1633E 3	0.7952E 4	0.
0.2033 4	0.7650E 2	0.1667E 3	0.7952E 4	0.
0.2000E 4	0.7650E 2	0.1583E 3	0.7952E 4	0.
0.2000E 4	0.7650E 2	0.1500E 3	0.7952E 4	0.
0.2000E 4	0.7650E 2	0.1533E 3	0.7952E 4	0.
0.2000E 4	0.7650E 2	0.1633E 3	0.7952E 4	0.
0.2000E 4	0.7650E 2	0.1633E 3	0.7952E 4	0.
0.2033E 4	0.7650E 2	0.1633E 3	0.7952E 4	0.
0.2067E 4	0.7650E 2	0.1700E 3	0.7952E 4	0.
0.2053E 4	0.7650E 2	0.1767E 3	0.7952E 4	0.
0.2133E 4	0.7650E 2	0.1700E 3	0.7952E 4	0.
0.2167E 4	0.7650E 2	0.1800E 3	0.7952E 4	0.
0.2233E 4	0.7650E 2	0.1833E 3	0.7952E 4	0.
0.2167E 4	0.7650E 2	0.1833E 3	0.7952E 4	0.
0.2033E 4	0.7650E 2	0.1833E 3	0.7952E 4	0.
0.1900E 4	0.7650E 2	0.1833E 3	0.7952E 4	0.
0.1833E 4	0.7650E 2	0.1833E 3	0.7952E 4	0.
0.1800E 4	0.7650E 2	0.1833E 3	0.7952E 4	0.

表 5. 3. 1　出力 1950Ton／Hour のコンバイド・サーキュレーション・ボイラのシミュレーションのための定数表

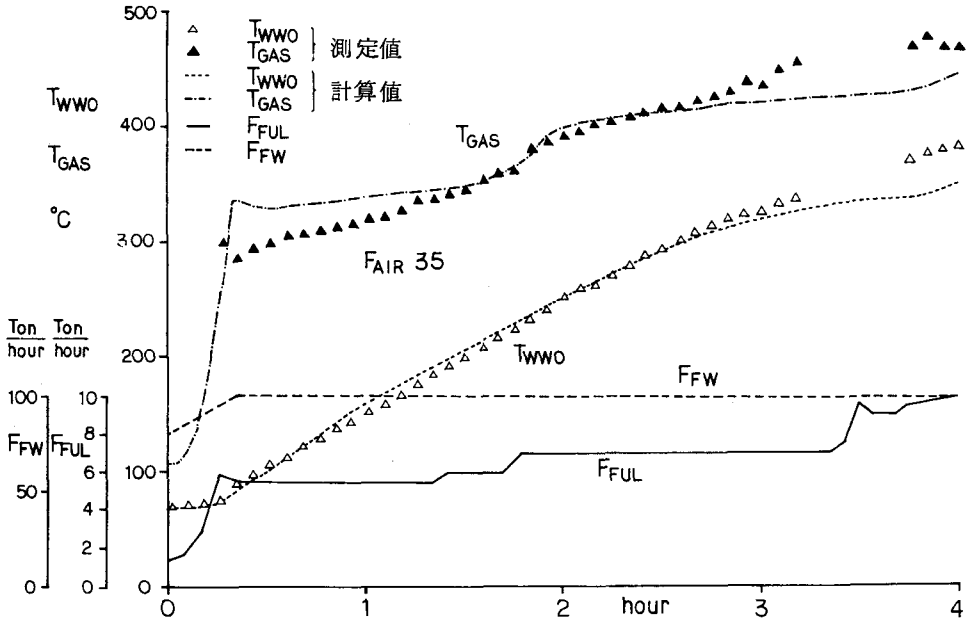


図 5. 3. 5　冷起動時のシミュレーション結果

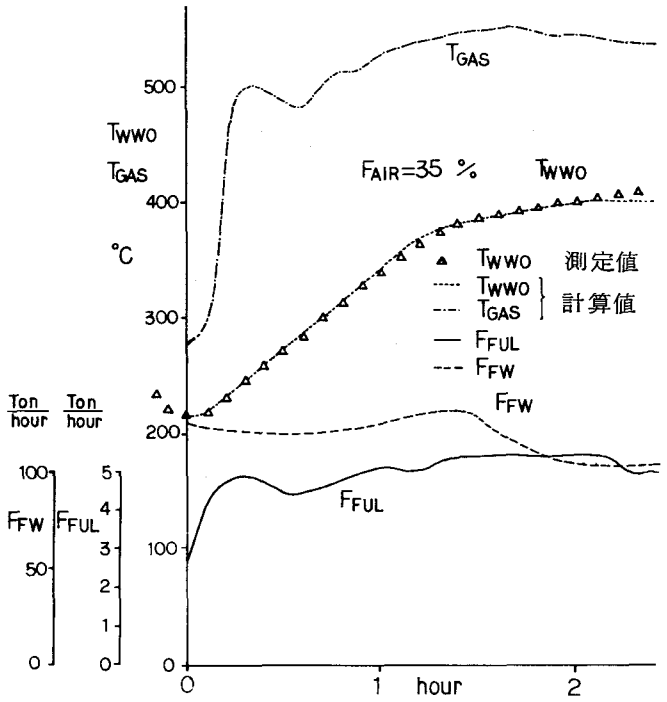
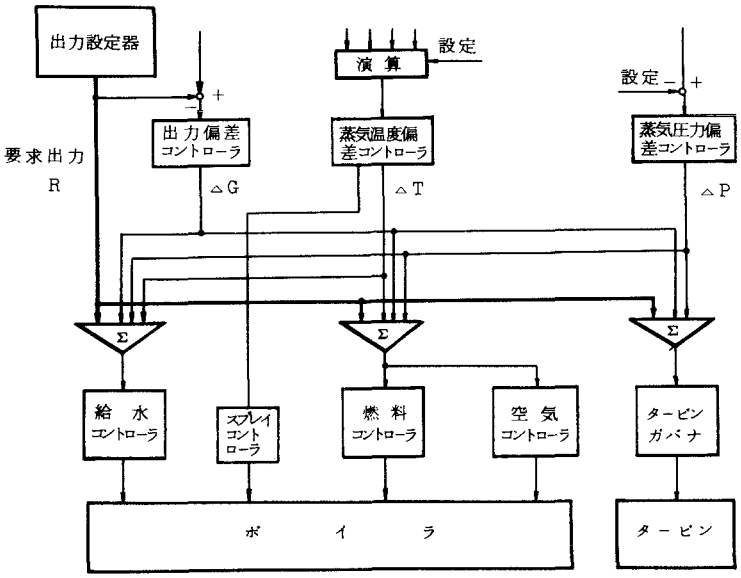


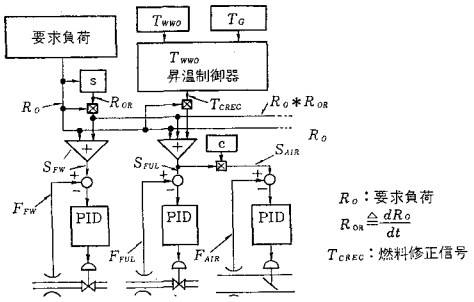
図 5. 3. 6　初期バランス時のシミュレーション結果

れを設定値の基盤とする。これにさらに発生出力電力，水冷壁出口流体圧力，水冷壁出口流体温度，および過熱器出口蒸気温度等の設定値からのずれをフィードバック成分として給水，燃料および空気の流量の設定値を修正する。このようにボイラ，タービン，発電機の全体のエネルギーのバランスを考えた制御系は協調制御系（*Coordinated Controller*）といわれる。超臨界圧ボイラのような応答の敏感なボイラにはこのような制御系が不可欠である。

ただし起動時には要求負荷は5％程度に保たれ，それが給水，燃料，空気の設定値を定める。フィードバック成分は総て切断される。そして燃料，空気の設定値には昇温制御系の出力が加えられる。



(*a*) ボイラ協調制御系



(*b*) 起動時での昇温制御系

図 5. 3. 7　ボイラ協調制御系と昇温制御系

5.3.4 水冷壁出口流体温度昇温制御系 (A1),(B4)

燃料の設定値をS_{FUL}，要求負荷R_O，起動時の水冷壁出口流体温度制御系の出力をT_{CREC}とすると

$$S_{FUL} = a_{FUL} \cdot R_o + T_{CREC} \tag{5.3.19}$$

となる。

a_{FUL} は適当な定数である。空気流量の設定値S_{AIR}は

$$S_{AIR} = a_{AIR} \cdot S_{FUL} \tag{5.3.20}$$

で与えられる。

起動時には図5.3.3のようにT_{WWO}の変化率T_{WWO}を指定した値D_{TWWO}とするのが目的である。

今$T_{WWO}(t)$ のサンプル周期T_S 毎のサンプル値を$T_{WWO,j}$ とし，$T_{WWO,j}$ のカスケードディジタル微分フィルタ$\mathcal{D}_M(1)(z)$の出力を$\hat{T}^{(1)}_{WWO,j}$とする。このとき制御周期を

$$T_C = I_C \cdot T_S$$

としておく。5.3.2のシミュレーションの結果からもわかる通り超臨界圧ボイラの場合もドラム式ボイラの場合と同じように燃料流量と水冷壁出口流体温度との間の関係はほぼ1／S 特性であるので，便宜上

$$u_k = S_{FUL}(k \cdot T_C), \quad y_k = \hat{T}_{WWO,k} \cdot I_C \tag{5.3.21}$$

とすると近似的に

$$Y_k = \alpha \cdot Y_{k-1} + \beta \cdot (u_k - u_{k-1}) \tag{5.3.22}$$

という関係が成立する。ここでαは1の近辺の値，βは正の数である。αとβはほぼ定数と考えられるが，水の物性の急変する遷移域の前後で変化する。

そこで，$y_k = D_{TWWO}$ となるように u_k を定めると

$$u_k = u_{k-1} + \frac{\alpha}{\beta} \cdot (D_{TWWO} - y_{k-1}) + \frac{1-\alpha}{\beta} \cdot D_{TWWO} \tag{5.3.23}$$

又は

$$S_{FUL}(t) = S_{FUL}((k-1) \cdot T_C) + \frac{\alpha}{\beta} \cdot (D_{TWWO} - T^{(1)}_{WWO,(k-1)} \cdot I_C) + \left(\frac{1-\alpha}{\beta}\right) \cdot D_{TWWO} \tag{5.3.24}$$

$$((k-1) \cdot T_C < t \leq k \cdot T_C)$$

のような制御系を構成することができる（図5.3.8）

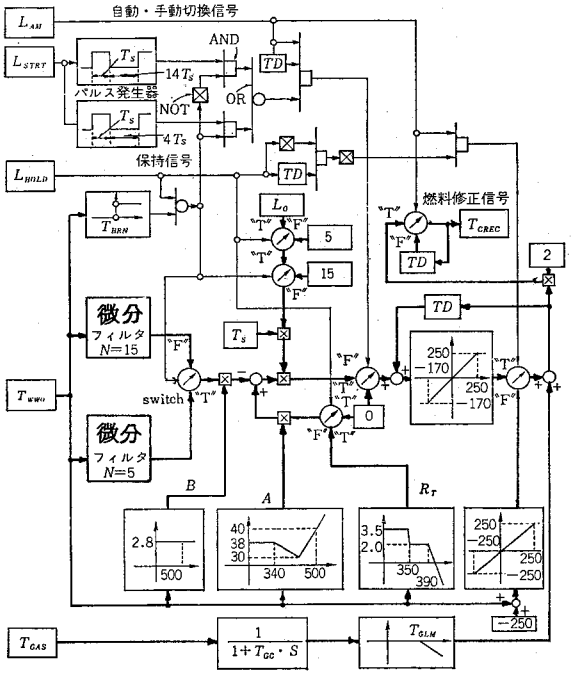


図 5. 3. 8　　水冷壁出口流体昇温制御系

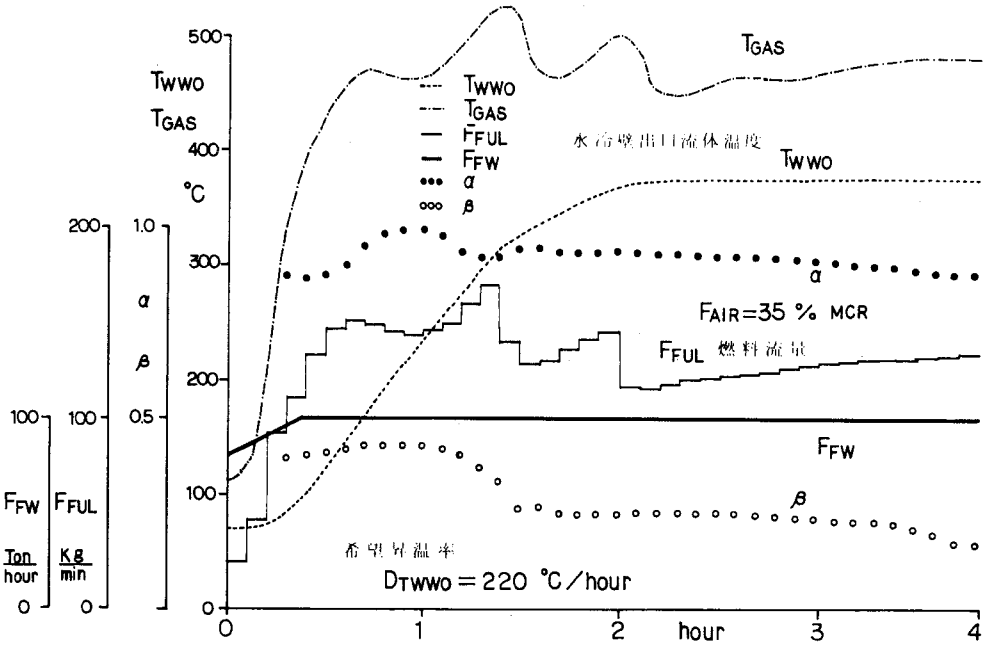


図 5. 3. 9　　シミュレーションによる昇温制御系のテスト結果

5.3.5　シミュレーションによる昇温制御系のテスト

5.3.4で考えた水冷壁出口流体出口温度制御系の性能を確かめるために5.3.2で作成したシミュレータを用いて昇温性能を調べた結果が図5.3.9である。この制御系では$T_S = 1\,sec$'$I_C = 360$, $T_C = 6\,min$とし，フィルタは$M=1$，$m=180$, $IEO=0$ とした。またこの例ではαとβを（5.3.22）の関係と最小自乗法を用いて推定し，その値を用いて（5.3.24）により燃料流量を定めるような適応制御系とした。これらの結果はこの制御系が十分良い制御性能を持つことを示すと共にαとβは水冷壁出口流体温度の関数で与えれば十分であることを示している。そこでこれを実ボイラに適用できる可能性を得たわけである。

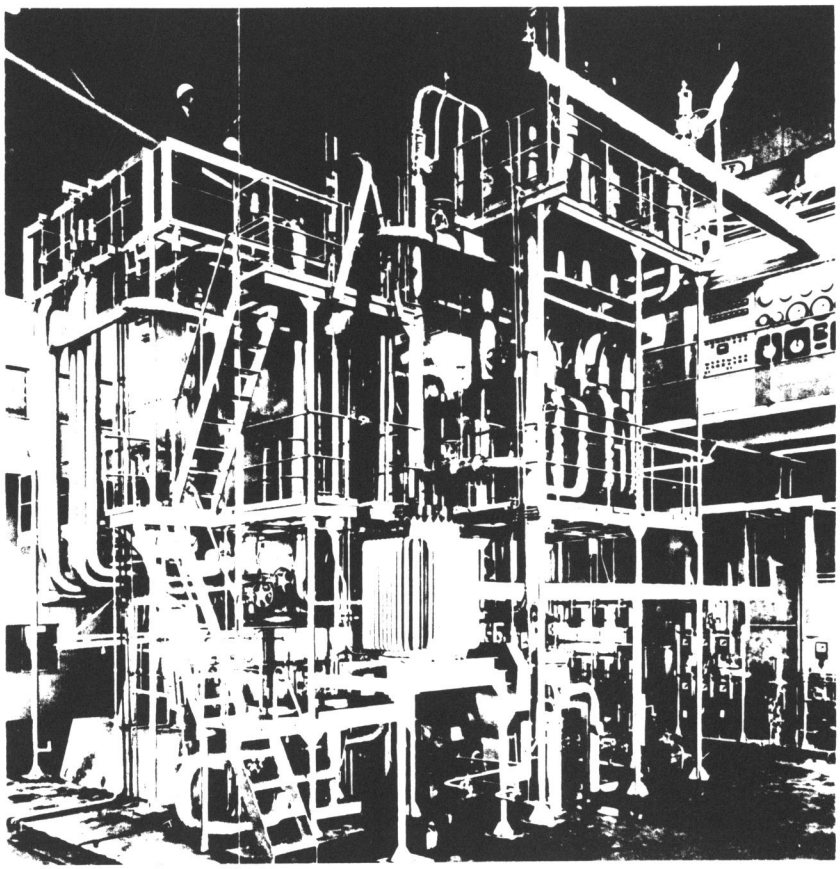


図5.3.10　テスト用ボイラ〔三菱重工㈱長崎研究所〕

プラント	ボイラ	
	形式	三菱CE-スルザー・コンバインド・サーキュレーション
	蒸発量	2 t/h
	蒸気圧力	246kg/cm²(設備能力 350kg/cm²)
	蒸気温度	538°C (最大 570°C)
	タービン発電機シミュレータ	
	MELCOM EA-7160 アナログ計算機	
	給水ポンプ	
	3連プランジャ形可変速(V.S モータ)入出力ラインに蓄圧器付	
	燃焼系	
	火炉	変動火炉, 平衡通風
	バーナ	空気噴霧式 2バーナ単一ガン, トップファイヤリング
	イグナイタ	フロント式 プロパンクスイグナイタ 1台
	火炎検出器	紫外線式 三菱-CEフレームスキャナ 1台

制御装置	計算機システム		
	システム名称	MELCOM 350-30F SYSTEM	
	記憶容量	主メモリ(コア)	32 KWDS
		補助メモリ(磁気ドラム)	128 KWDS
		(1 WD = 16 BITS + 1 PARITY BIT)	
	サイクルタイム	2.0 μ Sec	
	周辺装置	システム タイプライタ	1台
		アナウンスメント タイプライタ	1台
		紙テープ パンチャ	1台
		紙テープ リーダ	1台
	入出力*	アナログ入力	93(112)点
		ディジタル入力	184(224)点
		プロセス割込入力	23(24)点
		アナログ出力(RD)	10(10)点
		パルス中出力	29(32)点
		ディジタル出力	231(256)点
			*括弧内は装備能力
	アナログ制御装置(サブシステム)		
	電子式 MS-70 シリーズ		
	バーナコントロールロジック(サブシステム)		
	電磁リレー式		
	(MELCAP を1次試験に使用)		

表 5. 3. 2　テスト用ボイラの設備概要

5. 4　テスト用　ボイラによるテスト

5. 4. 1　テスト用コンバインド・サーキュレーション・ボイラ

提案した超臨界圧ボイラの水冷壁出口流体温度の昇温制御系の有効性がシミュレーションにより確かめられたので，これを実ボイラに適用し，実際の有効性を確かめることができた。その結果を最後に紹介する。

このテストに用いたボイラはボイラの製造上のテスト，蒸気の工学上のテスト等の目的のために三菱重工㈱の長崎研究所に設置されているもので，表 5. 3. 2 のような設備内容を持つものである。蒸気出力は 2.*Ton*／*Hour* と極く小さなものであるが，蒸気の条件（圧力 246kg／cm^2 ，温度 538℃ ）は 1,950*Ton*／*Hour* (60万KWに相当）規模の事業用ボイラと全く同じであり，主要な装置も規模以外は同じと考えてよい。ただしタービン発電機は設置されておらず，その目的のためにアナログ計算機*MELCOM EA*−7160 がシミュレータとして設置されている。ボイラの概観を図 5. 3. 10 に与えた。

5. 4. 2　計装と*DDC*システム

ボイラ制御系としてはアナログ・ワイアド・ロジック制御系の他に，*DDC*制御系を実現するために制御用計算機*MELCOM*350−30*F* が併置されていた。ここで行ったテストはこの*DDC*制御系で実施したものである。この場合には図 5. 3. 7 に示した協調制御系の給水制御器，燃料制御器，空気制御器，蒸気温度圧力器等は総て*DDC* 化された*PID* 制御器である。これらの制御器は制御周期が 2 ～ 120 秒で駆動された。この*DDC*によるテスト結果は昭和47年三菱重工㈱と三菱電機㈱の共同研究の成果として各電力会社，電力中央研究所等をまねいて発表された。(61) 詳

細は文献(61),(62)に発表されている。

昇温制御系は図5.3.7(b)のような位置に挿入される。図5.3.8は実験で用いた昇温制御系である。サンプル周期は$T_S = 6sec$で，$M=1$，$m=7$，$IEO=1$と$M=1$，$m=7$，$IEO=1$の2つの微分フィルタが設置されている。昇温途中で水冷壁出口温度を保持するときと定格温度近くなったとき後者の値を用いる。制御周期は$T_C=2min$（$I_C=15$）だが，保持中と定格付近では$T_C=30sec$（$I_C=5$）である。

5.4.3 昇温制御系のテスト結果

希望昇温率は$D_{TWWO}=205℃/Hovr$として冷態起動した結果が図5.3.11である。下段に微分フィルタの出力が記録されていて，ほぼ希望昇温率を達成しているのがわかる。

ただし最終設定温度が415℃に比べて少し行き過ぎたので，制御パラメータ（図5.3.8のRr）を修正して実験したものが図5.3.12であり，行き過ぎは改善されている。図5.3.8は，保持状態を含む場合のテスト結果である。これらの結果よりこの制御系が十分実用的であることがわかった。尚ここで与えた記録は計算機よりトレンド・レコーダへ出力し記録したものである。

5.5 まとめ

第2章で提案したディジタル微分フィルタは同定以外にも有効に利用し得ることを示すためにドラム式ボイラの起動時昇温昇圧制御系と超臨界圧ボイラの起動時昇温制御系の構成への適用について論じた。その制御性能を確かめるためにシミュレーションと，テスト用に設置された実ボイラによるテストを行ない，その結果から考えて，それらが十分に実用に耐え得るものであることを示した。

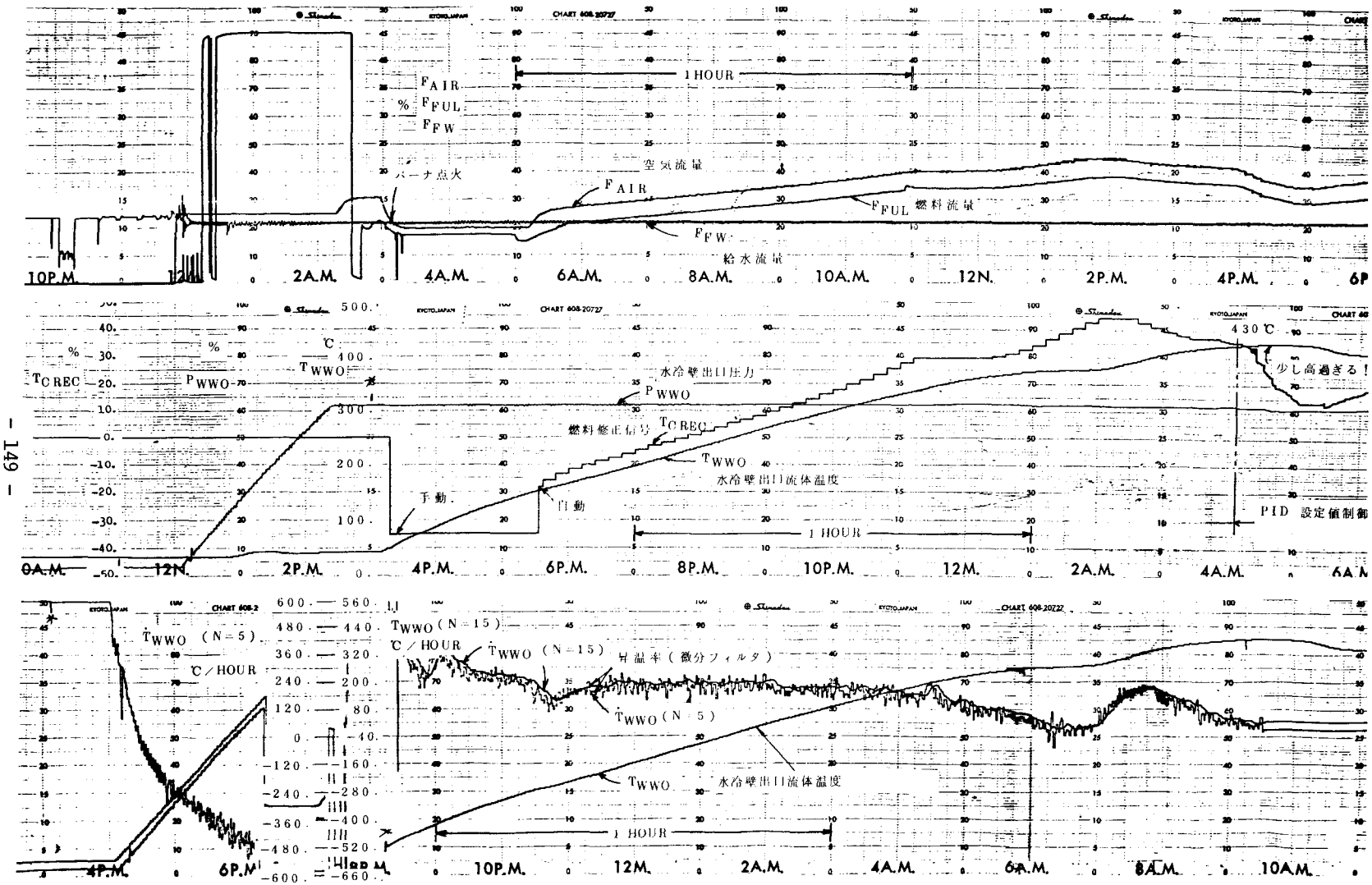
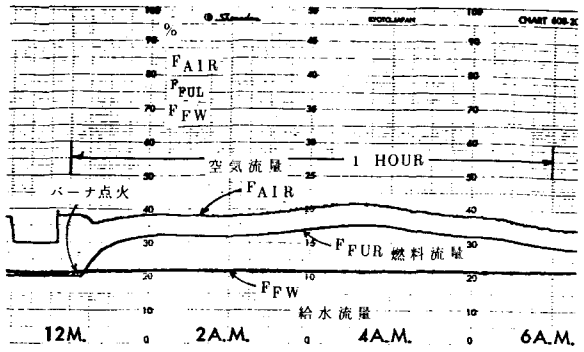
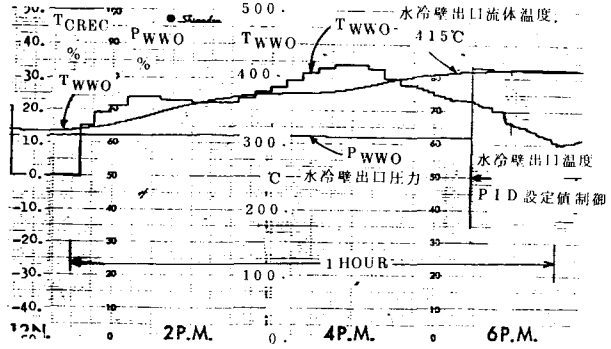


図5.3.11　定格温度までの昇温（パラメータ修正前）





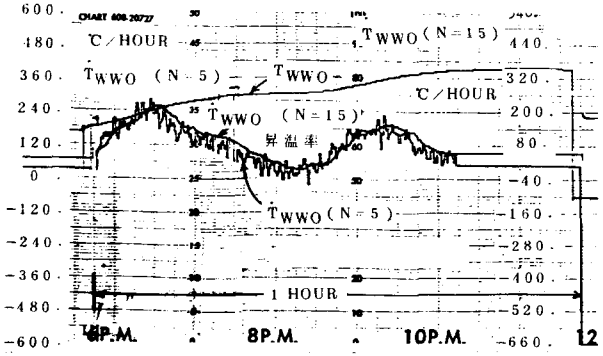
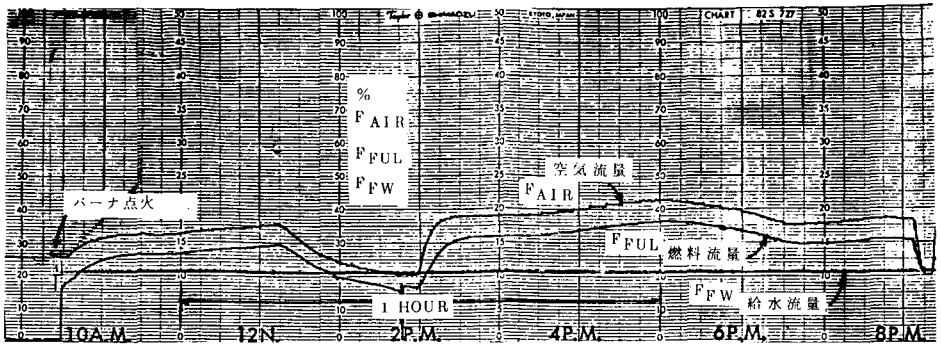
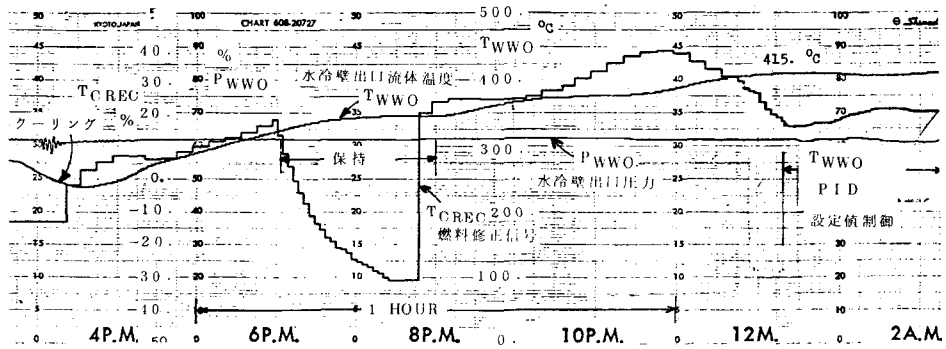


図5.3.12　定格温度までの昇温（パラメータ修正後）





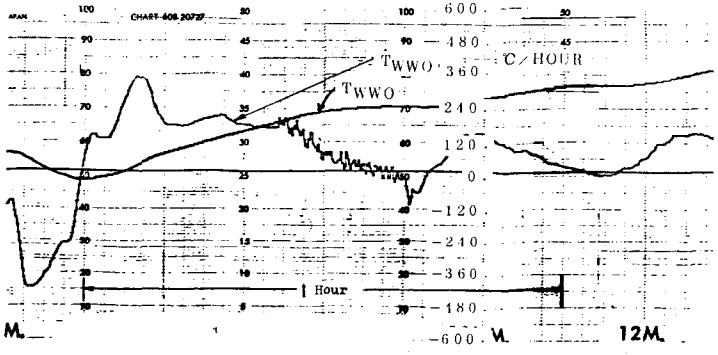


図5.3.13　途中で昇温保持を含むもの

結　　論

信号の微分を求め，これを利用しようとすることは従来よりできれば避けて通るべきものとされてきた。それは微分をするという演算は高域の周波数成分に敏感であるために，雑音の存在する場合など，そのレベルやスペクトルの分布の状況等によっては本来の信号の微分信号とは似ても似つかない信号を出力する場合が多かったことによる。ところが一方で距離の微分としての速度，加速度等，微分することにより物理的に本質的な量が導き出されることを知っている。本来多くの自然の法則が微分方程式に基づいて議論されることからもその重要性が認識できる。

著者は観測信号の極く低域の成分の微分信号のサンプル値を，ディジタル・フィルタを用いて抽出する方法を採用した。特に有限インパルス応答形といわれる形式のディジタル・フィルタに着目し，これを用いると理想的な線形位相特性を持たせることができるのでこの特性を持つものに範囲を限定した。最小自乗法と *Zolotarev* 多項式を用いた1階の狭帯域のディジタル微分フィルタの設計法を与え多くの設計例を与えた。又低域と1階の微分フィルタを適当に選びこれらをカスケード接続すると位相特性が同じで，しかも同じ低域スペクトル成分の信号の任意階の微分信号を得ることができることを示し，これをカスケード形ディジタル微分フィルタと名付けその設計データと特性について詳細に検討を加えた。

カスケード形ディジタル微分フィルタの応用として定常線形システムの同定特にその入出力信号のサンプル値を基にして直接伝達関数を推定する手法を提案し，簡単な2つの例を用いてシミュレーションによりその妥当性を示した。

さらにこの同定法の有効性を確かめるために実際の工業プラントの同定に利用してみた。すなわち火力発電所におけるタービン発電機系の特性，製紙工場での抄紙機の坪量系，水分系の特性そして製鉄工場でのレバーシング・コールド・ミルの特性の推定を行ない，従来よりの経験より得られた値に近い結果を得ることができ，ほぼその有効性が確かめられた。

最後にこのカスケード形ディジタル微分フィルタの他の応用としてドラム形ボイラの起動時昇温昇圧制御系の構成，超臨界ボイラの起動時昇温制御系の構成について示し，これらの性能はシミュレーションにより妥当性を確かめたうえで，テスト用に設置された実ボイラ等により実験テストし，十分実用に供し得るものであることを確かめることができた。

このように観測信号よりディジタル微分フィルタを用いて微分信号を抽出する手法は極めて有用であることを確かめることができたので，さらに別の制御分野へも適用できるものと確信しさらに研究を進めることにして，この論文の結論とする。

謝　　辞

この研究は著者が三菱電機株式会社において計算機制御に関する研究を進める過程で得られた結果をまとめたものである。

著者が三菱電機において研究生活を始めるに際し同定問題への興味とその研究への動機を与えて下されたばかりか，今日この研究の遂行とまとめにあたり御厚意あふれる御指導を賜った大阪大学工学部電気工学科鈴木胖教授，そしてこの研究をまとめるにあたり懇切な御教示と御審査をいただいた同電気工学科藤井克彦教授，同西村正太郎教授，同通信工学科児玉慎三教授，そして同機械工学科増淵正美教授に対して深く感謝の意を表する次第であります。

又学会等の場において種々有益な御教示と御討論をいただいた先生方，特にディジタル・フィルタに関し有益な御教示をいただいた東北大学工学部電子工学科樋口龍夫助教授，同田所嘉昭博士そしてZolotarev 多項式の存在と計算法について御教示をいただいた東京工業大学工学部電気電子工学科後藤尚久助教授，制御工学での種々の問題につき御討論いただいた横浜国立大学工学部安全工学科清水久二助教授，調和解析に対する御指導をいただいた慶応義塾大学工学部情報工学科魚返正教授，著者に数理的解析の面白さを植付けて下された恩師都立高校教諭千秋駿一氏の方々に対して深く感謝の意を表する次第であります。

そして実際のプラントよりのデータの採取や実験プラントの利用等に関して御援助と御協力をいただいた関西電力株式会社，新日本製鉄株式会社，三菱製紙株式会社，および三菱重工業株式会社の関係各位に深く感謝の意を表する次第であります。

又常に適切な研究目標と御鞭達をいただき，研究の遂行に際しては数々の御便宜を計っていただいた三菱電機システム事業部のコンピュータ・システム工場の武田英夫工場長，米沢克昌部長，久保田伸夫次長，専門部長真鍋舜博士，新宅三喜男部長代理，花村泰助部長代理，小田橋正寿部長代理，橋本健司部長代理，五十嵐真部長代理，中谷貴寿部長代理および関連分野の各担当者の方々に深く感謝の意を表します。

最後に著者の研究生活の初期よりお世話いただいた三菱電機（株）中央研究所副所長馬場準一博士，同計算機事業部電子計算機営業第二部大鳥羽幸太郎部長，同計算機事業部長付中村敏行氏そしてこの論文を書く機会を与えていただき種々の御援助をいただいた同計算機事業部計算機製作所ソフトウェア製造部次長首藤勝博士，著者の上長としてお世話いただいている同計算機事業部計算機研究部の松本大四部長，同関本彰次主任研究員，また種々の数理解析につき御指導いただいた半場哲専門課長および多くの同僚各位に対して，又一年間の短い期間であったけれども種々の有益な御教示をいただいた三菱電機（株）中央研究所主任研究員上村勝彦博士，同主任研究員伊藤貴康博士に対して，日頃のお礼をこめて感謝の意を表します。

そしてこの研究をまとめるにあたっては我が妻喬子の並々ならぬ助力を受けたことを記し，私事ではありますが感謝の意を表しておきたいと思うものであります。

付　　録

一般化逆行列

任意の行列**A**に対して次の4つの性質を満たす行列**X**が存在する。すなわち

1. $\mathbf{A}\,\mathbf{X}\,\mathbf{A}=\mathbf{A}$ （付－1）
2. $\mathbf{X}\,\mathbf{A}\,\mathbf{X}=\mathbf{X}$ （付－2）
3. $(\mathbf{A}\,\mathbf{X})^{*}=\mathbf{A}\,\mathbf{X}$ （付－3）
4. $(\mathbf{X}\,\mathbf{A})^{*}=\mathbf{X}\,\mathbf{A}$ （付－4）

である。右肩の＊は転置共役を意味する。**A**が実数行列なら"＊"は"T"で良い。

この**X**のことを**A**の一般化逆行列といい$\mathbf{A}^{+}$と表わす。

一般化逆行列には興味ある性質がたくさんあるが、この論文で用いている結果だけをまとめておく。便宜上　**A**は　m×n　行列で　rank **A**＝rとしておく。

〔性質－1〕　$\mathbf{A}^{+}=(\mathbf{A}^{T}\mathbf{A})^{+}\cdot\mathbf{A}^{T}=\mathbf{A}^{T}\cdot(\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{T})^{+}$ （付－5）

特に　r＝nなら　$\mathbf{A}^{+}=(\mathbf{A}^{T}\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{A}^{T}$ （付－6）

r＝mなら　$\mathbf{A}^{+}=\mathbf{A}^{T}\cdot(\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{T})^{-1}$ （付－7）

〔性質－2〕　$\mathbf{A}^{+}\cdot(\mathbf{A}^{+})^{T}=(\mathbf{A}^{T}\mathbf{A})^{+}$

〔証明〕

$$\mathbf{A}^{+}(\mathbf{A}^{+})^{T}=\{(\mathbf{A}^{T}\mathbf{A})^{+}\cdot\mathbf{A}^{T}\}\{(\mathbf{A}^{T}\mathbf{A})^{+}\cdot\mathbf{A}^{T}\}^{T} \quad \text{（付－5）より}$$

$$=(\mathbf{A}^{T}\mathbf{A})^{+}\cdot(\mathbf{A}^{T}\mathbf{A})\cdot(\mathbf{A}^{T}\mathbf{A})^{+}$$

$$=(\mathbf{A}^{T}\mathbf{A})^{+} \quad \text{（付－2）より} \quad \text{（付－8）}$$

〔性質－3〕　**B**を　m×ℓ行列として行列方程式

$$\mathbf{A}\,\mathbf{X}=\mathbf{B} \quad \text{（付－9）}$$

を考える。この場合

〔1〕　m≦nのときはCを　n×ℓ　の任意行列として

$$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{+}\cdot\mathbf{B}+(\mathbf{I}-\mathbf{A}^{+}\mathbf{A})\mathbf{C} \quad \text{（付－10）}$$

〔2〕　m＞nのとき（付－9）を満たす**X**は必ずしも存在しないが

$$\|\mathbf{A}\mathbf{X}-\mathbf{B}\|^{2} \quad \text{（付－11）}$$

を最小にする　**X**は

$$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{+}\cdot\mathbf{B} \quad \text{（付－12）}$$

で与えられる。

参考文献

(1) アイ・マリツェフ「線型代数学」 1
商工出版 (1960)

(2) 古田勝久 「線形システム理論」
昭晃堂 (1973)

(3) R. Penrose "A Generalized Inverse for Matrices"
Proc. Cambridge Philos. Sos., 51, pp.406-413 (1955)

(4) R. Penrose "Qr Best Approriximate Solutions of Linear Matrix Equations", Proc. Cambridge Philos. Sos., 52, pp. 17-19 (1956)

(5) R. E. Cline "Representations for the Generalized Inverse of a Partitioned Matrix,"
J. SIAM, Vol. 12, No. 3, pp.588-600 (1964)

(6) J. L. Doob "Stochastic Processes"
John Wiley and Sons (1953)

(7) N. Wiener "Generalized Harmonic Analysis"
Acta Math., Vol. 55, pp. 117-258 (1930)

(8) 藤井光昭 「時系列解析」
コロナ社 (1974)

(9) N. Wiener "Extrapolation Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series."
M. I. T. Press (1949)

(10) 伊藤　清　「確率論」
岩波書店　(1953)

(11) K.W.Goff "Estimating Characteristics and Effects of Noisy Signals"
ISA Jour., pp. 45−49 (1966, Nov.)

(12) 河田竜夫　「応用数学概論 II」
岩波書店　(1952)

(13) 国沢清典　「近代確率論」
岩波書店　(1951)

(14) 国沢清典　「現代統計学　上，下」
広川書店　(1956)

(15) R.E.A.C. Paley and N.Wiener "Fourier Transforms in the Complex Domain"

(16) 鈴木 胖，藤井 克彦「操業状態における一般化した線形プロセスの動特性推定」
電気学界雑誌，Vol. 87−2，№941，pp. 432−440(1967.2)

(17) 鈴木，藤井　「プロセス同定問題への最小自乗法の応用」　計測と制御，Vol. 10，№8，pp 563−578 (1971)

(18) 鈴木，古谷，藤井　「動特性推定に用いるプロセス操業データの処理方法」計測自動制御学会論文集，Vol. 4，№2，pp. 175−181 (1968)

(19) 鈴木，古谷，藤井　「最小自乗法による無定位性プロセスの動特性決定」計測自動制御学会論文集，Vol.2，№4，pp. 289−294 (1966)

(20) 高木貞治　「代数学講義」
共立出版　(1930)

(21) 鈴木 胖 「アイデンティフィケーションの基礎理論」
自動制御技術 12

(22) 鈴木，峠，藤井，西村 「最小自乗法による線形プロセスの動特性決定について」計測自動制御学会論文集，Vol.1，№2，pp.163－173（1965）

(23) 茅 陽一 「相関を利用した周波数応答測定法」計測と制御
Vol.2，№1，pp 33－40（1963.1）

(24) M.J. Levin "Optimum Estimation of Impulse Response in the Presence of Noise", IRE Trans.on Circuit T.

(25) M.J. Levin "Estimation of a System Pulse Transfer Function in the Presense of Noise", IEEE Trans., Vol. AC－9，№ pp. 229–235（1964）

(26) K. Steiglitz and L.E. Mcbride "A Technique for the Identification of Linear Systems", IEEE Trans., Vol.AC－10，№5，（1965.10）

(27) K.G. Oza and E.I. Jury "System Identification and Principle of Random Contraction Mapping", SIAM J. Control, Vol.6，№2，pp. 244－257（1968.4）

(28) 古田，河 「多変数系の同定」
計測自動制御学会論文集，Vol.8，№5，pp.561－567（1972）

(29) D.G.Luenberger "An Introduction to Observer"
IEEE AC－19，№16，pp.596－602（1971）

(30) C.M. Rader, B.Gold "Digital Filter Design Technipues in the Frequency Domain"
Proc. IEEE, Vol.55，№2，pp.149－170（1976）

(31) B.Gold, C.M.Rader "Digital Processing of Signals"
Mac GRAW-Hill (1969)

(32) Achieser "Vorlesungen über Approximationstheorie"
Akademie-Verlag,Berlin (1953)

(33) 竹内端三 「楕円函数論」
岩波書店 (1936)

(34) R. Levy "Generalized Rational Functions Approximation in Finite Intervals Using Zolotarev Functions" IEEE Trans.,MTT-18, pp. 1052-1064 (1970)

(35) N. Goto "An Application of Zolotarev Polynomial to Array Antenna Synthesis" Trans. IECE, Vol. E-52, №1, pp.9-12 (1976)

(36) 竹内端三 「函数論」下巻
裳華房 (1974)

(37) 長沢, 岡本, 谷口, 森本 「蒸気タービンの広域回転数制御装置(DACA)」
三菱重工技報, Vol.4, №3, pp.11～19 (1967)

(38) 高橋, 関根 「フロー交流法による潮流計算」
電気学会誌, Vol.88, №10, pp.199-208 (1968)

(39) 谷下 「ボイラの蓄熱容量」
日本機械学会誌, Vol.56, №417, pp. 760-763 (1953)

(40) 片岡, 加藤, 古沢 「図説電気工学大事典：火力発電編」
電気書院 (1967)

(41) 島, 小笠原, 佐々木, 藤原 「超臨界圧コンバインド・サーキュレーション・ボイラの制御」
三菱重工技報, Vol.4, №3, pp.20-26 (1967)

(42) R, R, Debolt "A "Natural" 3-Mode Controller Algorithm for DDC" ISA Jour., pp. 43-47 (1966, Sept.)

(43) J.J. Miller "Time-Qptimal Control of Basis Weight" Instrumentation Technology, pp. 41-47 (1972, March)

(44) G.F. Bryant, M.H.Butterfield " Simulator Assessment of Tandem Cold-Rolling-Mill Automatic Gange-Control Systems" Proc. IEE, Vol. 111, №2, pp. 393-405 (1964)

(45) 相良，和田 「バイアス補償最小自乗法による推定」 計測自動制御学会論文集，Vol. 10，№4，p.461-467 (1974)

(46) C.K. Yuen "Function Approximation by Walsh Series", IEEE Trans. Com., Vol. C-24, No. 6, pp.590-598 (1975.6)

(47) E. Parzen "Some Recent Advances in Time Series Modeling", IEEE Trans., Vol.AC-19, No.6, pp. 723-730 (1974. 12).

(48) L.R. Rabiner and R.W. Schafer "On the Behavior of Minimax Relative Error FIR Digital Differentiators", Bell Syst. Tech. J., Vol 53, No.2, pp. 393-361 (1974. 2)

(49) L.R. Rabiner and R.W. Schafer "On the Behavior of Minimax FIR Digital Hilbert Transformers", Bell Syst. Tech. J., Vol. 53, No. 2, pp. 363-393 (1974. 2)

(50) J.H. MaC clellan, T.W. Parks and L.R. Rabiner "A Computer Program for Designing Optimum FIR Linear Phase Digital Filters", IEEE Trans., Vol. AU-21, No.6 pp. 506-526 (1973. 12)

(51) A. Peled and B. Lin "A New Approach to the Realization of Nonrecursive Digital Filters", IEEE Trans. Vol. AU-21, No. 6, pp. 477-484 (1973. 12)

(52) M.A. Muslander and J.F. Jaffe "Functional Structure of IBM Virtual Storage Operating Systems", IBM Syst. J., Vol. 12, No.4, pp. 368-411 (1974)

(53) C. S. Duris and M. G. Temple "A Finite Step Algorithm for Determining the "Strict" Chebyshev Solution to A. x=b", SIAM J. Numer. Anal., Vol. 10, No. 4, pp.690-699 (1973. 7)

(54) G. C. Maenhout and W. Steenaart "A Direct Approximation Technique for Digital Filters and Equalizers", IEEE Trans., Vol. CT-20, No. 5, pp. 548-555 (1973. 7)

(55) T. Pavlidis "Waveform Segmentation through Functional Approximation", IEEE Trans., Vol. C-22, No. 7, pp. 689-697 (1973. 7)

(56) S. Yakowitz and S. R. Parker "Computation of Bounds for Digital Filter Quantization Errors", IEEE Trans., Vol. CT-20, No. 4, pp. 391-396 (1973. 6)

(57) K. S. Chao and K. S. Lu "On Sequential Refinment Schemes for Recursive Digital Filter Design", IEEE Trans., Vol. CT-20, No. 4 pp. 396-401 (1973. 6)

(58) D. S. K. Chan and L. R. Rabiner "Theory of Roundoff Noise in Cascade Realization of Finite Impulse Digital Filters" Bell Syst. Tech. J., Vol. 52, No. 3, pp. 329-345 (1973. 3)

(59) J. E. Shore "On the Application of Haar Functions" IEEE Trans., Vol. COM-21, No. 3, pp. 209-216 (1973. 3)

(60) J. Wolf and W. L. Green "Application of a Minicomputer for Practical Realization of Predictive Compensation", ISA Trans., Vol. 12, No. 3, pp. 265-280 (1973. 7)

(61) 「火力発電所計算機制御技術研究会報告」 その1
三菱重工㈱, 三菱電機㈱, (1973)

(62) K.Fujii, S.Oyagi, T.Kamei, H.Morimoto, H.Yoshitoshi and S. Watanebe "Application of Digital Control to Thermal Power plant for Automotion", 4 th IFAC/IFIP Irter. Conf. on Digital Comp.Appl. to Procoss Control, pp. 184-195 (1974.3)

著者発表関連論文一覧表

学会正論文

(A1) 立花「同定を含む超臨界圧ボイラ水冷壁出口温度の起動時昇温制御」計測自動制御学会論文集，Vol.8，No.2，pp.147−154 (1972.4)

(A2) 立花「ディジタル・フィルタを用いた同定」計測自動制御学会論文集，Vol.9，No.4，pp.438−445 (1973.8)

(A3) 立花，首藤「ハイブリッド・フィルタを用いた変化率の計測」計測自動制御学会論文集，Vol.11，No.3，pp.328−332 (1975.6)

(A4) 立花，首藤「カスケード・ディジタル微分フィルタによる伝達関数の推定」電子通信学会論文誌，Vol.58−D，No.9，pp.546−538 (1975.9)

(A5) 半場，立花「有限Haar展開を用いた心電図の表現と認識について」電気学会論文誌 C，Vol.7，No.7，pp 149-156 (1976.7)

国際会議予講集 (*印 本人発表)

(B1)* K. Uemura & Y. Tachibana: Practical Method for State Estimation in Power System. Proc. IFAC Kyoto Symposium on System Engineering Approach to Computer Control. pp. 467-471 (1970. 8).

(B2) K. Uemura & Y. Tachibana: Simplified Estimator for Power Systems State Estimation, IEEE Winter Power Meeting, 71-cp-19-PWR (1971. 2).

(B3)* Y. Tachibana & M. Sudo: A Computer Evaluation taking into account of its sequential Behaviour, Proc. of IFAC/IFIP Workshop on Real-Time Programming, Hungary pp. 219-229 (1974. 3)

(B4)* Y. Tachibana & T. Kamei: Temperature Raise Control of Super Critical Boiler using Derivative Digital Filter, Proc. of 4th IFAC/IFIP Intrn. Conf. On Digital Computer Applications to Process Control, Zurich Switzerland, pp. 382-393 (1974. 3).

学　会　誌

(C1)　立花「最近の計算機制御に関する研究の動向」
電子通信学会誌，Vol.58，No.3，pp.281−284(1975.3)

学会研究会資料

(D1)　半場，立花「Fourier 展開係数の評価の一方法について」電気学会プログラム研究会資料13−2　(1970.10)

(D2)　立花，半場「信号の変化率を抽出するアルゴリズムについて」電気学会情報処理研究会資料 IP−71−24　(1971.12)

(D3)　半場，立花「ディジタル・フィルタを用いた相関関数の近似的計算法」電気学会情報処理研究会資料IP−73−7　(1973.4)

(D4)　立花，紀本，首藤「シーケンス制御系としての電子計算機系の評価について」電子通信学会電子計算機研究会資料 EC73−18　(1973.6)

(D5)　半場，立花「高速ハール展開(FHT)について」電気学会情報処理研究会資料 IP−73−13　(1973.7)

(D6)　立花，紀本，首藤「むだ時間を固定する線形系同定プログラムシステムについて」電子通信学会回路とシステム研究会資料CST−74−4　(1974.4)

(D7)　立花，紀本，首藤「カスケード微分ディジタル・フィルタについて」電子通信学会回路とシステム研究会資料CST−74−22　(1974.6)

（D8）　立花，首藤「循環形待行列モデルによる計算機システムの性能評価シミュレータ」電子通信学会電子計算機研究会資料 EC75−7　（1975. 5）

（D9）　立花「カスケード微分フィルタを用いた状態観測器について」電子通信学会回路とシステム理論研究会資料 CST75−68　（1975−10）

学会講演会

（E1）　立花「変化率推定フィルタについて」
計測自動制御学会北海道支部　（1969. 11）

（E2）　上村，立花「一般化逆行列を用いた状態の推定」
電気学会講演会　（1970. 2）

（E3）　上村，立花「電力潮流の逐次推定」
電気学会講演会　（1970. 2）

（E4）　上村，立花「大規模システムの状態推定」
第9回計測自動制御学会学術講演会　（1970. 8）

（E5）　立花「変化率ディジタルフィルタについて」
第14回自動制御連合講演会　（1971.11）

（E6）　立花「システム分解によるDDCのフェイルセーフの復帰性と自動手動の切替」
第11回計測自動制御学会学術講演会　（1972.8）

（E7）　立花，居原田，首藤「DDC言語MDSSによるボイラ昇温制御系の構成と適用」
第15回自動制御連合講演会　（1972.11）

（E8）　居原田，首藤，立花「DDCにおけるPIDアルゴリズムの飽和特性について」
昭和47年度電気関係学会関西支部連合大会　（1972.10）

(E9)　居原田，立花，首藤「DDC用PI制御器の最適パラメータ決定のためのシミュレーション・プログラム」
昭和48年度電子通信学会全国大会　(1973)

(E10)　立花，紀本，首藤「汎用同定プログラム(GIDS)について」
昭和49年度電子通信学会全国大会　(1974)

(E11)　立花，首藤「計算機負荷シミュレーションの一手法」
昭和50年度電子通信学会全国大会　(1975)

(E12)　立花「状態観測器の一近似的構成法について」
第18回自動制御連合講演会　(1975.11)

(E13)　立花，稲本，首藤「レバーシング・コールド・ミルにおける圧下影響係数の推定」
第14回計測自動制御学会学術講演会　(1975.8)

(E14)　立花「区分的に最小自乗法を用いた折線の近似」
昭和51年度電子通信学会総合全国大会　(1976)

(E15)　立花「微分フィルタを用いた多変数系の同定」
計測自動制御学会第5回制御理論シンポジウム　(1976.5)

三菱電機技報

(F1)　千葉，松本，武藤，立花「パワー・ステートメント」
三菱電機技報，Vol.41，No.9，pp.1143－1147　(1976)

(F2)　立花，紀本「計算機制御におけるディジタル・フィルタの応用」
三菱電機技報，Vol.48，No.2，pp.777－784　(1974)

(F3)　星野，高橋，立花「三菱製紙向けMELCOM350−30Fシステム」
三菱電機技報，Vol.51，No.9，pp.（1976）

(F4)　立花，稲本，高橋「工業プラントにおける同定」
三菱電機技報，Vol.51，No.2，pp.（1976）