

Title	微分信号抽出手法によるシステム同定と制御系構成に関する研究
Author(s)	立花, 康夫
Citation	大阪大学, 1977, 博士論文
Version Type	VoR
URL	<a href="https://hdl.handle.net/11094/883">https://hdl.handle.net/11094/883</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

微分信号抽出手法によるシステム

同定と制御系構成に関する研究

1977年 1月

立 花 康 夫

## 序 論

近年各種の工業プラントは高度化複雑化し高品位の製品を生み出すことが可能となってきた。これに伴いプラント各部の制御性能の向上が要求され制御系にも大きな発展がみられる。そして一方では電子計算機の目覚ましい発達により工業プラントの制御にもそれが適用され、数々の成果をあげつつある。計算機を制御に用いること（計算機制御）により従来のアナログ・ワイアド・ロジック方式では不可能であった複雑な計算を実施することも可能となり、多くの制御理論の結果が実用化されつつあり、制御の範囲がより広められている。

一般に制御系を構成するには次の段階を踏まねばならない。すなわち

- 〔 1 〕 対象とするシステムの特性をより適確に把握すること（同定）。
- 〔 2 〕 その対象システムを制御するのにより高性能で、しかも安価な実現の可能性のある制御システムを見出すこと（制御系の構成）。

である。通常はこの二つの段階は切り離されているが、より高度な制御システムでは、これらが同時に実施される場合もあり、計算機の有効な利用が期待されるわけである。ところが電子計算機を用いる場合には信号を必然的にサンプル値（デジタル信号）として扱う必要があり計算機の基礎的な技法としてデジタル信号処理技術の高揚が計られなければならなくなって来ている。

本論文は著者が三菱電機株式会社において計算機制御に関する研究を進める過程で、デジタル信号処理の技法としてのデジタル・フィルタで特に微分信号を抽出するようなフィルタに着目し、その性質の検討を行ない、いくつかの設計法を考案した。そしてこのフィルタをシステムの同定と発電用ボイラの起動時での昇温昇圧制御系に適用した結果をまとめたもので以下の5つの章より成りたっている。

- 第 1 章 線形システムおよびデジタル信号処理の基礎
- 第 2 章 微分信号を抽出する手法について
- 第 3 章 デジタル微分フィルタを用いた同定
- 第 4 章 実プラントの同定
- 第 5 章 微分フィルタのボイラ昇温昇圧制御系への適用

第 1 章はこの論文の論述を円滑にするための基礎事項として、線形システム理論の必要事項、同定に関する一般事項およびデジタル信号処理のうちで特にデジタル・フィルタに関する必要事項を簡単にまとめた。

第2章ではこの論文の骨子であるデジタル微分フィルタの設計法とその性質について論ずる。一般に信号の微分を抽出することは困難視され、できれば避けて通ろうとする傾向がある。この大きな理由として微分フィルタの周波数特性の形から、入力信号の高調波成分が強調される点にある。すなわち制御系で扱う信号は多くの場合に低域に限られているにもかかわらず、雑音のスペクトルはそれに比べると相当に広範囲に分布しており、微分フィルタを通すことによりまったく意味のない信号を生成してしまうことが多かったことによると考えられる。そこで入力信号のうち有用な信号のみを通す低域フィルタと微分フィルタを組み合わせれば、本当に必要とする微分信号を抽出することが可能となるであろう。ところが、このようなフィルタをアナログ系で構成しようとするとき、超低域成分の信号処理の必要から装置は著しく高価になってしまえばかりでなく、ドリフト現象等のために実現が困難なことが多い。一方このような超低域の信号処理にはデジタル・フィルタがたいへん適している。この論文では信号の低域の成分の微分を抽出するようなデジタル微分フィルタとして特に有限インパルス応答形フィルタ(FIR形と略す。Finite Impulse Response)に着目し、そのいくつかの設計法を提案する。はじめに最小自乗法の意味でもっとも狭帯域のFIR形デジタル微分フィルタの設計を与える。次に1階の狭帯域のFIR形デジタル微分フィルタと同じ次数のFIR形の狭帯域の低域フィルタを考え、それらの周波数特性に対して、低域フィルタの零点の近傍を除けば、両者の比がほぼ理想的な微分演算子 $i\omega$ となるように選定することができることを示す。そして前者を $\kappa$ 段、後者を $M-\kappa$ 段カスケード接続することにより、同じ低域成分の $\kappa=0,1,2,\dots,M$ 階の微分が抽出できるようなFIR形の微分フィルタの構成法と設計例を与える。このフィルタをカスケード・デジタル微分フィルタと名付け第2章以下に述べた各種の制御問題へ適用する。このフィルタを構成するのに必要であった1階の狭帯域のデジタル微分フィルタとしては最初の最小自乗法によるものと、Tschebyscheffの意味で最適なZolotarevの多項式を用いるものを考え、両者の特性の比較を行った。ただし容易に狭帯域の微分フィルタが得られる点から第2章以下では総て最小自乗法により設計したものを使用してある。

第3章は著者の提案した同定法についてまとめた。すなわち第2章で得られるカスケード・デジタル微分フィルタを用いてシステムの入出力の観測値よりその伝達関数を推定する手法を提案する。線形システムではシステムの入出力信号は伝達関数で定まる線形の微分方程式を満足している。もし仮に入出力信号の必要な階数までの微分信号が得られるならば、それらはシステムを表わす微分方程式で定まる一定の線形結合で規定されることになるから、これを用いてこれらの係数、従って伝達関数が推定できるであろう。しかし多くの場合、実際に入出力信号の微分信号を直接計測することは不可能なので、直接このようにして伝達関数を推定することはできない。ところで入出力成分の一部の成分でも同じ帯域のものであれば、元の信号と同じ微分方程式を満たすこと、又各微分値の時間軸を同じ時間だけずらせてもやはり同じ微分方程式を満足すること

を考えると、カスケード・ディジタル微分フィルタから得られる信号もやはり元の微分方程式を満たしていることがわかる。そこでこれを利用して伝達関数を推定する手法を与える。そしてこの手法の妥当性を示すために、あらかじめ知られている1入力1出力の2次系と、2入力1出力の1次系に対する伝達関数の推定をシミュレーションにより実施した結果を示してある。またこの手法でのパラメータ推定は式誤差の自乗和を最小に行っているため、推定値に定常偏差が発生するが、フィルタの特性を選べば、この偏差は十分に小さくできることを中心に、推定値の統計的性質を論ずる。そして特に1入力1出力系の場合に終結式を用いる構造の決定法についても触れている。また無定形システムと無駄時間を含むシステムに対する配慮についても論ずる。

第4章では第3章で提案する同定手法の有効性を確かめるために実プラントの同定に適用した結果を示す。はじめに事業用の火力発電所におけるタービン発電機システムの特性の推定結果を与える。次に製紙工業における最終工程である抄紙機の坪量系および水分系の同定例を与える。このシステムの特徴としては非常に大きな無駄時間が含まれることで、この処理に工夫を施してある。最後に鉄鋼圧延プラントにおけるレバーシング・コールド・ミルと呼ばれる一段形の圧延機特性（圧下影響係数）を推定した例を与える。この例では特に板の厚さを測定するためのX線厚み計と圧延面が離れているための走行無駄時間が、X線厚み計の遅れ時間と同程度となるので、その補償に微分フィルタを用いた点が特徴である。

第5章はディジタル微分フィルタを火力発電用ボイラの起動時での昇温昇圧制御系の構成に適用した例について示す。はじめにドラム式ボイラの昇温昇圧制御系の構成について述べ、シミュレーションにより制御性能を確かめた例を示す。次に超臨界圧ボイラの昇温制御系の構成を考え、まずシミュレーションにより制御系が妥当であることを示す。次にテスト用に設置された実ボイラを用いた実験により、その有効性を示すことにする。このボイラには制御用計算機が設置されDDC（Direct Digital Control）によりボイラ制御系が構成（アナログ・ワイアド・ロジックとの2重計装）されており、その一部に昇温制御系が組み込まれている。何回かの起動実験での記録により、この制御系が十分に実用的であることを示してある。

一般的常識に反し、注意深くさえ用いると、微分フィルタは大変に便利であること、さらに広い制御の問題にも適用できるであろうことを強調して結論とした。

# 微分信号抽出手法によるシステム同定と制御系構成に関する研究

## 目 次

第 1 章	線形システムおよびデジタル信号処理の基礎	1
1.1	序	1
1.2	線形システム理論	1
1.2.1	動的システム	1
1.2.2	定常線形動的システムの表現 (アナログ系)	2
1.2.3	定常線形動的システムの表現 (デジタル系)	4
1.2.4	可制御可観測性	5
1.2.5	線形システムの安定性	7
1.3	同定問題	8
1.3.1	同定	8
1.3.2	アナログ系よりデジタル系への変換	9
1.3.3	可同定性	11
1.3.4	雑音を考慮したシステム	12
1.3.5	試験信号法および相関法	13
1.3.6	インパルス応答の推定法	14
1.3.7	パルス伝達関数の推定法	16
1.3.8	構造決定の問題	17
1.4	デジタル信号の処理	17
1.4.1	確定信号	18
1.4.2	不規則信号	20
1.4.3	デジタル信号	21
1.4.4	アナログ・フィルタ	22
1.4.5	デジタル・フィルタ	23
1.4.6	デジタル・フィルタの設計	23
1.4.7	FIR形デジタル・フィルタ	24
第 2 章	微分信号を抽出する手法について	27
2.1	序	27
2.2	微分信号	27
2.3	最小自乗法によるデジタル微分フィルタ	28

2.3.1	時間領域での性質	36
2.3.2	応答波形	37
2.3.3	種々の特性のフィルタ	37
2.4	カスケード・デジタル微分フィルタ	41
2.4.1	周波数領域での設計	41
2.4.2	基礎となるフィルタおよび設計例	43
2.4.3	応答波形	51
2.5	Zolotarev の多項式によるデジタル微分フィルタ	54
2.5.1	Zolotarev の多項式	54
2.5.2	Zolotarev の多項式を用いた微分フィルタ	56
2.6	デジタル微分フィルタの比較	61
2.7	ハイブリッド形微分フィルタ	63
2.7.1	アナログ FIR 微分フィルタ	63
2.7.2	サンプリング	64
2.7.3	ハイブリッド・フィルタとしての構成	67
2.7.4	応答性評価のためのシミュレーション	68
2.8	まとめ	71
第3章	デジタル微分フィルタを用いた同定	72
3.1	序	72
3.2	伝達関数への変換で生ずる誤差	72
3.3	デジタル微分フィルタによる伝達関数の推定	74
3.3.1	手法の説明	75
3.3.2	具体的な処置	77
3.3.3	簡単な例-1	78
3.3.4	簡単な例-2	80
3.4	推定値の統計的な性質	84
3.5	終結式による構造の決定	87
3.6	無定位形システムに対する配慮	90
3.7	無駄時間を含むシステムに対する配慮	90
3.8	前置フィルタについて	91
3.9	逐次推定のアルゴリズムについて	93
3.10	プログラム・システムについて	95
3.11	まとめ	95

第4章	実プラントの同定	96
4.1	序	96
4.2	火力発電所での例	96
4.2.1	対象システム	96
4.2.2	計測と同定の結果	99
4.3	抄紙プラントでの例	103
4.3.1	対象システム	103
4.3.2	坪量系の同定	103
4.3.3	水分系の同定	105
4.4	圧延プラントでの例	114
4.4.1	対象システム	114
4.4.2	レバーシング・コールド・ミルの数学モデル	115
4.4.3	観測システムの補償	117
4.4.4	A, Bの推定	118
4.4.5	硬さの変化	118
4.4.6	同定の結果	119
4.5	まとめ	126
第5章	微分フィルタのボイラ昇温昇圧制御系への適用	127
5.1	序	127
5.2	ドラム式ボイラの昇温昇圧制御	127
5.2.1	ドラム式ボイラの構造と起動	128
5.2.2	ドラム式ボイラの動特性	130
5.2.3	昇温昇圧制御系	131
5.2.4	昇温昇圧制御系のテスト	132
5.3	超臨界圧ボイラの昇温制御	134
5.3.1	超臨界圧ボイラの構造と起動	134
5.3.2	超臨界圧ボイラの動特性	138
5.3.3	ボイラ制御系	140
5.3.4	水冷壁出口流体温度昇温制御系	144
5.3.5	シミュレーションによるテスト	146
5.4	テスト用ボイラによるテスト	147
5.4.1	テスト用コンバインド・サーキュレーションボイラ	147
5.4.2	計装とD D Cシステム	147



5.4.3	昇温制御系のテスト結果	148
5.5	まとめ	148
結 論		151
謝 辞		152
付 録		153
参考文献		154
著者発表関連論文一覧表		160

# 第1章 線形システムおよびデジタル信号処理の基礎

## 1.1 序

本論文は計算機制御を念頭においてデジタル信号の処理のうち、特にデジタル微分フィルタについて考察を行ない、その結果を定常な線形システムの同定問題と、火力発電用ボイラの起動時での昇温制御系へ適用したものをまとめたものである。第1章ではこれらの論述を円滑にするために線形システム理論、同定問題およびデジタル信号処理技法について簡単に解説する。

## 1.2 線形システム理論

この節ではシステムを取りあつかってゆくうえで必要となる重要な概念と、既に得られている主要結果について、主として定常な線形システムに限定して概説する。特に本論文では考えている時間軸が実数であるものをアナログ系、離散的であるものをデジタル系と名付けていて、両者の対比のもとで議論が展開されることが多いので、この節の中でも、これらに対比しながら説明する。はじめに線形に限らない一般的な動的システムに関する主要概念を説明した後、定常な線形システムに限ってシステムの表現法、可制御可観測性および安定性等に関連する諸概念と主要結果について説明する。

### 1.2.1 動的システム

システムにはいくつかの外部に表われる変数があり、これを外部変数という。この中で独立なものを入力とよび、従属変数となるものを出力とよぶ。システムの機能は、これらの入力と出力の関係により表わされる。<sup>(2)</sup>しかしより高度な制御目的のためにはシステムをさらに分割し、いくつかの構成要素に分けて、それぞれの動作も記述する必要がある場合もある。前者は外部記述後者は内部記述といわれる。これらのシステムの数学的記述をシステムの数学モデルという。

入力と出力が一つの場合を1変数系、入力と出力が複数個の場合を多変数系とよぶ。システムが $r$ 個の入力 $u_1, u_2, \dots, u_r$ と $p$ 個の出力 $y_1, y_2, \dots, y_p$ をもつとして、これらを列ベクトルであらわ

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_r)^T \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_p)^T \quad (1.2.1)$$

す。右肩の“ $T$ ”は転置をあらわす。また時刻 $t$ での値を $\mathbf{u}(t)$ 、 $\mathbf{y}(t)$ 等と記す。 $\mathbf{y}(t)$ が $t$ と $\mathbf{u}(t)$ のみで定まるものを静的システムとよび、そうでないものを動的システムとよぶ。

動的システムでは、出力 $\mathbf{y}(t)$ は $n$ 次のベクトル

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \quad (1.2.2)$$

を用いてはじめて

$$\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\eta}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (1.2.3)$$

と表わされ得る。 $\mathbf{x}$ のことをシステムの状態変数， $\eta(\cdot)$ を出力関数とよぶ。変数 $\mathbf{x}$ の中で $n$ を最小に選んだ場合に， $n$ のことをシステムの次数とよぶ。

アナログ系では，状態変数が微分方程式の初期値問題

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_I\end{aligned}\quad (1.2.4)$$

の解として得られる。 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ は $\mathbf{x}, \mathbf{u}, t$ の適当な関数である。同じようにデジタル系ではサンプル周期を $T_s$ として，時刻 $k \cdot T_s$ での値を $\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k$ 等とあらわすと， $\mathbf{x}_k$ は

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \\ \mathbf{x}_0 &= \mathbf{x}_I\end{aligned}\quad (1.2.5)$$

のような差分方程式の初期値問題として得られる。(1.2.4)と(1.2.3)または，(1.2.5)と(1.2.3)をまとめてシステムの状態方程式という。

### 1.2.2 定常線形動的システムの表現 (アナログ系)

はじめに時間軸が実数の場合 (アナログ系または連続系と呼ぶ) に定常線形なシステム，すなわちシステムの状態方程式が

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_I \quad (1.2.6)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u} \quad (1.2.7)$$

で表わされる場合を考察する。 $\mathbf{A}$ は $n \times n$ 定数行列， $\mathbf{B}$ は $n \times r$ 定数行列， $\mathbf{C}$ は $p \times n$ 定数行列そして $\mathbf{D}$ は $p \times r$ 定数行列である。 $\mathbf{x}_I$ は初期状態とする。

このような場合には遷移行列 $\Phi(t)$ を考えると便利である。すなわち $\Phi(t)$ は

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \mathbf{A} \cdot \Phi(t) \quad \Phi(0) = \mathbf{I} \quad (1.2.8)$$

のような微分方程式の解である。 $\mathbf{I}$ は単位行列である。この初期値問題は<sup>(1)</sup>

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A} \cdot t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathbf{A} \cdot t)^k \quad (1.2.9)$$

で与えられる一意解を持っている。この $\Phi(t)$ を用いると(1.2.6)の一意解は

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \cdot \left( \mathbf{x}_I + \int_0^t \Phi(-\tau) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau \right) \quad (1.2.10)$$

で与えられる。

すなわち $n$ 次の線形動的システムは4つの行列 $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ により特徴付けられることがわかる。

定常系の場合にはさらに種々の積分変換によりより多角的にシステムの表現をおこなうことができ，それによりさらに詳細に性質を調べることが可能である。

入力の変化，従って状態変数や出力を時間区間  $(0, \infty)$  でのみあつかえば良い場合で特に初期値の近傍の値すなわち過渡的な解析を重視するような場合には Laplace 変換が有効である。このときには入力として許される関数族は非常に大きくなる。Laplace 変換演算子を  $\mathcal{L}\{\cdot\}$  逆変換演算子を  $\mathcal{L}^{-1}\{\cdot\}$  と表わすと (1.2.6) 又は (1.2.10) より

$$\mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\} = (\mathbf{S}\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathcal{L}\{\mathbf{u}(t)\} + (\mathbf{S}\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{x}_I \quad (1.2.11)$$

となる。特に  $\mathbf{x}_I = \mathbf{0}$  (零ベクトル) の場合には (1.2.7) と (1.2.11) より

$$\mathcal{L}\{\mathbf{y}(t)\} = \{\mathbf{C}\cdot(\mathbf{S}\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{D}\}\cdot\mathcal{L}\{\mathbf{u}(t)\} \quad (1.2.12)$$

と表わされる。そして  $\mathbf{x}_I = \mathbf{0}$  の場合の入出力の Laplace 変換の比を伝達関数

$$\mathbf{R}(S) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{S}\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{D} \quad (1.2.13)$$

という。伝達関数はシステムの持つ外部からみた総ての特徴を表わしているので，システムの一つの記述法である。(1.2.11) と (1.2.12) を比較すると伝達関数は十分時間が経過し初期条件の影響が無くなったときの入出力の関係を示している。

定常な状態では Fourier 変換も有効な手段である。 $(-\infty, \infty)$  上での信号を考えて，エネルギー有界すなわち二乗可積分なら Fourier 変換が可能である。今 Fourier 変換を  $\mathcal{F}\{\cdot\}$ ，Fourier 逆変換を  $\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$  とする。(1.2.6) および (1.2.7) から，

$$\mathcal{F}\{\mathbf{x}(t)\} = (i\omega\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{B}\mathcal{F}\{\mathbf{u}(t)\} \quad (1.2.14)$$

および

$$\mathcal{F}\{\mathbf{y}(t)\} = \mathbf{R}(i\omega)\cdot\mathcal{F}\{\mathbf{u}(t)\} \quad (1.2.15)$$

を得る。すなわち入出力の Fourier 変換の比は  $\mathbf{R}(i\omega)$  でこれは伝達関数において  $S = i\omega$  と置いたものに相当する。これをシステムの周波数特性という。周波数特性もシステムの特徴を表わしている。

システムの記述法としては周波数特性と関連してインパルス応答による表現法がある。

$$\rho(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{R}(i\omega)\} \quad (1.2.16)$$

をインパルス応答という。(3)物理的に存在する  $\mathbf{R}(i\omega)$  に対しては必ず

$$\rho(t) = \mathbf{0} \quad (t < 0) \quad (1.2.17)$$

となることが証明されている。(9)

このインパルス応答を用いると (1.2.15) の関係式よりわかるように  $\mathbf{y}(t)$  は  $\rho(t)$  と  $\mathbf{u}(t)$  のコンボリューションにより表わされる。(21) すなわち

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^{\infty} \rho(\tau) \cdot \mathbf{u}(t-\tau) d\tau \quad (1.2.18)$$

となる。 $\rho(t)$  もまたシステムの特徴を表わしている。

以上をまとめるとシステムの特徴は  $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  ,  $\mathbf{R}(S)$  ,  $\mathbf{R}(i\omega)$  ,  $\rho(t)$  のいずれによっても表現され得る。

### 1.2.3 定常線形動的システムの表現 (デジタル系)

次に時間軸が離散的な場合について定常線形なシステム (デジタル系またはサンプル値系と呼ぶ) を考える。この場合には各変数の時間依存は右下につけた添字  $k$  で示し, これは整数値をとる。これはサンプル周期を  $T_s$  として時刻  $k \cdot T_s$  での値を示す。そこでシステムの状態方程式が

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_k \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_I \quad (1.2.19)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_k \quad (1.2.20)$$

で与えられる場合を考察する。ここで  $\mathbf{A}$  は  $n \times n$  定数行列,  $\mathbf{B}$  は  $n \times r$  定数行列,  $\mathbf{C}$  は  $p \times n$  定数行列, そして  $\mathbf{D}$  は  $p \times r$  定数行列である。ここでこれらの行列はアナログ系の場合と混同することはないので同じ記号で説明した。その他についても同じ記号を用いている。後で両者を交えて議論する場合には記号を改めて区別する。このとき遷移行列  $\Phi_k$  は

$$\Phi_{k+1} = \mathbf{A} \cdot \Phi_k \quad \Phi_0 = \mathbf{I} \quad (1.2.21)$$

の一意解である。ここで  $\mathbf{I}$  は単位行列である。(1.2.21) を解いて

$$\Phi_k = \mathbf{A}^k \quad (1.2.22)$$

これを用いると (1.2.19) の一意解は

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k \cdot (\mathbf{x}_I + \sum_{j=1}^k \mathbf{A}^{-j} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_{j-1}) \quad (1.2.23)$$

で与えられる。

この場合にも有用な積分変換によりシステムを詳細にあつかうことができる。

時間軸を 0 および自然数に限って議論することができる場合には  $z$ -変換が有用である。 $z$ -変換演算子を  $\mathcal{Z}\{\cdot\}$ , 逆変換演算子を  $\mathcal{Z}^{-1}\{\cdot\}$  とする。(1.2.19) 又は (1.2.23) より

$$\mathcal{Z}\{\mathbf{x}_k\} = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathcal{Z}\{\mathbf{u}_k\} + (z\mathbf{I} - \mathbf{A}^{-1}) \cdot \mathbf{x}_I \quad (1.2.24)$$

と表わされる。特に  $\mathbf{x}_I = \mathbf{0}$  の場合の入出力の  $z$ -変換の比をパルス伝達関数といい  $\mathbf{Z}(z)$  であらわす。すなわち

$$\mathbf{Z}(z) = \mathbf{C} \cdot (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (1.2.25)$$

である。これを用いると十分時間の経過した後の入出力関係が，

$$\mathcal{Z}\{\mathbf{y}_k\} = \mathbf{Z}(z) \cdot \mathcal{Z}\{\mathbf{u}_k\} \quad (1.2.26)$$

と表わされる。

又定常的な場合には Fourier 変換も有用である。ディジタル系での Fourier 変換<sup>(15)</sup>演算子を  $\mathcal{F}\{\cdot\}$ ，逆変換演算子を  $\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$  とする。(1.2.19) で初期時刻を  $k = -\infty$ ，初期値を  $\mathbf{0}$  とすると

$$\mathcal{F}\{\mathbf{y}_k\} = \mathbf{Z}(e^{i\omega T_s}) \cdot \mathcal{F}\{\mathbf{u}_k\} \quad (1.2.27)$$

となる。ディジタル系では，あつかえる周波数が

$$|\omega| \leq \omega_f \quad (1.2.28)$$

に限られてしまう。

$\mathbf{Z}(e^{i\omega T_s})$  をシステムの周波数特性という。

周波数特性に関連してインパルス応答によるシステムの表現法がある。すなわち

$$\rho_k = \mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{Z}(e^{i\omega T_s})\} \quad (1.2.29)$$

をシステムのインパルス応答という。物理的に存在する  $\mathbf{Z}(e^{i\omega \cdot T_s})$  に対しては

$$\rho_k = \mathbf{0} \quad (k = -1, -2, \dots) \quad (1.2.30)$$

となる。このインパルス応答を用いると

$$\mathbf{y}_k = \sum_{j=0}^{\infty} \rho_j \cdot \mathbf{u}_{k-j} \quad (1.2.31)$$

と表わされる。

ディジタル系においてもシステムの表現には， $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ ， $\mathbf{Z}(z)$ ， $\mathbf{Z}(e^{i\omega \cdot T_s})$ ， $\{\rho_k\} k=0$  等があることがわかる。

#### 1.2.4. 可制御可観測性

システムの構造を知る上で重要な可制御性と可観測性について述べておく。この論文ではこの概念を主としてアナログ系で用いるので状態方程式が (1.2.6) と (1.2.7) で与えられる場合すなわち， $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  について考えてみる。

はじめに  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  に関する特徴を表わす可制御性について述べる。(2)

〔 $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  の可制御性〕 時刻  $t_0$  で  $\mathbf{X}_0$  にあるシステムが許容される入力の範囲でしかも有限の時間内に状態値を  $\mathbf{0}$  にすることが可能ならば，対  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  は  $t_0$  で可制御であるという。

すべての  $t_0$  で可制御の場合完全可制御といわれる。ただ定常なシステムの場合には可制御性と完全可制御性は同義語となる。

次に  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  に関する特徴をあらわす可観測性について述べる。(2)

〔 $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  の可観測性〕 システムの入力が  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  である場合に時刻  $t_0$  で状態が  $\mathbf{X}_0$  とする。もし区間  $[t_0, t_f]$  での出力  $y[t_0, t_f]$  を観測するとき  $\mathbf{X}_0$  が一意に定められる場合状態  $\mathbf{X}_0$  が区間  $[t_0, t_f]$  で可観測という。任意の時刻  $t_0$  , 任意の状態  $\mathbf{X}_0$  に対して有限の  $t_f$  が存在して  $\mathbf{X}_0$  が  $[t_0, t_f]$  で可観測なら  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  は完全可観測という。

ただ定常なシステムでは可観測性と完全可観測性は同義語となる。

完全可制御可観測なシステム  $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  の状態変数の数  $n$  は 1.2.1 で述べたシステムの次数である。すなわち  $n$  より小さい状態変数では出力を一意に定め得なくなるからである。これらに関しては次の定理が重要である。

〔定理 1.2.1〕 定常系の  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  が完全可制御であるための必要十分条件は

$$\text{rank } \mathbf{V} = n \quad (1.2.32)$$

で与えられる。ただし  $\mathbf{V}$  は可制御行列という。

$$\mathbf{V} = [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (1.2.33)$$

で与えられる。

〔定理 1.2.2〕 定常系の  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  が完全可観測であるための必要十分条件は

$$\text{rank } \mathbf{N} = n \quad (1.2.34)$$

で与えられる。ただし  $\mathbf{N}$  は可観測行列という。

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C}^T, \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T, \dots, (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T] \quad (1.2.35)$$

で与えられる。

特に 1 入力 1 出力のシステムの場合に伝達関数が

$$R(S) = \frac{B(S)}{A(S)} = \frac{b_0 + b_1 S + \dots + b_{n-1} S^{n-1}}{1 + a_1 S + a_2 S^2 + \dots + a_n S^n} \quad (1.2.36)$$

で与えられる場合を考える ( $a_n \neq 0$ )。

このような伝達関数を持つようなシステムの状態方程式は多様に作ることが可能である。そのなかで

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & \mathbf{I}_{n-1} & & \\ 0 & & & \\ -a_1, \dots, & -a_n & & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [b_0, b_1, \dots, b_{n-1}] \quad , \quad \mathbf{D} = 0 \quad (1.2.37)$$

で与えられる場合が重要である。 $\mathbf{I}_{n-1}$  は  $(n-1) \times (n-1)$  の単位行列である。この時  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  は常に完全可制御である。このような表現は可制御正準形という。

ところで次の定理は重要である。(2)

〔定理 1.2.3〕 伝達関数  $R(S)$  を持つ (1.2.37) で与えられる  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  を持つシステムに対して  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  が完全可観測であるための必要十分条件は  $R(S)$  の分子分母の多項式  $A(S), B(S)$  が既約であることである。

### 1.2.5 線形システムの安定性

まずアナログ系の安定性についての結果を述べる。状態方程式が (1.2.6), (1.2.7) で与えられるシステムの遷移行列  $\Phi(t)$  を考える。

〔アナログ系の安定性〕 任意の  $t \geq t_0$  に対して  $\beta > 0, r > 0$  が存在して

$$\|\Phi(t)\| < \beta e^{-r(t-t_0)} \quad (1.2.38)$$

となる場合このシステムは安定であるという。

この安定性に関しては次の定理が大切である。(2)

〔定理 1.2.4〕 定常な線形アナログ形が安定であるための必要十分条件は行列  $\mathbf{A}$  の固有値の実部がすべて負であることである。

特に (1.2.36) で与えられるような 1 入力 1 出力系の場合には特性方程式

$$A(S) = 0 \quad (1.2.39)$$

の根の実数部が総て負であることが安定であるための必要十分条件となる。

次にデジタル系の安定性についての結果を述べる。



状態方程式が (1.2.19) , (1.2.20) で与えられるシステムの遷移行列  $\Phi_k$  を考える。

〔デジタル系の安定性〕 任意の時刻  $k$  に対して  $\beta > 0$  ,  $0 < \alpha < 1$  が存在して

$$\|\Phi_k\| < \beta \cdot \alpha^k \quad (1.2.40)$$

となる場合このシステムは安定であるという。

この安定性に関しては次の定理が大切である。

〔定理 1.2.5〕 定常な線形デジタル系が安定であるための必要十分条件は行列  $\mathbf{A}$  の固有値の絶対値が 1 以下であることである。

特に 1 入力 1 出力系でパルス伝達関数が

$$Z(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + \cdots + b_{n-1} \cdot z^{-n+1}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + \cdots + a_n \cdot z^{-n}} \quad (1.2.41)$$

で与えられる ( $a_n \neq 0$ ) 場合を考える。

パルス伝達関数が (1.2.41) となるようなシステムでは, その特性方程式

$$A(z^{-1}) = 0 \quad (1.2.42)$$

のすべての根の絶対値が 1 より小であることが安定であるための必要十分条件となる。

### 1.3 同定問題

次に同定問題に関する基礎的な事項について述べ, その手法に関して既に得られている典型的な手法を述べ, 著者が第 3 章で提案する手法との比較検討のための参考とする。

#### 1.3.1 同定

定常な線形システムでは伝達関数 (パルス伝達関数), 周波数特性およびインパルス応答等の外部変数の関係によりシステムを表わす外部記述と状態方程式による内部記述がある。いずれの記述法であるにせよ, より実システムを表現するように作られねばならない。②)

システムの入出力の数が定まっている場合を考えてみる。システムが伝達関数 (パルス伝達関数) で表わされる場合にはその特性方程式の次数のことを, 又状態方程式で表現した場合には状態変数の次元のことを定めることをそれぞれの表現での構造を定めるという。周波数特性および

インパルス応答の場合には表現法を定めたことで構造は定まったということにしよう。

構造を定めるとパラメータの決定によりシステムの表現すなわち数学モデルができあがる。この構造およびパラメータ決定の過程は同定と呼ばれる。

システムの同定を行うにはシステムの実体であるプラント等を物理的あるいは化学的な法則を基にして解析し、それらを構成する要素の物性や化学的性質から構造を決定する方法がある。これは比較的単純な系には極めて有用であり自然の法則がその形の上に反映しているので種々の利点を持っている。しかし大規模かつ複雑なシステムでは解析の過程で生ずる近似や、その表現に要する変数の数が多くなるので、この方法は困難な点が多くなる。

そこでむしろモデルの構造を仮りに選定して入出力の観測値よりパラメータを定めそれを基に数学モデルを求める方が工学的にはより重要な意味をもつ。このような場合の取りあつかいについてのみこの論文ではあつかうことにする。

同定の手法としては、入力として都合のよいものを選び、これをシステムに加えた時の入出力の観測値を用いる試験信号法と、通常の操業時の状態における入出力の観測値を用いる操業時のデータに基づく方法とが考えられている。

又実際のシステムでは観測することのできない種々の外部入力や観測の機構や伝送記録等の過程で不用な信号すなわち雑音が混入する。従ってこれらの雑音に埋もれた信号より種々のパラメータを求めるには確率統計学の力を借りる必要がある。

そして一般に同定のための計算はアナログ系で実施するのは相当複雑であるので、デジタル系（サンプル値系）で計算することになる。デジタル系においてはデジタル電子計算機の力を借りればきわめて複雑な計算も可能となる。その場合工業プラント等は殆んどアナログ系で表現されるものであるからアナログ系よりデジタル系への変換法等も重要な意味をもってくる。この問題をまず始めに考察し、つづいて同定に関する重要事項と手法等について述べる。

### 1.3.2 アナログ系よりデジタル系への変換

アナログ系の入力，出力および状態値などをサンプル周期 $T_s$ でサンプリングして

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k &= \mathbf{u}(k \cdot T_s), \mathbf{y}_k = \mathbf{y}(k \cdot T_s), \mathbf{x}_k = \mathbf{x}(k \cdot T_s) \\ &(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

とする。 $\mathbf{u}(t)$ ， $\mathbf{y}(t)$ ， $\mathbf{x}(t)$ は、アナログ系の状態方程式(1.2.6)，(1.2.7)を満たしている。この場合に、 $\mathbf{u}_k$ ， $\mathbf{y}_k$ ， $\mathbf{x}_k$ はどのような関係を満たすかを考える。この方法についてよく使用されるものをながめておくことにする。(31)

はじめの方法は微分演算子を差分演算子で置きかえる方法である。たとえば

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{z-1}{T_s} \quad (1.3.2)$$

とすると (1.2.6) と (1.2.7) より

$$\mathbf{x}_{k+1} = (\mathbf{I} + T_s \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}_k + T_s \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_k, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_I \quad (1.3.3)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_k \quad (1.3.4)$$

(1.3.3) で  $\mathbf{I} + T_s \cdot \mathbf{A}$  および  $T_s \cdot \mathbf{B}$  を改めて  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  とすればデジタル系の状態方程式 (1.2.19) と (1.2.20) を得る。

次の方法はいわゆるインパルス・サンブラを用いる方法である。すなわち  $\delta(t)$  を Dirac のデルタ関数とした場合システムへの入力として  $\mathbf{u}(t)$  でなくインパルス・サンブラで変調された

$$\mathbf{u}^*(t) = T_s \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{u}_k \cdot \delta(t - k \cdot T_s) \quad (1.3.5)$$

を代入してやるとシステムの状態および出力は入力のサンプル値  $\mathbf{u}_k$  のみで表わすことが可能となる。すなわち (1.2.10) より

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= e^{\mathbf{A} \cdot T_s} \cdot \mathbf{x}_k + T_s \cdot \int_{k \cdot T_s}^{(k+1) \cdot T_s} \exp[\mathbf{A}\{(k+1) \cdot T_s - \tau\}] \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}^*(\tau) d\tau \\ &= e^{\mathbf{A} \cdot T_s} \cdot \mathbf{x}_k + T_s e^{\mathbf{A} T_s} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_k \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

を得る。  $e^{\mathbf{A} \cdot T_s}$  および  $e^{\mathbf{A} \cdot T_s} \cdot \mathbf{B}$  を夫々  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  と置き換えればデジタル系の状態方程式 (1.2.19) と (1.2.20) を得る。

又サンプル周期の間を何等かの方法で補間する方法がある。たとえば

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{u}_k \quad k \cdot T_s \leq t < (k+1) \cdot T_s \quad (1.3.7)$$

のような階段関数を考え、システムへの入力として  $\mathbf{u}(t)$  の代わりに  $\mathbf{u}'(t)$  を用いる方法である。 $\mathbf{u}'(t)$  は  $\mathbf{u}(t)$  を 0 次保持した信号といい信号  $\mathbf{u}^*(t)$  を伝達関数が

$$H_0(S) = \frac{1 - e^{-T_s \cdot S}}{S} \quad (1.3.8)$$

で与えられるシステムを通せば得られる。このシステムを 0 次保持という。このときは

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{\mathbf{A} \cdot T_s} \cdot \mathbf{x}_k + \left[ \int_{k \cdot T_s}^{(k+1) \cdot T_s} \exp[\mathbf{A}\{(k+1) \cdot T_s - \tau\}] \cdot \mathbf{B} d\tau \right] \cdot \mathbf{u}_k \quad (1.3.9)$$

を得る。補間の方法を適当に選ぶことにより色々な処理方法が考えられている。

周波数領域で考えるともう一つ別の変換法が考えられる。すなわち伝達関数を双一次変換

$$S = \frac{2}{T_s} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (1.3.10)$$

により形式的にパルス伝達関数を作る方法で双一次変換法といわれる。この方法の論拠は周波数  $\omega$  を低域に限れば

$$i\omega \doteq \frac{2}{T_s} \cdot \frac{1-e^{-i\omega T_s}}{1+e^{i\omega T_s}} = i\omega \cdot \left( \tan \frac{\omega T_s}{2} / \frac{\omega \cdot T_s}{2} \right) \quad (1.3.11)$$

となり周波数特性が一致するからである。

安定性に関しては、変換(1.3.2)による方法では、元のアナログ系が安定ならば、定理1.2.4により  $\mathbf{A}$  の固有値の実部は負となり、 $T_s$  を適当に小さく選べば、 $\mathbf{I} + T_s \cdot \mathbf{A}$  の固有値の絶対値は1より小となり、変換して得られるシステムは安定となる。またインパルス・サンブラによる方法では、 $e^{\mathbf{A} \cdot T_s}$  の固有値の絶対値は1より小となり、変換して得られる(1.3.6)は安定となる。

そして良く知られているように双一次変換で円(直線を含む)は円に変換され(20)  $S = -2/T_s$  は  $z = 0$  に対応するから図1.3.1のように  $S$  平面的の左半平面は  $z$  平面的の単位円内に写像され従って双一次変換で得られたパルス伝達関数の特性方程式の根は単位円内にある。

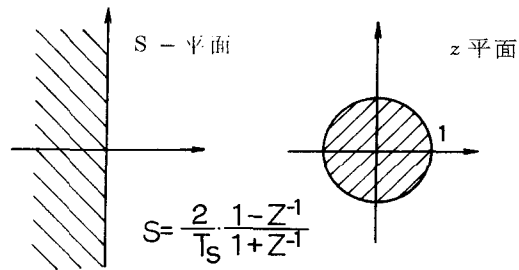


図 1.3.1 双一次変換による写像

従って定理1.2.5およびそ

の下で述べた論述により、アナログ系よりこれらの方法で変換して得られたデジタル系のシステムは安定となる。

### 1.3.3 可同定性

斉次なシステム

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_k \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_f \quad (1.3.12)$$

を考える。もしすべての  $\mathbf{x}_k$  が観測できるならば

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x}_0, \mathbf{A} \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{A}^{n-1} \cdot \mathbf{x}_0) \quad (1.3.13)$$

となるから

$$\text{rank}(\mathbf{x}_0, \mathbf{A} \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{A}^{n-1} \cdot \mathbf{x}_0) = n \quad (1.3.14)$$

のとき  $\mathbf{A}$  を一意に定めることが可能となる。これを  $n$ -可同定性という。(21)

また出力

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_k \quad (1.3.15)$$

のみが観測できる場合には (1.3.12) と (1.3.15) により

$$(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k+1}, \dots, \mathbf{y}_{k+n}) = \mathbf{x}_k^T \cdot (\mathbf{C}^T, \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{C}^T, \dots, (\mathbf{A}^T)^{n-1} \cdot \mathbf{C}^T) \quad (1.3.16)$$

となるので  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  が完全可観測ならばすべての  $\mathbf{x}_k$  が求まり (1.3.13) が成立しておれば,  $\mathbf{A}$  が求まる。(1.3.14) と (1.2.42) が同時に成立するとき  $p$ -可同定性が満足されるという。

#### 1.3.4 雑音を考慮したシステム

ここではディジタル系のシステムのみを考えてみる。システムへ加わる入力のうちで外界の変化やシステムの内部より発生してくるような種類ものは直接観測することができない。また観測の機構や信号の伝送とか記録等の過程で多くの雑音が混入される。そこで実際に観測される入力信号は  $\mathbf{u}_k$  でなくて

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \mathbf{u}_k + \mathbf{e}_k \quad (1.3.17)$$

となる。 $\mathbf{e}_k$  は雑音を表わす。また出力も (1.2.20) ではなく雑音  $\mathbf{e}_k$  を含んだ

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_k + \mathbf{e}_k \quad (1.3.18)$$

が観測されると考えられる。

ここで,  $\mathbf{e}_k$ ,  $\mathbf{e}_k$  は夫々  $r$  行,  $p$  行の列ベクトルである。

$\mathbf{e}_k$ ,  $\mathbf{e}_k$  は雑音という不確かさをもつがために確率過程としてあつかわれる。<sup>(10)</sup>ここでは  $\mathbf{e}_k$ ,  $\mathbf{e}_k$  は夫々弱定常であり,  $E\{\cdot\}$  を平均値,  $V\{\cdot\}$  を分散を表わすものとして

$$E\{\mathbf{e}_k\} = \mathbf{0}, \quad E\{\mathbf{e}_k\} = \mathbf{0} \quad (1.3.19)$$

$$V\{\mathbf{e}_k\} = \mathbf{Q}_e, \quad V\{\mathbf{e}_k\} = \mathbf{Q}_e \quad (1.3.20)$$

としておく。このような雑音加わる場合にはシステムの状態も出力も確率過程となる。もちろん入力自身も確率過程の場合も多い。

特に 1 入力 1 出力系の場合ではパルス伝達関数が (1.2.41) であたえられる場合では

$$\hat{y}_k = \sum_{j=0}^{n-1} b_j \cdot u_{k-j} - \sum_{l=1}^n a_l \cdot y_{k-l} + \mathbf{e}_k \quad (1.3.21)$$

とあらわされる。

またインパルス応答でシステムが表現されている場合には

$$\hat{y}_k = \sum_{j=0}^{\infty} \rho_j \cdot u_{k-j} + \mathbf{e}_k \quad (1.3.22)$$

となる。

### 1.3.5 試験信号法及び相関法

試験信号法というのは都合のよい入力をシステムに加えてその応答出力により同定を行う方法である。試験信号としてはステップ状に変化する確定信号を用いる方法や白色性の弱定常雑音を用いる方法などが考えられ多くの分野で実際に使用されている。前者について述べるのはここでは省略して後者と関係の深い相関法について述べてみる。(9), (23)

入力信号は平均値 0 の弱定常過程で確率連続(6), (10), (13)とすると 1.4 で述べるように直交測度<sup>(10)</sup>  
 $\zeta_u(\omega)$  を用いて

$$u_k = \int_{-\omega_f}^{\omega_f} e^{i\omega k \cdot T_s} d\zeta_u(\omega) \quad (1.3.23)$$

と表わされる。これは  $u_k$  のスペクトル分解を(6)表わしている。同様に観測雑音も

$$\epsilon_k = \int_{-\omega_f}^{\omega_f} e^{i\omega k \cdot T_s} d\zeta_\epsilon(\omega) \quad (1.3.24)$$

と表わされるものとする。ただし  $u_k$  と  $\epsilon_k$  は無相関とする。 $\omega_f$  は(1.2.28)で与えた折り返し周波数である。

そして特に入力に雑音を含まずに観測できるものとする。このとき出力は

$$\hat{y}_k = \int_{-\omega_f}^{\omega_f} e^{i\omega \cdot k T_s} \cdot Z(e^{i\omega T_s}) d\zeta_u(\omega) + \epsilon_k$$

(1.3.25)

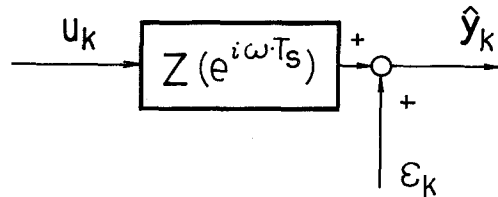


図 1.3.2  $u_k$  と  $\hat{y}_k$  の関係

となる。 $u_k$  と  $\hat{y}_k$  の相関

関数  $R_{u, \hat{y}, k}$  を考え  $u_k$  と  $\epsilon_k$  が無相関であることと(1.2.29)により

$$\begin{aligned} R_{u, \hat{y}, k} &= E\{\bar{u}_j \cdot \hat{y}_{k+j}^T\} \\ &= \int_{-\omega_f}^{\omega_f} e^{i\omega \cdot k \cdot T_s} \cdot Z(e^{i\omega T_s}) dS_u(\omega) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \rho_l \cdot R_{u, k-l} \end{aligned} \quad (1.3.26)$$

を得る。ここで変数の頭部の“-”は共役を示すものとする。そして  $R_{u, k}$  は  $u$  の自己相関関数(10),  $S_u(\omega)$  はそのスペクトル測度である。(10)

$R_{u, \hat{y}, k}$  それ自身をスペクトル分解しそのスペクトル測度を  $S_{u, \hat{y}}(\omega)$  とすると

$$R_{u, \hat{y}, k} = \int_{-\omega_f}^{\omega_f} e^{i\omega k \cdot T_s} dS_{u, \hat{y}}(\omega) \quad (1.3.27)$$

となる。(1.3.26)と(1.3.27)を比較するともし $Su(\omega)$ と $Su, \hat{y}(\omega)$ が絶対連続とすれば

$$Z(e^{i\omega T_s}) = \frac{dSu, \hat{y}(\omega)}{d\omega} \cdot \left( \frac{dSu(\omega)}{d\omega} \right)^{-1} \quad (1.3.28)$$

を得る。 $Ru, k$ ,  $Ru, \hat{y}, k$ としてサンプリングして得られたサンプル値より得られる標本相関々数を用いると(1.3.26)および(1.3.28)よりインパルス応答または周波数特性を得ることができる。

もし入力 $u_k$ として白色信号すなわち

$$\frac{dSu(\omega)}{d\omega} = \frac{\sigma^2}{2\omega_f} \cdot I \quad (1.3.29)$$

の場合には

$$Ru, k = \begin{cases} \sigma^2 \cdot I & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad (1.3.30)$$

となるから

$$\rho_k = \frac{1}{\sigma^2} Ru, \hat{y}, k \quad (1.3.31)$$

又は

$$Z(e^{i\omega T_s}) = \frac{2\omega_f}{\sigma^2} \cdot \frac{dSu, \hat{y}(\omega)}{d\omega} \quad (1.3.32)$$

と簡単にインパルス応答および周波数特性が得られる。

実際には正しい意味での白色信号は得られないのでM系列信号のような擬似白色信号を用いる方法等がかなり詳細に研究されているが、この論文で言及することは省略した。

### 1.3.6 インパルス応答の推定法

インパルス応答は $k \rightarrow \infty$ と共に $\rho_k \rightarrow 0$ となるので十分に大きな値 $N_0$ を定めると(1.3.22)は十分良い近似として

$$\hat{y}_k = \sum_{j=0}^{N_0} \rho_j \cdot u_{k-j} + \epsilon_k \quad (1.3.33)$$

と置くことが可能である。ここでは特に1入力1出力の場合を考えてみる。

$\epsilon_k$ は平均0分散 $\sigma^2$ の定常な正規過程とすると $\epsilon_{N+1}, \epsilon_{N+2}, \dots, \epsilon_{N+K}$ の同時確率密度は(14)

$$d(\epsilon_{N+1}, \epsilon_{N+2}, \dots, \epsilon_{N+M}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}} \cdot |Q_M|} \exp\left(-\frac{1}{2} \xi_M^T \cdot Q_M^{-1} \cdot \xi_M\right) \quad (1.3.34)$$

で与えられる。ここで

$$\xi_M = (\epsilon_{N+1}, \epsilon_{N+2}, \dots, \epsilon_{N+M})^T \quad (1.3.35)$$

であり， $Q_M$  は  $\xi_M$  の共分散行列である。ところで関数  $d(\cdot)$  を  $\rho_k$  の関数とみたときこのことを尤度関数と呼ぶ。尤度を最小にするような  $\rho_k$  は 2 次形式

$$\xi_M^T \cdot Q_M^{-1} \xi_M = \|\xi_M\|_{Q_M^{-1}}^2 = \|\hat{y}_M - U_M \cdot a\|_{Q_M^{-1}}^2 \quad (1.3.36)$$

を最小にする解と一致する。ここで

$$\hat{y}_M = (\hat{y}_{N_0+1}, \hat{y}_{N_0+2}, \dots, \hat{y}_{N_0+M})^T \quad (1.3.37)$$

$$a = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{N_0})^T \quad (1.3.38)$$

$$U_M = \begin{bmatrix} u_{N_0}, u_{N_0+1}, \dots, u_{N_0+M-1} \\ u_{N_0-1}, u_{N_0}, \dots, u_{N_0+M} \\ \vdots \\ u_1, u_2, \dots, u_M \end{bmatrix} \quad (1.3.39)$$

である。 $Q_M$  は正值 2 次形式であるから， $Q_M^{-\frac{1}{2}}$  を定義することができて<sup>(1)</sup>これを用いると (1.3.36) を最小にする解は

$$a = (Q_M^{-\frac{1}{2}} \cdot U_M)^+ \cdot Q_M^{-\frac{1}{2}} \cdot \hat{y}_M \quad (1.3.40)$$

で与えられる。右肩の “+” は一般化逆行列を表わす (付録参照)。更に雑音が白色ならば

$$Q_M = \sigma^2 \cdot I \quad (1.3.41)$$

であるから (1.3.36) は単に

$$\|\hat{y}_M - U_M \cdot a\|^2 \quad (1.3.42)$$

を最小にする問題となる。これから得られる  $a$  はいわゆる最小自乗解であり<sup>(4)</sup>

$$a = U_M^+ \cdot \hat{y}_M \quad (1.3.43)$$

で与えられる。正規性雑音の場合は (1.3.40) 又は (1.3.43) は最尤推定量と<sup>(4)</sup>なる。

雑音に正規性が仮定できない場合にも (1.3.40) および (1.3.43) は一つの推定量を与えるがこれらは夫々マルコフ推定量および最小自乗推定量という。<sup>(21), (24)</sup>

又一般に最尤推定値は正規分布への法則収束性，漸近的不偏性と不変性等の性質を持つことが知られている。

最小自乗法による推定量を求める過程は更に逐次形等に変形され種々実用され好結果を出している。 $N_0$  の大きさが多少大きくなることもあるが漸近的な不偏性を有するなど優れた性質を持っているのが注目されている。



### 1.3.7 パルス伝達関数の推定法

ここでも1入力1出力系の場合を考えてみる。すなわち(1.3.21)で入出力関係が与えられる場合にそのパラメータ  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$  を推定する手法を考察する。

今便宜上

$$\hat{\mathbf{y}}_M = (\hat{y}_n, \hat{y}_{n-1}, \dots, \hat{y}_{n+M-1})^T \quad (1.3.46)$$

$$\hat{\mathbf{W}}_M = \begin{bmatrix} u_n & & & u_{n-1} & & \dots & & u_1 & & -\hat{y}_{n-1} & & \dots & & -\hat{y}_0 \\ \vdots & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ u_{n+M-1} & & & u_{n+M-2} & & \dots & & u_M & & -\hat{y}_{n+M-2} & & \dots & & -\hat{y}_{M-1} \end{bmatrix} \quad (1.3.47)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, a_1, a_2, \dots, a_n)^T \quad (1.3.48)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_M = (\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}, \dots, \varepsilon_{n+M-1})^T \quad (1.3.49)$$

とすると(1.3.21)は

$$\hat{\mathbf{y}}_M = \hat{\mathbf{W}}_M \cdot \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon}_M \quad (1.3.50)$$

と表わされる。(25)インパルス応答の推定法のとくと同じように形式的に  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_M\|^2$  を最小にするように  $\boldsymbol{\alpha}$  を求める方法が一番最初Kalmanにより考えられた。ところがインパルス応答による表現では  $\boldsymbol{\varepsilon}_M$  を最小にすることは実システムの出力とモデルの出力をできるだけ良く一致させるといふ明確な物理的意味を持っていたのに反しパルス伝達関数の場合には単に式の差をできるだけ0にしようとする事だから物理的な意味が明確でない。実際このようにして得られた推定量は漸近的にも不偏性をもたない。

そこで漸近的に不偏な推定量を求める方法がいくつか考えられている。(26)このためにはインパルス応答の推定の場合と同じように実システムの出力とモデルの出力を小さくするようにもって行くのが一つの方法である。今出力とモデルの出力の差を  $e'_k$  とすると(1.2.41)の  $Z(z)$  を用いて

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} e_k'^2 = \frac{1}{2\pi i} \oint | \mathcal{L}(y_k) - \frac{B(z)}{A(z)} \cdot \mathcal{L}(u_k) |^2 dz \quad (1.3.51)$$

となる。ここで複素積分の積分路は原点を内点とする閉曲線である。  $J$  を最小にする  $\boldsymbol{\alpha}$  を求めるには非線形計画法を用いる必要がある。

雑音の特性を利用してこれに基づく推定偏差を補償する方法がいくつか考案されている。そのうちで興味ある方法として確率縮小変換法と言われるものを簡単に紹介しておく。(27)

ここでは入力の観測に際しても雑音を考え

$$\mathbf{n}_k = (\varepsilon_k, \varepsilon_{k-1}, \dots, \varepsilon_{k-n+1}, -e_{k-1}, \dots, -e_{k-n})^T \quad (1.3.52)$$

としたとき共分散行列およびベクトルを信号に弱定常性を考えて

$$\mathbf{R} = E \{ \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_k^T \} \quad \mathbf{r} = E \{ \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{n}_k^T \} \quad (1.3.53)$$

を定義しておく。

次に

$$\mathbf{R}_k^* = \mathbf{R}_{k-1}^* + \frac{1}{k} (\hat{\mathbf{W}}_k^T \cdot \hat{\mathbf{W}}_k - \mathbf{R}_{k-1}^*), \quad \mathbf{R}_0^* = 0 \quad (1.3.54)$$

$$\mathbf{r}_k^* = \mathbf{r}_{k-1}^* + \frac{1}{k} (\hat{\mathbf{W}}_k^T \hat{\mathbf{y}}_k - \mathbf{r}_{k-1}^*), \quad \mathbf{r}_0^* = 0 \quad (1.3.55)$$

により  $\mathbf{R}_k^*, \mathbf{r}_k^*$  をつくる。この時  $\alpha_0^*$  を適当に与えて、 $\beta > 0$  として

$$\alpha_k^* = \alpha_{k-1}^* - \frac{\beta}{k} \{ (\mathbf{R}_k^* - \mathbf{R}) \alpha_{k-1}^* + (\mathbf{r}_k^* - \mathbf{r}) \} \quad (1.3.56)$$

により逐次  $\alpha_k^*$  をつぐれば  $\alpha_k^*$  は  $\alpha$  へ次の意味で収束する。

$$E \{ \| \alpha_k^* - \alpha \| \} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \quad (1.3.57)$$

ただこの方法では雑音の分散  $\mathbf{R}, \mathbf{r}$  が知られていないと用いることができない。

このような事前の情報を要しないアルゴリズムも考察されている。(45)

### 1.3.8 構造決定の問題

同定の方法にはインパルス応答や周波数特性のようにシステムの次数が不明でも決定できる種類のものと、パルス伝達関数のように次数として何等かの値を仮定しないと決定できないような種類のものがある。これらが求まった場合に全体のシステムの次数を決定し、その最小の次数を持つシステムの状態方程式を求める問題をシステムの**最小実現問題**という。(2), (28)

詳細な手法については省略して最小化実現とは何かという定義のみを与えておく。すなわち状態方程式 (1.2.19) と (1.2.20) において  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  が完全可制御で、 $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  が完全可観測であるような表現である場合には、これをシステムの最小化実現という。この概念はアナログ系でも同じように用いられる。

最後にデジタル系で得られた結果をアナログ系にもどすには 1.3.2 で考えた変換を逆にたどることにより達成される。

## 1.4 デジタル信号の処理

自然現象として出現する殆んど信号は時間軸が実数すなわちアナログ信号である。一般的に信号は時刻を定めると値が確定するような信号すなわち**確定信号**と、時刻を定めると確率変数としてしか定まらないような**不規則信号**が考えられる。確定信号は数学的にはいわゆる時間を変数とする関数であり、不規則信号は確率過程としてとらえられる。そこでこれらの信号の性質を論じシステムとの関連を明らかにする助けとする。特に信号を**単振動の線形結合**で表現するいわゆる**調和解析**の手法を概説する。次に 1.3 でも述べたように同定をはじめ高度な制御系においてはデジタル電子計算機の助けを借りる場合が多くデジタル(サンプル値)信号としての処理が必要となり時間軸が整数である信号のとりあつかいが重要となる。そこでデジタル信号の性質についても概説した。そしてこの論文の主題をなしているデジタル・フィルタといわれる信号処理についての一般的事項をまとめ第2章への準備とする。(31)

### 1.4.1 確定信号

確定信号すなわち時間  $t$  の関数  $x(t)$  について考えてみる。 $x(t)$  がたとえば電圧で  $1 \Omega$  の抵抗に加えられるものとすれば  $|x(t)|^2$  は瞬時的なパワーを表わしている。さて次の積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (1.4.1)$$

は信号の持つエネルギーを表わしている。<sup>(15)</sup> エネルギーが有界すなわち (2乗可積分)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (1.4.2)$$

である信号すなわち関数  $x(t)$  の族を  $L_2$  と名付ける。

また全時間区間での平均パワーの有界な信号

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (1.4.3)$$

全体を  $W_2$  と名付ける。明らかに

$$L_2 \subset W_2 \quad (1.4.4)$$

である。

我々が普通あつかっているそれ自身有界であるような信号は  $L_2$  には含まれず  $W_2$  に属しているものが多い。たとえばステップ信号や周期的信号などである。またランプ信号のように  $W_2$  にも含まれないものもあるが物理的にはこれもある有界信号のある時間区間を指定しているに過ぎないのでやはり  $W_2$  に含まれると考えるも良い。

ここではこれらの信号のスペクトル分解について考えておく。<sup>(11)</sup>, <sup>(15)</sup>

$L_2$  に属する信号  $x(t)$  は Fourier 変換

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} x(t) dt \quad (1.4.5)$$

が可能であり逆に<sup>(15)</sup>

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} X(\omega) d\omega \quad (1.4.6)$$

と表わされる。 $y(t)$  の Fourier 変換を  $Y(\omega)$  とすると Plancherel の定理<sup>(12)</sup>, <sup>(15)</sup>

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \overline{y(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot \overline{Y(\omega)} d\omega \quad (1.4.7)$$

がなり立つ。

$W_2$  の中で特に重要なのは周期関数である。 $x(t)$  が周期  $T$  の周期関数ならば<sup>(12)</sup>, <sup>(15)</sup>

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi k}{T} \cdot t} \quad (1.4.8)$$

と表わされる。ここで

$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i \frac{2\pi k}{T} t} \cdot x(t) dt \quad (1.4.9)$$

である。この場合も  $y(t)$  の Fourier 係数を  $D_k$  とすれば同じく

$$\frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot \overline{y(t)} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot \overline{D_k} \quad (1.4.10)$$

が成立する。

$W_2$  の中で興味あるのは概周期関数である。(12), (15), (7) 今  $\omega_k$  は

$$\dots < \omega_{-2} < \omega_{-1} < \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots \quad (1.4.11)$$

を満たす数列とすると収束する級数

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot e^{i\omega_k t} \quad (1.4.12)$$

は概周期関数といわれ  $C_k$  は

$$C_k = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-i\omega_k t} x(t) dt \quad (1.4.13)$$

で与えられる。 $C_k$  はやはり  $x(t)$  の Fourier 係数と言われる。 $y(t)$  の Fourier 係数を  $D_k$  とすると

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} x(\tau) \cdot \overline{y(\tau)} d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot \overline{D_k} \quad (1.4.14)$$

がなり立つ。

$W_2$  に属する任意の  $x(t)$  に対しては

$$\begin{aligned} \hat{U}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left( \frac{1 - e^{-i\omega t}}{it} \right) \cdot x(t) dt \\ &+ \text{l.i.m.}_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-A}^{-1} + \int_1^A \right\} \frac{e^{-i\omega t} x(t)}{it} dt \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

を作ると

$$x(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\hat{U}(\omega) \quad (1.4.16)$$

と表わされる。(7) l.i.m. は平均収束極限 (Limit in the mean) を表わす。~の意味は (C, 1) 総和可能なことすなわち

$$\tilde{U}(f) = \int_{-f}^f e^{i\omega t} d\hat{U}(\omega) \quad (1.4.17)$$

とすると

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \tilde{U}(f) \cdot df = x(t) \quad (a.e.) \quad (1.4.18)$$

これは *a.e.* (almost everywhere) の収束を表わす。この場合

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} |x(t)|^2 dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{U}(\omega+\varepsilon) - \hat{U}(\omega-\varepsilon)|^2 d\omega \quad (1.4.19)$$

となる。

すなわち工学上で現われてくる確定信号は殆んどすべて単振動の線形結合すなわちスペクトル分解ができるので考えているシステムが定常な線形系であるかぎり単一の周波数に対する解析を行なっておけば重ね合わせの原理により考えている信号に対する影響がわかるわけである。

#### 1.4.2 不規則信号

時刻を指定しても確率変数としてしか定まらないような信号は数学的には確率過程となる。基礎となる確率空間  $\text{Prob}(A, B)$  を考える。A は確率パラメータ  $\lambda$  の空間、B は A 上の Borel 集合族で  $\text{Prob}(\cdot)$  はその上に定義された確率とする。このとき時間軸をパラメータとする確率変数  $x(\lambda, t)$  全体を確率過程と呼ぶ。時刻を固定すれば単なる確率変数である。λ を固定すると時間の関数となるが、これを見本過程という。λ の明示が必要のない場合単に  $x(t)$  と書き単に信号と呼ぼう。見本過程はサンプル値ともいい確定信号である。

$x(t)$  に対して

$$R_x(t) = E \{ \overline{x(\tau) \cdot x(t+\tau)} \} \quad (1.4.20)$$

を  $x(t)$  の自己相関々数と呼ぶ。平均  $E \{ x(t) \}$  と自己相関々数が時刻  $t$  に無関係となる時弱定常過程という。

$R_x(t)$  が  $t=0$  で連続のとき  $x(t)$  は確率連続とい(6) この場合には

$$R_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d S_x(\omega) \quad (1.4.20)$$

と表わされる。ここで  $S_x(\omega)$  は  $R_x(\omega)$  のパワースペクトル測度という。ここで  $S_x(\omega)$  は

$$\frac{S_x(\omega_2+) + S_x(\omega_2-)}{2} - \frac{S_x(\omega_1+) + S_x(\omega_1-)}{2}$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{e^{-i\omega_2 t} - e^{-i\omega_1 t}}{-it} R_x(t) dt \quad (1.4.21)$$

で与えられる。(6) またこのときには信号自身も

$$x(t) = E \{ x(t) \} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d \zeta_x(\omega) \quad (1.4.22)$$

と表わされる。  $\zeta_x(\omega)$  は信号の直交測度と(10)いう。ここで

$$E\{ |d\zeta_x(\omega)|^2 \} = dS_x(\omega) \quad (1.4.23)$$

という関係があり、不規則信号も単振動の線形結合で表現できることがわかる。

従って定常な線形システムを考えている限り単一周波数に対する性格すなわち周波数特性のみにより信号に対する影響を知ることができる。又確定信号でも不規則信号でもどれか一つのスペクトル分解される信号について議論しておけば他の信号での取りあつかいは同じである。

### 1.4.3 デジタル信号

デジタル（サンプル値）信号の場合も 1.4.1, 1.4.2 で述べたような表現が可能であるがただし周波数は  $|\omega| \leq \omega_f$  に限られる。 $\omega_f$  はすでに (1.3.24) で与えられ折り曲げ周波数（Folding Frequency）という。弱定常過程の場合のみ考察しておく。

信号  $x_k$  の自己相関々数は

$$R_{x,k} = E\{ \bar{x}_l \cdot x_{k+l} \} = \int_{-\omega_f}^{\omega_f} e^{i\omega t} dS_x(\omega)$$

となり、パワースペクトル測度は(6)

$$\frac{S_x(\omega_2+) + S_x(\omega_2-)}{2} - \frac{S_x(\omega_1+) + S_x(\omega_1-)}{2} = R_{x,0} + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{k=-N \\ (k \neq 0)}}^N R_{x,k} \cdot \frac{e^{-ik\omega_2} - e^{-ik\omega_1}}{-ik} \quad (1.4.24)$$

で与えられる。又  $x_k$  は

$$x_k = E\{ x_k \} + \int_{-\omega_f}^{\omega_f} e^{i\omega k} d\zeta_x(\omega) \quad (1.4.25)$$

で  $\zeta_x(\omega)$  は (1.4.23) を満たす。ここではアナログ系と同じ記号を使用した。区別する必要があるときは別の記号を用いることにする。

次にアナログ系の信号  $x(t)$  をサンプル周期  $T_s$  でサンプリングした場合

$$x_k = x(k \cdot T_s) \quad (1.4.26)$$

を考える。便宜上  $x(t)$  は平均値 0 の弱定常信号であるとする (1.4.22) より

$$x_k = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega k \cdot T_s} d\zeta_x(\omega) \quad (1.4.27)$$

であるが一方で (1.4.25) で示されているように

$$x_k = \int_{-\omega_f}^{\omega_f} e^{i\omega k \cdot T_s} d\zeta_x'(\omega) \quad (1.4.28)$$

と表わされる。そこで  $\zeta_x(\omega)$  と  $\zeta_x'(\omega)$  の間には

$$\zeta_x'(\omega) = \zeta_x(\omega) + \sum_{j=1}^{\infty} \{ \zeta_x(\omega + 2j \cdot \omega_f) + \zeta_x(\omega - 2 \cdot j \cdot \omega_f) \} \quad (1.4.29)$$

という関係があることがわかる。すなわちサンプル周期 $T_s$ でサンプリングすると $|\omega| > \omega_f$ であるようなスペクトル成分はすべて $|\omega| \leq \omega_f$ の周波数成分として認識されてしまう。これがいわゆるサンプリングに伴う別名効果 (Aliasing Effect) といわれるものである。すなわち (1.4.29) の右辺の第2項はサンプリングにともなう別名によって発生する誤差となって現われる。元のアナログ信号において $|\omega| > \omega_f$ の成分を持たない場合すなわち

$$S_x(\omega) = 0 \quad |\omega| > \omega_f \quad (1.4.30)$$

のような場合には (1.4.29) が

$$\zeta_x'(\omega) = \zeta_x(\omega) \quad (1.4.31)$$

となる。このような信号は帯域制御信号といわれる。この場合には $\zeta_x'(\omega)$ と $\zeta_x(\omega)$ は区別しなくとも良い。この論文であつかうデジタル信号はこのような条件を満足しているものと考えることとする。

#### 1.4.4 アナログ・フィルタ

定常な線形システムで (1.2.36) のような伝達関数 $R(S)$ を持つシステムを考える。このシステムは安定であるとして1.4.1および1.4.2で述べたようなスペクトル分解のできる信号を入力とした場合の出力波形について考えてみる。ここでは平均値0の確率連続な弱定常信号を考える。すなわちシステム $R(S)$ への入力 $u(t)$ は

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\zeta_u(\omega) \quad (1.4.32)$$

とスペクトル分解ができ、このとき出力 $y(t)$ は

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \cdot R(i\omega) d\zeta_u(\omega) \quad (1.4.33)$$

となる。そして $R^*(\omega)$ を $\omega$ の実関数として

$$R(i\omega) = R^*(\omega) \cdot e^{-i \cdot b(\omega)} \quad (1.4.34)$$

と分解した場合 $R^*(\omega)$ は振幅特性、 $b(\omega)$ は位相特性といわれる。またパワー・スペクトル測度との間には

$$dS_y(\omega) = |R(i\omega)|^2 \cdot dS_u(\omega) \quad (1.4.35)$$

という関係がある。 $|R(i\omega)|^2$ はパワー伝送特性という。

このようにシステムの周波数特性 $R(i\omega)$ を適当に選べば入力信号をいろいろに変形加工することができる。このような観点よりシステムをみたときこれをアナログ・フィルタという。

#### 1.4.5 デジタル・フィルタ

パルス伝達関数  $Z(z)$  が (1.2.41) のように与えられる定常なデジタル線形システムを考える。このシステムは安定であるとして 1.4.3 で述べたようなスペクトル分解のできる信号を入力とした場合の波形について考えてみる。ここでは平均値 0 の弱定常信号を考えシステム  $Z(z)$  への入力  $u_k$  を

$$u_k = \int_{-\omega_f}^{\omega_f} e^{i\omega k \cdot T_s} d\zeta_u(\omega) \quad (1.4.36)$$

とすると出力  $y(t)$  は

$$y_k = \int_{-\omega_f}^{\omega_f} e^{i\omega k \cdot T_s} Z(e^{i\omega T_s}) d\zeta_u(\omega) \quad (1.4.37)$$

となる。そして

$$Z(e^{i\omega T_s}) = Z^*(\omega \cdot T_s) \cdot e^{-i \cdot b(\omega)} \quad (1.4.38)$$

と分解する。ただし  $Z^*(\omega \cdot T_s)$ ,  $g(\omega)$  は  $\omega$  の実関数である。 $Z^*(\omega \cdot T_s)$ ,  $b(\omega)$  は夫々振幅特性, 位相特性といわれる。またパワー・スペクトル測度の間には

$$dS_y(\omega) = |Z(e^{i\omega T_s})|^2 \cdot dS_u(\omega) \quad (1.4.39)$$

という関係がある。 $|Z(e^{i\omega T_s})|^2$  はパワー伝送比という。

このように信号の処理系としてシステムを眺めた場合をデジタル・フィルタと呼ぶことにする。

デジタル・フィルタでは (1.2.41) の  $Z(e^{i\omega T_s})$  の他に

$$G(z) = \sum_{k=1}^N g_k \cdot z^{1-k} \quad (1.4.40)$$

のようなものを考えることができやはり (1.4.37), (1.4.39) と同じ式を成立させる。

このような形態のものを **FIR** (Finite Impulse Response) 形という。(52), (53) また (1.2.41) のように  $z^{-1}$  の有理式となっているものを **IIR** (Infinite Impulse Response) 形または自己帰帰形といわれる。

**FIR** 形はシステムが常に安定であり **IIR** 形では得られない有用な性質を示し, 本論文で用いたフィルタもこれに属する。

#### 1.4.6 デジタル・フィルタの設計

デジタル・フィルタの設計法は大きく分けて 2 つすなわち

- [1] アナログ・フィルタを先に設計しデジタル・フィルタへ変換する方法。(30)
- [2] 直接周波数特性が理想形となるようにパラメータを選ぶ方法。(52)

がある。前者は **IIR** 形のフィルタにしか適用できない。すなわち得られたアナログ・フィルタを 1.3.2 で述べた種々の変換でデジタル・フィルタ化する方法である。



2番目の方法も広く研究されているが、その中で特に本論文で主題となるFIR形フィルタの設計法について詳説しておく。

#### 1.4.7 FIR形デジタル・フィルタ

パルス伝達関数(1.4.40)で与えられる $G(z)$ を持つFIRデジタル・フィルタの周波数特性は(52)

$$G(e^{i\omega T_s}) = \sum_{k=1}^N g_k \cdot e^{i\omega \cdot (1-k) \cdot T_s} \quad (1.4.41)$$

と表わされる。設計したいと考えている理想的な周波数特性を $I_*(i\omega)$ とする。そうするとFIRフィルタの設計とは係数 $g_1, g_2, \dots, g_N$ を選んで $G(e^{i\omega T_s})$ と $I_*(i\omega)$ ができるだけ近くなるようにするのような最適化問題となる。そこで良く用いられる理想特性と評価基準および解法等について簡単に述べておく。

理想特性としては次のようなものが考えられる。

(1) 理想低域フィルタ (52)

$$I_L(i\omega) = \begin{cases} e^{-i\omega \cdot b} & |\omega| \leq \omega_c (< \omega_f) \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (1.4.42)$$

(2) 理想微分フィルタ (50)

$$I_D(i\omega) = \begin{cases} i\omega e^{-i\omega \cdot b} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (1.4.43)$$

(3) 理想Hilbert変換 (51)

$$I_H(i\omega) = \begin{cases} i \cdot e^{-i\omega \cdot b} & 0 \leq \omega \leq \omega_c \\ -i \cdot e^{-i\omega \cdot b} & -\omega_c \leq \omega < 0 \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (1.4.44)$$

ここで $\omega_c (< \omega_f)$ は遮断周波数(Cut Off Frequency)という。

評価のための評価指標としては次のようなものがある。

1° 最小自乗誤差

$$C_L = \int_{-\omega_f}^{\omega_f} W(\omega \cdot T_s) \cdot 2 \cdot |G(e^{i\omega \cdot T_s}) - I_*(i\omega)|^2 d\omega \quad (1.4.45)$$

2° 一様最良化誤差

$$C_U = \min_g \max_{\omega} W(\omega \cdot T_s) \cdot |G(e^{i\omega \cdot T_s}) - I_*(i\omega)| \quad (1.4.46)$$

ここで  $g = (g_1, g_2, \dots, g_N)^T$  である。

ここで $W(\cdot)$ は荷重関数である。(51)

最小自乗誤差  $C_L$  を最小にするような  $g$  は単に線形方程式を解くだけで良く従って  $g$  について陽の形に解くことができる。

一様最良化誤差  $C_U$  を最小にするような  $g$  は Remez の交替法<sup>(51)</sup>等により解くことができ解法プログラムをはじめとして数多くの設計例が発表されている。

次に FIR フィルタの特別な形態について述べておく。ここで  $N$  として  $N = 2 \cdot m$  (偶数) と  $N = 2m+1$  (奇数) の場合について分けて考える。またフィルタは係数  $g$  が

$$g_k = g_{N+1-k} \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (1.4.47)$$

をみたすとき対称形

$$g_k + g_{N+1-k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (1.4.48)$$

をみたすとき反対称形という。

これら 4 つの場合の周波数特性について考えてみる。<sup>(51)</sup> この中で  $\theta = \omega \cdot T_s$  を用いてある。

[ 1 ] 対称形で偶数 ( $N = 2 \cdot m$ ) の場合

$$G(e^{i\omega \cdot T_s}) = G^*(\omega \cdot T_s) \cdot e^{-i(m-\frac{1}{2}) \cdot \omega \cdot T_s} \quad (1.4.49)$$

$$G^*(\theta) = 2 \cdot \sum_{k=1}^m g_k \cdot \cos(m + \frac{1}{2} - k) \cdot \theta \quad (1.4.50)$$

[ 2 ] 対称形で奇数 ( $N = 2 \cdot m + 1$ ) の場合

$$G(e^{i\omega \cdot T_s}) = G^*(\omega \cdot T_s) \cdot e^{-i \cdot m \cdot \omega \cdot T_s} \quad (1.4.51)$$

$$G^*(\theta) = g_{m+1} + 2 \cdot \sum_{k=1}^m g_k \cdot \cos(m+1-k) \cdot \theta \quad (1.4.52)$$

[ 3 ] 反対称形で偶数 ( $N = 2 \cdot m$ ) の場合

$$G(e^{i\omega \cdot T_s}) = i \cdot G^*(\omega \cdot T_s) \cdot e^{-i(m-\frac{1}{2}) \cdot \omega \cdot T_s} \quad (1.4.53)$$

$$G^*(\theta) = 2 \cdot \sum_{k=1}^m g_k \cdot \sin(m + \frac{1}{2} - k) \cdot \theta \quad (1.4.54)$$

[ 4 ] 反対称形で奇数 ( $N = 2 \cdot m + 1$ ) の場合

$$G(e^{i\omega \cdot T_s}) = i \cdot G^*(\omega \cdot T_s) \cdot e^{-i \cdot m \cdot \omega \cdot T_s} \quad (1.4.55)$$

$$G^*(\theta) = 2 \cdot \sum_{k=1}^m g_k \cdot \sin(m+1-k) \cdot \theta \quad (1.4.56)$$

となる。

これらの特徴を述べると次のようになる。

- 1°  $G^*(\theta)$  は  $\theta$  の実関数である。
- 2° 位相特性が線形 (線形位相特性という) である。
- 3° [ 3 ] と [ 4 ] では一様に  $90^\circ$  ( $\pi/2$ ) だけ位相が進んでいる。

そこで低域（帯域，高域等も含めて）フィルタのためには〔1〕と〔2〕がまた微分や Hilbert 変換には〔3〕と〔4〕が用いられる。

線形位相特性の場合たとえば (1.4.38) で  $b(\omega) = b \cdot \omega \cdot T_s$  の場合には (1.4.37) より

$$y_k = \int_{-\omega_f}^{\omega_f} e^{i\omega \cdot (k-b) \cdot T_s} \cdot Z^*(\omega \cdot T_s) d\zeta_u(\omega) \quad (1.4.57)$$

となるから理想的な遅れのないフィルタ  $Z^*(\omega \cdot T_s)$  を通した信号を  $b$  だけ遅らせた信号となる。

## 第2章 微分信号を抽出する手法について

### 2.1 序

この章では観測信号より微分成分を抽出する手法について、主として著者の行った研究結果について論ずる。まず我々の欲する微分信号とは何かということを考察する。そしてデジタル系で微分信号を抽出できるようなフィルタをデジタル微分フィルタと名付けその設計法を示す。デジタルフィルタとしてはFIR形のものと考え、はじめに最小自乗法の意味で最適な微分フィルタの設計法とその性質を示す。次に高階の微分フィルタを容易に実現できるカスケード形接続の微分フィルタの設計法とその性質を示す。このフィルタが第3章以下の同定手法および他の制御問題に有効に用いられているわけである。次にZolotarev の多項式と呼ばれる多項式を用いると一様最良の意味で最適な微分フィルタを得ることができることを示し、その設計法と性質を与える。そしてこれらいくつかのデジタル微分フィルタの性質を遮断周波数や減衰特性等を基準に比較した結果を与えて利用する際の目安としている。

最後にFIR形フィルタに類するものをアナログ系で実現する手法を考え、微分フィルタの場合アナログ・デジタルのハイブリッド系でこれが実現できることを示す。

### 2.2 微分信号

微分というのは本来時間軸が実数すなわちアナログ系に固有の概念である。従ってデジタル系で微分信号を抽出するというのは何らかの意味のアナログ系での微分信号のサンプル値を得ることを意味する。我々がでくわす自然界よりのアナログ信号のほとんどは1.4.1ないし1.4.2のように単振動の線形結合で表わすこと(スペクトル分解)ができる。そこで微分という演算子は線形であることを考えると、信号の微分を考えるには、単に角周波数 $\omega$ の単振動 $e^{i\omega t}$ に対して我々の欲する微分を考察しておけばよいわけである。

ところで $x(t) = e^{i\omega t}$ を数学的に正しく微分すると $dx(t)/dt = i\omega \cdot e^{i\omega t} = i\omega \cdot x(t)$ となる。すなわち正しい微分子の周波数特性は $i\omega$ である。そこでもし仮に周波数特性が $i\omega$ となるフィルタができたとしても、このフィルタに(1.4.12)のような概周期関数

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot e^{i\omega_k t} \quad (2.2.1)$$

を入力として加えると各調和成分(単振動)が微分されて、出力信号として

$$X^{(1)}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot i\omega_k \cdot e^{i\omega_k t} \quad (2.2.2)$$

が出力される。このとき $dx(t)/dt = X^{(1)}(t)$ であることも、 $X^{(1)}(t)$ が有界であるということも

保証されない。そこで工学的な立場からは全調和成分を一様に微分するのではなく、必要とする成分のみの微分を抽出するフィルタに興味がある。レーダでの飛翔体位置の観測信号の中からその速度や加速度を知ろうとするとき、プラントにおいて温度、圧力、流量電力等の工学量の観測値の中からそれらの変化率を求めようとするとき、またこの論文であつまっているように同定や制御系の構成そして推定等の制御問題の解決のために用いようとする場合等は観測信号の成分のうち有用成分の含まれている低域成分のみの微分を必要とする。

そこで我々は(1.4.4.3)のようなフィルタ

$$I_D(i\omega) = \begin{cases} i\omega e^{-i\omega b} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (2.2.3)$$

に(2.2.1)の信号を通した時の出力信号

$$\begin{aligned} x_I^{(1)}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot I_D(i\omega_k) \cdot e^{i\omega_k \cdot t} \\ &= i\omega \cdot \sum_{|\omega_k| \leq \omega_c} C_k \cdot e^{i\omega_k \cdot (t-b)} \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

を求めようとする。というのは $I_D(i\omega)$ のような特性にいくらでも近い特性のものが作り得るということと(2.2.4)の級数は有限級数となり常に存在するという保証が得られるという点に着目しているわけである。

他のスペクトル分解の可能な信号に対しても $I_D(i\omega)$ を通した信号は存在する。又 $I_D(i\omega)$ という周波数特性を近似するフィルタがあつたとき、それを一つのシステムとして考え伝達関数又は時間領域での定常な線形微分方程式で考えるとスペクトル分解が可能でないような信号に対しても取り扱うことができるが、このように周波数領域で作つた微分フィルタはこのような信号に対しても微分演算子として働く。これは以下の節で別個にあつかわれることになろう。

又 $x_{I_D}^{(1)}(t)$ は正しい微分 $dx(t)/dt$ よりもスペクトル成分が限られているばかりでなく時間的にも $b$ だけ遅れている。遅れのない微分信号は色々な分野で重要となるが、この点に関しては状態観測器を用いる方法等がある。

### 2.3 最小自乗法によるデジタル微分フィルタ (D2), (D5), (E1), (E5)

平均値0で確率連続な弱定常信号で $|\omega| \leq \omega_f$ に帯域制限された信号 $x(t)$ を考え、これに基づいてデジタル微分フィルタを設計してみよう。 $\omega_c \leq \omega_f$ として2.2の議論により

$$x_I^{(1)}(t) = \int_{-\omega_f}^{\omega_f} e^{i\omega \cdot t} \cdot I_D(i\omega) \cdot d\zeta x(\omega) \quad (2.3.1)$$

$$= \int_{-\omega_c}^{\omega_c} i \cdot \omega \cdot e^{i \omega \cdot (t-b)} d\zeta_x(\omega) \quad (2.3.2)$$

を求めたい微分信号とする。

ところで  $x(t)$  は直接観測できず雑音  $e(t)$  の加わった信号

$$\hat{x}(t) = x(t) + e(t) \quad (2.3.3)$$

が観測できるとする。ただし  $x(t)$  と  $e(t)$  は無相関とする。ここで

$$T_s = \pi / \omega_f \quad (2.3.4)$$

として  $\hat{x}(t)$  を  $T_s$  ごとにサンプリングしたものを  $\hat{x}_k = \hat{x}(k \cdot T_s)$  とする。信号  $\hat{x}_k$  をディジタルフィルタ

$$D(z) = \sum_{k=1}^N d_k \cdot z^{1-k} \quad (2.3.5)$$

$$d_k + d_{N+1-k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

に通すとする。  $D(z)$  の周波数特性は 1.4.7 の後半で考えたように

$$D(e^{i\omega \cdot T_s}) = i\omega \cdot D^*(\omega \cdot T_s) \cdot e^{-i\omega \cdot (\frac{N-1}{2}) \cdot T_s} \quad (2.3.6)$$

と表わされ、 $\theta = \omega \cdot T_s$  とすると、 $\theta \cdot D^*(\theta)$  は  $\theta$  の実関数で具体的には (1.4.54)、(1.4.56) で  $g_k \rightarrow d_k$  と置換した式に相当する。

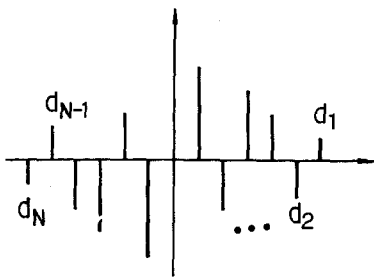


図 2.3.1  $d_k$  の変化

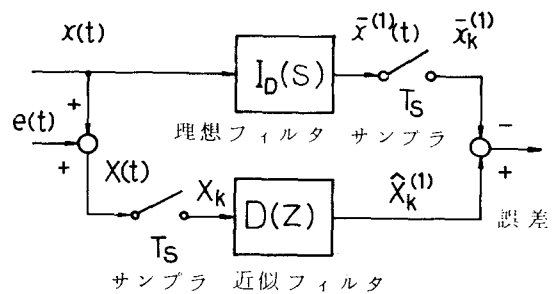


図 2.3.2 求めたい微分信号

信号  $\hat{x}_k$  を  $D(z)$  に通して得られる信号を  $\hat{X}_k^{(1)}$  とする。  $\hat{X}_k^{(1)}$  も  $x_{I,k}^{(1)} = x_I^{(1)}(k \cdot T_s)$  も弱定常信号であるので、これらの差の絶対値の 2 乗の平均値

$$C_L = E \{ |\hat{X}_k^{(1)} - x_{I,k}^{(1)}|^2 \} = \int_{-\omega_f}^{\omega_f} |D(e^{i\omega \cdot T_s}) - I_D(i\omega)|^2 dS_x(\omega) + \int_{-\omega_f}^{\omega_f} |D(e^{i\omega \cdot T_s})|^2 dS_e(\omega) \quad (2.3.7)$$

は時間に依存しなくなる。また (2.2.3) と (2.3.7) を比較すると  $b$  としては

$$b = (N - 1) \cdot T_s / 2 \quad (2.3.8)$$

とすれば位相特性に考慮を払う必要がなくなる。さらに  $C_L$  は次の  $I_{\omega_c}^*(\omega)$  を用いると

$$I_{\omega_c}^*(\omega) = \begin{cases} 1 & , |\omega| \leq \omega_c < \omega_f \\ 0 & , |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (2.3.9)$$

$$C_L = \int_{-\omega_f}^{\omega_f} \left\{ \omega^2 \cdot |D^*(\omega \cdot T_s) - I_{\omega_c}^*(\omega)|^2 dS_x(\omega) + |D(e^{i\omega T_s})|^2 dS_e(\omega) \right\} \quad (2.3.10)$$

となる。これは雑音の項を除けば 1.4.6 で考察した (1.4.45) の場合にあたる。

$E \{ |\hat{X}_k^{(1)} - x_{I,k}^{(1)}|^2 \}$  を最小にする  $D(z)$  を定めればその入力に対して最適な出力を得る。ただしこれは入力のスペクトル (パワースペクトル測度を通して) に依存するので他の入力では最適でなくなる。そこで入力としては最も共通的な性格のものを選び、それに対して  $C_L$  式を最小にする  $D(z)$  を選ばねばならない。そのようなものとして白色信号すなわち

$$\frac{dS_x(\omega)}{d\omega} = \begin{cases} \sigma_x^2 / 2 \cdot \omega_f & | \omega | \leq \omega_f \\ 0 & \text{他} \end{cases} \quad (2.3.11)$$

$$\frac{dS_e(\omega)}{d\omega} = \begin{cases} \sigma_e^2 / 2 \cdot \omega_f & | \omega | \leq \omega_f \\ 0 & \text{他} \end{cases} \quad (2.3.12)$$

を考える。  $\sigma_x^2$ 、  $\sigma_e^2$  は夫々  $x(t)$ 、  $e(t)$  の分散である。そして特に (2.3.10) で  $b$  が  $T_s$  の整数倍になる。

$$N = 2m + 1 \quad (2.3.13)$$

の場合に計算を進めてみる。このとき  $C_L$  は

$$C_L = \frac{\sigma_x^2}{2\omega_f} \left\{ \int_{-\omega_f}^{\omega_f} \left| 2 \cdot \sum_{k=1}^m d_k \cdot \sin(m+1-k)\omega \cdot T_s - \omega \cdot I_{\omega_c}^*(\omega) \right|^2 d\omega \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 4r \cdot \omega_f \cdot \sum_{k=1}^m d_k^2 \} \\
= & 2 \cdot \sigma_x^2 \cdot (1+r) \cdot (\|\mathbf{d} - \mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 + \frac{2}{3} \cdot \omega_c^3) \quad (2.3.14)
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $r$ は信号対雑音比である。すなわち

$$r = \sigma_e^2 / \sigma_x^2 \quad (2.3.15)$$

$$\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_m)^T \quad (2.3.16)$$

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)^T \quad (2.3.17)$$

とし

$$d_k = \frac{1}{2\omega_s \cdot (1+r)} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \omega \cdot \sin \{(m+1-k)\omega \cdot T_s\} d\omega \quad (2.3.18)$$

$$(k = 1, 2, \dots, m)$$

となる。従って $C_L$ を最小にする $\mathbf{d}$ を求めるには(2.3.14)式よりわかるように $\|\mathbf{d} - \mathbf{a}\|$ を最小にする $\mathbf{d}$ を求めればよい。 $\mathbf{d}$ に何の制限もなければ $\mathbf{d} = \mathbf{a}$ でよいが、これは微分フィルタとして少しあいまいになる点がある。それは時間領域で考えた場合当然満たさねばならない条件があるからである。ランプ状の信号

$$x(t) = A \cdot t + B \quad (2.3.19)$$

を微分フィルタに加えた場合にはその出力が $A$ とならなければならないことである。これはフィルタのパルス伝達関数を時間域にもどした差分方程式を用いて

$$\sum_{j=1}^N d_j \cdot \{A \cdot (k+1-j) \cdot T_s + B\} = A \quad (2.3.20)$$

と表わされる。(2.3.20)と係数の満たす条件(2.3.6)を考慮すると

$$\mathbf{N} = (m, m-1, \dots, 1), \quad b = -1/2 \cdot T_s \quad (2.3.21)$$

として

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{d} = b \quad (2.3.22)$$

と表わされる。そこで条件(2.3.22)を満たし $\|\mathbf{d} - \mathbf{a}\|$ を最小にする $\mathbf{d}$ を求めることになる。まず(2.3.22)を満たす $\mathbf{d}$ は

$$\mathbf{d} = \mathbf{N}^+ \cdot b + (\mathbf{I} - \mathbf{N}^+ \cdot \mathbf{N}) \cdot \mathbf{v} \quad (2.3.23)$$

となる。ここで $\mathbf{v}$ は任意の $n$ 次元列ベクトルである。そこで

$$\|\mathbf{d} - \mathbf{a}\| = \|(\mathbf{I} - \mathbf{N}^+ \cdot \mathbf{N}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{N}^+ \cdot b - \mathbf{a}\| \quad (2.3.24)$$

となりこれを最小にする $\|\mathbf{v}\|$ の最小のものは

$$\mathbf{v} = (\mathbf{I} - \mathbf{N}^+ \cdot \mathbf{N}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{N}^+ \cdot b) \quad (2.3.25)$$



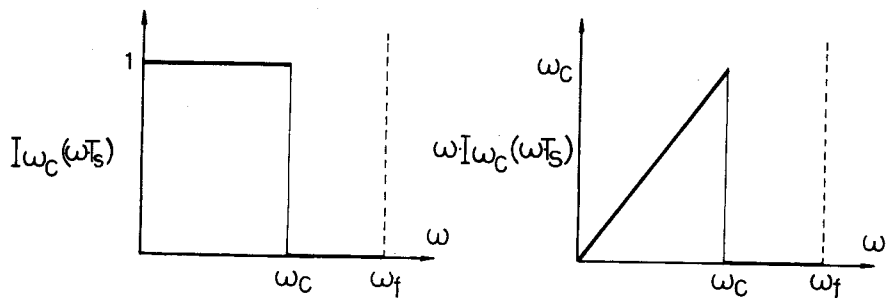


図 2.3.3 理想微分フィルタ  $ID(i\omega)$  の振巾特性

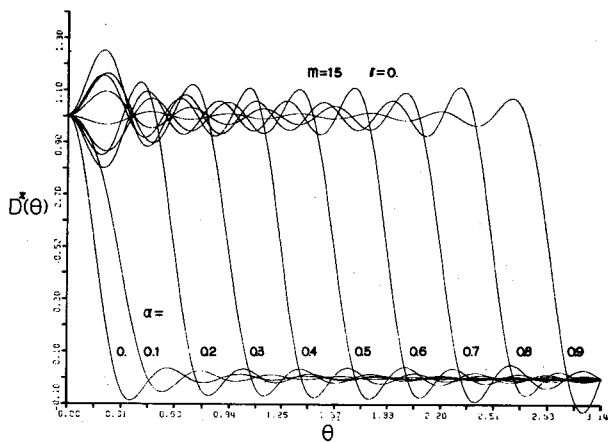


図 2.3.4  $D^*(\theta)$  の変化 ( $m=15, r=0$ )

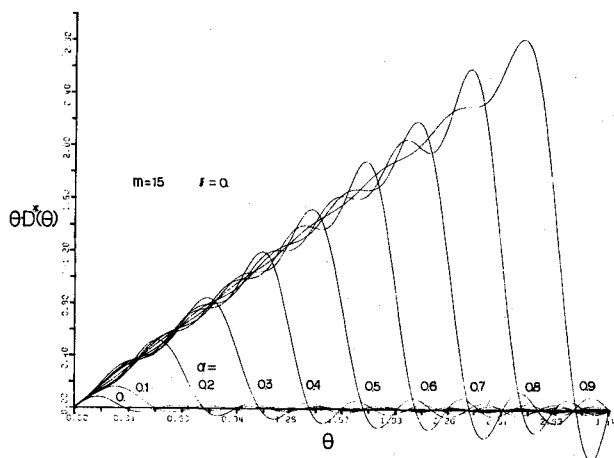


図 2.3.5  $\theta \cdot D^*(\theta)$  の変化 ( $m=15, r=0$ )

N=3 M=1 $\gamma=0.0$										
L	ALPHA=0.0	ALPHA=0.1	ALPHA=0.2	ALPHA=0.3	ALPHA=0.4	ALPHA=0.5	ALPHA=0.6	ALPHA=0.7	ALPHA=0.8	ALPHA=0.9
1	0.50000E 00	0.50000E 00	0.50000E 00	0.50000E 00	0.50000E 00	0.50000E 00	0.50000E 00	0.50000E 00	0.50000E 00	0.50000E 00
2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

N=5 M=2 $\gamma=0.0$										
L	ALPHA=0.0	ALPHA=0.1	ALPHA=0.2	ALPHA=0.3	ALPHA=0.4	ALPHA=0.5	ALPHA=0.6	ALPHA=0.7	ALPHA=0.8	ALPHA=0.9
1	0.20100E 00	0.19996E 00	0.19884E 00	0.19193E 00	0.17007E 00	0.12268F 00	0.43930E-01	0.61092E-01	0.17358E 00	0.26389E 00
2	0.10900E 00	0.10088E 00	0.10232E 00	0.11613E 00	0.15987E 00	0.25465E 00	0.41214E 00	0.52218E 00	0.84716E 00	0.10278E 01
3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

N=7 M=3 $\gamma=0.0$										
L	ALPHA=0.0	ALPHA=0.1	ALPHA=0.2	ALPHA=0.3	ALPHA=0.4	ALPHA=0.5	ALPHA=0.6	ALPHA=0.7	ALPHA=0.8	ALPHA=0.9
1	0.10714E 00	0.10696E 00	0.10190E 00	0.75315E-01	0.10469E-01	0.80840E-01	0.14664E 00	0.12548E 00	0.36647E-02	0.15191E 00
2	0.17129E-01	0.17024E-01	0.15026E-01	0.72106E-01	0.71237E-01	0.65877E-02	0.15484E 00	0.23239E 00	0.87757E-01	0.21558E 00
3	0.33714E-01	0.33030E-01	0.4182E-01	0.70943E-01	0.11539E 00	0.30315F 00	0.50012E 00	0.69747E 00	0.84955E 00	0.93664E 00

N=9 M=4 $\gamma=0.0$										
L	ALPHA=0.0	ALPHA=0.1	ALPHA=0.2	ALPHA=0.3	ALPHA=0.4	ALPHA=0.5	ALPHA=0.6	ALPHA=0.7	ALPHA=0.8	ALPHA=0.9
1	0.6657E-01	0.6612E-01	0.53992E-01	0.37445E-02	0.70920E-01	0.66628F-01	0.95675F-02	0.12473E 00	0.98128E-01	0.74274E-01
2	0.50900E 00	0.50246E-01	0.59523E-01	0.72106E-01	0.71237E-01	0.65877E-02	0.15484E 00	0.23239E 00	0.87757E-01	0.21558E 00
3	0.27273E-01	0.26834E-01	0.45094E-01	0.10538E 00	0.10075E 00	0.21341E-01	0.20190E 00	0.21910E 00	0.26399E 01	0.20727E 00
4	0.16667E-01	0.16999E-01	0.25756E-01	0.69873E-01	0.17385E 00	0.32790F 00	0.49739E 00	0.66183E 00	0.82131E 00	0.95786E 00

N=11 M=5 $\gamma=0.0$										
L	ALPHA=0.0	ALPHA=0.1	ALPHA=0.2	ALPHA=0.3	ALPHA=0.4	ALPHA=0.5	ALPHA=0.6	ALPHA=0.7	ALPHA=0.8	ALPHA=0.9
1	0.45455E-01	0.44423E-01	0.23078E-01	0.37789E-01	0.58021E-01	0.33107E-01	0.90682F-01	0.26403E-01	0.12272E 00	0.16607E-01
2	0.36364E-01	0.36547E-01	0.38607E-01	0.28937E-01	0.23239E-01	0.10870E 00	0.50887E-01	0.14233E 00	0.17994E 00	0.85346E-01
3	0.18484E-01	0.17830E-01	0.43795E-01	0.10538E 00	0.39803E 00	0.26418F-01	0.18645E 00	0.19830E 00	0.37613E-01	0.19885E 00
4	0.18182E-01	0.19000E-01	0.38012E-01	0.11201E 00	0.21737E 00	0.25815E 00	0.19420E 00	0.18420E 00	0.19437E 00	0.440928E 00

N=13 M=6 $\gamma=0.0$										
L	ALPHA=0.0	ALPHA=0.1	ALPHA=0.2	ALPHA=0.3	ALPHA=0.4	ALPHA=0.5	ALPHA=0.6	ALPHA=0.7	ALPHA=0.8	ALPHA=0.9
1	0.32967E-01	0.31179E-01	0.68443F-03	0.45763E-01	0.85715E-02	0.65144F-01	0.45022E-01	0.63822E-01	0.95377E-01	0.25747E-01
2	0.27473E-01	0.27116E-01	0.22595E-01	0.12828E-01	0.62696E-01	0.24258F-02	0.11524E 00	0.84090E-02	0.17474E 00	0.25631E-02
3	0.17878E-01	0.22942E-01	0.38221E-01	0.48906E-01	0.35979E-01	0.17171E 00	0.31241E-01	0.17018E 00	0.13832E 00	0.96581E-01

N=15 M=7 $\gamma=0.0$										
L	ALPHA=0.0	ALPHA=0.1	ALPHA=0.2	ALPHA=0.3	ALPHA=0.4	ALPHA=0.5	ALPHA=0.6	ALPHA=0.7	ALPHA=0.8	ALPHA=0.9
1	0.22236E-01	0.22236E-01	0.14115E-01	0.25276E-01	0.48277E-01	0.18015E-01	0.46924E-01	0.82361E-01	0.40382E-01	0.54960E-01
2	0.1529E-01	0.20917E-01	0.73392E-02	0.34097E-01	0.13710E-01	0.72459E-01	0.23364E-01	0.10183E 00	0.11402E 00	0.51113E-01
3	0.17878E-01	0.18863E-01	0.28024E-01	0.31052E-02	0.81265E-01	0.44503F-02	0.13329E 00	0.22268E-01	0.15921E 00	0.23701E-01

N=17 M=8 $\gamma=0.0$										
L	ALPHA=0.0	ALPHA=0.1	ALPHA=0.2	ALPHA=0.3	ALPHA=0.4	ALPHA=0.5	ALPHA=0.6	ALPHA=0.7	ALPHA=0.8	ALPHA=0.9
1	0.19608E-01	0.19678E-01	0.21698E-01	0.58629E-02	0.24366E-01	0.51927E-01	0.58236E-01	0.33371E-01	0.17793E-01	0.72503E-01
2	0.17175E-01	0.15904E-01	0.54361E-02	0.27021E-01	0.38531E-01	0.27557F-02	0.70219E-01	0.95709E-01	0.33545E-01	0.83961E-01
3	0.14706E-01	0.15541E-01	0.14838E-01	0.76107E-01	0.22064E-01	0.91263F-01	0.43331E-01	0.90393E-01	0.11988E 00	0.24255E-01

N=19 M=9 $\gamma=0.0$										
L	ALPHA=0.0	ALPHA=0.1	ALPHA=0.2	ALPHA=0.3	ALPHA=0.4	ALPHA=0.5	ALPHA=0.6	ALPHA=0.7	ALPHA=0.8	ALPHA=0.9
1	0.19789E-01	0.10561E-01	0.21944E-01	0.26544E-01	0.23104E-01	0.11326E-01	0.77540E-02	0.31741E-01	0.57136E-01	0.79762E-01
2	0.14035E-01	0.11951E-01	0.13944E-01	0.35054E-02	0.32520E-01	0.55925E-01	0.55500E-01	0.22169E-01	0.37259E-01	0.10065E 00
3	0.12281E-01	0.12703E-01	0.13471E-02	0.35819E-01	0.45666E-01	0.74195F-03	0.72614E-01	0.10551E 00	0.51110E-01	0.59329E-01

表 2.3.1 微分フィルタの係数dの表 ( $\gamma = 0$ )



従って

$$\mathbf{d} = \mathbf{N}^+ \cdot \mathbf{b} + (\mathbf{I} - \mathbf{N}^+ \cdot \mathbf{N}) \cdot \mathbf{a} \quad (2.3.26)$$

となる。具体的に計算を実行すると  $\delta_{k,j}$  をクロネッカのデルタとして

$$d_{m+1-k} = \frac{1}{T_s} \left[ \frac{3 \cdot k}{m \cdot (m+1) \cdot (2m+1)} \cdot \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{1+r} \sum_{\ell=1}^m \left( \cos \pi \ell \alpha - \frac{\sin \pi \ell \alpha}{\pi \ell \alpha} \right) \right\} \right. \\ \left. - \frac{\alpha}{(1+r) \cdot k} \cdot \left\{ \cos \pi k \alpha - \frac{\sin \pi k \alpha}{\pi k \alpha} (1 - \delta_{k,0}) \right\} \right] \quad (2.3.27)$$

( $k = m, m-1, \dots, 1, 0$ )

となる。また  $D^*(\theta)$  は

$$D^*(\theta) = \frac{3}{(2m+1) \cdot (1 - \cos \theta)} \left\{ \frac{\sin m \theta}{m \theta} - \frac{\sin(m+1) \theta}{(m+1) \theta} \right\} \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{1+r} \cdot \sum_{k=1}^m \left( \cos \pi k \alpha - \frac{\sin \pi k \alpha}{\pi k \alpha} \right) \right\} \\ - \frac{2\alpha}{1+r} \sum_{k=1}^m \left( \cos \pi k \alpha - \frac{\sin \pi k \alpha}{\pi k \alpha} \right) \cdot \frac{\sin k \theta}{k \theta} \quad (2.3.28)$$

と表わされる。ここで

$$\alpha = \omega_c / \omega f \quad (2.3.29)$$

である。

図 2.3.3 は理想微分フィルタ  $I_D(i\omega)$  の振幅特性を、図 2.3.4 には  $r=0$  とした場合の  $D^*(\theta)$  ( $|\theta| \leq \pi$ ) をそして図 2.3.5 には  $\theta \cdot D^*(\theta)$  の値を  $\alpha = 0, 0.1, \dots, 0.9, m=15$  の場合について描いてみた。又表 2.3.1, 表 2.3.2 に係数  $\mathbf{d}$  の表を与えた。

$r$  の効果をみるために  $\alpha = 0, 0.2, m = 3, 7, 15$  の場合について  $D^*(\theta)$  を描いたのが図 2.3.6 であり、 $r = 0.2$  の方が  $r = 0$  の方より通過帯域における値が小となるが、これは雑音除去の効果として評価関数  $C_L$  の中に効いてくることによると考えられる。

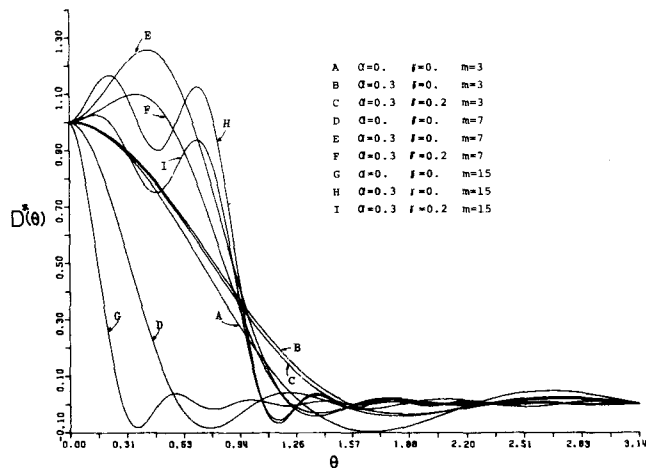


図 2.3.6 周波数特性に対する  $r$  の影響

### 2.3.1 時間領域での性質

ここで得られた微分フィルタのうち  $\alpha = 0$  と設定して得られるものについて更に議論を進めておく。 $\alpha = 0$  は (2.3.29) より  $\omega_c = 0$  に対応する。このとき求めようとする理想微分フィルタは  $I_D(i\omega) = 0$  となって無意味になってしまうが、ここで作った近似フィルタは意味を持ち (2.3.27) と (2.3.28) より

$$d_{m+1-k} = \frac{3k}{m \cdot (m+1) \cdot (2m+1) \cdot T_s} \quad (2.3.30)$$

$$(k = m, m-1, \dots, 1, 0)$$

$$D^*(\theta) = \frac{3}{(2m+1) \cdot (1 - \cos \theta)} \left\{ \frac{\sin m \theta}{m \theta} - \frac{\sin (m+1) \theta}{(m+1) \theta} \right\} \quad (2.3.31)$$

となる。これは最小自乗法の意味では最も狭帯域の微分フィルタとなることを意味する。

このフィルタは時間領域よりながめてみても最適なフィルタとなっている。入力のサンプル列  $x_k$  を考え、現在および  $2m \cdot T_s$  までの過去の点  $x_{k-2m}, x_{k-2m+1}, \dots, x_k$  に直線

$$h(t) = A \cdot t + B \quad (2.3.32)$$

を最小自乗法であてはめてみよう (図 2.3.7 参照)。すなわち

$$J = \sum_{j=1}^{2m+1} |x_{k+1-j} - A \cdot (k+1-j) \cdot T_s - B|^2 \quad (2.3.33)$$

を最小にする  $A$  を求めると

$$A = \frac{3}{m \cdot (m+1) \cdot (2m+1) \cdot T_s} \sum_{j=1}^{2m+1} (m+1-j)x_{k+1-j} \quad (2.3.34)$$

となる。これは実は (2.3.30) を係数とするフィルタ (2.3.5) の出力となるわけである。ここでは  $N = 2m+1$  の場合に限って議論を進めてきたが、 $N = 2m$  の場合にも同様にあつかりことができる。 $\alpha = 0$  の特別な場合については次の 2.4 で  $N$  が偶奇両方について用いているのでそこで説明を加えてある。

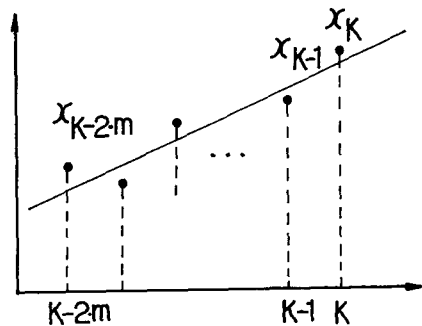


図 2.3.7 サンプル点の直線近似

### 2.3.2 応答波形

フィルタの実際の応答を調べてみる。図 2.3.8 は発電所における発電機出力を  $T_s = 10$  秒でサンプリングした例で縦軸は 0.2 を掛けると MW となる。図 2.3.9 はその応答波形である。

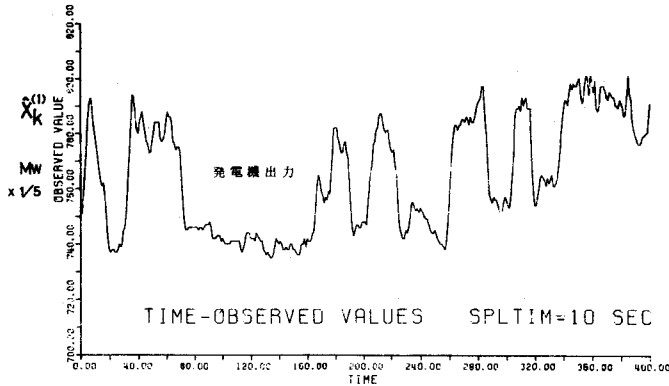


図 2.3.8 微分フィルタの入力

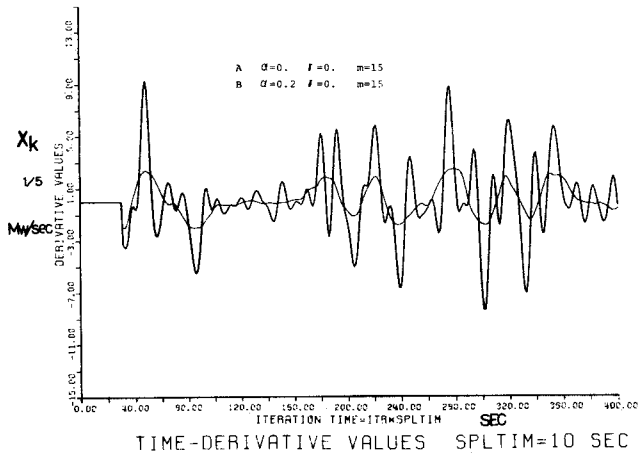


図 2.3.9 図 2.3.8 の入力波形に対する出力波形

図 2.3.9 で A のケースでは  $\alpha = 0$  としたが、図 2.3.6 から実効的には  $\omega c \doteq 0.064 \cdot \omega f$  となる。すなわち周期の半分が、 $10 / 0.064 \doteq 156 \text{ sec}$  より早い変動は無視される。図 2.3.8 の 3,050 ~ 3,350 sec 目にわたる変動の周期は、 $3,350 - 3,050 \doteq 300 \text{ sec}$  だが、この変動より早いものは無視されていて理論値と良く合う。B の例ではやはり理論通り周期が 100 sec より早い変動が無視されているのがわかる。

### 2.3.3 種々の特性のフィルタ (A2), (D2)

ここで述べた 1 階の微分フィルタの設計法は他の色々な特性のフィルタの設計に応用することが可能である。2 階以上の高階の微分フィルタもこれで容易に設計することができるが、本論文

では高階微分フィルタとして次節で述べるカスケード形のものを用いているので、ここではこれ以上は述べない。ここではまず帯域フィルタを考える。

$$I_{\alpha, \beta}(\omega) = \begin{cases} e^{-i \cdot \omega \cdot m \cdot T_s} & \alpha \cdot \omega f \leq |\omega| \leq \beta \cdot \omega f \\ 0 & \text{他} \end{cases} \quad (2.3.35)$$

ただし

$$0 \leq \alpha < \beta \leq 1 \quad (2.3.36)$$

とする。これを(2.3.8)で考えたと同じような最小自乗法で

$$G(z) = \sum_{k=1}^{2m+1} g_k \cdot z^{1-k}, \quad g_k = g_{2m+2-k} \quad (k=1, 2, \dots, m+1) \quad (2.3.37)$$

で近似する。 $r$ は(2.3.15)で与えられるとして

$$g_{m+1-k} = \frac{1}{2m+1} \cdot \left\{ 1 + \frac{\alpha - \beta}{1+r} + 2 \cdot \sum_{j=1}^m \frac{\sin \pi j \alpha - \sin \pi j \beta}{\pi j (1+r)} \right\} - \frac{\sin \pi k \alpha - \sin \pi k \beta}{\pi k (1+r)} \cdot (1 - \delta_{k,0})$$

$$(k=m, m-1, \dots, 0) \quad (2.3.38)$$

となる。この時の周波数特性は

$$G(e^{i\omega T_s}) = G^*(\omega \cdot T_s) e^{-i\omega m \cdot T_s} \quad (2.3.39)$$

$$G^*(\theta) = \frac{1}{2m+1} \left\{ 1 + \frac{\alpha - \beta}{1+r} + 2 \cdot \sum_{j=1}^m \frac{\sin \pi j \alpha - \sin \pi j \beta}{\pi j (1+r)} \right\}$$

$$- \frac{\alpha - \beta}{1+r} - 2 \cdot \sum_{j=1}^m \frac{(\sin \pi j \alpha - \sin \pi j \beta) \cos j \theta}{\pi j (1+r)} \quad (2.3.40)$$

となる。

次には *Hilbert* 変換 (49)

$$H_{\alpha, \beta}(\theta) = \begin{cases} i \cdot e^{-i\omega m \cdot T_s} & \alpha \cdot \omega f \leq \omega \leq \beta \cdot \omega f \\ -i \cdot e^{-i\omega m \cdot T_s} & -\beta \cdot \omega f \leq \omega \leq -\alpha \cdot \omega f \\ 0 & \text{他} \end{cases} \quad (2.3.41)$$

を

$$H(z) = \sum_{k=1}^{2m+1} h_k \cdot z^{1-k} \quad h_k = h_{2m+2-k} \quad (k=1, 2, \dots, m+1) \quad (2.3.42)$$

で近似すると、

$$h_{m+1-k} = \frac{\cos \pi k \alpha - \cos \pi k \beta}{\pi k (1+r)} (1 - \delta_{k,0}) \quad (2.3.43)$$

$$(k = m, m-1, \dots, 1, 0)$$

となる。このとき  $H(z)$  の周波数特性は

$$H(e^{i\omega T_s}) = i \cdot H^*(\omega \cdot T_s) \cdot e^{-i\omega m \cdot T_s} \quad (2.3.44)$$

となり  $H^*(\theta)$  は

$$H^*(\theta) = 2 \cdot \sum_{j=1}^m \frac{(\cos \pi k \alpha - \cos \pi k \beta) \sin j \theta}{\pi j (1+r)} \quad (2.3.45)$$

となる。

図 2.3.10 は  $m=50$  で  $(\alpha, \beta) = (0.1 \cdot (\ell - 1), 0.1 \cdot \ell)$  ( $\ell = 1, 2, \dots, 10$ ),  $r=0$  の場合の  $|G^*(\theta)|^2$  の変化, 図 2.3.11 は同じパラメータに対する  $|H^*(\theta)|^2$  を描いたものである。

図 2.3.10 のような帯域フィルタの集合はフィルタ・バンクといわれ, 種々の周波数分析等に用いられる。図 2.3.11 のフィルタは図 2.3.10 のものとよく似ているが,  $G^*(\theta)$  が偶関数なのに  $H^*(\theta)$  は奇関数であり,  $H(z)$  を通した信号は  $G(z)$  を通した信号に対して, 丁度  $90^\circ$  位相が進んでおり, これらを用いるとシステムの周波数特性を直接推定することができる。(A2)



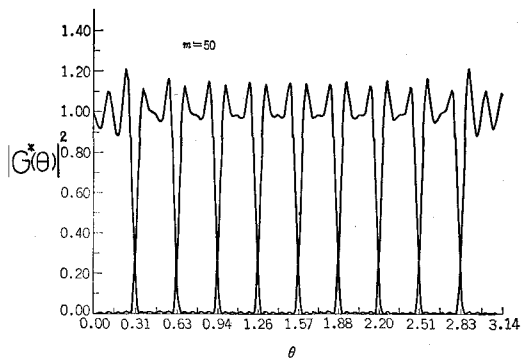


図 2. 3. 10  $|G^*(\theta)|^2$  の変化 ( $m = 50$ )

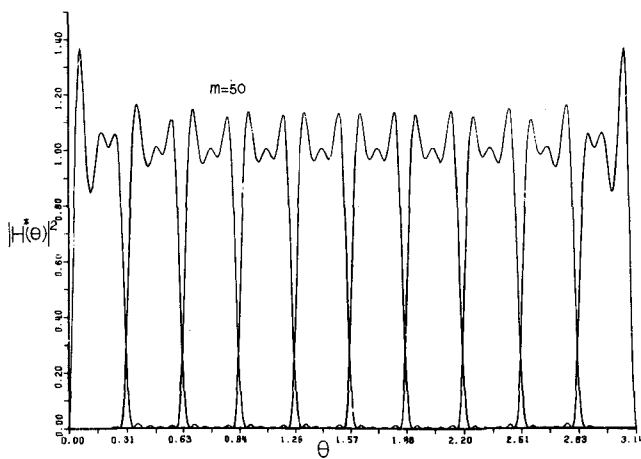


図 2. 3. 11  $|H^*(\theta)|^2$  の変化 ( $m = 50$ )

## 2.4 カスケード・デジタル微分フィルタ (A4), (D7), (D9)

この節では周波数特性の比が  $i\omega$  となるような微分および低域フィルタを考え、この2つをいくつかカスケード接続することにより任意階の微分フィルタを得る手法について説明し、その設計法と設計例および実際の応答性能などについての結果を与える。

### 2.4.1 周波数領域での設計

同じ次数の2つの FIR デジタル・フィルタ

$$P(z) = \sum_{k=1}^N p_k \cdot z^{1-k} \quad p_k + p_{n+1-k} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, N) \quad (2.4.1)$$

$$Q(z) = \sum_{k=1}^N q_k \cdot z^{1-k} \quad q_k = q_{n+1-k} \quad (k=1, 2, \dots, N) \quad (2.4.2)$$

を考える。これらの周波数特性は 1.4.7 で述べたように

$$P(e^{i\omega T_s}) = i\omega \cdot P^*(\omega \cdot T_s) \cdot e^{-i\omega \cdot \left(\frac{N-1}{2}\right) \cdot T_s} \quad (2.4.3)$$

$$Q(e^{i\omega T_s}) = Q^*(\omega \cdot T_s) \cdot e^{-i\omega \cdot \left(\frac{N-1}{2}\right) \cdot T_s} \quad (2.4.4)$$

と表わされ  $P^*(\theta)$ ,  $Q^*(\theta)$  は  $\theta$  の実関数となる。ここでもし

$$P^*(\theta) = Q^*(\theta) \quad (|\theta| \leq \pi) \quad (2.4.5)$$

であったとする。

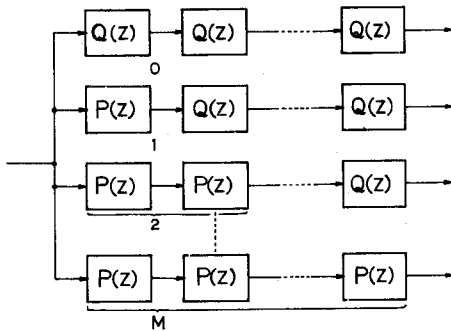


図 2.4.1 カスケード微分フィルタ

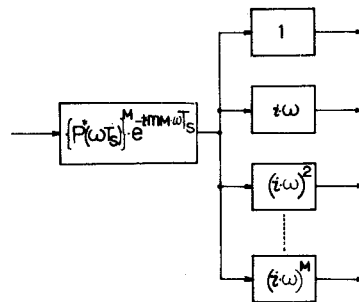


図 2.4.2 カスケード微分フィルタの周波数特性

この時  $M$  段のカスケードフィルタ ( 図 2.4.1 参照 )

$$\mathcal{D}_M^{(k)}(z) = \{P(z)\}^k \cdot \{Q(z)\}^{M-k} \quad (2.4.6)$$

$$(k = 0, 1, \dots, M)$$

を考える。このフィルタの周波数特性は ( 2.4.5 ) を用いて

$$\mathcal{D}_M^{(k)}(e^{i\omega \cdot T_s}) = (i\omega)^k \cdot \{P^*(\omega \cdot T_s)\}^M \cdot e^{-i\omega \cdot M \cdot \left(\frac{N-1}{2}\right) \cdot T_s} \quad (2.4.7)$$

$$(k = 0, 1, \dots, M)$$

となる。これは図 2.4.2 からわかるように線形位相特性をもつフィルタ

$$\{P^*(\omega \cdot T_s)\}^M \cdot e^{-i\omega \cdot M \cdot \left(\frac{N-1}{2}\right) \cdot T_s} \quad (2.4.8)$$

を通した後、数学的に正しい微分  $(i\omega)^k$  を行うことを意味する。そして  $P^*(\theta)$  を適当に選べば種々の信号成分の任意解の微分信号を得ることが可能となる。

しかし実際には ( 2.4.5 ) の条件を満たすものはおそらく存在せず近似的な意味でしか得られないであろう。この論文ではそのような一例を与える。これは次に述べるとして、その前にカスケード接続に対して成立する一般的な結果を与えておく。

[定理 2.4.1]  $\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$  を展開して

$$\mathcal{D}_M^{(k)}(z) = \sum_{j=1}^{N_M} d_{M,j}^{(k)} \cdot z^{1-j} \quad (2.4.9)$$

$$\text{とする。ここで } N_M = (N-1) \cdot M + 1 \quad (2.4.10)$$

である。  $P(z)$ ,  $Q(z)$  が ( 2.4.5 ) の条件を満たすか否かにかかわらず、

$$k \text{ が偶なら } d_{M,j}^{(k)} = d_{M, N_M+1-j}^{(k)} \quad (j = 1, 2, \dots, N_M) \quad (2.4.11)$$

$$k \text{ が奇なら } d_{M,j}^{(k)} + d_{M, N_M+1-j}^{(k)} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N_M) \quad (2.4.12)$$

[証明]

$$d_{M,j}^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \oint \mathcal{D}_M^{(k)}(z) \cdot z^{j-2} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi \cdot T_s^k} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \theta \cdot P^*(\theta) \}^k \cdot \{ Q^*(\theta) \}^{M-k} \cdot e^{-i\theta} \cdot \left\{ \left( \frac{N-1}{2} \right)^{M+1-j} \right\} d\theta$$

$\theta \cdot P^*(\theta), Q^*(\theta)$  は作り方から夫々奇および偶関数だから

$$= \frac{(-1)^k}{2\pi \cdot T_s^k} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \theta \cdot P^*(\theta) \}^k \cdot \{ Q^*(\theta) \}^{M-k} \cdot e^{-i\theta} \left\{ \left( \frac{N-1}{2} \right)^{M+1-j} \right\} d\theta$$

$$= \frac{(-1)^k}{2\pi \cdot T_s^k} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \theta \cdot P^*(\theta) \}^k \cdot \{ Q^*(\theta) \}^{M-k} \cdot e^{-i\theta} \left[ \left( \frac{N-1}{2} \right)^{M+1} - \left\{ (N-1)^{M+2-j} \right\} \right] d\theta$$

$$= (-1)^k \cdot d_{M, N_{M+1-j}}^{(k)} \quad (j = 1, 2, \dots, N_M) \quad (2.4.13)$$

〔証明終り〕

#### 2.4.2 基礎となるフィルタおよび設計例

次に近似的に(2.4.5)を満たす $P(z)$ と $Q(z)$ を与える。はじめに $P(z)$ として

$$P(z) = \frac{12}{(N-1) \cdot N \cdot (N+1) \cdot T_s} \sum_{k=1}^N \left( \frac{N+1}{2} - k \right) \cdot z^{1-k} \quad (2.4.14)$$

を考える。 $N = 2 \cdot m + 1$ の場合には2.3で与えてあった。 $N = 2 \cdot m$ の場合も2.3で行った議論より容易に得られる。(2.4.14)で $P(z)$ が与えられる場合は

$$P^*(\theta) = \frac{3}{N \cdot (1 - \cos \theta)} \left\{ \frac{\sin \left( \frac{N-1}{2} \right) \theta}{\left( \frac{N-1}{2} \right) \theta} - \frac{\sin \left( \frac{N+1}{2} \right) \theta}{\left( \frac{N+1}{2} \right) \theta} \right\} \quad (2.4.15)$$

である。

次に $Q(z)$ は(1.4.45)で与えたと同じように

$$C_Q = \int_{-\pi}^{\pi} |Q^*(\theta) - P^*(\theta)|^2 d\theta \quad (2.4.16)$$

を最小にするように $Q^*(\theta)$ を定める。ただし $Q(z)$ は直流を変形することなく通すという条件から

$$\mathbf{M} = (1, 1, \dots, 1), \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)^T \quad (2.4.17)$$

とすると

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{q} = 1 \quad (2.4.18)$$

そこで(2.4.18)という拘束条件の下で $C_Q$ を最小にする $\mathbf{q}$ は2.3と同じ議論により

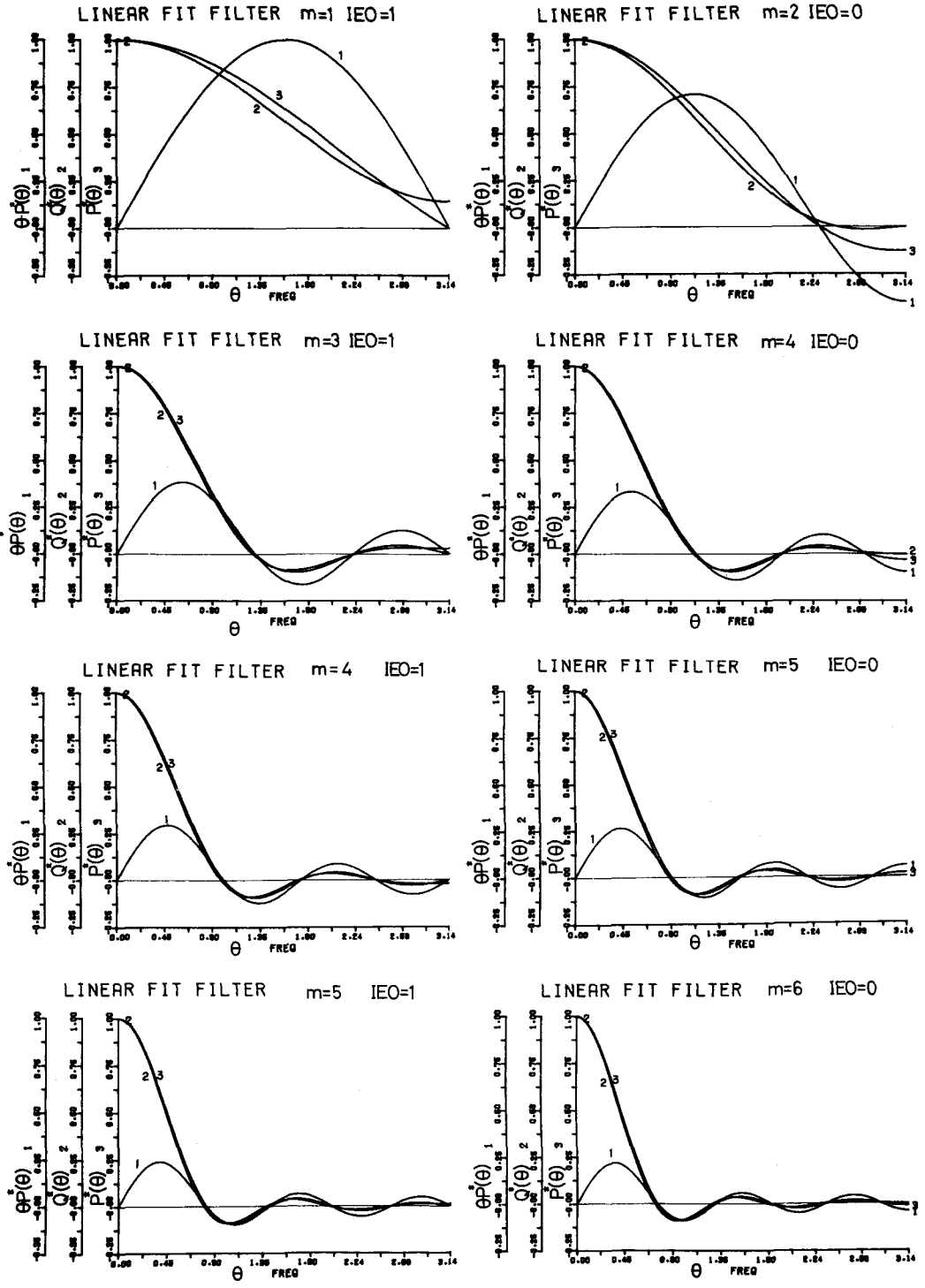


図 2.4.3 最小自乗法による  $P(z)$ ,  $Q(z)$  の周波数特性 - 1

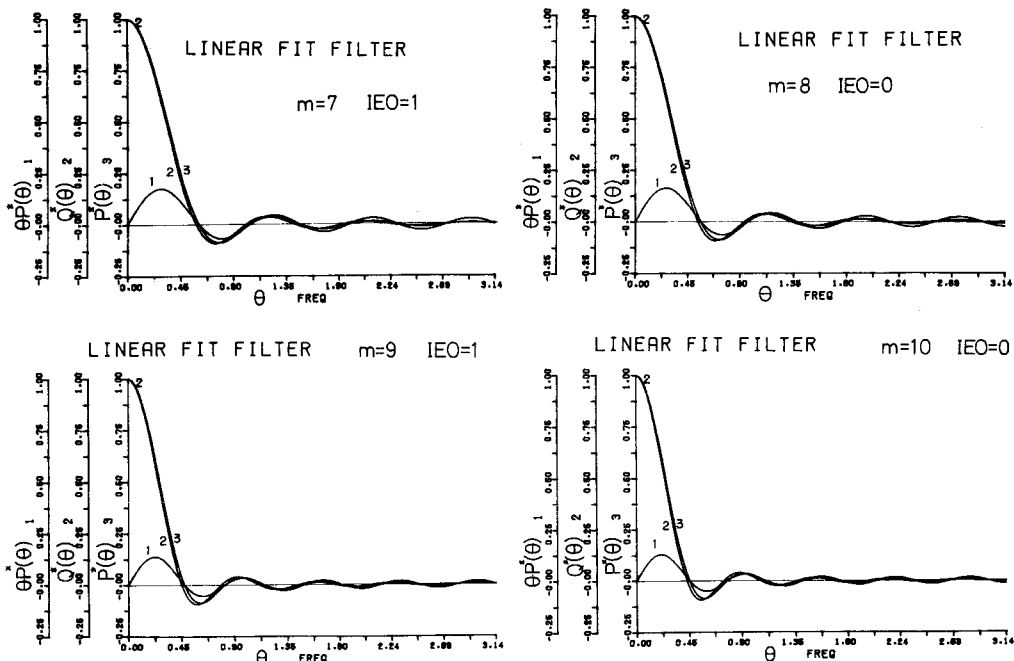


図 2.4.4 最小自乗法による  $P(z)$ ,  $Q(z)$  の周波数特性 -2

D : P (Z) の係数 I : Q (Z) の係数	1	2	3	4	5
	6	7	8	9	10
L NRF D 1 m = 1 IEO = 1	0.500000	0.0			
L NRF L 1 m = 1 IEO = 1	0.214100	0.571801			
L NRF D 1 m = 2 IEO = 0	0.300000	0.100000			
L NRF L 1 m = 2 IEO = 0	0.140399	0.359601			
L NRF D 1 m = 3 IEO = 1	0.107143	0.071429	0.035714	0.0	
L NRF L 1 m = 3 IEO = 1	0.050353	0.150091	0.191681	0.215751	
L NRF D 1 m = 4 IEO = 0	0.083333	0.059524	0.035714	0.011905	
L NRF L 1 m = 4 IEO = 0	0.041370	0.117479	0.158915	0.182236	
L NRF D 1 m = 4 IEO = 1	0.066666	0.05	0.023333	0.016666	0.
L NRF L 1 m = 4 IEO = 1	0.029079	0.095331	0.132180	0.160970	0.164880
L NRF D 1 m = 5 IEO = 0	0.054545	0.042424	0.030303	0.018182	0.006061
L NRF L 1 m = 5 IEO = 0	0.028532	0.079942	0.111472	0.134790	0.145264
L NRF D 1 m = 5 IEO = 1	0.024051	0.068377	0.094790	0.117762	0.128038
L NRF L 1 m = 5 IEO = 1	0.133961				
L NRF D 1 m = 5 IEO = 1	0.045455	0.036364	0.027273	0.018182	0.009091
L NRF L 1 m = 5 IEO = 1	0.0				
L NRF L 1 m = 6 IEO = 0	0.021387	0.058366	0.082534	0.102447	0.114411
L NRF L 2 m = 6 IEO = 0	0.120855				
L NRF J 1 m = 6 IEO = 0	0.038462	0.031469	0.024476	0.017483	0.010490
L NRF D 2 m = 6 IEO = 0	0.003497				
L NRF D 1 m = 7 IEO = 1	0.025000	0.021429	0.017857	0.014286	0.010714
L NRF D 2 m = 7 IEO = 1	0.007143	0.003571	0.0		
L NRF L 1 m = 7 IEO = 1	0.015240	0.040150	0.056628	0.072110	0.082162
L NRF L 2 m = 7 IEO = 1	0.090717	0.094577	0.096832		
L NRF L 1 m = 8 IEO = 0	0.014111	0.035860	0.051020	0.064718	0.074600
L NRF L 2 m = 8 IEO = 0	0.082462	0.087327	0.089901		
L NRF D 1 m = 8 IEO = 0	0.022059	0.019118	0.016176	0.013235	0.010294
L NRF D 2 m = 8 IEO = 0	0.007353	0.004412	0.001471		
L NRF L 1 m = 9 IEO = 1	0.011241	0.027202	0.038274	0.048998	0.056785
L NRF L 2 m = 9 IEO = 1	0.063928	0.068655	0.072669	0.074475	0.075549
L NRF D 1 m = 9 IEO = 1	0.015789	0.014035	0.012281	0.010526	0.008772
L NRF D 2 m = 9 IEO = 1	0.007018	0.005263	0.003509	0.001754	0.0
L NRF L 1 m = 10 IEO = 0	0.010660	0.024984	0.035281	0.044957	0.052422
L NRF L 2 m = 10 IEO = 0	0.058960	0.063816	0.067626	0.070020	0.071274
L NRF J 1 m = 10 IEO = 0	0.014286	0.012782	0.011278	0.009774	0.008271
L NRF D 2 m = 10 IEO = 0	0.006767	0.005263	0.003759	0.002256	0.000752

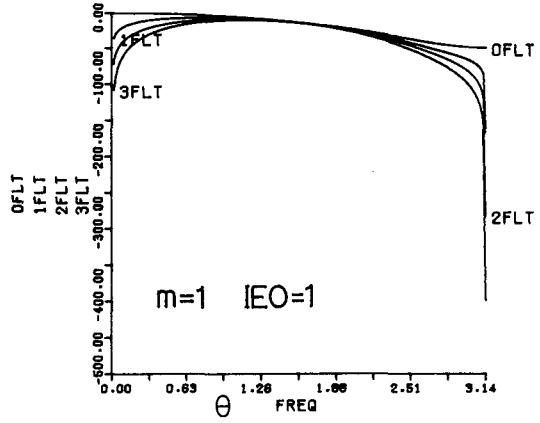
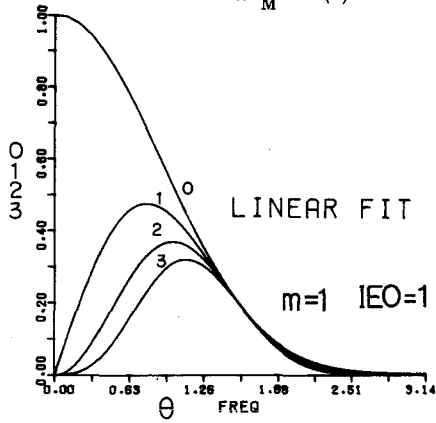
表 2.4.1 最小自乗法による  $P(z)$ ,  $Q(z)$  の係数の表



M=3

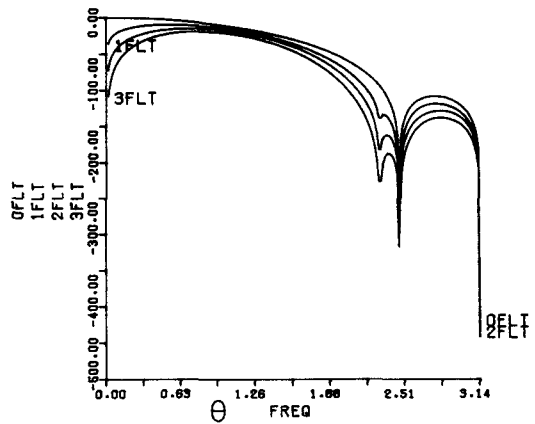
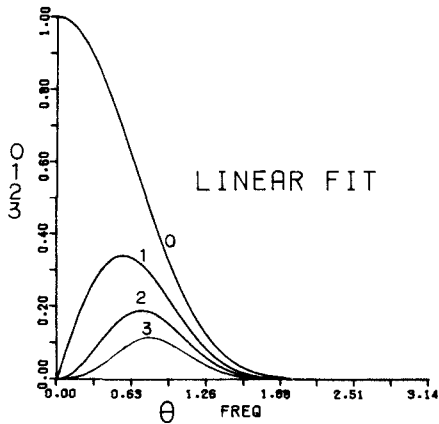
- 0 :  $\mathcal{D}_M^{*(0)}(\theta)$
- 1 :  $\mathcal{D}_M^{*(1)}(\theta)$
- 2 :  $\mathcal{D}_M^{*(2)}(\theta)$
- 3 :  $\mathcal{D}_M^{*(3)}(\theta)$

- 0FLT :  $20 \cdot \log |\mathcal{D}_M^{*(0)}(\theta)|$
- 1FLT :  $20 \cdot \log |\mathcal{D}_M^{*(1)}(\theta)|$
- 2FLT :  $20 \cdot \log |\mathcal{D}_M^{*(2)}(\theta)|$
- 3FLT :  $20 \cdot \log |\mathcal{D}_M^{*(3)}(\theta)|$



m=2 IEO=0

LINEAR FIT m=2 IEO=0



m=3 IEO=1

LINEAR FIT m=3 IEO=1

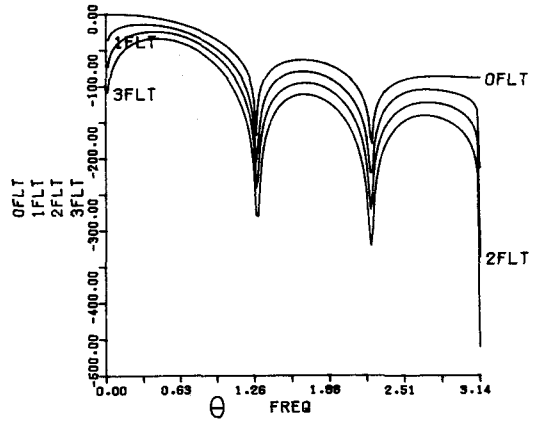
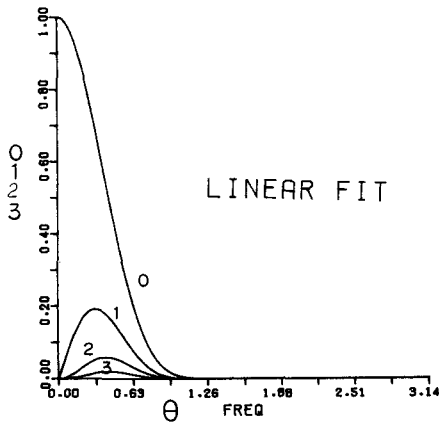


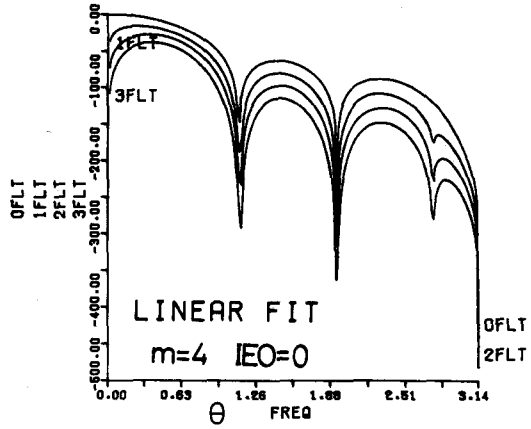
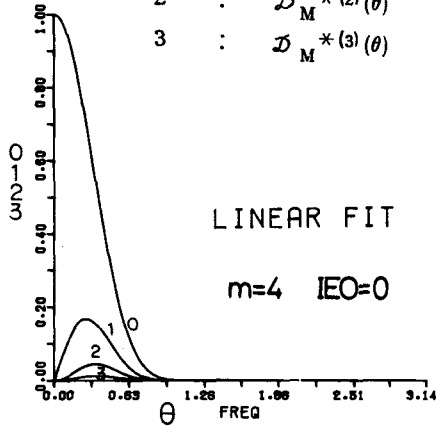
図 2.4.5 最小自乗法によるカスケード微分フィルタ  $\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$  の周波数特性 - 1



M=3

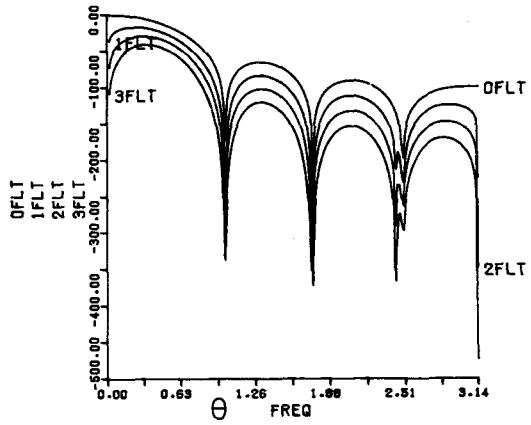
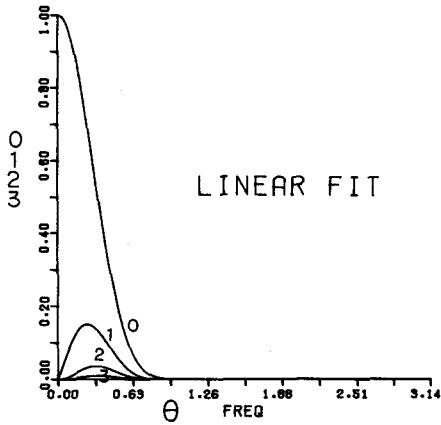
- 0 :  $\mathcal{D}_M^{*(0)}(\theta)$
- 1 :  $\mathcal{D}_M^{*(1)}(\theta)$
- 2 :  $\mathcal{D}_M^{*(2)}(\theta)$
- 3 :  $\mathcal{D}_M^{*(3)}(\theta)$

- 0FLT :  $20 \cdot \log |\mathcal{D}_M^{*(0)}(\theta)|$
- 1FLT :  $20 \cdot \log |\mathcal{D}_M^{*(1)}(\theta)|$
- 2FLT :  $20 \cdot \log |\mathcal{D}_M^{*(2)}(\theta)|$
- 3FLT :  $20 \cdot \log |\mathcal{D}_M^{*(3)}(\theta)|$



m=4 IEO=1

LINEAR FIT m=4 IEO=1



m=5 IEO=0

LINEAR FIT m=5 IEO=0

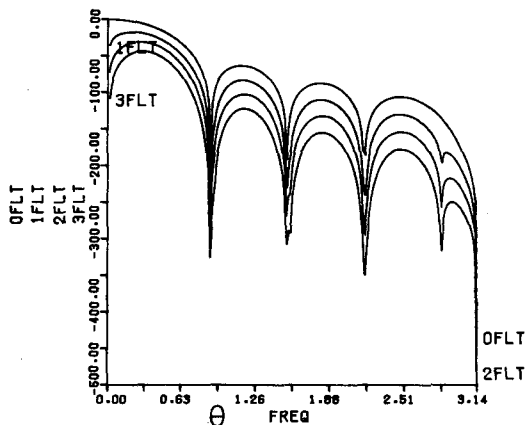
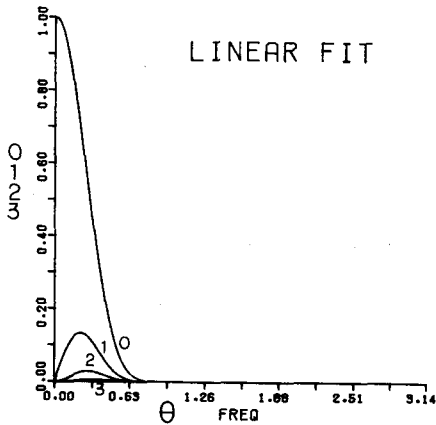
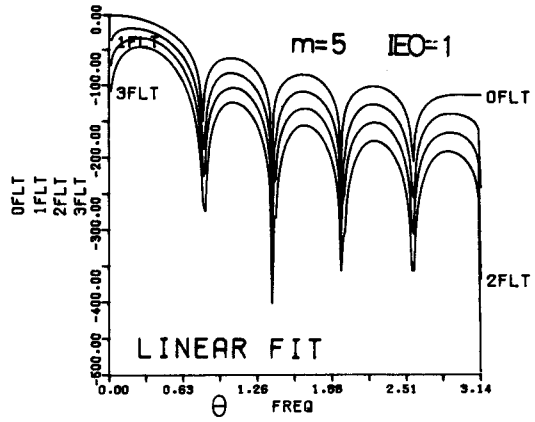
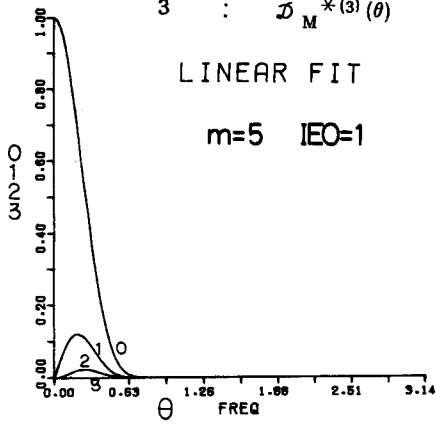


図 2.4.6 最小自乗法によるカスケード微分フィルタ  $\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$  の周波数特性-2

M=3

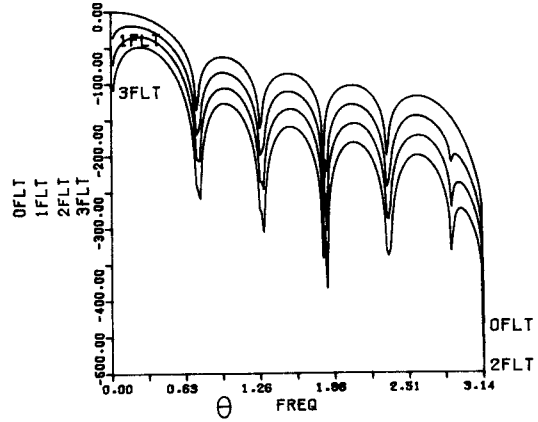
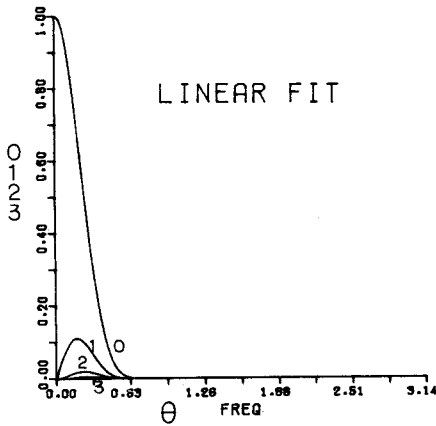
- 0 :  $\mathcal{D}_M^{*(0)}(\theta)$
- 1 :  $\mathcal{D}_M^{*(1)}(\theta)$
- 2 :  $\mathcal{D}_M^{*(2)}(\theta)$
- 3 :  $\mathcal{D}_M^{*(3)}(\theta)$

- 0FLT :  $20 \cdot \log |\mathcal{D}_M^{*(0)}(\theta)|$
- 1FLT :  $20 \cdot \log |\mathcal{D}_M^{*(1)}(\theta)|$
- 2FLT :  $20 \cdot \log |\mathcal{D}_M^{*(2)}(\theta)|$
- 3FLT :  $20 \cdot \log |\mathcal{D}_M^{*(3)}(\theta)|$



m=6 IEO=0

LINEAR FIT m=6 IEO=0



m=7 IEO=1

LINEAR FIT m=7 IEO=1

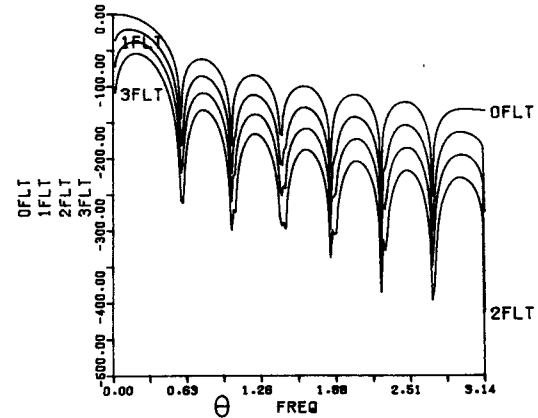
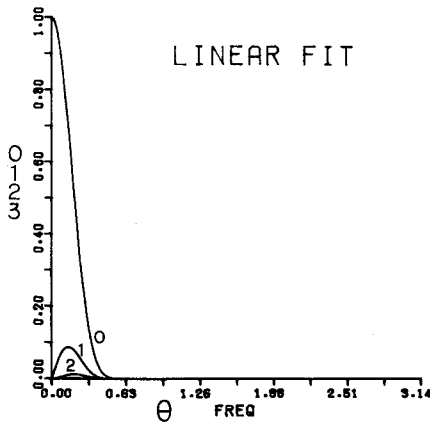
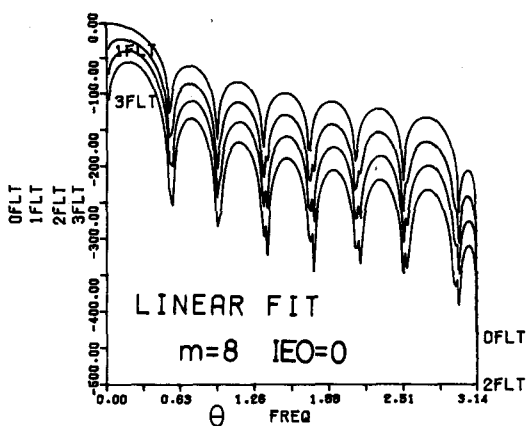
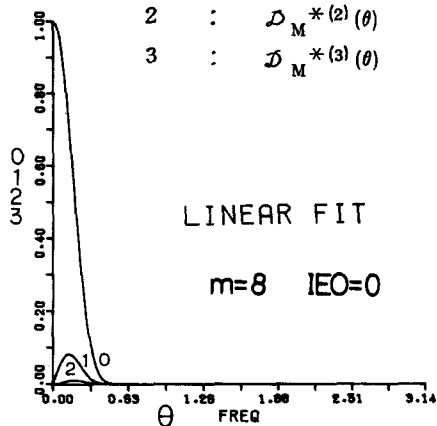


図 2.4.7 最小自乗法によるカスケード微分フィルタ  $\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$  の周波数特性 - 3

M=3

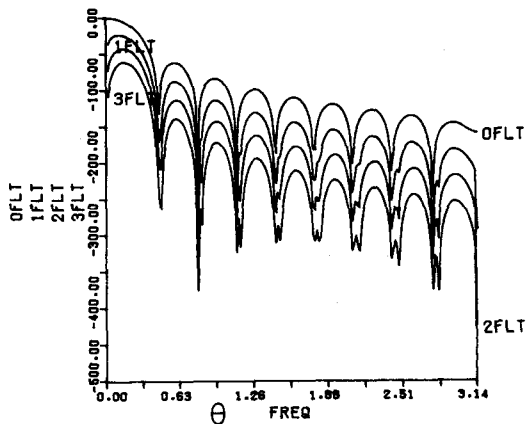
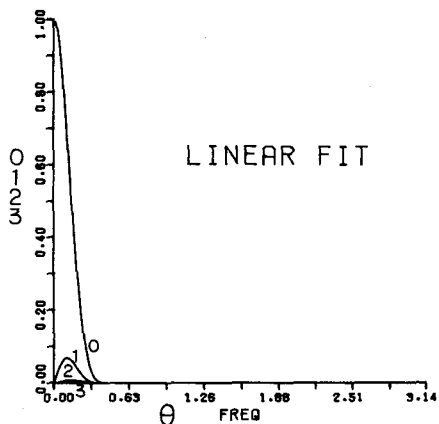
- 0 :  $\mathcal{D}_M^{*(0)}(\theta)$
- 1 :  $\mathcal{D}_M^{*(1)}(\theta)$
- 2 :  $\mathcal{D}_M^{*(2)}(\theta)$
- 3 :  $\mathcal{D}_M^{*(3)}(\theta)$

- 0FLT :  $20 \cdot \log | \mathcal{D}_M^{*(0)}(\theta) |$
- 1FLT :  $20 \cdot \log | \mathcal{D}_M^{*(1)}(\theta) |$
- 2FLT :  $20 \cdot \log | \mathcal{D}_M^{*(2)}(\theta) |$
- 3FLT :  $20 \cdot \log | \mathcal{D}_M^{*(3)}(\theta) |$



m=9 IEO=1

LINEAR FIT m=9 IEO=1



m=10 IEO=0

LINEAR FIT m=10 IEO=0

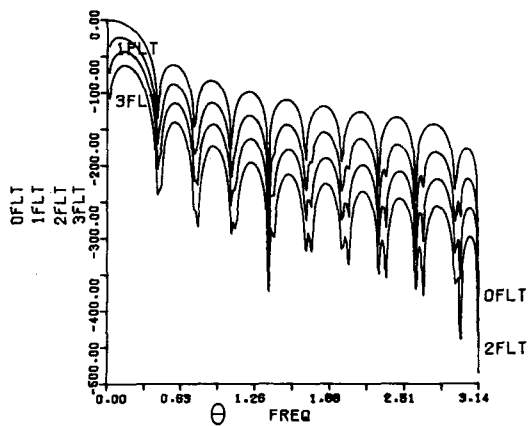
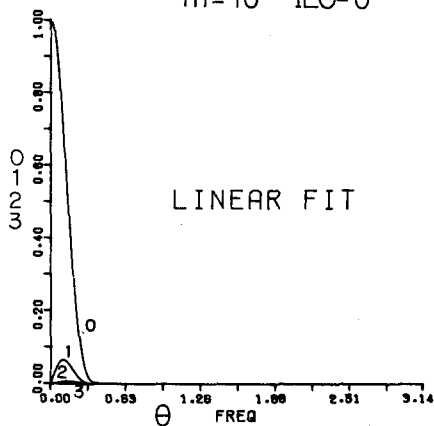


図 2.4.8 最小自乗法によるカスケード微分フィルタ  $\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$  の周波数特性-4

$$\alpha = \beta + \mathbf{M}^+ \cdot (1 - \mathbf{M} \cdot \beta) \quad (2.4.19)$$

となる。ここで

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)^T \quad (2.4.20)$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi P^*(\theta) \cdot \cos \left\{ \left( \frac{N+1}{2} - k \right) \theta \right\} d\theta \quad (2.4.21)$$

( $k=1, 2, \dots, N$ )

となる。

このようにして得た  $Q(z)$  は低減フィルタなのでカスケード・フィルタ  $\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$  も狭帯域の微分フィルタとなる。これらの細かい性質は 2.6 で論じてある。カスケード微分フィルタは、 $M, m, k$  と  $N$  が偶 ( $N=2m$ ) か奇 ( $N=2m+1$ ) を区別する  $IEO$  ( $IEO=1$ : 奇,  $IEO=0$ : 偶) を指定すればよい。ここで考えた  $P(z), Q(z), \mathcal{D}_M^{(k)}(z)$  には「最小自乗法による」と形容詞を付けることにする。又  $\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$  の振幅特性を  $\mathcal{D}_M^{*(k)}(\theta)$  と表わしておく。すなわち

$$\mathcal{D}_M^{(k)}(e^{i\omega T_s}) = i^k \cdot \mathcal{D}_M^{*(k)}(\omega \cdot T_s) \cdot e^{-i\omega \left( \frac{N-1}{2} \right) M \cdot T_s} \quad (2.4.22)$$

### 2.4.3 応答波形

ここで提案したカスケード微分フィルタが実際の波形に対してどのように応答するかを調べるために図 2.4.8 のようなシステムを考える。2次系

$$R(S) = \frac{G}{A \cdot S^2 + B \cdot S + 1} \quad (2.4.23)$$

に信号

$$x(t) = A_s \cdot \sin \omega_0 t + B_s \cdot t^2 + C_s \cdot t + D_s + N(v, \sigma) \quad (2.4.24)$$

を加えた時の出力  $y(t)$  に雑音  $\varepsilon(t) (= N(0, \pi_0))$  を加えたものを  $\hat{y}(t)$  とし、このサンプル値  $\hat{y}_n$  ( $T_s = 1 \text{ sec}$ ) の  $\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$  による応答を調べる。ここで  $N(v, \sigma)$  は平均 0, 標準偏差  $\sigma$  の正規性雑音である。図 2.4.9 は  $A_s = 0, B_s = 0, C_s = 1, D_s = 0, v = 0, \sigma = 5, k = 0, M = 3, m = 4, IEO = 1$  の場合すなわち、ランプ状入力の応答波形である。ところで  $m \cdot M \cdot T_s = 12 \text{ sec}$  だけれど、図 2.4.9 には  $\hat{Y}_n$  が 12 秒遅れた  $\hat{y}_n$  の濾過値となっているのがわかる。図 2.4.10 と図 2.4.11 では  $A_s = 0, B_s = 1, C_s = 0, D_s = 0, v = 0, \sigma = 100$  の場合に対し  $k = 1$  および  $k = 2$  (他は図 2.4.9 と同じ) としたものである。すなわち時間の 2 次関数で与えられる信号の速度、加速度を求めるもので、図 2.4.10, 図 2.4.11 に雑音除去され 12 sec 時間の遅れた速度、加速度が抽出されている様子がわかる。

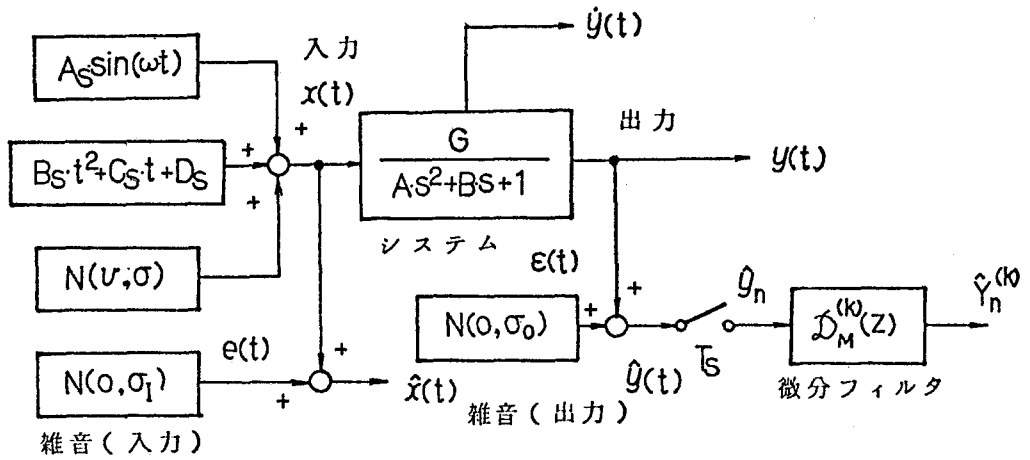


図 2.4.8 カスケード・デジタル微分フィルタのテストのためのシステム

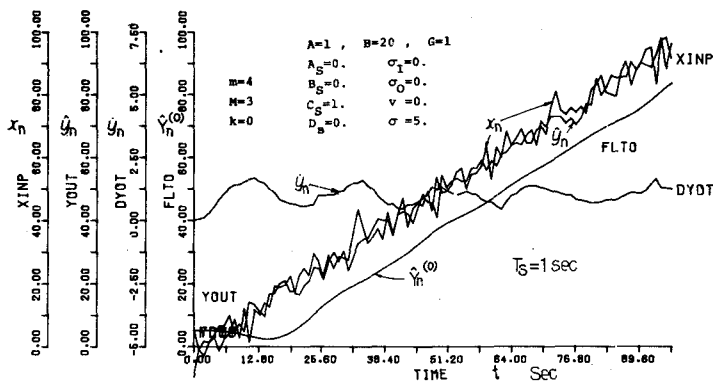


図 2.4.9 雑音を含むランプ状信号に対する応答

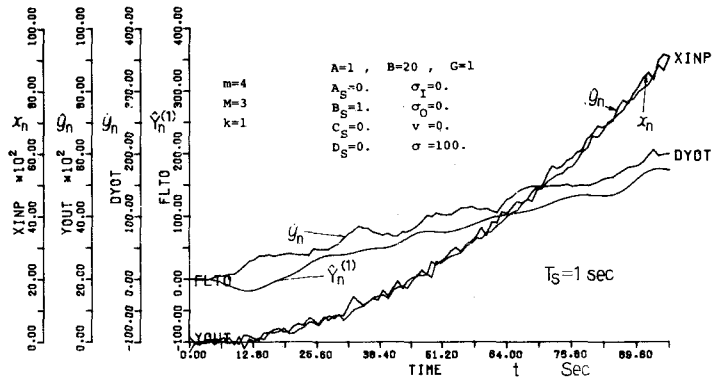


図 2. 4. 10 雑音を含む時間の 2 次関数に対する応答 ( $k = 1$ )

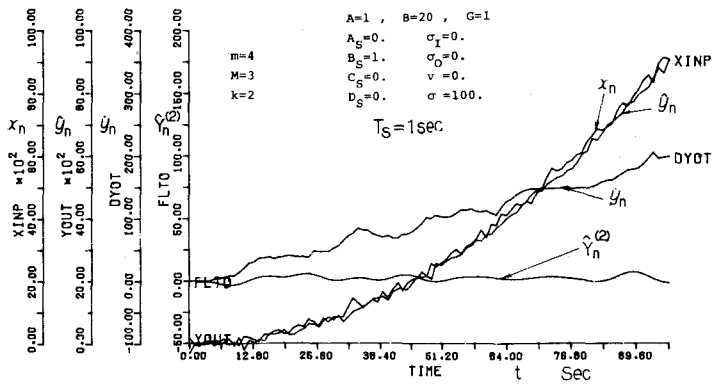


図 2. 4. 11 雑音を含む 2 次関数に対する応答 ( $k = 2$ )

## 2.5 Zolotarev の多項式によるデジタル微分フィルタ

カスケード・フィルタを作る際に基礎となるフィルタ  $P(z)$  として 2.4 では最小自乗法の意味で狭帯域の微分フィルタを用いた。しかしこの選び方は無数にあり得る。ただ低域成分の微分ということに興味があるから  $P^*(\theta)$  として狭帯域の低域特性のものが望ましい。Zolotarev の多項式を用いると (1.4.46) のような一様最良化誤差を最小にするという意味で最適な微分フィルタが得られ、これをカスケード・フィルタの基礎のフィルタとして用いることができる。Zolotarev 多項式の説明とそれによる微分フィルタ  $P(z)$ 、またそれより得られる  $Q(z)$  とカスケード微分フィルタの設計例について与える。この節での  $P(z)$ 、 $Q(z)$  を  $\tilde{P}(z)$ 、 $\tilde{Q}(z)$  と記してある。

### 2.5.1 Zolotarev の多項式

Zolotarev の多項式というのは図

2.5.1 のように  $\lambda$  を (32)、(34)、(35)

$$0 < \lambda < 1 \quad (2.5.1)$$

として

$$\lambda \leq |x| \leq 1 \quad (2.5.2)$$

で等リブルとなり

$$|x| < \lambda \quad (2.5.3)$$

で2つの極値をとり

$$|x| > 1 \quad (2.5.4)$$

には極値をもたないような奇数次の多項式である。正確には  $2n+1$  次の多項式

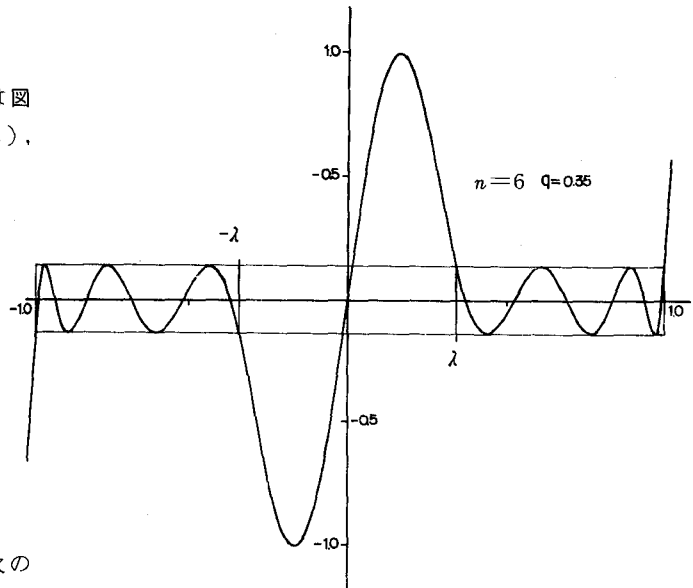


図 2.5.1 Zolotarev の多項式

$$F_{2n+1}(x) = \frac{L_0}{2} \left[ \left\{ \frac{\vartheta_1(a+v)}{\vartheta_1(a-v)} \right\}^{n+\frac{1}{2}} + \left\{ \frac{\vartheta_1(a-v)}{\vartheta_1(a+v)} \right\}^{n+\frac{1}{2}} \right] \quad (2.5.5)$$

を  $2n+1$  次の Zolotarev の多項式という

ここで

$$a = 1 / (4n+2) \quad (2.5.6)$$

であり、又  $\vartheta_1(v)$  は Weierstrass の Theta 関数であり (33)、(36)

$$\vartheta_1(v) = 2 \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \cdot q^{\ell(\ell+\frac{1}{2})^2} \cdot \sin(2\ell+1)\pi v \quad (2.5.7)$$

で与えられる。(2.5.7) は

$$|q| < 1 \quad (2.5.8)$$

なら絶対一様収束する。

次に *Jacobi* の楕円関数での母数を  $k$ 、<sup>(36)</sup> 楕補母数を  $k' = \sqrt{1-k^2}$  とし

$$K = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 \cdot u^2)}} du \quad (2.5.9)$$

$$K' = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)(1-k'^2 \cdot u^2)}} du \quad (2.5.10)$$

とする。そして

$$q = \exp\left(-\frac{\pi K'}{K}\right) \quad (2.5.11)$$

とする。  $K, K'$  が共に正なので  $q$  は (2.5.8) の条件を満たしている。逆に  $q$  が定まると

$$K = \frac{\pi}{2} (1 + 2 \cdot q + 2 \cdot q^4 + 2 \cdot q^9 + \dots)^2 \quad (2.5.12)$$

となり  $K$  が定まる。<sup>(36)</sup> 次に  $sn(\cdot)$  を *Jacobi* の楕円関数として

$$M' = 2 \cdot K \cdot a \quad (2.5.13)$$

$$\lambda = sn M' \quad (2.5.14)$$

$$u = 2 K \cdot v \quad (2.5.15)$$

および

$$x = \frac{\lambda \cdot cn u}{\sqrt{\lambda^2 - sn^2 u}} \quad (2.5.16)$$

とおく。  $F_{2n+1}(x)$  は次のようにして定まる。まず次数  $n$  および図 2.5.1 を参照して  $\lambda$  を定める。リブルの高さ  $L_0$  は単に全体を伸縮するのみなので、後で考えることができる。次に (2.5.6) より  $a$  を定め次に (2.5.14) より  $M'$  を定める。次に (2.5.13) より  $K$  を定め、(2.5.9) より  $k$  を定め  $k' = \sqrt{1-k^2}$  を求め (2.5.10) より  $K'$  を計算する。次に (2.5.11) より  $q$  を求める。次に  $x$  の値を与えて (2.5.16) より  $u$  を求め、(2.5.15) より  $v$  を求める。このようにして (2.5.7) と (2.5.5) により  $F_{2n+1}(x)$  が求まる。

これら一連の式をみると  $F_{2n+1}(x)$  は  $x$  の多項式であるような気がしないが、 $x$  の多項式であることが証明されている。<sup>(32)</sup>  $F_{2n+1}(x)$  の零点は  $2n+1$  個あるが、このうち  $\lambda \leq x \leq 1$  には  $n$  個があり

$$\frac{\vartheta_1(a + i \cdot v_n)}{\vartheta_1(a - i \cdot v_n)} = \exp\left(i \frac{2m-1}{2n+1} \cdot \pi\right) \quad (2.5.17)$$



を満たす。この  $v_m$  を用いると根は

$$x_m = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + (1 - \lambda^2) \cdot x_m^2}} \quad (2.5.18)$$

で表わされる。  $F_{2n+1}(0) = 0$  および奇関数なることを用いて

$$F_{2n+1}(x) = L_o \cdot x \cdot \prod_{m=1}^n (x^2 - x_m^2) \quad (2.5.19)$$

と表わされる。これを展開して

$$F_{2n+1}(x) = L_o \cdot \sum_{\ell=0}^n a_{n,\ell} \cdot x^{2 \cdot (n-\ell)+1} \quad (2.5.20)$$

を得る。

実際計算する場合には  $\lambda$  を与えるより  $q$  を与えた方が便利である。図 2.5.3 はいくつかの  $n$  と  $q$  に対して第 1 の極値が 1 となるようにして  $F_{2n+1}(x)$  を描いたものである。

### 2.5.2 Zolotarev の多項式を用いた微分フィルタ (E15)

Zolotarev の多項式  $F_{2n+1}(x)$  を用いるとデジタル微分フィルタを作ることができる。すなわち (2.5.20) で

$$x = \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.5.21)$$

とすると図 2.5.2 のように  $-1 \leq x \leq 1$  が  $-\pi \leq \theta \leq \pi$

に対応する。そして  $F_{2n+1}(\sin \frac{\theta}{2})$  を

$$F_{2n+1}(\sin \frac{\theta}{2}) = 2 \cdot L_o \cdot \sum_{\ell=0}^n b_{n,\ell} \cdot \sin(n + \frac{1}{2} - \ell)\theta$$

$$(2.5.22)$$

と表わすことができる。これを振幅特性としてもつ

パルス伝達関数は (1.4.54) より

$$\tilde{P}(z) = L_o \cdot \sum_{\ell=1}^{2 \cdot (n+1)} b_{n,\ell-1} \cdot z^{1-\ell} \quad (2.5.23)$$

$$b_{n,\ell-1} + b_{n,2n+2-\ell} = 0 \quad (\ell = 1, 2, \dots, 2n+2) \quad (2.5.24)$$

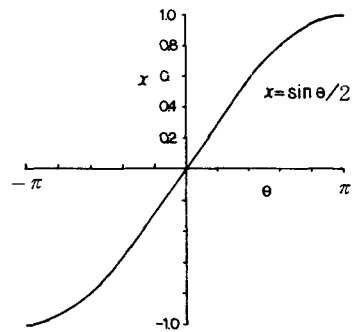


図 2.5.2  $x = \sin \frac{\theta}{2}$

となる。このフィルタにランプ信号を入力したとき出力がちょうどその勾配となるという条件を課すると  $L_0$  は

$$L_0 = 1/2 \cdot T_s \cdot \sum_{\ell=1}^{n+1} \ell \cdot b_{n, n+1-\ell} \quad (2.5.25)$$

となる。この  $\tilde{P}(z)$  に対して 2.4.2 で行ったと同じ方法で  $\tilde{Q}(z)$  を作る。そして (2.4.7) により  $M$  段のカスケード・フィルタ  $\tilde{D}_M^{(k)}(z)$  を作る事ができる。ただしこの時は

$$N = 2n + 2 \quad (2.5.26)$$

のような偶数に限られる。図 2.5.3 にはこのように *Zolotarev* の多項式より作った  $\tilde{P}(z)$ ,  $\tilde{Q}(z)$  に対する  $\tilde{P}^*(\theta)$ ,  $\tilde{Q}^*(\theta)$ ,  $\theta \cdot \tilde{P}^*(\theta)$  を各  $n, q$  の値に対して描いてある。又図 2.5.5 にはこれらを用いた 3 段のカスケード・フィルタの特性を示した。又表 2.5.1 には  $\tilde{P}(z)$ ,  $\tilde{Q}(z)$  の係数を示した。

*Zolotarev* 多項式より得られた  $\tilde{P}(z)$ ,  $\tilde{Q}(z)$ ,  $\tilde{D}_M^{(k)}(z)$  等には「*Zolotarev* 多項式による」と形容詞をつけることにする。又  $\tilde{D}_M^{(k)}(z)$  の振幅特性を  $\tilde{D}_M^{*(k)}(\theta)$  とする。すなわち

$$\tilde{D}_M^{(k)}(e^{i\omega T_s}) = i^k \cdot \tilde{D}_M^{*(k)}(\omega \cdot T_s) \cdot e^{-i\omega \cdot (\frac{N-1}{2}) M \cdot T_s} \quad (2.5.27)$$

D :  $\tilde{P}(z)$  の係数      L :  $\tilde{Q}(z)$  の係数

	n	q	1	2	3	4	5
			6	7	8	9	10
ZOLO D	1 n = 1	q = 0.50000	0.254303	0.237092			
ZOLO L	1 n = 1	q = 0.50000	0.101818	0.398182			
ZOLO D	1 n = 3	q = 0.50000	0.032108	0.083438	0.103319	0.048100	
ZOLO L	1 n = 3	q = 0.50000	0.014162	0.071795	0.167565	0.246478	
ZOLO D	1 n = 5	q = 0.50000	0.006914	0.015461	0.026123	0.034192	0.035159
ZOLO D	2 n = 6	q = 0.50000	0.026621	0.009941			
ZOLO L	1 n = 6	q = 0.50000	0.004857	0.016290	0.036658	0.066159	0.099659
ZOLO L	2 n = 6	q = 0.50000	0.129424	0.146952			
ZOLO D	1 n = 9	q = 0.50000	0.003143	0.005408	0.008875	0.012527	0.015620
ZOLO D	2 n = 9	q = 0.50000	0.017352	0.017070	0.014469	0.009709	0.003421
ZOLO L	1 n = 9	q = 0.50000	0.003410	0.008021	0.015075	0.025589	0.038999
ZOLO L	2 n = 9	q = 0.50000	0.054565	0.070579	0.085175	0.096282	0.102305

表 2.5.1 *Zolotarev* 多項式による  $\tilde{P}(z)$ ,  $\tilde{Q}(z)$  の係数

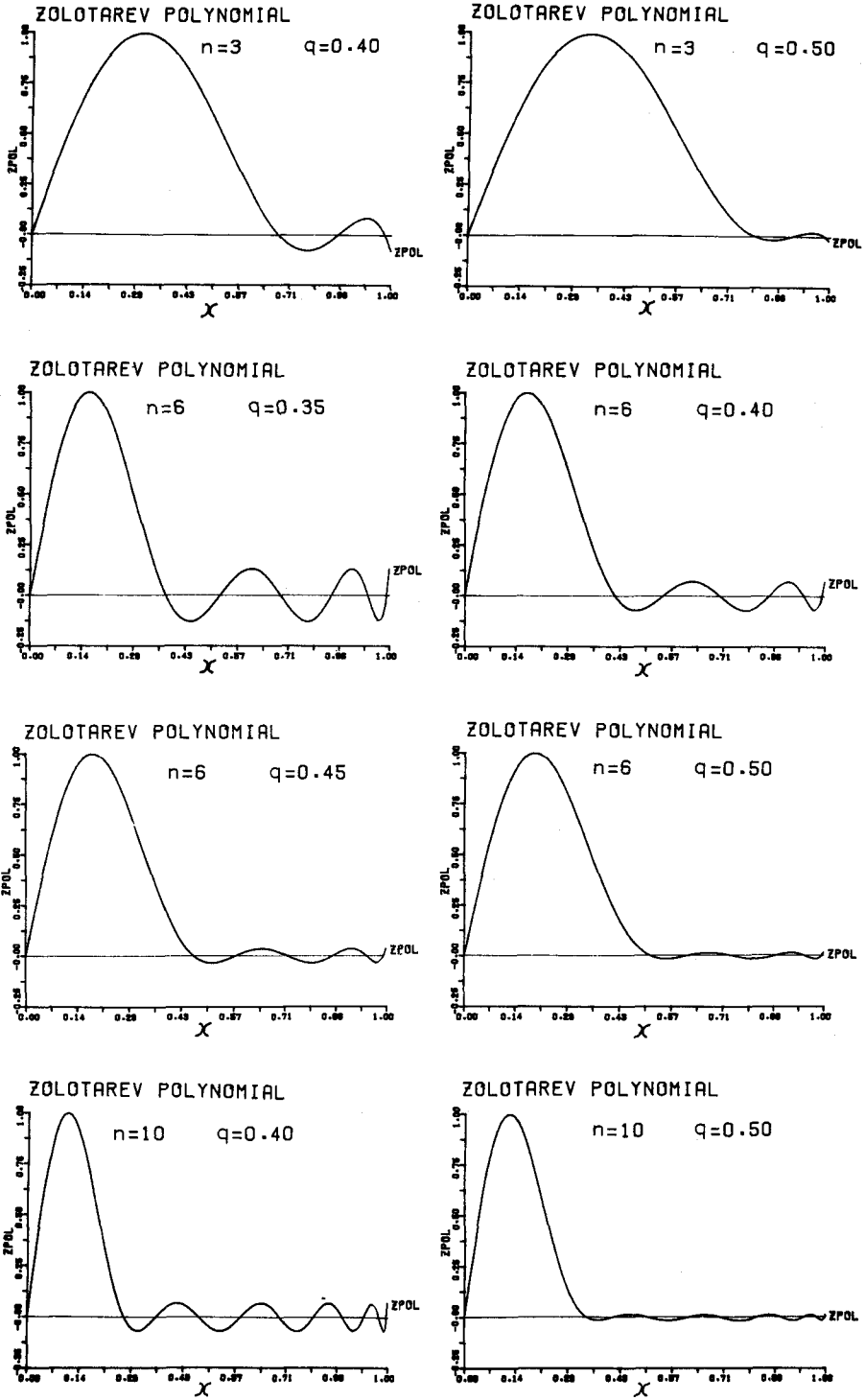


図 2.5.3 パラメータを種々変えた Zolotarev の多項式

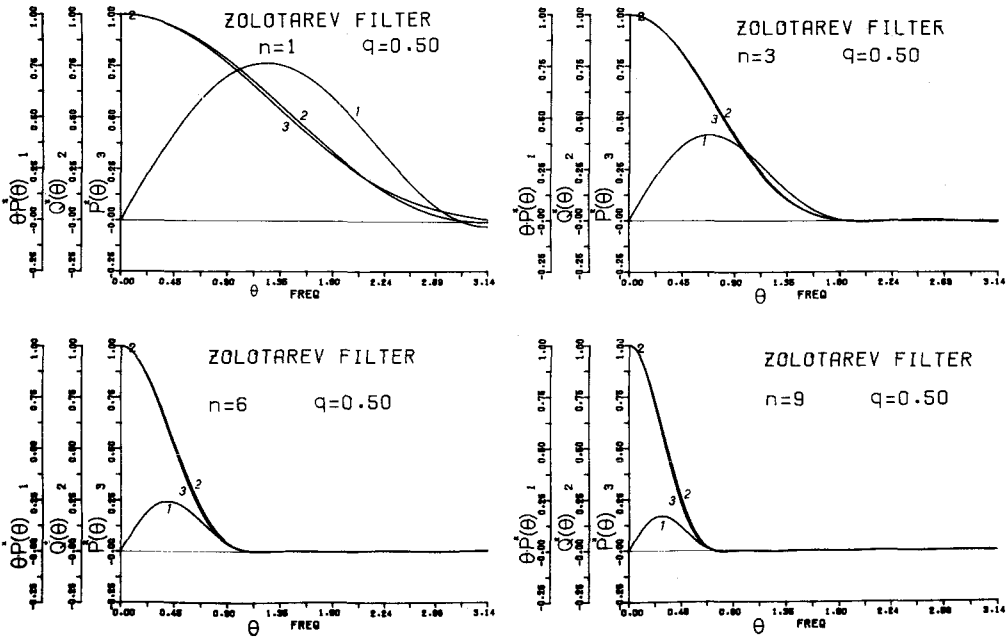


図 2.5.4 Zolotarev 多項式による  $\theta \cdot \tilde{P}^*(\theta)$ ,  $\tilde{Q}^*(\theta)$ ,  $\tilde{P}^*(\theta)$

ZOLOTAREV				M=3				ZOLOTAREV							
n=1 q= 05		n=3 q= 05		n=6 q= 05		n=9 q= 05		n=1 q= 05		n=3 q= 05		n=6 q= 05		n=9 q= 05	
K=	K=	K=	K=	K=	K=	K=	K=	K=	K=	K=	K=	K=	K=	K=	K=
1	0.164595E-02	0.263377E-01	0.558498E-02	0.104498E-01	0.284308E-04	0.331308E-04	0.365518E-07	0.336471E-07	0.336695E-07	0.314801E-07	0.314801E-07	0.314801E-07	0.314801E-07	0.314801E-07	0.314801E-07
2	0.123837E-01	0.231778E-01	0.380283E-01	0.469362E-01	0.558498E-02	0.647501E-02	0.736604E-02	0.825707E-02	0.914810E-02	0.100392E-01	0.109384E-01	0.118376E-01	0.127368E-01	0.136360E-01	0.145352E-01
3	0.608131E-01	0.777096E-01	0.872118E-01	0.921211E-02	0.953377E-02	0.985543E-02	0.101720E-01	0.104897E-01	0.108074E-01	0.111251E-01	0.114428E-01	0.117605E-01	0.120782E-01	0.123959E-01	0.127136E-01
4	0.145156E-01	0.120960E-01	0.495149E-02	0.121790E-02	0.133841E-01	0.133841E-01	0.133841E-01	0.133841E-01	0.133841E-01	0.133841E-01	0.133841E-01	0.133841E-01	0.133841E-01	0.133841E-01	0.133841E-01
5	0.262991E-03	0.636141E-03	0.116175E-02	0.496999E-01	0.145999E-04	0.145999E-04	0.145999E-04	0.145999E-04	0.145999E-04	0.145999E-04	0.145999E-04	0.145999E-04	0.145999E-04	0.145999E-04	0.145999E-04
6	0.284308E-04	0.284308E-04	0.284308E-04	0.284308E-04	0.284308E-04	0.284308E-04	0.284308E-04	0.284308E-04	0.284308E-04	0.284308E-04	0.284308E-04	0.284308E-04	0.284308E-04	0.284308E-04	0.284308E-04
7	0.331308E-04	0.331308E-04	0.331308E-04	0.331308E-04	0.331308E-04	0.331308E-04	0.331308E-04	0.331308E-04	0.331308E-04	0.331308E-04	0.331308E-04	0.331308E-04	0.331308E-04	0.331308E-04	0.331308E-04
8	0.365518E-07	0.365518E-07	0.365518E-07	0.365518E-07	0.365518E-07	0.365518E-07	0.365518E-07	0.365518E-07	0.365518E-07	0.365518E-07	0.365518E-07	0.365518E-07	0.365518E-07	0.365518E-07	0.365518E-07
9	0.399739E-02	0.399739E-02	0.399739E-02	0.399739E-02	0.399739E-02	0.399739E-02	0.399739E-02	0.399739E-02	0.399739E-02	0.399739E-02	0.399739E-02	0.399739E-02	0.399739E-02	0.399739E-02	0.399739E-02
10	0.433960E-02	0.433960E-02	0.433960E-02	0.433960E-02	0.433960E-02	0.433960E-02	0.433960E-02	0.433960E-02	0.433960E-02	0.433960E-02	0.433960E-02	0.433960E-02	0.433960E-02	0.433960E-02	0.433960E-02
11	0.468181E-02	0.468181E-02	0.468181E-02	0.468181E-02	0.468181E-02	0.468181E-02	0.468181E-02	0.468181E-02	0.468181E-02	0.468181E-02	0.468181E-02	0.468181E-02	0.468181E-02	0.468181E-02	0.468181E-02
12	0.502402E-02	0.502402E-02	0.502402E-02	0.502402E-02	0.502402E-02	0.502402E-02	0.502402E-02	0.502402E-02	0.502402E-02	0.502402E-02	0.502402E-02	0.502402E-02	0.502402E-02	0.502402E-02	0.502402E-02
13	0.536623E-02	0.536623E-02	0.536623E-02	0.536623E-02	0.536623E-02	0.536623E-02	0.536623E-02	0.536623E-02	0.536623E-02	0.536623E-02	0.536623E-02	0.536623E-02	0.536623E-02	0.536623E-02	0.536623E-02
14	0.570844E-02	0.570844E-02	0.570844E-02	0.570844E-02	0.570844E-02	0.570844E-02	0.570844E-02	0.570844E-02	0.570844E-02	0.570844E-02	0.570844E-02	0.570844E-02	0.570844E-02	0.570844E-02	0.570844E-02
15	0.605065E-02	0.605065E-02	0.605065E-02	0.605065E-02	0.605065E-02	0.605065E-02	0.605065E-02	0.605065E-02	0.605065E-02	0.605065E-02	0.605065E-02	0.605065E-02	0.605065E-02	0.605065E-02	0.605065E-02
16	0.639286E-02	0.639286E-02	0.639286E-02	0.639286E-02	0.639286E-02	0.639286E-02	0.639286E-02	0.639286E-02	0.639286E-02	0.639286E-02	0.639286E-02	0.639286E-02	0.639286E-02	0.639286E-02	0.639286E-02
17	0.673507E-02	0.673507E-02	0.673507E-02	0.673507E-02	0.673507E-02	0.673507E-02	0.673507E-02	0.673507E-02	0.673507E-02	0.673507E-02	0.673507E-02	0.673507E-02	0.673507E-02	0.673507E-02	0.673507E-02
18	0.707728E-02	0.707728E-02	0.707728E-02	0.707728E-02	0.707728E-02	0.707728E-02	0.707728E-02	0.707728E-02	0.707728E-02	0.707728E-02	0.707728E-02	0.707728E-02	0.707728E-02	0.707728E-02	0.707728E-02
19	0.741949E-02	0.741949E-02	0.741949E-02	0.741949E-02	0.741949E-02	0.741949E-02	0.741949E-02	0.741949E-02	0.741949E-02	0.741949E-02	0.741949E-02	0.741949E-02	0.741949E-02	0.741949E-02	0.741949E-02
20	0.776170E-02	0.776170E-02	0.776170E-02	0.776170E-02	0.776170E-02	0.776170E-02	0.776170E-02	0.776170E-02	0.776170E-02	0.776170E-02	0.776170E-02	0.776170E-02	0.776170E-02	0.776170E-02	0.776170E-02
21	0.810391E-02	0.810391E-02	0.810391E-02	0.810391E-02	0.810391E-02	0.810391E-02	0.810391E-02	0.810391E-02	0.810391E-02	0.810391E-02	0.810391E-02	0.810391E-02	0.810391E-02	0.810391E-02	0.810391E-02
22	0.844612E-02	0.844612E-02	0.844612E-02	0.844612E-02	0.844612E-02	0.844612E-02	0.844612E-02	0.844612E-02	0.844612E-02	0.844612E-02	0.844612E-02	0.844612E-02	0.844612E-02	0.844612E-02	0.844612E-02
23	0.878833E-02	0.878833E-02	0.878833E-02	0.878833E-02	0.878833E-02	0.878833E-02	0.878833E-02	0.878833E-02	0.878833E-02	0.878833E-02	0.878833E-02	0.878833E-02	0.878833E-02	0.878833E-02	0.878833E-02
24	0.913054E-02	0.913054E-02	0.913054E-02	0.913054E-02	0.913054E-02	0.913054E-02	0.913054E-02	0.913054E-02	0.913054E-02	0.913054E-02	0.913054E-02	0.913054E-02	0.913054E-02	0.913054E-02	0.913054E-02
25	0.947275E-02	0.947275E-02	0.947275E-02	0.947275E-02	0.947275E-02	0.947275E-02	0.947275E-02	0.947275E-02	0.947275E-02	0.947275E-02	0.947275E-02	0.947275E-02	0.947275E-02	0.947275E-02	0.947275E-02
26	0.981496E-02	0.981496E-02	0.981496E-02	0.981496E-02	0.981496E-02	0.981496E-02	0.981496E-02	0.981496E-02	0.981496E-02	0.981496E-02	0.981496E-02	0.981496E-02	0.981496E-02	0.981496E-02	0.981496E-02
27	0.101571E-01	0.101571E-01	0.101571E-01	0.101571E-01	0.101571E-01	0.101571E-01	0.101571E-01	0.101571E-01	0.101571E-01	0.101571E-01	0.101571E-01	0.101571E-01	0.101571E-01	0.101571E-01	0.101571E-01
28	0.104646E-01	0.104646E-01	0.104646E-01	0.104646E-01	0.104646E-01	0.104646E-01	0.104646E-01	0.104646E-01	0.104646E-01	0.104646E-01	0.104646E-01	0.104646E-01	0.104646E-01	0.104646E-01	0.104646E-01
29	0.107721E-01	0.107721E-01	0.107721E-01	0.107721E-01	0.107721E-01	0.107721E-01	0.107721E-01	0.107721E-01	0.107721E-01	0.107721E-01	0.107721E-01	0.107721E-01	0.107721E-01	0.107721E-01	0.107721E-01

表 2.5.2 Zolotarev 多項式によるカスケード微分フィルタ  $\tilde{D}_M^{(k)}(z)$  の係数表

M=3

- |   |   |                              |      |   |  |
|---|---|------------------------------|------|---|--|
| 0 | : | $\tilde{D}_M^{*(0)}(\theta)$ | 0FLT | : | $20 \cdot \log  \tilde{D}_M^{*(0)}(\theta) $ |
| 1 | : | $\tilde{D}_M^{*(1)}(\theta)$ | 1FLT | : | $20 \cdot \log  \tilde{D}_M^{*(1)}(\theta) $ |
| 2 | : | $\tilde{D}_M^{*(2)}(\theta)$ | 2FLT | : | $20 \cdot \log  \tilde{D}_M^{*(2)}(\theta) $ |
| 3 | : | $\tilde{D}_M^{*(3)}(\theta)$ | 3FLT | : | $20 \cdot \log  \tilde{D}_M^{*(3)}(\theta) $ |

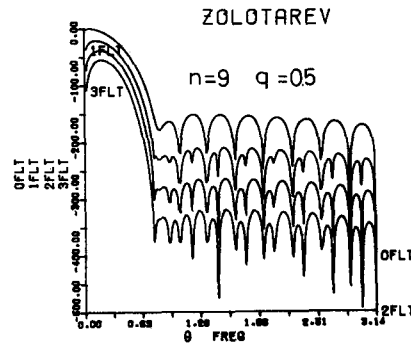
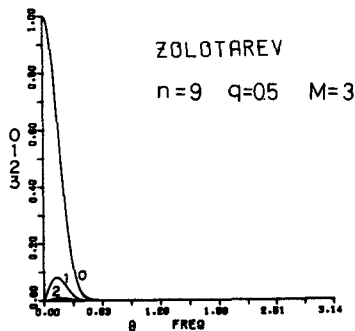
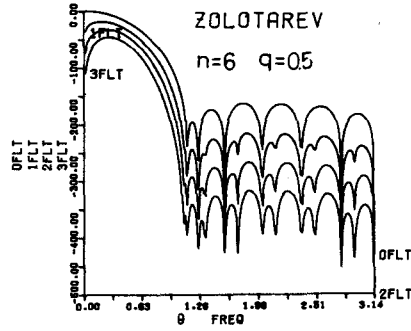
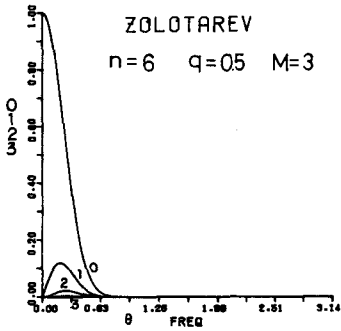
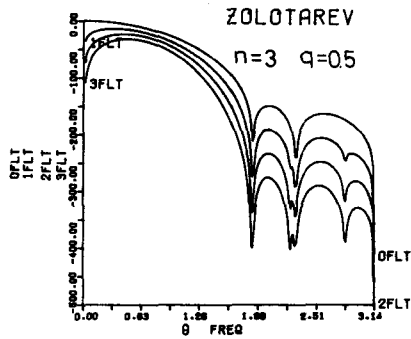
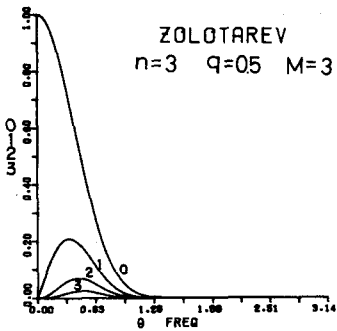
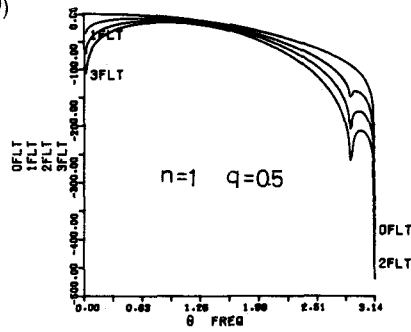
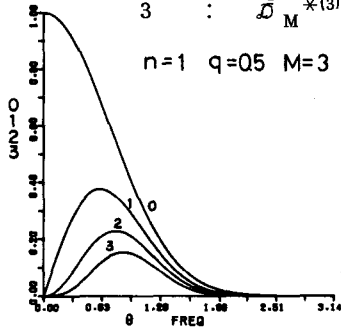


図 2.5.5 Zolotarev 多項式によるカスケード微分フィルタ  $\tilde{D}_M^{(k)}(z)$  の周波数特性

## 2.6 デジタル微分フィルタの比較 (E15)

この論文では FIR 形の高階の微分フィルタを 2 種類の方法で構成する手法を述べた。すなわち、〔A〕最小自乗法を用いて直接高階の微分フィルタを近似する。

〔B〕基礎となる 1 階の微分フィルタと低域フィルタを用いてカスケード接続により高階の微分フィルタを構成する。

である。〔A〕ではそれぞれの階数毎に設計を行なわなければならないのに対し後者ではその接続個数だけで階数が自由に選べることで、この論文では応用問題に対してすべて〔B〕のフィルタを用いている。

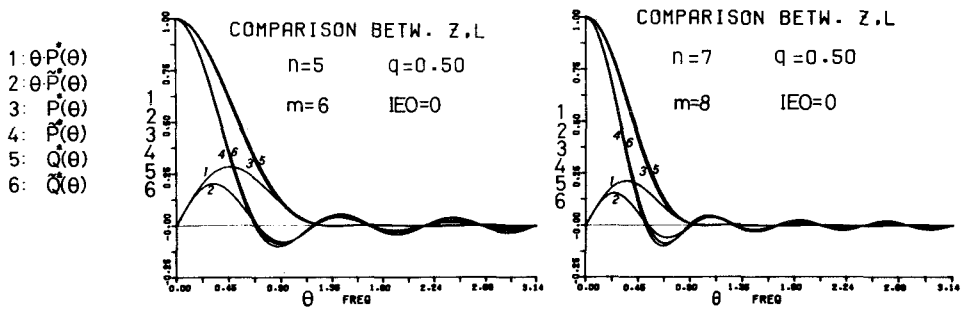


図 2.6.1 同じ  $N$  に対する最小自乗法および Zolotarev 多項式による微分フィルタの周波数特性の比較

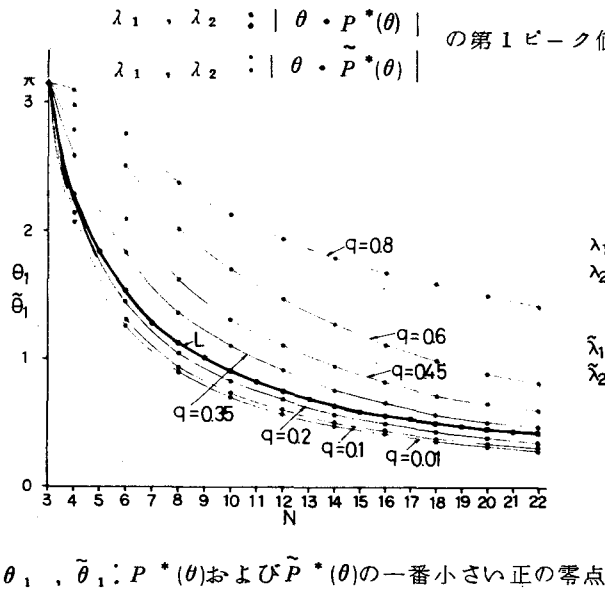


図 2.6.2 微分フィルタの第 1 零点

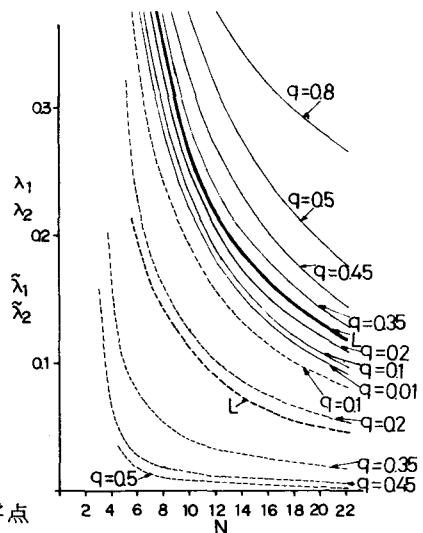


図 2.6.3 微分フィルタのピーク値

〔B〕の方法では同じ位数の微分および低域フィルタ $P(z)$ 、 $Q(z)$ を用いている。はじめに $P(z)$ を与えて $Q(z)$ は〔A〕と同じ最小自乗法により $E^*(\theta) \approx Q^*(\theta)$  ( $|\theta| \leq \pi$ )が成立するように近似し、その近似の度合は実用上十分によいことは図2.4.3、図2.4.4、図2.5.4など数多くの例より確かめられるところである。

そして基となる微分フィルタ $P(z)$ としては最小自乗法で直線をあてはめて作った「最小自乗法によるフィルタ」とZolotarev多項式を用いて作った「Zolotarev多項式による」フィルタを与えた。実用上からはこの2種類のいずれかを用いることになるので、両者の比較をしておく。最小自乗法によるフィルタ $P(z)$ は $m$ と $IEO$ で確定する。Zolotarev多項式によるフィルタ $\tilde{P}(z)$ は $n$ と $q$ で確定する。 $P(z)$ 、 $\tilde{P}(z)$ の係数の個数を(次数+1) $N$ とすると

$$2 \cdot m + IEO = N \quad (2.6.1)$$

$$2 \cdot (n + 1) = N \quad (2.6.2)$$

という関係があった。

$P^*(\theta)$ および $\tilde{P}^*(\theta)$ の一番小さい正の零点を $\theta_1$ 、 $\tilde{\theta}_1$ とすると、2.4と2.5の結果からわかるように、カスケード・デジタル微分フィルタを構成した場合に最小自乗法によるフィルタを用いた時は $|\theta| \geq \theta_1$ 、Zolotarev多項式によるフィルタを用いた時には $|\theta| \geq \tilde{\theta}_1$ の成分はほとんど遮断される。すなわち $\theta_1$ 、 $\tilde{\theta}_1$ はフィルタの遮断周波数を定める量となる。又 $|\theta \cdot P^*(\theta)|$ の第1ピーク値と第2ピーク値を夫々 $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  ( $|\theta \cdot \tilde{P}^*(\theta)|$ に対しては $\tilde{\lambda}_1$ 、 $\tilde{\lambda}_2$ とする)とする。このとき $\lambda_2 / \lambda_1$ の値が小さければ遮断の効果が大きいことを示すことになる。

図2.6.2には $\theta_1$ 、 $\tilde{\theta}_1$ の $N$ に対する変化を示した。 $\theta_1$ も $\tilde{\theta}_1$ も $q$ を固定すると $N$ と共に単調に減少するのがわかる。又これらの曲線は交差することなく $\theta_1$ の曲線は $\tilde{\theta}_1$ の $q$ が0.2、0.35に対する曲線の間にはさまれている。又図2.6.3には $\lambda_1$ と $\lambda_2$ および $\tilde{\lambda}_1$ と $\tilde{\lambda}_2$ の値を描いた。この図からも $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ は夫々 $q$ が0.2と0.35の値に対する $\tilde{\lambda}_1$ と $\tilde{\lambda}_2$ の間にはさまれていることがわかる。又一般に $N$ を固定して、 $q$ を増加させると $\tilde{\theta}_1$ は増加し、 $\tilde{\lambda}_1$ は増大し $\tilde{\lambda}_2$ は減少する。従って $P^*(\theta)$ は $N$ を固定すると $q$ と共に通過帯域は増加し遮断効果( $\tilde{\lambda}_2 / \tilde{\lambda}_1$ を指標として)は増加する。我々の目的とする多くの場合帯域は狭く、しかも遮断効果の高いものが要求されるので、 $q$ は目的に応じて0~1の適当な値に選ばねばならない。

$P(z)$ は遮断周波数と遮断効果の点から考えると $\tilde{P}(z)$ の $0.2 < q < 0.35$ を満たす適当な $q$ の場合と等価となる。ただし $|\theta P^*(\theta)|$ のピーク値の方は単調に減少するのに対して $|\theta \tilde{P}^*(\theta)|$ の2番目以上のピーク値は全て等しいことに注意を要する。

図2.6.1には $N = 12$ 、 $16$ の場合に $\theta \cdot P^*(\theta)$ 、 $\theta \cdot \tilde{P}^*(\theta)$ 、 $P^*(\theta)$ 、 $\tilde{P}^*(\theta)$ 、 $Q^*(\theta)$ 、 $\tilde{Q}^*(\theta)$ を描いたものである。この例では遮断周波数で $P(z)$ が、遮断効果で $\tilde{P}(z)$ が勝っている。カスケード接続すると遮断効果はいくらでも改善できるので、この論文の第3章以下では設計の簡単な最小自乗法によるフィルタ $P(z)$ 、 $Q(z)$ を用いて議論した。

## 2.7 ハイブリッド形微分フィルタ (A3)

FIR形のデジタルフィルタはデジタルフィルタ特有の形でアナログフィルタで直接このような形を持つものは存在しない。しかし適当な工夫をすれば近似的にはあるが実現可能である。それはサンプリングを伴うハイブリッド系とする方法である。この節ではこの方法で微分フィルタを構成する方法について述べる。

### 2.7.1 アナログFIR微分フィルタ

デジタル微分フィルタ (2.4.14) への入力を  $x_k$  , 出力を  $y_k$  とすると

$$y_k = \frac{12}{(N-1) \cdot N \cdot (N-1) \cdot T_s} \sum_{l=1}^N \left( \frac{N+1}{2} - l \right) \cdot x_{k+1-l} \quad (2.7.1)$$

となる。いま

$$N \cdot T_s = T \quad (2.7.2)$$

とし固定した時刻  $t$  に対して

$$t = k \cdot T_s \quad (2.7.3)$$

とおく。ここで  $T$  と  $t$  を固定したままで  $N$  と  $k$  を増大させると  $T_s \rightarrow 0$  となりアナログ形

$$y(t) = \int_{t-T}^t w(t-\tau) \cdot x(\tau) d\tau \quad (2.7.4)$$

FIR微分フィルタを得る。

ここでインパルス応答  $w(t)$  は図 2.7.1 のような形をしている。具体的には

$$w(t) = \begin{cases} \frac{12}{T^3} \left( \frac{T}{2} - t \right) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{他} \end{cases} \quad (2.7.5)$$

である。このフィルタにランプ状の信号

$$x(t) = \alpha \cdot t + \beta \quad (2.7.6)$$

を加えると出力は  $y(t) = \alpha$  となり入力信号の微分を表わしていることがわかる。

つぎにこのフィルタの周波数特性を調べるために入力信号として

$$x(t) = e^{i\omega t} \quad (2.7.7)$$

を選んだ場合を考える。この場合の出力信号は

$$y(t) = i\omega \cdot I\left(\frac{\omega T}{2}\right) \cdot e^{i\omega\left(t - \frac{T}{2}\right)} \quad (2.7.8)$$

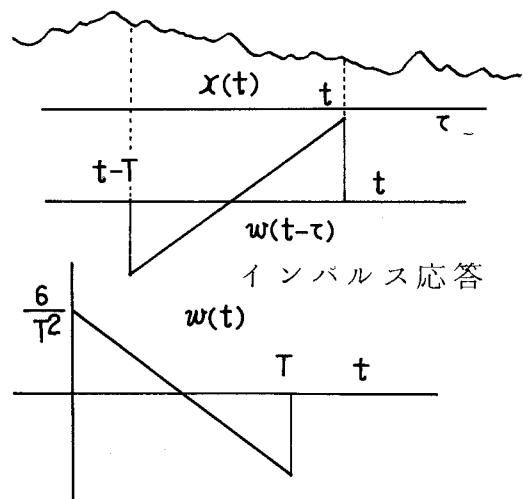


図 2.7.1  $w(t)$  の変化



と表わされる。ただしここで

$$I(\theta) = \frac{3(\sin \theta - \theta \cdot \cos \theta)}{\theta^3} \quad (2.7.9)$$

である。図 2.7.2 に  $|I(\theta)|^2$  および  $|\theta \cdot I(\theta)|^2$  の変化を示した。この図からみると

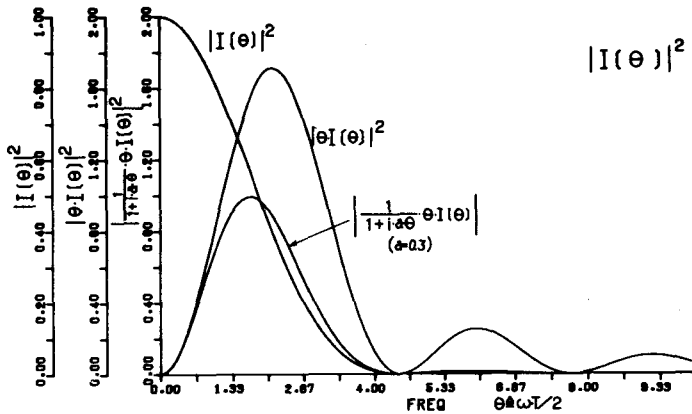


図 2.7.2 アナログFIR微分フィルタの周波数特性

$\theta = \omega T/2$  として  $|\theta| \leq 2$  すなわち  $|\omega| \leq 4/T$  の範囲では微分特性を示していることがわかる。 $|\theta \cdot I(\theta)|^2$  の変化をみると、第2、第3の山の高さも比較的高いが、これはこのフィルタ(2.7.4)を通す前に簡単な構造の低域アナログフィルタ、たとえば1次遅れ

$$F_{T_c} \left( \frac{\omega T}{2} \right) = \frac{1}{1 + i\omega \cdot T_c} \quad (2.7.10)$$

を通すことにより取り除くことが可能である。図 2.7.2 の例は  $a = 2 \cdot T_c / T = 0.3$  とした場合の総合特性

$$\left| \frac{1}{1 + i a \cdot \theta} \cdot \theta \cdot I(\theta) \right|^2 \quad (2.7.11)$$

を描いたものであり、ほぼ  $|\omega| \leq 3\pi/2T$  にわたる一つの山だけになる。もし(2.7.4)のようなフィルタが実現できるものならば  $T$  の選び方で入力信号の中の必要とする低域成分の微分値を抽出することができる。

## 2.7.2 サンプリング

しかし(2.7.4)のようなフィルタを実現はできない。ただしそのサンプル値を作ることは可能

である図 2.7.2 より  $F_{T_c}(\omega T/2)$  通過後フィルタ 2.7.4 を通過した信号は

$$|\theta| \leq 4.4443 \doteq 3\pi/2 \quad (2.7.12)$$

の部分以外はほとんど減衰されてしまうので出力信号の周波数成分はほぼ

$$|\omega| \leq 3\pi/T \quad (2.7.13)$$

に限定されているものと考えられる。そこでサンプル周期を  $T_s$  として折り曲げ周波数  $\pi/T_s$  を

$$T_s/\pi \geq 3\pi/T \quad (2.7.14)$$

を満足するように選べばサンプリングにより生ずる別名の誤差を十分に小さくすることが可能となる。そこで  $T_s = T/3$  と選んだ場合について別名の誤差がどの程度におさえられるかについて詳論してみる。いま

$$y_k = \frac{12}{T^3} \int_{\frac{T}{3}(k-1)}^{\frac{T}{3} \cdot k} \left\{ \tau - \left( \frac{k}{3} - \frac{1}{2} \right) \cdot T \right\} \tilde{x}(\tau) d\tau \quad (2.7.15)$$

とする。ただし  $\tilde{x}(t)$  をフィルタ  $F_{T_c}(\omega T/2)$  に通して得られた信号とする。

いまこのサンプル値を  $T/3$  の間 0 次保持することにより得られた信号を  $u(t)$  として、その Laplace 変換を  $U(S)$  とすると

$$U(S) = \frac{1 - e^{-\frac{T}{3} \cdot S}}{S} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} y_k \cdot e^{-k \frac{T}{3} \cdot S} \quad (2.7.16)$$

と表わされる。ただしここで時間軸の負の部分で信号の値は 0 とする。このフィルタの周波数特性を調べるために入力信号として  $x(t) = e^{i\omega t}$  と選んでみる。このとき

$$y_k = i\omega \cdot \frac{1}{1 + i\omega \cdot T_c} \cdot I\left(\frac{\omega T}{2}\right) \cdot e^{i\omega\left(\frac{1}{3}k - \frac{1}{2}\right) \cdot T} \quad (2.7.17)$$

と表わされるので

$$U(S) = i\omega \cdot \frac{1}{1 + i\omega \cdot T_c} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{1}{3}T \cdot S}}{\frac{1}{3} \cdot T \cdot S} \cdot I\left(\frac{\omega T}{2}\right) \cdot \frac{e^{-\frac{i\omega \cdot T}{2}}}{1 - e^{-(i\omega - S)\frac{T}{3}}} \quad (2.7.18)$$

となる。したがって出力  $u(t)$  は逆 Laplace 変換の公式より

$$u(t) = i\omega \cdot \frac{1}{1 + i\omega \cdot T_c} \cdot I\left(\frac{\omega T}{2}\right) \cdot e^{-\frac{i\omega T}{2}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(S) dS \quad (2.7.19)$$

ここで

$$F(S) = \frac{1 - e^{-\frac{T \cdot S}{3}}}{\frac{1}{3} \cdot T \cdot S} \cdot \frac{e^{t \cdot S}}{1 - e^{(i\omega - S)\frac{T}{3}}} \quad (2.7.20)$$

であり、 $r$  は正数とする。ところで解析関数  $F(S)$  の極は  $S = 0$ ,  $S = i \cdot (\omega + 6\pi l/T)$

( $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) に分布している。またこれらの極はすべて一位の極であるから留数はそれぞれ

$$\lim_{S \rightarrow 0} S \cdot F(S) = 0 \quad (2.7.21)$$

$$\lim_{S \rightarrow i(\omega + \frac{6\pi l}{T})} \left\{ S - i(\omega + \frac{6\pi l}{T}) \right\} \cdot F(S) = \frac{e^{-\frac{i\omega T}{6} \cdot \sin \frac{\omega \cdot T}{6}}}{\frac{1}{6}(\omega + \frac{6\pi l}{T}) \cdot T} \cdot e^{i(\omega + \frac{6\pi l}{T})t} \quad (2.7.22)$$

となり留数定理により

$$u(t) = i\omega \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} P_l(\frac{\omega \cdot T}{2}) \cdot e^{i(\omega + \frac{6\pi l}{T}) \cdot t} \quad (2.7.23)$$

ここで

$$P_l(\theta) = \frac{I(\theta)}{1 + i a \cdot \theta} \cdot \frac{e^{-i \cdot \frac{3}{4} \theta} \cdot \sin \frac{\theta}{3}}{\frac{\theta}{3} + \pi \cdot l} \quad (2.7.24)$$

を得る。(2.7.23)の $l \neq 0$ の項は第1章で述べた別名効果として生じたものであり、 $l \neq 0$ の項の総和が別名の誤差となる。各項の影響の度合を調べるために図2.7.3には種々の $l$ に対する $|\omega \cdot T / 2 \cdot P_l(\omega \cdot T / 2)|^2$ を $\theta = \omega T / 2$ として図示した( $a=0.3$ )。これから(2.7.23)において $|l| \geq 1$ の項は $|\omega| \leq \pi / T_s$ に対する影響は小さなものであることがわかり近似的に

$$u(t) \doteq i\omega \cdot P_0(\frac{\omega T}{2}) \cdot e^{i\omega t} \quad (2.7.25)$$

となる。

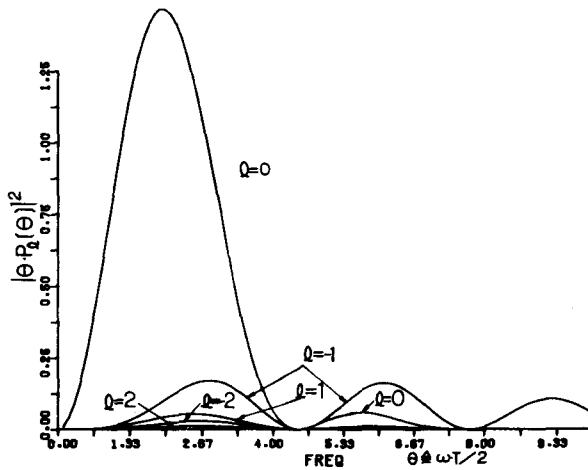


図 2.7.3  $|\theta \cdot P_l(\theta)|^2$  の変化

そこでこのフィルタの周波数特性は近似的に

$$i \omega \cdot P_0 \left( \frac{\omega \cdot T}{2} \right) \cdot V \left( \frac{\omega \cdot T}{2} \right) \cdot e^{-i \left( \frac{2}{3} \omega \cdot T + \tan^{-1} \omega \cdot T_c \right)} \quad (2.7.26)$$

と表わされる。ここで

$$V(\theta) = \frac{1}{1 + a^2 \cdot \theta^2} \frac{\sin \frac{\theta}{3}}{\theta/3} \cdot I(\theta) \quad (2.7.27)$$

である。 $V(\theta)$ は $\theta$ の実関数である。(2.7.7)で与えられるアナログFIRフィルタの周波数特性(2.7.9)と比較してみると、前置した1次遅れフィルタおよび0次保持フィルタの効果により振巾特性では  $1/(1 + \omega^2 \cdot T_c^2) \cdot \sin(\omega T/6)/(\omega T/6)$  だけ影響を受けている。すなわち  $V(\omega T/2)$ は  $I(\omega T/2)$ に比較考えてさらに狭帯域の低域特性となる。また(2.7.9)に比較して位相は  $\tan^{-1} \omega \cdot T_c + \omega \cdot T/6$  だけ遅れている。

振巾特性に関してはより狭帯域信号の微分をとるという意味で望ましいが、位相の遅れは好ましくない。 $T_c$ を大きくすると振巾特性は改良される。特に  $|\theta| \geq 3\pi/2$  の範囲の  $|\theta \cdot P_l(\theta)|^2$  は  $T_c$ の増大に伴い、0に近づくから別名誤差を軽減する意味で望ましい。しかし  $T_c$ の増大に伴ない位相が遅れてくるから  $a = 2 \cdot T_c/T$ を適当に選ぶ必要がある。

つきに近似特性(2.7.26)と別名誤差を比較するために各 $l$ の値に対する信号のパワー  $|i \omega \cdot P_l(\omega T/2)|^2$  を考慮して歪の度合を表わす。

$$\hat{R}(\theta) = \frac{\sum_{l \neq 0} \{\theta \cdot P_l(\theta)\}^2}{\{\theta \cdot P_0(\theta)\}^2} = \sum_{l \neq 0} \left( \frac{\theta}{\theta + 3l\pi} \right)^2 \quad (2.7.28)$$

を考えてみる。図2.7.4は $\hat{R}(\theta)$ を图示したもののだが、 $|\theta| \leq 3\pi/2$ では $\hat{R}(\theta) \leq 0.75$ であり、ほぼ微分特性を示す。 $|\theta| \leq \pi/2$ では(図2.7.3の $l=0$ に対するグラフ参照) $\hat{R}(\theta) \leq 0.07$ となることがわかる。

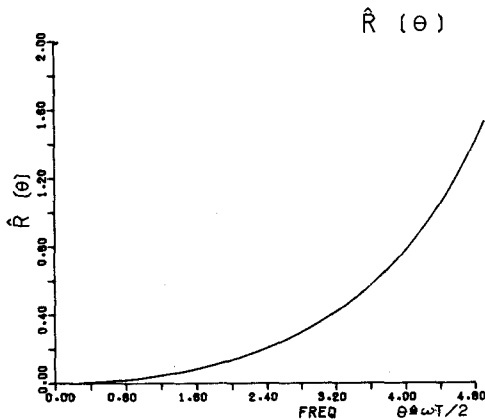


図 2.7.4  $\hat{R}(\theta)$  の変化

### 2.7.3 ハイブリッド・フィルタとしての構成

いままでに述べたフィルタはつきのように構成できる。図2.7.5のように周期 $T/3$ で発生するインパルス  $PL_0$ から、周期 $T$ で $T/3$ ずつ位相のずれたインパルスをつくり  $PL_1$ ,  $PL_2$ ,  $PL_3$ とする。三つの積分器  $IS_1$ ,  $IS_2$ ,  $IS_3$ で  $12/T_3$ という

定数を積分し三つの鋸歯状波を得る。これらの積分は  $PL_1, PL_2, PL_3$  のインパルスでリセットするものとする。積分  $IS_1, IS_2, IS_3$  の出力より  $6/T^2$  だけ引き去った信号  $ST_1, ST_2, ST_3$  はそれぞれ周期  $T$  で  $T/3$  だけ位相の遅れた鋸歯状波である。信号  $x(t)$  に 1 次遅れ  $F_T$  ( $\omega T/2$ ) を通した信号  $\tilde{x}(t)$  と各  $ST$  との積を  $IV_1, IV_2, IV_3$  で積分する。これらの積分は  $PL_1, PL_2, PL_3$  により 0 にリセットされる。リセットする寸前にサンブラにより信号  $y_1, y_2, y_3$  を  $T/3$  ごとにサンプリングしその他を 0 次保持フィルタを通したあとに、その出力を  $y(t)$  とする。実際にはインパルスの中も考慮する必要がある。パルス巾を  $T_p$  とすると (2.7.15) の積分は

$$y_k = \frac{12}{(T-T_p)^3} \cdot \int_{-\frac{T}{3}(k-3)+\frac{T_p}{2}}^{\frac{T}{3}k-\frac{T_p}{2}} \left\{ \tau - \left( \frac{k}{3} - \frac{1}{2} \right) T \right\} \tilde{x}(\tau) d\tau \quad (2.7.29)$$

のように変更しなければならない。しかし  $T_p \ll T$  の場合には 2.7.2 で与えた理想的な場合の結果が十分良好な近似を与える。

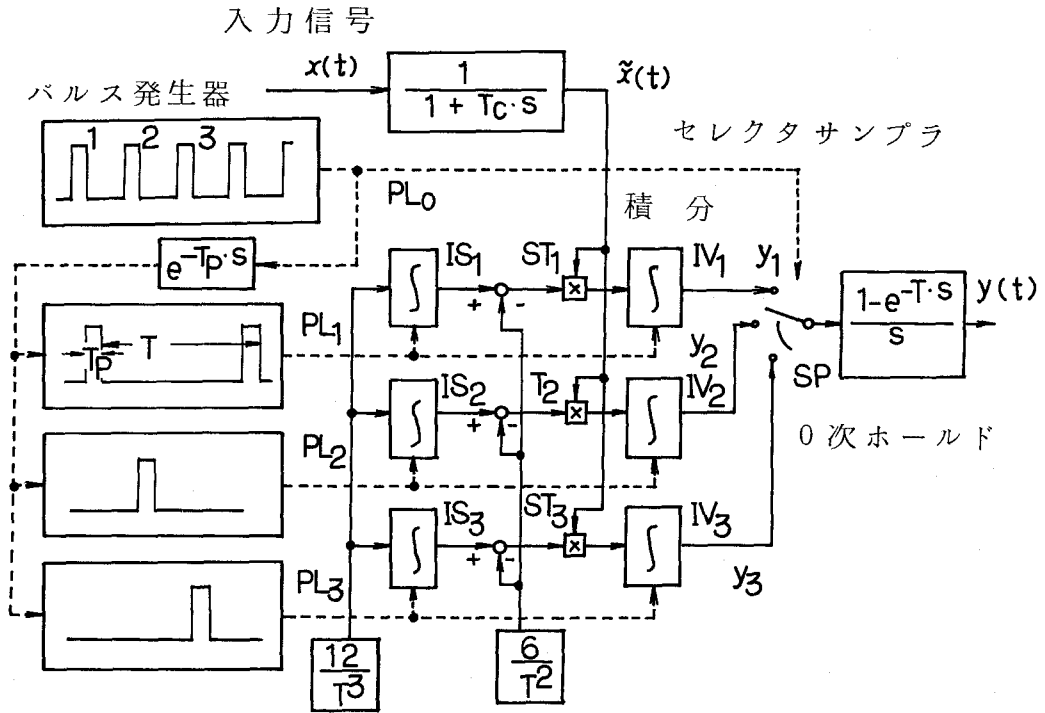


図 2.7.5 ハイブリッド形微分フィルタの構成

#### 2.7.4 応答性評価のためのシミュレーション

図 2.7.5 のように構成したフィルタの種々の信号に対する時間領域での応答特性を評価するために、デジタル・シミュレーションを実行してみた。  $T_p = 0.1$ ,  $T = 3$  としてパルスを発生させ、積分としては  $h = 0.05$  で Runge-Kutta 法を用いた。また 1 次遅れの時定数は  $T_c = 1/3$  とし

た。フィルタへの試験入力として  $1+N(0,0.1)$  (図 2.7.6),  $t+N(0,0.5)$  (図 2.7.7),  $t^2+N(0,5)$  (図 2.7.8), および  $\sin 3t+N(0,0.1)$  (図 2.7.9) を選んだ。ここで  $N(0,\sigma)$  は平均 0, 標準偏差  $\sigma$  の正規性擬似雑音である。ただしきざみ巾  $h$  の計算に伴う 4 回のステップ (Runge-Kutta 法のため) の間入力信号は値を保持した。

微分フィルタの特性からしてステップ入力に対して出力は 0 となるべきだが, 入力信号の 0 から 1 への立ち上りの効果により  $t=3$  のところから開始される計算値 (出力) は, はじめ大きい が, やがて 0 となることを示している。図 2.7.7 では出力として 1, 図 2.7.8 では  $t$  が出力されるべきであるが, フィルタの出力はほぼその値を示している。図 2.7.9 の例では  $\omega=3$  したがって  $\theta=4.5$  であり図 2.7.3 より出力としてほぼ 0 がでてくるべきであるが, フィルタの出力はほぼその値を示している。

ハイブリッド FIR フィルタとしてはサンプル周期毎の平均値を生ずるようなものが積分形 A/D 変換器や, BM 計 (抄紙機等で用いられる Basis Weight 計) 等で広く使用されている。この論文では信号に鋸歯状波を掛け有限区間の積分を実行することにより信号の微分値を観測できること, 別名の誤差の発生することを極力防ぐために積分区間の  $1/3$  の間隔でサンプリングしなければならないことを示した。このサンプリングした信号は  $|\omega| < \pi/T$  の範囲で入力信号の微分を表わし,  $|\omega| > 3\pi/T$  の信号をほぼ除去することを周波数特性の近似式を与えて示した。このフィルタは具体的なハードウェアとして構成したものではないが, 微分信号の計測に対する新しい手法を提供するものと考えられる。

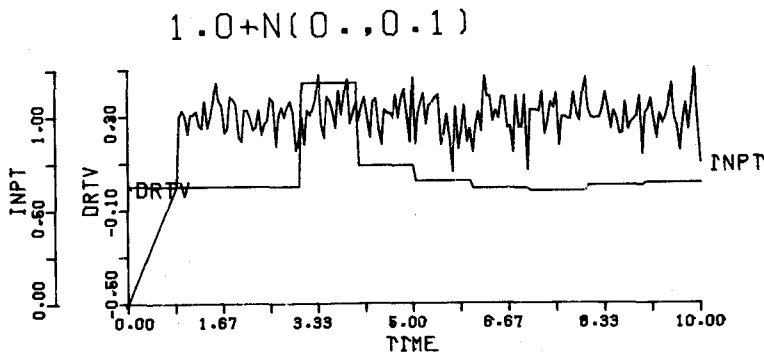


図 2.7.6 雑音を含むステップ入力に対する応答

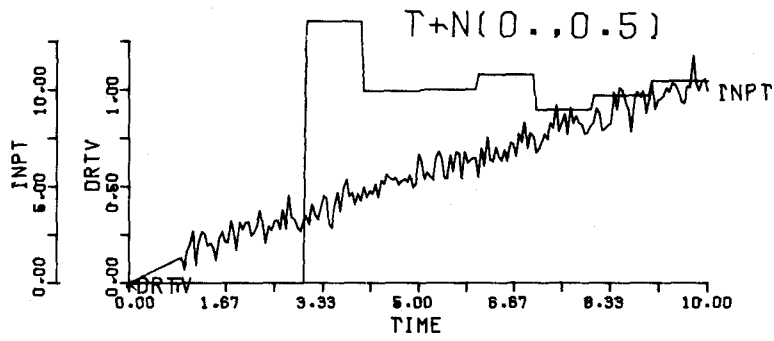


図 2.7.7 雑音を含むランプ状信号に対する応答

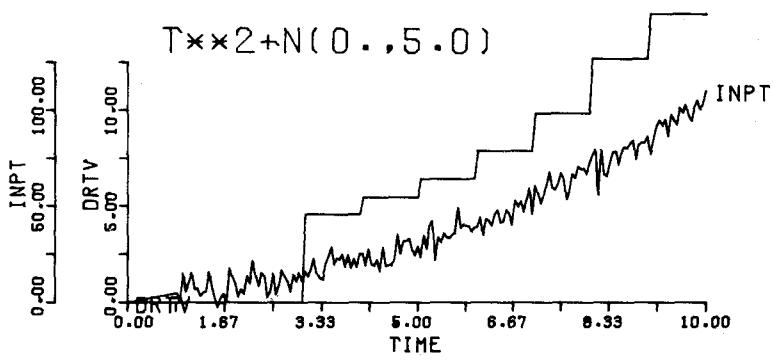


図 2.7.8 雑音を含む時間の2次関数に対する応答

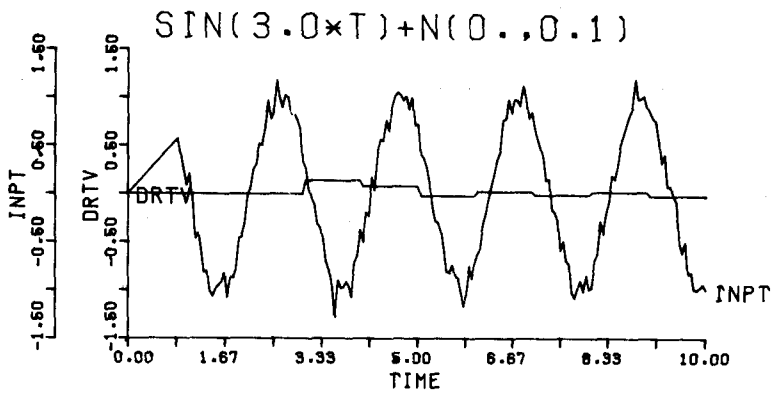


図 2.7.9 雑音を含む単振動に対する応答

## 2.8 ま と め

信号の低域成分のみの微分信号のサンプル値を抽出する手法としてデジタル微分フィルタを考え、特に  $FIR$  (*Finite Impulse Response*) 形のものに着目して、その設計法について考察した。はじめに理想的な微分特性を最小自乗法の意味で近似する方法を考え、その設計例を与え応答特性についても議論した。次に同じ位数の微分フィルタと低域フィルタをその周波数特性の比が低域フィルタの零点の近傍を除いて丁度  $i\omega$  となるようなものを選べば、それらの適当な段数のカスケード接続により任意の階数の微分フィルタが得られることを示し、それをカスケード・デジタル微分フィルタと命名した。このフィルタの基本となる微分フィルタの与え方の例を2つ考え低域フィルタは、これより最小自乗法により求めた。

この2つの方法というのは最小自乗法により有限個の継続するサンプル値に直線をあてはめ、その勾配を出力とする方法と *Zolotarev* の多項式を用いる方法とである。両者の方法とも多くの設計データとしてフィルタの係数表と周波数特性を与えた。そして時間領域での応答特性もシミュレーションにより確かめた。最小自乗法による場合と *Zolotarev* 多項式による場合の2つに対してその特性の比較を与え、等価的には *Zolotarev* 多項式による場合の特別なケースとして最小自乗法によるものが考えられることを示した。しかし、設計の容易さと通過帯域が十分小さいことを考えこの論文の以下の章では最小自乗法によるカスケード・デジタル微分フィルタのみを用いることにした。



## 第3章 デジタル微分フィルタを用いた同定

### 3.1 序

この章では第2章で作成したカスケード形デジタル微分フィルタを用いて伝達関数を推定する方法について著者の提案した手法を基にして述べる。はじめに伝達関数へ変換する際の誤差について述べた後に、デジタル微分フィルタを用いた伝達関数の推定手法について述べる。そしてこの手法に基づいてあらかじめわかっている伝達関数の推定例を1入力1出力系の場合と2入力1出力系の場合に適用した例を与える。次に推定値の統計的な性質を論じ、その結果をここで与えた例で検討を加える。次にシステムの構造すなわちここでは伝達関数の次数の決定法について終結法を用いた方法を示し、上で与えた例につきその結果の有効性を確かめる。又実システムでよく現われる無次元系、無駄時間を含む系にもこの方法を容易に適用することができることを示す。又同定の計算を実施する際に用いられる逐次推定法についても簡単に触れる。又この手法を基にして構成したプログラムシステムについて説明を加える。そして実プラントの同定へ適用した例は第4章で詳しくその有効性を示してある。

### 3.2 伝達関数への変換で生ずる誤差

1.3で述べたように工業プラント等実際に同定の対象となるシステムはアナログ系である場合がほとんどであるが、同定のための計算はアナログ系のままで実行するのには複雑であるのでデジタル系に変換してデジタル電子計算機の力を借りる場合が多い。従って実際に得られるのはデジタル系でのインパルス応答またはパルス伝達関数である。ここではパルス伝達関数が得られた場合に元のアナログ系の伝達関数を求めると避けられない誤差が生ずることを示す。

話を簡単にするために対象としているシステムは1次遅れとする。

$$R(S) = \frac{g}{1 + T_L \cdot S} \quad (3.2.1)$$

特に入力  $u(t)$  として  $u(t) = \sin \omega t$  とすると出力  $y(t)$  は

$$y(t) = \frac{g}{\sqrt{1 + \omega^2 \cdot T_L^2}} \cdot \sin(\omega \cdot t - \tan^{-1} \omega \cdot T_L) + y_0 \cdot e^{-\frac{t}{T_L}} \quad (3.2.2)$$

と表わされる。 $y_0$  は  $y(t)$  の初期値  $y(0)$  である。従ってサンプル周期  $T_s$  毎のサンプル値は

$$u_k = \sin(\omega \cdot k \cdot T_s) \quad (3.2.3)$$

$$y_k = \frac{g}{\sqrt{1 + \omega^2 \cdot T_L^2}} \cdot \sin(\omega \cdot k \cdot T_s - \tan^{-1} \omega \cdot T_L) + y_0 \cdot e^{-\frac{T_s}{T_L} \cdot k} \quad (3.2.4)$$

と表わされる。

$R(S)$ を1.3.2で述べた(1.3.2)を用いる方法でデジタル系に変換すると

$$y_k = A \cdot y_{k-1} + B \cdot u_{k-1} \quad (3.2.5)$$

を得る。ここで

$$A \doteq 1 - \frac{T_s}{T_L} \quad (3.2.6)$$

$$B \doteq \frac{T_s}{T_L} \cdot g \quad (3.2.7)$$

である。

(3.2.3)と(3.2.4)で与えられる $u_k$ と $y_k$ から $A$ と $B$ を求めてみよう。すなわち(3.2.5)で $k \rightarrow k'$ とすると

$$y_{k'} = A \cdot y_{k'-1} + B \cdot u_{k'-1} \quad (3.2.8)$$

を得る。(3.2.5)と(3.2.8)により

$$A = (y_{k'} \cdot u_{k'-1} - y_{k'-1} \cdot u_{k-1}) / (y_{k-1} \cdot u_{k'-1} - y_{k'-1} \cdot u_{k-1}) \quad (3.2.9)$$

$$B = (y_{k-1} \cdot y_{k'} - y_{k'-1} \cdot y_k) / (y_{k-1} \cdot u_{k'-1} - y_{k'-1} \cdot u_{k-1}) \quad (3.2.10)$$

(3.2.3)と(3.2.4)を(3.2.9)と(3.2.10)に代入すると

$$A = e^{-\frac{T_s}{T_L}} \quad (3.2.11)$$

$$B = g \cdot \frac{(\cos \omega \cdot T_s + \omega \cdot T_L \cdot \sin \omega \cdot T_s - e^{-\frac{T_s}{T_L}})}{\sqrt{1 + \omega^2 \cdot T_L^2}} \quad (3.2.12)$$

と表わされる。すなわち $T_L, g, T_s$ と $A, B$ の関係は正しくは(3.2.11), (3.2.12)で与えられる。(3.2.6)および(3.2.7)が成立するとして $T_L, g$ の推定値を求め $\hat{T}_L, \hat{g}$ とすると

$$\hat{T}_L = T_s / (1 - e^{-\frac{T_s}{T_L}}) \quad (3.2.13)$$

$$\hat{g} = g \cdot \frac{(\cos \omega \cdot T_s + \omega \cdot T_L \cdot \sin \omega \cdot T_s - e^{-\frac{T_s}{T_L}})}{(1 - e^{-T_s/T_L}) \sqrt{1 + \omega^2 \cdot T_L^2}} \quad (3.2.14)$$

と表わされる。いま

$$\varphi = \frac{T_s}{T_L}, \quad \theta = \omega \cdot T_s \quad (3.2.15)$$

とおくと

$$\frac{\hat{T}_L}{T_L} = \frac{\varphi \cdot e^\varphi}{e^\varphi - 1} \quad (3.2.16)$$

$$\frac{\hat{g}}{g} = \frac{\cos \theta + \varphi \cdot \theta \cdot \sin \theta - e^{-\varphi}}{(1 - e^{-\varphi}) \sqrt{1 + \theta^2 \cdot \varphi^2}} \quad (3.2.17)$$

図 3.2.1 に  $0 < \varphi < 1$  すなわち  $T_s < T_L$  の範囲で  $\hat{T}_L/T_L$  を作図してみた。又図 3.2.2 には  $0 \leq \theta \leq \pi$  で  $\varphi = 0.2, 0.5$  の場合を作図してみた。 $\hat{T}_L/T_L$  および  $\hat{g}/g$  の値の 1 よりのずれは変換法によるずれであるからどのように正確に A と B を推定しても取り除くことができない。

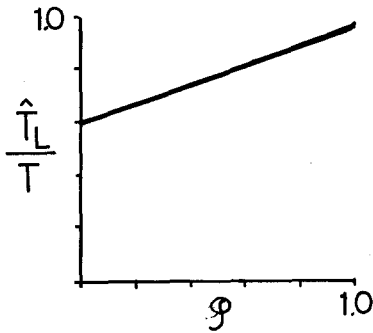


図 3.2.1  $\hat{T}_L/T_L$  の変化

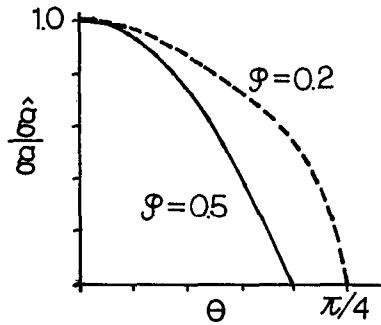


図 3.2.2  $\hat{g}/g$  の変化

これは 1.3.2 で与えた他のどのような変換法を用いても生じてくる避けることのできない誤差である。

実用上からは  $\varphi$  をできるだけ小にとり、 $\theta$  を小さな値におさえてすなわちできるだけ低域成分を利用して同定を実施することが望ましい。この論文ではこの誤差をできる限りおさえるためにカスケード・デジタル微分フィルタを用いている。

### 3.3 デジタル微分フィルタによる伝達関数の推定 (A1), (A2), (A4), (D6)

この節ではパルス伝達関数やインパルス応答等を介することなく直接に伝達関数を求める手法について論ずる。そしてあらかじめ知られている伝達関数を持った系に対する同定の結果を与え提案手法の妥当性を示した。

### 3.3.1 手法の説明

説明を簡単にするために1入力1出力系を考え入力を $u(t)$ 、出力を $y(t)$ とする。このシステムの伝達関数を $R(S)$ として

$$R(S) = \frac{b_0 + b_1 \cdot S + \dots + b_{n-1} \cdot S^{n-1}}{1 + a_1 \cdot S + \dots + a_n \cdot S^n} \quad (3.3.1)$$

と表わしておく(図3.3.1)。ここでこのシステムの次数は $n$ すなわち $a_n \neq 0$ で $R(S)$

の分子分母の $S$ の多項式は既約であるとする。このときこのシステムを時間領域で考え微分方程式の形で表わしてみると

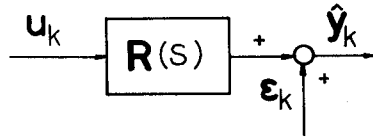


図 3.3.1 1 入力 1 出力系の伝達関数

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot u^{(k)}(t) - \sum_{\ell=1}^n a_\ell \cdot y^{(\ell)}(t) \quad (3.3.2)$$

となる。ところで1.4で議論したように $u(t)$ 、 $y(t)$ が確定信号であるか不規則信号であるかにかかわらず工学的対象となる信号はスペクトル分解ができる場合が多い。

そこで特に $u(t)$ が平均0の弱定常信号であり $|\omega| \leq \omega_f$ に帯域制限されているとすると

$$u(t) = \int_{-\omega_f}^{\omega_f} e^{i\omega t} d\zeta_u(\omega) \quad (3.3.3)$$

と表わされる。いま $H_*(\omega)$ を $\omega$ の実装数として

$$H(i\omega) = H^*(\omega) \cdot e^{-i\omega b} \quad (3.3.4)$$

のようなフィルタを通した信号を $\tilde{U}(t)$ とすると

$$\tilde{U}(t) = \int_{-\omega_f}^{\omega_f} e^{i\omega(t-b)} H^*(\omega) d\zeta_u(\omega) \quad (3.3.5)$$

となる。 $U(t)$ の $k$ 階微分は存在して

$$\tilde{U}^{(k)}(t) = \int_{-\omega_f}^{\omega_f} (i\omega)^k \cdot e^{i\omega(t-b)} \cdot H^*(\omega) d\zeta_u(\omega) \quad (3.3.6)$$

と表わされる。同じように $y(t)$ を $H(i\omega)$ に通した信号を $\tilde{Y}(t)$ とするとその $\ell$ 階微分は

$$\tilde{Y}^{(\ell)}(t) = \int_{-\omega_f}^{\omega_f} (i\omega)^\ell \cdot e^{i\omega(t-b)} \cdot R(i\omega) \cdot H^*(\omega) d\zeta_u(\omega) \quad (3.3.7)$$

と表わされる。ただし  $R(S)$  はシステム ( 3.3.2 ) の伝達関数で ( 3.3.1 ) で与えられる。

$\tilde{U}^{(k)}(t)$ ,  $\tilde{Y}^{(\ell)}(t)$  を用いると  $a_0 = 1$  として

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot \tilde{U}^{(k)}(t) - \sum_{\ell=0}^n a_\ell \cdot \tilde{Y}^{(\ell)}(t) \\ &= \int_{-\omega f}^{\omega f} e^{i\omega(t-b)} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot (i\omega)^k - \sum_{\ell=0}^n a_\ell \cdot (i\omega)^\ell \cdot R(i\omega) \right\} H^*(\omega) d\zeta u(\omega) \\ &= \int_{-\omega f}^{\omega f} e^{i\omega(t-b)} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot (i\omega)^k - \sum_{\ell=0}^n a_\ell \cdot (i\omega)^\ell \cdot \frac{\sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot (i\omega)^k}{\sum_{\ell=0}^n a_\ell \cdot (i\omega)^\ell} \right\} H^*(\omega) d\zeta u(\omega) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

となる。すなわちシステム ( 3.3.2 ) の入出力  $u(t)$ ,  $y(t)$  に同じフィルタを通した信号を必要階まで微分するとやはり元の微分方程式と同じ微分方程式

$$\tilde{Y}^{(0)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot \tilde{U}^{(k)}(t) - \sum_{\ell=1}^n a_\ell \cdot \tilde{Y}^{(\ell)}(t) \tag{3.3.9}$$

を満足していることがわかった。

これは平均値 0 の弱定常過程で表わされるものであるが、他のスペクトル分解可能な信号に対しても同じように成立する。

信号を

$$T_s = \pi / \omega f \tag{3.3.10}$$

でサンプリングすれば、( 3.3.9 ) はサンプル値に対しても成立する。すなわち

$$\tilde{Y}_j^{(0)} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot \tilde{U}_j^{(k)} - \sum_{\ell=1}^n a_\ell \cdot \tilde{Y}_j^{(\ell)} \tag{3.3.11}$$

となる。ここで

$$\tilde{U}_j^{(k)} = \tilde{U}^{(k)}(j \cdot T_s), \quad \tilde{Y}_j^{(\ell)} = \tilde{Y}^{(\ell)}(j \cdot T_s) \tag{3.3.12}$$

である。

ところで我々はすでに  $u_j = u(j \cdot T_s)$ ,  $y_j = y(j \cdot T_s)$  より  $\tilde{U}_j^{(k)}$ ,  $\tilde{Y}_j^{(\ell)}$  などをデジタル微分フィルタにより近似できることを知っているので、( 3.3.11 ) を用いてパラメータ  $a_k$ ,  $b_\ell$  を求めることができる。

これが著者の提案した伝達関数の推定法の骨子である。この手法は容易に多変数系に拡張する

ことができる。

### 3.3.2 具体的な処置

実際の問題では入出力値を直接観測することはできず雑音  $e_j, \dots, \epsilon_j$  を含んだ

$$\hat{u}_j = u_j + e_j \quad (3.3.13)$$

$$\hat{y}_j = y_j + \epsilon_j \quad (3.3.14)$$

が観測されると考える。またフィルタ  $(i\omega)^k \cdot H(i\omega)$  としてはカスケード・デジタル微分フィルタ  $\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$  を用いる。そして  $\hat{u}_j, \hat{y}_j$  を  $\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$  に通した信号を  $\hat{U}_j^{(k)}, \hat{Y}_j^{(k)}$  としておく。そして

$$\hat{\mathbf{v}}_j = (\hat{U}_j^{(0)}, \hat{U}_j^{(1)}, \dots, \hat{U}_j^{(n-1)}, -\hat{Y}_j^{(1)}, -\hat{Y}_j^{(2)}, \dots, -\hat{Y}_j^{(n)}) \quad (3.3.15)$$

$$\mathbf{a} = (b_1, b_2, \dots, b_n, a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^T \quad (3.3.16)$$

$$\hat{\mathbf{V}}_J = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_0 \\ \hat{\mathbf{v}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{v}}_J \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{y}}_J = \begin{bmatrix} \hat{Y}_0^{(0)} \\ \hat{Y}_1^{(0)} \\ \vdots \\ \hat{Y}_J^{(0)} \end{bmatrix} \quad (3.3.17)$$

とすると

$$\hat{\mathbf{y}}_J \doteq \hat{\mathbf{V}}_J \cdot \mathbf{a} \quad (3.3.18)$$

となるので最小自乗解を  $\hat{\mathbf{a}}_J$  とすれば

$$\hat{\mathbf{a}}_J = \hat{\mathbf{V}}_J^+ \cdot \mathbf{y}_J \quad (3.3.19)$$

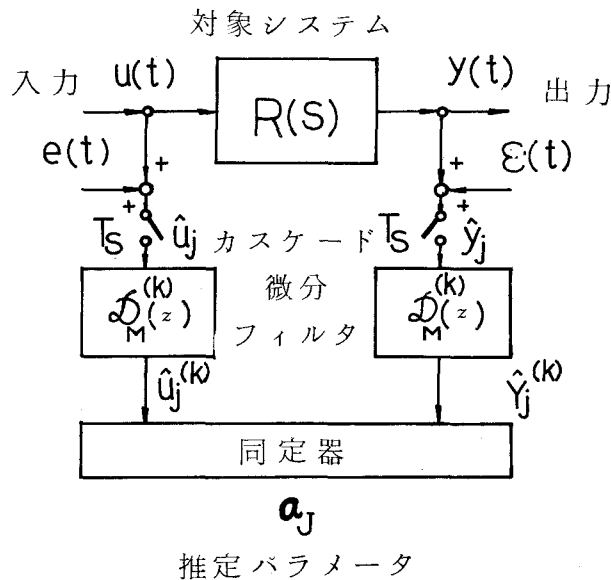


図 3.3.2 カスケード・デジタル微分フィルタによる同定

と表わされる。伝達関数で  $a_n \neq 0$  で分母分子の  $S$  の多項式が既約であることを仮定したので入力  $\hat{U}^{(1)}(t), \hat{U}^{(1)}(t), \dots, \hat{U}^{(n-1)}(t)$  が一次独立であれば  $\hat{U}^{(1)}(t), \hat{U}^{(1)}(t), \dots, \hat{U}^{(n-1)}(t) - \hat{Y}^{(1)}(t), -\hat{Y}^{(2)}(t), \dots, \hat{Y}^{(n)}(t)$  は一次独立であり、このような場合には (3.3.19) で十分  $J$  を大きくとれば

$$\text{rank } \hat{\mathbf{V}}_J = 2 \cdot n \quad (3.3.20)$$

となる。このときは<sup>(3)</sup>(付録)

$$\hat{\mathbf{a}}_J = (\hat{\mathbf{V}}_J^T \cdot \hat{\mathbf{V}}_J)^{-1} \cdot \hat{\mathbf{V}}_J^T \cdot \hat{\mathbf{y}}_J \quad (3.3.21)$$

となる。

### 3.3.3 簡単な例-1

この手法の妥当性を調べるために図 2.4.8 のような 2 次系を考える。(A4) ここで

$$A = 1, B = 20, G = 1 \quad (3.3.22)$$

$$As = 1, \omega_0 = 0.3, Bs = Cs = 0, Ds = 1 \quad (3.3.23)$$

$$v = 0, \sigma = 0 \quad (3.3.24)$$

$$e(t) = N(0, 0.1), \varepsilon(t) = N(0, 0.1) \quad (3.3.25)$$

とする。この図の中の信号  $\hat{x}(t), \hat{y}(t)$  の  $T_s = 1$  秒毎のサンプル値を  $\hat{u}_j = \hat{x}(j \cdot T_s), \hat{y}_j = \hat{y}(j \cdot T_s)$  とし、 $D_M^{(k)}(z)$  として  $m = 4, IEO = 1, M = 3$  の場合を選ぶものとする。このときの  $\hat{U}_j, \hat{y}_j$  および推定値  $\hat{\mathbf{a}}_j = (\hat{G}_j, \hat{A}_j, \hat{B}_j)$  の変化を表わしたのが、図 3.3.3 である。フィルタの次数が  $2 \cdot m \cdot M$  だから  $(2 \cdot m \cdot M + 1) \cdot T_s = 25$  秒より推定が始まり、80 秒目では  $\hat{G}_j = 1.01, \hat{A}_j = 0.998, \hat{B}_j = 2.002$  となる。

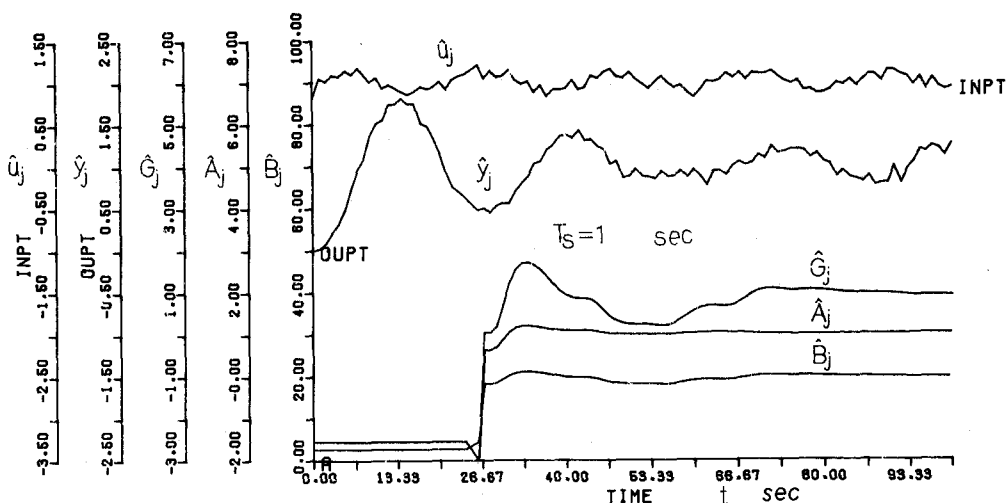


図 3.3.3 入出力観測波形と推定値 (構造が既知の場合)

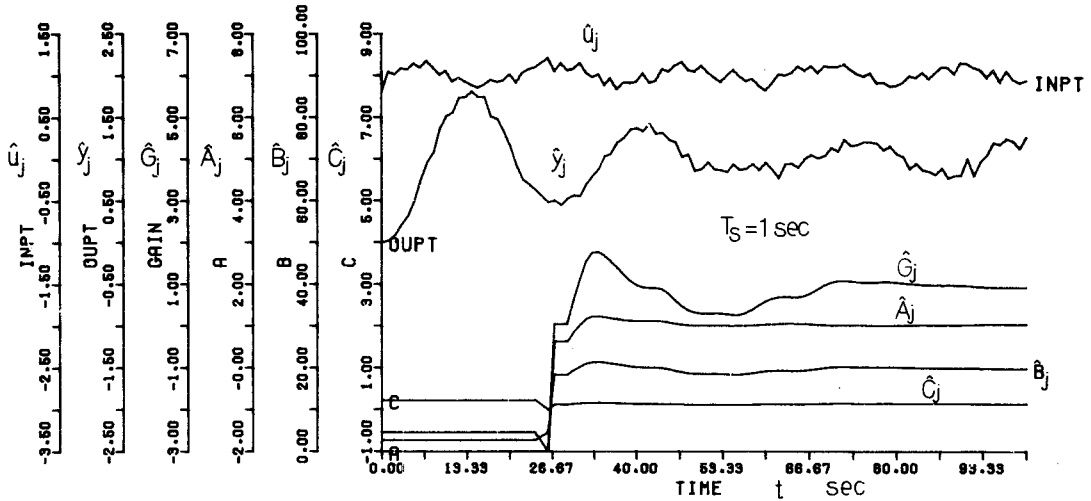


図 3. 3. 4 入出力観測波形と推定値（構造が未知の場合）

ここでシステムの出力は入力より解析的に求めた値を用いているので入出力の値に誤差は生じていない。図 3. 3. 3 については 3. 5 で説明する。推定された値の誤差は

- 〔1〕 観測雑音による影響（自己回帰形モデルによる誤差も含む）。
- 〔2〕 カスケードフィルタの設計時の近似による影響（ $P^*(\theta)$  と  $Q^*(\theta)$  は近似的にしか等しくできないことによる）。

に起因する。〔1〕については 3. 4 で論ずる。又〔2〕に関しては次の例でわかるようにほとんど無視できることがわかる。

この例での推定値と真値との偏差およびそれらの 2 乗の和を図 3. 3. 6 に与えた。これを見るとこれらの値はほとんど 0 だが、しかし 0 でない値に漸近していることがわかる。



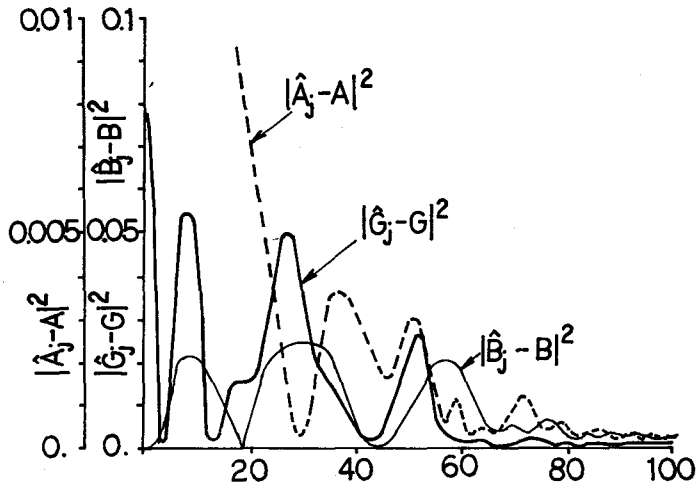


図 3.3.6 推定誤差の変化

### 3.3.4 簡単な例-2

次の例は図 3.3.7 のような 2 入力 1 出力系を考える。すなわち入力  $u(t)$ ,  $v(t)$  に対して出力  $y(t)$  が

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{g_u}{1+T_u \cdot S} \cdot \mathcal{L}\{u(t)\} + \frac{g_v}{1+T_v \cdot S} \cdot \mathcal{L}\{v(t)\} \quad (3.3.26)$$

で表わされるとする。 $u(t)$ ,  $v(t)$ ,  $y(t)$  に夫々  $e_u(t)$ ,  $e_v(t)$ ,  $e_y(t)$  の加わった信号を  $\hat{u}(t)$ ,  $\hat{v}(t)$ ,  $\hat{y}(t)$  とし、それらのサンプル値を  $\hat{u}_j$ ,  $\hat{v}_j$ ,  $\hat{y}_j$  としてこれをフィルタ  $\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$  に通した信号を  $\hat{U}_j^{(k)}$ ,  $\hat{V}_j^{(k)}$ ,  $\hat{Y}_j^{(k)}$  とする。これらは近似的に

$$\hat{Y}_j^{(0)} = A \cdot \hat{U}_j^{(0)} + B \cdot \hat{U}_j^{(1)} + C \cdot \hat{V}_j^{(0)} + D \cdot \hat{V}_j^{(1)} - E \cdot \hat{Y}_j^{(1)} - F \cdot \hat{Y}_j^{(2)} \quad (3.3.27)$$

となる。ここで

$$A = g_u, B = g_u \cdot T_v, C = g_v, D = g_v \cdot T_u, E = T_u + T_v, F = T_u \cdot T_v \quad (3.3.28)$$

となる。1 変数の時と同じように

$$\sum_{j=0}^J (\hat{Y}_j^{(0)} - A \cdot \hat{U}_j^{(0)} - B \cdot \hat{U}_j^{(1)} - C \cdot \hat{V}_j^{(0)} - D \cdot \hat{V}_j^{(1)} + E \cdot \hat{Y}_j^{(1)} + F \cdot \hat{Y}_j^{(2)})^2 \quad (3.3.29)$$

を最小にする  $A, B, C, D, E, F$  を  $\hat{A}_J, \hat{B}_J, \hat{C}_J, \hat{D}_J, \hat{E}_J, \hat{F}_J$  とする。

図 3.3.7 で

$$g_u = 1, T_u = 2 \quad (3.3.29)$$

$$g_v = 1, T_v = 3$$

とし特に入力として

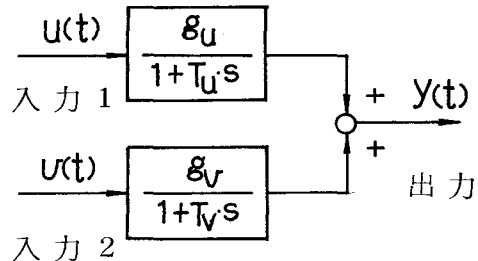
$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{(1+T_L \cdot s)^2} \quad (3.3.30)$$

$$\mathcal{L}\{v(t)\} = \frac{\omega^2}{S(S^2 + \omega^2)} \quad (3.3.31)$$

で

$$T_L = 5, \quad \omega = \frac{\pi}{10} \quad (3.3.32)$$

1 次遅れ



とする。そしてフィルタは例-1と同じもの  
としサンプル周期は  $T_s = 0.1$  とする。

図 3.3.7 簡単な2入力1出力系

雑音を全く加えない場合の推定値  $\hat{A}_J, \hat{B}_J, \hat{C}_J, \hat{D}_J, \hat{E}_J, \hat{F}_J$  を表 3.3.1 に与えた。

これらは正しい値  $A = 1, B = 3, C = 1, D = 2, E = 5, F = 6$  と全く一致しているとい  
ってよい。このことは 3.3.3 の [2] で述べたフィルタの近似誤差は無視できるものと考えてよ  
いことを示している。

time	u(t)	v(t)	y(t)	$\hat{A}$	$\hat{B}$	$\hat{C}$	$\hat{D}$	$\hat{E}$	$\hat{F}$
.107000E 02	1.59262E 01	1.13730E 01	3.11742E 01	.999400E 00	3.99921E 01	1.00265E 01	2.00645E 01	3.00887E 01	6.01896E 01
.108000E 02	1.46933E 01	1.11122E 01	3.04050E 01	.999731E 00	3.98628E 01	1.00688E 01	2.00273E 01	3.00713E 01	6.01774E 01
.111000E 02	1.35028E 01	1.00070E 00	2.82277E 01	.999793E 00	3.97921E 01	1.00618E 01	2.00749E 01	3.00753E 01	6.01443E 01
.113000E 02	1.16778E 01	7.65123E 00	2.98430E 01	.999716E 00	3.97041E 01	1.00937E 01	2.00192E 01	3.00671E 01	6.01739E 01
.115000E 02	1.15027E 01	1.26073E 00	2.8498E 01	.997641E 00	3.96147E 01	1.00446E 01	2.00340E 01	3.00540E 01	6.0112E 01
.117000E 02	1.25347E 01	1.25344E 00	2.6773E 01	.998009E 00	3.9533E 01	1.00378E 01	2.00403E 01	3.00431E 01	6.0100E 01
.119000E 02	1.36062E 01	1.25229E 00	2.73185E 01	.998372E 00	3.9452E 01	1.00298E 01	2.00312E 01	3.00343E 01	6.0092E 01
.121000E 02	1.35765E 01	1.17301E 00	2.67095E 01	.998590E 00	3.93633E 01	1.0026E 01	2.00444E 01	3.00346E 01	6.00796E 01
.123000E 02	1.16667E 01	1.50000E 00	2.41098E 01	.99893E 00	3.9273E 01	1.0022E 01	2.00443E 01	3.00316E 01	6.00617E 01
.125000E 02	1.34320E 01	1.42200E 00	2.43594E 01	.998488E 00	3.91842E 01	1.00181E 01	2.00175E 01	3.0021E 01	6.0042E 01
.127000E 02	1.23627E 01	1.93200E 00	2.4212E 01	.998068E 00	3.9097E 01	1.00174E 01	2.0016E 01	3.00242E 01	6.0054E 01
.129000E 02	1.09076E 01	2.2708E 00	2.1731E 01	.998569E 00	3.9013E 01	1.00156E 01	2.00138E 01	3.00213E 01	6.00497E 01
.131000E 02	1.12856E 01	1.2312E 00	2.1538E 01	.999186E 00	3.89174E 01	1.00137E 01	2.00178E 01	3.00193E 01	6.00424E 01
.133000E 02	1.21184E 01	1.9259E 00	2.2129E 01	.999314E 00	3.88152E 01	1.00129E 01	2.00117E 01	3.00148E 01	6.00343E 01
.135000E 02	1.02519E 01	1.34154E 00	2.00015E 01	.999412E 00	3.87125E 01	1.0011E 01	2.0011E 01	3.00124E 01	6.00296E 01
.137000E 02	1.13189E 01	1.53405E 00	1.9766E 01	.999504E 00	3.86100E 01	1.00107E 01	2.00092E 01	3.00163E 01	6.00249E 01
.139000E 02	1.13576E 01	1.06404E 00	1.8926E 01	.999577E 00	3.85081E 01	1.00081E 01	2.00078E 01	3.00081E 01	6.00201E 01
.141000E 02	1.04175E 01	1.92304E 00	1.9378E 01	.999626E 00	3.84067E 01	1.00059E 01	2.00063E 01	3.00068E 01	6.00172E 01
.143000E 02	1.06870E 01	1.09224E 01	1.90799E 01	.999636E 00	3.83041E 01	1.00058E 01	2.00044E 01	3.00046E 01	6.00144E 01
.145000E 02	1.18520E 01	1.144954E 01	2.07600E 01	.999699E 00	3.82078E 01	1.00044E 01	2.00035E 01	3.0003E 01	6.00118E 01
.147000E 02	1.01666E 01	1.19207E 01	1.98614E 01	.999719E 00	3.81048E 01	1.00035E 01	2.00029E 01	3.00041E 01	6.00117E 01
.149000E 02	1.04299E 01	1.60700E 01	1.94098E 01	.999759E 00	3.80099E 01	1.00028E 01	2.00012E 01	3.00037E 01	6.00027E 01
.151000E 02	1.06690E 01	1.20392E 01	2.10392E 01	.999781E 00	3.79254E 01	1.00029E 01	2.00034E 01	3.00044E 01	6.0003E 01
.153000E 02	1.03991E 01	1.01748E 01	1.97078E 01	.999802E 00	3.78422E 01	1.00021E 01	2.00075E 01	3.00027E 01	6.00067E 01
.155000E 02	1.06288E 01	1.08322E 01	2.03461E 01	.999819E 00	3.77595E 01	1.00019E 01	2.00029E 01	3.00019E 01	6.00040E 01
.157000E 02	1.09959E 01	1.26541E 01	2.25614E 01	.999828E 00	3.76732E 01	1.00018E 01	2.00029E 01	3.00019E 01	6.00037E 01
.159000E 02	1.03524E 01	1.22434E 01	2.24029E 01	.999834E 00	3.75816E 01	1.00016E 01	2.00021E 01	3.0001E 01	6.00049E 01
.161000E 02	1.07994E 01	1.02214E 01	2.12615E 01	.999847E 00	3.74872E 01	1.00014E 01	2.00012E 01	3.00012E 01	6.00042E 01
.163000E 02	1.01439E 01	1.07041E 01	2.28435E 01	.999856E 00	3.73901E 01	1.00012E 01	2.00021E 01	3.00017E 01	6.00031E 01
.165000E 02	1.07676E 01	1.23189E 01	2.31890E 01	.99987E 00	3.72917E 01	1.0001E 01	2.00017E 01	3.00015E 01	6.00024E 01
.167000E 02	1.05229E 01	1.04529E 01	2.18666E 01	.999895E 00	3.71945E 01	1.00008E 01	2.00118E 01	3.00013E 01	6.00013E 01
.169000E 02	1.08233E 01	1.03352E 01	2.15242E 01	.999906E 00	3.70996E 01	1.00005E 01	2.00113E 01	3.00013E 01	6.0001E 01
.171000E 02	1.04680E 01	1.126124E 01	2.20538E 01	.999927E 00	3.70087E 01	1.00002E 01	2.00074E 01	3.00013E 01	6.00004E 01
.173000E 02	1.06969E 01	1.09597E 01	2.08992E 01	.999937E 00	3.69181E 01	1.00002E 01	2.00070E 01	3.00011E 01	6.00002E 01
.175000E 02	1.04963E 01	1.16637E 01	2.11097E 01	.999936E 00	3.68264E 01	1.00001E 01	2.00099E 01	3.0001E 01	6.00001E 01
.177000E 02	1.11235E 01	1.06610E 00	2.16002E 01	.999939E 00	3.67352E 01	1.0000E 01	2.00085E 01	3.00011E 01	6.00001E 01
.179000E 02	1.03900E 01	1.03390E 01	1.93146E 01	.999936E 00	3.66445E 01	1.00001E 01	2.00065E 01	3.00011E 01	6.00001E 01
.181000E 02	1.06720E 01	1.22701E 00	1.97900E 01	.999937E 00	3.65543E 01	1.00001E 01	2.00043E 01	3.00011E 01	6.00001E 01
.183000E 02	1.04809E 01	1.24624E 00	1.93985E 01	.999939E 00	3.64646E 01	1.00001E 01	2.00041E 01	3.0001E 01	6.00001E 01
.185000E 02	1.07475E 01	1.19080E 00	1.71669E 01	.999932E 00	3.63754E 01	1.00000E 01	2.00044E 01	3.00007E 01	6.00001E 01
.187000E 02	1.06500E 01	1.03530E 01	1.61013E 01	.999931E 00	3.62867E 01	1.00000E 01	2.00031E 01	3.00007E 01	6.00001E 01
.189000E 02	1.02730E 01	1.06380E 01	1.6693E 01	.999969E 00	3.61986E 01	1.00000E 01	1.99997E 01	3.00002E 01	6.00001E 01
.191000E 02	1.04480E 01	1.14634E 01	1.71094E 01	.999974E 00	3.61111E 01	1.00000E 01	1.99998E 01	3.00002E 01	6.00001E 01
.193000E 02	1.03490E 01	1.08101E 01	1.68817E 01	.999978E 01	3.60242E 01	1.00000E 01	1.99999E 01	3.00001E 01	6.00001E 01
.195000E 02	1.037320E 00	1.28784E 00	1.47503E 01	.999964E 00	3.59379E 01	1.00000E 01	1.99997E 01	3.00000E 01	6.00001E 01
.197000E 02	1.037080E 00	1.35378E 00	1.3577E 01	.999998E 00	3.58511E 01	1.00000E 01	1.99997E 01	3.00001E 01	6.00001E 01
.199000E 02	1.031470E 00	1.40807E 00	1.21350E 01	.999992E 00	3.57646E 01	1.00000E 01	1.99996E 01	3.00000E 01	6.00001E 01

表 3.3.1 雑音を加えない場合の推定値

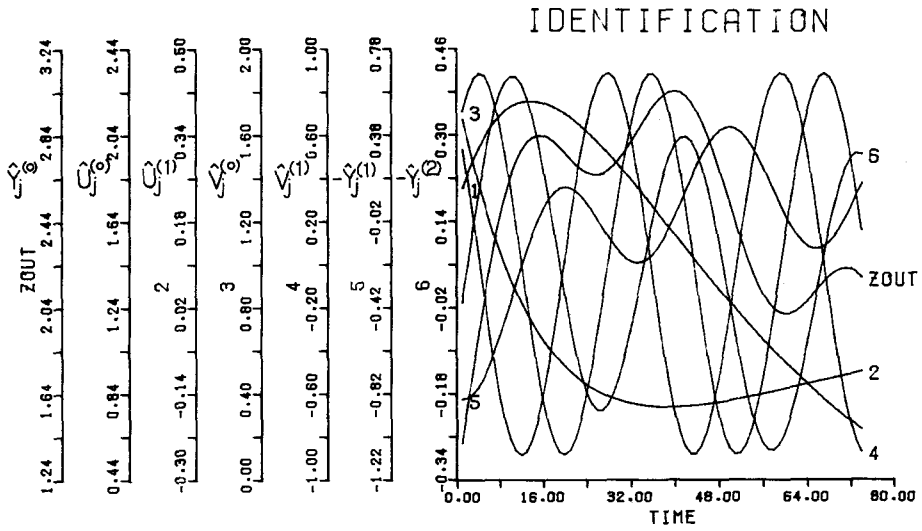


図 3.3.8  $\hat{U}_j^{(k)}$ ,  $\hat{V}_j^{(k)}$ ,  $\hat{Y}_j^{(k)}$  の変化

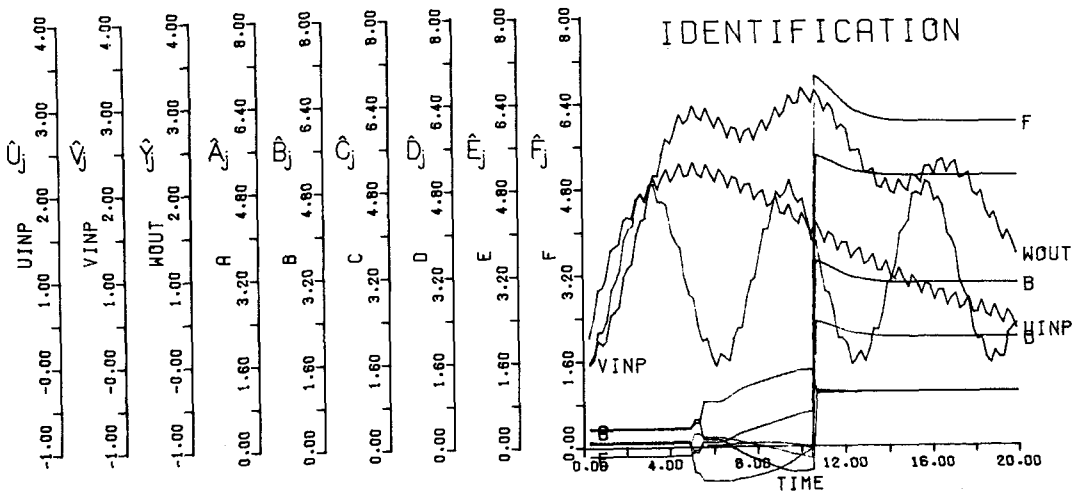


図 3.3.9  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$ ,  $\hat{D}$ ,  $\hat{E}$ ,  $\hat{F}$  の推定の過程

次に

$$u(t) = 1.2 \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{5}} \quad , \quad e_u = 0.1 \cdot \sin 10t \quad (3.3.33)$$

$$v(t) = 1 - \cos t \quad , \quad e_v = 0.1 \cdot \sin 10t \quad (3.3.34)$$

$$e_y(t) = 0.1 \cdot \sin 10t \quad (3.3.35)$$

を入力および雑音とした時の推定例を与えた。図 3. 3. 8 に  $\hat{U}_j^{(k)}, \hat{V}_j^{(k)}, \hat{Y}_j^{(k)}$  の変化を図 3. 3. 9 に  $\hat{u}_j, \hat{v}_j, \hat{y}_j$  および推定値  $\hat{A}_j, \hat{B}_j, \dots, \hat{F}_j$  を描き、その値を表 3. 3. 2 に与えた。

表 3. 3. 1 と表 3. 3. 2 を比較する限りでは推定値の優劣はつけ難い。これは雑音が  $\omega = 10$  の単振動であり  $T_s = 0.1$  より  $\theta = \omega \cdot T_s = 1$  となり図 2. 4. 6 の  $m = 4, IEO = 1$  の場合をみると、これはほとんど完全に遮断されていることによる。

Time	u(t)	v(t)	y(t)	A	B	C	D	E	F
0.07000E 02	0.15924E 01	0.13730E 01	0.31375E 01	0.98811E 00	0.34308E 01	0.10328E 01	0.23086E 01	0.54081E 01	0.68003E 01
0.10900E 02	0.14992E 01	0.11172E 01	0.30405E 01	0.98535E 00	0.33980E 01	0.10297E 01	0.22867E 01	0.53774E 01	0.68270E 01
0.14800E 02	0.13859E 01	0.80007E 00	0.28297E 01	0.98669E 00	0.33509E 01	0.10265E 01	0.22641E 01	0.53423E 01	0.68396E 01
0.18700E 02	0.12788E 01	0.76312E 00	0.26843E 01	0.98804E 00	0.33242E 01	0.10233E 01	0.22396E 01	0.53076E 01	0.68604E 01
0.22600E 02	0.11769E 01	0.75607E 00	0.26969E 01	0.98950E 00	0.32840E 01	0.10204E 01	0.22078E 01	0.52749E 01	0.68994E 01
0.26500E 02	0.10834E 01	0.77344E 00	0.26777E 01	0.99115E 00	0.32388E 01	0.10166E 01	0.21758E 01	0.52495E 01	0.69461E 01
0.30400E 02	0.10042E 01	0.82292E 00	0.27365E 01	0.99270E 00	0.31961E 01	0.10137E 01	0.21548E 01	0.52267E 01	0.69961E 01
0.34300E 02	0.13765E 01	0.17330E 01	0.26709E 01	0.99430E 00	0.31522E 01	0.10108E 01	0.21340E 01	0.52063E 01	0.70493E 01
0.38200E 02	0.16667E 01	0.59010E 01	0.24195E 01	0.99585E 00	0.31176E 01	0.10087E 01	0.20962E 01	0.51870E 01	0.71065E 01
0.42100E 02	0.12432E 01	0.14200E 01	0.24359E 01	0.99740E 00	0.30843E 01	0.10069E 01	0.20774E 01	0.51692E 01	0.71670E 01
0.46000E 02	0.11862E 01	0.93240E 01	0.24119E 01	0.99895E 00	0.30529E 01	0.10056E 01	0.20637E 01	0.51533E 01	0.72302E 01
0.49900E 02	0.11007E 01	0.27800E 01	0.24173E 01	0.99973E 00	0.30239E 01	0.10045E 01	0.20523E 01	0.51389E 01	0.72951E 01
0.53800E 02	0.11265E 01	0.12312E 01	0.24655E 01	0.99978E 00	0.30937E 01	0.10036E 01	0.20422E 01	0.51259E 01	0.73611E 01
0.57700E 02	0.12116E 01	0.35212E 01	0.22121E 01	0.99827E 00	0.30527E 01	0.10028E 01	0.20324E 01	0.51142E 01	0.74281E 01
0.61600E 02	0.10531E 01	0.34154E 00	0.20015E 01	0.99875E 00	0.30344E 01	0.10020E 01	0.20279E 01	0.51033E 01	0.74951E 01
0.65500E 02	0.10189E 01	0.53405E 00	0.19777E 01	0.99887E 00	0.30263E 01	0.10017E 01	0.20219E 01	0.50925E 01	0.75611E 01
0.69400E 02	0.11337E 01	0.86404E 00	0.20926E 01	0.99909E 00	0.30102E 01	0.10013E 01	0.20173E 01	0.50826E 01	0.76271E 01
0.73300E 02	0.96873E 00	0.92304E 01	0.19378E 01	0.99924E 00	0.30167E 01	0.10011E 01	0.20143E 01	0.50737E 01	0.76931E 01
0.77200E 02	0.91667E 00	0.41092E 01	0.19079E 01	0.99931E 00	0.30145E 01	0.10009E 01	0.20126E 01	0.50648E 01	0.77591E 01
0.81100E 02	0.10220E 01	0.24655E 01	0.20760E 01	0.99937E 00	0.30177E 01	0.10008E 01	0.20116E 01	0.50559E 01	0.78251E 01
0.85000E 02	0.91966E 00	0.15707E 01	0.19814E 01	0.99944E 00	0.30173E 01	0.10007E 01	0.20101E 01	0.50470E 01	0.78911E 01
0.88900E 02	0.82490E 00	0.16079E 01	0.19466E 01	0.99951E 00	0.30089E 01	0.10006E 01	0.20081E 01	0.50381E 01	0.79571E 01
0.92800E 02	0.96490E 00	0.19035E 01	0.21395E 01	0.99953E 00	0.30077E 01	0.10005E 01	0.20078E 01	0.50292E 01	0.80231E 01
0.96700E 02	0.87590E 00	0.19329E 01	0.21076E 01	0.99960E 00	0.30069E 01	0.10004E 01	0.20070E 01	0.50203E 01	0.80891E 01
1.00600E 02	0.74260E 00	0.18832E 01	0.20346E 01	0.99962E 00	0.30061E 01	0.10003E 01	0.20065E 01	0.50114E 01	0.81551E 01
1.04500E 02	0.87960E 00	0.20611E 01	0.21016E 01	0.99964E 00	0.30052E 01	0.10004E 01	0.20052E 01	0.50025E 01	0.82211E 01
1.08400E 02	0.83524E 00	0.20234E 01	0.22402E 01	0.99967E 00	0.30049E 01	0.10003E 01	0.20052E 01	0.50012E 01	0.82871E 01
1.12300E 02	0.87294E 00	0.18251E 01	0.21815E 01	0.99969E 00	0.30043E 01	0.10003E 01	0.20051E 01	0.50006E 01	0.83531E 01
1.16200E 02	0.79149E 00	0.18704E 01	0.22845E 01	0.99970E 00	0.30040E 01	0.10003E 01	0.20049E 01	0.50003E 01	0.84191E 01
1.20100E 02	0.79540E 00	0.17676E 01	0.23183E 01	0.99973E 00	0.30034E 01	0.10002E 01	0.20044E 01	0.50003E 01	0.84851E 01
1.24000E 02	0.61529E 00	0.14521E 01	0.21564E 01	0.99975E 00	0.30028E 01	0.10002E 01	0.20039E 01	0.50001E 01	0.85511E 01
1.27900E 02	0.70429E 00	0.21324E 01	0.22519E 01	0.99978E 00	0.30023E 01	0.10002E 01	0.20035E 01	0.50001E 01	0.86171E 01
1.31800E 02	0.75468E 00	0.12612E 01	0.22938E 01	0.99979E 00	0.30018E 01	0.10001E 01	0.20031E 01	0.50002E 01	0.86831E 01
1.35700E 02	0.56930E 00	0.69557E 00	0.20909E 01	0.99981E 00	0.30014E 01	0.10001E 01	0.20028E 01	0.50001E 01	0.87491E 01
1.39600E 02	0.61990E 00	0.76670E 00	0.21105E 01	0.99982E 00	0.30012E 01	0.10001E 01	0.20026E 01	0.50001E 01	0.88151E 01
1.43500E 02	0.71120E 00	0.68610E 00	0.21600E 01	0.99983E 00	0.30007E 01	0.10001E 01	0.20023E 01	0.50001E 01	0.88811E 01
1.47400E 02	0.53630E 00	0.35309E 00	0.19315E 01	0.99984E 00	0.30006E 01	0.10001E 01	0.20022E 01	0.50001E 01	0.89471E 01
1.51300E 02	0.54072E 00	0.22701E 00	0.18798E 01	0.99985E 00	0.30006E 01	0.10001E 01	0.20021E 01	0.50001E 01	0.90131E 01
1.55200E 02	0.66480E 00	0.24624E 00	0.19393E 01	0.99986E 00	0.30003E 01	0.10000E 01	0.20018E 01	0.50001E 01	0.90791E 01
1.59100E 02	0.50747E 00	0.19049E 00	0.17169E 01	0.99987E 00	0.30000E 01	0.10000E 01	0.20016E 01	0.50001E 01	0.91451E 01
1.63000E 02	0.44685E 00	0.53390E 01	0.16101E 01	0.99988E 00	0.29999E 01	0.10000E 01	0.20016E 01	0.50004E 01	0.92111E 01
1.66900E 02	0.61273E 00	0.96380E 01	0.16893E 01	0.99989E 00	0.29994E 01	0.10000E 01	0.20011E 01	0.49999E 01	0.92771E 01
1.70800E 02	0.48797E 00	0.12500E 01	0.15045E 01	0.99990E 00	0.29991E 01	0.10000E 01	0.20009E 01	0.49996E 01	0.93431E 01
1.74700E 02	0.40449E 00	0.18910E 01	0.13681E 01	0.99991E 00	0.29987E 01	0.10000E 01	0.20009E 01	0.49996E 01	0.94091E 01
1.78600E 02	0.35732E 00	0.27840E 01	0.14759E 01	0.99991E 00	0.29997E 01	0.10000E 01	0.20009E 01	0.49995E 01	0.94751E 01
1.82500E 02	0.47308E 00	0.35370E 00	0.13575E 01	0.99990E 00	0.29997E 01	0.10000E 01	0.20009E 01	0.49996E 01	0.95411E 01
1.86400E 02	0.35147E 00	0.40807E 00	0.12135E 01	0.99990E 00	0.29992E 01	0.10000E 01	0.20010E 01	0.49997E 01	0.96071E 01

表 3. 3. 2 雑音を加えた場合の推定値

### 3.4 推定値の統計的な性質

3.3 で考えた 1 入力 1 出力系の場合について最小自乗解の統計的性質について調べてみる。雑音が存在しない場合の  $\hat{u}_j, \hat{y}_j, \hat{U}_j^{(k)}, \hat{Y}_j^{(k)}, \hat{\mathbf{v}}_j, \hat{\mathbf{V}}_j, \hat{\mathbf{y}}_j$  を頭の記号“ $\hat{\phantom{x}}$ ”を取った  $u_j, y_j, \dots, \mathbf{y}_j$  などと表わすことにする。 $e_j, \epsilon_j$  をフィルタ  $\mathcal{D}_M^{(k)}$  に通した信号を  $e_j^{(k)}, \epsilon_j^{(k)}$  として

$$\mathbf{e}_j = (e_j^{(0)}, e_j^{(1)}, \dots, e_j^{(n-1)}, -\epsilon_j^{(1)}, -\epsilon_j^{(2)}, \dots, -\epsilon_j^{(n)}) \quad (3.4.1)$$

$$\mathbf{E}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_J \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon}_j = \begin{bmatrix} \epsilon_0 \\ \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_J \end{bmatrix} \quad (3.4.2)$$

とすると

$$\hat{\mathbf{V}}_j = \mathbf{V}_j + \mathbf{E}_j \quad (3.4.3)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_j = \mathbf{y}_j + \boldsymbol{\epsilon}_j \quad (3.4.4)$$

と表わされている。

(3.3.21) を用いると

$$\hat{\mathbf{V}}_j^T \cdot \hat{\mathbf{V}}_j \cdot \hat{\mathbf{a}}_j = \hat{\mathbf{V}}_j^T \cdot \hat{\mathbf{y}}_j \quad (3.4.5)$$

と表わされる。一方 3.3 の例 2 で述べたようにフィルタによる誤差は全く無視してよいので

$$\mathbf{V}_j \cdot \mathbf{a} = \mathbf{y}_j \quad (3.4.6)$$

である。そこで (3.4.5) より

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{V}}_j^T \cdot \hat{\mathbf{V}}_j \cdot (\hat{\mathbf{a}}_j - \mathbf{a}) &= \hat{\mathbf{V}}_j^T \cdot (\hat{\mathbf{y}}_j - \hat{\mathbf{V}}_j \cdot \mathbf{a}) \\ &= \hat{\mathbf{V}}_j^T \cdot (\mathbf{y}_j - \mathbf{V}_j \cdot \mathbf{a} + \boldsymbol{\epsilon}_j - \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{a}) \\ (3.4.6) \text{ を用いて} &= \hat{\mathbf{V}}_j^T \cdot (\boldsymbol{\epsilon}_j - \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{a}) \\ &= \mathbf{V}_j^T \cdot (\boldsymbol{\epsilon}_j - \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{E}_j^T \cdot (\boldsymbol{\epsilon}_j - \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{a}) \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

いま入力も雑音も定常信号としてさらにエルゴード性を仮定すると (45), (A4)

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \frac{1}{J} \cdot \mathbf{V}_j^T \cdot (\boldsymbol{\epsilon}_j - \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{a}) = E \{ \mathbf{V}_j^T \cdot (\boldsymbol{\epsilon}_j - \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{a}) \} \quad (3.4.8)$$

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \frac{1}{J} \cdot \mathbf{E}_j^T \cdot (\boldsymbol{\epsilon}_j - \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{a}) = E \{ \mathbf{E}_j^T \cdot (\boldsymbol{\epsilon}_j - \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{a}) \} \quad (3.4.9)$$

が確率 1 で成立する。ここで入力と雑音が無相関であれば (3.4.8) の右辺は 0 となる。またエルゴード性を仮定していたので

$$\mathbf{M} = \lim_{J \rightarrow \infty} \frac{1}{J} \widehat{\mathbf{V}}_J^T \cdot \mathbf{V}_J = E \{ \widehat{\mathbf{V}}_J^T \cdot \widehat{\mathbf{V}}_J \} \quad (3.4.10)$$

がなりたつ。また

$$\mathbf{S} = E \{ \mathbf{E}_J \cdot (\boldsymbol{\epsilon}_J - \mathbf{E}_J \cdot \mathbf{a}) \} \quad (3.4.11)$$

とすると

$$\lim_{J \rightarrow \infty} (\widehat{\mathbf{a}}_J - \mathbf{a}) = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{S} \quad (3.4.12)$$

である。すなわち  $\widehat{\mathbf{a}}_J$  は  $\mathbf{a}$  の一致推定量ではなく (6.4.12) より

$$\lim_{J \rightarrow \infty} E \{ \widehat{\mathbf{a}} \} = \mathbf{a} + \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{S} \quad (3.4.13)$$

を得るが、これは漸近的に推定値  $\widehat{\mathbf{a}}$  は不偏でないことを示している。

これはパルス伝達関数の推定の場合にもいえることであるが、自己回帰形の推定に伴う欠点である。ただし明らかなことであるが雑音が存在しなければ (3.4.6) がなりたつので

$$\widehat{\mathbf{a}}_J = \mathbf{a}_J \quad (6.4.14)$$

である。

次にフィルタによって  $\mathbf{M}$  と  $\mathbf{S}$  の値がどのように変化するかを調べてみよう。この行列の要素は  $E \{ \widehat{U}_j^{(k)} \cdot \widehat{U}_j^{(\ell)} \}$ 、 $E \{ \widehat{U}_j^{(k)} \cdot \widehat{Y}_j^{(\ell)} \}$ 、 $E \{ \widehat{Y}_j^{(k)} \cdot \widehat{Y}_j^{(\ell)} \}$  等から成りたっている。まず、 $E \{ \widehat{U}_j^{(k)} \cdot \widehat{U}_j^{(\ell)} \}$  について調べてみる。(3.3.5) および雑音もスペクトル分解できるとして  $\widehat{U}_j^{(\ell)}$  は実数なので  $\overline{\widehat{U}_j^{(\ell)}} = \widehat{U}_j^{(\ell)}$  であるから

$$\begin{aligned} E \{ \widehat{U}_j^{(k)} \cdot \widehat{U}_j^{(\ell)} \} &= E \{ \widehat{U}_j^{(k)} \cdot \overline{\widehat{U}_j^{(\ell)}} \} \\ &= (-1)^\ell \cdot \int_{-\omega_f}^{\omega_f} (i\omega)^{k+\ell} \cdot \{ P^*(\omega \cdot T_s) \}^{2M} (dS_u(\omega) + dS_e(\omega)) \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

カスケードフィルタの通過帯域に信号  $u(t)$  の主要スペクトルがほとんど含まれていて、その範囲では信号のパワーが雑音のそれより十分大きいならば (3.4.15) は

$$E \{ \widehat{U}_j^{(k)} \cdot \widehat{U}_j^{(\ell)} \} \approx (-1)^\ell \cdot i^{k+\ell} \cdot \int_{-\omega_f}^{\omega_f} (i\omega)^{k+\ell} \cdot dS_u(\omega) \quad (3.4.16)$$

となり、フィルタにほとんど影響されない値となる。他の項についても同様なことがいえる。

そして  $\mathbf{S}$  の方は  $E \{ e_j^{(k)} \cdot \epsilon_j^{(\ell)} \}$ 、 $E \{ e_j^{(k)} \cdot e_j^{(\ell)} \}$ 、 $E \{ \epsilon_j^{(k)} \cdot \epsilon_j^{(\ell)} \}$  などの項よりなっている。  $e_j^{(k)}$  と  $\epsilon_j^{(\ell)}$  が無相関であると考えるのは自然なので

$$E \{ e_j^{(k)} \cdot \epsilon_j^{(\ell)} \} = 0 \quad (3.4.17)$$

である。また ( 6.4.15 ) を導いたのと同じ理由で

$$E \{ e_j^{(k)} \cdot e_j^{(l)} \} = (-1)^l \int_{-\omega_f}^{\omega_f} (i\omega)^{k+l} \{ P^*(\omega \cdot T_s) \}^{2M} \cdot dS_e(\omega) \quad (3.4.18)$$

となる。雑音  $e_j$  は白色性すなわち

$$\frac{dS_e(\omega)}{d\omega} = \frac{\sigma e^2}{2\omega_f} \quad |\omega| \leq \omega_f \quad (3.4.19)$$

とし  $\{ P^*(\omega \cdot T_s) \}^{2M}$  の遮断周波数 (たとえば第2章で述べた  $P^*(\omega \cdot T_s)$  の第1零点) を  $\omega_c$  とすると  $k+l = \text{偶数}$  のとき

$$\begin{aligned} E \{ e_j^{(k)} \cdot e_j^{(l)} \} &= \frac{(-1)^k \cdot i^{k+l} \cdot \sigma e^2}{2\omega_f} \int_{-\omega_f}^{\omega_f} \omega^{k+l} \cdot \{ P^*(\omega \cdot T_s) \}^{2M} \cdot d\omega \\ &= \frac{(-1)^k \cdot i^{k+l} \cdot \sigma e^2}{2\omega_f} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \omega^{k+l} d\omega \\ &= \frac{(-1)^k \cdot i^{k+l} \cdot \sigma e^2}{2\omega_f} \cdot \frac{2 \cdot \omega_c^{k+l+1}}{k+l+1} \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

フィルタを通さないときには  $\omega_c$  が  $\omega_f$  となり ( 3.4.20 ) は著しく大きくなる。すなわちフィルタを通すことにより  $E \{ e_j^{(k)} \cdot e_j^{(l)} \}$  ( $k+l = \text{偶}$ ) は十分小さくなる。信号に白色性があれば  $k+l = \text{奇}$  のときは

$$E \{ e_j^{(k)} \cdot e_j^{(l)} \} = 0 \quad (3.4.21)$$

となる。  $E \{ e_j^{(k)} \cdot e_j^{(l)} \}$  等についても事情は全く同様である。

すなわち  $\mathbf{M}$  の値は入力信号の有効成分がカスケードフィルタの通過帯域に入っている限りフィルタを通す通さないにかかわらずほぼ一定の値となる。それに反し  $\mathbf{S}$  の方はフィルタを通したことにより十分その値が小さくなっていることがわかった。これはこの論文で提案する手法によれば推定値の定常偏差を実用上さしつかえない程度におさえ得ることを示している。

従ってパルス伝達関数等を経由して伝達関数を求めた時に生ずる変換誤差よりこれらの偏差は十分小さなものであろう。しかもこの方法では変換の誤差というもの存在しないので、その意味からも実用上有効な方法と考えられる。

3.3.3 で与えた例 - 1 で  $\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{S}$  を計算してみる。( 3.4.20 ) より  $k$  と  $l$  に関係なく ( $k, l = 0, 1, \dots$ )

$$|E \{ e_j^{(k)} \cdot e_j^{(l)} \}| \leq \frac{\omega_c}{\omega_f} \cdot \sigma e^2 \quad (3.4.23)$$

同じく

$$|E\{\varepsilon_j^{(k)} \cdot \varepsilon_j^{(l)}\}| \leq \frac{\omega_c}{\omega_f} \cdot \sigma_{\varepsilon^2} \quad (3.4.24)$$

が成立するので

$$\mathbf{S} = (S_1, S_2, \dots, S_n)^T \quad (3.4.25)$$

とすると(3.4.11)より

$$|S_l| \leq \frac{\omega_c}{\omega_f} [\sigma_{\varepsilon^2} + \text{Max}\{\sigma_{e^2}, \sigma_{\varepsilon^2}\} \cdot |a_l|] \quad (3.4.26)$$

(  $l = 1, 2, \dots, n$  )

となる。これを用いて  $\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{S}$  の要素の評価ができる。

例-1の場合には  $M = 3$  ,  $m = 4$  であったので図 2.4.6 より

$$\omega_c / \omega_f = 1/\pi = 0.3183 \quad (3.4.27)$$

また

$$\sigma_{e^2} = 0.01 \quad \sigma_{\varepsilon^2} = 0.01 \quad (3.4.28)$$

であり  $J = 80$  の時の  $\hat{\mathbf{V}}_J^T \cdot \mathbf{V}_J$  を  $\mathbf{M}$  と考えれば

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.15248E-01 & -0.58500E-03 & -0.62433E-02 \\ -0.58525E-03 & 0.12065E-01 & -0.17851E-00 \\ -0.62435E-02 & -0.17851E-00 & 0.99869E-01 \end{bmatrix} \times 80 \quad (3.4.29)$$

であるので

$$|\hat{\mathbf{a}}_J - \mathbf{a}| \leq (0.018, 8.1, 1.2) \quad (3.4.30)$$

となる。ただしベクトル間の不等式は要素毎に不等式が成立するものとする。図 3.3.3 に与えたシミュレーションの結果は(3.4.30)の評価の妥当性を示している。

### 3.5 終結式による構造の決定

今まではシステムの次数を知った上でその係数を推定する手法について述べてきた。しかし実システムの同定を実施しようとするとき次数そのものが不明である場合の方が多い。このような場合にはまずシステムの次数を推定してからでないと今まで述べてきた手法を用いることはできない。この節では 1 入力 1 出力系の場合について次数を推定する方法について終結式を用いる方法を説明し例 1 で与えた例題を基にしてこの手法の妥当性を示した。

問題を明確化するためにシステムの正しい次数は  $n$  で伝達関数が(3.3.1)のようになるとしておく。我々ははじめ  $n$  の値を知らないとして

$$R'(S) = \frac{b_0 + b_1' \cdot S + \dots + b_{n-1}' \cdot S^{n-1}}{1 + a_1' \cdot S + \dots + a_n' \cdot S^n} \quad (3.5.1)$$

であるとしよう。ただし



$$n \leq n' \quad (3.5.2)$$

であるものとする。 $R'(S)$ では  $a'_{n'} \neq 0$  という仮定はおけない。もしかすると  $a'_{n'} = 0$  となる場合もあり得る。ところで 1 入力 1 出力系の場合には次数が  $n$  であるというのは定理 1, 2, 3 により  $a_n \neq 0$  で分母分子の  $S$  に関する多項式が既約であることが必要十分であった。すなわち我々が仮に選んだ伝達関数  $R'(S)$  の次数  $n'$  がシステムの次数  $n$  に等しいか否かを調べるには次のようにすればよい。

$$a'_{n'} \neq 0 \quad (3.5.3)$$

でしかも分母分子の多項式

$$A'(S) = 1 + a'_1 \cdot S + a'_2 \cdot S^2 + \cdots + a'_{n'} \cdot S^{n'} \quad (3.5.4)$$

$$B'(S) = b'_0 + b'_1 \cdot S + \cdots + b'_{n'-1} \cdot S^{n'-1} \quad (3.5.5)$$

が既約であれば  $n' = n$  となり、そのいずれかが満足されなければ  $n' > n$  である。

ところで非常に都合のよい定理が存在する。すなわち

〔定理 3.5.1〕  $S$  の 2 つの多項式 (20)

$$F_n(S) = f_0 + f_1 \cdot S + \cdots + f_n \cdot S^n \quad (3.5.5)$$

$$G_m(S) = g_0 + g_1 \cdot S + \cdots + g_m \cdot S^m \quad (3.5.6)$$

に対して

$$Res(F_n, G_m) = \begin{vmatrix} f_n & f_{n-1} & \cdots & f_0 & & & \\ & f_n & f_{n-1} & \cdots & f_0 & & \\ & & f_n & f_{n-1} & \cdots & f_0 & \\ g_m & g_{m-1} & \cdots & g_0 & & & \\ & g_m & g_{m-1} & \cdots & g_0 & & \\ & & g_m & g_{m-1} & \cdots & g_0 & \end{vmatrix} \quad (3.5.7)$$

という行列式を  $F_n(S), G_m(S)$  の終結式という。この終結式に対して

$Res(F_n, G_m) = 0$  は  $f_n = g_m = 0$  または  $F_n(S)$  と  $G_m(S)$  が可約の場合かでありしかもその時に限る。

これはまた  $Res(F_n, G_m) \neq 0$  なら  $f_n$  又は  $g_m$  の少なくとも一方は 0 でなくしかも  $F_n(S)$  と  $G_m(S)$  は既約であることを示している。

そこでこの定理をシステムの次数の決定に用いることができる。すなわち

$$Res(A', B') = 0 \quad (3.5.8)$$

ならば  $a'_{n'} = b'_{n'-1} = 0$  又は  $A'(S), B'(S)$  が可約なので  $n < n'$  である。

$$Res(A', B') \neq 0 \quad (3.5.9)$$

ならば  $a'_{n'} \neq 0$  又は  $b'_{n'-1} \neq 0$  で  $A'(S)$  と  $B'(S)$  が既約である。そこで  $a'_{n'} \neq 0$  なら  $n' = n'$  ,  $a'_{n'} = 0$  のときは  $b'_{n'-1} \neq 0$  だが物理的に考えて  $a'_{n'-1} \neq 0$  でなければならぬから  $n = n' - 1$  となる。これをまとめると

$$A'(S), B'(S) \text{ の作成} \rightarrow \begin{cases} \text{Res}(A', B') = 0 \rightarrow n < n' \\ \text{Res}(A', B') \neq 0 \rightarrow \begin{cases} a'_{n'} = 0 \rightarrow n = n' - 1 \\ a'_{n'} \neq 0 \rightarrow n = n' \end{cases} \end{cases} \quad (3.5.10)$$

となる。すなわち先に述べた係数の推定法は仮の次数さえ仮定すれば  $a'_{n'} \neq 0$  という仮定を用いることなく実行できるので、仮の次数  $n'$  に対し  $A'(S)$  ,  $B'(S)$  を作り終結式を計算し (3.5.10) で述べた方法によれば次数  $n$  を推定できる。すなわち雑音を含む観測値より得られた係数の推定値では (3.5.10) で現われる  $= 0$  という係数は近似的にしか成立しないであろうからである。

3.3.3 で考えた例では正しいシステムは  $1 / (1 + S + 2.0 \cdot S^2)$  であり、構造がわかったとして推定した結果は  $1.01 / (1 + 0.998 \cdot S^2 + 2.002 S^2)$  だったので終結式は

$$\begin{vmatrix} 0 & 1.01 & 0 \\ 0 & 0 & 1.01 \\ 2.002 & 0.998 & 1 \end{vmatrix} \doteq 2.042 \quad (3.5.11)$$

システムが  $G / (1 + A \cdot S + B \cdot S^2 + C \cdot S^3)$  として推定した結果が図 3.3.4 の場合で、80 秒目では  $\hat{G}_j = 0.91$  ,  $\hat{A}_j = 1.03$  ,  $\hat{B}_j = 1.975$  ,  $\hat{C}_j = 0.13$  となるので終結式は

$$\begin{vmatrix} 0 & 0.91 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.91 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.91 & 0 \\ 0.13 & 1.975 & 1.03 & 0 & 0 \\ 0 & 0.13 & 1.975 & 1.03 & 1 \end{vmatrix} \doteq 0.012 \quad (3.5.12)$$

となる。これは (3.5.11) に比べて 0 と考えて良いので次数は 2 以下 (従って 2) という結論を出すことができる。

ところで (3.5.1) を入出力の微分方程式で表わすと

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n'-1} b'_k \cdot u^{(k)}(t) - \sum_{l=1}^{n'} a'_l \cdot y^{(l)}(t) \quad (3.5.11)$$

となる。もし  $n' = n$  の場合に、

$$u^{(0)}(t), u^{(1)}(t), \dots, u^{(n'-1)}(t) \quad (3.5.12)$$

が一次独立であれば関数列

$$u(t), u^{(1)}(t), \dots, u^{(n'-1)}(t), -y^{(1)}(t), -y^{(2)}(t), \dots, -y^{(n)}(t) \quad (3.5.13)$$

は一次独立となる。しかし  $n' > n$  ならば関数列 (3.5.1.3) は一次従属となり、(3.5.1.1) を満たす係数の組は無数に存在するが、そのどの組をとってもやはり  $\text{Res}(A', B) = 0$  であるか  $\text{Res}(A', B') \neq 0$  で  $a'_{n'} = 0$  である。もしそうでないとなれば  $\text{Res}(A', B') \neq 0$ 、 $a'_{n'} \neq 0$  となり  $n' = n$  となるからでありこの場合解は一組しか存在しない。

### 3.6 無定形システムに対する配慮

実際の工業プラント（後で出てくる蒸気発生用ボイラ等）では一定の入力を加えると出力の絶対値が増加するようなシステムが多く存在する。このようなシステムは(3.3.1)のような形の伝達関数では表現できず(18), (19)

$$R(S) = \frac{b_0 + b_1 \cdot S + \dots + b_{n-1} \cdot S^{n-1}}{S^r \cdot (1 + a_1 \cdot S + \dots + a_n \cdot S^n)} \quad (3.6.1)$$

と表わされなければならない。ここで

$$r \geq 1 \quad (3.6.2)$$

である。工業プラント等ではその物理的構成・記録データ等から  $r$  の値を知ることは比較的容易であるので、 $r$  は既知として見る。(3.6.1) は微分方程式になおすと

$$y^{(r)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot u^{(k)}(t) - \sum_{l=1}^n a_l \cdot y^{(l+r)}(t) \quad (3.6.3)$$

となるので、(3.3.5) の  $\hat{\mathbf{v}}_j$  と (3.3.17) の  $\hat{\mathbf{y}}_j$  で

$$\hat{Y}_j^{(l)} \rightarrow \hat{Y}_j^{(l+r)} \quad (l = 1, 2, \dots, n) \quad (3.6.4)$$

と置きかえれば全く同じ手法が用い得る。これはカスケード・デジタル微分フィルタにより任意の階数の一定低域スペクトル成分の微分を容易に得ることができることによる。

### 3.7 無駄時間を含むシステムに対する配慮 (D6)

実際の工業プラントでは第4章で述べるような抄紙機、鉄鋼圧延機等のように大きな無駄時間を含むものが存在する。このようなシステムはやはり(3.3.1)のような形の伝達関数では表現できず

$$R(S) = \left( \frac{b_0 + b_1 \cdot S + \dots + b_{n-1} \cdot S^{n-1}}{1 + a_1 \cdot S + \dots + a_n \cdot S^n} \right) \cdot e^{-T_D \cdot S} \quad (3.7.1)$$

と表わされなければならない。ところで  $T_D$  がわかっている場合には  $[\cdot]$  を Gauss の記号として

$$l_D = \lceil T_D / T_S \rceil \quad (3.7.2)$$

とすれば (3.7.1) は

$$\hat{Y}_j^{(0)} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot \hat{U}_j^{(k)} l_D - \sum_{l=1}^n a_l \cdot \hat{Y}_j^{(l)} \quad (3.7.3)$$

と表わされるので全く同じ手法が適用できる。デジタル系ではサンプル周期  $T_S$  の整数倍であれば自由に時間軸をずらせることが可能であり、この点がアナログ系に比べて著しく有利な点であるといえることができる。

$T_D$  が不明の場合でもいくつかの  $T_D$  を仮定し、その中より妥当な値を選ぶことができる。これは第4章の抄紙機の同定の部分で扱われている。

### 3.8 前置フィルタについて

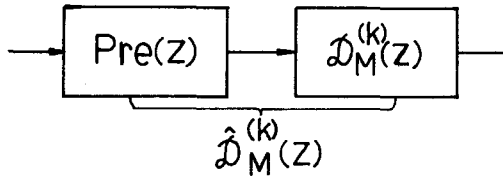
この章で提案した同定法の基本はシステムの入出力の観測サンプル値  $\hat{u}_j, \hat{y}_j$  にカスケードデジタル微分フィルタ  $\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$  を通して微分  $\hat{U}_j^{(k)}, \hat{Y}_j^{(k)}$  を作り、これをもとにシステムの伝達関数を求める方法であった。しかし3.3.1の手法の説明をふり返ってみると、 $\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$  の前に

別のフィルタ  $Pre(z)$  を通してもよいことがわかる。

ただし  $Pre(z)$  は

$$Pre(e^{i\omega \cdot Ts}) = Pre^*(\omega \cdot Ts) \cdot e^{-i\omega \cdot \tau_0} \quad (3.8.1)$$

前置フィルタ     カスケード  
                                 微分フィルタ



のような線形位相特性をもつものとする。

すなわち  $\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$  の代わりに

$$\hat{\mathcal{D}}_M^{(k)}(z) = Pre(z) \cdot \mathcal{D}_M^{(k)}(z) \quad (3.8.2)$$

図 3.8.1 前置フィルタ

を用いてもよい。

これは  $\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$  の特性だけでは帯域が広すぎるような場合とか、低域に強い点状のスペクトルが存在するような場合には  $Pre(z)$  として狭帯域の低域フィルタやノッチフィルタ等をとる。このようなもので簡便なものを示しておくことにする。これらは第4章の実システムの同定の際に利用されている。

〔狭帯域フィルタの例〕     入力  $x_j$ ，出力  $y_j$  に対して相加平均

$$y_j = \frac{1}{L} \cdot \sum_{l=1}^L x_{j+1-l} \quad (3.8.3)$$

を考える。このフィルタの脉冲伝達関数を  $Pre(z)$  とすると

$$Pre(e^{i\omega \cdot Ts}) = Pre^*(\omega \cdot Ts) \cdot e^{-i\omega \left(\frac{L-1}{2}\right) \cdot Ts} \quad (3.8.4)$$

となる。ここで

$$Pre^*(\theta) = \frac{\sin \frac{L \cdot \theta}{2}}{L \cdot \sin \frac{\theta}{2}} \quad (3.8.5)$$

である。 $Pre^*(\theta)$  の変化は  $L = 16$  の場合を示すと図 3.8.2 のようになる。後置されている  $\mathcal{D}_M^{(k)}(z)$  自身狭帯域の低域特性であることを考えると  $Pre^*(\theta) = 0$  の第 1 零点が  $\theta = \frac{2\pi}{L}$  だから、このフィルタによりその半分 (図 3.8.2 参照) の

$$|\omega| \leq (\pi / Ts) \cdot L \quad (3.8.6)$$

の成分のみが通過すると考えてよい。

[ノッチ・フィルタの例] (31) 超低域に不用な単一の点状スペクトルの雑音に加わっている場合にはノッチフィルタを用いると便利である。たとえばこれは入出力の関係が

$$y_j = (1/2) \cdot (x_j + x_{j-L}) \quad (3.8.7)$$

で与えられるフィルタで、このフィルタの周波数特性は

$$Pre(e^{i\omega Ts}) = Pre^*(\omega \cdot Ts) \cdot e^{-i\omega \cdot \frac{L}{2} \cdot Ts} \quad (3.8.8)$$

と表わされる。ここで

$$Pre^*(\theta) = \cos \left( \frac{L \cdot \theta}{2} \right) \quad (3.8.9)$$

となる。 $|Pre^*(\theta)|^2$  の変化は  $L = 10$  の場合を示すと図 3.8.4 のようになる。

$Pre^*(\theta)$  は

$$\theta = \frac{2}{L} \left( \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \right) = \frac{\pi}{L} (1 + 2k) \quad (3.8.10)$$

( $k = 0, 1, \dots$ )

で零となる。これは

$$\omega = \frac{\pi}{Ts} \cdot \frac{1 + 2k}{L} \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (3.8.11)$$

の周波数の信号を完全に遮断することを意味する。

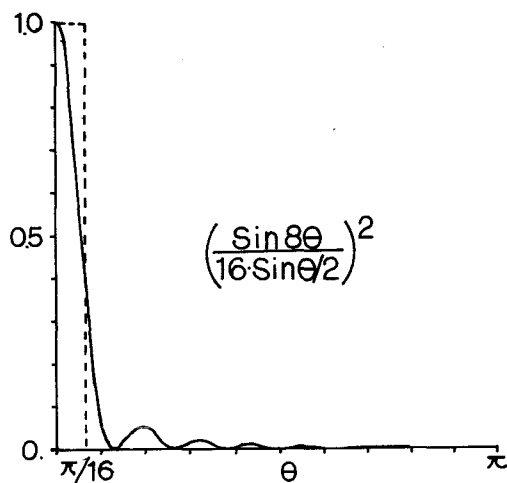


図 3.8.3 狭帯域フィルタ

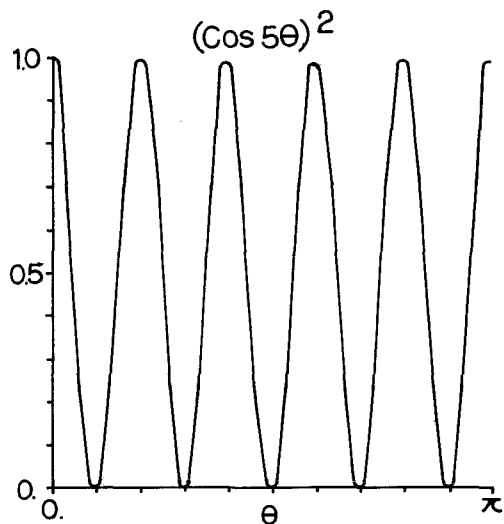


図 3.8.4 ノッチ・フィルタ

フィルタ  $\hat{D}_M^{(k)}(z)$ ,  $Pre(z)$ ,  $\hat{D}_M^{(k)}(z)$  などのフィルタを定めるには信号のパワー・スペクトルを知る必要があり、これらは同定を実施する前に実施される。

### 3.9 逐次推定のアルゴリズムについて

オンラインの時等のように (3.3.19) で  $J$  の値が 1 つずつ増加していくような場合にはその都度 (3.3.19) 式を計算していたのでは効率が悪い。このような場合には逐次形のアルゴリズムを用いると便利である。これは Greville の公式に基礎を置いている。(5) (3.3.17) より

$$\hat{\mathbf{v}}_J = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_{J-1} \\ \hat{v}_J \end{bmatrix} \quad (3.9.1)$$

と表わすことができる。次に

$$\beta_J = \hat{\mathbf{v}}_J \cdot \hat{\mathbf{v}}_{J-1}^+ \quad (3.9.2)$$

として

$$\mathbf{r}_J = \hat{\mathbf{v}}_J - \beta_J \cdot \hat{\mathbf{v}}_{J-1} \quad (3.9.3)$$

とおくと

$$\hat{\mathbf{v}}_J^+ = [\hat{\mathbf{v}}_{J-1}^+ - \delta_J \cdot \beta_J, \delta_J] \quad (3.9.4)$$

となる。ここで

$$\delta_J = \begin{cases} \boldsymbol{r}_J^+ & \boldsymbol{r}_J \neq \mathbf{0} \\ (1 + \boldsymbol{\beta}_J \cdot \boldsymbol{\beta}_J^T)^{-1} \cdot \widehat{\boldsymbol{V}}_{J-1}^+ \cdot \boldsymbol{\beta}_J^T & \boldsymbol{r}_J = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.9.5)$$

である。これを *Greville* の公式という。

ところで (3.3.17) より

$$\widehat{\boldsymbol{y}}_J = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{y}}_{J-1} \\ \widehat{y}_J \end{bmatrix} \quad (3.9.6)$$

でもある。そこで、(3.9.6) と (3.9.4) を (3.3.19) に代入して

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{a}}_J &= \widehat{\boldsymbol{V}}_J^+ \cdot \widehat{\boldsymbol{y}}_J = [\widehat{\boldsymbol{V}}_{J-1}^+ \quad -\delta_J \cdot \boldsymbol{\beta}_J, \delta_J] \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{y}}_{J-1} \\ \widehat{y}_J \end{bmatrix} \\ &= \widehat{\boldsymbol{V}}_{J-1}^+ \cdot \widehat{\boldsymbol{y}}_{J-1} - \delta_J \cdot \boldsymbol{\beta}_J \cdot \widehat{\boldsymbol{y}}_{J-1} + \delta_J \cdot \widehat{y}_J \\ &= \widehat{\boldsymbol{a}}_{J-1} + \delta_J \cdot (\widehat{y}_J - \widehat{\boldsymbol{v}}_{J-1} \cdot \widehat{\boldsymbol{a}}_{J-1}) \end{aligned} \quad (3.9.7)$$

を得る。この際  $J < 2n$  でもかまわないから  $\widehat{\boldsymbol{v}}_0^+ = \widehat{\boldsymbol{v}}_0$  より始めてよい。ただし (3.9.5) の判別には注意を要する。数値計算上では “= 0” となる事は整数値の計算以外ではあり得ないからである。これはたとえば正数  $\varepsilon > 0$  を設定しておいて

$$\|\boldsymbol{r}_J\| / \|\widehat{\boldsymbol{v}}_J\| < \varepsilon \quad (3.9.8)$$

を “ $\boldsymbol{r}_J = \mathbf{0}$ ” と定義してプログラムを組むことで実際的となる。

又  $\widehat{\boldsymbol{V}}_J$  も  $\widehat{\boldsymbol{V}}_J^T$  も行と列が  $J$  と共に増加するので記憶の点で不利であるが、

$$\boldsymbol{E}_J = \widehat{\boldsymbol{V}}_J^T \cdot \widehat{\boldsymbol{V}}_J \quad (3.9.9)$$

$$\boldsymbol{F}_J = \widehat{\boldsymbol{V}}_J^+ \cdot (\widehat{\boldsymbol{V}}_J^+)^T = \boldsymbol{E}_J^+ \quad (3.9.10)$$

とすると (付録 参照)

$$\boldsymbol{E}_J = \boldsymbol{E}_{J-1} + \widehat{\boldsymbol{v}}_J^T \cdot \widehat{\boldsymbol{v}}_J \quad (3.9.11)$$

$$\boldsymbol{F}_J = \boldsymbol{F}_{J-1} + (\delta_J - \boldsymbol{F}_{J-1} \cdot \widehat{\boldsymbol{v}}_J^T) (\delta_J - \boldsymbol{F}_{J-1} \cdot \widehat{\boldsymbol{v}}_J^T)^T \quad (3.9.12)$$

と表わされる。そして

$$\boldsymbol{r}_J = \widehat{\boldsymbol{v}}_J \cdot (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}_J \cdot \boldsymbol{E}_J) \quad (3.9.13)$$

$$\delta_J = \begin{cases} \boldsymbol{r}_J^+ & , \boldsymbol{r}_J \neq \mathbf{0} \\ (1 + \widehat{\boldsymbol{v}}_J \cdot \boldsymbol{F}_{J-1} \cdot \widehat{\boldsymbol{v}}_J^T)^{-1} \cdot \boldsymbol{F}_{J-1} \cdot \widehat{\boldsymbol{v}}_J^T, \boldsymbol{r}_J = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.9.14)$$

と表わされるので  $\boldsymbol{E}_J$ 、 $\boldsymbol{F}_J$ 、 $\boldsymbol{a}_J$  を記憶しておけばよい。これらは夫々  $2n \times 2n$ 、 $2n \times 2n$ 、 $2n \times 1$  の行列であり  $J$  に依存しないので固定した記憶域でよい。又  $\boldsymbol{E}_J$ 、 $\boldsymbol{F}_J$  は対称行列であるから

その分だけ記憶域も少なくてもよい。

又  $\hat{a}_j$  の初期値  $\hat{a}_0$  は

$$\hat{a}_0 = \hat{v}_0^+ \cdot y_0 \quad (3.9.15)$$

とすれば一意的に確定する。

このようにして実際的な逐次推定公式が得られた。

### 3.10 同定のプログラム (D6)

この節で述べた手法を *FORTRAN* プログラムにより作成してオンラインの同定の便をはかり、この論文にのせてある同定例の殆んどはこのプログラム・システムにより計算したものである。具体的なプログラム内容は (D6) に発表されているので、この論文ではその説明を省略した。

### 3.11 まとめ

定常な線形システムの入出力信号の部分的スペクトル成分もやはり元の入出力信号と同じシステムを規定する微分方程式を満足すること、第2章で作成したカスケード・デジタル微分フィルタにより入出力信号の部分的スペクトル成分の任意階の微分信号のサンプル値が得られることを利用してシステムの伝達関数を推定できることを示した。この手法では無定位置システム、無駄時間を含むシステム等にも容易に適用できることを示した。又1入力1出力系では終結式を用いると構造が決定できることについても論じた。そしてこの手法の有効性を示すために1入力1出力系、2入力1出力系の簡単な問題についてシミュレーションをもとに推定を実行し、その数値結果を与えた。



## 第 4 章 実プラントの同定

### 4.1 序

この章では第 3 章で提案した手法を実際の工業プラントの同定に使用した例を与える。最初に火力発電所でのタービン発電機系、次に製紙工場抄紙機の坪量、水分系の、最後に製鉄工場レバシグ・コールドミル系の同定結果を与える。

### 4.2 火力発電所での例

実際の火力発電プラントの操業時のデータに基づく同定に関しては、インパルス応答推定に基づく詳細な結果が鈴木等により発表されている。<sup>(16), (17), (22)</sup>ここで紹介する例も鈴木氏と関西電力(株)総研内田義久氏が関西電力大阪発電所において同定を実施する際に著者がお手伝いをし、そのときいただいた例である。同発電所の 2 号ユニットの構成は次のようである。

ボ イ ラ：石炭だきコントロールサーキュレーション形ドラム式

容量  $500 \text{ ton/hour}$ ，蒸気温度  $538 \text{ }^\circ\text{C}$ ，蒸気圧力  $169 \text{ kg/cm}^2$

タービン発電機：タンデム結合

$60 \text{ Hz}$  定格出力  $156 \text{ MW}$

計 算 機：MELCOM330 制御用計算機

又このユニットにはプラントの起動停止の際に実施する複雑な操作シーケンスをモニタリングするために制御用の計算機 MELCOM330 が据付けられていた。この計算機を用いて 2 つのアナログ入力をほとんど同時に（約  $17 \text{ msec}$  の間隔がある）計測記録することができた。アナログ入力は電圧、電流、空気圧等で計測点より伝送され最終的に電圧の形で適当に増巾され 10 ビットのデジタル値信号に変換されて計算機内メモリにとり込まれる。そのアナログ値の持つ工学単位へは適当な変換を施せばよい。このようにして時間的同时性も良く正確な計測値がデジタル値信号で得られた。

#### 4.2.1 対象システム

同定の対象としてはタービンに供給される水蒸気の流量と発電機出力の間のシステムの特性を考える。火力発電所での主要な機器は水蒸気を発生するボイラ、蒸気の持つエネルギーを回転エネルギーに変換する蒸気タービン、そして回転エネルギーを電気エネルギーに変換する発電機の 3 つである。蒸気タービンと発電機は軸が連結され回転のエネルギーは直接タービンより発電機へ伝送されるようになっている。タービンの発生するパワーすなわち単位時間当りのエネルギーは蒸気の圧力と温度と流量によって定まる。しかしこの 3 つの変数を自由に变化させたのではタービンの製作が困難になるばかりでなく制御を行うのも困難となるので平常の運転時では圧力と温度を一定に保ち（圧力  $169 \text{ kg/cm}^2$ ，温度  $538 \text{ }^\circ\text{C}$ ，再熱温度  $538 \text{ }^\circ\text{C}$ ）蒸気の流量のみでタービ

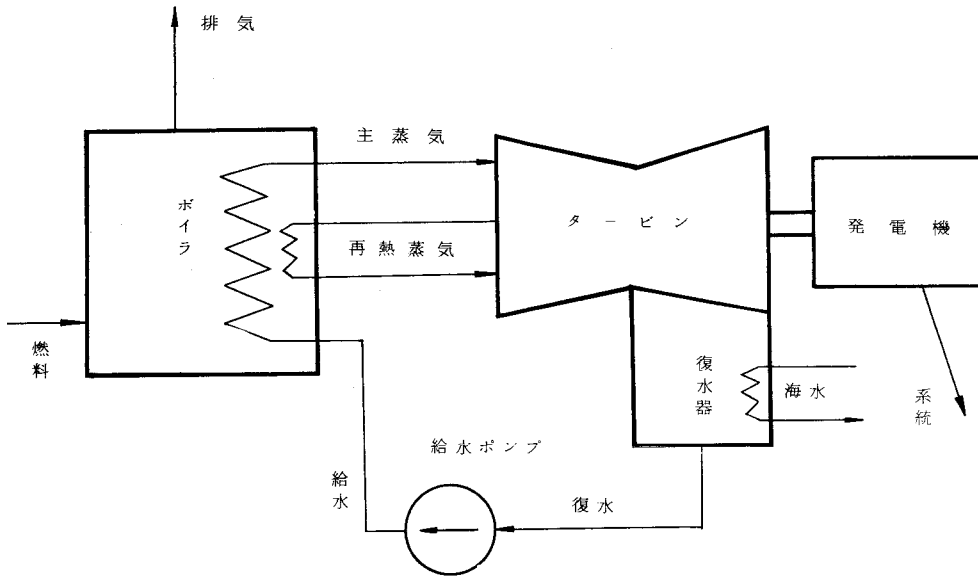


図 4.2.1 火力発電所の機器構成図

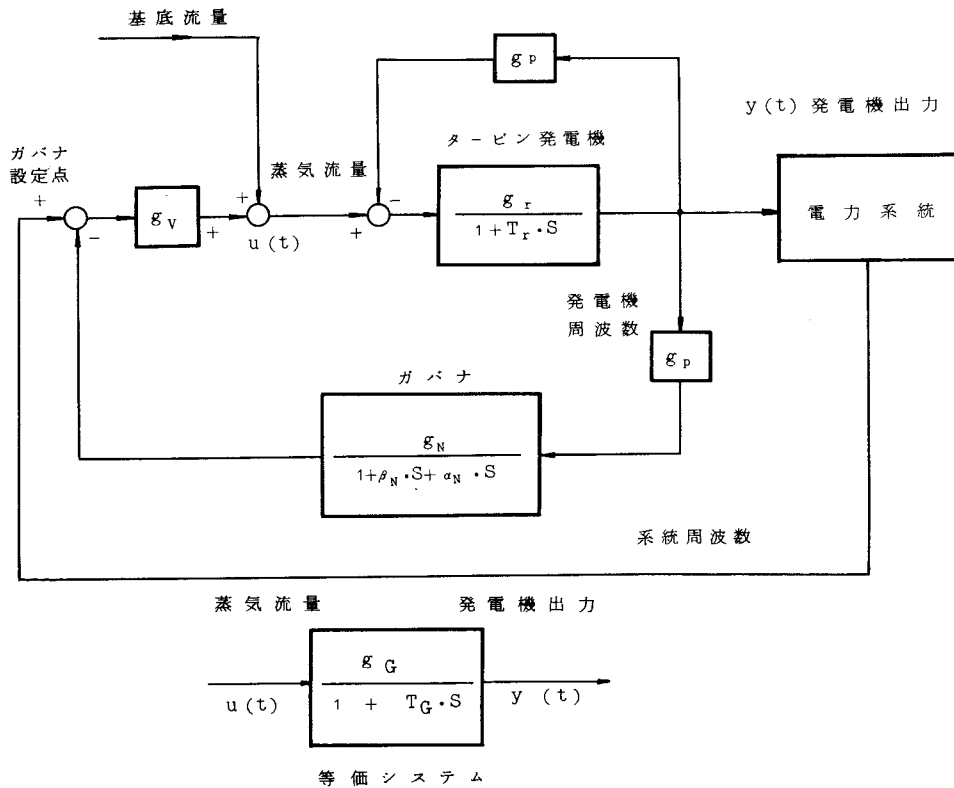


図 4.2.2 タービン発電機とガバナ・システム及びその等価システム

ンの出力が定まるように構成されている。そのため常に一定の蒸気条件（定められた圧力，温度）の水蒸気が発生蒸気の流量に無関係にタービンに供給できるようにボイラが制御される。

ボイラの制御系の概要は第5章で述べるが，要は要求発生電力を指定されるとそれにより燃料流量（石炭および一部重油の混焼）と空気および給水の流量の設定値の基底が作られる（フィードフォワード成分）。そしてさらに発電機出力，蒸気温度等の設定値よりの偏差により燃料量と空気および給水の流量が修正される（フィードバック成分）ようになっている。

次にタービン発電機の動作について簡単に述べておく。タービン回転数は直接発生電力の周波数となるので，常に正確に一定値（ $60\text{ Hz}$  で  $3,600\text{ PRM}$  または  $1,800\text{ PRM}$  等）に保たれるようになっている。ところで発電機の出力は発電機の位相と電力を供給する系統の位相との差により定まってくる。<sup>(38)</sup>すなわち回転数を一定にすると蒸気流量と発電機出力の間には平衡状態が存在する。これは次のように考えればよい。蒸気流量を増すとわずかに回転数が増し，同期発電機の界磁を流れる電流が増大する。そのため反作用として回転数が減少する。そのために平衡状態ができるわけである。

そこでタービン回転数と発電機出力を設定値に保つように蒸気流量を操作する制御系が必要になるが，これがいわゆるガバナ・システムである。現在タービンの回転数等は12ビットのデジタル式カウンタにより読み込まれて制御演算は電子式で行ない，蒸気流量調整弁（ガバナ弁）は油圧式制御弁を用いるような電子式油圧ガバナ・システム（*Electro-Hydrolyic Governor*）が用いられている。<sup>(37)</sup>ガバナシステムを動作させれば，ガバナの発電機出力の設定を変化させることで蒸気流量が変化し従って発生電力が変化ししかも回転数は一定値に保たれている。このような状態での蒸気流量と発生電力の特性はガバナ・フリー特性と呼ばれる。平常の運転状態ではすべてガバナ・フリーの状態であるので，この時の特性がすなわちタービン発電機の特性として役立つわけである。

図4.2.2はタービン発電機およびガバナの特性のブロック図である。この図から，ガバナ・フリー状態での蒸気流量  $u(t)\text{ ton/ Hour}$  と発電機出力  $y(t)\text{ KW}$  の関係は

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{g_G}{1 + T_G \cdot S} \cdot \mathcal{L}\{u(t)\} \quad (4.2.1)$$

と等価的に表わされる。ここで

$$T_G = \frac{T_T}{1 + g_T \cdot g_P}, \quad g_G = g_T \cdot (1 + g_T \cdot g_B) \quad (4.2.2)$$

である。 $T_G$  と  $g_G$  は蒸気流量と発電機出力の間のみかけ上の時定数とゲインとなる。

#### 4.2.2 計測と同定の結果

図 4.2.3 は昭和45年3月27日に  $T_s=5$ 秒および  $T_s=10$  秒として計測した例である。この図は計算機を用いて収集した10ビットのデジタル値信号を工学単位に変換して図示したものである。これを  $M=3$  ,  $m=4$  ,  $IEO=1$  のカスケード微分フィルタを用いて  $\hat{U}_j^{(0)}$ ,  $\hat{Y}_j^{(0)}$ ,  $\hat{Y}_j^{(1)}$  を計算したものが夫々図 4.2.4 と図 4.2.5 の上段の図である。 $g_G, T_G$  の推定値  $g_G, \hat{T}_G$  を描ったのが、図 4.2.4 と図 4.2.5 の下段の図である。両方の推定値より

$$g_G \doteq 0.37 MW / (Ton / Hour) \quad (4.2.3)$$

$$T_G \doteq 8 \sim 12 Sec$$

という結果が得られる。

ただ蒸気流量と発電機出力の絶対値が(4.2.1)に従っているとしたが、これは大分無理があったかもしれない。むしろ定格の近傍での平衡のまわりで(4.2.1)がなり立つとすべきものであったかもしれない。しかし(4.2.3)の値は発電所の過去の経験データと良く合う値であった。<sup>(40)</sup>

この手法ではサンプル周期  $T_s$  がシステムの時定数  $T_G$  と同程度であっても無理なく推定値を得ることができる。このような場合にパルス伝達関数を求めて逆算すると3.2で述べたように大きな誤差を生じてしまう。この点にもこの論文の提案手法の利点があると考えられる。

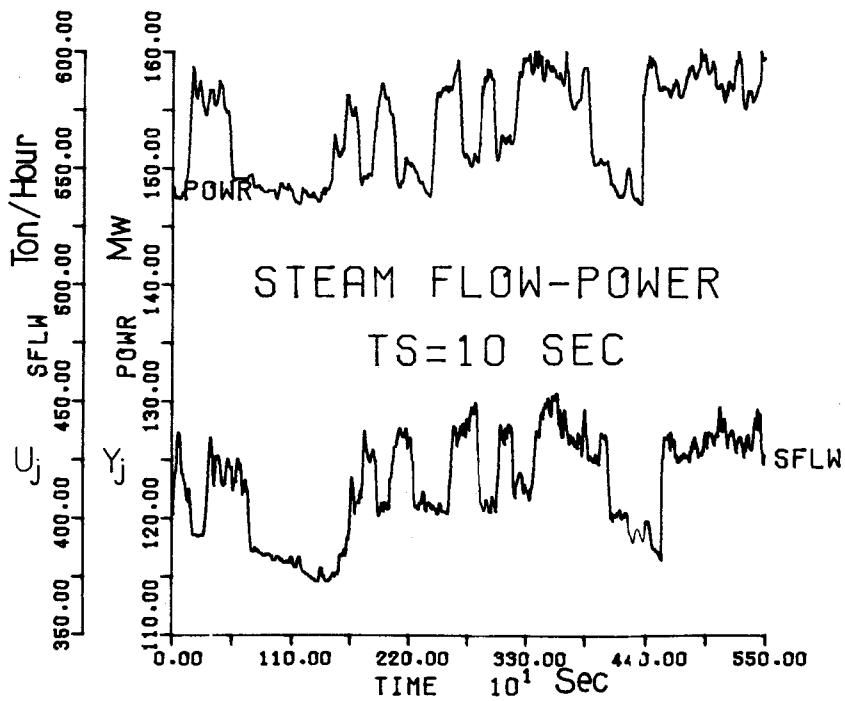
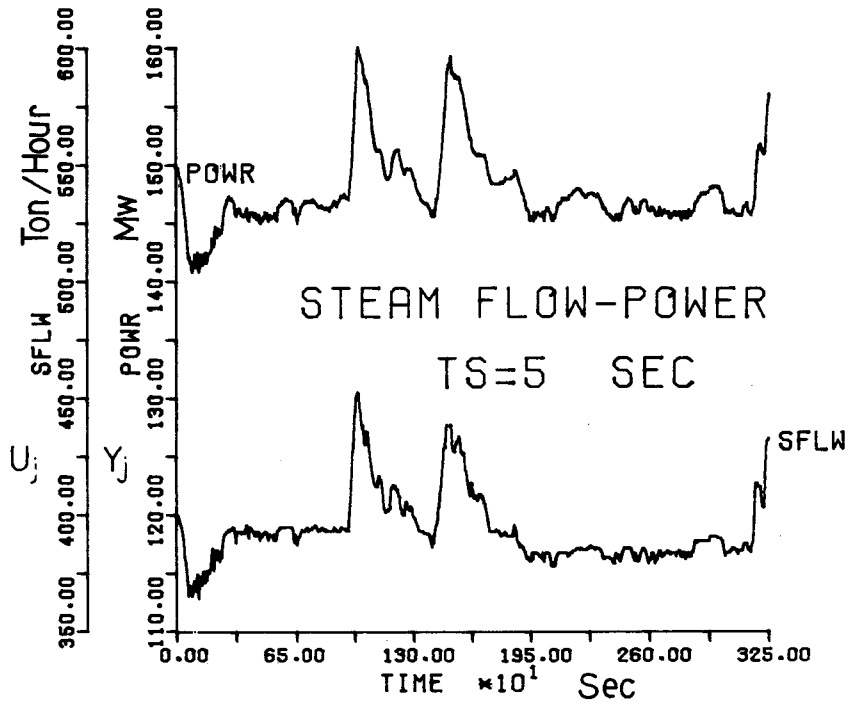
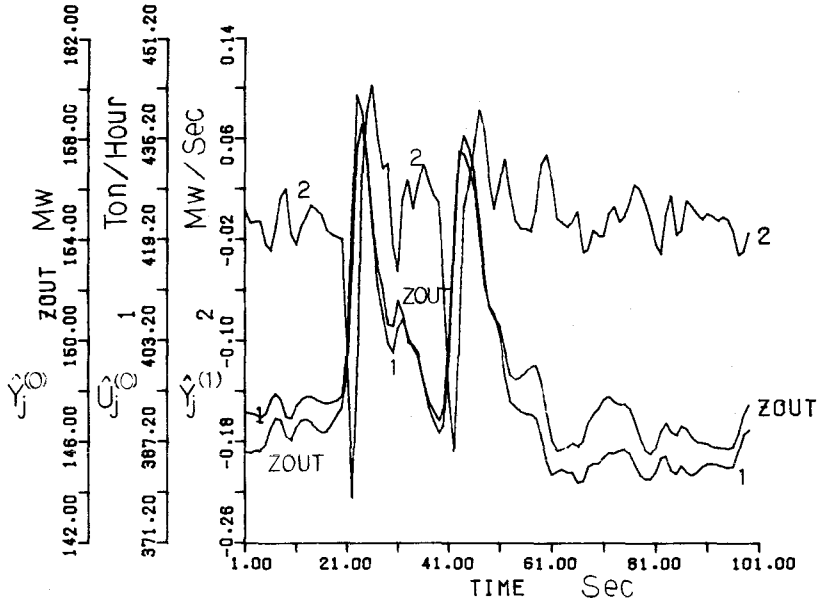


図 4. 2. 3 蒸気流量と発電機出力の計測値

STEAM FLOW-POWER TS=5 SEC



STEAM FLOW-POWER TS=5 SEC

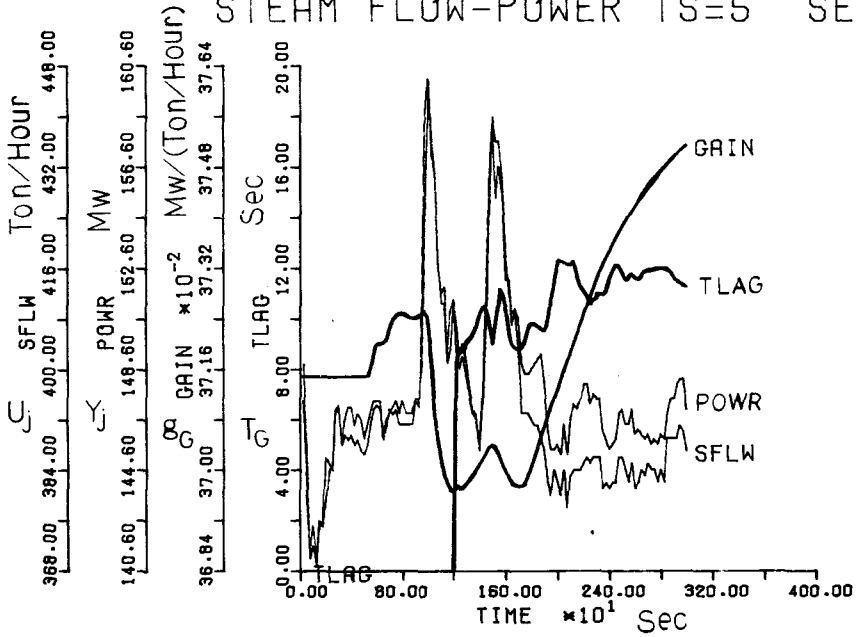


図 4.2.4  $T_s = 5$  秒のときの微分信号と推定結果

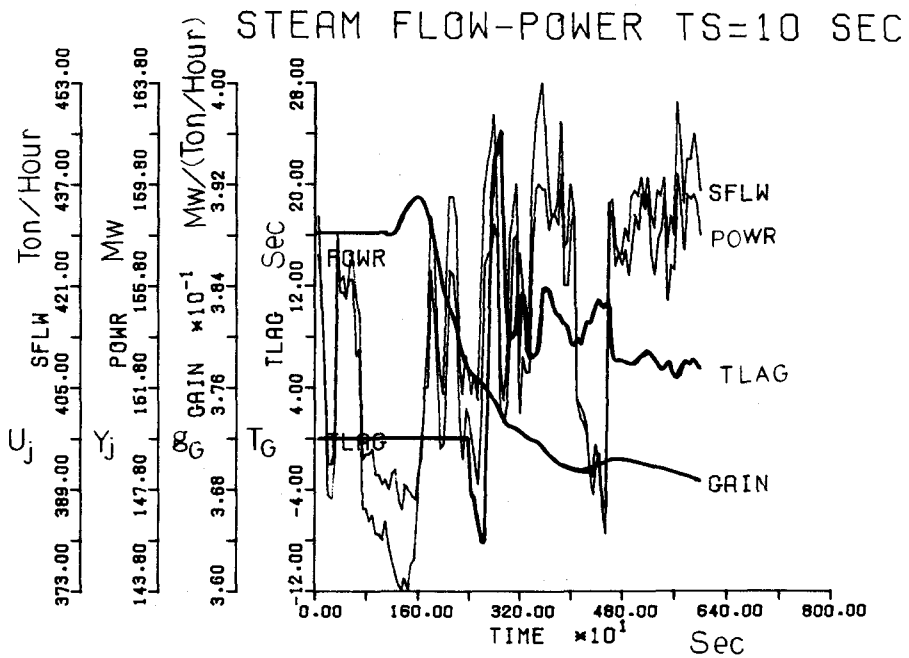
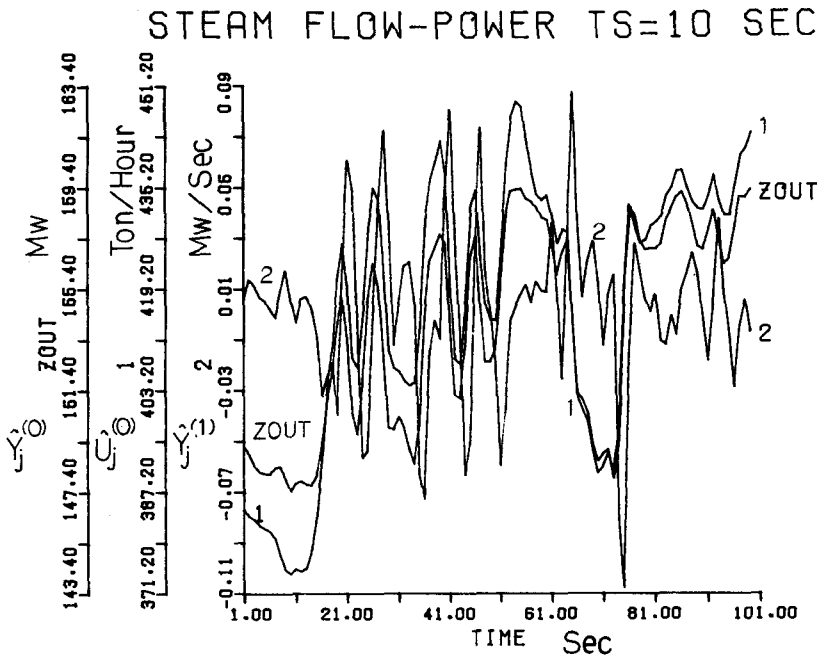


図 4.2.5  $T_s = 10$  秒のときの微分信号と推定結果

### 4.3 抄紙プラントでの例 (F3), (F4)

製紙工業における最終のプロセスが抄紙プロセスである。すなわちパルプより紙をつくる工程でありその意味で最も重要なものといえる。このためには抄紙機が用いられる。紙の質は単位面積当りのパルプ等の固形成分の重さ(坪量: *Basis Weight*)と, 単位面積当りの水分の重量% (水分率: *Moisture*) により決定される。坪量は種口弁により, 水分は長大な乾燥機の水蒸気の圧力により制御される。この系は1分前後の極めて長い無駄時間を持つことが特徴である。三菱製紙(株)八戸工場の抄紙機の制御用計算機 *MELOM350-30F* を用いた坪量・水分率を中心とした *DDC* 制御システムを作る際の前調査として坪量系, 水分率系の同定を実施した。ここに記したものはそれを再編成したものである。

#### 4.3.1 対象システム

図 4.3.1 は抄紙機のプロセス概念図を描いたものである。この図に沿ってその機能構造を簡単に説明しておく。白液タンクには白液と呼ばれるパルプと水の混合物が貯えられている。白液はポンプによりストックインレットに種口弁を通して供給される。ストックインレット内の白液はスライシギャップの間をくぐり抜けて回転するワイヤの上へ平らにのせられる。これが紙の原形となる。ワイヤの上を通った後蒸気乾燥機のローラの間を通過して水分が蒸発させられる。ワイヤよりこぼれ落ちた白液は更にポンプによりストックインレットへ戻される。乾燥機は2ブロックありその中間で種々の薬液が塗工され, さらに乾燥されて最後に巻きとられてゆく。中間および最終出口には坪量と水分率を計測するための **Basis Weight Meter** と水分率計が設置されている。そして坪量は種口弁の開度により, 水分率は蒸気圧により制御される。従って坪量では種口弁の変化が最終出口での坪量の計測値に影響するまでに, 走行する紙の移動する時間(走行時間)だけの無駄時間が生ずる。これは紙の速度等に影響され, 紙の速度(抄紙速度)はたびたび変更されるのでこの無駄時間も変動している。水分率の方もドライヤが長い距離に分布しているため等価的にやはり大きな無駄時間を含むことになる。

#### 4.3.2 坪量系の同定

同定を実施する必要のあった時期は制御用計算機を設置する以前であったので, 計算機を用いたデータ収集を実施することはできなかった。従ってここで使用したデータはアナログ式のペンレコーダにより描かれた図形を写真に撮り拡大しサンプリングしたものでありサンプル周期は  $T_s = 0.026316$  分である。坪量の操作は種口弁によって行なわれる。この弁は電動式の調整弁となっており常に一定の速度で開閉される。0~100%の開閉に約5.54分を要するが, このデータを得た時のように約1%の変化に要する時間は約0.0923分であり  $T_s$  と殆んどかわらないのでほぼステップ状に値を変化させることができる。従って動特性の試験としてはステップ応答を求めることがもつとも容易なことであった。図 4.3.2 に与えた6つの例は表 4.3.1 のような条件



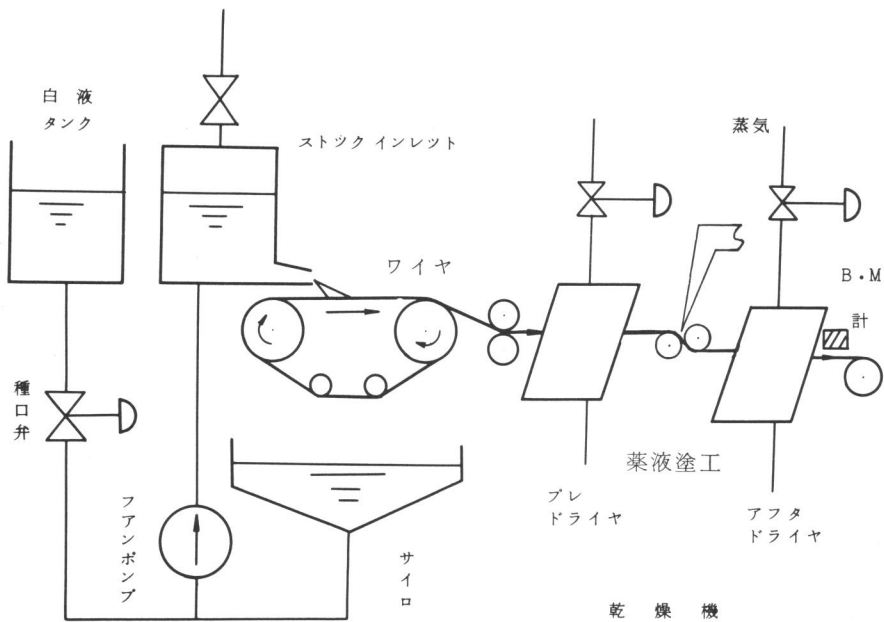
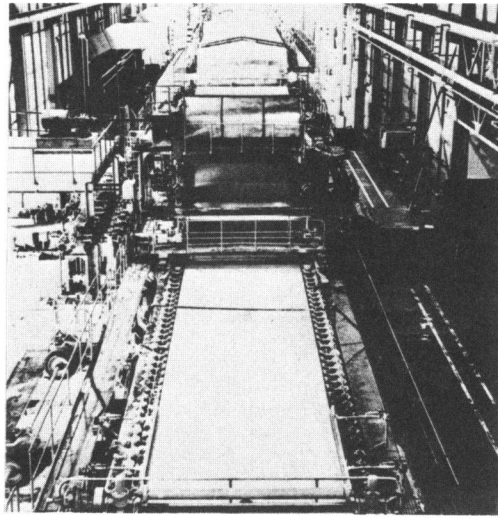


図 4.3.1 抄紙機の写真および概観図

で採取したものである。これらのステップ応答を眺めてみると先に説明したように明らかな無駄時間が含まれていることがわかる。従って線形近似する場合においても(3.7)に述べたような系として表現する必要があることがわかる。また第1次近似としては無駄時間を含む1次遅れとして表現するのが妥当であろう。そこで種口弁のバルブ開度の基準値よりの値を  $u(t)\%$  , 坪量の基準値よりの値を  $y(t) g/cm^2$  とする(基準値については表 4.3.1を参照)とき

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{g \cdot e^{-T_D \cdot S}}{1 + T_L \cdot S} \cdot \mathcal{L}\{u(t)\} \quad (4.3.1)$$

で表わすことにする。<sup>(43)</sup>そこで  $u$ ,  $y$  の観測サンプル値を  $u_j, y_j$  としたとき, これをカスケード微分フィルタ  $M^{(k)}(Z)$  に通して得られた信号を  $\hat{U}_j^{(k)}, \hat{Y}_j^{(k)}$  とすれば

$$\hat{Y}_j^{(0)} = g \cdot \hat{U}_{j-j_D}^{(0)} + T_L \hat{Y}_j^{(1)} \quad (4.3.2)$$

ここで

$$j_D = [T_D / T_S] \quad (4.3.3)$$

となる。

カスケード微分フィルタとしては  $m=8$ ,  $IEO=0$  の場合を用いた。図 4.3.3 は仮に  $T_D=1$  分として  $\hat{Y}_j^{(0)}, U_{j-j_D}^{(0)}, -\hat{Y}_j^{(1)}$  を描いたものである。しかしこの図からわかるようにおよそ周期  $20 \cdot T_S$  分の振動が坪量の変化の中に現われている。そこで, この超低域単一スペクトル成分を 3.8 に述べたようなノッチ・フィルタを前置して取り除くことにした。図 4.3.4 は 3.8 に述べたノッチ・フィルタで  $L=10$  としたものをを用いた場合の微分値を描いたものである。こうするとほぼ大きな雑音成分は取り除かれたと考えるもよい。このようなピーク状のスペクトルを持つ雑音はシステム内部より発生するものであろう。たとえば回転するワイヤの存在等はこの種の点状スペクトルの雑音発生に寄与していると思われる。

このような前置フィルタを用いたカスケード・デジタル微分フィルタを用いて推定した  $\hat{g}$ ,  $\hat{T}_L$  を  $T_D$  を色々変えた場合の表 4.3.1 に示した。又図 4.3.5 には各ケースに対して  $\hat{g}$ ,  $\hat{T}_L$  を描いた。 $\hat{g}$  は  $\hat{T}_D$  の値にあまり影響されないが,  $\hat{T}_L$  は  $T_D + \hat{T}_L$  が一定になる傾向があるのがわかる。これは

$$\frac{g}{1 + T_L \cdot S} e^{-(T_D + \Delta T_D) S} \doteq \frac{g}{1 + (T_L + \Delta T_D) S} e^{-T_D \cdot S} \quad (4.3.4)$$

という関係のあることから理解できる。

推定値に対する評価をしておく。この例ではステップ応答が容易に得られるので, フィールドにおいてはこのステップ応答にグラフ  $g(1 - e^{-t/T_L})$  をあてはめて,  $g$  と  $T_L$  を求めている。 $T_D$  の値は目視によって求めている。図 4.3.5 ~ 4.3.6 にはこのようにしてフィールドで求めた値を併記したが, これはここで求めた値と良く一致している。

### 4.3.3 水分系の同定

図 4.3.7 は抄紙機の系統図である。ドライヤーは 6 つの群に分れていて夫々別々に操作できるようになっている。1 ~ 3 群のドライヤーは前段ドライヤー, 4 ~ 6 群のドライヤーは後段ドライヤーといわれ, その間に薬液を塗工する部分が設けられている。最終段である第

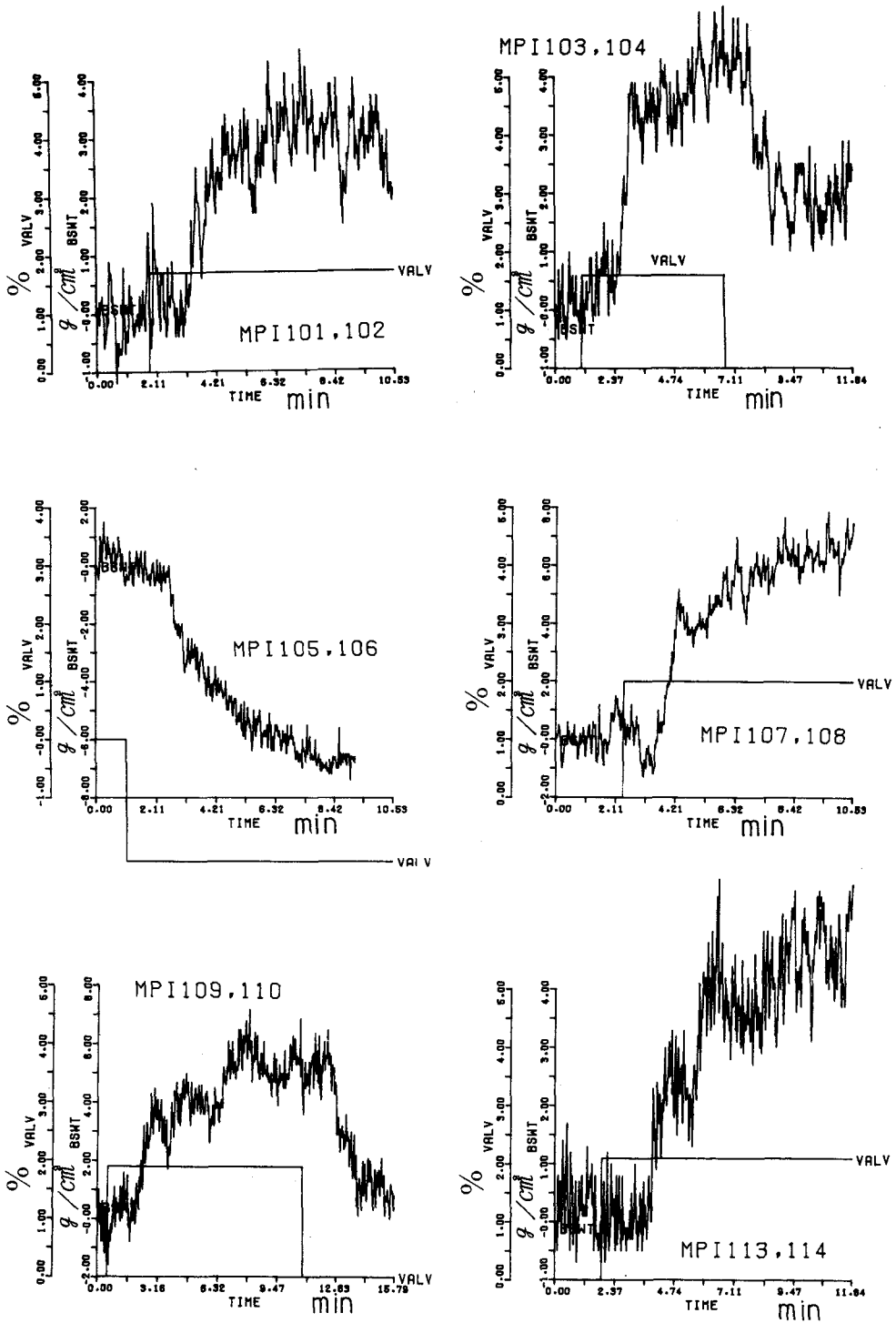


図 4.3.2 種口弁のステップ変化に対する秤量の変化

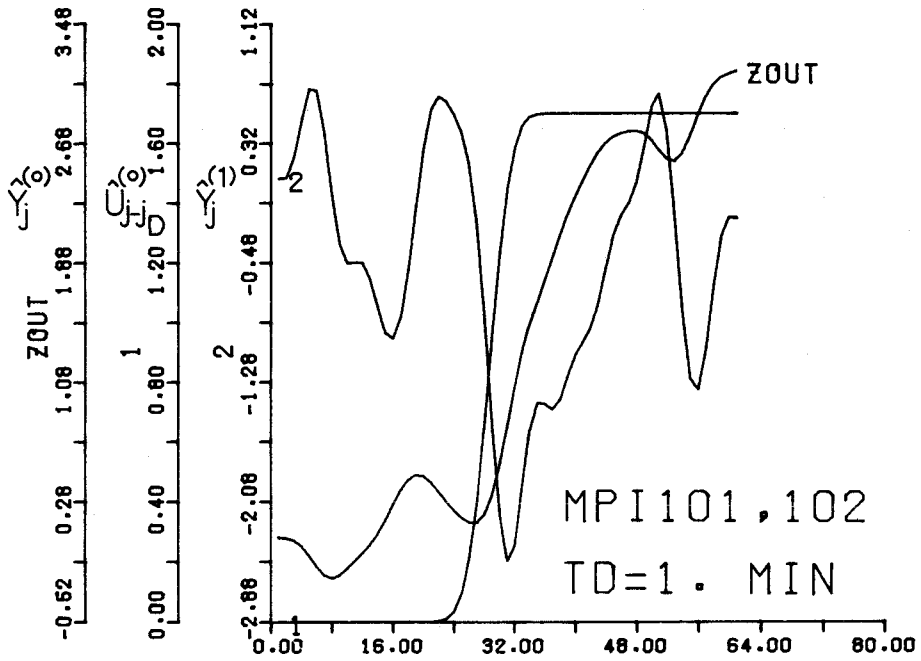


図 4. 3. 3 カスケード微分フィルタだけによる微分値

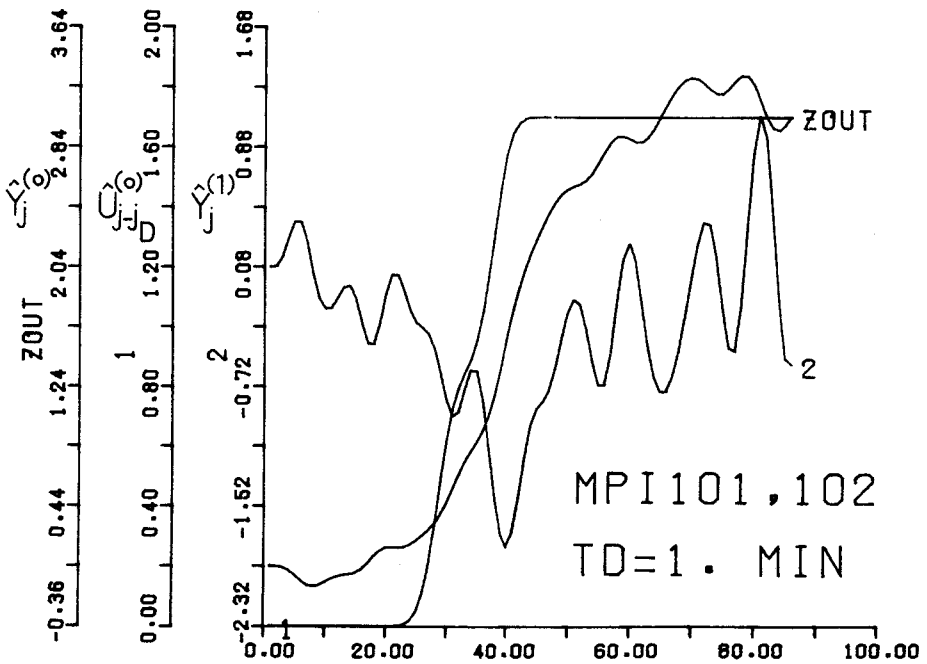


図 4. 3. 4 前置ノッチフィルタを併用したときの微分値

ケース	上段 $\hat{g}$					下段 $\hat{T}_L$			
	$\hat{T}_D=0.6$	0.8	1.0	1.2	1.4	坪量	速度	蒸気流量	弁開度
101	1.63	1.66	1.71	1.80	1.76	55.	580.	57.5	64.85
102	0.54	0.50	0.61	0.68	0.37				
103	2.71	2.67	2.62	2.49	2.50	55.	560.	55.0	63.4
104	1.34	1.16	1.00	0.51	0.47				
105	3.01	3.02	3.02	2.96	3.01	78.	610.	43.0	73.5
106	1.74	1.62	1.50	1.24	1.19				
107	2.81	2.89	2.92	2.90	2.89	101.	570.	48.0	77.75
108	0.94	0.95	0.88	0.58	0.55				
109	2.30	2.31	2.32	2.30	2.35	124.	460.	35.0	103.0
110	0.80	0.67	0.61	0.45	0.41				
113	1.55	1.64	1.71	1.70	1.77	124.	460.	37.0	79.5
114	0.64	0.75	0.85	0.96	0.76				
工学単位 $\hat{g}$ : g/cm <sup>2</sup> .% $\hat{T}_L, \hat{T}_D$ : min						g/cm <sup>2</sup>	m/min	m <sup>3</sup> /min	%

表 4.3.1 推定値  $T_D, g, T_L$  の値 (坪量系)

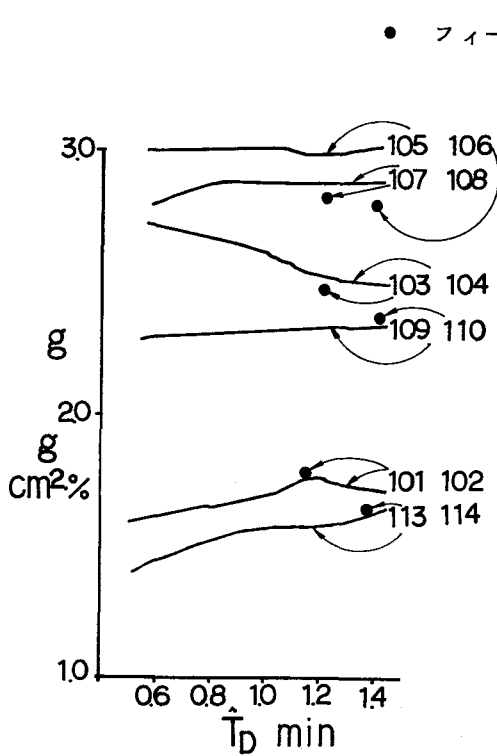


図 4.3.5  $\hat{g}$  に対する  $\hat{T}_D$  の影響

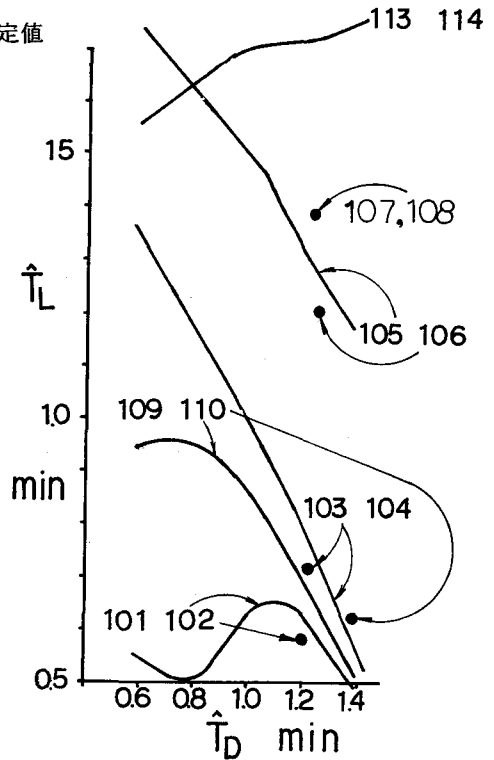


図 4.3.6  $\hat{T}_L$  に対する  $\hat{T}_D$  の影響

6群ドライヤーの蒸気圧を調整して水分率を制御することができる。

あきらかなようにドライヤーは一種の熱交換器である。約  $3 \text{ kg/cm}^2$  程度の圧力で  $150^\circ\text{C} \sim 220^\circ\text{C}$  に過熱された蒸気はローラの内部を通って飽和蒸気となり潜熱を失って水分を増し、しめり蒸気、あるいは一部飽和にないしは冷却水となって排出する。この際紙の乾燥に用いられる熱量はほぼ潜熱が大部分を占めている。すなわちローラの中では蒸気は殆んど飽和状態にあると考えられる。ところでローラから紙に伝達される熱流の速度は、紙の温度、スピードと共に蒸気の温度等から決定される。蒸気が飽和状態にあると考えれば温度は飽和温度であり、それはそのときの蒸気の圧力（飽和蒸気圧）で決定される。すなわち水分率の制御は蒸気の圧力の調整により達成される。蒸気圧は弁の開度で調整され、この為の圧力制御系が付けられている。

ここに与えた例は三菱製紙八戸工場において水分率の制御を DDC により達成することを実施するに際し 6 群蒸気圧・水分率系の動特性の把握が必要となり同定を行った時の結果を整理したものである。

図 4.3.8 は 1～5 群の蒸気圧を一定に保ち、坪量は  $113 \text{ g/cm}^2$  に設定し、紙の速度（抄速）は  $503 \text{ m/Min}$  として 6 群蒸気圧を  $1.5 \text{ kg/cm}^2$  から  $1.0 \text{ kg/cm}^2$  に圧力の設定値を変化させた場合の蒸気圧および水分率の変化をペンレコーダにより記録したものの一部である。同定を実施したのは計算機導入前であったのでこのようなペンレコーダによる記録を写真により引伸ばし方眼紙に読み取りこれらのデータをデジタル化し同定を実施した。

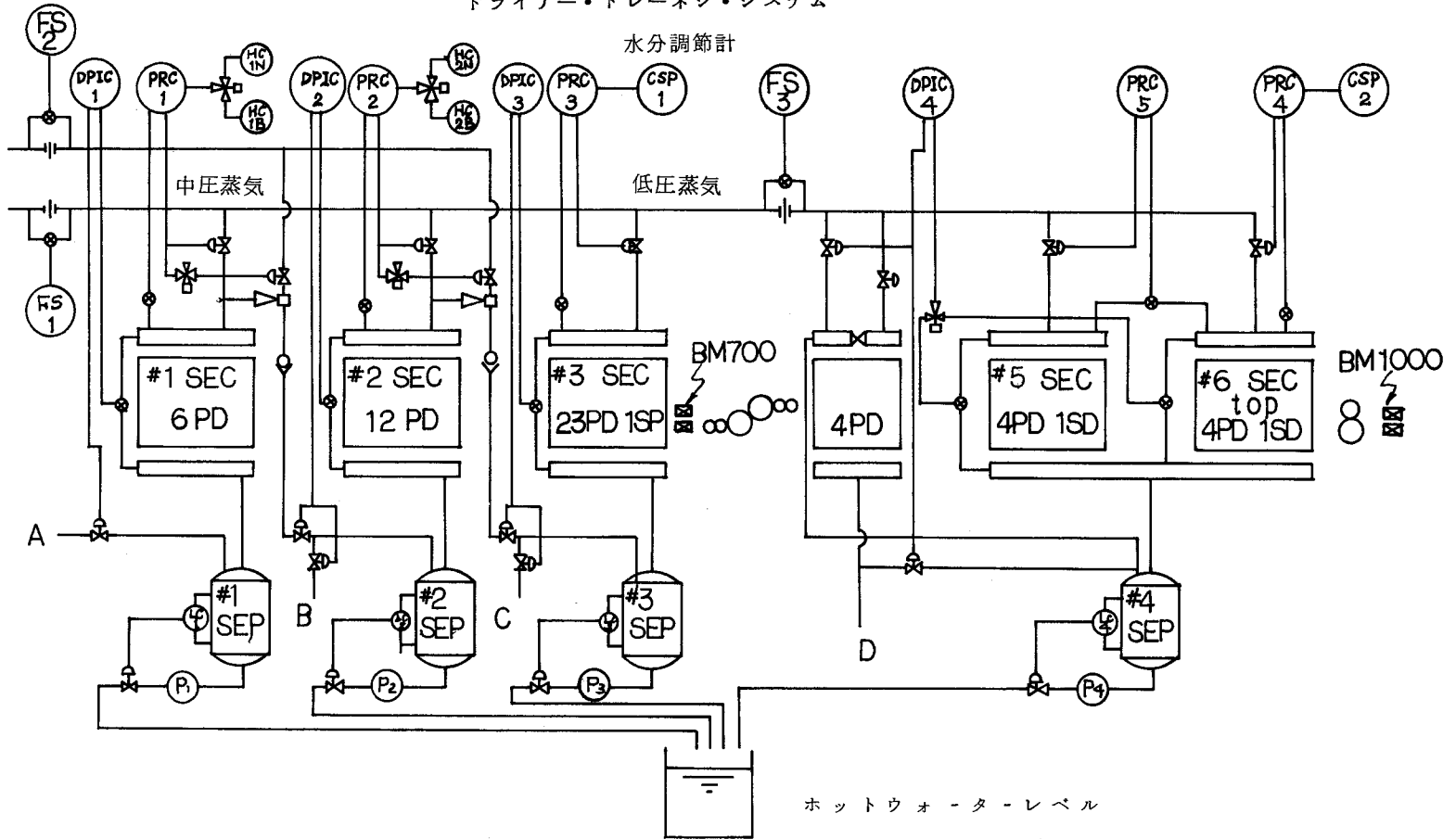
蒸気圧を  $u(t)$  水分率を  $y(t)$  とすると

$$\{y(t)\} = \frac{g \cdot e^{-T_D \cdot S}}{1 + T_L \cdot S} \cdot \{u(t)\} \quad (4.3.8)$$

が成立すると仮定する。

カスケード微分フィルタ  $\hat{D}_M^{(k)}(z)$  として  $m=20, IEO=0, M=1$  を選び、サンプル周期は  $T_S=0.053 \text{ min}$  とした。表 4.3.3 には同定を実施した時の条件と推定結果を表にしたものである。図 4.3.9 は推定の過程を描いたものであり  $\hat{u}_j, \hat{y}_j$  と共に推定値  $\hat{g}, \hat{T}_L$  を描いたもので表の 11, 12 のケースで、夫々  $\hat{T}_D=0.5, 0.7 \text{ min}$  とした場合である。 $\hat{T}_D$  をどこに選ぶかはむずかしい問題だが、 $\hat{g}_j, \hat{T}_L, J$  等の変化の少ない所を選ぶのが一つの方法である。図 4.3.10 には  $T_D$  と  $T_L$  の関係を描いてみたが、ほぼ各ケース直線にのり  $\hat{T}_D$  と  $\hat{T}_L$  を明確に分離することの困難なことを示している。

ドライヤー・ドレーネジ・システム



低圧蒸気 3Kg/cm 150°C  
 中圧蒸気 3Kg/cm 220°C

図 4.3.7 水分系の系統図

$\hat{T}_L, \hat{T}_D, \hat{g}$  は抄速, 坪量等により変化する。抄速, 坪量, 水分率の目標設定値は紙の等級, 製造速度におけるもので, 夫々 $\hat{g}$ の値は経験上の値(その値は製品を品質管理することで重要なので記録データの平衡点をもとに計算されている)とほぼ一致している。また $\hat{T}_L, \hat{T}_D$ に関しては水分制御系(MELCOM350-30FによるDDCシステム)に用いて良い結果を得ているが, 絶対値の正しいと思われる値は不明である。

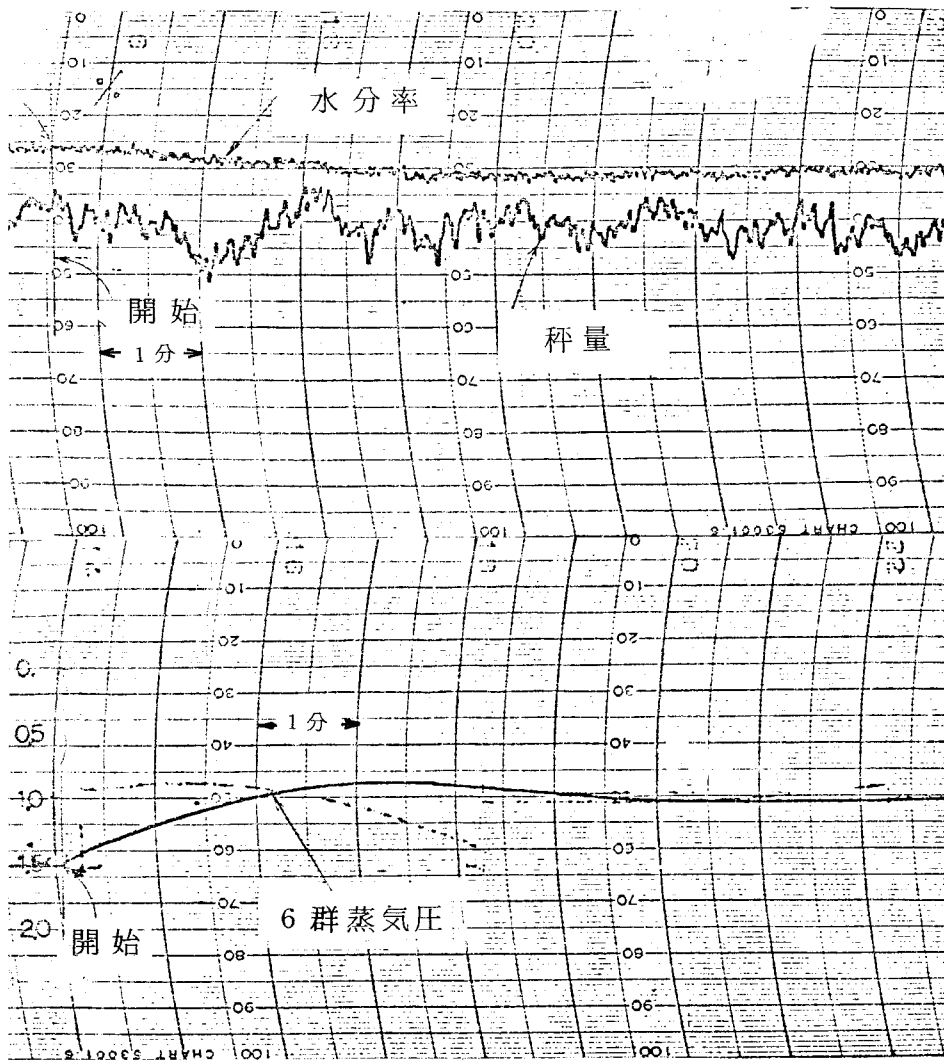


図 4. 3. 8 蒸気圧の変化に対する水分率の変化



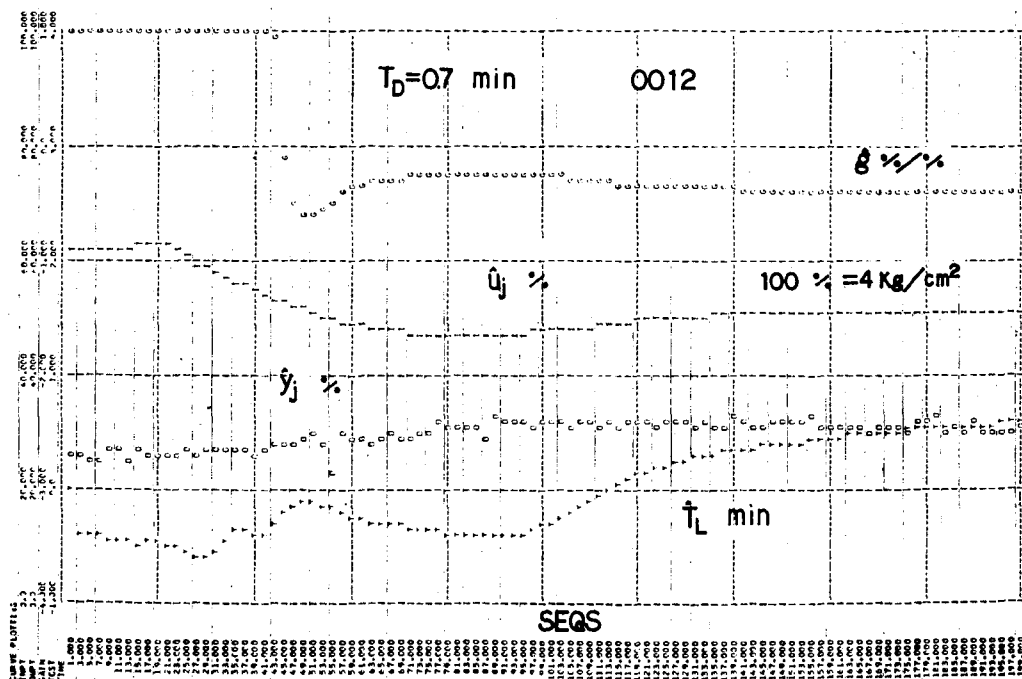
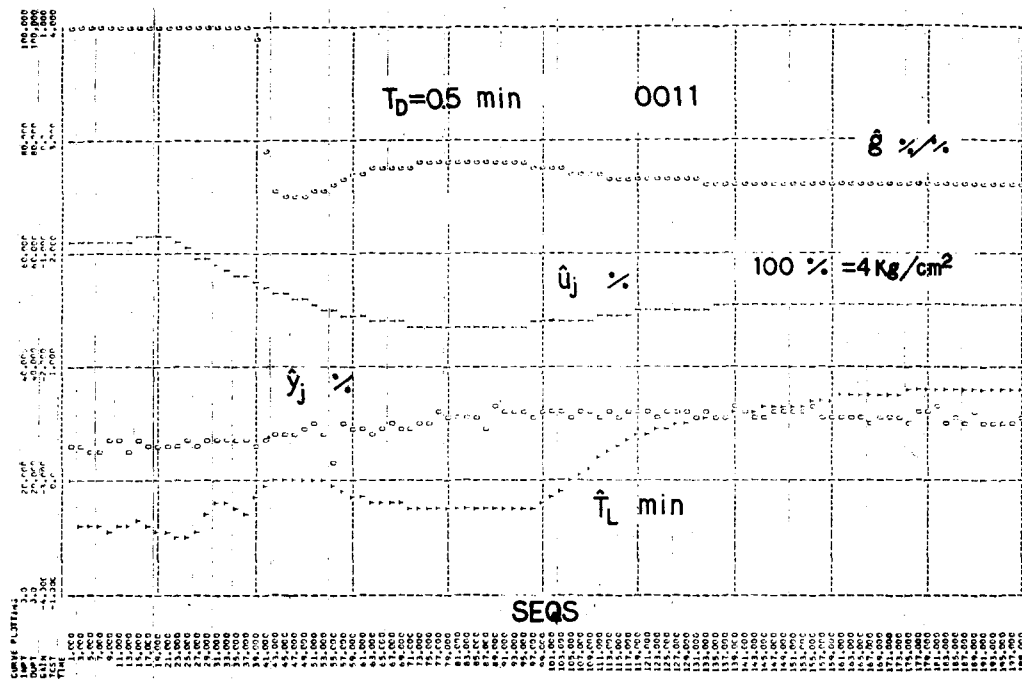


図 4. 3. 9 抄紙機水分系に対する  $\hat{g}$ ,  $\hat{t}_L$  の推定の過程

ケース	坪量	圧力		速度	$\hat{T}_D$	$\hat{g}$	$\hat{T}_L$
		前	後				
0009	113	1.5	1.0	503	0.0	0.4	1.28
0010	"	"	"	"	0.3	0.4	1.00
0011	"	"	"	"	0.5	0.4	0.80
0012	"	"	"	"	0.7	0.4	0.56
0013	101	2.0	1.0	585	0.0	0.36	1.71
0014	"	1.0	2.0	"	0.0	0.32	1.1
0015	"	"	"	"	0.3	0.36	0.95
0016	"	"	"	"	0.5	0.36	0.8
単位	$\frac{g}{cm^2}$	$\frac{Kg}{cm^2}$	$\frac{Kg}{cm^2}$	$\frac{m}{min}$	min	%/%	min

図 4. 3. 3 同定の条件と推定値 (水分系)

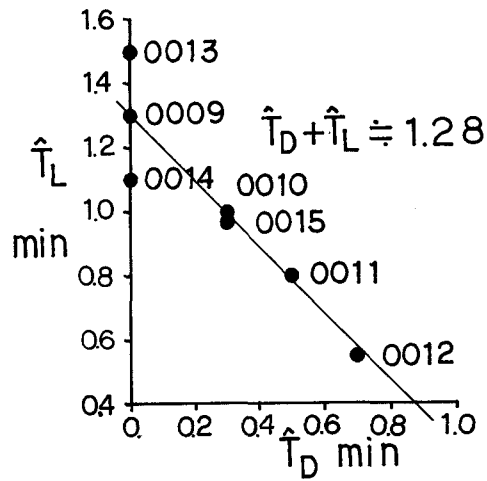


図 4. 3. 10  $\hat{T}_L$  に対する  $\hat{T}_D$  の影響

#### 4.4 圧延プラントでの例 (E13), (F14)

連続形圧延機の中で比較的簡単な構造を持っているレバーシング・コールド・ミルの圧下影響係数の推定の結果を述べる。このシステムは2入力1出力系であり各入力の変化の出力への変化は相当に早く単なる2重回帰分析を行うような場合であるが、雑音の混入、計測システムの遅れ走行時間による無駄時間等から考えて著者の提案した同定法を0次系の場合として扱うと良い推定値が得られることを示す。

##### 4.4.1 対象システム

図4.4.1はレバーシング・コールド・ミルの主要部を一つの固定した側面から眺めたときの概観図であり、左とか右とかはその点に立って(図上)ということにする。一枚の長い板片(ストリップ)は始め左側(又は右側)より右側に巻き取られ途中でミルにより圧延される。巻き取りが終了すると今度は逆に右側より左側に巻き取られつつ圧延される。このようにして何回か往復させることにより所定の厚さに圧延するわけである。

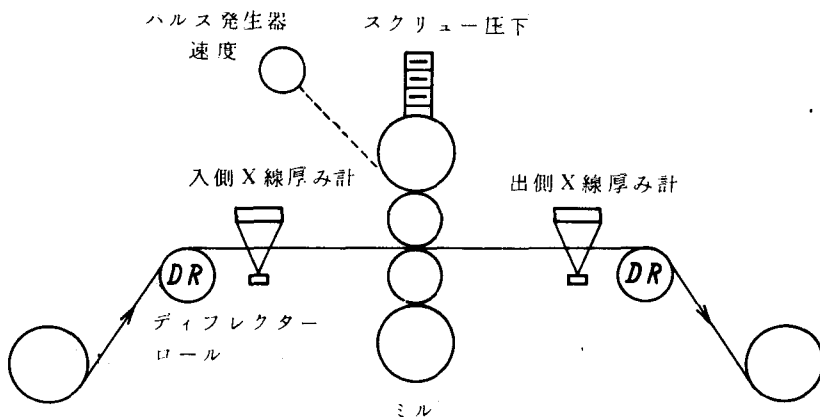


図 4.4.1 レバーシング・コールド・ミルの概観図

左側より右側にストリップが移動しているときは左側を入側(Entry)、右側を出側(Delivery)と呼ぶ。従ってストリップの走向方向により入側、出側は交互に入れ替ることになる。

又ミルの回転速度が計測でき、これによりミルを通過するストリップの速度を求めることが可能である。又右側左側共にミルより一定距離れた点にX線厚み計が設置され、板厚を計測することができる。これらの厚み計はストリップの走行方向により入側、出側と形容される。又ミルのスクリーユの圧下位置を計測することができる。

#### 4.4.2 レバーシング・コールド・ミルの数学モデル

図4.4.2は図4.4.1に示した各装置のモデルを左側より右側にストリップが走行している状態を示したものである。

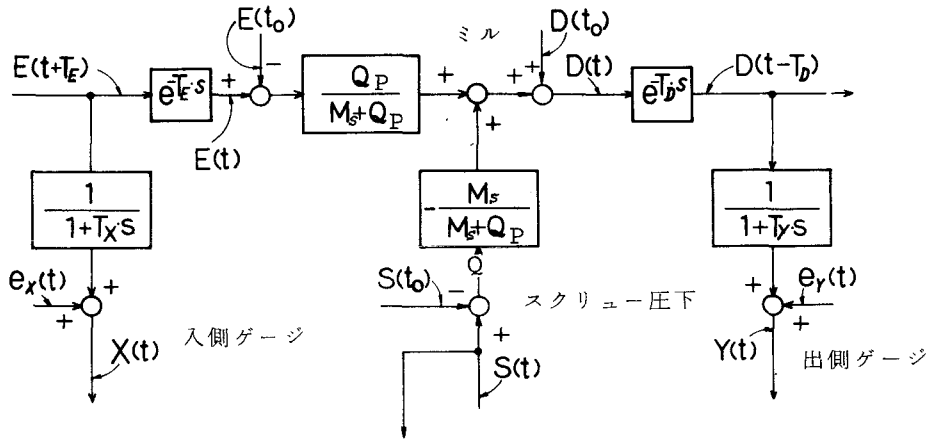


図4.4.2 レバーシング・コールド・ミルのブロック図

この図の中で用いられている記号は次のようになっている。ただし他の章節で既に定義したものと重複するものもあるが、ここでの記号はこのレバーシング・コールド・ミルに関する部分にのみ使用するものとする。

$Q_P$ :	板片の塑性係数	$TON/\mu$
$M_S$ :	ミル・スプリング定数	$TON/\mu$
$T_E$ :	入側ストリップ走行時間 (X線厚み計よりミルまでの時間)	$msec$
$T_D$ :	出側ストリップ走行時間	$msec$
$T_X$ :	入側X線厚み計時定数	$msec$
$T_Y$ :	出側X線厚み計時定数	$msec$
$L_G$ :	下側圧延面 (図4.4.3参照) とスクリュ原点の間隔	$\mu$
$l_G$ :	無負荷時のスプリングの長さ	$\mu$
$E(t)$ :	ミル入側ストリップの厚さ	$\mu$
$D(t)$ :	ミル出側ストリップの厚さ	$\mu$
$S(t)$ :	圧下位置 (スクリュ位置)	$\mu$

$e_X(t)$ :	入側X線厚み計観測雑音	$\mu$
$e_Y(t)$ :	出側X線厚み計観測雑音	$\mu$
$X(t)$ :	入側X線厚み計観測値	$\mu$
$Y(t)$ :	出側X線厚み計観測値	$\mu$
$F(t)$ :	圧延力	$Ton$

このミルの数学モデルを考えるために図 4. 4. 3 のような2種類のバネによる模形を考える。すなわち一つはミル自身であり、もう一つは板片である。ミルは上下2段の圧延ローラとスプリングにより構成されているが、理解を容易にするため図 4. 4. 3 では下端を硬く変形しない平面と考えている。

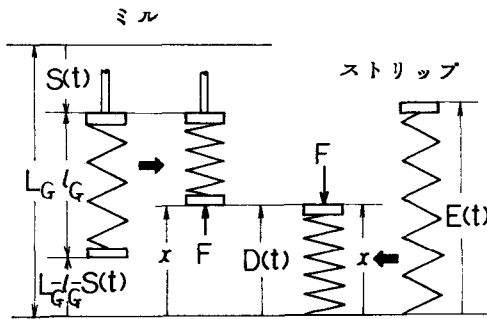


図 4. 4. 3 二つのスプリングによるミルの模形

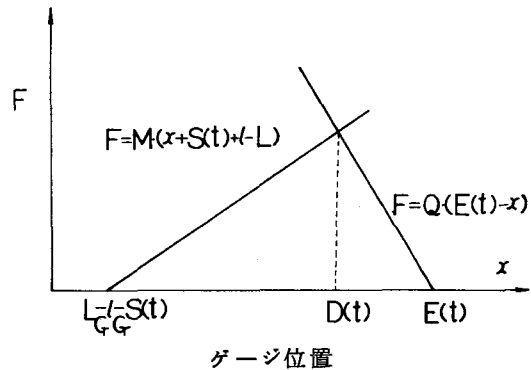


図 4. 4. 4  $E(t)$ ,  $D(t)$ ,  $S(t)$  の間の関係

ミル・スプリングの位置  $S(t)$  が定まったとする。無負荷時の圧延面とスプリングの位置の間隔を  $l_G$  とし、 $S(t)$  の測定原点と下面との間隔を  $L_G$  とする。従って無負荷時の圧延面の間隔は  $L_G - l_G - S(t)$  となる。いま圧延中の板の厚さが  $x$  であれば *Hooke* の法則から

$$F(t) = M_s \{ x - (L_G - l_G - S(t)) \} \quad (4.4.1)$$

と表わされる。

一方板そのものも塑性変形を受けるわけだが、変形の度合は圧延力に比例すると考える。 $E(t)$  の板が圧延面で  $x$  になったとすれば圧延力は

$$F(t) = Q_p \{ E(t) - x \} \quad (4.4.2)$$

となる。(4.4.1) と (4.4.2) で表わされる力が釣合った状態で圧延が行なわれ このときの  $x$  の値が出側板厚  $D(t)$  となる。

図 4.4.4 はそのときの関係を図示したものである。(4.4.1)と(4.4.2)より  $x$  を消去して

$$D(t) = \frac{Q_P}{M_S + Q_P} \cdot E(t) - \frac{M_S}{M_S + Q_P} \cdot S(t) - \frac{M_S}{M_S + Q_P} \cdot (L_G - l_G) \quad (4.4.3)$$

と表わされる。そこで

$$dD = \left( \frac{\partial D}{\partial E} \right)_S \alpha E + \left( \frac{\partial D}{\partial S} \right)_E \alpha S \quad (4.4.4)$$

と書けることがわかる。

$$A_o = \left( \frac{\partial D}{\partial E} \right)_S, \quad B_o = \left( \frac{\partial D}{\partial S} \right)_E \quad (4.4.5)$$

とすると(4.4.4)より

$$\alpha D = A_o \cdot dE + B_o \cdot dS \quad (4.4.6)$$

となる。図 4.4.3 で考えたモデルが正しければ

$$A_o = \frac{Q_P}{M_S + Q_P}, \quad B_o = -\frac{M_S}{M_S + Q_P} \quad (4.4.7)$$

となり

$$A_o - B_o = 1 \quad (4.4.8)$$

となる。<sup>(44)</sup> $B_o$  は圧下影響係数という。

#### 4.4.3 観測システムの補償

図 4.4.2 からわかるように  $E(t)$  と  $D(t)$  を直接観測することはできない。すなわち X 線厚み計よりの観測値  $X(t)$ ,  $Y(t)$  は夫々

$$\mathcal{L}\{X(t)\} = \frac{1}{1 + T_X \cdot S} \cdot e^{T_E \cdot S} \cdot \mathcal{L}\{E(t)\} + \mathcal{L}\{e_{X(t)}\} \quad (4.4.9)$$

$$\mathcal{L}\{Y(t)\} = \frac{1}{1 + T_Y \cdot S} \cdot e^{-T_D \cdot S} \cdot \mathcal{L}\{D(t)\} + \mathcal{L}\{e_{Y(t)}\} \quad (4.4.10)$$

で表わされる。 $T_X$  と  $T_Y$  は  $200 \sim 300 \text{ msec}$ ,  $T_E$  と  $T_D$  は  $200 \text{ msec}$  前後であるから無駄時間および一次遅れの効果を無視することはできない。

また得られるのは  $X(t)$  と  $Y(t)$  のサンプル周期  $T_s$  ( $= 10 \text{ msec}$  程度) のサンプル値  $X_j, Y_j$  である。そこで 3.1 で考えたように前置フィルタを伴うカスケード微分フィルタ  $\hat{\mathcal{D}}_M^{(k)}(z)$  を考える。前置フィルタとしては(3.8.3)で与えられる狭帯域のフィルタを選んだ。

$X_j, Y_j, E_j, D_j, e_{x,j}, e_{y,j}$  を  $\hat{\mathcal{D}}_M^{(k)}(z)$  に通した信号を  $\hat{X}_j^{(k)}, \hat{Y}_j^{(k)}, \hat{E}_j^{(k)}, \hat{D}_j^{(k)}, \hat{e}_{x,j}^{(k)}$

$\hat{e}_{y,j}^{(k)}$ 等とすると3.3.1で述べたと同じ理由で

$$\hat{E}_j^{(0)} = \hat{X}_j^{(0)} - j_E + T_X \cdot \hat{X}_{j-j_E}^{(1)} - (\hat{e}_x^{(0)} - j_E + T_X \cdot \hat{e}_X^{(0)} - j_E) \quad (4.4.11)$$

(4.4.11)の雑音による項は前の項に比べて無視できるようになるので

$$\hat{E}_j^{(0)} \approx \hat{X}_j^{(0)} - j_E + T_X \cdot \hat{X}_{j-j_E}^{(1)} \quad (4.4.12)$$

同じようにして

$$\hat{D}_j^{(0)} \approx \hat{Y}_{j+j_D}^{(0)} + T_Y \cdot \hat{Y}_{j+j_D}^{(1)} \quad (4.4.13)$$

となる。ここで

$$j_E = [T_E/T_s], j_D = [T_D/T_s] \quad (4.4.14)$$

である。

$S_j$  を  $\hat{D}_M^{(0)}(z)$  に通した信号を  $\hat{S}_j^{(0)}$  とすると(4.4.3)より

$$\hat{D}_j^{(0)} - \hat{D}_{j_0}^{(0)} = A \cdot (\hat{E}_j^{(0)} - \hat{E}_{j_0}^{(0)}) + B \cdot (\hat{S}_j^{(0)} - \hat{S}_{j_0}^{(0)}) \quad (4.4.15)$$

となる。 $j_0$  は  $j \geq j_0$  なる時刻で、 $A, B$  は定数である。

#### 4.4.4 $A, B$ の推定

(4.4.15)より

$$C_J = \sum_{j=j_0}^J \{ (\hat{D}_j^{(0)} - \hat{D}_{j_0}^{(0)}) - A \cdot (\hat{E}_j^{(0)} - \hat{E}_{j_0}^{(0)}) - B \cdot (\hat{S}_j^{(0)} - \hat{S}_{j_0}^{(0)}) \}^2 \quad (4.4.16)$$

を最小にする  $A, B$  を  $\hat{A}_J, \hat{B}_J$  とする。

#### 4.4.5 硬さの変化

(4.4.15)は時刻  $j_0$  と  $j$  で板の硬さ ( $Q_S$  の値) が一定であるという条件で求めたものである。 $j_0$  と  $j$  での板の硬さが変われば(4.4.15)は当然成立しなくなる。

$j_0$  から  $j$  までの硬さが一定で  $j+1$  時間で硬さが変われば

$$V_{j+1} = \hat{D}_{j+1}^{(0)} - \hat{D}_{j_0}^{(0)} - \{ \hat{A}_j \cdot (\hat{E}_{j+1}^{(0)} - \hat{E}_{j_0}^{(0)}) + \hat{B}_j \cdot (\hat{S}_{j+1}^{(0)} - \hat{S}_{j_0}^{(0)}) \} \quad (4.4.17)$$

の値は大きく変化する(イノベーション)。

$$S_{V,J} = \sum_{j=j_0+1}^J V_j \quad (4.4.18)$$

が大きく0からずれたならば、 $j_0$  を変更すれば良い。

又コントローラが挿入されている場合を考える。すなわち

$$\mathcal{L}\{S(t)\} = \alpha \cdot \mathcal{L}\{X(t) - \bar{X}\} + \left(\beta + \frac{\gamma}{S}\right) \cdot \mathcal{L}\{Y(t) - \bar{Y}\} \quad (4.4.19)$$

ここで(4.4.19)の第1項はフィード・フォワード, 第2項 $P + I$ フィード・バック成分であり,  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ は入側, 出側板厚の設定値である。板の厚さは入側, 出側共に平均的には $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ のまわりを変化している。もし硬さが変われば板厚を平均的に設定値より変化させないためには $S(t)$ の平均値が大きく変化しなければならない。これはフィードバックの $I$ 成分の存在により達成される。そこで逆に $S(t)$ の大きなずれを検出して硬さの変化を見出すことができる。

#### 4.4.6 同定の結果

ここで与えた例は新日本製鉄(株)八幡製鉄所第3冷延工場のレバーシングコールド・ミルにおける結果である。ミルモータのスピード, 右側板厚, 左側板厚, 圧下位置を $M_i, R_i, L_i, P_i$ と名付けておく。ただし $i$ は1~6でデータの番号である。これらのデータは最初アナログ式のデータレコーダに記録して, これをサンプル周期 $T_s = 10msec$ で継続して4,096点(約41秒間)を符号付10ビットのデジタル値信号( $CV: Centi Volt$ )に変換し磁気テープへ記録した。これら4つの信号の同時性はほぼ完全と考えられる。表4.4.1は各データの特性をまとめたものである。これらのデータは表4.4.1中の変換式により所定の工学単位に変換される。図4.4.5には $M_3, R_3, L_3, P_3, M_6, R_6, L_6, P_6$ について描いた。又図4.4.6には図4.4.5のパワースペクトルをdB単位で描いた。このスペクトルから判断して $L=16, m=4, IEO=1, M=3$ に対する $\hat{D}_M^{(k)}(z)$ が適当であると考えた。

4.4.3の議論では $T_E, T_D$ の具体的求め方は与えていなかった。そこで

$d_T$ : X線厚み計とミル中心までの距離	mm
$V_E$ : 入側板のスピード	mm / msec
$V_D$ : 出側板のスピード	mm / msec
$V_M$ : ミルのスピード	mm / msec
$\rho = V_D / V_M$ : 先進係数	

とすると

$$T_E = \frac{d_T}{V_E}, \quad T_D = \frac{d_T}{V_D} \quad (4.4.20)$$

ここで

$$V_E = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \cdot \rho \cdot V_M, \quad V_D = \rho \cdot V_M \quad (4.4.21)$$

である。この装置の場合



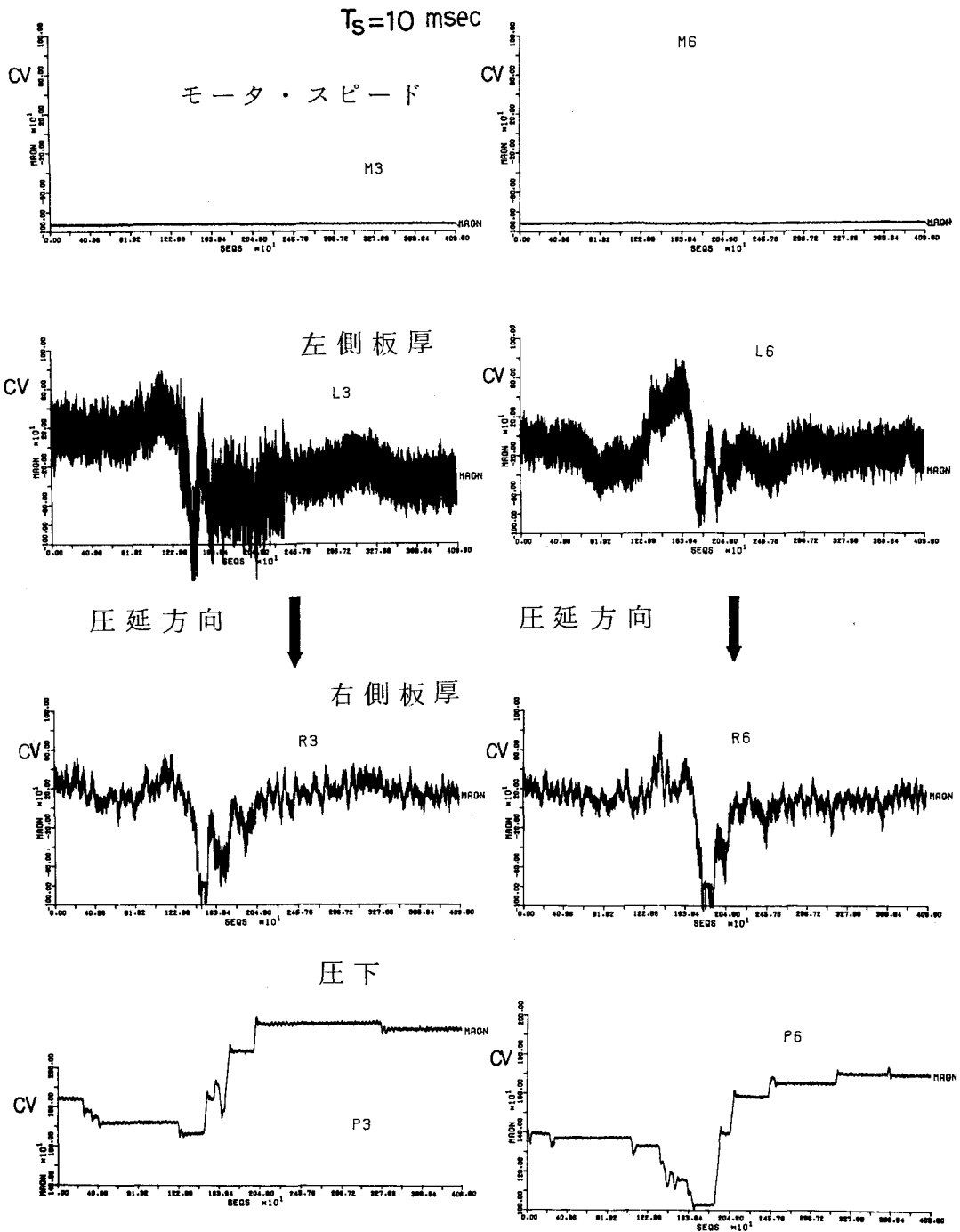


図 4.4.5 レバーシング・コールド・ミルよりの計測値

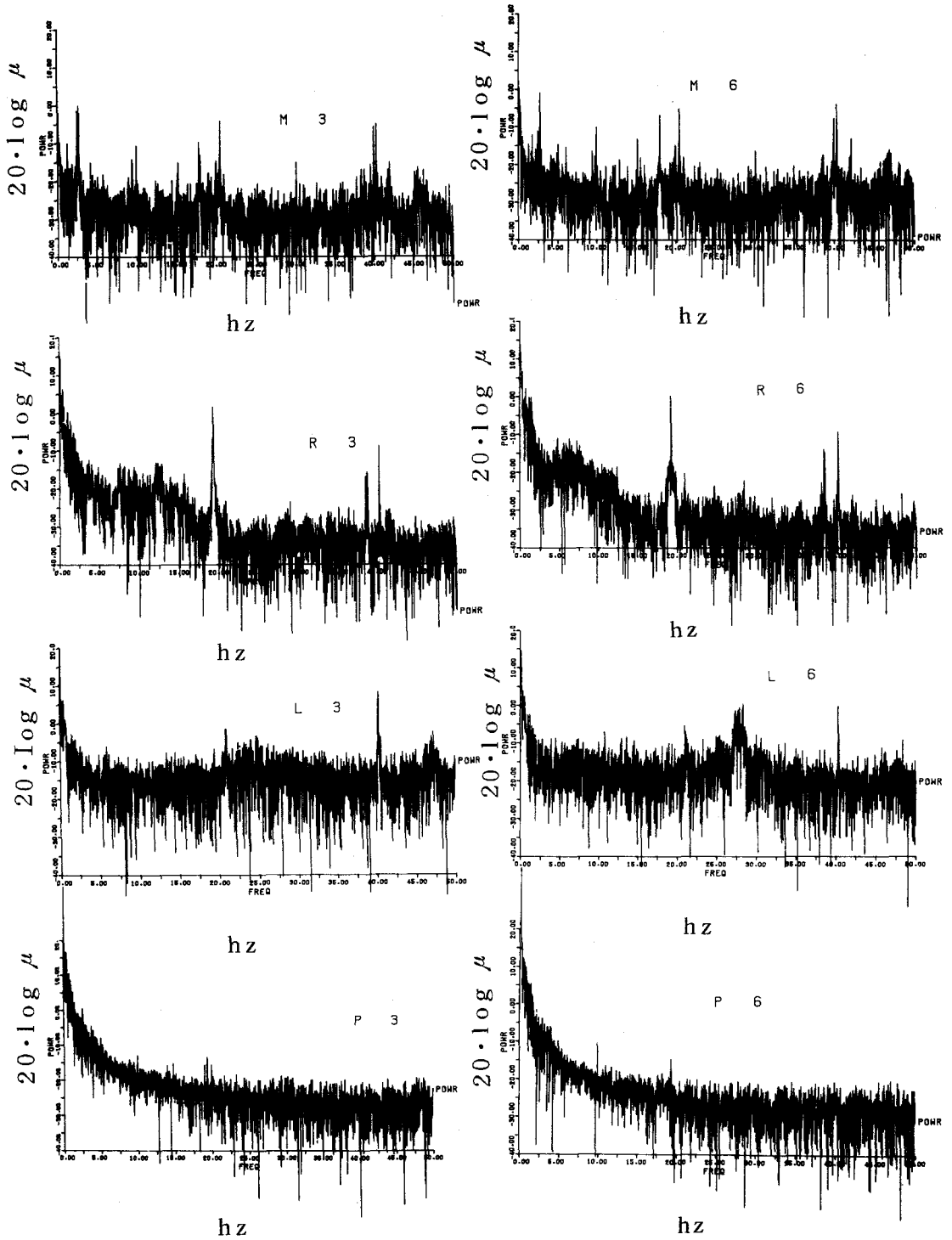


図 4. 4. 6 レバーシグ・コールド・ミルよりの計測値のパワースペクトル



$$d_T = 1,663 \text{ mm}$$

$\rho$  は状況により変化するが

$$\rho = 1.1$$

とした。また右側 X線厚み計の時定数は  $200 \text{ msec}$ ，左側は  $300 \text{ msec}$  であった。

図 4.4.7 は 3 番および 6 番目のデータにつき  $\hat{E}_j^{(0)} - \hat{E}_{j_0}^{(0)}$ ,  $\hat{S}_j^{(0)} - \hat{S}_{j_0}^{(0)}$ ,  $\hat{D}_j^{(0)} - \hat{D}_{j_0}^{(0)}$  を描いたものである。図 4.4.8 ~ 図 4.4.10 には  $\hat{A}_J$ ,  $\hat{B}_J$  およびその標準偏差を描いた。

3 番目のデータはミル圧下位置を手動で動かした場合であり，板は左より右へ走っている。この例では推定開始後 30 秒目で，

$$\hat{A}_J \approx 0.865, \hat{B}_J \approx -0.13 \quad (4.4.22)$$

であり

$$\hat{A}_J = \hat{B}_J = 0.995 \approx 1 \quad (4.4.23)$$

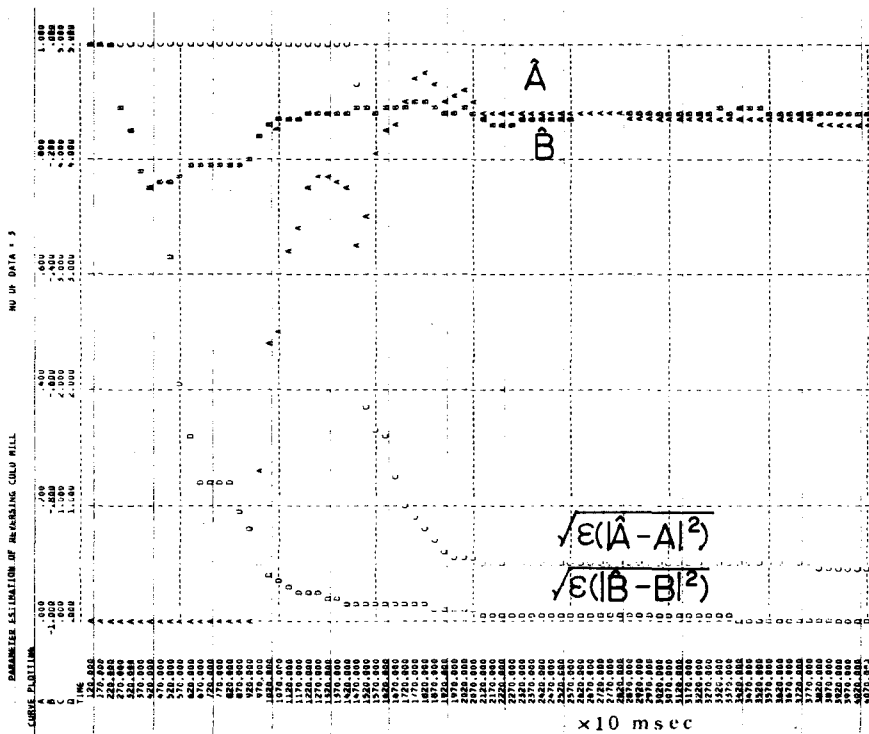


図 4.4.8 3 番データの場合の推定値

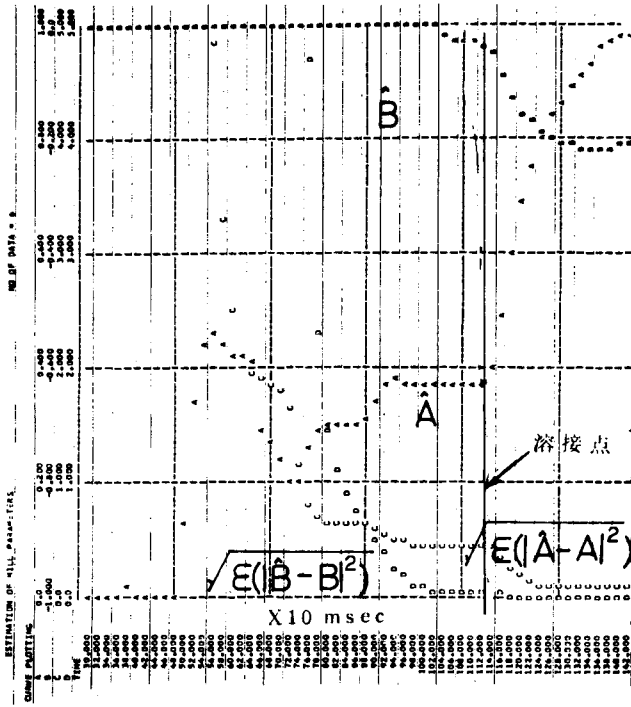


図 4. 4. 9 6 番データの場合の推定値 (前半)

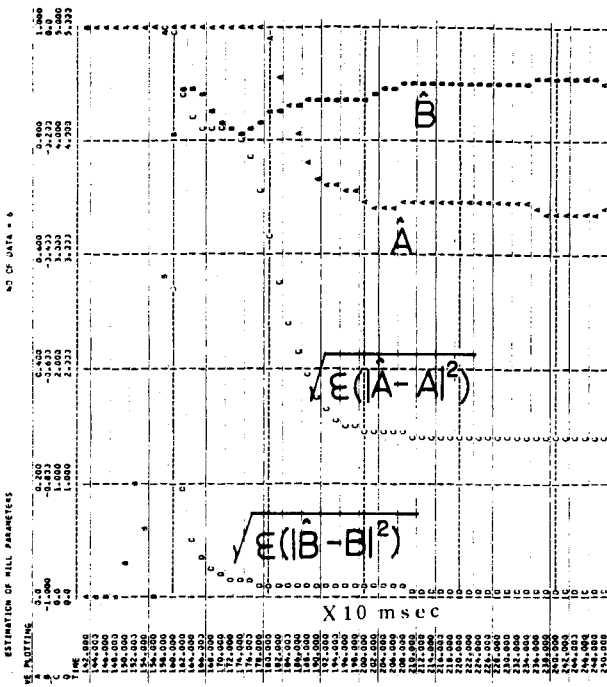


図 4. 4. 10 6 番データの場合の推定値 (後半)

となる。図 4.4.8 には  $A$  ,  $B$  の推定値とその標本標準偏差を描いたものである。これを見ると 20 秒以後推定値は落ちついてくることを示している。また 4.4.2 で述べた 2 つの線形スプリングによるモデルの正しさをみる目安として ( 4.4.8 ) の成立のいかんを考えることができるが、この例では ( 4.4.23 ) の成立することから、モデルが良く適合していることがわかる。

6 番目のデータは計測開始後 18 秒後程の所で溶接点にでくわしている。すなわちこの点で製造期日の異なる 2 種のストリップを溶接してあり塑性係数のちがいで板の硬さが大きく変化する。6 番目のデータは  $P + I$  制御系が働いている例でストリップは左側より左側より右側へ走っている。図 4.4.5 の計測データを見ると入側の板厚は平均して変化していないにもかかわらず、圧下位置は大きく変化している。これは先に述べたように硬さの大きな変化を表わして事実と良く一致する。溶接点の前では

$$\hat{A}_J = 0.37 \quad , \quad \hat{B}_J = -0.03 \quad (4.4.24)$$

溶接点の後では

$$\hat{A}_J = 0.71 \quad , \quad \hat{B}_J = -0.101 \quad (4.4.25)$$

であるが、この場合では  $\hat{A}_J - \hat{B}_J = 0.811$  である。他のデータに対する結果は表 4.4.1 に与えた。この表をみると、 $\hat{A}_J - \hat{B}_J$  の値が 1 より大分小のもの、5 番データの  $\hat{A}_J$  のように 1 を越えるようなものもあるが、これらは溶接点の存在、硬さの急変などで、特に塑性係数の線形性が成立しなくなる為と考えられ、この場合には 4.4.5 で述べたように基準点を変化させる必要がある。圧延制御に必要な  $\hat{B}$  の値については、ここで得られた値は実際の圧延時に経験により設定している値にほぼ近いものである。しかし実際には  $\hat{B}$  の値は正確には知られていなかったものであり、このような推定値により圧延機の制御系の適応化を行うべく考察を進めている。

## 換算表

 $\xi : \pm 10^3$  C.V.の生データ

$$\eta = C_E \cdot \xi + D_E$$

 $\eta : \text{工学単位}$ 

計測点	名称	$C_E$	$D_E$	工学単位
M	スピード	0.008749	0.21872	mm / msec
R	右側板厚	0.055335	-5.53350	$\mu$
L	左側板厚	0.053527	1.60580	$\mu$
P	圧下位置	-0.416670	1216.67	$\mu$

## 同定結果

データ	制御モード	溶接点	溶接点前		溶接点後		
			$\hat{A}$	$\hat{B}$	$\hat{A}$	$\hat{B}$	
1	手	無	***	-0.311			手：手動
2	手	有	0.37	***	(1.14)	-0.25	FF：フィード フォワード
3	手	無	0.865	-0.13			FB：フィード バック
4	手	無	0.65	-0.19			
5	FF+FB	無	(1.03)	-0.33			***：推定不可
6	FB	有	0.37	-0.03	0.71	-0.101	

表 4.4.1 単位変換表と同定の結果

## 4.5 まとめ

第3章で提案したカスケード微分フィルタを用いた伝達関数の推定手法をいくつかの実プラントの同定に用いた結果につき与えた。すなわち火力発電所でのタービン発電機系の同定，製紙工場での抄紙機の坪量水分系の同定そして製鉄工場でのレバーシグ・コールド・ミルの同定を実際のプラントよりの実測データを基に実施した。これらの例より判断して提案手法が十分実用的なものであることが確かめられた。

## 第5章 微分フィルタのボイラ昇温昇圧制御系への適用

### 5.1 序

観測信号の中からその低域成分の微分を抽出する手法は同定問題に限らず、種々の変化率を制御する必要のある場合に、その制御系を構成するのに有効に用い得るものである。著者は業務の一つとして発電用ボイラの起動時の昇温昇圧制御系の構成にたずさわってきた。この章ではドラム式ボイラの昇温昇圧制御系を微分フィルタを用いて構成する方法とシミュレーションによるテスト結果、コンバインド・サーキュレーション形超臨界圧ボイラの昇温制御系をやはり微分フィルタを用いて構成する方法とシミュレーションによるテスト結果とテスト用の実ボイラを用いてのテスト結果を与え微分フィルタの制御系への応用の有効性を示す。特にこのテスト用ボイラではボイラ制御系が殆んどDDC化(アナログ・ワイアド・ロジック系との2重計装)されており、その点も含めて解説した。

### 5.2 ドラム式ボイラの昇温昇圧制御系

図5.2.1はドラム式ボイラを用いた火力発電所の蒸気の流れの系統を描いたものである。これによりボイラの動作を簡単に説明し、起動時における昇温昇圧の過程を説明してみる。

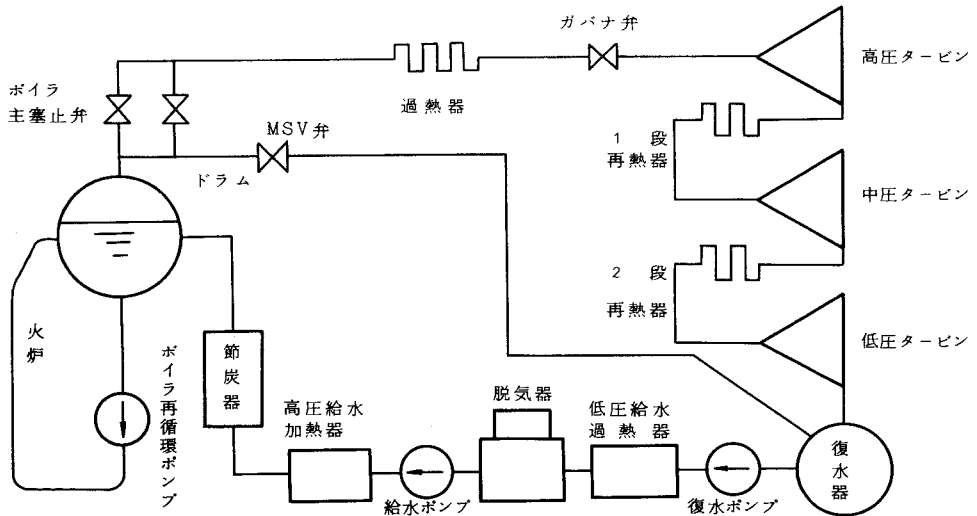


図 5.2.1 ドラム式ボイラを用いた火力発電所系統図



### 5.2.1 ドラム式ボイラの構造と起動

図 5.2.1 に示したボイラは強制循環形（コントロール・サーキュレーション・ボイラ）といわれるものである。<sup>(40)</sup> 水のある圧力で加熱してゆくとその圧力で定まる一定の温度（飽和温度）で水から蒸気に遷移する。この時非常に大量の潜熱を吸収する。すなわち飽和状態では水と蒸気が共存し、潜熱の大きいことでの境界は大容量の加熱を行なっても割合と安定である。そこでドラムと称する円筒形の容器に加熱した水を送り込みドラム内に水と蒸気の境界を作り、そこで蒸気の発生を行なわせる。この境界の位置はドラム水位といい、供給される水（給水）の流量と水蒸気の出口にある各種の弁を用いて一定に保たれるように制御されている。ドラム内の蒸気は飽和状態にあるのでほぼ給水の圧力によりその状態が定まるわけである。

次に定格負荷時のボイラの働きを考えてみる。まず給水の圧力は主として給水を加圧する給水ポンプにより操作されている。又コントロール・サーキュレーション・ボイラでは火炉で加熱する流体を再循環水ポンプにより再循環させ加熱効率を向上させている。発生した蒸気は過熱器により過熱され高圧タービンに入る。高圧タービンを出た蒸気はさらに再熱器により再熱されて中圧又は低圧タービンに入り復水器を通して水となり給水加熱器給水ポンプそして節炭器を通してドラムに供給されるわけである。

次にドラム式ボイラの起動時の状況について説明をしておこう。起動時には蒸気はタービンに入らず各種のバイパス弁でボイラへ循環される。ドラム・ボイラの定格圧力は  $169 \text{ kg/cm}^2$  前後であり、起動時に際してはこの圧力まで昇圧してゆく必要がある。ただしボイラの構造や疲労の許容限界などからむやみに早く昇圧することはできない。勿論ゆっくり昇圧させたのでは種々の経済的損失が生じてくる。そこで電力会社ではこれらのボイラの起動時の昇圧パターンを規則で定めている。図 5.2.2 はその種のパタンの一例である。水の物性より約  $60 \text{ kg/cm}^2$  程までは飽和圧力より飽和温度の方が同じ供給熱量に対して変化が大きいので、ボイラ蒸気温度（飽和温度）を制御した方が良い。そこで、図 5.2.2 のようにボイラ蒸気圧力（飽和圧力）が  $60 \text{ kg/cm}^2$  の近辺まではドラム内の蒸気温度の昇温率を一定に保つように制御される。さらに圧力が  $60 \text{ kg/cm}^2$  以上になれば、それ以上定格圧力までは、ドラム内の蒸気圧力の昇温率を一定に保つように制御される。

このような過程で昇温昇圧を行なおうとすると、ドラム水位制御系の働いている状態では、給水の流量、燃料流量および空気の流量を操作してやればよい。殆んどの場合、起動パターンとしては、給水の流量を一定に保って、燃料および空気の流量によりドラム温度およびドラム圧力が制御されるわけであるが、空気流量の設定値は燃料流量の設定値に比例するように設定されるので基本的な操作変数は燃料流量だけということになる。

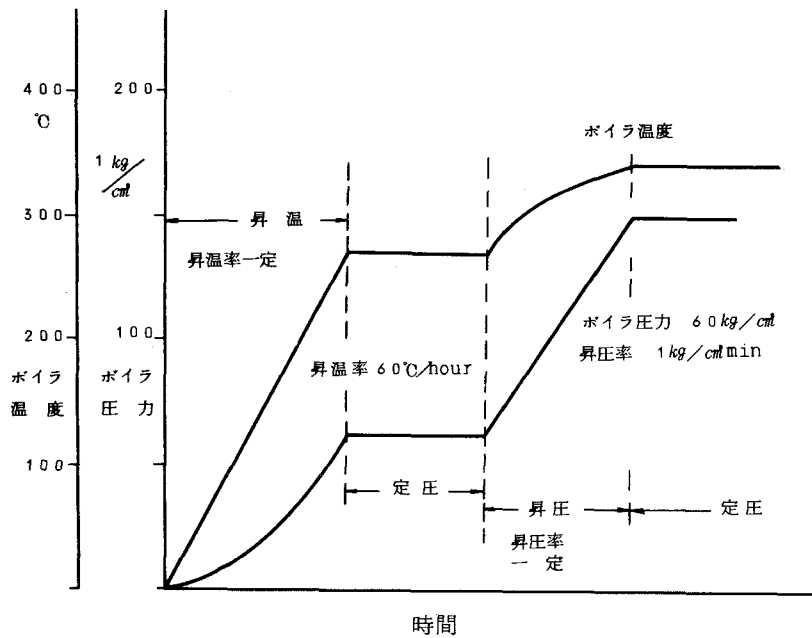


図 5.2.2 ドラム式ボイラ起動パターン

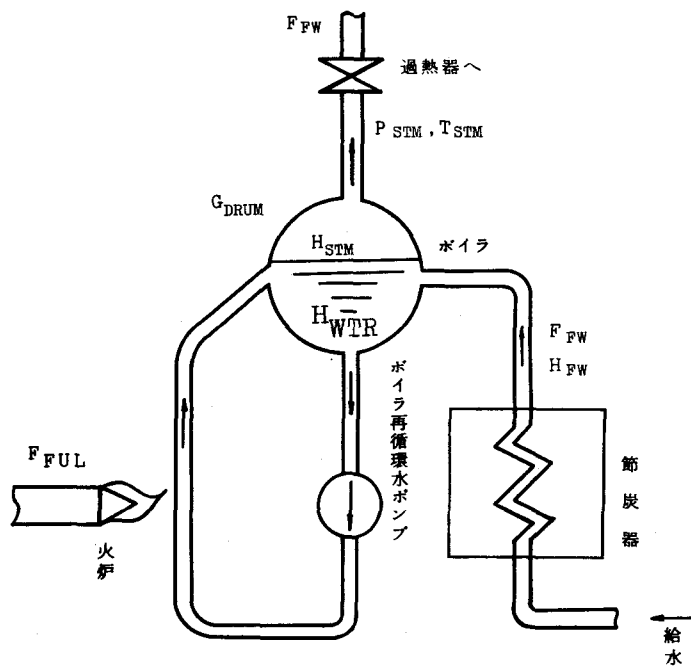


図 5.2.3 ドラム式ボイラのモデル

## 5.2.2 ドラム式ボイラの動特性

ドラム式ボイラのドラム水位制御系が働いている状態で，ドラム式ボイラの動特性について考察を行ってみる。ここで用いた記号は次のようなものである。

$F_{FW}$	： 給水流量	$kg/min$
$F_{FUL}$	： 燃料流量	$kg/min$
$H_{FW}$	： 給水エンタルピ	$Kcal/kg$
$H_{STM}$	： 蒸気エンタルピ	$Kcal/kg$
$H_{WTR}$	： ドラム水エンタルピ	$Kcal/kg$
$P_{STM}$	： ドラム圧力	$kg/cm^2$
$T_{STM}$	： ドラム温度	$^{\circ}C$
$G_{DRUM}$	： ドラム内流体重量	$kg$
$C_{FUL}$	： 燃料発熱量	$Kcal/kg$
$\xi_{FUL}$	： 発熱効率	
$\eta_{FURN}$	： ボイラ吸熱効率	

図 5.2.3 でドラム内の飽和水に加えられる熱量は蒸気流量が給水流量に等しいとすると

$$Q_{WTR} = \eta_{FURN} \cdot \{ \xi_{FUL} \cdot C_{FUL} \cdot F_{FUL} + (H_{FW} - H_{STM}) \cdot F_{FW} \} \quad (5.2.1)$$

$Kcal$  だけ単位時間に加えられる。そこでドラム水のエンタルピの上昇は

$$\frac{dH_{WTR}}{dt} = \frac{Q_{WTR}}{G_{DRUM}} \quad (5.2.2)$$

で規定される。 $G_{DRUM}$  はドラム温度  $T_{STM}$  により規定される。また  $H_{WTR}$ ,  $T_{STM}$ ,  $P_{STM}$  の間には水の物性として定まる状態方程式が存在する。すなわち

$$T_{STM} = \theta_W(H_{WTR}) \quad (5.2.3)$$

$$P_{STM} = \varphi_W(H_{WTR}) \quad (5.2.4)$$

$$H_{STM} = \Psi_S(P_{STM})$$

となる関数  $\theta_W(\cdot)$ ,  $\varphi_W(\cdot)$ ,  $\Psi_S(\cdot)$  が存在する。これらの関係を図示すると図 5.2.4 のようになる。 $\theta_W(\cdot)$ ,  $\varphi_W(\cdot)$ ,  $\Psi_S(\cdot)$  はすべて単調な関数なので既略的に述べるならば，ドラム圧力と燃料流量との間には<sup>(39)</sup>

$$L\{P_{STM}\} \sim \frac{1}{S} \cdot L\{F_{FUL}\} \quad (5.2.5)$$

という関係のあるのがわかる。

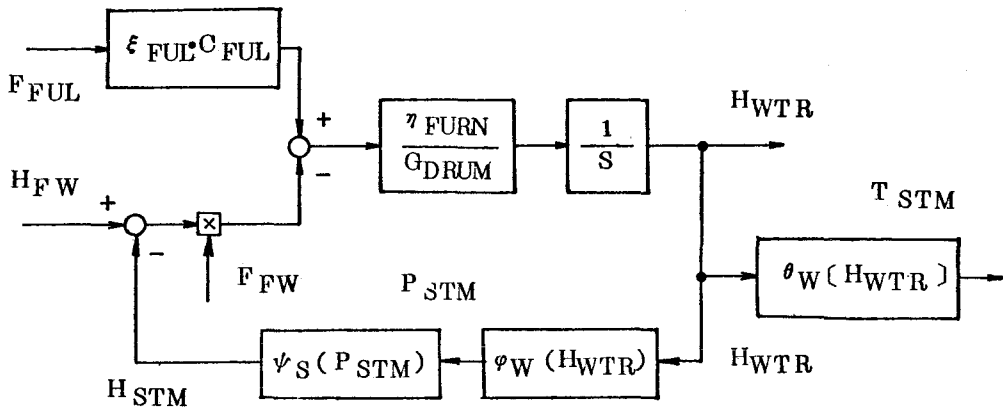


図 5.2.4 ドラム式ボイラの動特性

### 5.2.3 昇温昇圧制御系

5.2.1 で述べたように昇温・昇圧の際の目標値は温度又は圧力の変化率であるので、第2章で考えたような微分フィルタが用い得ることがわかる。そこで  $P_{STM}$  のサンプル周期  $T_S$  毎の値を  $P_{STM,j}$  としカスケード・デジタル微分フィルタ  $\mathcal{D}_M^{(1)}(Z)$  を通した後の信号を  $\hat{P}_{STM,j}^{(1)}$  とし燃料流量の設定値を  $S_{FUL}$ 、昇圧率を  $S_{DP}$ 、制御周期を  $T_C = I_C \cdot T_S$  として

$$S_{FUL,j} = \alpha_P \cdot (\hat{P}_{STM}^{(1)} - S_{DP}) + \beta_P \cdot \sum_{k=0}^j (\hat{P}_{STM}^{(1)} - S_{DP}) \quad (5.2.6)$$

$$S_{FUL}^{(t)} = S_{FUL,k} \cdot I_C, \quad k \cdot (I_C \cdot T_S) \leq t < (k+1) \cdot (I_C \cdot T_S) \quad (5.2.7)$$

のようなPI制御系を作ることができる。<sup>(42)</sup> すなわち微分フィルタを用いることによりドラム圧力の小刻みの微小変化を取り除いた後の平均的な圧力の変化を取り出すことができ、これをあたかも観測され得る制御量と同じように扱うことができる。昇温部分についても(5.2.6)、(5.2.7)と全く同じようなアルゴリズムを用いれば良い。

制御定数  $\alpha_P, \beta_P$  は  $P_{STM}$  (又は  $T_{STM}$ )

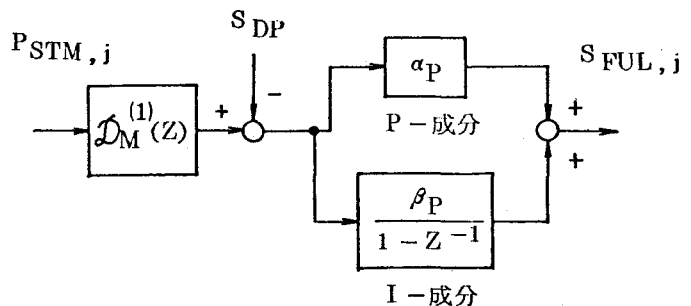


図 5.2.5 ドラム式ボイラの昇圧制御系

の関数として変化させることもできる。

#### 5.2.4 昇温昇圧制御系のテスト

5.2.3で与えた昇温昇圧制御系の性能をテストするためにシミュレーションを実施してみた。

図5.2.2は中国電力嶗岩国発電所の出力35万KWのボイラの起動パターンを示したものである。5.2.2で考えたボイラ・モデルをもとにシミュレーションを実施した。図5.2.6はその為のブロック図を描いたものであり、書かれている数値は上記発電所の場合である。又この図中の時間の単位はすべて分である。

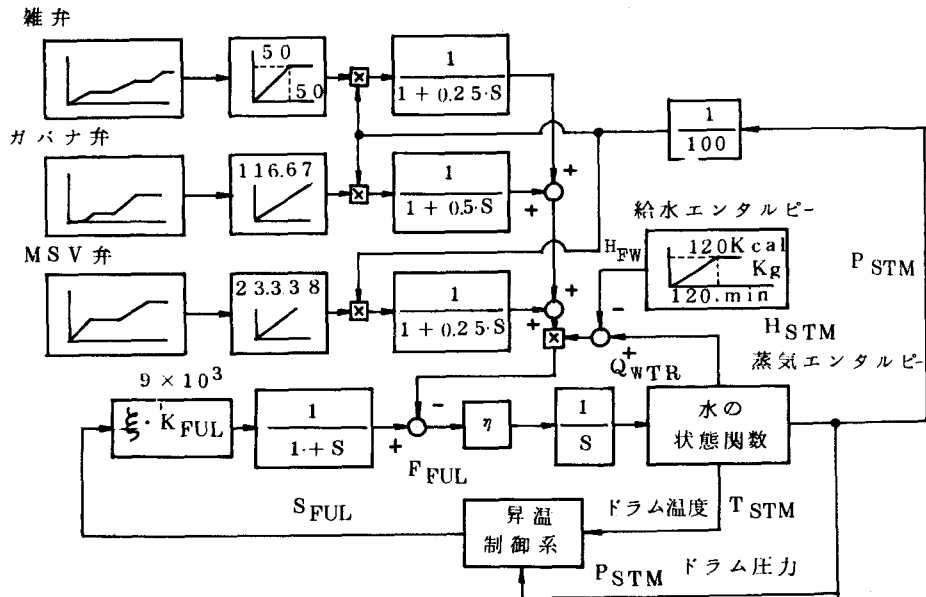


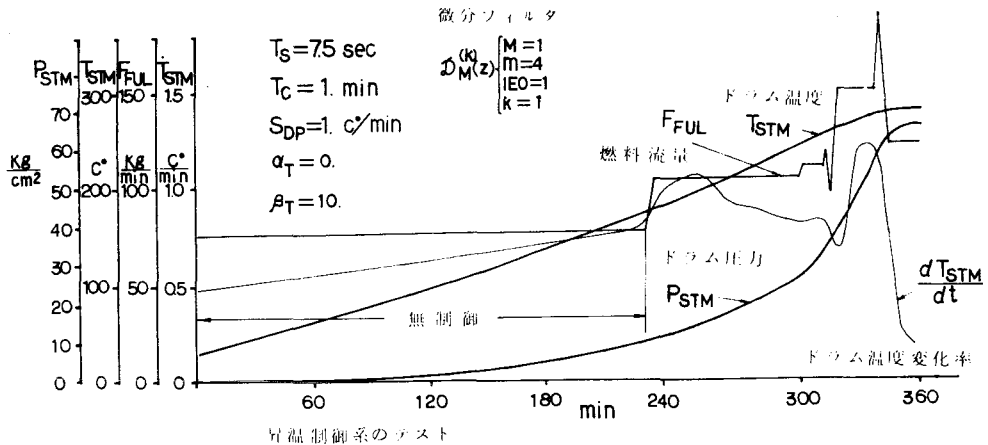
図 5.2.6 シミュレーションのためのブロック図

このシミュレーションのためにはBACS (Block Diagram Analogous Compiler System) を用いた。このプログラム・システムでは積分はRunge - Kutta法を用いている。

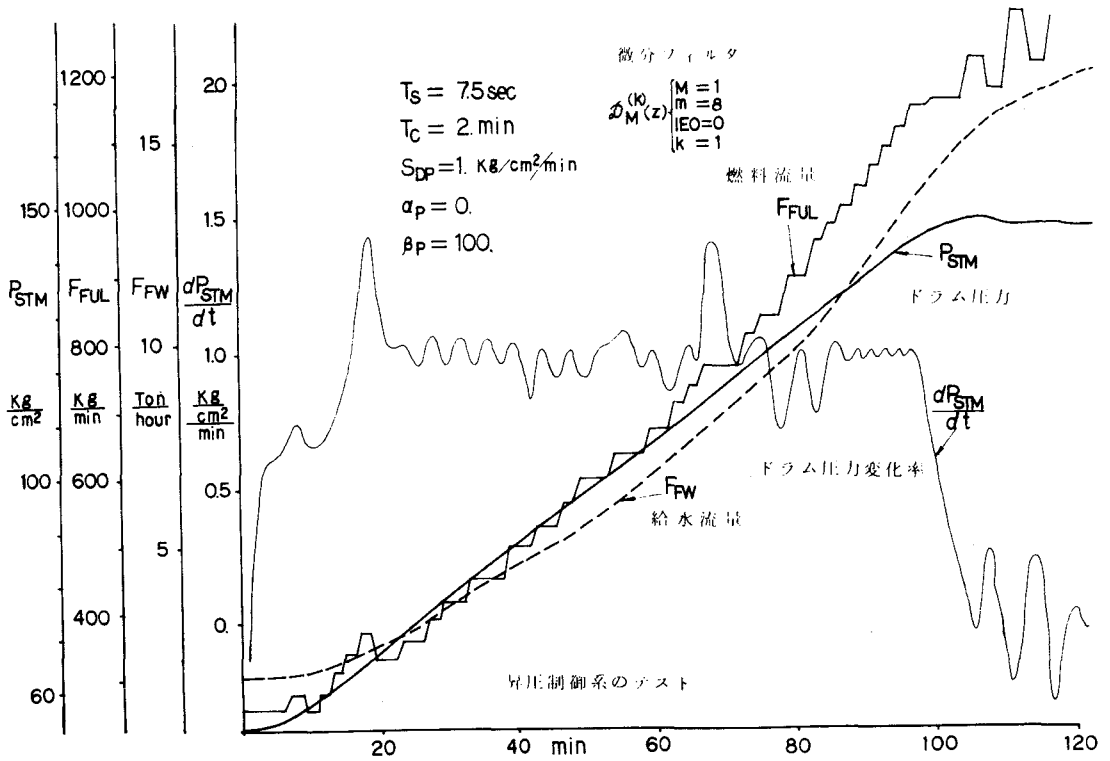
図5.2.7はシミュレーションによる昇温昇圧制御系のテスト結果を示したものである。

同図の上段はドラム圧力が $60\text{kg}/\text{cm}^2$ 以下の昇温制御の状態にしている。これは実際の運転でも実施されることで(5.2.5)の関係が比較的良く成立するからである。昇温制御は制御周期1分で希望昇温率 $1^\circ\text{C}/\text{min}$ 、昇圧制御は制御周期2分で希望昇圧率 $1\text{kg}/\text{cm}^2 \cdot \text{min}$ であり、昇温昇圧率一定の目的はほぼ達成されていると同時に操作量である燃料も無駄な動きをせず単調に増大しているので、無理のない制御が行われていると考えられる。実際このシミュレーションの結果

に基づき、これと同等の制御系が中国電力鞍山国発電所の35万kWのドラム式ボイラ制御のための制御用計算機MELCOM 350-30による計算機制御系の中の起動時昇温昇制御系として組込まれ実際の起動制御に用いられ好結果を得たものである。



昇温制御の状態 ( $P_{STM} \leq 60 \text{ kg/cm}^2$ )



昇圧制御の状態

図 5. 2. 7 ドラム式ボイラの昇温昇圧制御系のシミュレーション・テスト

### 5.3 超臨界圧ボイラの昇温制御 (B4),

水の物性は氷点以上、圧力では  $300 \text{ kg/cm}^2$ 、温度は  $800^\circ\text{C}$  程度までの範囲は工業的応用の目的等から詳細に調べつくされている。この範囲には水と蒸気の飽和域をその極限の状態である臨界点を含んでいて水はこれらの点を境にして著しい状態の変化を示す。このような水の物性を余すところなく用いた装置としてこの節で述べる超臨界圧ボイラがある。このボイラは種々の有効性を持っているが、反面その制御は難かしくなる。特に起動時における昇温制御は重要となる。最近は DDC によりこの昇温制御系を構成する機会が多くなってきた。

この昇温制御にもデジタル微分フィルタが有効に使用できる。その場合の制御系の構成を示すと共に、そのシミュレーションによるテスト結果およびテスト用に設置された実ボイラによるテスト結果を示し、その有効性を示した。

#### 5.3.1 超臨界圧ボイラの構造と起動

図 5.3.1 は超臨界圧ボイラのうちでコンバインド・サーキュレーション・ボイラと名付けられる一形式を用いた火力発電所の系統図である<sup>(4)</sup>この種のボイラの動作を理解するには水の物性

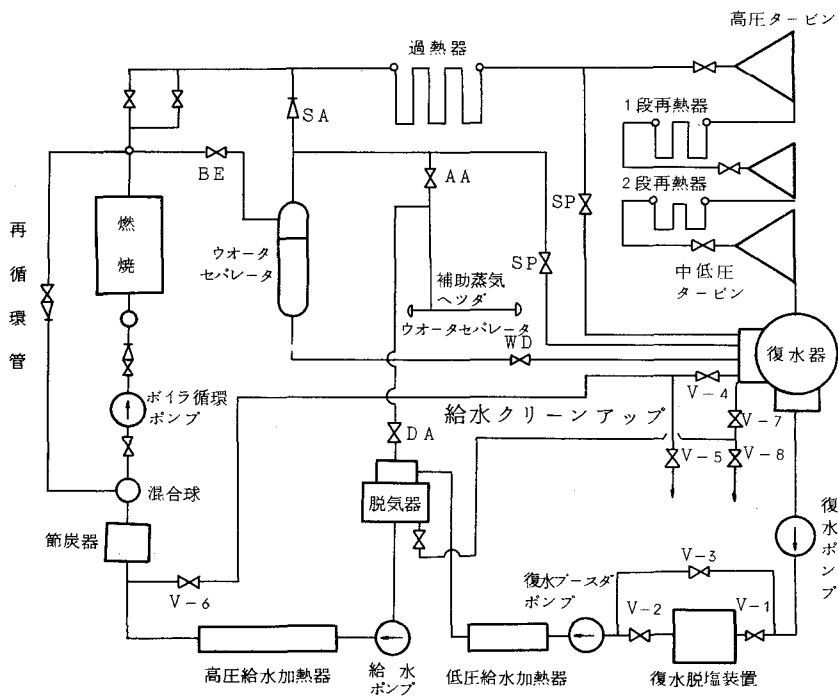


図 5.3.1 コンバインド・サーキュレーション・ボイラを用いた発電所

を理解しなければならない。図 5.3.2 は圧力  $P$  と、エンタルピー  $H$  により水の状態を表わしたものである。圧力を一定に保って熱を加えてゆくと、エンタルピーは次第に増加する。臨界圧力  $P_c$  ( $=2255 \text{ kg/cm}^2$ ) より低い圧力では、はじめに水(液体)であったものが、飽和域に入り一定の熱量(潜熱)を吸収して蒸気(気体)に変化する。ところが圧力を臨界圧  $P_c$  以上に保つと、飽和領域は存在せず、熱量を加えてゆくと、水から蒸気への遷移が連続的に行なわれる。ただしこの間では定圧以熱が非常に大きくなり、流体の温度の上昇の度合はにぶくなってくるのである。

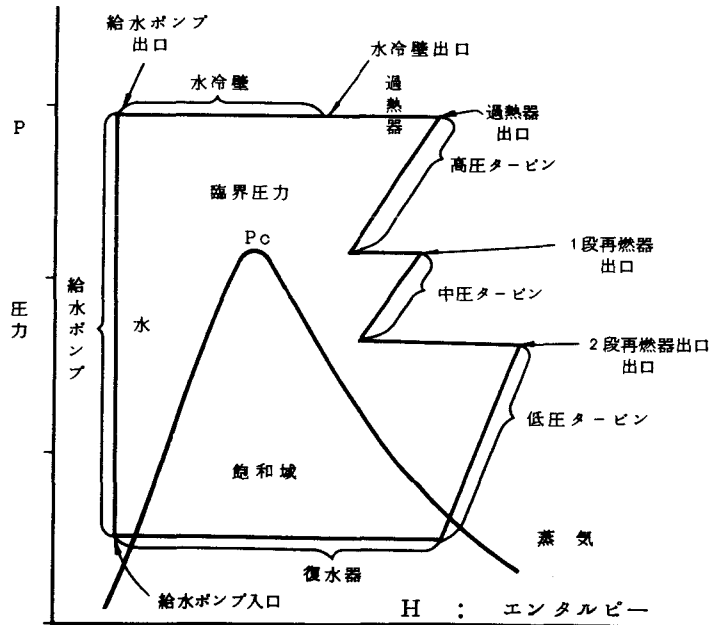


図 5.3.2 水の状態図

ドラム式ボイラでは圧力が臨界圧以下のため、飽和域が存在し、これをドラムの中に封じ込める方法をとっていたが、超臨界ボイラでは長い管に沿って水を加熱し、途中で蒸気に変換するようにしている。これはいわゆる貫流ボイラ (*Once-Through Boiler*) とされるものである。

次に図 5.3.1 と図 5.3.2 を用いて超臨界ボイラの動きを考えてみる。具体性を明確にするために、出力 60 万 kW のタービン発電機に供給するための水蒸気出力 1,950 T on/hour 級のコンバインド・サーキュレーション・ボイラを例にとって説明する。定格負荷時では主として給水ポンプと各種の弁類により、水は  $288 \text{ kg/cm}^2$  程度の超臨界圧に加圧され、途中で高圧給水加熱器、節炭器等により、加熱されてから、ボイラの水冷壁で加熱され、水冷壁の出口で流体の温度が約  $443 \text{ }^\circ\text{C}$  となるように火炉の燃焼状態により制御される。ここでは既に水蒸気であるが、さらに過熱器により過熱され、最終的に圧力  $288 \text{ kg/cm}^2$ 、温度  $543 \text{ }^\circ\text{C}$  の過熱水蒸となり、高圧タービンに供給される。高圧タービンを出て圧力が下り、温度も下った蒸気はさらに再熱



器により過熱され、圧力約  $72.6 \text{ kg/cm}^2$ 、温度  $554^\circ\text{C}$  の過熱水蒸気となり、これが中圧タービンに供給される。中圧タービンを出た蒸気は又再熱されて圧力約  $25.5 \text{ kg/cm}^2$ 、温度  $568^\circ\text{C}$  の過熱水蒸気となって低圧タービンに供給される。低圧タービンの出口は復水器となっていて蒸気は海水により冷却される。そこで蒸気は飽和状態となっており、圧力は約  $720 \text{ mm Hg}$ 、温度  $34^\circ\text{C}$  でここで蒸気は水となって、さらに低圧給水加熱器、脱水器などを通して、再びボイラに供給されるわけである。又タービンの各段階では抽気と称し、蒸気の一部を取り出し、給水加熱器の一次系（加熱源）として用い、使用した後は、再びボイラへ戻している。このような巧妙な方法を用いて、全体として高い効率を達成することができるように工夫されている。超臨界圧ボイラはドラム式と異なり、ドラムのように大きな熱容量を持つ装置を含まないので高い応答性能を持たせることが可能であるが、反面制御は難かしくなるという特徴を持っているわけである。

次に超動時の模様について説明しておく。図 5.3.3 はいま述べた出力  $1,950 \text{ Ton/Hour}$  のコンバインド・サーキュレーション・ボイラの起動状態を規定する起動パタン（冷態起動）を描いたものである。これに沿って説明してゆく。点火前の種々の準備がととのうと、火炉に点火される。この時点では給水の流量は定格時の約 5% に保たれる。そして給水の圧力は約  $250 \text{ kg/cm}^2$  程度の超臨界に保たれている。給水は給水過熱器、節炭器、水冷壁を通して加熱される。起動昇温時にはこの水冷壁出口における流体の温度が制御変数となり、この温度が、起動パタンに示されているように約  $200^\circ\text{C/Hour}$  程度の一定の昇温率となるように制御されるわけである。水冷壁出口の流体の温度はいろいろの変数により変化するが、起動においては、基本的には、給水流量、燃料流量、および空気流量であり、給水が一定に保たれる範囲では燃料流量のみとなる。空気流量は普通のばあい、燃料流量に比例するように設定される。水冷壁出口流体温度を定格の温度（ $420^\circ\text{C}$  前後）まで昇温した後その状態でじょじょに給水を増加させる。この期間では、蒸気は直接過熱器へは行かず、ウォーター・セパレータと称する容器の中で減圧され、タービン起動前ならさらに給水ポンプの方へ循環させられ、タービン起動後ならさらにそこから過熱器へ入り過熱され、タービンへ供給される。特にコンバインド・サーキュレーション・ボイラでは、起動時に水冷壁出口流体の大部分を水冷壁入口へ戻すようにボイラ再循環水ポンプが設けられており給水流量よりもはるかに大量の流体を水冷壁へ流し、火炉よりの熱の吸収を良くすると同時に水冷壁の保護ができるような工夫が施こされている点が特徴である。水冷壁出口流体と節炭器を出た流体は混合球と名付けられた容器の中で混合される。

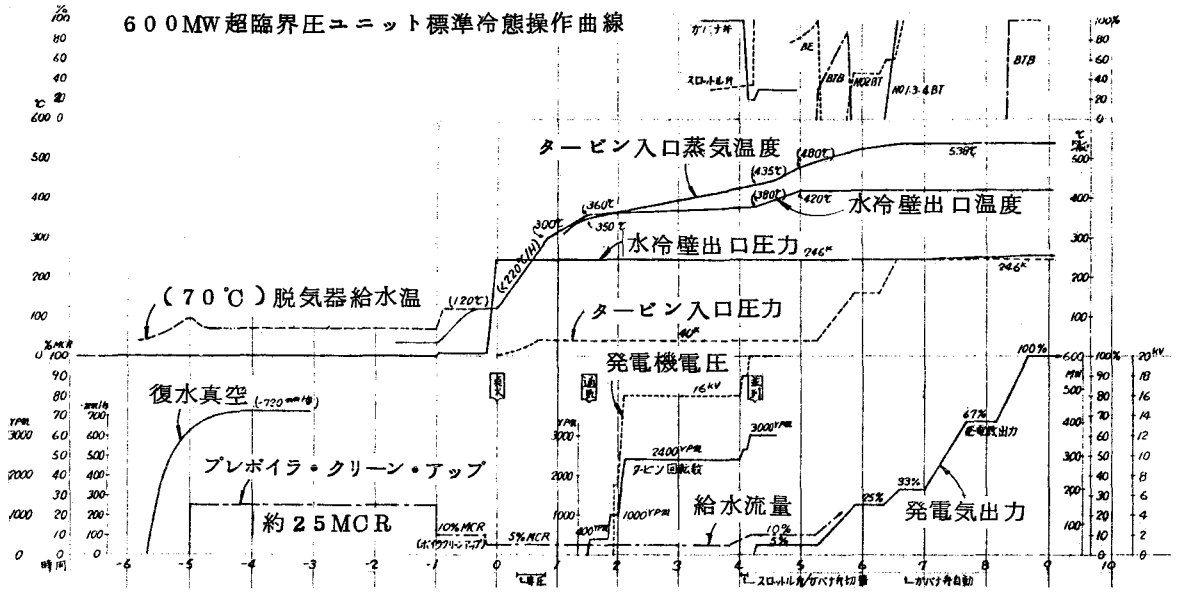


図 5.3.3 超臨界ボイラの起動パターン

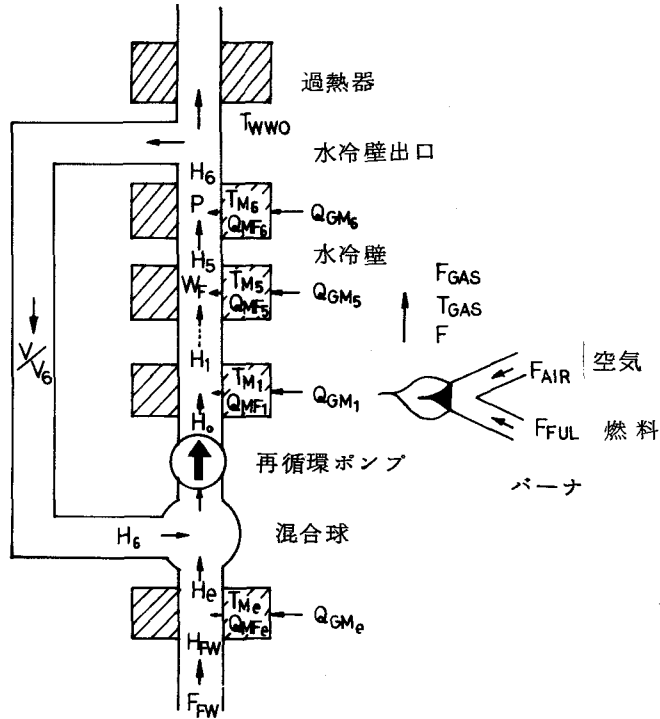


図 5.3.4 コンバインド・サーキュレーション・ボイラのモデル

### 5.3.2 超臨界圧ボイラの動特性 (A1)

コンバインド・サーキュレーション・ボイラのもつ動特性について概観してみよう。このボイラの基本要素は図5.3.4のように火炉，節炭器，水冷壁，過熱器，再熱器，混合球，再循環ポンプ等である。ここでは起動時だけを考え，過熱器と再熱器については論じない。水冷壁は火炉を取りまく管壁で，ここで熱が流体に吸収される。この管壁は熱の吸収を良くするために細く極めて長い管状になっているので，正しくは分布定数系として動特性をとらえる必要があるが，ここでは構造の似かよった部分を寄せ集め6つの部分に分割して集中定数系としてとりあつかった。以下ここで用いた記号を始めて定義しておく。

$F_{FW}$	: 給水流量	$\text{kg}/\text{min}$
$F_{FUL}$	: 燃料流量	$\text{kg}/\text{min}$
$F_{AIR}$	: 空気流量	$\text{kg}/\text{min}$
$F_{GAS}$	: ガス流量	$\text{kg}/\text{min}$
$Q_{TTL}$	: 燃料の総発熱量	$\text{Kcal}$
$Q_B$	: ボイラ吸収熱量	$\text{Kcal}$
$Q_{GM,j}$	: ガスより $j$ -ブロックメタルへの伝達熱 ( $j=1, 2, \dots, 6, e$ )	$\text{Kcal}/\text{min}$
$Q_{MF,j}$	: $j$ -ブロックメタルより流体への伝達熱	$\text{Kcal}/\text{min}$
$T_{AIR}$	: 入口空気温度	$^{\circ}\text{C}$
$H_{FW}$	: 給水エンタルピ	$\text{Kcal}/\text{kg}$
$H_{E,j}$	: $j$ -ブロック出口流体エンタルピー	$\text{Kcal}/\text{kg}$
$H_{E,o}$	: 混合球出口流体エンタルピー	$\text{Kcal}/\text{kg}$
$T_{GAS}$	: ガス温度	$^{\circ}\text{C}$
$T_{F,j}$	: $j$ -ブロック平均流体温度	$^{\circ}\text{C}$
$T_{M,j}$	: $j$ -ブロック平均メタル温度	$^{\circ}\text{C}$
$V_{RES}$	: 再循環路流体体積流量	$\text{m}^3/\text{min}$
$W_F$	: 混合球出口より水冷壁出口までの質量流量	$\text{kg}/\text{min}$
$P_B$	: ボイラ内流体圧力	$\text{kg}/\text{cm}^2$
$C_{FUL}$	: 燃料の発熱量	$\text{Kcal}/\text{kg}$
$C_{GAS}$	: 燃火然ガスの比熱	$\text{Kcal}/\text{kg}$
$v_M$	: 混合球流体比容積	$\text{m}^3/\text{kg}$
$v_j$	: $j$ -ブロック出口流体比容積	$\text{m}^3/\text{kg}$
$C_{GM,j}$	: ガスより $j$ -ブロックメタルへの接触熱伝達係数	
$S_{GM,j}$	: ガスより $j$ -ブロックメタルへの輻射熱伝達係数	
$C_{MF,j}$	: $j$ -ブロックメタルより流体への熱伝達係数	
$C_{M,j}$	: メタルの熱方程式に関する定数	

$C_{F,j}$	:	流体の熱方程式に関する定数	
$v = v(P, H)$	:	比容積を圧力とエンタルピで表わした水の状態方程式	
$T = d(P, H)$	:	温度を圧力とエンタルピで表わした水の状態方程式	
$j = 1, 2, \dots, 6, e$	:	$e$ : 節炭器	
$T_{WWO}$	:	水冷壁出口流体温度	℃

起動時には先にも述べたように水冷壁出口流体は再循環され混合球で節炭器より入ってきた流体と混合して再び水冷壁で加熱されるようになっている。この際再循環路を流れる流体の体積流量はほぼ一定である。この点を考慮して次のような数式モデルを作ることができる。

〔火 炉〕 連続式より

$$F_{GAS} = F_{FUL} + F_{AIR} \quad (5.3.1)$$

燃料の発生する熱量は、水冷壁、節炭器へ吸収される熱量と、ガスの持ち去る熱量の和と考えるとエネルギー保存則を用いて

$$T_{GAS} = T_{AIR} + (Q_{TTL} - Q_B) / C_{GAS} \cdot T_{GAS} \quad (5.3.2)$$

$$Q_{TTL} = C_{FUL} \cdot F_{FLL} \quad (5.3.3)$$

$$Q_B = \sum_{j=1}^6 Q_{GM,j} + Q_{GM,e} \quad (5.3.4)$$

〔混合球〕 水冷壁出口流体と、節炭器出口流体が流体が混合されて、水冷壁へ流れる。連続の式から

$$F_{FW} - V_{RES} / v_0 = W_F \quad (5.3.5)$$

また水冷壁内流体の質量は一樣であるとすれば

$$W_F = V_{RES} / v_0 \quad (5.3.6)$$

と表わすこともできる。エネルギー保存則により

$$H_{FW} \cdot F_{FW} + H_{E,6} \cdot (V_{RES} / v_0) = H_{E,0} \cdot W_F \quad (5.3.7)$$

(5.3.5) と (5.3.7) より、混合球出口エンタルピ

$$H_{E,0} = H_{E,6} - (H_{E,6} - H_{FW}) \cdot F_{FW} / W_F \quad (5.3.8)$$

を得る。

〔節炭器と水冷壁〕 各ブロック内部の平均流体温度は

$$T_{F,e} = d(P_B, \alpha_e \cdot H_{E,e} + (1 - \alpha_e) \cdot H_{FW}) \quad (5.3.9)$$

$$T_{F,j} = d(P_B, \alpha_j \cdot H_{E,j} + (1 - \alpha_j) \cdot H_{E,j-1}) \quad (5.3.10)$$

$$(j = 1, 2, \dots, 6)$$

$$\text{ここで } 0 \leq \alpha_e, \alpha_j \leq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, 6) \quad (5.3.11)$$

なる定数である。この平均温度を用いて、各伝達熱は

$$Q_{GM,k} = C_{GM,k} \cdot F_{GAS}^{0.6} \cdot (T_{GAS} - T_{M,k}) \\ + S_{GM,h} \{ (T_{GAS} + 273.15)^4 - (T_{M,k} + 273.15)^4 \} \quad (5.3.12)$$

$$Q_{MF,e} = C_{MF,e} \cdot F_{FW}^{0.8} \cdot (T_{M,e} - T_{F,e}) \quad (5.3.13)$$

$$Q_{MF,j} = C_{MF,j} \cdot W_F^{0.8} \cdot (T_{M,j} - T_{F,j}) \quad (5.3.14)$$

$$(k = 1, 2, \dots, 6, e, \quad j = 1, 2, \dots, 6)$$

と表わされるから、熱方式はメタルに対して

$$\frac{dT_{M,k}}{dt} = C_{M,k} \cdot (Q_{GM,k} - Q_{MF,k}) \quad (5.3.15)$$

$$\text{流体に対して } \frac{dH_e}{dt} = C_{F,e} \{ (H_{FW} - H_{E,o}) \cdot F_{FW} + Q_{MF,e} \} \quad (5.3.16)$$

$$\frac{dH_j}{dt} = C_{F,j} \{ (H_{E,j-1} - H_{E,j}) \cdot W_F + Q_{MF,j} \} \quad (5.3.17)$$

$$(k = 1, 2, \dots, 6, e \quad j = 1, 2, \dots, 6)$$

そして水冷壁出口流体温度は

$$T_{WWO} = d(P_B, H_{E,6}) \quad (5.3.18)$$

で定まる。

このモデルの妥当性を確かめるために定格出力60万kWの発電所に設置された定格出力1,950 ton/hour のコンバインド・サーキュレーション・ボイラの場合にこのモデルを使用してシミュレーションを行ない実測値と比較してみた。パラメータは表5.3.1のように設定して起動時の動作をシミュレーションした結果が図5.3.5と図5.3.6であり、実測値と良く合致している。このモデルで起動時の状況はほぼ表現できると考えて良い。

### 5.3.3 ボイラ制御系

図5.3.7はボイラの制御系を描いたものである。概略的にいえば2段のカスケード制御系である。要求発生出力により給水、燃料、空気の流量の設定値のフィードフォワード成分を作り、こ

CFUL	CAIR	CGAS			
CF(E)	CM(E)	SG(E)	CGM(E)	CMF(E)	定数
CF(1)	CM(1)	SG(1)	CGM(E)	CMF(1)	
CF(2)	CM(2)	SG(2)	CGM(E)	CMF(2)	
CF(3)	CM(3)	SG(3)	CGM(E)	CMF(3)	
CF(4)	CM(4)	SG(4)	CGM(E)	CMF(4)	
CF(5)	CM(5)	SG(5)	CGM(E)	CMF(5)	
CF(6)	CM(6)	SG(6)	CGM(E)	CMF(6)	
HE(E)	TM(E)	PB			初期条件
HE(1)	TM(E)	PB	VRES	TGAS	
HE(2)	TM(E)	PB			
HE(3)	TM(E)	PB			
HE(4)	TM(E)	PB			
HE(5)	TM(E)	PB			
HE(6)	TM(E)	PB			
FLGT					
M2	M1	H	ALPHA		流れの設定
FFW	HFW	FFUL	FAIR	FLWS	
.....					

0.9579E 4	4	0.0049E 3	3	0.0026E 2	2		
0.0200		0.0234E-3		0.		0.0779E 2	2
0.1770		0.1960E-3		0.		0.	
0.0960		0.0962E-3		0.0306E-5		0.	0.0647E 2
0.4450		0.4865E-3		0.		0.	0.0696E 3
0.0375		0.0276E-3		0.1186E-5		0.	0.0147E 3
0.0895		0.0758E-3		0.		0.	0.1882E 3
0.0947		0.0750E-3		0.0483E-5		0.	0.0776E 3
0.0765E 3	3	0.6000E 2	2	0.0257E 8	8		
0.2222E 3	3	0.2150E 3	3	0.0257E 8	8	0.7000E 1	1
0.2222E 3	3	0.2150E 3	3	0.0257E 8	8		0.3800E 3
0.2222E 3	3	0.2150E 3	3	0.0257E 8	8		
0.2222E 3	3	0.2150E 3	3	0.0257E 8	8		
0.2222E 3	3	0.2150E 3	3	0.0257E 8	8		
0.2222E 3	3	0.2150E 3	3	0.0257E 8	8		
0							
25		100		0.0600E 0	0	1.0000E 0	0
0.2083E 4	4	0.7650E 2	2	0.0700E 3	3	0.7952E 4	4
0.2067E 4	4	0.7650E 2	2	0.1633E 3	3	0.7952E 4	4
0.2033 4	4	0.7650E 2	2	0.1667E 3	3	0.7952E 4	4
0.2000E 4	4	0.7650E 2	2	0.1583E 3	3	0.7952E 4	4
0.2000E 4	4	0.7650E 2	2	0.1500E 3	3	0.7952E 4	4
0.2000E 4	4	0.7650E 2	2	0.1533E 3	3	0.7952E 4	4
0.2000E 4	4	0.7650E 2	2	0.1633E 3	3	0.7952E 4	4
0.2000E 4	4	0.7650E 2	2	0.1633E 3	3	0.7952E 4	4
0.2033E 4	4	0.7650E 2	2	0.1633E 3	3	0.7952E 4	4
0.2067E 4	4	0.7650E 2	2	0.1700E 3	3	0.7952E 4	4
0.2053E 4	4	0.7650E 2	2	0.1767E 3	3	0.7952E 4	4
0.2133E 4	4	0.7650E 2	2	0.1700E 3	3	0.7952E 4	4
0.2167E 4	4	0.7650E 2	2	0.1800E 3	3	0.7952E 4	4
0.2233E 4	4	0.7650E 2	2	0.1833E 3	3	0.7952E 4	4
0.2167E 4	4	0.7650E 2	2	0.1833E 3	3	0.7952E 4	4
0.2033E 4	4	0.7650E 2	2	0.1833E 3	3	0.7952E 4	4
0.1900E 4	4	0.7650E 2	2	0.1833E 3	3	0.7952E 4	4
0.1833E 4	4	0.7650E 2	2	0.1833E 3	3	0.7952E 4	4
0.1800E 4	4	0.7650E 2	2	0.1833E 3	3	0.7952E 4	4

表 5.3.1 出力 1950 Ton/Hour のコンバインドサーキュレー

ションボイラのシミュレーションのための定数表

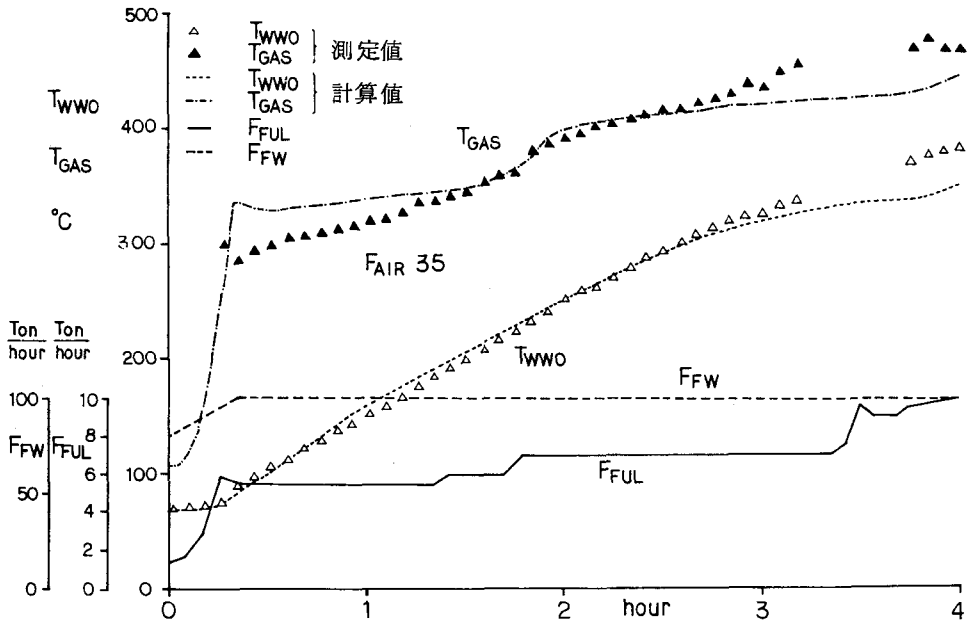


図 5. 3. 5 冷起動時のシミュレーション結果

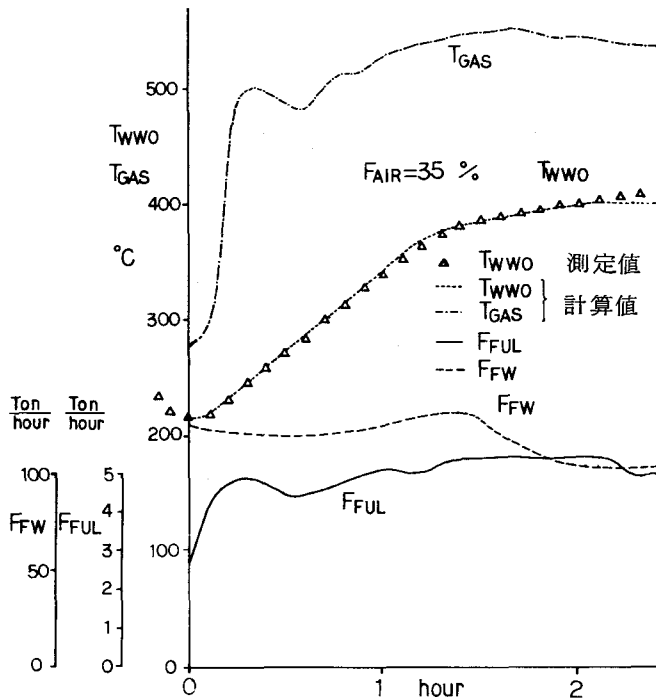
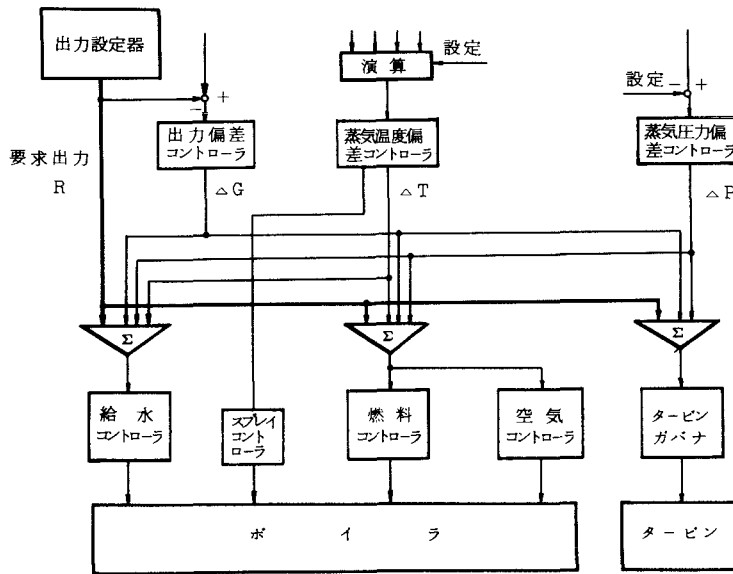


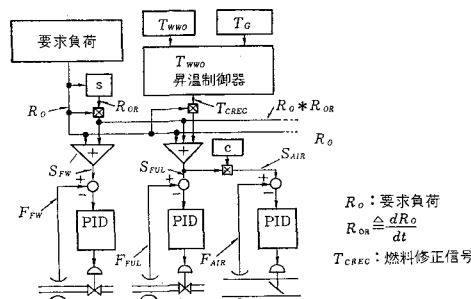
図 5. 3. 6 初期バランス時のシミュレーション結果

れを設定値の基盤とする。これにさらに発生出力電力，水冷壁出口流体圧力，水冷壁出口流体温度，および過熱器出口蒸気温度等の設定値からのずれをフィードバック成分として給水，燃料および空気の流量の設定値を修正する。このようにボイラ，タービン，発電機の全体のエネルギーのバランスを考えた制御系は協調制御系(Coordinated Controller)といわれる。超臨界圧ボイラのような応答の敏感なボイラにはこのような制御系が不可欠である。

ただし起動時には要求負荷は5%程度に保たれ，それが給水，燃料，空気の設定値を定める。フィードバック成分は総て切断される。そして燃料，空気の設定値には昇温制御系の出力が加えられる。



(a) ボイラ協調制御系



(b) 起動時での昇温制御系

図 5. 3. 7 ボイラ協調制御系と昇温制御系



### 5.3.4 水冷壁出口流体温度昇温制御系 (A1), (B4)

燃料の設定値を  $S_{FUL}$ , 要求負荷  $R_0$ , 起動時の水冷壁出口流体温度制御系の出力を  $T_{CREC}$  とすると

$$S_{FUL} = a_{FUL} \cdot R_0 + T_{CREC} \quad (5.3.19)$$

となる。

$a_{FUL}$  は適当な定数である。空気流量の設定値  $S_{AIR}$  は

$$S_{AIR} = a_{AIR} \cdot S_{FUL} \quad (5.3.20)$$

で与えられる。

起動時には図 5.3.3 のように  $T_{WWO}$  の変化率  $T_{WWO}$  を指定した値  $D_{TWWO}$  とするのが目的である。

今  $T_{WWO}(t)$  のサンプル周期  $T_S$  毎のサンプル値を  $T_{WWO,j}$  とし,  $T_{WWO,j}$  のカスケードデジタル微分フィルタ  $\mathcal{D}_M^{(1)}(z)$  の出力を  $\hat{T}_{WWO,j}$  とする。このとき制御周期を

$$T_C = I_C \cdot T_S$$

としておく。5.3.2 のシミュレーションの結果からもわかる通り超臨界圧ボイラの場合もドラム式ボイラの場合と同じように燃料流量と水冷壁出口流体温度との間の関係はほぼ  $1/S$  特性であるので, 便宜上

$$u_k = S_{FUL}(k \cdot T_C), \quad y_k = \hat{T}_{WWO,k} \cdot I_C \quad (5.3.21)$$

とすると近似的に

$$Y_k = \alpha \cdot Y_{k-1} + \beta \cdot (u_k - u_{k-1}) \quad (5.3.22)$$

という関係が成立する。ここで  $\alpha$  は 1 の近辺の値,  $\beta$  は正の数である。 $\alpha$  と  $\beta$  はほぼ定数と考えられるが, 水の物性の急変する遷移域の前後で変化する。

そこで,  $y_k = D_{TWWO}$  となるように  $u_k$  を定めると

$$u_k = u_{k-1} + \frac{\alpha}{\beta} \cdot (D_{TWWO} - y_{k-1}) + \frac{1-\alpha}{\beta} \cdot D_{TWWO} \quad (5.3.23)$$

又は

$$S_{FUL}(t) = S_{FUL}((k-1) \cdot T_C) + \frac{\alpha}{\beta} \cdot (D_{TWWO} - T_{WWO}^{(1)}((k-1) \cdot T_C)) + \left(\frac{1-\alpha}{\beta}\right) \cdot D_{TWWO} \quad (5.3.24)$$

$$((k-1) \cdot T_C < t \leq k \cdot T_C)$$

のような制御系を構成することができる(図 5.3.8)

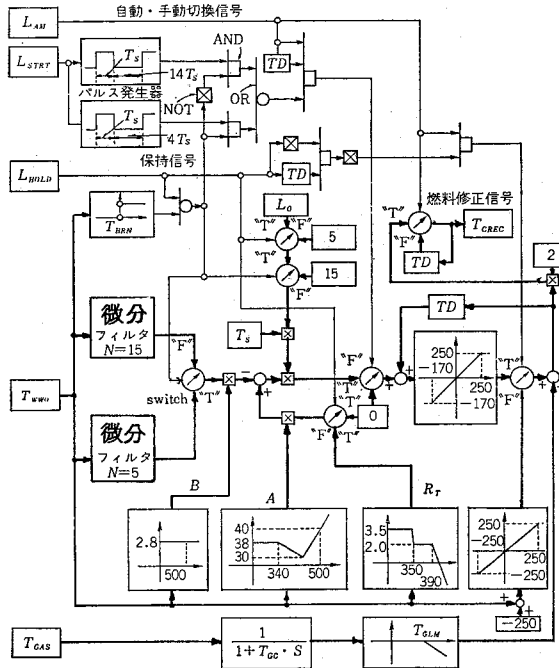


図 5.3.8 水冷壁出口流体昇温制御系

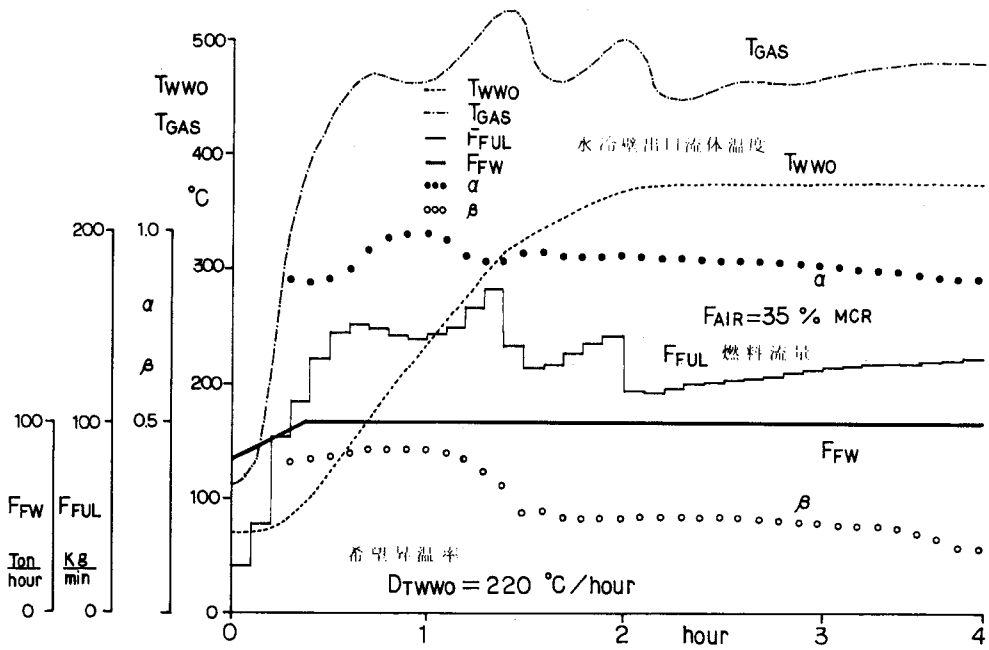


図 5.3.9 シミュレーションによる昇温制御系のテスト結果

### 5.3.5 シミュレーションによる昇温制御系のテスト

5.3.4 で考えた水冷壁出口流体出口温度制御系の性能を確かめるために5.3.2 で作成したシミュレータを用いて昇温性能を調べた結果が図5.3.9である。この制御系では $T_S = 1 \text{ sec}$ 、 $I_C = 360$ 、 $T_C = 6 \text{ min}$ とし、フィルタは $M=1$ 、 $m=180$ 、 $IEO=0$ とした。またこの例では $\alpha$ と $\beta$ を(5.3.22)の関係と最小自乗法を用いて推定し、その値を用いて(5.3.24)により燃料流量を定めるような適応制御系とした。これらの結果はこの制御系が十分良い制御性能を持つことを示すと共に $\alpha$ と $\beta$ は水冷壁出口流体温度の関数で与えれば十分であることを示している。そこでこれを実ボイラに適用できる可能性を得たわけである。

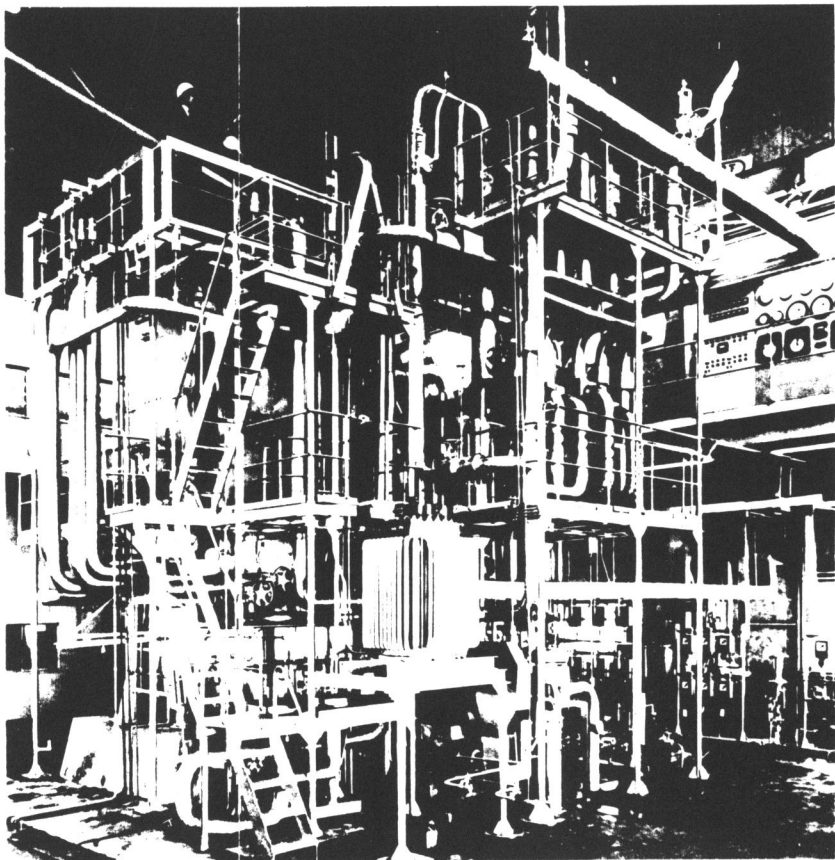


図 5.3.10 テスト用ボイラ〔三菱重工(株)長崎研究所〕

ボイラ	形式	三菱 CE-スルザー・コンバインドサーキュレーション
	蒸気量	2 t/h
	蒸気圧力	246 kg/cm <sup>2</sup> (設備能力 350 kg/cm <sup>2</sup> )
タービン発電機シミュレータ	MELCOM EA-7160	アナログ計算機
	給水ポンプ	3速フランジ形可変速 (V.S.モータ) 入出力ラインに蓄圧器付
燃焼系	火 戸	垂直火戸、平衡通風
	バーナ	空気噴霧式 2バーナ兼・ガントップファイリング
	イグナイタ	フロント式 プロパンガスイグナイタ 1台
	火炎検出器	紫外線式 三菱-CEフレムスキャナ 1台

制 御 装 置	計算機システム	
	システム名称	MELCOM 350-30F SYSTEM
	記憶容量	主メモリ (コア) 32 KWDS 補助メモリ (磁気ドラム) 128 KWDS (1 WD = 16 BITS + 1 PARITY BIT)
	サイクルタイム	2.0 μ Sec
	周辺装置	システムタイプライタ 1台 アナウンスマント タイプライタ 1台 紙テープパンチ 1台 紙テープリーダー 1台
	入出力	アナログ入力 93 (112) 点 デジタル入力 184 (224) 点 プロセス割込入力 23 (24) 点 アナログ出力 (RD) 10 (10) 点 パルス中出力 29 (32) 点 デジタル出力 231 (256) 点
		* 拡張内蔵機能あり
		アナログ制御装置 (サブシステム) 電子式 MS-70 シリーズ
		バーナコントロールロジック (サブシステム) 電磁リレー式 (MELCAP を 1 次試験に使用)

表 5. 3. 2 テスト用ボイラの設備概要

#### 5. 4 テスト用 ボイラによるテスト

##### 5. 4. 1 テスト用コンバインド・サーキュレーション・ボイラ

提案した超臨界圧ボイラの水冷壁出口流体温度の昇温制御系の有効性がシミュレーションにより確かめられたので、これを実ボイラに適用し、実際の有効性を確かめることができた。その結果を最後に紹介する。

このテストに用いたボイラはボイラの製造上のテスト、蒸気の工学上のテスト等の目的のために三菱重工㈱の長崎研究所に設置されているもので、表 5. 3. 2 のような設備内容を持つものである。蒸気出力は 2. Ton/ Hour と極く小さなものであるが、蒸気の条件 ( 圧力 246 kg/cm<sup>2</sup> , 温度 538°C ) は 1.950 Ton/ Hour (60万 KW に相当) 規模の事業用ボイラと全く同じであり、主要な装置も規模以外は同じと考えてよい。ただしタービン発電機は設置されておらず、その目的のためにアナログ計算機 MELCOM EA-7160 がシミュレータとして設置されている。ボイラの概観を図 5. 3. 10 に与えた。

##### 5. 4. 2 計装と DDC システム

ボイラ制御系としてはアナログ・ワイアド・ロジック制御系の他に、DDC 制御系を実現するために制御用計算機 MELCOM 350-30F が併置されていた。ここで行ったテストはこの DDC 制御系で実施したものである。この場合には図 5. 3. 7 に示した協調制御系の給水制御器、燃料制御器、空気制御器、蒸気温度圧力器等は総て DDC 化された PID 制御器である。これらの制御器は制御周期が 2 ~ 120 秒で駆動された。この DDC によるテスト結果は昭和 47 年三菱重工㈱と三菱電機㈱の共同研究の成果として各電力会社、電力中央研究所等をまねいて発表された。<sup>(61)</sup> 詳

細は文献(61), (62)に発表されている。

昇温制御系は図5.3.7(b)のような位置に挿入される。図5.3.8は実験で用いた昇温制御系である。サンプル周期は $T_S = 6 \text{ sec}$ で、 $M=1$ ,  $m=7$ ,  $IEO=1$ と $M=1$ ,  $m=7$ ,  $IEO=1$ の2つの微分フィルタが設置されている。昇温途中で水冷壁出口温度を保持するときと定格温度近くなったとき後者の値を用いる。制御周期は $T_C = 2 \text{ min}$  ( $I_C = 15$ )だが、保持中と定格付近では $T_C = 30 \text{ sec}$  ( $I_C = 5$ )である。

#### 5.4.3 昇温制御系のテスト結果

希望昇温率は $D_{TWWO} = 205 \text{ }^\circ\text{C}/\text{Hour}$ として冷態起動した結果が図5.3.11である。下段に微分フィルタの出力が記録されていて、ほぼ希望昇温率を達成しているのがわかる。

ただし最終設定温度が $415 \text{ }^\circ\text{C}$ に比べて少し行き過ぎたので、制御パラメータ(図5.3.8の $R_T$ )を修正して実験したものが図5.3.12であり、行き過ぎは改善されている。図5.3.8は、保持状態を含む場合のテスト結果である。これらの結果よりこの制御系が十分実用的であることがわかった。尚ここで与えた記録は計算機よりトレンド・レコーダへ出力し記録したものである。

#### 5.5 ま と め

第2章で提案したデジタル微分フィルタは同定以外にも有効に利用し得ることを示すためにドラム式ボイラの起動時昇温昇圧制御系と超臨界圧ボイラの起動時昇温制御系の構成への適用について論じた。その制御性能を確かめるためにシミュレーションと、テスト用に設置された実ボイラによるテストを行ない、その結果から考えて、それらが十分に実用に耐え得るものであることを示した。

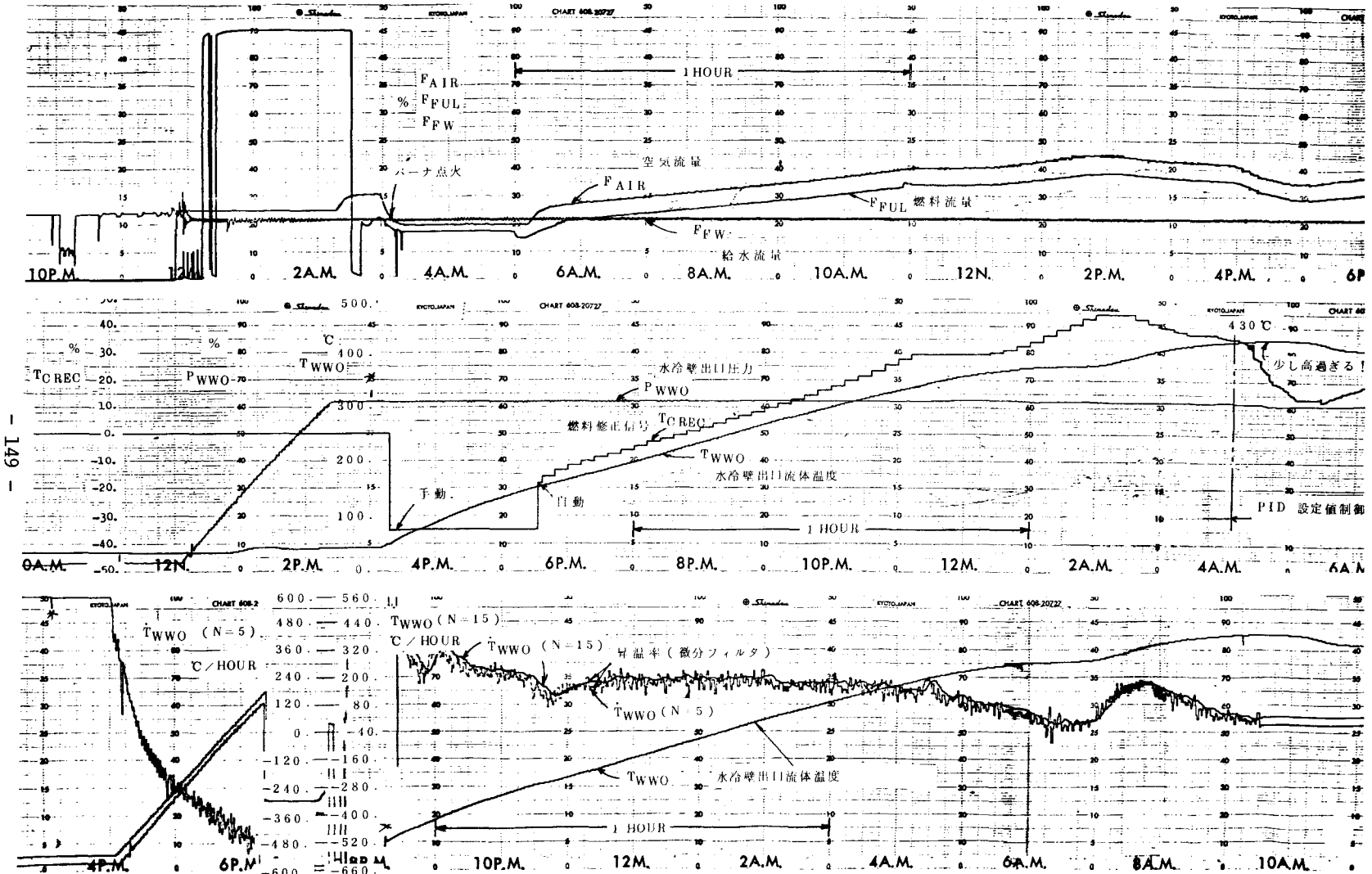


図 5.3.1.1 定格温度までの昇温 (パラメータ修正前)

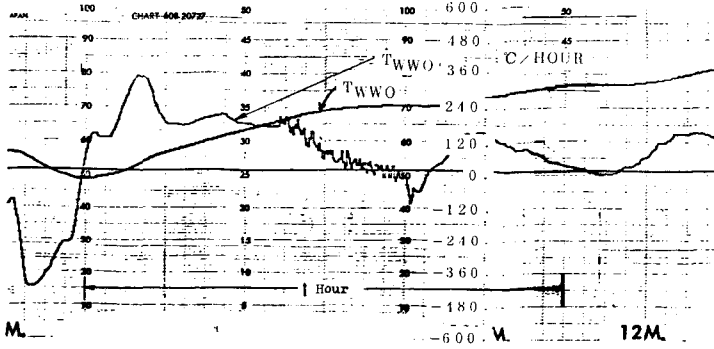
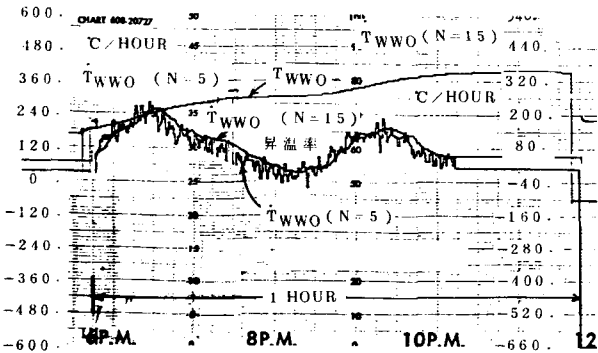
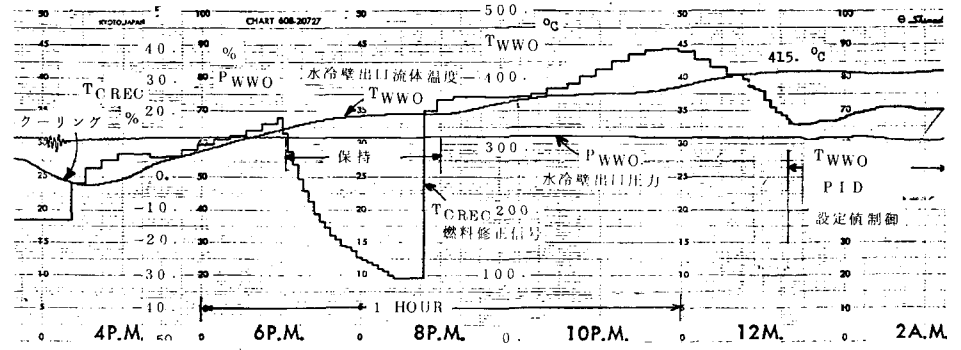
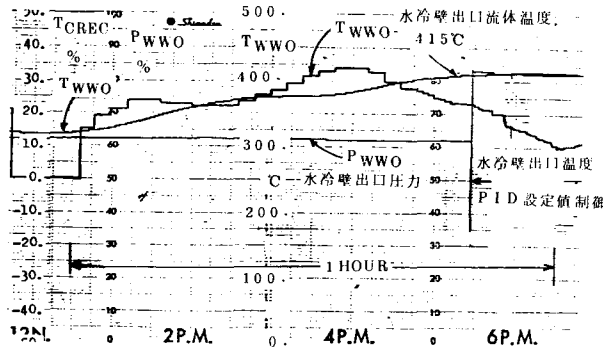
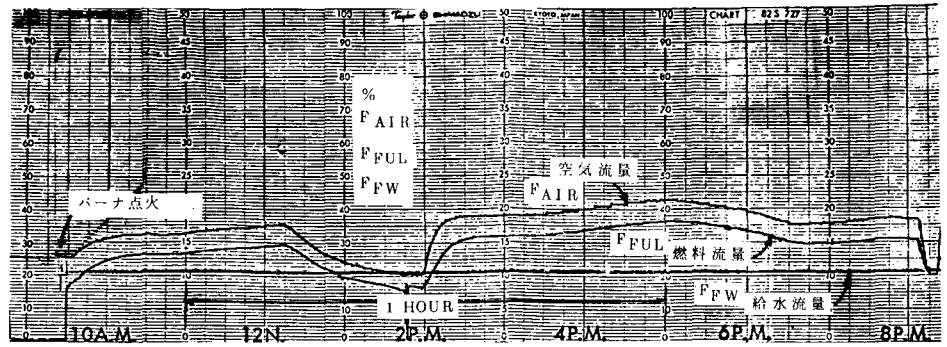
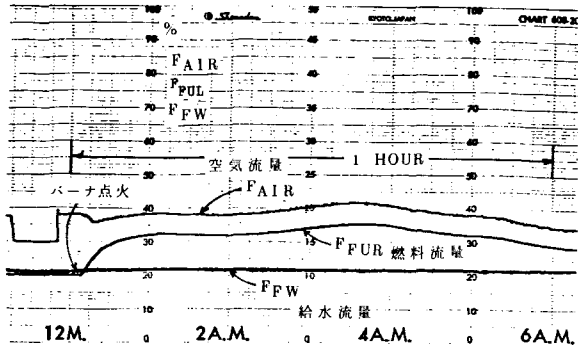


図 5.3.12 定格温度までの昇温 (パラメータ修正後)

図 5.3.13 途中で昇温保持を含むもの

## 結

## 論

信号の微分を求め、これを利用しようとするは従来よりできれば避けて通るべきものとされてきた。それは微分をするという演算は高域の周波数成分に敏感であるために、雑音の存在する場合など、そのレベルやスペクトルの分布の状況等によっては本来の信号の微分信号とは似ても似つかない信号を出力するが多かったことによる。ところが一方で距離の微分としての速度、加速度等、微分することにより物理的に本質的な量が導き出されることを知っている。本来多くの自然の法則が微分方程式に基づいて議論されることからその重要性が認識できる。

著者は観測信号の極く低域の成分の微分信号のサンプル値を、デジタル・フィルタを用いて抽出する方法を採用した。特に有限インパルス応答形といわれる形式のデジタル・フィルタに着目し、これを用いると理想的な線形位相特性を持たせることができるのでこの特性を持つものに範囲を限定した。最小自乗法と Zolotarev 多項式を用いた1階の狭帯域のデジタル微分フィルタの設計法を与え多くの設計例を与えた。又低域と1階の微分フィルタを適当に選びこれらをカスケード接続すると位相特性が同じで、しかも同じ低域スペクトル成分の信号の任意階の微分信号を得ることができることを示し、これをカスケード形デジタル微分フィルタと名付けその設計データと特性について詳細に検討を加えた。

カスケード形デジタル微分フィルタの応用として定常線形システムの同定特にその入出力信号のサンプル値を基にして直接伝達関数を推定する手法を提案し、簡単な2つの例を用いてシミュレーションによりその妥当性を示した。

さらにこの同定法の有効性を確かめるために実際の工業プラントの同定に利用してみた。すなわち火力発電所におけるタービン発電機系の特性、製紙工場での抄紙機の坪量系、水分系の特性そして製鉄工場でのレバーシング・コールド・ミルの特性の推定を行ない、従来よりの経験より得られた値に近い結果を得ることができ、ほぼその有効性が確かめられた。

最後にこのカスケード形デジタル微分フィルタの他の応用としてドラム形ボイラの起動時昇温昇圧制御系の構成、超臨界ボイラの起動時昇温制御系の構成について示し、これらの性能はシミュレーションにより妥当性を確かめたりえて、テスト用に設置された実ボイラ等により実験テストし、十分実用に供し得るものであることを確かめることができた。

このように観測信号よりデジタル微分フィルタを用いて微分信号を抽出する手法は極めて有用であることを確かめることができたので、さらに別の制御分野へも適用できるものと確信しさらに研究を進めることにして、この論文の結論とする。



## 謝 辞

この研究は著者が三菱電機株式会社において計算機制御に関する研究を進める過程で得られた結果をまとめたものである。

著者が三菱電機において研究生活を始めるに際し同定問題への興味とその研究への動機を与えて下さればかりか、今日この研究の遂行とまとめにあたり御厚意あふれる御指導を賜った大阪大学工学部電気工学科鈴木胖教授，そしてこの研究をまとめるにあたり懇切な御教示と御審査をいただいた同電気工学科藤井克彦教授，同西村正太郎教授，同通信工学科児玉慎三教授，そして同機械工学科増淵正美教授に対して深く感謝の意を表する次第であります。

又学会等の場において種々有益な御教示と御討論をいただいた先生方，特にデジタル・フィルタに関し有益な御教示をいただいた東北大学工学部電子工学科樋口龍夫助教授，同田所嘉昭博士そしてZolotarev 多項式の存在と計算法について御教示をいただいた東京工業大学工学部電気電子工学科後藤尚久助教授，制御工学での種々の問題につき御討論いただいた横浜国立大学工学部安全工学科清水久二助教授，調和解析に対する御指導をいただいた慶応義塾大学工学部情報工学科魚返正教授，著者に数理解析の面白さを植付けて下された恩師都立高校教諭千秋駿一氏の方々に対して深く感謝の意を表する次第であります。

そして実際のプラントよりのデータの採取や実験プラントの利用等に関して御援助と御協力をいただいた関西電力株式会社，新日本製鉄株式会社，三菱製紙株式会社，および三菱重工業株式会社の関係各位に深く感謝の意を表する次第であります。

又常に適切な研究目標と御鞭達をいただき，研究の遂行に際しては数々の御便宜を計っていただいた三菱電機システム事業部のコンピュータ・システム工場の武田英夫工場長，米沢克昌部長，久保田伸夫次長，専門部長真鍋舜博士，新宅三喜男部長代理，花村泰助部長代理，小田橋正寿部長代理，橋本健司部長代理，五十嵐真部長代理，中谷貴寿部長代理および関連分野の各担当者の方々に深く感謝の意を表します。

最後に著者の研究生活の初期よりお世話いただいた三菱電機（株）中央研究所副所長馬場準一博士，同計算機事業部電子計算機営業第二部大鳥羽幸太郎部長，同計算機事業部長付中村敏行氏そしてこの論文を書く機会を与えていただき種々の御援助をいただいた同計算機事業部計算機製作所ソフトウェア製造部次長首藤勝博士，著者の上長としてお世話いただいている同計算機事業部計算機研究部の松本大四部長，同関本彰次主任研究員，また種々の数理解析につき御指導いただいた半場哲専門課長および多くの同僚各位に対して，又一年間の短い期間であったけれども種々の有益な御教示をいただいた三菱電機（株）中央研究所主任研究員上村勝彦博士，同主任研究員伊藤貴康博士に対して，日頃のお礼をこめて感謝の意を表します。

そしてこの研究をまとめるにあたっては我が妻喬子の並々ならぬ助力を受けたことを記し，私事ではありますが感謝の意を表しておきたいと思っております。

## 付 録

### 一般化逆行列

任意の行列  $\mathbf{A}$  に対して次の 4 つの性質を満たす行列  $\mathbf{X}$  が存在する。すなわち

$$1. \quad \mathbf{A X A} = \mathbf{A} \quad (\text{付-1})$$

$$2. \quad \mathbf{X A X} = \mathbf{X} \quad (\text{付-2})$$

$$3. \quad (\mathbf{A X})^* = \mathbf{A X} \quad (\text{付-3})$$

$$4. \quad (\mathbf{X A})^* = \mathbf{X A} \quad (\text{付-4})$$

である。右肩の  $*$  は転置共役を意味する。 $\mathbf{A}$  が実数行列なら “ $*$ ” は “ $T$ ” で良い。

この  $\mathbf{X}$  のことを  $\mathbf{A}$  の一般化逆行列といい  $\mathbf{A}^+$  と表わす。

一般化逆行列には興味ある性質がたくさんあるが、この論文で用いている結果だけをまとめておく。便宜上  $\mathbf{A}$  は  $m \times n$  行列で  $\text{rank } \mathbf{A} = r$  としておく。

$$〔性質-1〕 \quad \mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^+ \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^+ \quad (\text{付-5})$$

$$\text{特に } r = n \text{ なら } \quad \mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \quad (\text{付-6})$$

$$r = m \text{ なら } \quad \mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} \quad (\text{付-7})$$

$$〔性質-2〕 \quad \mathbf{A}^+ \cdot (\mathbf{A}^+)^T = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^+$$

$$〔証明〕 \quad \mathbf{A}^+ (\mathbf{A}^+)^T = \{ (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^+ \cdot \mathbf{A}^T \} \{ (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^+ \cdot \mathbf{A}^T \}^T \quad (\text{付-5}) \text{ より}$$

$$= (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^+ \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^+$$

$$= (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^+ \quad (\text{付-2}) \text{ より} \quad (\text{付-8})$$

〔性質-3〕  $\mathbf{B}$  を  $m \times \ell$  行列として行列方程式

$$\mathbf{A X} = \mathbf{B} \quad (\text{付-9})$$

を考える。この場合

〔1〕  $m \leq n$  のときは  $\mathbf{C}$  を  $n \times \ell$  の任意行列として

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^+ \cdot \mathbf{B} + (\mathbf{I} - \mathbf{A}^+ \mathbf{A}) \mathbf{C} \quad (\text{付-10})$$

〔2〕  $m > n$  のとき (付-9) を満たす  $\mathbf{X}$  は必ずしも存在しないが

$$\| \mathbf{A X} - \mathbf{B} \|^2 \quad (\text{付-11})$$

を最小にする  $\mathbf{X}$  は

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^+ \cdot \mathbf{B} \quad (\text{付-12})$$

で与えられる。

## 参 考 文 献

- (1) アイ・マリツェフ「線型代数学」 1  
商工出版 (1960)
- (2) 古田勝久 「線形システム理論」  
昭晃堂 (1973)
- (3) R. Penrose "A Generalized Inverse for Matrices"  
Proc. Cambridge Philos. Soc., 51, pp.406-413 (1955)
- (4) R. Penrose "Qr Best Approximate Solutions of Linear Matrix  
Equations", Proc. Cambridge Philos. Soc., 52, pp.17-19 (1956)
- (5) R. E. Cline "Representations for the Generalized Inverse of a  
Partitioned Matrix,"  
J. SIAM, Vol. 12, No. 3, pp.588-600 (1964)
- (6) J. L. Doob "Stochastic Processes"  
John Wiley and Sons (1953)
- (7) N. Wiener "Generalized Harmonic Analysis"  
Acta Math., Vol. 55, pp. 117-258 (1930)
- (8) 藤井光昭 「時系列解析」  
コロナ社 (1974)
- (9) N. Wiener "Extrapolation Interpolation and Smoothing of Stationary  
Time Series."  
M. I. T. Press (1949)

- (10) 伊藤 清 「確率論」  
岩波書店 (1953)
- (11) K.W.Goff "Estimating Characteristics and Effects of Noisy Signals"  
ISA Jour. , pp. 45-49 (1966, Nov.)
- (12) 河田 竜夫 「応用数学概論Ⅱ」  
岩波書店 (1952)
- (13) 国沢清典 「近代確率論」  
岩波書店 (1951)
- (14) 国沢清典 「現代統計学 上,下」  
広川書店 (1956)
- (15) R.E.A.C. Paley and N.Wiener "Fourier Transforms in the Complex Domain"
- (16) 鈴木 胖, 藤井 克彦「操業状態における一般化した線形プロセスの動特性推定」  
電気学界雑誌, Vol. 87-2, №941, pp. 432-440(1967.2)
- (17) 鈴木, 藤井 「プロセス同定問題への最小自乗法の応用」 計測と制御, Vol. 10,  
№8, pp 563-578 (1971)
- (18) 鈴木, 古谷, 藤井 「動特性推定に用いるプロセス操業データの処理方法」計測自動制御  
学会論文集, Vol. 4, №2, pp. 175-181 (1968)
- (19) 鈴木, 古谷, 藤井 「最小自乗法による無定位性プロセスの動特性決定」計測自動制御学会  
論文集, Vol. 2, №4, pp. 289-294. (1966)
- (20) 高木 貞治 「代数学講義」  
共立出版 (1930)

- (21) 鈴木 胖 「アイデンティフィケーションの基礎理論」  
自動制御技術 12
- (22) 鈴木, 峠, 藤井, 西村 「最小自乗法による線形プロセスの動特性決定について」計測自動  
制御学会論文集, Vol. 1, № 2, pp. 163-173 (1965)
- (23) 茅 陽一 「相関を利用した周波数応答測定法」計測と制御  
Vol. 2, № 1, pp 33-40 (1963.1)
- (24) M.J. Levin "Optimum Estimation of Impulse Response in the  
Presence of Noise", IRE Trans.on Circuit T.
- (25) M.J. Levin "Estimation of a System Pulse Transfer Function in  
the Presense of Noise", IEEE Trans., Vol. AC-9, № pp. 229-235  
(1964)
- (26) K. Steiglitz and L.E. Mcbride "A Technique for the Identification  
of Linear Systems", IEEE Trans., Vol.AC-10, № 5, (1965.10)
- (27) K.G. Oza and E.I. Jury "System Identification and Principle of  
Random Contraction Mapping", SIAM J. Control, Vol.6, № 2,  
pp. 244-257 (1968.4)
- (28) 古田, 河 「多変数系の同定」  
計測自動制御学会論文集, Vol. 8, № 5, pp. 561-567 (1972)
- (29) D.G.Luenberger "An Introduction to Observer"  
IEEE AC-19, № 16, pp. 596-602 (1971)
- (30) C.M. Rader, B.Gold "Digital Filter Design Technipues in the  
Frequency Domain"  
Proc. IEEE, Vol. 55, № 2, pp. 149-170(1976)

- (31) B. Gold, C.M. Rader "Digital Processing of Signals"  
Mac GRAW-Hill (1969)
- (32) Achieser "Vorlesungen über Approximationstheorie"  
Akademie-Verlag, Berlin (1953)
- (33) 竹内端三 「楕円函数論」  
岩波書店 (1936)
- (34) R. Levy "Generalized Rational Functions Approximation in Finite  
Intervals Using Zolotarev Functions" IEEE Trans., MTT-18,  
pp. 1052-1064 (1970)
- (35) N. Goto "An Application of Zolotarev Polynomial to Array Antenna  
Synthesis" Trans. IECE, Vol. E-52, No. 1, pp. 9-12 (1976)
- (36) 竹内端三 「函数論」下巻  
裳華房 (1974)
- (37) 長沢, 岡本, 谷口, 森本 「蒸気タービンの広域回転数制御装置(DACA)」  
三菱重工技報, Vol. 4, No. 3, pp. 11~19 (1967)
- (38) 高橋, 関根 「フロー交流法による潮流計算」  
電気学会誌, Vol. 88, No. 10, pp. 199-208 (1968)
- (39) 谷下 「ボイラの蓄熱容量」  
日本機械学会誌, Vol. 56, No. 417, pp. 760-763 (1953)
- (40) 片岡, 加藤, 古沢 「図説電気工学大事典; 火力発電編」  
電気書院 (1967)
- (41) 島, 小笠原, 佐々木, 藤原 「超臨界圧コンバインド・サーキュレーション・ボイラの制御」  
三菱重工技報, Vol. 4, No. 3, pp. 20-26 (1967)

- (42) R. R. Debolt "A "Natural" 3-Mode Controller Algorithm for DDC"  
ISA Jour., pp. 43-47 (1966, Sept.)
- (43) J. J. Miller "Time-Optimal Control of Basis Weight" Instrumentation Technology, pp. 41-47 (1972, March)
- (44) G. F. Bryant, M. H. Butterfield " Simulator Assessment of Tandem Cold-Rolling-Mill Automatic Gange-Control Systems "  
Proc. IEE, Vol. 111, No. 2, pp. 393-405 (1964)
- (45) 相良, 和田 「バイアス補償最小自乗法による推定」  
計測自動制御学会論文集, Vol. 10, No. 4, p. 461-467 (1974)
- (46) C. K. Yuen "Function Approximation by Walsh Series", IEEE Trans. Com., Vol. C-24, No. 6, pp. 590-598 (1975.6)
- (47) E. Parzen "Some Recent Advances in Time Series Modeling", IEEE Trans., Vol. AC-19, No. 6, pp. 723-730 (1974. 12).
- (48) L. R. Rabiner and R. W. Schafer "On the Behavior of Minimax Relative Error FIR Digital Differentiators", Bell Syst. Tech. J., Vol 53, No. 2, pp. 393-361 (1974. 2)
- (49) L. R. Rabiner and R. W. Schafer "On the Behavior of Minimax FIR Digital Hilbert Transformers", Bell Syst. Tech. J., Vol. 53, No. 2, pp. 363-393 (1974. 2)
- (50) J. H. McClellan, T. W. Parks and L. R. Rabiner "A Computer Program for Designing Optimum FIR Linear Phase Digital Filters", IEEE Trans., Vol. AU-21, No. 6 pp. 506-526 (1973. 12)
- (51) A. Peled and B. Lin "A New Approach to the Realization of Nonrecursive Digital Filters", IEEE Trans. Vol. AU-21, No. 6, pp. 477-484 (1973. 12)
- (52) M. A. Muslander and J. F. Jaffe "Functional Structure of IBM Virtual Storage Operating Systems", IBM Syst. J., Vol. 12, No. 4, pp. 368-411 (1974)

- (53) C. S. Duris and M. G. Temple "A Finite Step Algorithm for Determining the "Strict" Chebyshev Solution to  $A \cdot x = b$ ", SIAM J. Numer. Anal., Vol. 10, No. 4, pp.690-699 (1973. 7)
- (54) G. C. Maenhout and W. Steenaert "A Direct Approximation Technique for Digital Filters and Equalizers", IEEE Trans., Vol. CT-20, No. 5, pp. 548-555 (1973. 7)
- (55) T. Pavlidis "Waveform Segmentation through Functional Approximation", IEEE Trans., Vol. C-22, No. 7, pp. 689-697 (1973. 7)
- (56) S. Yakowitz and S.R. Parker "Computation of Bounds for Digital Filter Quantization Errors", IEEE Trans., Vol. CT-20, No. 4, pp. 391-396 (1973. 6)
- (57) K. S. Chao and K. S. Lu "On Sequential Refinement Schemes for Recursive Digital Filter Design", IEEE Trans., Vol. CT-20, No.4 pp. 396-401 (1973. 6)
- (58) D. S. K. Chan and L. R. Rabiner "Theory of Roundoff Noise in Cascade Realization of Finite Impulse Digital Filters" Bell Syst. Tech. J., Vol. 52, No. 3, pp. 329-345 (1973. 3)
- (59) J. E. Shore "On the Application of Haar Functions" IEEE Trans., Vol. COM-21, No. 3, pp. 209-216 (1973. 3)
- (60) J. Wolf and W. L. Green "Application of a Minicomputer for Practical Realization of Predictive Compensation", ISA Trans., Vol. 12, No. 3, pp. 265-280 (1973. 7)
- (61) 「火力発電所計算機制御技術研究会報告」 その1  
三菱重工(株), 三菱電機(株), (1973)
- (62) K. Fujii, S. Oyagi, T. Kamei, H. Morimoto,  
H. Yoshitoshi and S. Watanebe " Application  
of Digital Control to Thermal Power plant  
for Automotion ", 4 th IFAC/IFIP Inter. Conf.  
on Digital Comp. Appl. to Process Control,  
pp. 184-195 (1974. 3)



## 著者発表関連論文一覧表

### 学会正論文

- (A1) 立花「同定を含む超臨界圧ボイラ水冷壁出口温度の起動時昇温制御」計測自動制御学会論文集, Vol.8, No.2, pp.147-154 (1972.4)
- (A2) 立花「デジタル・フィルタを用いた同定」計測自動制御学会論文集, Vol.9, No.4, pp.438-445 (1973.8)
- (A3) 立花, 首藤「ハイブリッド・フィルタを用いた変化率の計測」計測自動制御学会論文集, Vol.11, No.3, pp.328-332 (1975.6)
- (A4) 立花, 首藤「カスケード・デジタル微分フィルタによる伝達関数の推定」電子通信学会論文誌, Vol.58-D, No.9, pp.546-538 (1975.9)
- (A5) 半場, 立花「有限Haar展開を用いた心電図の表現と認識について」電気学会論文誌 C, Vol.7, No.7, pp.149-156 (1976.7)

### 国際会議予講集 (\*印 本人発表)

- (B1)\* K. Uemura & Y. Tachibana: Practical Method for State Estimation in Power System. Proc. IFAC Kyoto Symposium on System Engineering Approach to Computer Control. pp. 467-471 (1970.8).
- (B2) K. Uemura & Y. Tachibana: Simplified Estimator for Power Systems State Estimation, IEEE Winter Power Meeting, 71-cp-19-PWR (1971.2).
- (B3)\* Y. Tachibana & M. Sudo: A Computer Evaluation taking into account of its sequential Behaviour, Proc. of IFAC/IFIP Workshop on Real-Time Programming, Hungary pp. 219-229 (1974.3)

- (B4)\* Y. Tachibana & T. Kamei: Temperature Raise Control of Super Critical Boiler using Derivative Digital Filter, Proc. of 4th IFAC/IFIP Intrn. Conf. On Digital Computer Applications to Process Control, Zurich Switzerland, pp. 382-393 (1974. 3).

学 会 誌

- (C1) 立花「最近の計算機制御に関する研究の動向」  
電子通信学会誌, Vol. 58, No. 3, pp. 281-284 (1975. 3)

学会研究会資料

- (D1) 半場, 立花「Fourier 展開係数の評価の一方法について」電気学会プログラム研究会資料13-2 (1970. 10)
- (D2) 立花, 半場「信号の変化率を抽出するアルゴリズムについて」電気学会情報処理研究会資料 IP-71-24 (1971. 12)
- (D3) 半場, 立花「ディジタル・フィルタを用いた相関関数の近似的計算法」電気学会情報処理研究会資料 IP-73-7 (1973. 4)
- (D4) 立花, 紀本, 首藤「シーケンス制御系としての電子計算機系の評価について」電子通信学会電子計算機研究会資料 EC73-18 (1973. 6)
- (D5) 半場, 立花「高速ハール展開 (FHT) について」電気学会情報処理研究会資料 IP-73-13 (1973. 7)
- (D6) 立花, 紀本, 首藤「むだ時間を固定する線形系同定プログラムシステムについて」電子通信学会回路とシステム研究会資料 CST-74-4 (1974. 4)
- (D7) 立花, 紀本, 首藤「カスケード微分ディジタル・フィルタについて」電子通信学会回路とシステム研究会資料 CST-74-22 (1974. 6)

- (D8) 立花, 首藤「循環形待行列モデルによる計算機システムの性能評価シミュレータ」電子通信学会電子計算機研究会資料 EC75-7 (1975.5)
- (D9) 立花「カスケード微分フィルタを用いた状態観測器について」電子通信学会回路とシステム理論研究会資料 CST75-68 (1975-10)

#### 学会講演会

- (E1) 立花「変化率推定フィルタについて」  
計測自動制御学会北海道支部 (1969.11)
- (E2) 上村, 立花「一般化逆行列を用いた状態の推定」  
電気学会講演会 (1970.2)
- (E3) 上村, 立花「電力潮流の逐次推定」  
電気学会講演会 (1970.2)
- (E4) 上村, 立花「大規模システムの状態推定」  
第9回計測自動制御学会学術講演会 (1970.8)
- (E5) 立花「変化率デジタルフィルタについて」  
第14回自動制御連合講演会 (1971.11)
- (E6) 立花「システム分解によるDDCのフェイルセーフの復帰性と自動手動の切替」  
第11回計測自動制御学会学術講演会 (1972.8)
- (E7) 立花, 居原田, 首藤「DDC言語MDSSによるボイラ昇温制御系の構成と適用」  
第15回自動制御連合講演会 (1972.11)
- (E8) 居原田, 首藤, 立花「DDCにおけるPIDアルゴリズムの飽和特性について」  
昭和47年度電気関係学会関西支部連合大会 (1972.10)

- (E9) 居原田, 立花, 首藤「DDC用PI制御器の最適パラメータ決定のためのシミュレーション・プログラム」  
昭和48年度電子通信学会全国大会 (1973)
- (E10) 立花, 紀本, 首藤「汎用同定プログラム(GIDS)について」  
昭和49年度電子通信学会全国大会 (1974)
- (E11) 立花, 首藤「計算機負荷シミュレーションの一手法」  
昭和50年度電子通信学会全国大会 (1975)
- (E12) 立花「状態観測器の一近似的構成法について」  
第18回自動制御連合講演会 (1975.11)
- (E13) 立花, 稲本, 首藤「レバーシング・コールド・ミルにおける圧下影響係数の推定」  
第14回計測自動制御学会学術講演会 (1975.8)
- (E14) 立花「区分的に最小自乗法を用いた折線の近似」  
昭和51年度電子通信学会総合全国大会 (1976)
- (E15) 立花「微分フィルタを用いた多変数系の同定」  
計測自動制御学会第5回制御理論シンポジウム (1976.5)

#### 三菱電機技報

- (F1) 千葉, 松本, 武藤, 立花「パワー・ステートメント」  
三菱電機技報, Vol. 41, No. 9, pp. 1143-1147 (1976)
- (F2) 立花, 紀本「計算機制御におけるデジタル・フィルタの応用」  
三菱電機技報, Vol. 48, No. 2, pp. 777-784 (1974)

(F3) 星野, 高橋, 立花「三菱製紙向け MELCOM350-30F システム」  
三菱電機技報, Vol. 51, No. 9, pp. (1976)

(F4) 立花, 稲本, 高橋「工業プラントにおける同定」  
三菱電機技報, Vol. 51, No. 2, pp. (1976)