



Title	Compléments sur les martingales conformes
Author(s)	Schwartz, Laurent
Citation	Osaka Journal of Mathematics. 1986, 23(1), p. 77-116
Version Type	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/8837">https://doi.org/10.18910/8837</a>
rights	
Note	

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

## COMPLEMENTS SUR LES MARTINGALES CONFORMES

LAURENT SCHWARTZ

(Received December 10, 1984)

### Table des matières

#### Introduction

1. Divers processus sur un ouvert de  $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$
2. Semi-martingales formelles
3. Martingales conformes sur des variétés complexes
4. Fonctions plurisous-harmoniques de martingales conformes
5. Les espaces 1-tangents et 2-tangents d'un variété complexes
6. Nouvelles propriétés des martingales conformes
7. Prolongements de semi-martingales au-delà d'un temps d'arrêt

#### Notes

#### Index terminologique

#### Bibliographie

### Introduction

Le but de cet article est de combler certaines lacunes concernant les semi-martingales à valeurs dans des espaces vectoriels  $E$  ou des variétés  $V$ , l'accent principal étant mis sur les martingales conformes.

Au §1, on introduit des classes essentielles de processus continus (le mot "local" étant en général sous-entendu): martingales, martingales conformes, processus à variation finie, sous-martingales; on les connaît sur  $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ , il s'agit de les étudier sur un ouvert  $A$  de  $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ . On donne leurs principales propriétés (et les pièges possibles !). Au §2, la liaison est faite avec les semi-martingales formelles.

Le §3 étudie spécialement des  $V$ -martingales conformes sur  $A$ ,  $V$  étant une variété complexe. Même la définition est délicate, car, si  $V$  n'est pas de Stein, il n'y a pas assez ou pas du tout de fonctions holomorphes globales. On donne les propriétés essentielles et les théorèmes de stabilité, en arrivant chaque fois à contourner l'absence de fonctions holomorphes.

Le §4 donne le théorème qui a servi de point de départ à tout l'article, à l'occasion de fructueuses discussions à l'Université de Kyoto, notamment entre S. Watanabe, M. Fukushima et moi. Ce théorème (4.6) exprime en

gros que, si  $M$  est une martingale conforme et  $\varphi$  une fonction plurisous-harmonique telle que  $\varphi(M)$  soit continue,  $\varphi(M)$  est une sous-martingale locale continue. Mon travail antérieur, Schwartz [1], n'avait donné à ce sujet que des résultats partiels, faute d'une manipulation suffisante des passages du local au global; cette lacune est comblée ici. Il reste toutefois une lacune fondamentale. On peut raisonnablement supposer que, si  $M$  est une martingale conforme, et  $\varphi$  une fonction plurisous-harmonique, seulement semi-continue supérieurement,  $\varphi(M)$  est toujours continue. M. Fukushima a, sur ce sujet, des résultats partiels, mais la conjecture générale subsiste.

Au §5, sont étudiés les espaces tangents aux variétés complexes. Dans Schwartz [1] ont été étudiés les espaces 1-tangents. Dans Schwartz [2], l'espace 2-tangent a joué un rôle essentiel, mais je ne suis pas revenu sur les martingales conformes, donc la structure de  $T^2(V)$  pour  $V$  complexe n'a pas été étudiée; elle l'est ici en détail. On a des décompositions en sommes directes:  $T^1 + iT^1 = T^{1,0} \oplus T^{0,1}$ ,  $T^2 + iT^2 = T^{2,0} \oplus T^{0,2} \oplus T^{1,1}$ , faisant intervenir l'analogue du bidegré, bien connu pour les formes différentielles. Alors  $T^{1,0}$  est un sous-espace de  $T^{2,0}$ , et le quotient  $T^{2,0}/T^{1,0}$  est isomorphe à  $T^{1,0} \odot T^{1,0}$ ; résultat analogue pour  $(0, 2)$ ; mais  $T^{1,1}$  est isomorphe, sans passage au quotient, à  $T^{1,0} \otimes T^{0,1}$ . Il y a là une grande richesse de structures, qui vont jouer leur rôle en géométrie différentielle des martingales conformes.

Le §6 étudie justement cette géométrie. Si  $X$  est une  $V$ -semi-martingale sur  $A$ , on a  $\underline{dX}$ ,  $dX^c$ ,  $\underline{dX}$ ,  $\frac{1}{2} d[X, X]$ , qui gardent leur sens en oubliant la structure complexe, mais elles se décomposent suivant les sommes directes du §5:  $\underline{dX} = \underline{dX}^{2,0} + \underline{dX}^{0,2} + \underline{dX}^{1,1}$ ,  $dX^c = (dX^c)^{1,0} + (dX^c)^{0,1}$ , etc. D'où le théorème fondamental de caractérisation des martingales conformes, (6.4):  $M$ ,  $V$ -semi-martingale sur  $A$ , est une martingale conforme, ssi  $\underline{dM}^{2,0}$  est une différentielle de martingale conforme à valeurs dans  $T^{1,0}$ . Un exemple d'application, moins facile à démontrer autrement: l'ensemble des  $V$ -martingales conformes sur  $\bar{R}_+ \times \Omega$  est fermé dans l'espace des  $V$ -semi-martingales.

Le §7 étudie un problème qui a fait de grands progrès les dernières années. Soit  $X$  une semi-martingale sur  $[S, T[$ , où  $S$  et  $T$  sont des temps d'arrêt,  $S \leq T$ ; quand se prolonge-t-elle en une semi-martingale sur  $[S, T]$ ? Une condition nécessaire est que  $X_{T-}$  existe sur  $\{T > S\}$ ; on dit alors que  $X$  converge en  $T$ . C'est suffisant si  $X$  est une martingale à valeurs vectorielles, proposition (7.4) (bien connue); ce n'est évidemment plus vrai si  $X$  est un processus à variation localement finie. Nous introduisons les semi-martingales de Zheng, pour lesquelles la composante à variation finie de  $X$  est contrôlée par le crochet de la composante martingale; elles ont été introduites (sans cette dénomination!) dans un article récent de Zheng. Alors une semi-martingale de Zheng qui converge est prolongeable, c'est le théorème de Zheng, (7.6). Il y a diverses variations autour de réciproques partielles, dont une de Darling

(7.7), et d'autres que nous indiquons (7.8). Les études de Darling et Zheng étaient issues de la notion de martingale relative à une connexion. On y revient, et comme une martingale relative à une connexion est une semi-martingale de Zheng, tout résulte des propriétés précédentes. Cette partie n'apporte que des perfectionnements secondaires à des résultats récents mais connus. Mais il se trouve qu'une  $V$ -martingale conforme sur  $[S, T]$ ,  $V$  variété complexe, a aussi la propriété que, si elle converge, elle est prolongeable; mais contrairement au cas (7.4) des martingales vectorielles, c'est bien plus difficile à démontrer. Or il se trouve qu'on peut relier ce résultat à ceux qui précèdent. D'abord une martingale conforme est de Zheng, ce qui liquide cette question directement, à condition d'utiliser la caractérisation (6.4) du §6. Mais il y a plus. Parmi les connexions sur  $V$ , il y en a de particulières, qui sont liées à la structure complexe. Mais, proposition (7.11), les martingales conformes sont exactement celles qui sont des martingales pour toutes les connexions compatibles avec la structure complexe. Par contre une connexion qui rend martingales toutes les martingales conformes n'est pas nécessairement compatible avec la structure complexe, mais on peut exactement caractériser les connexions ayant cette propriété, proposition (7.13).

### 1. Divers processus sur un ouvert de $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$

(1.1)  $(\Omega, \mathcal{O}, \mathcal{I}=(\mathcal{I}_t)_{t \in \bar{\mathbf{R}}_+}, \mathbf{P})$  auront la signification et les propriétés habituelles pour les processus.  $A$  désignera un ouvert de  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$  (pour  $\mathbf{P}$ -presque tout  $\omega$ ,  $A(\omega)=\{t; (t, \omega) \in A\}$  est ouvert). *Sauf mention expresse du contraire*, et sauf au §4, on sous-entendra le mot "continu" quand on parlera de processus à variation finie ou croissant, et de semi-martingales conformes<sup>(1)</sup>, et les mots "locale continue" quand on parlera de martingale, martingale conforme, sur-martingale ou sous-martingale. A partir du §2, semi-martingale voudra dire semi-martingale continue. Dans ce §1, les processus seront à valeurs dans des espaces vectoriels de dimension finie sur  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ , ou dans  $\mathbf{R}$ , de manière évidente suivant les cas.

(1.2)  $\mathcal{SM}$  sera l'ensemble des semi-martingales sur  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$  (des semi-martingales continues à partir du §2);  $\mathcal{A}$  sera l'ensemble des semi-martingales (resp. des semi-martingales continues, ou des martingales, ou des martingales conformes, ou des processus à variation finie ou croissants, ou des sous- ou sur-martingales) sur  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ .  $\mathcal{A}$  est fermé dans l'espace  $\mathcal{SM}$  des semi-martingales<sup>(2)</sup>.

(1)  $X$  est une semi-martingale conforme si sa composante martingale locale continue  $X^c$  est conforme. Pour tout ce qui concerne les martingales conformes, et les propriétés des processus sur des ouverts  $A$  de  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ , les notations sont celle de Schwartz [1] et [2].

(2) La topologie de  $\mathcal{SM}$  est celle d'Emery. Voir Emery [1], et Schwartz [2], (3.7) page 443. Cette fermeture est évidente pour les semi-martingales continues ou pour les processus croissants, et, dans les autres cas, elle résulte de ce que  $X \rightarrow X^c$ ,  $X \rightarrow \bar{X}$ ,  $X \rightarrow [X, X]$  sont continues, Schwartz [2], (3.10) page 446.

On dira qu'une fonction  $X$  sur un ouvert  $A$  de  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$  est élément de  $\mathcal{A}(A)$ , si  $X$  est optionnelle sur  $A$  (i.e. est mesurable pour la tribu induite sur  $A$  par la tribu optionnelle de  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ ; cela revient à dire que  $X$  est restriction d'un processus optionnel  $\bar{X}$  sur  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ ), et existe une suite  $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$  d'ouverts,  $\bigcup_n A_n = A$ , telle que, pour tout  $n$ ,  $X$  soit équivalente sur  $A_n$  à un processus  $X_n \in \mathcal{A}$ ;  $X \underset{A_n}{\sim} X_n$  (i.e.  $X - X_n$  est localement constant sur  $A_n$ )<sup>(2bis)</sup>. On peut sans inconvénient supposer  $A$  et les  $A_n$  optionnels (Soit en effet  $A'_n$  le plus grand ouvert d'équivalence de  $\bar{X}$  et de  $X_n$ ; il est optionnel<sup>(3)</sup> et  $\supset A_n$ ; alors  $A' = \bigcup_n A'_n$  est optionnel et  $\supset A$ ; si  $X'$  est la restriction de  $\bar{X}$  à  $A'$ ,  $X' = X$  sur  $A$ , et  $X' \underset{A'_n}{\sim} X_n$ ), ce que nous ferons désormais.

Si  $X \in \mathcal{A}(A)$ , on dira qu'il est une semi-martingale sur  $A$  (resp. une semi-martingale continue sur  $A$ , une martingale sur  $A$ , etc...); cependant si  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des processus à variation finie, nous dirons (pour  $A \neq \bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ ) que  $X \in \mathcal{A}(A)$  est *localement* à variation finie sur  $A$  (voir (1.6)).

Trivialement, si  $A = \bigcup_n A_n$ , et si  $X$  est une fonction optionnelle sur  $A$ , telle que  $X \in \mathcal{A}(A_n)$  pour tout  $n$ ,  $X \in \mathcal{A}(A)$ . Si  $X$  est optionnel sur  $A$ , équivalent à un processus de  $\mathcal{A}(A)$ ,  $X \in \mathcal{A}(A)$ .

(1.3) Dans le cas où  $\mathcal{A}$  est l'ensemble  $\mathcal{SM}$  des semi-martingales, on peut même trouver les  $A_n$  tels que pour tout  $n$ ,  $X = X_n$  sur  $A_n$ . En effet, partons de  $X \underset{A_n}{\sim} X_n$ ,  $X = X_n + C_n$ ,  $C_n \underset{A_n}{\sim} 0$ . Pour  $s \in \bar{\mathbf{Q}}_+$ ,  $S_n$  temps de sortie  $\geq s$  de  $A_n$ ,  $C_n 1_{\{S_n > s\}}$  est une variable aléatoire  $\mathcal{G}_s$ -mesurable, donc  $1_{[s, +\infty] \times \Omega} (1_{\{S_n > s\}}(C_n)_s) = C'_{n,s}$ , processus nul dans  $[0, s[$  et constant  $\mathcal{G}_s$ -mesurable dans  $[s, +\infty]$ , est une semi-martingale; sur  $[s, S_n[$  (intérieur de  $[s, S_n] = A'_{s,n}$ ,  $X = X_n + C'_{s,n}$ , semi-martingale, et  $A = \bigcup_{s,n} A'_{s,n}$ .

Mais, même si  $X_n$  est une semi-martingale continue,  $C'_{s,n}$  a un saut en  $s$ ,  $X_n + C'_{s,n}$  n'est pas une semi-martingale continue. Pour tous les  $\mathcal{A}$  sauf l'ensemble  $\mathcal{SM}$  des semi-martingales, je ne pense pas qu'on puisse, dans la définition de  $\mathcal{A}(A)$ , remplacer  $X \underset{A_n}{\sim} X_n$  par  $X = X_n$  sur  $A_n$ .

$X$  est une semi-martingale continue sur  $A$ , ssi c'est une semi-martingale sur  $A$ , continue sur  $A$ . En effet, si  $X \underset{A_n}{\sim} X_n$ , et  $X$  continue sur  $A_n$ ,  $X_n$  aussi;

(2bis) La définition d'une semi-martingale sur  $A$  est due à P.A. Meyer [2]. Ces semi-martingales sur des ouverts sont étudiées systématiquement dans Schwartz [2], §6.

(3) Voir Schwartz [1], théorème III, page 21. La démonstration donnée là est trop compliquée; simplement, si  $S = \inf\{t \geq s; \bar{X}_t - X_{n,t} \neq \bar{X}_s - X_{n,s}\}$ ,  $s \in \bar{\mathbf{Q}}_+$ , et si  $[s, S[$  est l'intérieur de  $[s, S]$ , cet ouvert est la réunion des  $[s, S[^\circ$ . Les temps d'arrêts, tels que  $S$ , seront toujours à valeurs dans  $[0, +\infty]$ ; si  $S = +\infty$ ,  $[s, S[^\circ = ]s, +\infty[$  pour  $s \neq 0$ ,  $[0, +\infty[$  pour  $s = 0$ . Voir Schwartz [2], §3, page 437 (25).

alors  $X \widetilde{\sim}_{[s, s_n[ \times \Omega} (1_{[s, +\infty[ \times \Omega} 1_{\{s_n > s\}}) (X_n^{s_n-} - X_n^s)$ , semi-martingale comme produit de deux semi-martingales, continue sur  $\bar{R}_+ \times \Omega$ , donc  $X$  est une semi-martingale continue sur  $A$ .

(1.4) Si  $X \in \mathcal{A}(A)$ ,  $X$  est équivalent, sur  $A_n$ , à un élément de  $\mathcal{A}$ . Il n'est en général pas vrai que  $X$  soit équivalent, sur  $A$  lui-même, à un élément de  $\mathcal{A}$ . Par exemple, si  $A = [0, +\infty[ \times \Omega$ , une semi-martingale  $X$  sur  $A$  ne peut être équivalente sur  $A$  à une semi-martingale sur  $\bar{R}_+ \times \Omega$ , que si  $X_{(\infty)-}$  existe. Par contre,  $X$  est bien équivalent sur  $A$  lui-même à un élément de  $\mathcal{A}$  s'il est équivalent sur  $A$  à une semi-martingale  $X'$  sur  $\bar{R}_+ \times \Omega$ , dans les cas  $\mathcal{A}$  = ensemble des semi-martingales, ou des martingales, ou des martingales conformes, ou des semi-martingales conformes ( $X'$  est équivalent à une martingale ssi  $\tilde{X}^c \sim 0$ , à une martingale conforme ssi  $\tilde{X}^c \sim 0$ ,  $[X', X'] \sim 0$ , à une semi-martingale conforme ssi  $[X', X'] \sim 0$ , et ceci passe aux réunions dénombrables, des  $A_n$  à  $A^{(4)}$ ). Cette hypothèse  $X \sim_{\mathcal{A}} X'$  semi-martingale sur  $\bar{R}_+ \times \Omega$  n'est pas suffisante pour obtenir le même résultat, pour les autres ensembles  $\mathcal{A}^{(5)}$ .

(1.5) Par contre, dans tous les cas, si  $X$  est équivalent sur  $A$  à une semi-martingale continue  $X'$  sur  $\bar{R}_+ \times \Omega$ , et  $X \in \mathcal{A}(A)$ , il est équivalent sur  $A$  lui-même à un processus de  $\mathcal{A}$ . En outre, on peut exprimer ceci en termes d'intégrales stochastiques; pour  $X$  optionnel sur  $A$ :  $1_A \cdot X' \in \mathcal{A} \Rightarrow X$  est équivalent sur  $A$  à un processus de  $\mathcal{A}$  (à savoir  $1_A \cdot X' \Rightarrow X \in \mathcal{A}(A) \Rightarrow 1_A \cdot X' \in \mathcal{A}$  (car  $X' \sim_{A_n} X_n \in \mathcal{A}$ ; donc  $1_{A_n} \cdot X' = 1_{A_n} \cdot X_n \in \mathcal{A}^{(6)}$ , d'où l'on passe à  $1_A \cdot X' \in \mathcal{A}$  parce que

(4) Voir Schwartz [1], théorème III, page 21, ou corollaire (3.5), page 22; théorème 4, page 32; proposition (4.6) page 37.

(5) Un contre-exemple a été donné par Stricker [1], valable pour tous les cas à la fois. Soit  $(T_n)_{n=1,2,\dots}$  une suite strictement croissante de temps d'arrêt, inaccessibles sauf  $T_1=0$ , et  $C$  le processus égal à  $\frac{1}{2}$  dans  $[T_n, T_{n+1}[$ . Soit  $M$  sa martingale compensée. Comme  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$ ,  $M$  a une limite à l'infini, qu'on peut appeler  $M_{\infty}$ ; c'est une martingale sur  $\bar{R}_+ \times \Omega$ , de carré intégrable (voir P.A. Meyer [1]). Soit  $A = \bigcup_n ]T_n, T_{n+1}[$ . Le processus croissant prévisible  $C'$  associé à  $C$  est nécessairement continu puisque les  $T_n$  sont inaccessibles, et c'est  $M$  qui porte toutes les discontinuités de  $C$ . Alors  $M$  est, sur  $A$ , un processus décroissant continu puisqu'elle est équivalente, et même égale, sur chaque  $]T_n, T_{n+1}[$ , à un processus décroissant continu sur  $\bar{R}_+ \times \Omega$ , à savoir  $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - (C')^{T_{n+1}}$ ;  $M$  est donc aussi localement à variation finie, continue, surmartingale continue, semi-martingale continue sur  $A$ . Mais  $M$  n'est pas équivalente sur  $A$  à un processus continu  $X$  sur  $\bar{R}_+ \times \Omega$ . Sinon aurait  $X = M - c_n$  dans  $]T_n, T_{n+1}[$ ; alors  $X_{T_{n+1}} = M_{T_{n+1}} - c_{n+1}$ ,  $X_{(T_{n+1})-} = M_{(T_{n+1})-} - c_n$ , et la continuité de  $X$  donnerait  $\frac{1}{n+1} = \Delta M_{T_{n+1}} = c_{n+1} - c_n$ , d'où  $c_{n+1} = c_1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1}$ ; or  $X$  et  $M$  doivent avoir une limite à l'infini, ce qui est ici impossible.

(6) Pour  $Z$  semi-martingale continue,  $A_n$  optionnel,  $Z \sim 0 \Leftrightarrow 1_{A_n} \cdot Z = 0$ , voir Schwartz [1], proposition (3.7) et corollaire (3.8), page 25.

$\mathcal{A}$  est fermé dans l'espace  $\mathcal{SM}$  des semi-martingales). Si  $X$  est une semi-martingale continue sur  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ , arrêtée en  $T$ , indépendante du temps dans  $[0, S]$ ,  $S$  et  $T$  temps d'arrêt,  $S \leq T$ , et si  $X \in \mathcal{A}]S, T[$ , alors  $X \in \mathcal{A}$ . En effet, nous venons de voir que  $X \underset{]S, T[}{\sim} Y \in \mathcal{A}$ , mais alors  $X \underset{\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega}{\sim} Y^T - Y^S$ , donc  $X = X_0 + Y^T - Y^S \in \mathcal{A}$ . En d'autres termes, si  $X \in \mathcal{A}]S, T[$  est prolongeable en une semi-martingale continue  $X'$  sur  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ , alors  $X'^T - X'^S$  a les propriétés ci-dessus donc  $\in \mathcal{A}$ , c.à.d.  $X$  est prolongeable en une semi-martingale  $\in \mathcal{A}$  si  $S=0$ , à savoir  $X'^T$ , et autrement équivalente sur  $]S, T[$  à une semi-martingale continue sur  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ , élément de  $\mathcal{A}$ , à savoir  $X'^T - X'^S$ .

(1.6). Soit  $X$  optionnel continu sur  $A$ . Alors:  $X \in \mathcal{A}(A)$ ,  $\mathcal{A}$  ensemble des processus à variation finie (resp. croissants)  $\Leftrightarrow X$  est, au sens usuel sur  $A$ , localement à variation finie (resp. localement croissant). (Rappelons que cela n'entraîne pas qu'il soit équivalent sur  $A$  à un processus à variation finie ou croissant sur  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ , voir Note<sup>(6)</sup>). En effet,  $\Rightarrow$  est évident, montrons  $\Leftarrow$ . Soit  $s \in \bar{\mathbf{Q}}_+$ ,  $S_n = \inf \{t \geq s; t \notin A, \text{ ou variation de } X \text{ dans } [S, t] > n\}$ . C'est un temps d'arrêt. Mais  $X_{S_n-}$  existe sur  $\{S_n > s\}$ , car la variation de  $X$  dans  $[s, S_n[$  est  $\leq n$ . Donc  $1_{\{S_n > s\}}(X^{S_n-} - X^s)$  est un processus à variation finie (resp. croissant) dans  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ , équivalent à  $X$  sur  $[s, S_n[$ , et  $\bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ s \in \bar{\mathbf{Q}}_+}} [s, S_n[ = A$ .

(1.7) Si  $A = \bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ ,  $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}$ . Cela résulte de Schwartz [1], proposition (2.4) page 10 et (1.3) ci-dessus, pour les semi-martingales, et, pour les autres  $\mathcal{A}$ , de (1.4) et (1.5).

(1.8) Rappelons aussi que, si l'on supprime la continuité pour les processus (autres que les semi-martingales générales) de type  $\mathcal{A}$ , il n'y a plus de bonne notion: on peut avoir  $A = \bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega = A_1 \cup A_2$ ,  $A_1$  et  $A_2$  optionnels,  $X$  semi-martingale bornée sur  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ , restriction sur  $A_1$  et sur  $A_2$  de martingales bornées, mais non martingale sur  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega^{(7)}$ . A priori, on ne peut rien avoir de bon pour les surmartingales et sous-martingales discontinues.

## 2. Semi-martingales formelles

Nous renvoyons à Schwartz [2]; toutes les semi-martingales, vraies ou formelles, seront implicitement supposées continues dans ce paragraphe et les suivants, sauf le §4.

(2.1) Une semi-martingale formelle sur  $A$  (ouvert optionnel) voudra dire indifféremment une classe d'équivalence sur  $A$  de semi-martingales formelles

(7) Voir Schwartz [1], contre-exemple (3.6), page 23. Dans cet exemple,  $A(\alpha)$  et  $A(\beta)$  ne sont pas optionnels; mais on aurait pu les prendre optionnels, avec

$A(\alpha) = \{(0, \alpha), (0, \beta), (+\infty, \alpha)\}$ ,  $A(\beta) = \{(0, \alpha), (0, \beta), (+\infty, \beta)\}$ .

sur  $\bar{R}_+ \times \Omega$ , ou une semi-martingale formelle sur  $\bar{R}_+ \times \Omega$ , portée par  $A$ . On sait qu'alors toute semi-martingale vraie sur  $A$  (au sens du §1) définit d'une manière unique, une semi-martingale formelle sur  $A$  [Schwartz [2], proposition (6.7), page 471 (59)]. On sait aussi qu'il existe une intégrale stochastique d'une fonction optionnelle sur  $A$  par rapport à une semi-martingale formelle sur  $A$ , et que c'est encore une semi-martingale formelle sur  $A$ .

On dira qu'une semi-martingale formelle  $X$  sur  $\bar{R}_+ \times \Omega$  est élément de  $\mathcal{AF}$ , si elle s'écrit  $\gamma \cdot Z$ ,  $\gamma \geq 0$  optionnelle,  $Z \in \mathcal{A}$ . Alors toute intégrale stochastique par rapport à  $X$  d'une fonction optionnelle  $\geq 0$  est encore dans  $\mathcal{AF}$ .  $\mathcal{AF}$  est fermé dans l'espace des semi-martingales formelles. On dira qu'une semi-martingale formelle  $X$  sur  $A$  (en particulier une semi-martingale sur  $A$ ) est élément de  $\mathcal{AF}(A)$ , s'il existe une suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réunion  $A$ , telle que  $X$  soit, dans chaque  $A_n$ , équivalente à un élément  $X_n$  de  $\mathcal{AF}$ .

(2.2) Mais on a alors les relations évidentes:

$1_A \cdot X \in \mathcal{AF} \Rightarrow X$  est équivalent sur  $A$  à un élément de  $\mathcal{AF} \Rightarrow X \in \mathcal{AF}(A) \Rightarrow 1_A \cdot X \in \mathcal{AF}$ . La démonstration est la même qu'à (1.5); cela provient de ce que, dans la définition de semi-martingale formelle sur  $A$ , intervient la possibilité de la représenter comme semi-martingale formelle (toujours, sous-entendu: continue) sur  $\bar{R}_+ \times \Omega$ . En outre, c'est équivalent à:  $X = \gamma \cdot Z$ ,  $\gamma$  optionnelle  $\geq 0$  sur  $A$ ,  $Z \in \mathcal{A}(A)$ . (Si  $Z \in \mathcal{A}(A)$ ,  $\gamma \geq 0$  optionnelle,  $Z \sim_{A_n} Z_n \in \mathcal{A}$ , donc  $\gamma \cdot Z \sim_{A_n} \gamma \cdot Z_n \in \mathcal{AF}$ , donc  $\gamma \cdot Z \in \mathcal{AF}(A)$ ). Inversement, soit  $X \in \mathcal{AF}(A)$ ; alors  $X$  est équivalente sur  $A$  à un élément de  $\mathcal{AF}$ ,  $\gamma \cdot Z$ ,  $Z \in \mathcal{A}$ , donc a fortiori  $Z \in \mathcal{A}(A)$ .

(2.3)  $\mathcal{A}(A) = \mathcal{SM}(A) \cap \mathcal{AF}(A) = \mathcal{SM}(A) \cap \mathcal{AF}$ . Résulte de (2.2).

EXEMPLE.  $X$  est une martingale conforme sur  $A$ , ssi elle est une semi-martingale sur  $A$ , et équivalente sur  $A$  à une martingale conforme formelle sur  $\bar{R}_+ \times \Omega$ .

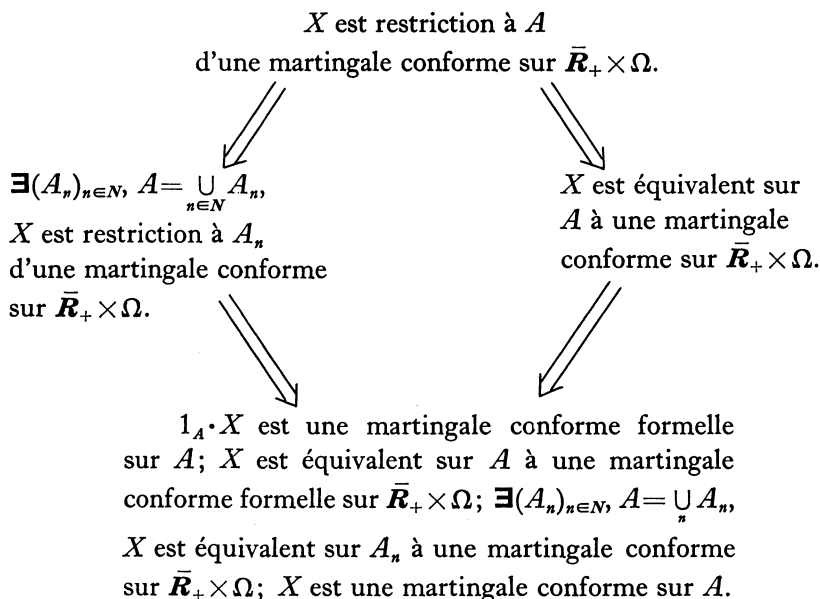
(2.4) Rappelons que, si  $X$  est une semi-martingale formelle sur  $A$ ,  $X = X^c + \tilde{X}$ , et que  $[X, X]$  est un processus à variation finie formel sur  $A$ ;  $X^c$ ,  $\tilde{X}$ ,  $[X, X]$  sont seulement formels, même si  $X$  est une semi-martingale vraie sur  $A$ ,  $X \in \mathcal{SM}(A)$ . Rappelons d'autre part qu'on a la formule d'Ito: si  $X \in \mathcal{SM}(A)$ , et  $\Phi$  de classe  $C^2$ :

$$\Phi(X) \sim_A \Phi'(X) \cdot X + \frac{1}{2} \Phi''(X) \cdot [X, X],^{(8)}$$

(8) Il vaudrait mieux écrire  $\Phi(X) \in$  au lieu de  $\sim$ , puisque le second membre est une classe de processus formels,  $\Phi(X)$  un processus élément de cette classe. On fait le même abus ici que quand on écrit, en analyse,  $f \in L^p$ , quand  $f$  est une fonction, alors que  $L^p$  est un espace de classe de fonctions.



où le membre de gauche est une semi-martingale sur  $A$ , les membres de droite sont seulement des processus formels (y compris  $[X, X]$ ). Voici un tableau résumé des propriétés précédentes, par exemple si  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des martingales conformes.  $X$  est supposé être un processus optionnel sur  $A$ . La notion que nous retiendrons est la plus faible, celle d'en bas.



### 3. Martingales conformes sur des variétés complexes

(3.1) Rappelons que si  $M$  est, sur  $A$ , une martingale conforme à valeurs dans un ouvert  $U$  d'un espace vectoriel complexe  $E$  et  $\Phi$  une fonction holomorphe (ou antiholomorphe) de  $U$  dans un espace vectoriel  $F$ ,  $\Phi(M)$  est, sur  $A$ , une martingale conforme à valeurs dans  $F$ ; cela résulte de la formule d'Ito, qui, pour  $\Phi$  holomorphe et  $[M, M]_C = 0$  sur  $A$ , s'écrit  $\Phi(M) \cdot \Phi'(M) \cdot M$ .

**Proposition 3.2.** Soient  $A$  un ouvert de  $\bar{R}_+ \times \Omega$ ,  $M$  une fonction optionnelle sur  $A$ , à valeur dans une variété analytique complexe  $V$ , de dimension complexe  $N$ . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

(3.2.A) Pour tout ouvert  $V'$  de  $V$ , et toute fonction complexe  $\varphi$  holomorphe sur  $V'$ ,  $\varphi(M)$  est, sur  $M^{-1}(V')$ , une martingale conforme.

(3.2.B) Pour tout ouvert  $V'$  de  $V$ , et tout fonction complexe  $\varphi$ ,  $C^2$  (au sens réel) sur  $V$  et holomorphe sur  $V'$ ,  $\varphi(M)$  est, sur  $M^{-1}(V')$ , une martingale conforme.

Démonstration. Montrons que  $B \Rightarrow A$ . Soit  $\varphi$  holomorphe sur  $V'$ . Soit  $(V'_n)_{n \in N}$  une suite d'ouverts de  $V$ ,  $V'_n \subset V'$ , de réunion  $V'$ . Il existe  $\varphi_n$ ,  $C^2$  sur  $V$ , égale à  $\varphi$  sur  $V'_n$ . D'après B,  $\varphi(M) = \varphi_n(M)$  est, sur  $M^{-1}(V'_n)$ ,

une martingale conforme; donc  $\varphi(M)$  est sur  $M^{-1}(V')$  une martingale conforme.  $\square$

**DÉFINITION 3.3** On dit que  $M$  est, sur  $A$ , une  $V$ -martingale conforme, si elle vérifie (3.2), A) ou B). On peut remplacer  $\varphi$  holomorphe par  $\varphi$  antiholomorphe. Bien évidemment  $M$  est alors une semi-martingale sur  $A$ . (Si  $V'$  est de Stein, il est plongeable comme sous-variété  $\mathcal{C}$ -analytique fermée d'un espace vectoriel  $E$ ; en prenant pour  $\varphi$  les coordonnées suivant une base, on voit que  $M$  est, sur  $M^{-1}(V')$ , une semi-martingale. Il existe une suite de  $V'$  de réunion  $A$ , donc  $M$  est semi-martingale sur  $A$ . On aurait évidemment pu aussi le mettre dans les hypothèses !). Remarquons que les hypothèses de (3.2) n'entraînent pas que  $\varphi(M)$  soit, sur  $A$ , équivalente à une martingale conforme sur  $\bar{R}_+ \times \Omega$  (voir (1.4)). Mais c'est vrai, dans l'hypothèse (3.2.B), si  $M$  est restriction à  $A$  d'une semi-martingale sur  $\bar{R}_+ \times \Omega$ ; car alors  $\varphi(M)$  est restriction à  $M^{-1}(V')$  d'une semi-martingale et on applique (1.4). L'hypothèse (3.2.A) reste insuffisante pour obtenir la même conclusion, car  $\varphi(M)$  n'est plus restriction d'une semi-martingale sur  $\bar{R}_+ \times \Omega$ . Ce qui précède montre que, si  $M$  est restriction à  $A$  d'une  $V$ -semi-martingale sur  $\bar{R}_+ \times \Omega$ , la définition (3.2.A ou B) est celle que nous avons donné pour l'équivalence de  $M$  sur  $A$  à une martingale conforme, dans Schwartz [1], définition (5.1) page 38. C'était là d'ailleurs, une définition quelque peu défectueuse, car il y avait équivalence pour  $\varphi(M)$ , non pour  $M$ . Mais ici, une telle hypothèse n'est pas faite sur  $M$ . Si  $A = \bar{R}_+ \times \Omega$ , la définition (3.3) ci-dessus est bien celle que nous avons donnée à Schwartz [1], (5.1), d'une  $V$ -martingale conforme sur  $\bar{R}_+ \times \Omega$ , voir ci-dessus (1.7).

(3.3.1) Soit  $M$  une  $V$ -semi-martingale (continue) sur  $\bar{R}_+ \times \Omega$ , arrêtée en  $T$ , constante dans  $[0, S]$ ,  $S, T$ , temps d'arrêt,  $S \leq T$ . Si  $M$  est, sur  $]S, T[$ , une martingale conforme, elle l'est sur  $\bar{R}_+ \times \Omega$ . En effet, prenons la définition (3.2.B). Soit  $\varphi, C^2$  sur  $V$ , holomorphe sur un ouvert  $V'$ . On sait que  $\varphi(M)$ , semi-martingale sur  $\bar{R}_+ \times \Omega$ , martingale conforme sur  $M^{-1}(V') \cap ]S, T[$ , est équivalente sur cet ouvert à une martingale conforme  $M_\varphi$  sur  $\bar{R}_+ \times \Omega$ , par (1.5). Mais, si  $T(\omega) > 0$  ou  $S(\omega) = \overline{+\infty}$  ou  $+\infty$ ,  $M(\omega)$  est constante, donc  $\varphi(M)$  est aussi équivalente, sur  $\bar{R}_+ \times \{T=0 \text{ ou } S=\overline{+\infty} \text{ ou } +\infty\}$ , à une martingale conforme. Si  $T(\omega) > 0$  et  $S(\omega) < +\infty$ , et si  $M(T(\omega), \omega) \notin V'$  et  $M(S(\omega), \omega) \notin V'$ , comme  $M^{-1}(V') = (M^{-1}(V') \cap ]S, T[) \cup (M^{-1}(V') \cap (\text{graphe de } T \cup \text{graphe de } S))$ , ces deux ouverts coïncident au-dessus de  $\omega$ , et  $\varphi(M(\omega)) \sim M_\varphi(\omega)$  sur  $(M^{-1}(V'))(\omega)$ . Si enfin  $T(\omega) > 0$ ,  $S(\omega) < +\infty$  et  $M(T(\omega), \omega) \in V'$  (resp.  $M(S(\omega), \omega) \in V'$ ), on a aussi  $M([T(\omega) - \varepsilon(\omega), T(\omega)], \omega) \in V'$  (resp.  $M([S(\omega), S(\omega) + \varepsilon(\omega)], \omega) \in V'$ ) pour un  $\varepsilon(\omega) > 0$  convenable; par continuité,  $\varphi(M(\omega)) \sim M_\varphi(\omega)$  sur  $(M^{-1}(V'))(\omega)$ . Finalement  $\varphi(M) \sim M_\varphi$  sur  $M^{-1}(V')$ , donc  $\varphi(M)$  est une martingale conforme sur  $M^{-1}(V')$ , et  $M$  sur  $\bar{R}_+ \times \Omega$ .  $\square$

En d'autres termes, si  $M$  est une martingale conforme sur  $]S, T[$ , prolongeable en une semi-martingale (continue)  $M'$  sur  $\mathbf{R}_+ \times \Omega$ , constante dans  $]0, S[$ , elle est aussi prolongeable en une martingale conforme  $M'^T$  sur  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ . Si  $A = \bigcup_n A_n$ , et si  $M$ , processus optionnel sur  $A$  à valeurs dans  $V$ , est, dans chaque  $A_n$ , une martingale conforme, il l'est dans  $A$ . Si  $M$  est une semi-martingale sur  $A$ , on peut, dans (3.2.A ou B), remplacer:  $\varphi(M)$  est, sur  $M^{-1}(V')$ , une martingale conforme, par:  $\varphi(M)$  est, sur  $M^{-1}(V')$ , équivalente à une martingale conforme formelle sur  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ .

**Proposition 3.4** A) Si  $M$  est une  $V$ -martingale conforme sur  $A$  et si  $\Phi$  est une fonction holomorphe (ou antiholomorphe) à valeurs dans une variété complexe  $W$ ,  $\Phi(M)$  est, sur  $A$ , une  $W$ -martingale conforme.

B) Si  $V$  est de Stein,  $M$  optionnelle sur  $A$  est une  $V$ -martingale conforme ssi, pour toute  $\varphi$  complexe holomorphe (ou antiholomorphe) sur  $V$ ,  $\varphi(M)$  est une martingale conforme sur  $A$ . Si  $V$  est quelconque, et si  $(V_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est un recouvrement de  $V$  par des ouverts de Stein,  $M$  optionnelle sur  $A$  à valeur dans  $V$  est une  $V$ -martingale conforme ssi, pour toute  $\varphi_n$  complexe holomorphe sur  $V_n$ ,  $\varphi_n(M)$  est, sur  $M^{-1}(V_n)$ , une martingale conforme.

C) Si  $W$  est une sous-variété (non nécessairement fermée) de  $V$ , si  $M$  est, sur  $A$ , une  $V$ -martingale conforme à valeurs dans  $W$ , elle est une  $W$ -martingale conforme.

Démonstration. A) est évident.

B) Soit  $V$  de Stein. Si  $M$  est une  $V$ -martingale conforme, elle a la propriété indiquée. Inversement, supposons cette propriété vérifiée. Comme  $V$  est de Stein, elle est plongeable comme sous-variété fermée dans un espace vectoriel complexe  $E$ . En appliquant les hypothèses aux fonctions coordonnées et à leurs sommes (ou leurs produits), on voit que  $M$  est une  $E$ -martingale conforme sur  $A$ . Soit  $(U'_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une base de la topologie de  $E$ , formée d'ouverts de Stein (par exemple des boules); les  $V'_n = U'_n \cap V$  forment une base de la topologie de  $V$ . Soit  $V'$  un ouvert de  $V$ ,  $\varphi$  une fonction complexe holomorphe sur  $V'$ ; comme  $V'_n$  est une sous-variété complexe de  $U'_n$  de Stein, si  $V'_n \subset V'$ ,  $\varphi$  est prolongeable en  $\varphi_n$ , holomorphe sur  $U'_n$ . En appliquant Ito (3.1),  $\varphi_n(M)$  est une martingale conforme sur  $X^{-1}(V'_n)$ , donc  $\varphi(M)$  aussi; comme  $V'$  est réunion de ceux des  $V'_n$  qu'il contient,  $\varphi(M)$  est, sur  $M^{-1}(V')$ , une martingale conforme. Donc  $M$  est une  $V$ -martingale conforme sur  $A$ . Soit maintenant  $V$  quelconque,  $V = \bigcup_n V_n$ ,  $V_n$  de Stein. Ce qu'on vient de voir prouve que  $M$  est, sur  $M^{-1}(V_n)$ , une  $V_n$ -martingale conforme, donc une  $V$ -martingale conforme, donc aussi sur  $A$ .

C)  $W$  est localement compacte, donc fermée dans un ouvert  $U$  de  $V$ . Soit  $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$  un recouvrement de  $U$  par des ouverts de Stein,  $W_n = W \cap U_n$ , ouverts

de Stein de  $W$ . Si  $\varphi_n$  est une fonction holomorphe sur  $W_n$ , elle est prolongeable en fonction holomorphe sur  $U_n$ , ouvert de  $V$ , donc  $\varphi_n(M)$  est, sur  $M^{-1}(W_n)$ , une martingale conforme; B) prouve que  $M$  est une  $W$ -martingale conforme sur  $A$ .  $\square$

REMARQUE 3.5 Pour  $V = \bigcup_{n \in N} V_n$ ,  $V_n$  de Stein, la propriété indiquée à la fin de B) exprime aussi, comme nous l'avons indiqué, que  $M$  est, sur  $M^{-1}(V_n)$ , une  $V_n$ -martingale conforme; ou, compte tenu de C), si  $V_n$  (de Stein) est plongée dans un espace vectoriel  $E_n$ , une  $E_n$ -martingale conforme. Soit  $(V_n)_{n \in N}$  un recouvrement de  $V$  par des ouverts de Stein relativement compacts (par exemple isomorphes à des boules de  $\mathbb{C}^N$ ); on peut les plonger comme sous-variétés fermées de  $\mathbb{C}^{2N+1}$ . Soit  $(V'_n)_{n \in N}$  un recouvrement subordonné,  $V'_n \subset V_n$ , de sorte que  $V'_n$  devient sous-variété (certainement non fermée) relativement compacte de  $\mathbb{C}^{2N+1}$ . Soit  $(V''_k)_{k \in N}$  un recouvrement plus fin, vérifiant la propriété de Lebesgue: tout point de  $V$  est recouvert par au plus  $2N+1$  d'entre eux. Les  $V''_k$  peuvent être plongés comme sous-variétés (non fermées) de  $\mathbb{C}^{2N+1}$ , relativement compacts, donc on peut faire en sorte que leurs images soient d'adhérences disjointes. On sait qu'alors (voir Schwartz [3], note (4) page (14)),  $N$  est réunion finie  $\bigcup_{l=1,2,\dots,2N+1} J_l$ , les  $J_l$  disjoints, où les  $V''_k$ ,  $k \in J_l$ , sont disjoints dans  $V$ . Alors  $W_l = \bigcup_{k \in J_l} V''_k$  est un ouvert de Stein (non connexe) de  $V$ , plongé dans  $\mathbb{C}^{2N+1}$ , et  $V = \bigcup_{l=1,\dots,2N+1} W_l$ . Alors  $M$  est une  $V$ -martingale conforme sur  $A$  ssi elle est, sur chaque  $M^{-1}(W_l)$ , une  $W_l$ -martingale conforme, ou une  $\mathbb{C}^{2N+1}$ -martingale conforme; ceci n'exige que la vérification du fait que  $\varphi(M)$  est, sur  $M^{-1}(W_l)$ , une martingale conforme complexe pour  $\varphi$  fonction coordonnée sur  $\mathbb{C}^{2N+1}$  ou somme (ou produit) de deux fonctions coordonnées. Il existe donc un nombre fini de couples  $(V', \varphi)$ ,  $V'$  ouvert de  $V$ ,  $\varphi$  fonction holomorphe sur  $V'$ , pour lesquels la réalisation de la propriété (3.2.A) suffit à entraîner que  $M$  soit sur  $A$  une  $V$ -martingale conforme.

(3.6) Comme à (1.2), si  $M$  est une  $V$ -martingale conforme sur  $A$ , restriction d'un processus  $\bar{M}$  sur  $\bar{R}^+ \times \Omega$ , à valeurs dans  $V$ , il existe un ouvert optionnel  $A' \supset A$  sur lequel  $M$  est encore une martingale conforme; on peut donc toujours supposer  $A$  optionnel, *ce que nous ferons désormais*. (Soit en effet  $(V_n)_{n \in N}$  un recouvrement de  $V$  par des ouverts de Stein,  $V_n$  plongée dans un espace vectoriel  $E_n$ . Soit  $\bar{M}_n$  le processus optionnel sur  $\bar{R}^+ \times \Omega$  à valeurs dans  $V_n$ , égal à  $M$  dans l'intérieur (optionnel)  $(\bar{M}^{-1}(V_n))^\circ$  de  $\bar{M}^{-1}(V_n)$ , à 0 ailleurs. Alors  $\bar{M}_n$  est une  $E_n$ -martingale conforme sur un ouvert optionnel  $A'_n$  contenant  $M^{-1}(V_n)$ , par (1.2); on peut supposer que  $A'_n \subset (\bar{M}^{-1}(V_n))^\circ$ , donc  $\bar{M} = \bar{M}_n$  est une  $E_n$ -martingale conforme, donc  $V_n$ - ou  $V$ - martingale conforme, sur  $A'_n$ . Donc  $M$  sera une  $V$ -martingale conforme sur l'ouvert optionnel  $A' = \bigcup_n A'_n \supset A$ .

#### 4. Fonctions plurisous-harmoniques de martingales conformes

(4.1) Une fonction  $\varphi$  réelle sur un ouvert de  $\mathbf{C}^N$  est dite plurisous-harmonique si  $-\infty \leq \varphi < +\infty$ , si  $\varphi$  est semi-continue supérieurement (donc localement bornée supérieurement), et si la matrice  $(\partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} \varphi)_{\alpha, \beta}$  est hermitienne  $\geq 0$  (à valeurs mesures). C'est invariant par applications biholomorphes et de caractère local, d'où la notion de fonction plurisous-harmonique sur une variété complexe  $V$  de dimension complexe  $N$ . Dans ce paragraphe, les notions étudiées sont fines, et il n'est plus possible d'omettre les mots "continue" ou "locale continue" quand on parlera de martingale ou sous martingale, comme on l'a fait aux paragraphes précédents. Toutefois martingale conforme continuera à signifier martingale locale continue conforme.

(4.2) Le but de ce paragraphe est d'étudier  $\varphi(M)$ , où  $\varphi$  est une fonction plurisous-harmonique sur  $V$ , et  $M$  une  $V$ -martingale conforme sur  $A$  ouvert de  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ . Nous avons donné deux propriétés dans Schwartz [1], qu'on va élargir ici:

**Proposition 4.3** (Voir Schwartz [1], théorème VIII, page 44).

*Si  $\varphi$  est  $C^2$  plurisous-harmonique,  $\varphi(M)$  est, sur  $A$ , une sous-martingale locale continue.*

Démonstration. Par Ito, si  $V$  est un ouvert de  $\mathbf{C}^N$ :

$\varphi(M) \sim \partial \varphi(M) \cdot M + \bar{\partial} \varphi(M) \cdot \bar{M} + \partial \bar{\partial} \varphi(M) \cdot [M, \bar{M}]$ , compte tenu de ce que  $[M, M]_C \sim [\bar{M}, \bar{M}]_C \sim 0$  (ce sont des processus formels). Les deux premiers termes sont des martingales continues formelles, le dernier un processus croissant continu formel, donc  $\varphi(M)$  est une sous-martingale continue formelle; comme c'est aussi une semi-martingale sur  $A$ , c'est une sous-martingale locale continue sur  $A$ , au sens de la définition (1.2), d'après (2.3). Si maintenant  $V$  est quelconque, elle a un recouvrement  $(V_n)_{n \in \mathbf{N}}$ , où les  $V_n$  sont isomorphes à des ouverts de  $\mathbf{C}^N$ ; alors  $\varphi(M)$  est, sur chaque  $M^{-1}(V_n)$ , une sous-martingale locale continue, donc encore sur  $A$  (1.1)  $\square$

**Proposition 4.4** (Voir Schwartz [1], théorème VIII bis, page 48).

*Si  $A = \bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ , et si  $V$  est un ouvert de  $\mathbf{C}^N$ ,  $\varphi(M)$  est localement une sous-martingale (cadlag) généralisée.*

Démonstration. Rappelons que  $f$ , fonction réelle sur  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ , est dite sous-martingale généralisée, si  $-\infty \leq f < +\infty$ , si  $f^+ = (f \vee 0)$  est intégrable, si  $f$  est cadlag, et si, pour  $s \leq t$ ,  $E(f_t | \mathcal{I}_s) \geq f_s$ . Cela revient à dire que,  $\forall k \in \mathbf{N}$ ,  $f \vee (-k)$  est une sous-martingale. Elle est localement sous-martingale généralisée s'il existe une suite croissante  $T_n \uparrow +\infty$  de temps d'arrêt, telle que chaque  $f^{T_n} 1_{\{T_n > 0\}}$  soit une sous-martingale généralisée. On sait que la limite d'une suite

décroissante de sous-martingales généralisées en est encore une. Soit  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de compacts de  $V$ , épuisant  $V$ . Soit  $T_n$  le temps de sortie de  $M$  de  $K_n$ ;  $T_n \uparrow \uparrow +\infty$ . Pour tout  $n$ , il existe une suite  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  décroissante de fonctions  $C^2$  plurisous-harmoniques sur un voisinage de  $K_n$ , de limite  $\varphi$  sur  $K_n$  (ce sont des régularisées convenables de  $\varphi$ ). Chaque  $(\varphi_k(M))^{T_n} 1_{\{T_n > 0\}}$  est alors une sous-martingale locale continue sur  $\bar{R}_+ \times \Omega$ ; elle est bornée, donc sous-martingale continue. Alors  $(\varphi(M))^{T_n} 1_{\{T_n > 0\}}$  est une sous-martingale généralisée (cadlag, pas nécessairement continue); donc  $\varphi(M)$  est localement une sous-martingale généralisée.  $\square$

**COMMENTAIRES 4.5** Pour la première proposition, nous n'avions pas pu remplacer l'hypothèse  $\varphi \in C^2$  par  $\varphi$  continue; cela provenait d'une manipulation encore insuffisamment maîtrisée du passage du local au global, pour les  $A$  de  $\bar{R}_+ \times \Omega$ . Nous allons justement réparer cette insuffisance, c'est le but essentiel de ce paragraphe. Pour la deuxième proposition, nous ne pouvons pas éviter de supposer  $V$  ouvert de  $\mathbb{C}^N$ ; il n'y a en effet pas lieu de penser que toute fonction plurisous-harmonique sur une variété complexe  $V$  soit, sur tout compact, limite d'une suite décroissante de fonction  $C^2$  plurisous-harmoniques; *et on ne peut pas localier et globaliser* pour des sous-martingales locales *discontinues*, voir (1.8). Par ailleurs, on peut raisonnablement faire la conjecture suivante: si  $M$  est une martingale conforme, et  $\varphi$  plurisous-harmonique (même discontinue),  $\varphi(M)$  est  $\mathbf{P}$  p.s. continue (à valeurs dans  $[-\infty, +\infty]$ ) (de même que, si  $B$  est le mouvement brownien dans un espace euclidien, et  $\varphi$  sous-harmonique pour le  $\Delta$ , laplacien usuel,  $\varphi(B)$  est p.s. continue). J'en ai discuté à Kyoto avec M. Fukushima, qui a, sur ce point, des résultats partiels; il n'existe cependant encore ni résultat général ni contre-exemple. On voit en tout cas l'intérêt du théorème suivant, qui suppose  $\varphi$  non nécessairement continue, mais  $\varphi(M)$  continue.

**Proposition 4.6** (Théorème). *Soient  $M$  une  $V$ -martingale conforme sur  $A$ ,  $\varphi$  une fonction plurisous-harmonique sur  $V$ , partout finie et localement bornée, telle que  $\varphi(M)$  soit continue, et que, pour  $\mathbf{P}$ -presque tout  $\omega$ , et tout  $[\alpha, \beta[$  de  $A(\omega)$  tel que  $M(\beta_-, \omega)$  existe,  $(\varphi(M))(\beta_-, \omega)$  existe aussi et soit égal à  $\varphi(M(\beta_-, \omega))$ . Ces conditions sont vérifiées si  $\varphi$  est partout finie et continue, et la dernière résulte toujours des autres si  $A = \bar{R}_+ \times \Omega$ . Alors  $\varphi(M)$  est, sur  $A$ , une sous-martingale locale continue (au sens de (1.2)).*

**Démonstration.** Supposons d'abord que  $V$  soit un ouvert de  $\mathbb{C}^N$ , et que  $M$  soit équivalente sur  $A$  à une martingale conforme  $M'$  sur  $\bar{R}_+ \times \Omega$ . Soit  $V^*$  un ouvert relativement compact de  $V$ , et posons  $A^* = M'^{-1}(V^*)$ . Alors  $\varphi$  est limite dans  $\bar{V}^*$  d'une suite décroissante  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de fonctions  $C^2$  plurisous-harmoniques sur un même voisinage de  $\bar{V}^*$ . Soit  $S$  le temps de sortie  $\geq s$  de  $A^*$ ,  $s \in \bar{Q}$ . Par Ito,  $\varphi_k(M)$  est équivalente sur  $[s, S]^c$  à :

$$(4.7) \quad \partial\varphi_k(M) 1_{[s, s[} \cdot M' + \bar{\partial}\varphi_k(M) 1_{[s, s[} \cdot \bar{M}' + \bar{\partial}\varphi_k(M) 1_{[s, s[} \cdot [M', \bar{M}'].$$

Mais ces expressions sont des intégrales stochastiques de processus optionnels bornés par rapport à des processus vrais sur  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ , donc (4.7) est une sous-martingale locale continue  $L_k$ , que nous ne considérerons provisoirement que sur  $[s, +\infty] \times \Omega$ . Mais  $M_{s-}$  existe dans  $\mathbf{C}^N$ , donc aussi  $M_{s-}$  mais dans  $\bar{V}' \subset V$ , donc,  $\varphi_k$  étant continue sur un voisinage de  $\bar{V}'$ ,  $\varphi_k(M_{s-}) = (\varphi_k(M))_{s-}$  sur  $\{S > s\}$ , et aussi  $\varphi(M_{s-}) = (\varphi(M))_{s-}$  d'après l'hypothèse faite sur  $\varphi(M)$ . Mais  $\varphi_k(M)$  est bornée dans  $[s, S[$ , donc  $L_k^s - L_{k,s}$  aussi, dans  $[S, +\infty] \times \Omega$  ( $L_k$  est continue,  $L_k^s = L_k^s$  pour  $S > s$ ); c'est donc une sous-martingale continue vraie. Elle vaut aussi  $(\varphi_k(M))^{s-} 1_{\{S > s\}} - \varphi_k(M_s) 1_{\{S > s\}}$ , et comme le deuxième terme est borné,  $(\varphi_k(M))^{s-} 1_{\{S > s\}}$  est une sous-martingale vraie continue sur  $[s, +\infty] \times \Omega$ . Faisons tendre  $k$  vers  $+\infty$ , en considérant toujours  $[s, +\infty] \times \Omega$ ;  $\varphi_k(M)$  tend en décroissant vers  $\varphi(M)$  dans  $[s, S[$ ; mais  $(\varphi_k(M))_{s-} = \varphi_k(M_{s-})$ ,  $M_{s-} \in \bar{V}'$ , tend vers  $\varphi(M_{s-}) = (\varphi(M))_{s-}$  pour  $S > s$ . Donc  $(\varphi(M))^{s-} 1_{\{S > s\}}$  est, sur  $[s, +\infty] \times \Omega$ , une sous-martingale généralisée cadlag; elle est continue, bornée parce que  $\varphi$  est localement bornée et  $V'$  compact, donc elle est aussi une sous-martingale continue vraie. Mais alors  $\varphi(M)$  est équivalente dans  $[s, S[^\circ$  à une sous-martingale continue vraie sur  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ , à savoir  $((\varphi(M))^{s-} - (\varphi(M))^s) 1_{\{S > s\}}$ . Comme  $A' = \bigcup_{s \in Q_+} [s, S[^\circ$ ,  $\varphi(M)$  est sur  $A'$  une sous-martingale locale continue, au sens de (1.2); donc aussi sur  $A$ , en prenant une suite de  $V'$  épuisant  $V$ . Passons à la situation générale. Soit  $(V_n)_{n \in N}$  un atlas de  $V$ ,  $\Phi_n$  un isomorphisme de  $V_n$  sur un ouvert  $U_n$  de  $\mathbf{C}^N$ , de sorte que  $\varphi \circ \Phi_n^{-1}$  est une fonction plurisous-harmonique sur  $U_n$ ; puis une suite  $(A_{n,m})_{m \in N}$  d'ouverts de  $A$ , de réunion  $A_n = M^{-1}(V_n)$ , telle que  $\Phi_n(M)$ ,  $\mathbf{C}^N$ -martingale conforme sur  $A_n$ , soit équivalente sur  $A_{n,m}$  à une martingale conforme sur  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ . D'après ce qu'on vient de voir avant,  $\varphi(M) = (\varphi \circ \Phi_n^{-1})(\Phi_n \cdot (M))$  est une sous-martingale locale continue sur  $A_{n,m}$ ; donc aussi sur  $\bigcup_{m \in N} A_{n,m} = A_n$  et sur  $\bigcup_{n \in N} A_n = A$ .  $\square$

(4.8) Si on garde les mêmes hypothèses que ci-dessus, sans cependant supposer  $\varphi$  localement bornée ni-même  $> -\infty$ , on pourra seulement conclure que,  $\forall k \in N$ ,  $(\varphi \vee (-k))(M) = \varphi(M) \vee (-k)$  est une sous-martingale locale continue. Il ne semble pas qu'on puisse en déduire une conclusion sur  $\varphi(M)$  elle-même. Mais on le peut si  $A = \bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ . Car alors,  $\varphi(M) \vee (-k)$  étant une sous-martingale locale continue, si l'on pose  $T_n = \inf \{t; \varphi(M) > n\}$ , les  $T_n$  sont des temps d'arrêt,  $T_n \uparrow \uparrow +\infty$ , et  $(\varphi(M) \vee (-k))^{T_n} 1_{\{T_n > 0\}}$ , bornée, est une sous-martingale continue vraie. Donc  $(\varphi(M))^{T_n} 1_{\{T_n > 0\}}$  est une sous-martingale généralisée continue, donc  $\varphi(M)$  est une sous-martingale généralisée continue locale sur  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ . Ce cas bien sûr se produira souvent; qu'il soit vrai ou non que  $\varphi(M)$  est toujours continue, elle peut prendre la valeur  $-\infty$  si  $\varphi$  peut la prendre:  $M$  peut prendre toutes ses valeurs dans l'ensemble pluripolaire  $\{\varphi = -\infty\}$ .

(par exemple si  $M$  est constante!).

### 5. Les espaces 1-tangents et 2-tangents d'un variété complexe

Les espaces 1-tangents ont été étudiés dans Schwartz [1] §7; les espaces 2-tangents ne nous ont été nécessaires que plus tard, dans Schwartz [3], et là nous n'avons pas regardé le cas des variétés complexes et des martingales conformes; il est temps de réparer cette omission.

(5.1)  $V$  étant une variété  $C^2$  réelle, nous pourrions complexifier ses espaces tangents  $T^1(V; v)$ ,  $T^2(V; v)$  en  $T^1(V; v) + i T^1(V; v)$ ,  $T^2(V; v) + i T^2(V; v)$ , avec évidemment  $(T^2(V; v) + i T^2(V; v)) / (T^1(V; v) + i T^1(V; v)) \simeq (T^1(V; v) + i T^1(V; v)) \odot (T^1(V; v) + i T^1(V; v))$ ,  $\odot$  étant le produit tensoriel relatif à cette structure complexe,  $\odot = \odot_c$ . Nous n'avons complexifié que les espaces cotangents dans Schwartz [1], non les espaces tangents, parce qu'alors nous définissions, pour une  $V$ -semi-martingale  $X$ , les différentielles  $dX^c$  par dualité; depuis que nous les avons définis comme différentielles à valeurs dans des fibrés, par des  $\otimes_{\text{Opt}}$ , dans Schwartz [4], les espaces tangents prennent un nouveau rôle, et nous les complexifions ici; *C-linéaire voudra toujours dire linéaire pour cette structure complexe*. Soit maintenant  $V$  analytique complexe, de dimension complexe  $N$ , réelle  $2N$ . Elle devra pouvoir être considérée aussi comme réelle, donc  $T^1, T^2, dX, \dots$  seront les memes que si la variété était réelle; on pourra introduire des objets supplémentaires, avec des notations nouvelles, mais pas détruire les anciens.

(5.2) Rappelons que, si  $C_v^k$  (resp.  $C_v^k + iC_v^k$ ), est l'espace vectoriel des germes en  $v$  de fonctions réelles (resp. complexes) au voisinage de  $v \in V$ ,  $T^k(V; v)$  (resp.  $T^k(V; v) + iT^k(V; v)$ ) est l'espace des formes  $\mathbf{R}$ -linéaires (resp.  $\mathbf{C}$ -linéaires) sur  $C_v^k$  (resp.  $C_v^k + iC_v^k$ ), qui annulent les fonctions dont les dérivées d'ordre 1,  $\dots$ ,  $k$ , en  $v$  sont nulles;  $T^1(V; v)$  est de dimension réelle  $2N$ ,  $T^1(V; v) + iT^1(V; v)$  de dimension complexe  $2N$ . On appellera alors  $\mathcal{H}_v$  l'espace vectoriel des germes en  $v$  de fonctions holomorphes au voisinage de  $v$ , et  $T_{\mathcal{H}}^k(V; v)$  l'espace vectoriel des formes  $\mathbf{C}$ -linéaires sur  $\mathcal{H}_v$ , annulant les fonctions dont les dérivées d'ordre 1,  $\dots$ ,  $k$  en  $v$  sont nulles. Manifestement  $T_{\mathcal{H}}^k(V; v)$  est le quotient de  $T^k(V; v) + iT^k(V; v)$  par le sous-espace  $\mathcal{N}^k(V; v)$  des éléments annulant les fonctions holomorphes en  $v$ ;  $T_{\mathcal{H}}^1(V; v)$  est de dimension complexe  $N$ , donc  $\mathcal{N}^1(V; v)$  aussi.

Considérons une carte holomorphe de  $V$  sur un ouvert  $U$  d'un espace vectoriel complexe  $E$ ; au lieu d'appeler  $i$  le multiplicateur habituel de  $E$ , nous l'appellerons  $\mathbf{I}$ , opérateur  $\mathbf{R}$ -linéaire de carré  $-1$ ; il se prolonge à  $E + iE$ , complexifié de  $E$ , en un opérateur  $\mathbf{C}$ -linéaires  $\mathbf{I}$ , de carré  $-1$ . Si  $(e_k)_{k=1,2,\dots,N}$  est une  $\mathbf{I}$ -base de  $E$ , et si  $f_k = \mathbf{I} e_k$ ,  $(e_k, f_k)_{k=1,2,\dots,N}$  est une  $\mathbf{R}$ -base de  $E$ , donc une  $\mathbf{C}$ -base de  $E + iE$ . Si les  $(z_k)$ ,  $k=1, 2, \dots, N$ , sont les fonctions coordonnées (complexes) relativement à la  $\mathbf{I}$ -base de  $E$ ,  $z_k = x_k + iy_k$ , et les  $x_k, y_k, k=$



1, 2, ...,  $N$  sont les fonctions coordonnées pour la  $\mathbf{R}$ -base de  $E$ , se prolongeant en fonctions coordonnées pour la  $\mathbf{C}$ -base de  $E+iE$ , on peut poser  $e_k = \frac{\partial}{\partial x^k}$ ,  $f_k = \frac{\partial}{\partial y^k}$ , et il est habituel de poser  $\frac{\partial}{\partial z^k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^k} - i \frac{\partial}{\partial y^k} \right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^k} + i \frac{\partial}{\partial y^k} \right)$ . Alors  $T^1(V)$  s'identifie à  $U \times E$ , donc la carte munit  $T^1(V; v)$  d'une  $\mathbf{I}$ -structure complexe, et  $T^1(V)$  d'une structure de produit de variétés complexes. Un changement de cartes  $(U, E) \rightarrow (W, F)$  holomorphe se traduit par  $(x, \xi) \mapsto (\Phi(x), \Phi'(x)\xi)$ ,  $\Phi$  holomorphe,  $\Phi'$  holomorphe de  $U$  à valeurs dans  $\mathcal{L}_I(E_I; F_I)$ . Ceci montre que l'opérateur  $\mathbf{I}$  est intrinsèque, se transporte à  $T^1(V; v)$ , et lui donne une structure complexe  $T_I^1(V; v)$ ,  $\mathbf{I}$  opérateur  $\mathbf{R}$ -linéaire de carré  $-1$ , donc  $\mathbf{C}$ -linéaire de carré  $-1$  sur  $T^1(V; v) + iT^1(V; v)$ , et que  $T_I^1(V)$  est un fibré  $\mathbf{C}$ -analytique. Par contre, si on munit  $T^1(V; v) + iT^1(V; v)$  de sa  $\mathbf{C}$ -structure,  $T^1(V) + iT^1(V)$  n'est qu'un fibré  $\mathbf{R}$ -analytique. Bien que  $T_{\mathcal{A}}^1$  soit un quotient de  $T^1 + iT^1$ , il existe un  $\mathbf{R}$ -isomorphisme canonique entre  $T^1$  et  $T_{\mathcal{A}}^1$ : à tout  $\xi_{\mathcal{A}} \in T_{\mathcal{A}}^1(V; v)$ , on fait correspondre l'unique élément  $\xi = \rho \xi_{\mathcal{A}}$  de  $T^1(V; v)$  qui prend la même valeur sur les fonctions holomorphes (i.e.  $\xi$  a pour image  $\xi_{\mathcal{A}}$  dans le quotient  $T_{\mathcal{A}}^1(V; v) = (T^1(V; v) + iT^1(V; v)) / \mathcal{N}^1(V; v)$ ). Si  $\xi_{\mathcal{A}} = \frac{\partial}{\partial z^k}$ , qui est justement  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^k} - i \frac{\partial}{\partial y^k} \right)$ ,  $\xi = \frac{\partial}{\partial x^k}$ ; si  $\xi_{\mathcal{A}} = i \frac{\partial}{\partial z^k}$ ,  $\xi = \frac{\partial}{\partial y^k} = \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial x^k}$ ; donc  $\rho \cdot i = \mathbf{I} \cdot \rho$ ,  $\mathbf{I}$  est le transformé de  $i$  par  $\rho$ , ce qui montre à nouveau qu'il est intrinsèque, et  $\rho$  est un isomorphisme complexe de  $T_{\mathcal{A}}^1(V; v)$  muni de sa  $\mathbf{C}$ -structure, sur  $T_I^1(V; v)$  muni de sa  $\mathbf{I}$ -structure. Donc la carte sur  $U$  envoie aussi  $T_{\mathcal{A}}^1$  sur  $U \times E_I$ , et les changements de carte sont les mêmes;  $T_{\mathcal{A}}^1(V)$  est, comme  $T_I^1(V)$ , un fibré holomorphe.

(5.3) On définit maintenant deux sous-espaces  $T^{1,0}(V; v)$  et  $T^{0,1}(V; v)$  de  $T^1(V; v) + iT^1(V; v)$ . Il y a plusieurs définitions et propriétés qui se voient aussitôt par des cartes. D'abord  $T^{1,0}(V; v)$  est le sous-espace propre  $\{\mathbf{I} = i\}$  de  $\mathbf{I}$  pour la valeur propre  $i$ ,  $T^{0,1}(V; v)$  pour la valeur propre  $-i$ ; ils sont conjugués pour la conjugaison habituelle du complexifié  $T^1(V; v) + iT^1(V; v)$ , et de dimension complexe  $N$ , et  $T^1(V; v) + iT^1(V; v)$  est leur somme directe. Le projecteur de  $T^1(V; v) + iT^1(V; v)$ , d'image  $T^{1,0}(V; v)$ , de noyau  $T^{0,1}(V; v)$ , est  $\frac{1-i\mathbf{I}}{2}$ ,  $\mathbf{I} \frac{1-i\mathbf{I}}{2} = i \frac{1-i\mathbf{I}}{2} \left( = \frac{i+\mathbf{I}}{2} \right)$ , le projecteur sur  $T^{0,1}(V; v)$  de noyau  $T^{1,0}(V; v)$  est  $\frac{1+i\mathbf{I}}{2}$ . Une base de  $T^{1,0}(V; v)$  (resp.  $T^{0,1}(V; v)$ ) dans une carte est formée des  $\frac{\partial}{\partial z^k}$  (resp.  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}$ ),  $k=1, 2, \dots, N$ . Ensuite  $T^{1,0}(V; v)$  est le sous-espace de  $T^1(V; v) + iT^1(V; v)$  formé des formes linéaires sur  $C^1$ , qui annulent les fonctions anti-holomorphes:  $\xi \in T^1(V; v) + iT^1(V; v)$  est dans  $T^{1,0}(V; v)$ , ssi,  $V\varphi \in \mathcal{A}_{\bar{v}}$ ,  $\xi(\varphi) = 0$ ; de même  $T^{0,1}(V; v)$  est l'ensemble des éléments de  $T^1(V; v)$

$+iT^1(V; v)$  qui annulent les fonctions holomorphes. Il se trouve (mais l'équivalence de ces définitions ne sera plus vraie pour les  $T^k$ ,  $k \geq 2$ ) que  $T^{1,0}(V; v)$  et aussi l'ensemble des  $\xi$  qui "commutent" avec la multiplication par les fonctions anti-holomorphes: si  $f \in C_v^1 + iC_v^1$ ,  $\varphi \in \mathcal{H}_v$ ,  $\xi(\bar{\varphi}f) = \bar{\varphi}(v) \xi(f)$ ; et la propriété analogue pour  $T^{0,1}$ . Donc  $T^{0,1} = \mathcal{H}^1$ , et par suite  $T^{1,0} = (T^1 + iT^1)/T^{0,1} = (T^1 + iT^1)/\mathcal{H}^1 = T_{\mathcal{H}}^1$  (isomorphisme  $\mathbf{C}$ -linéaire). La correspondance entre  $T^{1,0}$  et  $T_{\mathcal{H}}^1$  est forcément la même: si  $\xi_{\mathcal{H}} \in T_{\mathcal{H}}^1(V; v)$ ,  $\sigma \xi_{\mathcal{H}} = \xi^{1,0}$  est l'unique élément de  $T^{1,0}(V; v)$  qui a même valeur sur les fonctions holomorphes, ou  $\xi_{\mathcal{H}}$  est l'image de  $\xi^{1,0}$  dans le quotient  $T_{\mathcal{H}}^1(V; v) = (T^1(V; v) + iT^0(V; v))/\mathcal{H}^1(V; v)$ . Cela montre que  $T^{1,0}(V)$  est un fibré holomorphe (mais pas  $T^{0,1}(V)$ , ni, encore une fois,  $T^1(V) + iT^1(V)$ ). Enfin cela établit un isomorphisme entre  $T^{1,0}(V; v)$  et  $T_I^1(V; v)$  pour la  $\mathbf{C}$ -structure du premier et la  $\mathbf{I}$ -structure du deuxième; à  $\xi^{1,0}$  correspond  $\xi = \rho \sigma^{-1} \xi^{1,0}$ , prenant les mêmes valeurs sur les fonctions holomorphes. Dans une carte sur  $U \subset E$ , si  $\xi = \frac{\partial}{\partial x^k}$ ,  $\xi^{1,0} = \frac{\partial}{\partial z^k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^k} - i \frac{\partial}{\partial y^k} \right) = \frac{1-i\mathbf{I}}{2} \frac{\partial}{\partial x^k}$ , l'isomorphisme  $T_I^1 \rightarrow T^{1,0}$  est  $\frac{1-i\mathbf{I}}{2}$ , qui vaut 1 sur  $T^{1,0}$  et 0 sur  $T^{0,1}$ , donc envoie  $T_I^1$  dans  $T^{1,0}$ , et son inverse est  $L \mapsto L + \bar{L}$ .

(5.4) Les choses deviennent plus compliquées avec les espaces 2-tangents, à cause de l'arrivée d'un nouveau partenaire,  $T^{1,1}$ . Tout d'abord, alors que  $T^1(V; v)$  admet une structure  $\mathbf{I}$ -complexe,  $T^2(V; v)$  n'en admet pas de naturelle, et même pas du tout si  $N$  est impair, car sa dimension (réelle) est  $2N + \frac{2N(2N+1)}{2} = 2N^2 + 3N$ , impair pour  $N$  impair; bien sûr  $T^2(V; v) + iT^2(V; v)$  est de dimension  $\mathbf{C}$ -complexe  $2N^2 + 3N$ . L'espace  $T_{\mathcal{H}}^2(V; v)$  a déjà été défini; lui, il est  $\mathbf{C}$ -complexe; dans une carte sur  $U$  ouvert de  $E$ , il s'écrit  $E_I \oplus (E_I \odot_I E_I)$ , de dimension  $\mathbf{I}$ -complexe  $N + \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N^2 + 3N}{2}$ . Une base est formée, en posant  $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k}$ ,  $\bar{\partial}_k = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}$ , des  $\partial_k, \bar{\partial}_i, \partial_j$  ( $i \leq j$ ), et tout opérateur différentiel holomorphe d'ordre 2 sans terme constant s'écrit

$$\sum_{k=1}^N b^k \partial_k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a^{i,j} \partial_i \partial_j, \quad a^{i,i} = a^{i,j}.$$

(Au contraire,  $T^2(V; v)$  est  $E \oplus (E \odot E)$ , et  $E_I \odot_I E_I$  est un quotient de  $E \odot E$ , nous le reverrons à (5.5)). La formule de transition pour un changement de carte  $\Phi: U \subset E \rightarrow W \subset F$  est celle que nous connaissons (voir Schwartz [3], (1.13), page 10)

$$(x, L) \quad \left( \Phi(x), \begin{pmatrix} \Phi'(x) & \Phi''(x) \\ 0 & \Phi'(x) \odot_I \Phi'(x) \end{pmatrix} L \right),$$

qui fait de  $T_{\mathcal{H}}^2(V)$  un fibré holomorphe.

(5.5) On définira des sous-espaces essentiels. L'espace  $T^{2,0}(V; v)$  est celui des éléments  $L$  de  $T^2(V; v) + iT^2(V; v)$  qui commutent avec la multiplication par les fonctions anti-holomorphes,  $L(\bar{\varphi}f) = \bar{\varphi}(v) L(f)$  pour  $\varphi \in \mathcal{H}_v, f \in C_v^2 + iC_v^2$ ; dans une carte, sa base est celle des  $\partial_k, \partial_i, \partial_j, i, j, k=1, 2, \dots, N$ , et  $i \leq j$ ; sa dimension  $\mathbf{C}$ -complexe est  $\frac{N^2+3N}{2}$ . Puis  $T^{0,2}(V; v)$  est l'espace des éléments

qui commutent avec la multiplication par les fonctions holomorphes,  $T^{0,2} = \overline{T^{2,0}}$  dans le complexifié  $T^2 + iT^2$ , sa base est formée des  $\bar{\partial}_k, \bar{\partial}_i, \bar{\partial}_j$ . Et enfin  $T^{1,1}(V; v)$  est l'espace des  $L$  qui annulent les fonctions holomorphes et les fonctions anti-holomorphes,  $L(\varphi) = L(\bar{\varphi}) = 0$  pour  $\varphi \in \mathcal{H}_v$ ; sa base est formée des  $\partial_i, \bar{\partial}_j, i, j=1, 2, \dots, N$ , il est de dimension  $\mathbf{C}$ -complexe  $N^2$ . Alors  $T^2 + iT^2$  est la somme directe  $T^{2,0} \oplus T^{0,2} \oplus T^{1,1}$ , et  $2N^2 + 3N = \frac{N^2+3N}{2} + \frac{N^2+3N}{2} + N^2$ . L'ensemble

des éléments qui annulent les fonctions antiholomorphes est  $T^{2,0} \oplus T^{1,1}$ , l'ensemble de ceux qui annulent les fonctions holomorphes est  $\mathcal{H}^2 = T^{2,0} \oplus T^{1,1}$ , donc  $T_{\mathcal{H}}^2 = (T^2 + iT^2)/\mathcal{H}^2 \simeq T^{2,0}$ , ce qu'ont déjà montré les bases. Donc  $T^{2,0}(V)$  est un fibré holomorphe, pas les autres. Il apparaîtra naturel d'appeler  $\mathbf{I}$  l'opérateur  $i$  sur  $T^{2,0}$ ,  $-i$  sur  $T^{0,2}$ ,  $0$  sur  $T^{1,1}$ ; il est  $\mathbf{C}$ -linéaire sur  $T^2 + iT^2$ , mais pas de carré  $-1$ . Alors les 3 espaces sont ses sous-espaces propres pour les valeurs propres  $i, -i, 0$ . Si on appelle partie réelle d'un sous-espace d'un espace complexifié l'ensemble de ses éléments réels,  $T^2$  est somme directe  $\mathcal{R}e(T^{2,0} + T^{0,2}) \oplus \mathcal{R}e T^{1,1}$ . Le second est annulé par  $\mathbf{I}$ , le premier admet  $\mathbf{I}$  comme opérateur  $\mathbf{R}$ -linéaire de carré  $-1$ , c'est lui qui a une  $\mathbf{I}$ -structure (son complexifié est  $T^{2,0} \oplus T^{0,2}$ , et ces deux sous-espaces sont ses sous-espaces propres  $\{\mathbf{I}=i\}$  et  $\{\mathbf{I}=-i\}$ ) et non  $T^2$ . Et  $T_{\mathcal{H}}^2, T^{2,0}$  sont aussi isomorphes à  $\mathcal{R}e(T^{2,0} \oplus T^{0,2})_{\mathbf{I}}$ , l'isomorphisme  $\mathcal{R}e(T^{2,0} \oplus T^{0,2}) \rightarrow T^{2,0}$  étant encore  $\frac{1-i\mathbf{I}}{2}$  (il est l'identité

sur  $T^{2,0}$ , nul sur  $T^{0,2}$ , donc envoie bien  $T^{2,0} \oplus T^{0,2}$  sur  $T^{2,0}$ ); l'isomorphisme inverse est  $L \mapsto L + \mathbf{I}L$ ; il envoie la  $\mathbf{I}$ -structure du premier sur la  $\mathbf{I}$ -structure du deuxième, qui est sa  $\mathbf{C}$ -structure. Ensuite  $T^{1,0} \subset T^{2,0}$  et  $T^{2,0}/T^{1,0} \simeq T^{1,0} \odot T^{1,0}$ ,  $T^{0,1} \subset T^{0,2}$  et  $T^{0,2}/T^{0,1} \simeq T^{0,1} \odot T^{0,1}$ , et  $T^{1,1} \simeq T^{1,0} \otimes T^{0,1}$  (sans passage au quotient),  $\odot = \odot_{\mathbf{C}}, \otimes = \otimes_{\mathbf{C}}$ , en convenant d'identifier  $T^{0,1} \otimes T^{1,0}$  avec  $T^{1,0} \otimes T^{0,1}$  par symétrie. (Schwartz [3], page 6.) Démontrons seulement la dernière affirmation. Soient  $\xi_v, \eta_v \in T^{1,0}(V; v)$ ; prolongeons-les en opérateurs différentiels holomorphes  $\xi, \eta$  de degré 1, au voisinage de  $v$ . Alors  $\xi \circ \bar{\eta}$  est un opérateur différentiel d'ordre 2. Sa trace  $(\xi \circ \bar{\eta})_v$  ne dépend que de  $\xi_v, \eta_v$ , et annule les fonctions holomorphes et les fonctions antiholomorphes, donc est dans  $T^{1,1}(V; v)$ . Donc on définit ainsi une application bilinéaire de  $T^{1,0}(V; v) \times T^{0,1}(V; v)$  dans  $T^{1,1}(V; v)$ , ou linéaire de  $T^{1,0}(V; v) \otimes T^{0,1}(V; v)$  dans  $T^{1,1}(V; v)$ , qu'une carte montre être bijective. Sur une carte,  $T^2(V; v) + iT^2(V; v) \simeq E^{1,0} \oplus E^{0,1} \oplus (E^{1,0} \odot E^{1,0}) \oplus (E^{0,1} \odot E^{0,1}) \oplus (E^{1,0} \otimes E^{0,1})$ . On a toujours les mêmes changements de cartes pour  $T^2 + iT^2$ ;  $\Phi'(x)$  envoie  $E^{1,0}$  sur  $F^{1,0}$ ,  $E^{0,1}$  sur  $F^{0,1}$  (parce qu'il commute avec  $i$

et  $\mathbf{I}$ , donc avec  $\frac{1-i\mathbf{I}}{2}$  et  $\frac{1+i\mathbf{I}}{2}$ ;  $\Phi''(x)$ , qui est à la fois  $\mathbf{C}$ -bilinéaire et  $\mathbf{I}$ -bilinéaire, envoie  $E^{1,0} \times E^{1,0}$  dans  $F^{1,0}$ ,  $E^{0,1} \times E^{0,1}$  dans  $F^{0,1}$ , et  $E^{1,0} \times E^{0,1}$ ,  $E^{0,1} \times E^{1,0}$  sur 0;  $\Phi'(x) \odot \Phi'(x)$  ( $\odot = \odot_{\mathbf{C}}$ ) envoie  $E^{1,0} \odot E^{1,0}$  sur  $F^{1,0} \odot F^{1,0}$ ,  $E^{0,1} \odot E^{0,1}$  sur  $F^{0,1} \odot F^{0,1}$ ; et  $\Phi'(x) \otimes \Phi'(x)$  envoie  $E^{1,0} \otimes E^{0,1}$  sur  $F^{1,0} \otimes F^{0,1}$ . Enfin  $T^1_{\mathcal{H}} \subset T^2_{\mathcal{H}}$ , et  $T^2_{\mathcal{H}}/T^1_{\mathcal{H}} \simeq T^1_{\mathcal{H}} \odot T^1_{\mathcal{H}}$  ( $\odot = \odot_{\mathbf{C}}$ ). Signalons qu'il y a un certain danger à identifier sans précaution  $T^{1,0} \otimes T^{0,1} \simeq T^{1,1} \subset T^2 + iT^2$  avec  $T^{1,0} \otimes T^{0,1} \subset (T^1 + iT^1) \odot (T^1 + iT^1)$ , parce que  $T^2 + iT^2$  et  $(T^1 + iT^1) \odot (T^1 + iT^1)$  ne sont pas le même espace. Sur une carte  $U \subset E$  non holomorphe,  $T^{1,1}$  n'est pas dans  $(E + iE) \odot (E + iE)$ , il a aussi une composante sur  $E + iE$ ; son image dans le quotient est dans  $(E + iE) \odot (E + iE)$ . Il y a une bijection, par la projection  $\pi$ , de  $T^{1,1}$  sur son image; si on appelle  $\pi^{1,1}$  l'application  $\pi$  de  $T^{1,1}$  sur son image,  $(\pi^{1,1})^{-1}$  sera la bijection réciproque,  $\mathbf{R}$ -analytique, de  $T^{1,0} \otimes T^{0,1} \subset (T^1 + iT^1) \odot (T^1 + iT^1)$  sur  $T^{1,1} \subset T^2 + iT^2$  (et de  $\mathcal{R}e(T^{1,0} \otimes T^{0,1}) \subset T^1 \odot T^1$  sur  $\mathcal{R}e T^{1,1}$ ).

Il y a un opérateur  $\mathbf{I}$  sur  $T^2 + iT^2$ , conservant  $T^1 + iT^1$ , donc sur  $(T^2 + iT^2)/(T^1 + iT^1) = (T^1 + iT^1) \odot (T^1 + iT^1)$ ; c'est  $i$  sur  $T^{1,0} \odot T^{1,0}$ ,  $-i$  sur  $T^{0,1} \odot T^{0,1}$ , 0 sur  $T^{1,0} \otimes T^{0,1}$ . Donc  $\mathcal{R}e((T^{1,0} \odot T^{1,0}) \oplus (T^{0,1} \odot T^{0,1}))$  est muni d'une  $\mathbf{I}$ -structure,  $\mathbf{I}^2 = -1$ , alors que  $T^1 \odot T^1$  ne l'est pas;  $\frac{1-i\mathbf{I}}{2}$  est une bijection de cet espace sur  $T^{1,0} \odot T^{1,0}$ , car  $\frac{1-i\mathbf{I}}{2}$  est 1 sur  $T^{1,0} \odot T^{1,0}$ , 0 sur  $T^{0,1} \odot T^{0,1}$ , donc envoie bien  $\mathcal{R}e(\dots)$  sur  $T^{1,0} \odot T^{1,0}$ , et il est bijectif, d'inverse  $L \mapsto L + \bar{L}$ , amenant la  $\mathbf{I}$ -structure du premier sur la  $\mathbf{I}$ -structure du deuxième, qui est aussi sa  $\mathbf{C}$ -structure. L'opérateur  $\mathbf{I}$  opère sur  $\mathcal{R}e(T^{2,0} \oplus T^{0,2})$ , et sur son sous-espace  $T^1$ , donc sur le quotient  $\mathcal{R}e(T^{2,0} \oplus T^{0,2})/T^1 = \mathcal{R}e((T^{1,0} \odot T^{1,0}) \oplus (T^{0,1} \odot T^{0,1}))$ .

(5.6) En posant, pour simplifier,  $T^1(V; v) = E$ , étudions plus profondément l'application canonique  $q: E \odot_{\mathbf{R}} E \rightarrow E \odot_{\mathbf{I}} E$ . Le premier espace est de dimension réelle  $\frac{2N(2N+1)}{2} = 2N^2 + N$ , le deuxième de dimension  $\mathbf{I}$ -complexe  $\frac{N(N+1)}{2}$ , donc réelle  $N(N+1) = N^2 + N$ . La différence est  $N^2$ , donc le noyau est de dimension  $N^2$ . Il est plus commode de tous les complexifier, on trouvera alors comme dimensions  $\mathbf{C}$ -complexes ce que nous venons de trouver comme dimensions réelles; on les écrira  $(E + iE) \odot (E + iE)$  (où  $\odot = \odot_{\mathbf{C}}$ )  $= (E \odot E) + i(E \odot E)$ , et  $(E + iE) \odot_{\mathbf{I}} (E + iE)$  (où  $\odot_{\mathbf{I}} = \odot_{\mathbf{C}, \mathbf{I}}$ )  $= (E \odot_{\mathbf{I}} E) + i(E \odot_{\mathbf{I}} E)$ . Mais  $(E + iE) \odot (E + iE) = (E^{1,0} \oplus E^{0,1}) \odot (E^{1,0} \oplus E^{0,1}) = (E^{1,0} \odot E^{1,0}) \oplus (E^{0,1} \odot E^{0,1}) \oplus (E^{1,0} \otimes E^{0,1})$ . On a une décomposition analogue avec  $\odot_{\mathbf{I}}$ ,  $\otimes_{\mathbf{I}}$ . Le noyau  $\Lambda$  de  $q$  est le sous-espace engendré par les  $\mathbf{I} \xi \odot \eta - \xi \odot \mathbf{I} \eta$ ,  $\xi, \eta \in E + iE$ ; mais il est somme directe des noyaux  $\Lambda^{2,0}$ ,  $\Lambda^{0,2}$ ,  $\Lambda^{1,1}$  de  $q^{2,0}$ :  $E^{1,0} \odot E^{1,0} \rightarrow E^{1,0} \odot_{\mathbf{I}} E^{1,0}$ ,  $q^{0,2}$ :  $E^{0,1} \odot E^{0,1} \rightarrow E^{0,1} \odot_{\mathbf{I}} E^{0,1}$ ,  $q^{1,1}$ :  $E^{1,0} \otimes E^{0,1} \rightarrow E^{1,0} \otimes_{\mathbf{I}} E^{0,1}$ , et  $q = q^{2,0} \oplus q^{0,2} \oplus q^{1,1}$ . Mais  $\Lambda^{2,0} = \Lambda^{0,2} = \{0\}$ ,  $q^{2,0}$  et  $q^{0,2}$  sous l'identité parce que  $\mathbf{I}$  est le scalaire  $i$  dans  $E^{1,0}$ ,  $-i$  dans  $E^{0,1}$ ; et  $\Lambda^{1,1} = E^{1,0} \otimes E^{0,1}$ ,  $q^{1,1}$  est nul, et  $E^{1,0} \odot_{\mathbf{I}} E^{0,1} = \{0\}$  parce que  $\mathbf{I} \xi \otimes \eta - \xi \otimes \mathbf{I} \eta = 2i$

$(\xi \otimes \eta)$  pour  $\xi, \eta \in E^{1,0}$ . Donc  $q$  est l'identité de  $\mathcal{R}e((E^{1,0} \odot E^{1,0}) \oplus (E^{0,1} \odot E^{0,1}))$  sur  $E^1 \odot_I E^1$ , nul sur  $\mathcal{R}e(E^{1,0} \otimes E^{0,1})$ . La dimension de  $\Lambda$  est bien  $N^2$ , celle de  $E^{1,1} = E^{1,0} \otimes E^{0,1}$ . Nous avons trouvé un opérateur  $I$  sur  $(E^{1,0} \odot E^{1,0}) \oplus (E^{0,1} \odot E^{0,1})$ , nous en avons un aussi sur  $(E_I + iE_I) \odot_I (E_I + iE_I)$ , c'est le même par la bijection  $q^{2,0} \oplus q^{0,2}$ , qui est ainsi  $\mathbf{C}$ -linéaire et  $I$ -linéaire.

## 6. Nouvelles propriétés des martingales conformes

(6.1) Soient  $V$  une variété complexe,  $X$  une  $V$ -semi-martingale sur  $A$ , ouvert optionnel de  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ . Les notations  $\underline{dX}$ ,  $\widetilde{dX}$ ,  $dX^c$ ,  $\frac{1}{2} d[X, X]$ , suivant le principe général indiqué à (5.1), devront garder leur signification ancienne,  $V$  étant considérée comme variété réelle; on peut introduire de nouveaux objets, avec de nouvelles notations, mais on ne doit pas détruire les anciennes.<sup>(9)</sup> Les différentielles précédentes ont des composantes sur les sous-espaces définis au paragraphe 5. D'abord

(6.1.1)  $\underline{dX} = \underline{dX}^{2,0} + \underline{dX}^{0,2} + \underline{dX}^{1,1}$ ,  $\underline{DX}^{i,j} \in T^{i,j}(V)$ ;  $\underline{dX}$  est réelle, donc  $\underline{dX}^{0,2} = \underline{dX}^{2,0}$  (complexe conjuguée), et  $\underline{dX}^{2,0} + \overline{\underline{dX}^{2,0}} \in \mathcal{R}e(T^{2,0} \oplus T^{0,2})$ ,  $\underline{dX}^{1,1}$  est réelle  $\in \mathcal{R}eT^{1,1}$ . Ensuite

(6.1.2)  $dX^c = (dX^c)^{1,0} + (dX^c)^{0,1}$ , et  $(dX^c)^{0,1} = \overline{(dX^c)^{1,0}}$ ;

(9) Voir la définition de  $\underline{dX}$ , Schwartz [3], proposition (2.7) page 16, ou de préférence Schwartz [4], (2.10);  $dX^c$  à Schwartz [3], proposition (2.11), page 20, ou Schwartz [4], (2.12);  $\widetilde{dX}$  à Schwartz [3], (2.13quarto), page 21, ou Schwartz [4], (2.12);  $\underline{dX} = \underline{dX}^c + \widetilde{dX}$ ;  $\frac{1}{2} d[X, X]$  à Schwartz [3], (2.14) page 22, ou Schwartz [4], (2.12);  $\frac{1}{2} d[X, X] = \pi \underline{dX} = \pi \widetilde{dX}$ , image dans le quotient  $T^1 \odot T^1$  de  $T^2$ . En ce qui concerne la distinction entre les objets relatifs à  $V$  complexe ou seulement munie de sa structure réelle, on peut être très rigoureux pour une variété générale, mais c'est plus difficile si  $V$  est un espace vectoriel  $E$  muni d'une structure complexe, et parfois les choses s'embrouillent! On conviendra ceci: si  $E$  est  $\mathbf{R}$ -vectoriel (resp.  $\mathbf{C}$ -vectoriel avec multiplication par  $i \in \mathbf{C}$ ; exemple,  $E = \mathbf{C}^N$ ),  $[X, X]$  est le crochet réel  $\in E \odot_{\mathbf{R}} E$  (resp. le crochet complexe  $\in E \odot_{\mathcal{O}} E$ ); si  $E$  est  $\mathbf{R}$ - (resp.  $\mathbf{C}$ -) vectoriel, muni en outre d'un opérateur  $\mathbf{R}$ - (resp.  $\mathbf{C}$ -) linéaire  $I$  de carré  $-1$ ,  $[X, X]$  est à valeurs dans  $E \odot E$ ,  $\odot = \odot_{\mathbf{R}}$  (resp.  $\odot_{\mathcal{O}}$ ),  $[X, X]_I$  est à valeurs dans  $E_I \odot_I E_I$ ,  $\odot_I = \odot_{\mathbf{R}, I}$  (resp.  $\odot_{\mathcal{O}, I}$ ). Par exemple, à (6.1.4),  $d[X, X]^{2,0} \in T^{1,0} \odot T^{1,0}$ ,  $\odot = \odot_{\mathcal{O}}$ ; à (6.2.1),  $d[X, X]_{\mathcal{A}} \in T^1_{\mathcal{A}} \odot T^1_{\mathcal{A}}$ ,  $\odot = \odot_{\mathcal{O}}$ ; à (6.3),  $G_A$  est  $\mathbf{C}$ -vectoriel,  $d[X, X] \in G_A \odot G_A$ ,  $\odot = \odot_{\mathcal{O}}$ . Dans (7.4) pour  $E$  complexe et  $M$  martingale conforme, nous avons spécifié que l'ensemble  $\{ \}$  de l'énoncé était relatif au crochet réel, à valeurs dans  $E \odot_{\mathbf{R}} E$ , mais qu'on reconnaissait la martingale conforme d'après  $[M, M] = 0$ , pour le crochet complexe, à valeurs dans  $E \odot_{\mathcal{O}} E$ . Même si  $E = \mathbf{C}$ , où en principe (le multiplicateur est  $i$ )  $[M, M]$  est le crochet complexe à valeurs dans  $\mathbf{C} \odot \mathbf{C} = \mathbf{C}$ , on pourra toujours spécifier  $[M, M]_{\mathcal{O}} \in \mathbf{C}$ ,  $[M, M]_{\mathbf{R}} \in \mathbf{C} \odot_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ , de dimension réelle  $\frac{2 \times 3}{2} = 3$ . Dans l'énoncé (7.4), on voit aisément qu', si l'on veut conserver seulement les structures complexes,  $[M, \bar{M}]_{\mathcal{O}}$  est à valeurs dans  $E \otimes_{\mathcal{O}} \bar{E}$  ( $\bar{E}$  antiespace de  $E$ ), et que  $\{[M, M]_{\mathbf{R}}\}$  est à variation finie jusqu'en  $T$ ;  $\{[M, \bar{M}]_{\mathcal{O}}\}$  est à variation finie jusqu'en  $T$ , alors que la martingale conforme se reconnaît par  $[M, M]_{\mathcal{O}} = 0$ .

$$(6.1.3) \quad \widetilde{dX} = \widetilde{dX}^{2,0} + \widetilde{dX}^{0,2} + \widetilde{dX}^{1,1};$$

$$(6.1.4) \quad \frac{1}{2} d[X, X] = \frac{1}{2} d[X, X]^{2,0} + \frac{1}{2} d[X, X]^{0,2} + \frac{1}{2} d[X, X]^{1,1}, \text{ avec } \frac{1}{2} d[X, X]^{2,0} \in T^{1,0} \odot T^{1,0}, \frac{1}{2} d[X, X]^{0,2} = \frac{1}{2} \overline{d[X, X]^{2,0}}, \text{ et } \frac{1}{2} d[X, X]^{1,1} \in T^{1,0} \otimes T^{0,1}$$

$$\text{(identifié à } T^{0,1} \otimes T^{1,0} \text{ réelle, donc } \in \mathcal{R}e(T^{1,0} \otimes T^{0,1}), \frac{1}{2} d[X, X]^{2,0} = \frac{1}{2} d[(X^c)^{1,0}, (X^c)^{1,0}], \frac{1}{2} d[X, X]^{0,2} = \frac{1}{2} d[(X^c)^{0,1}, (X^c)^{0,1}], \frac{1}{2} d[X, X]^{1,1} = \frac{1}{2} d[(X^c)^{1,0}, (X^c)^{0,1}] + \frac{1}{2} d[(X^c)^{0,1}, (X^c)^{1,0}] = d[(X^c)^{1,0}, (X^c)^{0,1}].$$

En outre,  $(dX^c)^{1,0} = (dX^{2,0})^c$ ,  $(dX^c)^{0,1} = (dX^{0,2})^c$ , et alors  $(\widetilde{dX}^{1,1})^c = 0$ ,  $\widetilde{dX}^{1,1}$  est une différentielle de processus à variation finie  $= \widetilde{dX}^{1,1}$ . Comme ensuite  $\frac{1}{2} d[X, X] = \pi \widetilde{dX} = \pi \widetilde{dX}$ ,  $\pi$  projection de  $T^2$  sur  $T^1 \odot T^1$ ,  $\frac{1}{2} d[X, X]^{2,0} = \pi \widetilde{dX}^{2,0}$ ,  $\frac{1}{2} d[X, X]^{0,2} = \pi \widetilde{dX}^{0,2}$ ,  $\frac{1}{2} d[X, X]^{1,1} = \pi \widetilde{dX}^{1,1}$ , donc, d'après la fin de (5.5),  $\widetilde{dX}^{1,1} = (\pi^{1,1})^{-1} \frac{1}{2} d[X, X]^{1,1}$ , ce qui montre à nouveau qu'il est différentielle de processus à variation finie. Comme on le voit, toute l'information est contenue dans  $\widetilde{dX}^{2,0}$ ,  $(dX^c)^{1,0}$ ,  $\widetilde{dX}^{2,0}$ ,  $\frac{1}{2} d[X, X]^{2,0}$ ;  $\widetilde{dX}^{2,0}$  permet de retrouver  $\widetilde{dX}$  par

$$(6.2) \quad \widetilde{dX} = 2 \mathcal{R}e \widetilde{dX}^{2,0} + (\pi^{1,1})^{-1} d[(X^{2,0})^c, (\overline{X^{2,0}})^c].$$

Récrivons tout dans une carte sur un ouvert  $U$  d'un espace vectoriel  $\mathbf{I}$ -complexe  $E$ :

$$(6.2.1) \quad dX = dX^{1,0} + dX^{0,1}, \quad \frac{1}{2} d[X, X] = \frac{1}{2} d[X^{1,0}, X^{1,0}] + \frac{1}{2} d[X^{0,1}, X^{0,1}] + d[X^{1,0}, X^{0,1}]. \text{ Alors}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{dX} &= \begin{pmatrix} dX \\ \frac{1}{2} d[X, X] \end{pmatrix}, \quad \widetilde{dX}^{2,0} = \begin{pmatrix} dX^{1,0} \\ \frac{1}{2} d[X^{1,0}, X^{1,0}] \end{pmatrix}, \\ \widetilde{dX}^{0,2} &= \begin{pmatrix} dX^{0,1} \\ \frac{1}{2} d[X^{0,1}, X^{0,1}] \end{pmatrix}, \quad \widetilde{dX}^{1,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ d[X^{1,0}, X^{0,1}] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(6.2.2) Cela revient d'ailleurs à profiter de la structure complexe pour ne considérer qu'elle, et à utiliser  $T_{\mathcal{A}}^1$ ,  $T_{\mathcal{A}}^2$ ,  $T_{\mathcal{A}}^1 \odot T_{\mathcal{A}}^1$ , isomorphes aux précédents, et dont les cartes sont sur  $E_I$ ,  $E_I \oplus (E_I \odot_I E_I)$ ,  $E_I \odot E_I$ ; cela permet de définir directement les différentielles  $\widetilde{dX}_{\mathcal{A}}$ ,  $dX_{\mathcal{A}}^c$ ,  $\widetilde{dX}_{\mathcal{A}}$ ,  $\frac{1}{2} d[X, X]_{\mathcal{A}}$ , par la méthode des différentielles à valeurs dans des fibrés optionnels, en utilisant les change-

ments de cartes de (5.4) comme dans Schwartz [4]. Bien qu'on effectue, dans ces deux derniers cas, des passages aux quotients, ces expressions donnent toute l'information:  $\underline{dX}^{2,0}$  ou  $\underline{dX}_{\mathcal{H}}$  permettent de retrouver  $\underline{dX}$ .

(6.3) Soit  $dM$  une différentielle de martingale à valeurs dans un fibré optionnel  $G_A$ , à fibre vectorielle complexe. Alors  $\frac{1}{2} d[M, M]$  est une différentielle de processus à variation finie, à valeurs dans le fibré  $G_A \odot_C G_A$ . On dira que  $dM$  est une différentielle de martingale conforme si  $\frac{1}{2} d[M, M] = 0$ . Si  $J, J' \in \text{Opt}(A; G_A^*)$ ,  $J \odot J' \in \text{Opt}(A; G_A^* \odot_C G_A^*)$ , et  $((J \odot J') | \frac{1}{2} d[M, M]) = d[J.M, J'.M]$ , différentielle de processus à variation finie complexe. Alors  $dM$  est une différentielle de martingale conforme, ssi,  $\forall J \in \text{Opt}(A; G_A^*)$ ,  $(J | dM)$  est une différentielle de martingale conforme complexe. On sait que  $dM \in \text{Opt}(A; G_A) \otimes_{\text{Opt}} \mathcal{M}(A)$ , (Schwartz [4], proposition (2.3), et qu'elle s'écrit  $dM = \sum_{k=1}^m g_k dM^k$ ,  $g_k \in \text{Opt}(A; G_A)$ ,  $dM^k \in \mathcal{M}(A)$ , avec  $(g_k)_{k=1,2,\dots,m}$  Opt-base de  $\text{Opt}(A; G_A)$ ,  $(g^{*k})_{k=1,2,\dots,m}$  Opt-base duale de  $\text{Opt}(A; G_A^*)$ ,  $dM^k = (g^{*k} | dM)$ . Ceci exprime, comme toujours, qu'en fait  $dM \in \text{Opt}(A; G_A) \otimes_{\text{Opt}} \mathcal{M}'(A)$ , où  $\mathcal{M}'(A)$  est un sous-Opt(A)-module de rang fini de  $\mathcal{M}(A)$ . Alors  $dM$  est une différentielle de martingale conforme ssi  $dM \in \text{Opt}(A; G_A) \otimes_{\text{Opt}} \mathcal{M}'(A)$ , où  $\mathcal{M}'(A)$  est un Opt(A)-module de différentielles de martingales conformes (rappelons que les martingales conformes ne forment pas un espace vectoriel, elles ne sont pas stables par addition).

**Proposition 6.4** (Théorème). *Soit  $M$  une  $V$ -semi-martingale sur  $A$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

- 1)  $M$  est une martingale conforme;
- 2)  $\underline{dM}^{2,0}$  (ou  $\underline{dM}^{0,2}$ ) est une différentielle de martingale, c.à d.  $\underline{\widetilde{dM}}^{2,0} = 0$  (ou  $\underline{\widetilde{dM}}^{0,2} = 0$ ), ou  $\underline{\widetilde{dM}} \in T^{1,1}$ , ou  $\underline{\widetilde{dM}} = (\pi^{1,1})^{-1} d[M^{2,0}, M^{0,2}]$ ;
- 2bis)  $\underline{dM}^{2,0} \in T^{1,0}$  (ou  $\underline{dM}^{0,2} \in T^{0,1}$ ), et c'est une différentielle de martingale conforme; alors  $d[M^{2,0}, M^{2,0}] = d[M^{0,2}, M^{0,2}] = 0$ , donc  $\frac{1}{2} d[M, M] \in \text{Re}(T^{1,0} \otimes T^{0,1})$  et  $= d[M^{2,0}, \overline{M}^{2,0}]$ .
- 3)  $\underline{dM}^{2,0} + \underline{dM}^{0,2} (= 2 \text{ Re } \underline{dM}^{2,0})$  est une différentielle de martingale (réelle);
- 3bis)  $\underline{dM}^{2,0} + \underline{dM}^{0,2} = 2 \text{ Re } \underline{dM}^{2,0} \in T^1$  et c'est une différentielle de martingale réelle (qui est donc  $dM^c$ ).

Démonstration. Comme 2bis  $\Rightarrow$  2, nous montrerons que 2  $\Rightarrow$  2bis et que 1  $\Leftrightarrow$  2; le passage à 3 et 3bis est évident. Supposons 2; alors  $\underline{dM}^{2,0} = (\underline{dM}^{2,0})^c = (\underline{dM}^c)^{1,0} \in T^{1,0}$ , et alors son image dans le quotient  $T^{2,0}/T^{1,0}$  est nulle,

$\frac{1}{2} d[M^{2,0}, M^{2,0}] = 0$ , donc 2bis. Regardons une carte holomorphe sur un ouvert d'un espace vectoriel  $\mathbf{I}$ -complexe  $E$ . Dire que  $M$  est une martingale conforme, c'est dire, dans cette carte, que  $dM$ , composante de  $\underline{dM}$  sur  $E$  ou  $E+iE$ , est une différentielle de martingale  $\mathbf{I}$ -conforme; comme  $dM^{1,0}$  et  $dM^{0,1}$ , ses composantes sur  $E^{1,0}$  et  $E^{0,1}$ , sont  $i$ -conjuguées, c'est dire que  $dM^{1,0}$  est une différentielle de martingale conforme; ou que  $dM^{1,0}$  est une différentielle de martingale et  $\frac{1}{2} d[M^{1,0}, M^{1,0}] = 0$ ; mais, lu dans cette carte,  $\underline{dM}^{2,0} = \begin{pmatrix} dM^{1,0} \\ \frac{1}{2} d[M^{1,0}, M^{1,0}] \end{pmatrix}$ , cela équivaut donc à dire que  $\underline{dM}^{2,0}$  est une différentielle de martingale.  $\square$

(6.5) De la décomposition en somme directe des  $T^k + iT^k$  on déduit celle des  $T^{k*} + iT^{k*}$ . Le dual de chacun des sous-espaces est l'orthogonal de la somme des autres. Alors de (6.4) on déduit aussitôt:

**Proposition 6.5** *Soit  $M$  une  $V$ -semi-martingale sur  $A$ . Les propriétés suivantes seront équivalentes:*

- 1)  $M$  est une martingale conforme;
- 2) Pour tout  $J \in \text{Opt}(A; M; T^{2,0*}(V))$ ,  $(J | \underline{dM})$  est une différentielle de martingale;
- 2bis) Pour  $J \in \text{Opt}(A; M; T^{2,0*}(V))$ ,  $(J | \underline{dM})$  ne dépend que de l'image de  $J$  dans le quotient  $\text{Opt}(A; M; T^{1,0*}(V))$ , et c'est une différentielle de martingale conforme.
- 3), 3bis) Pour  $J \in \text{Opt}(A; M; \mathcal{R}e(T^{2,0*}(V) + T^{0,2*}(V)))$ ,  $(J | \underline{dM})$  est une différentielle de martingale, ou elle ne dépend que de l'image de  $J$  dans  $\text{Opt}(A; M; T^{1*}(V))$ , et elle est une différentielle de martingale. On peut se borner à supposer  $J$  de la forme  $\bar{\omega}(M)$ ,  $\bar{\omega}$  champ de  $(2, 0)$ -vecteurs continu à support compact; alors, si  $A = \bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ , l'intégrale stochastique  $\bar{\omega}(M) \cdot \underline{M}$  est une martingale conforme.

REMARQUES 6.6 Enfin, voilà des définitions directes des martingales conformes, sans passer par les fonctions holomorphes  $\varphi$  sur des ouverts! C'est ce que je n'avais pas pu trouver dans Schwartz [1]. Voir remarque page 92, qui énonce un théorème faux, dont l'erratum a été distribué ultérieurement. Une intégrale de Stratonovitch par rapport à une martingale n'est pas une martingale! Remarquons qu'on peut prendre  $J$  à support compact, alors qu'on ne pourrait pas prendre  $J = D^2\varphi(M)$ ,  $\varphi$  holomorphe à support compact!

(6.7) Au lieu de raisonner sur  $T^{1,0}$ ,  $T^{2,0}$ , on pourrait prendre  $T^1_{\mathcal{A}}$ ,  $T^2_{\mathcal{A}}$ , et  $T^2_{\mathcal{A}}/T^1_{\mathcal{A}} = T^1_{\mathcal{A}} \odot T^1_{\mathcal{A}}$ . Alors  $M$  est une martingale conforme ssi  $\underline{dM}$  est une différentielle de martingale,  $\widetilde{dM} = 0$ , ou ssi elle est dans  $T^1_{\mathcal{A}}$ , et est une diffé-



entielle de martingale conforme,  $\frac{1}{2} d[M, M]_{\mathcal{H}} = 0$ . Les variétés réelles nous ont habitués à ce que  $dX$  ne puisse prendre ses valeurs dans  $T^1$  que si  $X$  est à variation finie. Et ici nous trouvons des martingales conformes  $M$ , pour lesquelles  $dM^{2,0}$  ou  $dM_{\mathcal{H}}$  est à valeurs dans  $T^{1,0}$  ou  $T^1_{\mathcal{H}}$ ! Cela vient de ce qu'il y a eu passage au quotient. Par exemple,  $T^2_{\mathcal{H}}$  est le quotient  $(T^2 + iT^2)/\mathcal{H}^2$ ,  $\mathcal{H}^2 = T^{0,2} \oplus T^{1,1}$ ; dire que  $dM_{\mathcal{H}} \in T^1_{\mathcal{H}}$  veut simplement dire que  $dM \in (T^1 + iT^1) + T^{0,2} + T^{1,1} = T^{1,0} \oplus T^{0,2} \oplus T^{1,1}$ , ce qui n'a plus rien d'extraordinaire! Par conjugaison, cela veut dire que  $dM \in T^1 + \text{Re } T^{1,1}$ , ce qui est bien le cas, puisque  $dM = dM^c + d\tilde{M}^{1,1}$ .

(6.8) On peut donner des énoncés analogues exprimant que  $X$  est une semi-martingale conforme. Dans (6.4), 2) deviendra:  $dX^{2,0}$  est une différentielle de semi-martingale conforme (sa composante martingale est conforme), 2bis) deviendra:  $dX^{2,0}$  est à valeurs dans  $T^{1,0}$  et est une différentielle de semi-martingale conforme, etc....

**Corollaire 6.8.** *Dans l'espace  $\mathcal{SM}(V)$  des  $V$ -semi-martingales sur  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ , l'ensemble des martingales conformes est fermé.*

Démonstration. On pourrait le faire directement avec la définition des martingales conformes, mais c'est nettement plus simple à partir de (6.5). Comme  $\mathcal{SM}(V)$  ( $A = \mathbf{R}_+ \times \Omega$  est omis) est métrisable, on peut prendre une suite  $(M_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de martingales conformes, convergeant vers une semi-martingale  $M$ . Quitte à extraire une suite partielle,  $M_n$  converge vers  $M$ , pour presque tout  $\omega$ , uniformément en  $t$  (chaque trajectoire est compacte, la convergence uniforme a un sens par des cartes). Alors, si  $\bar{\omega}$  est un champ de vecteurs (2, 0)-cotangents, continu à support compact,  $\bar{\omega}(M_n)$  converge vers  $\bar{\omega}(M)$ , pour presque tout  $\omega$ , uniformément en  $t$ . Comme ensuite  $M_n$  converge vers  $M$  dans  $\mathcal{SM}(V)$ ,  $\bar{\omega}(M_n) \cdot M_n$  converge vers  $\bar{\omega}(M) \cdot M$  dans  $\mathcal{SM}$  (scalaire !); les  $\bar{\omega}(M_n) \cdot M_n$  sont des martingales conformes, sous-ensemble (non sous-espace vectoriel !) fermé de  $\mathcal{SM}$ , donc  $\bar{\omega}(M) \cdot M$  est une martingale conforme<sup>(10)</sup> (On ne pourrait pas

(10) Pour la topologie de  $\mathcal{SM}$ , voir note (2), page 79. La topologie de  $\mathcal{SM}$  étant définie pour les semi-martingales nulles en 0, si  $X$  est quelconque, on dira que  $X$  converge vers 0 si  $X_0$  et  $X - X_0$  convergent vers 0. Pour les semi-martingales sur une variété  $V$ , on dira que  $X$  converge vers 0 si, pour toute  $\varphi$  réelle  $C^2$  sur  $V$ ,  $\varphi(X)$  converge vers 0; cela revient à plonger  $V$  dans un espace vectoriel (réel)  $E$ , et à considérer les  $V$ -semi-martingales comme des  $E$ -semi-martingales. Dans la suite de la démonstration, peut-être faut-il préciser pourquoi  $\bar{\omega}(M_n) \cdot \underline{M}_n$  converge vers  $\bar{\omega}(M) \cdot \underline{M}$  dans  $\mathcal{SM}$ . Il existe un relèvement linéaire continu  $\rho$  de  $T^{*2}(V)$ , fibré sur  $V$ , dans le fibré trivial dont il est un quotient,  $V \times (E^* \oplus (E^* \odot E^*))$ , et de même dans les complexifiés correspondants. Alors,  $\bar{\omega}(M) \cdot \underline{M} = \rho \bar{\omega}(M) \cdot \underline{M}$ ,  $\underline{M}$  étant considérée

comme à valeurs dans  $E \oplus (E \odot E)$ ,  $\underline{M} = \begin{pmatrix} M \\ \frac{1}{2} [M, M] \end{pmatrix}$ . La convergence énoncée est alors un

prendre des  $\bar{\omega}$  de la forme  $D^2 \varphi$ , car  $\varphi$  devrait être holomorphe pour que  $\varphi$  soit à valeurs dans  $T^{2,0}$ , et il n'y a pas en général assez de fonctions holomorphes si  $V$  n'est pas de Stein ! et jamais de fonctions holomorphes à support compact !).  $\square$

## 7. Prolongements de semi-martingales au-delà d'un temps d'arrêt

Sauf mention expresse du contraire, et sauf à (7.1), (7.1.1), (7.1.2), toutes les semi-martingales seront supposées continues.

(7.1) Tout ce que nous avons fait pour un ouvert  $A$  de  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$  peut être refait aussi bien pour un ouvert relatif  $A$  de  $[S, T]$ , intervalle stochastique. Nous prendrons toujours  $A \subset \bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ , donc  $T \leq +\infty$  ou  $T \leq \overline{+\infty}$  reviennent au même. Nous dirons que  $X \in \mathcal{A}(A)$  si  $X$  est restriction à  $A$  d'un processus optionnel  $\bar{X}$  sur  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ , et s'il existe une suite  $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$  d'ouverts relatifs de  $[S, T]$  tels que, pour tout  $n$ ,  $X|_{A_n} \in \mathcal{A}(\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega)$ . Nous demandons au lecteur d'admettre que tous les énoncés sont valables. (Nous l'avons d'ailleurs fait dans Schwartz [3], (6.1) page 86, pour les semi-martingales.) Pour le §1, les hypothèses  $X \sim X'$ , semi-martingale (1.4) ou semi-martingale continue (1.5) subsisteront sous cette forme. Ce sont ici les extrémités  $S(\omega)$ ,  $T(\omega)$ , qui donnent les petits ennuis techniques que donnaient 0,  $+\omega$  dans le cas de  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ . Signalons, en vrac, quelques propriétés faciles :

(7.1.1) Soit  $A' \supset A$  l'ouvert de  $[S, +\infty]$  obtenu comme suit : si  $T(\omega) \in A(\omega)$ , on pose  $A'(\omega) = A(\omega) \cup [T(\omega), +\infty]$ , sinon  $A'(\omega) = A(\omega)$ . On peut faire de même pour les  $A_n$  intervenant dans la définition, remplacer  $X$  et  $X_n$  par  $X^T$ ,  $X_n^T$ . Alors  $X \in \mathcal{A}(A)$  ssi  $X^T \in \mathcal{A}(A')$ , ce qui permet toujours de remplacer  $[S, T]$  par  $[S, +\infty]$ . On ne peut pas remplacer  $S$  par 0 de la même manière, les processus obtenus ne seraient plus optionnels. Mais, dans le cas de processus à valeurs vectorielles, on peut encore remplacer  $A$  par  $A''$  ouvert de  $[0, T]$  de la même manière, à condition de remplacer  $X$ ,  $X_n$  par  $X - X^S$ ,  $X_n - X_n^S$ ;  $X \in \mathcal{A}(A)$  ssi  $X - X^S \in \mathcal{A}(A'')$  (rien de tel dans le cas d'une variété  $V$ ). Finalement, en prenant  $A' \cup A''$ , ouvert de  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ ,  $X \in \mathcal{A}(A)$  ssi  $X^T - X^S \in \mathcal{A}(A' \cup A'')$ ,  $A' \cup A''$  ouvert de  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ .

---

théorème d'Emery, Emery [1], qui s'énonce comme suit : si  $(H_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite de processus continus qui converge vers un processus  $H$  continu, pour presque tout  $\omega$  uniformément en  $t$ , et  $(Z_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de semi-martingales qui converge vers une semi-martingale  $Z$  dans  $\mathcal{SM}$ , les intégrales stochastiques  $H_n \cdot Z_n$  convergent vers  $H \cdot Z$  dans  $\mathcal{SH}$ . En effet, par la méthode de localisation d'Emery on se ramène (en prenant des suites partielles) à une suite  $H_n$  convergeant vers  $H$  dans  $\mathcal{S}^b$ ,  $Z_n$  vers  $Z$  dans  $\mathcal{H}^q$ , donc  $H_n \cdot Z_n$  vers  $H \cdot Z$  dans  $\mathcal{H}^r$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ .

(7.1.2)  $X$  est une semi-martingale sur  $[S, T]$  ssi elle est restriction d'une semi-martingale  $X'$  sur  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$  (Schwartz [1], Proposition (2.4), page 10); elle est semi-martingale continue sur  $[S, T]$ , dans le cas vectoriel, ssi elle est équivalente à une semi-martingale continue  $X'^T - X'^S$  sur  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ , et alors (1.5) montre que  $X \in \mathcal{A}[S, T] \Leftrightarrow X^T - X^S \in \mathcal{A}(\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega)$ .

(7.1.3) Si  $X$  est une semi-martingale vectorielle (à partir de maintenant, toutes les semi-martingales seront de nouveau supposées continues) sur  $[S, T]$ ,  $X \in \mathcal{A}(A)$  ssi  $X \in \mathcal{A}(A \cap ]S, T[)$ ,  $A \cap ]S, T[$  ouvert de  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$  (car, si  $X \in \mathcal{A}(A \cap ]S, T[)$ , étant équivalente sur  $A$  à une semi-martingale sur  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ , elle est équivalente sur  $A \cap ]S, T[$  à un élément de  $\mathcal{A}$  par (1.5), mais alors, par continuité, elle l'est aussi sur  $A$ . Ceci subsiste pour des martingales conformes à valeurs dans une variété complexe, en raisonnant sur  $\varphi(M)$  et  $A \cap M^{-1}(V')$ .

(7.2) Le problème que nous étudierons dans ce paragraphe est le suivant:  $X$  est une semi-martingale (continue) à valeurs dans une variété  $V$ , sur  $[S, T[$ ,  $T \leq +\infty$ ; quand est-elle prolongeable à  $[S, T]$ ? Le même problème se pose pour  $]S, T]$ , nous ne le regarderons pas ici. Un théorème de Meyer Stricker (Meyer-Stricker [1]) dit qu'il existe une suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croissante de temps d'arrêt,  $T_n \nearrow T$ , stationnairement sur  $\{T = +\infty\}$ , telle que  $X$  soit restriction à  $[S, T_n[$  d'une semi-martingale  $X_n$  sur  $[S, +\infty]$ ; nous la supposons arrêtée en  $T_n$ , ce qui la rend unique. En particulier  $X_{T_n-}$  existe sur  $\{T_n > S\}$ . Dans le cas vectoriel,  $X^c$ ,  $\tilde{X}$ ,  $\frac{1}{2}[X, X]$ ,  $H.X$ , qui ne sont définis a priori que comme

processus formels, vont exister comme vrais processus sur  $[S, T]$ , grace aux  $X_n$  sur  $[S, T_n[$ ; ils ne sont bien entendus définis qu'à des ensembles  $\mathbf{P}$ -négligeables près; on prendra  $\tilde{X}_S = X_S$ ,  $X_S^c = 0$  donc, en la prolongeant par 0 dans  $[0, S]$ , définie sur  $[0, T[$ ,  $[X, X]_S = X_S \odot X_S$ , et  $H.X$  nulle en  $S$ , donc, prolongée par 0 dans  $[0, S]$ , définie dans  $[0, T[$ , pour  $H$  à trajectoires  $H(\omega)$  bornées sur tout compact des  $[S(\omega), T(\omega)]$ . Pour simplifier, nous écrirons aussi  $X^{T_n}$  au lieu de  $X_n = X_{T_n}^{T_n}$ ,  $X_{T_n} = X_{T_n-} = (X_n)_{T_n}$  sur  $\{T_n > S\}$ . Ou encore,  $X$  sera automatiquement prolongée par  $X^T$  sur  $[S, T[$ ,  $T^* = +\infty$  sur  $\{\exists n \text{ tel que } T_n = T\}$ ,  $T$  ailleurs, et elle y sera une semi-martingale, puisqu'elle coïncide avec  $X_n$  sur  $[0, T_n[$ ,  $T_n^* = +\infty$  sur  $\{T_n = T\}$ , et  $T_n$  ailleurs, et que  $[S, T^*[ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [S, T_n^*[$ . Dans le cas vectoriel, il en sera de même de  $X^c$ ,  $\tilde{X}$ ,  $[X, X]$ ,  $H.X$ ; si  $X \in \mathcal{A}[S, T[$ , alors  $X \in \mathcal{A}[S, T^*[$ , puisque  $X_n \in \mathcal{A}[S, T_n^*[$  et même  $\mathcal{A}[S, +\infty]$  par (1.5). Ceci subsiste pour les martingales conformes sur les variétés complexes, par (3.3.1).

(7.3) On dira que  $X(\omega)$  converge si  $X(t, \omega)$  à une limite pour  $t < T(\omega)$  tendant vers  $T(\omega)$ . On dira que  $X(\omega)$  converge parfaitement, dans le cas vectoriel, si  $X(\omega)$ ,  $X^c(\omega)$ , convergent, et si  $\tilde{X}(\omega)$ ,  $[X, X](\omega)$  sont à variation finie

jusqu'en  $T(\omega)$  (donc convergent). L'ensemble  $\{X \text{ converge parfaitement}\}$  est défini à un ensemble  $\mathbf{P}$ -négligeable près.

Le cas vectoriel le plus anciennement connu est celui des martingales.

**Proposition 7.4** *Soit  $M$  une martingale à valeurs dans un espace vectoriel  $E$ . Les 3 ensembles suivants coïncident  $\mathbf{P}$ -ps.:*

$\{1\} = \{[M, M] \text{ est à variation finie jusqu'en } T\};$

$\{2\} = \{M \text{ converge}\};$

$\{3\} = \{La \text{ trajectoire de } M \text{ est relativement compacte}\}.$

*Alors  $M$  se prolonge en une martingale  $M'$  sur  $[S, T']$ , où  $T' = +\infty$  sur ces 3 ensembles et  $T$  ailleurs, et ce prolongement est unique si on lui impose d'être arrêté en  $T$ , c'est  $M^T$ . Si  $E$  est complexe (auquel cas  $\{1\}$  est relatif au crochet de la structure réelle), et si  $M$  est une martingale conforme pour la structure complexe,  $M'$  l'est aussi.*

Démonstration. En remplaçant  $M$  par  $M - M^S$ , on se ramène à  $S=0$ . Le cas complexe est évident car  $M$  est conforme ssi  $[M, M]$  (crochet complexe cette fois)  $= 0$ , donc aussi  $[M', M'] = 0$  (voir note (9) page 96). La démonstration est bien connue pour  $T = +\infty$ ; (voir Lengart [1]; pour d'autres problèmes analogues, voir Sharpe [1]), mais, bien qu'elle soit la même, elle ne semble figurer nulle part pour  $T$  arbitraire. On utilise les  $T_n$  de Meyer-Stricker; les  $M_n = M^{T_n}$  sont des martingales, par (1.5). Si les  $M^k$  sont les coordonnées de  $M$  dans  $E$ ,  $[M^k, M^k]$  est croissante, et  $|d[M^i, M^j]| \leq \frac{1}{2} (d[M^i, M^i] + d[M^j, M^j])$ , donc  $\{1\}$  est aussi  $\{[M, M] \text{ converge}\}$ ; en outre, ceci permet de nous ramener au cas réel. Dans le cas réel, on peut définir  $[M, M]$  et  $M^*$ ,  $M_t^* = \sup_{s \leq t} |M_s|$ , sur  $\bar{R}_+ \times \Omega$ , à valeurs  $\leq +\infty$ . Alors  $\{1\}$  est aussi  $\{[M, M]_T < +\infty\}$ , et  $\{3\}$  est  $\{M^* < +\infty\}$ . On a les équivalences  $\{1\} = \Omega \text{ P.p.s.} \Leftrightarrow$  Les  $[M_n, M_n]_\infty$  sont bornées dans  $L^0(\Omega, \mathcal{O}, \mathbf{P}) \Leftrightarrow$  Les  $(M_n)^*$  sont bornées dans  $L^0(\Omega, \mathcal{O}, \mathbf{P})$  (Schwartz [2], topologie de  $\mathcal{M}$ , (3.8bis) page 445 (33), (3.9bis) page 446 (34))  $\Leftrightarrow \{3\} = \Omega \text{ P.p.s.}$  Donc, si  $\{1\}$  ou  $\{3\}$  porte  $\mathbf{P}$ , les deux portent  $\mathbf{P}$ . Mais alors, pour  $n \geq m$ ,  $[M_n - M_m, M_n - M_m] = [M_n, M_n] - [M_m, M_m]$  convergent vers 0  $\mathbf{P}$ -p.s. pour  $n \rightarrow +\infty$ , donc  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy dans l'espace complet  $\mathcal{M}$  des martingales sur  $\bar{R}_+ \times \Omega$ , donc a une limite; donc  $\{2\} = \Omega \text{ P.p.s.}$ , et cette limite ne peut-être que  $M^T$ . Mais  $\{2\} \subset \{3\}$ , donc, si l'un des 3 ensembles porte  $\mathbf{P}$ , les 3 portent  $\mathbf{P}$ , et  $M^T$  est une martingale sur  $\bar{R}_+ \times \Omega$ .

Passons au cas général. Soit  $R_k = \inf \{t \leq T; [M, M]_t > k\}$  (avec  $R_k = T$  si cet ensemble est vide). Alors  $R_k \nearrow T$ , et stationnairement exactement sur  $\{1\} = \{[M, M]_T < +\infty\}$ . La martingale  $M^{R_k}$  est définie sur  $\bar{R}_+ \times \Omega$  d'après ce qui précède; donc  $(M^{R_k})^* < +\infty \text{ P.p.s.}$ , et  $M^{R_k}$  converge en  $T \text{ P.p.s.}$  D'après la stationnarité ci-dessus,  $\{1\} \subset \{3\}$  et  $\{1\} \subset \{2\} \text{ P.p.s.}$  Puis, soit  $S_k = \inf \{t \leq T; M_t^* > k\}$ ;  $S_k \nearrow T$ , stationnairement exactement sur  $\{3\} = \{M^* < +\infty\}$ .

Le même raisonnement montre alors que  $\{3\} \subset \{1\}$  et  $\{3\} \subset \{2\}$   $\mathbf{P}$ -p.s.; comme trivialement  $\{2\} \subset \{3\}$ , les 3 ensembles coïncident. Appelons-les  $\{ \}$ .

Enfin  $M$  prolongée en  $M'$  est  $M^{R_k}$ , martingale sur  $\bar{R}_+ \times \Omega$ , sur  $[0, T[ \cup (\bar{R}_+ \times \{R_k = T\})$ ; donc  $M$  est une martingale sur  $[0, T[ \cup \{R_+ \times \{ \} \} = [0, T'[\mathbf{.}$   $\square$

**Corollaire 7.4.1** 1) Si  $M$  est une martingale vectorielle, elle converge parfaitement là où elle converge;

2) La convergence parfaite est stable par les applications  $C^2$ , donc peut se définir sur une variété  $V$ , et elle subsiste lorsqu'on remplace  $\mathbf{P}$  par une probabilité équivalente. Si  $T' = +\infty$  sur  $\{X \text{ converge parfaitement}\}$ ,  $=T$  ailleurs,  $X$  se prolonge en semi-martingale  $X'$  sur  $[S, T']$ ,  $X' = X^T$ . Dans le cas vectoriel, si  $X \in \mathcal{A}[S, T[$ , alors  $X' \in \mathcal{A}[S, T'[\mathbf{.}$  (Voir un petit article d'Emery, just avant Meyer [3].)

Démonstration. 1) est (7.4). 2) résulte d'Ito: si  $\Phi$  est une application  $C^2$  de  $E$  dans  $F$  vectoriels, sur  $\{X \text{ converge parfaitement}\}$ ,  $\widetilde{\Phi(X)} \sim \Phi'(X) \cdot \underline{\tilde{X}}$  est à variation finie,  $\Phi''(X) \cdot \frac{1}{2} [X, X]$  aussi,  $\Phi'(X) \odot \Phi'(X) \cdot \frac{1}{2} [X, X]$  aussi, donc, par (7.4),  $\Phi(X)^c = \Phi'(X) \cdot X^c$  converge. Sur une variété  $V$ , on dira que  $X$  converge parfaitement en  $T$ , si c'est vrai pour un plongement de  $V$  comme sous-variété fermée d'un vectoriel, et c'est alors indépendant du plongement;  $\{X \text{ converge parfaitement}\} = \bigcap_{\varphi \in \mathcal{O}^2} \{\varphi(X) \text{ converge parfaitement}\} \cap \mathbf{P}$ -essentielle).

La possibilité de prolongement en semi-martingale sur  $[S, T'[\mathbf{}$  résulte de ce que c'est vrai, dans un plongement, pour  $X^c$  par (7.4) et  $\tilde{X}$  trivialement. Le prolongement par  $X^{T'}$  est  $\mathbf{P}$ -essentiellement le plus grand prolongement en semi-martingale arrêtée, donc il subsiste si on remplace  $\mathbf{P}$  par une probabilité équivalente. Si  $X \in \mathcal{A}[S, T[$ , dans le cas vectoriel, l'étude de  $X^c$ ,  $\tilde{X}$ ,  $[X, X]$ , montre que  $X \in \mathcal{A}[S, T'[\mathbf{.}$

REMARQUE. 1) Par contre, (7.4) ne subsiste pas du tout tel quel pour les martingales conformes sur les variétés complexes, et il n'est nullement évident qu'une martingale conforme converge parfaitement là où elle converge. Ce sera l'objet de (7.12) et (7.14).

2) La convergence parfaite de  $X$  en  $T$  est donc la condition nécessaire et suffisante pour que  $X$  se prolonge en semi-martingale dans  $[S, T]$ , et on aurait pu prendre cela comme définition.

(7.5) Nous voulons étendre cela à d'autres processus que les martingales. L'approfondissement a été dû à un théorème de Darling et à une réciproque de Zheng,<sup>(11)</sup>. Comme les conditions générales ont été explicitées par Zheng,

(11) Darling et Zheng ont exposé ces résultats (et d'autres plus fins) dans plusieurs articles. On trouvera un exposé en style "strasbourgeois" dans P.A. Meyer [3], et d'autres articles traitent du même sujet dans le même Séminaire.

nous proposons de donner son nom aux semi-martingales ayant les propriétés voulues. Soit  $X$  une  $V$ -semi-martingale sur  $A \subset \bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ . On sait que  $\frac{1}{2} d[X, X] = \pi(X) \underline{d\tilde{X}}$ , donc  $\frac{1}{2} d[X, X]$  est de base  $\underline{d\tilde{X}}$ . On peut donc définir

$$\frac{|d\frac{1}{2}[X, X]|}{|\underline{d\tilde{X}}|} \text{ comme une fonction } \geq 0 \text{ définie } \underline{dX}\text{-p.p.} = \underline{d\tilde{X}}\text{-p.p., dès qu'on}$$

a défini des normes  $|\cdot|$  continues sur les fibres de  $T^2(V)$  et de  $T^1(V) \odot T^1(V)$ . On peut définir une infinité de telles normes, euclidiennes si on le désire, par des cartes, mais elles sont toutes équivalentes sur tout compact de  $V$ . Précisons. La différentielle de processus à variation finie  $\underline{d\tilde{X}}$ , à valeurs dans  $T^2(V)$  le long de  $X$ , est dominée par la différentielle de processus croissant  $|\underline{d\tilde{X}}| \geq 0$ , donc  $\underline{d\tilde{X}} = f |\underline{d\tilde{X}}|$ ,  $f$  section optionnelle de  $T^2(V)$  le long de  $X$ ,  $|f| = 1$ ,  $\underline{d\tilde{X}}$  p.p.; de même  $\frac{1}{2} d[X, X] = \pi(X) \underline{d\tilde{X}} = \pi(X) f |\underline{d\tilde{X}}|$ , d'où  $\frac{1}{2} |d[X, X]| = |\pi(X) f|$

$|\underline{d\tilde{X}}|$ , et  $\frac{1}{2} \frac{|d[X, X]|}{|\underline{d\tilde{X}}|} = |\pi(X) f|$ , défini  $\underline{d\tilde{X}}$ -p.p. ou  $\underline{dX}$ -p.p. Il en résulte que  $\underline{d\tilde{X}}$  et  $\frac{1}{2} d[X, X]$  seront équivalentes ssi  $|\pi(X) f| > 0$   $\underline{d\tilde{X}}$ -p.p. On pourra alors parler de son inverse  $\frac{1}{|\pi(X) f|} = \frac{|\underline{d\tilde{X}}|}{\frac{1}{2} |d[X, X]|} = \rho^*$ ,  $0 < \rho^* < +\infty$  défini  $\underline{d\tilde{X}}$ -p.p. =  $\underline{dX}$ -p.p. =  $d\frac{1}{2}[X, X]$  p.p.

(7.5.1) On dira alors que  $X$ ,  $V$ -semi-martingale sur  $A$  ouvert de  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ , est une semi-martingale de Zheng, si  $\underline{d\tilde{X}}$  et  $\frac{1}{2} d[X, X]$  sont équivalentes, et si  $\rho^*$  est borné "sur tout compact de  $V$ ", i.e. sur tout  $X^{-1}(K)$ ,  $K$  compact de  $V$ .

**Proposition 7.6** (Zheng). *Soit  $X$  une semi-martingale de Zheng sur  $[S, T[$ . Sur  $\{X \text{ converge en } T\}$ ,  $X$  converge parfaitement (7.3);  $X$  est prolongeable en une semi-martingale  $X'$  sur  $[S, T'[$ , où  $T' = +\infty$  sur  $\{X \text{ converge}\}$ ,  $T$  ailleurs, prolongement unique si on lui impose d'être arrêté en  $T$ , et  $X'$  est de Zheng.*

Démonstration. On la trouvera dans Meyer [3], en remplaçant  $S$  par 0 comme ci-dessus,  $n \rightarrow +\infty$  par  $T_n \rightarrow T$ , et en prenant un plongement fermé de  $V$  dans un vectoriel  $E$ . Cette démonstration prouve seulement que  $X$  converge parfaitement. Mais, toujours en raisonnant dans  $E$ ,  $X^c$  se prolonge en martingale par (7.4),  $\tilde{X}$  en processus à variation finie, donc  $X$  en semi-martingale. En outre l'inégalité  $\int_s^t |\underline{d\tilde{X}}_u| \leq \int_s^t \rho_u |d\frac{1}{2}[X, X]_u|$  sur  $[0, T[$ , se prolonge

par continuité à  $[0, T[$  ( $\rho$  n'étant jamais qu'optionnel défini  $\underline{dX}$ -p.p.). Donc  $X'$  est de Zheng.

Nous allons définir une "réciproque". *Sur un plongement de  $V$  dans  $E$ , la convergence de  $X$  entraîne celle de  $[X, X]$ ; mais celle-ci, sans hypothèse de convergence de  $X$ , entraîne celle de  $[\varphi(X), \varphi(X)]$ , pour  $\varphi \in C^2_{\text{comp}}$  ( $\varphi$  fonction  $C^2$  sur  $V$  à support compact), par Ito:  $[\varphi(X), \varphi(X)] = \varphi'(X) \odot \varphi'(X) \cdot \frac{1}{2} [X, X]$ ,  $\frac{1}{2} [X, X]$  à variation finie jusqu'en  $T$  et  $\varphi'(X)$  bornée. Donc, (7.6) dit que, sur  $\{X \text{ converge}\}$ , pour toute  $\varphi \in C^2_{\text{comp}}$ ,  $[\varphi(X), \varphi(X)]$  converge  $\mathbf{P}$  ps.*

**Première réciproque** (Darling) 7.7. *Soit  $X$  une semi-martingale de Zheng sur  $[S, T[$ . Sur l'ensemble  $\{ \} = \bigcup_{\varphi \in C^2_{\text{comp}}} \{[\varphi(X), \varphi(X)]_T < +\infty\}$  ( $\cap$  est l'intersection  $\mathbf{P}$ -essentielle),  $X$  converge en  $T$   $\mathbf{P}$  ps., dans le compactifié d'Alexandroff  $\hat{V} = V \cup \{ \}$  de  $V$ .*

Démonstration. Tout étant intrinsèque, on peut plonger  $V$  comme sous-variété de  $E$  (fermée ou non). Alors, si  $\varphi \in C^2_{\text{comp}}$ ,  $\varphi(X) = \varphi(X)^c + \widetilde{\varphi(X)}$ . Mais  $[\varphi(X)^c, \varphi(X)^c] = [\varphi(X), \varphi(X)] < +\infty$   $\mathbf{P}$  ps. donc, par (7.4),  $\varphi(X)^c$  converge sur  $\{ \}$ . Mais les inégalités  $[\varphi(X), \varphi(X)]_T < +\infty$  ont la conséquence suivante: quel que soit  $J$ , processus 2-cotangent le long de  $X$ , élément de  $P^*(V)$ , borné "à support compact", i.e. porté par un  $X^{-1}(K)$ ,  $K$  compact de  $V$ ,  $J \cdot X = J \cdot \frac{1}{2} [X, X]$  converge sur  $\{ \}$ . (Schwartz [3], §1, page 3.) En effet, plongeons  $V$  comme sous-variété, fermée ou non, de  $E$  vectoriel;  $J$  se relève en un processus, que nous appellerons toujours  $J$ , à valeurs dans  $E^* \odot E^*$ , borné à support compact. Si  $(x^k)_{k=1,2,\dots}$  sont les fonctions coordonnées de  $E$ ,  $J = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \alpha_{i,j} Dx^i(X) \odot Dx^j(X)$ , où les  $\alpha_{i,j}$  sont optionnelles, bornées à support compact sur  $V$ , et ceci a de nouveau un sens intrinsèque sur  $V$ . Mais, sur ce support compact, les  $x^k$  coïncident avec des fonctions  $\varphi^k C^2$  à support compact sur  $V$ , d'où

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \alpha_{i,j} D\varphi^i(X) \odot D\varphi^j(X) \cdot \frac{1}{2} [X, X] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \alpha_{i,j} [\varphi^i(X), \varphi^j(X)],^{(12)} \end{aligned}$$

qui converge, en vertu des hypothèses. Nous allons en déduire que, si  $X$  est de Zheng, pour toute  $\varphi \in C^2_{\text{comp}}$ ,  $\widetilde{\varphi(X)}$  converge sur  $\{ \}$ , donc  $\varphi(X)$ , donc

(12) Pour cette formule, voir proposition (2.14) page 22 de Schwartz [3]. Il y a bien disparition d'un facteur  $\frac{1}{2}$ :  $(J \odot J' \cdot X) = (J \odot J') \cdot \frac{1}{2} [X, X] = [J \cdot X, J' \cdot X]$ .

$X$  converge en  $T$  sur le compactifié d'Alexandroff  $\hat{V}$  de  $V$ . Utilisons maintenant la propriété précédente de Zheng. Récrivons, comme à la page précédente,  $\widetilde{dX} = f|\widetilde{dX}|$ ,  $\frac{1}{2} d[X, X] = h|\widetilde{dX}|$ ,  $h = \pi(X)f$ ; il existe une application linéaire  $\rho(t, \omega)$  de  $T^1(V; X(t, \omega)) \odot T^1(V; X(t, \omega))$  dans  $T^2(V; X(t, \omega))$ , telle que  $\rho(t, \omega) h(t, \omega) = f(t, \omega)$ , de norme  $h|\rho(t, \omega)| = \rho^*(t, \omega) = \frac{|f(t, \omega)|}{|h(t, \omega)|}$ , en reprenant les notations de (7.5), si les normes sur les  $T^2(V; X(t, \omega))$ ,  $T^1(V; X(t, \omega)) \odot T^1(V; X(t, \omega))$  ont été choisies euclidiennes. Alors  $d\widetilde{X} = \rho \frac{1}{2} d[X, X]$ ,  $d\widetilde{X}$ -pp. Donc  $\widetilde{\varphi(X)} \underset{f.s., T}{\sim} D^2\varphi(X) \cdot \widetilde{X} = D^2\varphi(X) \rho \cdot \frac{1}{2} [X, X]$ ; et  $D^2\varphi(X) \rho$  est un processus  $J$  à valeurs dans  $P^*(V)$  le long de  $X$ , borné à support compact ( $\rho: T^1 \odot T^1 \rightarrow T^2$ ,  $D^2\varphi(X): T^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ), donc  $\widetilde{\varphi(X)}$  converge bien.  $\square$

REMARQUE. On sait qu'on ne peut pas remplacer ici  $\hat{V}$  par  $V$ . Il suffit de prendre  $V$  sous-espace ouvert d'un vectoriel  $E$ ,  $X = M$  martingale à valeur dans  $E$ ,  $T$  = temps de sortie de  $V$ . Alors, si  $[M, M]$  converge dans  $E$ ,  $[\varphi(M), \varphi(M)]$  converge par Ito pour  $\varphi \in C^2_{\text{comp}}(V)$ ;  $M$  converge dans  $E$ , donc dans  $\hat{V}$ , pas dans  $V$ . D'où l'idée d'une deuxième réciproque. Car (7.6) dit aussi que, si  $X$  converge,  $[\varphi(X), \varphi(X)]$  converge pour toute  $\varphi \in C^2$  à support *quelconque*, puisque  $X$  converge parfaitement, propriété stable par applications  $C^2$ .

**Deuxième réciproque 7.8.** Soit  $X$  une  $V$ -semi-martingale de Zheng sur  $[S, T[$ . Sur  $\{ \} = \bigcap_{\varphi \in C^2} \{[\varphi(X), \varphi(X)]_T < +\infty\} \cap \mathbf{P}\text{-essentielle}$   $X$  converge en  $T$  dans  $V$  elle-même.

Démonstration. Comme dans (7.7),  $V\varphi \in C^2$ ,  $\varphi(X)^c$  converge sur  $\{ \}$ . Ensuite soit  $J$  2-cotangent le long de  $X$  à valeurs dans  $P^*$ , optionnel "borné sur tout compact de  $V$ ", i.e. sur tout  $X^{-1}(K)$ ,  $K$  compact de  $V$ . Plongeons encore  $V$  dans  $E$ , mais cette fois-ci comme variété non nécessairement fermée, dans un ouvert *borné* de  $V$ ; les  $x^k$  sont bornées sur  $V$ . On a encore  $J = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \alpha_{i,j} Dx^i(X) \odot Dx^j(X)$ ,  $\alpha_{i,j}$  bornées sur tout compact de  $V$ . Soit  $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite croissante de compacts  $K_n$  épuisant  $V$ ,  $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ . Soit  $\alpha_n = \sup_{i,j} |\alpha_{i,j}(t, \omega)|$  pour  $X(t, \omega) \in K_n$ . Il existe une fonction  $\beta \in C^2$  réelle  $> 0$  sur  $V$ , telle que  $\beta \geq \alpha_n$  sur  $K_n \setminus K_{n-1}$ . Alors les  $\alpha_{i,j}/\beta(X)$  sont optionnelles, bornées en module par 1. Et  $J = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{\beta(X)} \beta(X) Dx^i(X) \odot Dx^j(X) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{\beta(X)} (D(x_i \beta)(X) \odot Dx^j(X) - x^i(X) D\beta(X) \odot Dx^j(X))$ . Comme les  $x^i$  sont bornées sur  $V$ ,

$$J = \sum_i \gamma_i D\varphi^i(X) \odot D\psi^i(X), \quad \gamma^i \text{ bornées, } \varphi^i, \psi^i \in C^2.$$

Donc  $J \cdot \frac{1}{2} [X, X] = \sum_i \gamma_i [\varphi^i(X), \psi^i(X)]$  converge. Ensuite on refait la fin du



raisonnement de (7.7) utilisant la propriété de Zheng:

$V \ni \varphi \in C^2$ ,  $\widetilde{\varphi(X)}_{[S,T]} \sim D^2\varphi(X)\rho \cdot \frac{1}{2} [X, X]$ , où  $D^2\varphi(X)\rho$  est un processus à valeurs dans  $P^*$ , optionnel, borné sur tout compact de  $V$ , donc  $\widetilde{\varphi(X)}$  converge sur  $\{ \}$ , donc  $\varphi(X)$  aussi, et  $X$  converge en  $T$ , dans  $V$  elle-même (en prenant pour  $\varphi$  les coordonnées d'un plongement fermé de  $V$  dans un vectoriel).  $\square$

On peut résumer ces résultats dans le tableau suivant:

$$(7.8.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{1\} = \{X \text{ converge parfaitement}\} \subset \{2\} = \\ \quad \bigcap_{\varphi \in C^2} \{[\varphi(X), \varphi(X)]_T < +\infty\} \subset \{3\} = \\ \quad \bigcap_{\varphi \in C^2_{\text{comp}}} \{[\varphi(X), \varphi(X)]_T < +\infty\} \\ \{4\} = \{X \text{ converge}\} \subset \{5\} = \{X \text{ converge dans } \hat{V}\}; \\ \text{si } X \text{ est de Zheng, } \{1\} = \{2\} = \{4\} \subset \{3\} = \{5\} \\ \text{si } X \text{ est de Zheng et } V \text{ compacte, } \{1\} = \{2\} = \{3\} = \{4\} = \{5\}. \end{array} \right.$$

#### (7.9) Applications aux connexions.

Toutes les connexions sur une variété  $V$  seront supposées relatives au fibré tangent  $T^1(V)$ , sans torsion et boréliennes localement bornées. Une telle connexion est définie par un relèvement linéaire  $\rho$  de  $T^1(V) \odot T^1(V)$  dans  $T^2(V)$ ,  $\pi\rho=1$ , ou aussi bien par une projection linéaire de  $T^2$ , d'image  $T^1$ ,  $\theta=1-\rho\pi$ . Dans une carte sur un ouvert d'un vectoriel  $E$ ,  $\rho=-\Gamma \oplus 1$ ,  $\Gamma$  application linéaire de  $E \odot E$  dans  $E$ , 1 identité de  $E \odot E$ . Une  $\Gamma$ -martingale pour cette connexion, sur un ouvert  $A$  de  $\bar{R}_+ \times \Omega$  ou de  $[S, T]$ , est une semi-martingale  $X$  telle que  $\widetilde{dX} = \rho(X) \frac{1}{2} d[X, X]$ , ou  $\theta(X) \widetilde{dX} = 0$ , ou  $d\tilde{X} + \frac{1}{2} \Gamma(X) d[X, X] = 0$ ;  $\rho(X)$ ,  $\theta(X)$ ,  $\Gamma(X)$  sont optionnelles. (Voir par exemple Schwartz [4].)

**Proposition 7.9.1.** *Une  $\Gamma$ -martingale relative à une connexion est une semi-martingale de Zheng. Si  $X$  est une  $\Gamma$ -martingale sur  $[0, T[$ , et si  $T' = +\infty$  sur  $\{X \text{ converge}\}$ ,  $T$  ailleurs, le prolongement  $X'$  sur  $[0, T'[$ ,  $X' = X^T$ , est une  $\Gamma$ -martingale.*

Démonstration.  $|\widetilde{dX}| \leq |\rho(X)| \frac{1}{2} |d[X, X]|$ , donc  $X$  est de Zheng. Alors, sur  $[0, T[$ , pour un plongement de  $V$  comme sous variété fermée d'un vectoriel,  $\tilde{X} \sim \rho(X) \cdot \frac{1}{2} [X, X]$  sur  $[0, T[$  donne la même relation, par continuité, pour  $X'$  sur  $[0, T'[$  (7.6) (même si  $\rho$  n'est pas continue:  $\rho(X)$  est optionnel à trajectoires bornées sur  $\{X \text{ converge}\}$ )  $\square$

(7.9.1) Dans le cas où la connexion est celle de Levi-Civita, pour une structure riemannienne sur  $V$ ,  $T^1(V) \odot T^1(V)$  a des normes euclidiennes naturelles sur

ses fibres, que nous noterons  $\| \cdot \|$ ; son dual alors aussi,  $\| \cdot \|^*$ . Alors  $\|\frac{1}{2} d[X, X]\|$  possède un sens; il définit un processus réel  $\geq 0$  croissant,  $t \rightarrow \int_s^t \|\frac{1}{2} d[X, X]\|$ , que nous étendrons par continuité et arrêt en  $T$  à  $\bar{R}_+ \times \Omega$ , à valeurs  $\leq +\infty$ . Si nous reprenons les notations de (7.5),

$$\frac{1}{2} d[X, X] = h |d\tilde{X}|, \quad \|\frac{1}{2} d[X, X]\| = \|h\| |d\tilde{X}|.$$

**Proposition 7.9.2.** *Pour toute semi-martingale sur  $[S, T[$ :*

$$(7.9.3) \quad \bigcap_{\varphi \in \mathcal{C}^2} \{[\varphi(X), \varphi(X)]_T < +\infty\} \subset \left\{ \int_s^T \frac{1}{2} \|d[X, X]\| < +\infty \right\} \\ \subset \bigcap_{\varphi \in \mathcal{C}_{\text{comp}}^2} \{[\varphi(X), \varphi(X)]_T < +\infty\} \text{ P-p.s.}$$

En effet,  $d[\varphi(X), \varphi(X)] = (D\varphi(X) \odot D\varphi(X)) \frac{1}{2} d[X, X] \\ \leq \|D\varphi(X) \odot D\varphi(X)\|^* \|\frac{1}{2} d[X, X]\|.$

Si  $\varphi \in \mathcal{C}_{\text{comp}}^2$ ,  $\|D\varphi(X) \odot D\varphi(X)\|^*$  est borné, d'où la deuxième inclusion. Ensuite, si  $G$  est un espace euclidien de produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$ , de norme  $\| \cdot \|$  (ici  $G = T^1(V; v) \odot T^1(V; v)$ ), si  $h \in G$ , la forme linéaire  $h'$  sur  $G$ :  $\xi \rightarrow \frac{(h, \xi)}{\|h\|}$  est de norme 1 dans  $G^*$ , et  $h'(h) = \|h\|$ .

Donc  $\frac{1}{2} \|d[X, X]\| = h'(h) |d\tilde{X}| = h' \left( \frac{1}{2} d[X, X] \right)$ , où  $\|h'\|^* = 1$ ,  $h'$  processus 2-cotangent à valeurs dans  $P^*$  le long de  $X$ . Donc  $h'$  est un processus  $J$  analogue à ceux qui ont été considérés dans la démonstration de (7.8), et on sait que  $J \cdot \frac{1}{2} [X, X]$  converge en  $T$  sur  $\bigcap_{\varphi \in \mathcal{C}^2} \{[\varphi(X), \varphi(X)]_T < +\infty\}$ .  $\square$

C'est pourquoi Darling en a déduit que, sur  $\left\{ \int_s^T \frac{1}{2} \|d[X, X]\| < +\infty \right\}$ ,  $X$  converge en  $T$  dans le compactifié d'Alexandroff  $\hat{V}$ , si  $X$  est de Zheng<sup>(13)</sup>. On

(13) On procède souvent autrement. La forme quadratique  $g$  est une forme linéaire (définie positive) sur  $T^1 \odot T^1$ . Il est donc possible de considérer  $g(X) \left( \frac{1}{2} d[X, X] \right)$ , et  $\left\{ \int_s^T g(X) \left( \frac{1}{2} d[X, X] \right) < +\infty \right\}$ . Mais il est facile de voir que  $g(X) \left( \frac{1}{2} d[X, X] \right)$  et  $\|\frac{1}{2} d[X, X]\|$  sont équivalentes, du fait que  $\frac{1}{2} d[X, X] \geq 0$  dans  $T^1 \odot T^1$ , pour sa structure d'ordre naturelle. Soit en effet  $(e_k)_{k=1,2,\dots,N}$  une base orthonormée de  $T^1(V; v)$ . On sait qu'une base orthogonale de  $T^1(V; v) \odot T^1(V; v)$  est constituée des  $e_i \odot e_j$ ,  $i \leq j$ , et que  $\|e_i \odot e_j\| = 1$  si  $i \neq j$ ,  $\|e_i \odot e_i\| = \sqrt{2}$ . Soit  $\theta \geq 0$  dans  $T^1(V; v) \odot T^1(V; v)$ ,  $\theta = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \theta^{i,j} e_i \odot e_j$ ,  $\theta^{i,i} = \theta^{i,i}$ . Par la positivité,  $\theta^{i,i} \geq 0$ , et  $|\theta^{i,j}| \leq \frac{1}{2} (\theta^{i,i} + \theta^{j,j})$ , donc  $\|\theta\| = \left( \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \theta_{i,j}^2 \right)^{1/2} \simeq \sqrt{\sum_{k=1}^N (\theta^{k,k})^2}$ . D'autre part,  $g(e^i \odot e^j) = 0$  si  $i \neq j$ ,  $g(e^i \odot e^i) = 1$ , donc  $g(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \theta^{i,j} g(e_i \odot e_j) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \theta^{k,k}$ ,

ne peut pas remplacer  $\hat{V}$  par  $V$ , parce que la première inclusion est stricte. Il suffit par exemple de remplacer  $V$  par un ouvert  $V'$  de  $V$ , et d'appeler  $T'$  le temps de sortie de  $X$  de  $V'$ . Si  $\int_s^T \frac{1}{2} \|d[X, X]\| < +\infty$ , a fortiori  $\int_s^{T'}$ ; or  $X$  converge en  $T'$  sur  $V$ , donc sur  $\hat{V}'$ , pas sur  $V'$  elle-même. Il est vrai que  $V'$  n'est pas riemannienne complète. Mais même si  $V$  est complète, ce n'est pas suffisant. Soit  $X$  une diffusion brownienne sur une variété riemannienne, relative à l'opérateur différentiel de diffusion  $L = \frac{1}{2} \Delta$ . L'image  $\pi L$  sur  $T^1 \odot T^1$  est  $\frac{1}{2} \Theta = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N e_k \odot e_k$ , où  $(e_k)_{k=1,2,\dots,N}$  est n'importe quelle base ortho-normée sur  $T^1$ , et  $\|\pi L\| = \frac{\sqrt{2N}}{2}$ . Donc  $\int_0^T \frac{1}{2} \|d[X, X]\| = \int_0^T \|\pi d\tilde{X}\| = \int_0^T \|\pi L(X)\| dt$  (rappelons que  $d\tilde{X} = L(X)dt = \sqrt{\frac{N}{2}} T$ ). Or il peut arriver que cette diffusion ait un temps de mort  $T < +\infty$  même si  $V$  est riemannienne complète, alors  $X$  ne converge que sur  $\hat{V}$ , pas sur  $V$ . Or elle est une  $\Gamma$ -martingale.<sup>(14)</sup>

#### (7.10) Connexions complexes sur une variété complexe $V$ .

On appellera connexion complexe ou  $\mathcal{H}$ -connexion, ou  $I$ -connexion, un relèvement  $\mathbf{C}$ -linéaire  $\rho_{\mathcal{H}}$  de  $T_{\mathcal{H}}^1 \odot T_{\mathcal{H}}^1$  dans  $T_{\mathcal{H}}^2$ . Cela revient aussi à dire une projection  $\theta_{\mathcal{H}}$  de  $T_{\mathcal{H}}^2$  sur  $T_{\mathcal{H}}^1$ . Sous cette forme là, il n'y a pas de rapport direct entre connexion et connexion complexe. Mais  $\rho_{\mathcal{H}}$  définit un relèvement  $\rho^{2,0}$  de  $T^{1,0} \odot T^{1,0}$  dans  $T^{2,0}$ . Il y a une infinité de manières de le prolonger en une connexion;  $\rho^{0,2}$ , relèvement de  $T^{0,1} \odot T^{0,1}$  dans  $T^{0,2}$ , est le conjugué de  $\rho^{2,0}$ , donc  $\rho^{2,0} \oplus \rho^{0,2}$  sera un relèvement réel de  $\mathcal{R}e((T^{1,0} \odot T^{1,0}) \oplus (T^{0,1} \odot T^{0,1}))$  dans  $\mathcal{R}e(T^{2,0} \oplus T^{0,2})$ , et on pourra prendre pour relèvement  $\rho^{1,1}$  de  $T^{1,0} \otimes T^{0,1}$  la somme de  $(\pi^{1,1})^{-1}$  et de n'importe quelle application linéaire autoconjuguée  $\beta^{1,1}$  de  $T^{1,0} \otimes T^{0,1}$  dans  $T^1 + iT^1$ , donc réelle de  $\mathcal{R}e(T^{1,0} \otimes T^{0,1})$  dans  $T^1$ . On appellera connexion associée à  $\rho_{\mathcal{H}}$  l'unique prolongement  $\rho$  pour lequel  $\rho^{1,1} = (\pi^{1,1})^{-1}$ , ou  $\beta^{1,1} = 0$ , donc  $\rho = \rho^{2,0} \oplus \overline{\rho^{2,0}} \oplus (\pi^{1,1})^{-1}$ . Cette connexion  $\rho$  sera dite la connexion associée à la connexion complexe  $\rho_{\mathcal{H}}$ , et on dira que  $\rho$  est une connexion complexe, ou  $\mathcal{H}$ -connexion, ou  $I$ -connexion: une connexion quelconque  $\rho$  est complexe ssi elle est l'associée d'une  $\rho_{\mathcal{H}}$ , nécessairement unique. Une

$\theta^{*,*} \geq 0$ , d'où l'équivalence.

Si on avait pris  $g$  au lieu de  $\|\cdot\|$ , c'est la première inclusion qui aurait été plus simple, parce que  $g(X)$  est un processus 2-cotangent, à valeurs dans  $P^* = (T^1 \odot T^1)^*$ , localement bronné. Mais c'est la deuxième qui aurait été plus difficile, car nous avons utilisé ici une majoration en  $\|\cdot\|^*$ .

(14) Pour  $d\tilde{X} = L(X)dt$ , voir Schwartz [3], proposition (13.16) page 45. Pour un mouvement brownien à temps de mort sur une variété riemannienne complète, voir Debiart-Gaveau-Mazet [1]. Le brownien correspondant à  $L = \frac{1}{2} \Delta$  sur une variété riemannienne est une  $\Gamma$ -martingale, voir Schwartz [4], proposition (2.29).

connexion  $\rho$ . donne un  $\rho^{2,0}$ , qui s'écrit d'une manière unique comme somme  $\rho^{2,0} + \alpha^{2,0}$ ,  $\rho^{2,0}$  relèvement de  $T^{1,0} \odot T^{1,0}$  dans  $T^{2,0}$ ,  $\alpha^{2,0}$  application linéaire de  $T^{1,0} \odot T^{1,0}$  dans  $T^{0,1}$ ; d'où  $\rho^{0,2} = \rho^{0,2} + \alpha^{0,2} = \overline{\rho^{2,0}} = \overline{\rho^{2,0}} + \overline{\alpha^{2,0}}$ ; puis  $\rho^{1,1} = (\pi^{1,1})^{-1} + \beta^{1,1}$ , ce qui donne  $\rho = \rho + \alpha + \beta$ ,  $\rho = \rho^{2,0} \oplus \rho^{0,2} \oplus (\pi^{1,1})^{-1}$ ,  $\alpha = \alpha^{2,0} \oplus \alpha^{0,2} \oplus 0$ ,  $\beta = 0 \oplus 0 \oplus \beta^{1,1}$ ;  $\rho$ . est complexe ssi  $\alpha = \beta = 0$ , ou  $\alpha^{2,0} = \beta^{1,1} = 0$ . En termes de projections,  $\theta_{\mathcal{H}}$  donnera  $\theta^{2,0}$ , projection de  $T^{2,0}$  sur  $T^{1,0}$ ,  $\theta^{2,0} = 1 - \rho^{2,0} \pi^{2,0}$ ; sa connexion associée sera  $\theta = \theta^{2,0} \oplus \theta^{0,2} \oplus 0$ , qui sera dite complexe; une connexion  $\theta$ . s'écrit d'une manière unique  $\theta = \theta - \alpha\pi - \beta\pi$ ,  $\theta^{2,0} = \theta^{2,0} - \alpha^{2,0} \pi^{2,0}$ ,  $\alpha^{2,0} \pi^{2,0}$  application linéaire de  $T^{2,0}$  dans  $T^{0,1}$ , nulle sur  $T^{1,0}$ ,  $\beta^{1,1} \pi^{1,1}$  application linéaire autoconjuguée de  $T^{1,1}$  dans  $T^1 + iT^1$ .

Dans une carte complexe sur un ouvert de  $E$ ,  $\rho = -\Gamma \oplus 1$ , donc  $\Gamma = \Gamma^{2,0} \oplus \Gamma^{0,2} \oplus \Gamma^{1,1}$ ,  $\Gamma$ . application linéaire de  $(E + iE) \odot (E + iE)$  dans  $E + iE$ ;  $\Gamma^{2,0}$  de  $E^{1,0} \odot E^{1,0}$  dans  $E + iE$ ,  $\Gamma^{2,0} = \Gamma^{2,0} \oplus (-\alpha^{2,0})$ ,  $\Gamma^{2,0}$  linéaire de  $E^{1,0} \odot E^{1,0}$  dans  $E^{1,0}$ ,  $\alpha^{2,0}$  dans  $E^{0,1}$ ;  $\Gamma^{1,1} = -\beta^{1,1}$ , application linéaire autoconjuguée de  $E^{1,0} \otimes E^{0,1}$  dans  $E + iE$ ; donc  $\Gamma = \Gamma - \alpha - \beta$ ,  $\Gamma = \Gamma^{2,0} \oplus \Gamma^{0,2} \oplus 0$ ,  $\alpha = \alpha^{2,0} \oplus \alpha^{0,2} \oplus 0$ ,  $\beta = 0 \oplus 0 \oplus \beta^{1,1}$ ;  $\Gamma$ . est complexe,  $\Gamma = \Gamma$ , ssi  $\alpha = \beta = 0$ . Si on prend une base

de  $E + iE$  formée des  $\partial_k$ ,  $\bar{\partial}_k = \bar{\partial}_k$ ,  $\partial_k = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^k} - i \frac{\partial}{\partial y^k} \right)$ , il y a des coefficients  $\Gamma_{\alpha,\beta}^\gamma$ , où  $\alpha, \beta, \gamma$  prennent les valeurs  $1, 2, \dots, N, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{N}$ ,  $\Gamma.(\partial_\alpha \partial_\beta) = \sum_\gamma \Gamma_{\alpha,\beta}^\gamma \partial_\gamma$ , avec des relations de symétrie  $\Gamma_{\alpha,\beta}^\gamma = \Gamma_{\beta,\alpha}^\gamma$ , et de conjugaison  $\Gamma_{\bar{\alpha},\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}} = \overline{\Gamma_{\alpha,\beta}^\gamma}$ .

Alors  $\Gamma$ . est complexe ssi  $\Gamma_{i,j}^{\bar{k}} = 0$ ,  $\Gamma_{i,j}^{\bar{k}} = 0$ ,  $i, j, k = 1, 2, \dots, N$ , avec les conséquences par symétrie et conjugaison. Si par exemple  $V$  est munie d'une structure hermitienne, c.à d. d'une forme sesquilinéaire hermitienne dont la partie réelle donne une structure riemannienne, un calcul rapide des  $\Gamma_{i,j}^{\bar{k}}$  et des  $\Gamma_{i,j}^{\bar{k}}$  par les symboles de Riemann-Christeffel montre que sa connexion de Levi-Civita associée est complexe, ssi la forme hermitienne est kähliérienne. La connexion réelle  $\rho$ . est complexe,  $\rho = \rho$ ,  $\alpha = \beta = 0$ , ssi, en tant qu'application  $\mathcal{C}$ -linéaire de  $T^1 \odot T^1$  dans  $T^2$ , elle commute avec  $I$ , ou est  $I$ -linéaire;  $\theta$ ., projection de  $T^2$  sur  $T^1$ , est complexe,  $\theta = \theta$ ,  $\alpha\pi = \beta\pi = 0$ , ssi elle commute avec  $I$ , ou est  $I$ -linéaire; sur une carte complexe,  $\Gamma$ . est complexe,  $\Gamma = \Gamma$ ,  $\alpha = \beta = 0$ , ssi, en tant qu'application de  $E \odot_R E$  dans  $E$ , elle commute avec  $I$ . On peut dire aussi

que la connexion est complexe ssi elle conserve le champ des opérateurs  $I \in \mathcal{L}(T^1; T^1)$ , c.à d. si la dérivée covariante de  $I$  est nulle. Prenons en effet une carte complexe sur un ouvert de  $E$ . En appelant  $\nabla$ . la dérivée covariante, écrivons que  $\nabla_z I = 0$ , c.à d., pour tout champ de vecteurs tangents  $X$ ,  $(\nabla_z(IX))(x) = I(\nabla_z X)(x)$ ,  $Z \in T(V; x) = E$ . On a  $(\nabla_z X)(x) = (D_z X)(x) + \Gamma.(x)(X(x), Z(x))$ ,  $(\nabla_z(IX))(x) = (D_z(IX))(x) + \Gamma.(x)(IX(x), Z(x))$ ,  $I(\nabla_z X)(x) = I(D_z X)(x) + i\Gamma.(x)(X(x), Z(x))$ . Complexifications. D'abord  $(D_z(IX))(x) = I(D_z X)(x)$ ; car, si  $X$  est à valeurs dans  $E^{1,0}$ ,  $IX = iX$ ,  $D_z X$  est à valeurs dans  $E^{1,0}$ ,  $ID_z X = iD_z X$ , et de même pour  $E^{0,1}$ . La dérivée covariante de  $I$  sera donc

nulle ssi, pour  $X, Z \in E + iE$ ,  $\Gamma.(x) (IX \odot Z) = I \Gamma.(x) (X \odot Z)$ . En prenant  $X, Z$  dans  $T^{1,0}$ , c'est vrai ssi  $\alpha^{2,0}(x) = 0$ , et dans  $T^{0,1}$  ssi  $\alpha^{0,2}(x) = 0$ ; en prenant  $X \in T^{1,0}$ ,  $Z \in T^{0,1}$  et  $X \in T^{0,1}$ ,  $Z \in T^{1,0}$ , ssi  $\beta^{1,1} = 0$ . Les connexions réelles sur  $V$ , variété réelle  $C^{m+2}$ , sont les sections d'un fibré  $\mathbf{R}$ -affine de classe  $C^m$  sur  $V$ , le fibré  $\{\rho \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(T^1(V) \odot T^1(V); T^2(V)); \pi\rho = 1\}$ , le fibré vectoriel associé est  $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(T^1(V) \odot T^1(V); T^1(V))$  ( $T^1$  est le noyau de  $\pi$ ). Il y a donc toujours des connexions  $C^m$  et on peut les choisir à peu près arbitrairement sur un ouvert, au sens suivant: si  $V'$  est un ouvert de  $V$ ,  $V''$  aussi,  $\overline{V''} \subset V'$ , et si  $\rho'$  est une section donnée sur  $V'$ ,  $\rho''$  une section arbitraire sur  $V$ , si  $\alpha, 1-\alpha$  est une partition de l'unité sur  $V$ , subordonnée au recouvrement  $V', \rho V''$ ,  $\alpha\rho' + (1-\alpha)\rho''$  est une section sur  $V$  qui coïncide avec  $\rho'$  sur  $V'$ . Si  $V$  est complexe, on a le même résultat pour des connexions complexes, avec le fibré affine complexe des  $\{\rho_{\mathcal{A}} \in \mathcal{L}_{\mathbf{C}}(T^1_{\mathcal{A}}(V) \odot T^1_{\mathcal{A}}(V); T^2_{\mathcal{A}}(V)); \rho_{\mathcal{A}} \pi_{\mathcal{A}} = 1\}$ , de fibré vectoriel complexe associé  $\mathcal{L}_{\mathbf{C}}(T^1_{\mathcal{A}}(V) \odot T^1_{\mathcal{A}}(V); T^1_{\mathcal{A}}(V))$ , et on a des sections  $C^\infty$  (au sens réel). Ce fibré est  $\mathbf{C}$ -analytique; si  $V$  est de Stein, il a des sections holomorphes<sup>(15)</sup>.

#### (7.11) Connexions complexes et martingales conformes.

Soit  $(\rho_{\mathcal{A}}, \theta_{\mathcal{A}}, \Gamma_{\mathcal{A}})$  une connexion complexe sur  $V$ , et  $(\rho, \theta, \Gamma)$  sa connexion réelle associée. Si  $X$  est une  $V$ -semi-martingale, elle est une  $\Gamma$ -martingale,  $\widetilde{dX} = \rho(X) \frac{1}{2} d[X, X]$ , ssi elle est une  $\Gamma_{\mathcal{A}}$ -martingale,  $\underline{d\tilde{X}} = \rho_{\mathcal{A}}(X) \frac{1}{2} d[X, X]_{\mathcal{A}}$ .<sup>(16)</sup> En effet,

$$\begin{aligned} \underline{dX} &= \widetilde{dX}^{2,0} + \widetilde{dX}^{0,2} + \widetilde{dX}^{1,1}, \text{ et } \rho \, d \frac{1}{2} [X, X] = \rho^{2,0} \frac{1}{2} d[X, X]^{2,0} \\ &\quad + \rho^{0,2} \frac{1}{2} d[X, X]^{0,2} + (\pi^{1,1})^{-1} \frac{1}{2} d[X, X]^{1,1}. \quad \square \end{aligned}$$

**Proposition 7.12.** *Une semi-martingale  $M$  sur une variété complexe  $V$ , sur un ouvert  $A$  de  $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$  ou  $[S, T]$ , est une martingale conforme ssi elle est une martingale pour toutes les connexions boréliennes localement bornées (ou pour toutes les connexions  $C^\infty$ ), compatibles avec la structure complexe. Elle est alors de Zheng.*

(15) Tout fibré affine holomorphe sur une variété de Stein admet au moins une section holomorphe. C'est connu, mais je n'ai pas de référence. Nous ne nous en servons pas ici.

(16) De tels faits sont réconfortants, et méritent d'être signalés. Au contraire, pour reconnaître la propriété de Zheng, le crochet complexe ne convient pas. Il reste toujours vrai qu'une inégalité  $|\underline{d\tilde{X}}_{\mathcal{A}}| \leq \rho_{\mathcal{A}} \cdot \frac{1}{2} |d[X, X]_{\mathcal{A}}|$  entraîne une inégalité  $|\underline{d\tilde{X}}| \leq \rho \cdot \frac{1}{2} |d[X, X]|$ , mais la réciproque n'est pas vraie, bien sûr. Prenons, par exemple, pour  $V = \mathbf{C}$ , la semi-martingale conforme  $X = \frac{1}{2} [M, \bar{M}] + M$ , où  $M$  est une martingale conforme. Elle est de Zheng, car  $\underline{d\tilde{X}} = \frac{1}{2} d[M, \bar{M}] + \frac{1}{2} d[M, M]_{\mathbf{R}}$ , donc  $|\underline{d\tilde{X}}_{\mathcal{A}}| \simeq d[M, \bar{M}]$ , et  $\frac{1}{2} d[X, X] = \frac{1}{2} d[M, M]_{\mathbf{R}} \simeq d[M, \bar{M}]$ ; voir Note (12) page 106. Mais  $\underline{d\tilde{X}}_{\mathcal{A}} = \frac{1}{2} d[M, M]$ , et  $\frac{1}{2} d[X, X]_{\mathcal{A}} = 0$ .

Si  $M$  est une  $V$ -martingale conforme sur  $[S, T[$ , elle converge parfaitement là où elle converge, et son prolongement  $M' = M^T$  sur  $[0, T[$ ,  $T' = +\infty$  sur  $\{M \text{ converge}\}$ ,  $= T$  ailleurs, est encore une martingale conforme.

Démonstration. Qu'une martingale conforme soit de Zheng est évident d'emblée, puisque  $\widetilde{dM} = dM^{1,1} = (\pi^{1,1})^{-1} \frac{1}{2} d[M, M]$ ,  $\frac{1}{2} d[M, M] \in T^{1,1}$ . Mais nous voulons démontrer beaucoup plus. Soit  $M$  une martingale conforme. Alors  $\widetilde{dM}_{\mathcal{A}} = 0$ , et  $\frac{1}{2} d[M, M]_{\mathcal{A}} = 0$ , donc  $\widetilde{dM}_{\mathcal{A}} = \rho_{\mathcal{A}}(M) \frac{1}{2} d[M, M]_{\mathcal{A}}$ , elle est une  $\Gamma_{\mathcal{A}}$ -martingale pour toute connexion complexe. Inversement, supposons cette propriété vérifiée. En choisissant deux connexions  $C^\infty$  (au sens réel) complexes  $\rho'_{\mathcal{A}}$ ,  $\rho''_{\mathcal{A}}$ , on devra avoir  $(\rho'_{\mathcal{A}} - \rho''_{\mathcal{A}}) \frac{1}{2} d[M, M]_{\mathcal{A}} = 0$ . La différence  $\rho'_{\mathcal{A}} - \rho''_{\mathcal{A}}$  est une action  $C^\infty$  arbitraire du fibré  $\mathcal{L}(T_{\mathcal{A}}^1 \odot T_{\mathcal{A}}^1; T_{\mathcal{A}}^1)$ . Un raisonnement en coordonnées locales par une carte holomorphe (où les  $(\Gamma_{i,j}^k)$  sont  $C^\infty$  arbitraires) montre alors immédiatement que l'égalité ci-dessus n'est possible que si  $\frac{1}{2} d[M, M]_{\mathcal{A}} = 0$ . Mais alors  $\widetilde{dM}_{\mathcal{A}} = \rho_{\mathcal{A}} \frac{1}{2} d[M, M]_{\mathcal{A}}$  donne  $\widetilde{dM}_{\mathcal{A}} = 0$ . Donc  $M$  est une martingale conforme. La fin résulte de (7.9.1).  $\square$   
En fait il n'est pas nécessaire de se borner aux connexions complexes:

**Proposition 7.13.** *Soit  $\rho$ . une connexion continue. Pour que toute martingale conforme sur  $V$  soit une  $\Gamma$ -martingale pour cette connexion, il faut et il suffit que  $\beta$  soit nul,  $\rho = \rho + \alpha$ ,  $\rho$  connexion complexe.*

Démonstration. 1) Soit  $M$  une martingale conforme, donc  $\widetilde{dM} = d\widetilde{M}^{1,1} = (\pi^{1,1})^{-1} \frac{1}{2} d[M, M]^{1,1}$  et  $\frac{1}{2} d[M, M] = \frac{1}{2} d[M, M]^{1,1}$ . Elle sera une martingale pour  $\rho$ . si  $(\pi^{1,1})^{-1} \frac{1}{2} d[M, M]^{1,1} = \rho. \frac{1}{2} d[M, M]^{1,1} = (\pi^{1,1})^{-1} \frac{1}{2} d[M, M]^{1,1} + \beta \frac{1}{2} d[M, M]^{1,1}$ , donc dès que  $\beta = 0$ .

2) Soit inversement  $\rho$ . une connexion sur  $V$ , faisant de toutes les martingales conformes des martingales. Soient  $V'$  un ouvert de  $V$ ,  $V''$  un sous-ouvert relativement compact,  $\overline{V''} \subset V'$ , et une carte holomorphe de  $V'$  sur un ouvert  $U'$  d'un espace vectoriel  $\mathbf{I}$ -complexe  $E$  où  $V''$  ait pour image  $U''$ ,  $\overline{U''} \subset U'$ . Soient  $B_1, B_2$  deux mouvements browniens réels indépendants,  $x \in U''$ ,  $e \in E$ , et considérons la martingale conforme  $M$  à valeurs dans  $E$ :  $x + B_1 e + B_2 \mathbf{I}e$ ; si  $T$  est son temps de sortie de  $U''$ ,  $M^T$  est à valeurs dans  $\overline{U''}$  et peut donc être transporté dans  $V$ . Posons  $e = e^{1,0} + e^{0,1} = f + \bar{f}$ ,  $f = \frac{1-i\mathbf{I}}{2} e \in T^{1,0}$ ,  $\bar{f} \in T^{0,1}$ . Alors  $M$  s'écrit, si de même  $x = y + \bar{y}$ ,  $(y + (B_1 + iB_2)f) + (\bar{y} + (B_1 - iB_2)\bar{f})$ , et

l'examen de la composante  $M^{1,0}$  montre aussitôt que c'est une martingale conforme. Ensuite  $\frac{1}{2} d[M, M] = dt f \otimes f \in E^{1,0} \otimes E^{0,1}$ . D'après l'hypothèse,  $M^T$  doit être une  $\Gamma$ -martingale,  $d\tilde{M}^T + \Gamma.(M^T) \frac{1}{2} d[M^T, M^T] = 0$ , ou  $0 = \beta(M^T) (f \otimes f) dt$ , dans  $[0, T]$ . Donc,  $\mathbf{P}$ -ps. pour tout  $t \leq T$ ,  $\int_0^t \beta(M_s^T) (f \otimes f) ds = 0$ . Comme  $M^T$  est continue  $\mathbf{P}$ -p.s et  $\beta$  continue,  $\beta(M_s^T) (f \otimes f) = 0$   $\mathbf{P}$ -ps. pour tout  $s$ , et en faisant  $s=0$ ,  $\beta(x) (f \otimes f) = 0$ , pour tout  $x$  et tout  $f$ . Comme les  $f \otimes f$  engendrent  $E^{1,0} \otimes E^{0,1}$ , cela donne  $\beta \equiv 0$  dans  $V''$ , donc dans  $V$ .  $\square$

REMARQUE 7.13.1. Si l'on appelle orthogonal d'un ensemble de connexions continues l'ensemble des semi-martingales qui sont des martingales pour toutes ces connexions, et orthogonal d'un ensemble de semi-martingales l'ensemble des connexions continues qui en font des martingales, on voit que l'orthogonal de l'ensemble des connexions complexes est l'ensemble des martingales conformes, et l'orthogonal de l'ensemble des martingales conformes est l'ensemble des connexions à  $\beta$  nul.

REMARQUE 7.14. Dans tous les théorèmes énoncés, la partie  $\{3\}$  de (7.4) a disparu. Elle ne subsiste en effet pas en dehors des martingales vectorielles. Si par exemple nous prenons le brownien complexe sur  $\mathbf{C}$ , si on le considère comme martingale conforme sur  $[0, +\infty[ \times \Omega$  à valeurs dans la sphère de Riemann  $S = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ , variété complexe compacte, les trajectoires sont toutes forcément relativement compactes, mais n'ont pas de limite au temps  $+\infty$ . Cependant, si  $V$  est une variété de Stein, (7.4) *subsiste intégralement pour les martingales conformes*: les 3 ensembles coïncident  $\mathbf{P}$  ps. (avec la propriété de prolongement), en appelant  $\{1\}$  l'ensemble  $\{\bigcap_{\varphi \in \mathcal{O}^2} [\varphi(M), \varphi(M)] < +\infty\}$ ; car  $\{1\}$  et  $\{3\}$  coïncident, par (7.6), (7.8), et, en plongeant  $V$  dans  $\mathbf{C}^{2N+1}$  comme sous-variété analytique fermée, l'égalité  $\{2\} = \{3\}$  est ramenée à celle de  $E$  (7.4),  $M$  étant devenue une martingale (conforme) à valeurs dans  $E$ .

**Proposition 7.14.** *Soit  $V$  une variété munie d'une connexion continue. Dans l'espace topologique  $\mathcal{SM}$  des semi-martingales sur  $V$ , l'ensemble des  $\Gamma$ -martingales est fermé.*

Démonstration. La relation

$$(\overline{\omega}(M) \cdot \underline{M})^\sim = \frac{1}{2} \overline{\omega}(M) \rho(M) \cdot [M, M],$$

$\overline{\omega}$  champ de vecteurs 2-cotangents continu à support compact, passe en effet à la limite des suites, comme dans (6.8) (Alors (7.12) et (7.14) peuvent aussi redonner (6.8)).  $\square$

### Index terminologique

$\mathcal{SM}$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $A$ ,  $\mathcal{A}(A)$ , page 79–80.

Semi-martingale formelle,  $\mathcal{AF}$ ,  $\mathcal{AF}(A)$ , page 82–83.

$V$ -Martingale conforme sur  $A$ , pages 85.

Fonction plurisous-harmonique, page 88.

Sous-martingale généralisée, page 88.

$T^k(V) + iT^k(V)$ , page 91.

$\mathcal{H}_v$ ,  $T^k_{\mathcal{A}}(V)$ ,  $\mathcal{H}^k(V)$ ,  $e_k$ ,  $f_k$ ,  $\frac{\partial}{\partial z_k}$ ,  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}$ , pages 91–92.

$T^1_I(V)$ , page 92.

$T^{1,0}$ ,  $T^{0,1}$  page 24.

$T^{2,0}$ ,  $T^{0,2}$ ,  $T^{1,1}$  page 94.

$E \odot E$ ,  $E \odot_I E$ , page 94.

$dX^{2,0}$ ,  $dX^{0,2}$ ,  $dX^{1,1}$ ,  $(dX^c)^{1,0}$ ,  $(dX^c)^{0,1}$ ,  $\frac{1}{2} d[X, X]^{2,0}$ ,  $\frac{1}{2} d[X, X]^{0,2}$ ,  $\frac{1}{2} d[X, X]^{1,1}$ ,  $(\pi^{1,1})^{-1}$ , pages 96–97.

Différentielle de martingale conforme, page 98.

Processus sur un ouvert relatif de  $[S, T]$ , page 101.

$\underline{X}$ ,  $X^c$ ,  $\tilde{X}$ ,  $\frac{1}{2} [X, X]$ ,  $H.X$ , sur  $[S, T]$ , page 102.

$X$  sur  $[S, T]$ ;  $X$  converge en  $T$ , converge parfaitement en  $T$ , page 102.

Semi-martingale de Zheng, page 105.

$P^* = (T^1 \odot T^1)^*$ , page 106.

Connexions,  $\Gamma$ -martingales, page 108.

Connexions complexes, page 110.

---

### Bibliographie

- A. Debiart, B. Gaveau, E. Mazet [1]: *Temps d'arrêt des diffusions riemanniennes*, C. R. Acad. Sci. Paris **278** (1974), 723–725.
- M. Emery [1]: *Une topologie sur l'espace des semi-martingales*, Séminaire de Probabilités XIII, 1977–78, Lecture Notes in Math. 721, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg-New-York, 1979, 260–280.
- E. Lenglart [1]: *Sur la convergence presque sûre des martingales locales*, C. R. Acad. Sci. Paris **284** (1977), 1085–1088.
- P.A. Meyer [1]: *Cours sur l'Intégrale Stochastique*, Séminaire de Probabilités I, 1966–1967, Lecture Notes in Math. 39, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg-New-York, 1967, 72–162.
- [2]: *Sur un résultat de L. Schwartz*, Séminaire de Probabilités XIV, 1978–1979, Lecture Notes in Math. 784, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg-New-York, 1980, 102–103.
- [3]: *Le théorème de convergence des martingales sur les variétés riemanniennes*,



- Séminaire de Probabilités XVII, 1981–1982, Lecture Notes in Math. 986, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg-New-York, 1983, 187–193.
- P.A. Meyer-C. Stricker [1]: *Sur les martingales au sens de L. Schwartz*, Mathematical Analysis and Applications, vol. B, Academic Press 1981, 577–601.
- L. Schwartz [1]: *Semi-martingales sur des variétés, et martingales conformes sur des variétés analytiques complexes*, Lecture Notes in Math. 780, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1980.
- [2]: *Les semi-martingales formelles*, Séminaire de Probabilités XV, 1979–1980, Lecture Notes in Math. 850, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1981, 413–489.
- [3]: *Géométrie différentielle du 2ème ordre, semi-martingales et équations différentielles stochastiques sur une variété différentielle*, Séminaire de Probabilités XVI, 1980–1981, Supplément: Géométrie Différentielle Stochastique, Lecture Notes in Math. 921, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1982, 1–148.
- [4]: *Gros produits tensoriels en analyse et en probabilités*, A paraître en 1984, livre en l'honneur de Leopoldo Nachbin, North-Holland.
- M. Sharpe [1]: *Local times and singularities of continuous local martingales*, Séminaire de Probabilités XIV, 1978–1979, Lecture Notes in Math. 784, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1980, 76–101.
- C. Stricker [1]: *Sur deux questions posées par L. Schwartz*, Séminaire de Probabilités XV, 1979–1980, Lecture Notes in Math. 850, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1981, 490–492.

Centre de Mathématiques de  
l'Ecole Polytechnique  
Plateau de Palaiseau -91128  
Palaiseau Cedex, France