OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	任意断面形状を有する棒状材料中のガイド波モードの解析
Author(s)	林, 高弘; 陶山, 光宣; 阿部, 司
Citation	日本機械学会論文集A編. 2006, 72(724), p. 1935-1940
Version Type	AM
URL	https://hdl.handle.net/11094/88619
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

任意断面形状を有する棒状材料中のガイド波モードの解析*

林　高弘 *1, 陶山光宣 *2, 阿部　司 *3

Modal analysis of guided waves in a bar with an arbitrary cross-section

Takahiro HAYASHI*4, Mitsunobu SUYAMA and Tsukasa ABE

*4Nagoya Institute of Technology, Faculty of Engineering
Gokiso Showa Nagoya, 466-8555 Japan

Ultrasonic wave packets propagate in the longitudinal direction by inputting low frequency ultrasonic into such bar-like structures as rails. This ultrasonic mode, called guided wave has become popular as a promising technique for rapid long-range nondestructinve inspection for pipes and rails. In guided wave inspection, guided wave velocities (dispersion curves) and wave structures are firstly needed. Dispersion curves and wave structures can be analytically derived for such simple structures as plates and pipes, but not for bar-like structures with complex cross-section such as rails. Authors have developed calculation technique to obtain the dispersion curves and wave structures for such structures using a special finite element method called a semi-analytical finite element method in which dispersion curves and wave structures can be obtained as eigenvalues and eigenvectors of an eigensystem. This study developed more accurate calculation technique for dispersion curves and wave structures using mirror relation of guided wave modes and an iteration method for solution of the eigen problem. And experimental studies for JIS 6kg rail verify that dispersion curves and wave structures were obtained with sufficient accuracy for typical out-of-plain vibration modes. Wave structures were obtained by measuring waveforms at many points on the curved surface of a rail with a laser interferometer controlled by robot arms.

Key Words: Ultrasonic nondestructive inspection, Guided waves, Dispersion curves, Rail, Curved surface scanning

1. 緒　言

配管や鉄道レールの表面に数十 kHz～数百 kHz の低周波超音波を入射すると，長手方向に伝播するガイド波と呼ばれる超音波モードが現れる．このガイド波は，材料断面内にエネルギーが封入して伝播するので，数十m～百m程度の長距離伝播が可能である特長を持つ．このガイド波の長距離伝播特性を利用することにより構造部材の高速診断や，アクセスできない隠れた箇所の遠隔検査が可能になるものとして期待されている[1]-[3]．

通常の超音波検査と同様に，ガイド波を用いた配管等の損傷診断でも，損傷からのエコーの現れる時刻とガイド波音速をもとに損傷位置を決定する．このとき，配管のような単純な断面形状を持つ部材についてはガイド波音速が解析的に求められる[4][5]．このガイド波音速は，周波数によって変化するため，横軸を周波数，縦軸を位相速度または群速度としたグラフ（分散曲線）として描くことができる．分散曲線からは，用いる周波数帯におけるガイド波モードの数や各モードの分散性を知ることができる．また，各モードの断面内の振動分布も解析的に求めることができ，これらを用いることで検査に必要なガイド波モードの選択と，励起・受信するためのセンサの設計を行うことができる．

このように，ガイド波の分散曲線と各モードの振動分布はガイド波検査を行う前に，準備しておくべき基本情報であるが，鉄道レールや H 型鋼など断面形状が複雑になると，分散曲線や各モードの振動分布を解析的に求めることはできない．一方，これらの複雑断面形状を持つ棒状材料に対しても，長手方向にガイド波が長距離伝播することは実験的に確認されており

＊原稿受付　2006年　月　日．
*1正員，名古屋工業大学　大学院工学研究科（〒466-8555　名古屋市昭和区御器所町）．
*2名古屋工業大学　大学院工学研究科
*3東日本旅客鉄道株式会社　JR東日本研究開発センター　テクニカルセンター
hayashi@nitech.ac.jp

[6]，これら長大構造物へのガイド波の適用が期待されている．

著者らは，半解析的有限要素法という有限要素法の特殊解法を用いることにより，任意断面形状の棒状材料の分散曲線を導出する手法を開発してきた[7]~[9]．半解析的有限要素法では，棒状材料の断面のみを要素分割し，長手方向(z方向)は直交関数 $\exp(ikz)$で表して支配方程式を展開する．その際，解が成立するための必要条件として，波数 k の固有値問題を解くことになり，求めた固有値がガイド波固有モードの波数，固有ベクトルが固有モードの断面振動分布を表す．このように開発された手法によって，ガイド波の分散曲線が計算され，その計算結果は，２次元フーリエ変換法を用いて実験的に導出された分散曲線とほぼ対応が取れていることが確認された[8]．

しかし，これまでの固有値・固有ベクトル導出手法では，計算時間と計算メモリの問題があり，汎用パソコンで１００程度の節点数までの計算が限界であった[8]．そのため，要素分割の方法によって導出される分散曲線に差が生じたり，計算されたりされなかったりするモードが存在するなどの固有値導出に関する問題が残っていた．また，分散曲線は二次元フーリエ変換法で比較できていたが，各モードの振動分布は実験的に確認できていなかった．振動分布を確認するためには，波長よりも十分小さい領域の振動を多点で受信が必要であるが，鉄道レールのような曲面に対して多点受信は非常に困難であった．

そこで本研究では，ガイド波モードの鏡像性と Amordi 法と呼ばれる反復型射影法による固有値解法を用いることで，断面要素数を十分に細かくし，精度のよい分散曲線および各モードの振動分布を導出する．さらに，レール中のガイド波モードの振動分布を実験的に確認するため，レーザ干渉振動計をロボットアームに取り付けて，曲面における多点受信によるガイド波計測を行う．

2. 半解析的有限要素法による ガイド波分散曲線と各モードの振動分布の導出

２．１　分散曲線と各モードの振動分布導出の概要

有限要素法では，計算領域をすべて細かく分割し，分割小領域の頂点である節点において変位を与えることによって波動場を表現している．一般に各節点における変位値を未知パラメータとし，全系のポテンシャルエネルギを最小とするという条件の下で以下のような支配方程式が得られる[10]．

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{U} - \omega^2\mathbf{M}\mathbf{U} \tag{1}$$

ここで $\mathbf{F}$，$\mathbf{U}$ が節点力および変位ベクトルであり，$\mathbf{K}$ が剛性マトリクス，$\mathbf{M}$ が質量マトリクスである．この支配方程式をある周波数 ω について解くことで解が得られる．一方，半解析的有限要素法[7]~[9]では，棒状の計算領域の断面のみを要素分割し，長手(z)方向は $\exp(ikz)$で表すことによって波数 k の波動場を表す．断面上の節点における変位に加えて，波数 k を未知数として表現される変位分布を，ポテンシャルエネルギ最小化原理を用いて展開していくことによって，波数 ξ を固有値とする以下の固有値方程式

$$\mathbf{F} = \left(\mathbf{K}_1 + i\xi\mathbf{K}_2 + \xi^2\mathbf{K}_3 - \omega^2\mathbf{M}\right)\mathbf{U} \tag{2}$$

に帰着される．ここで $\mathbf{K}_1$，$\mathbf{K}_2$，$\mathbf{K}_3$，$\mathbf{M}$ は MxM の実対称行列である．M は自由度の数であり，3 次元問題の場合，節点数の 3 倍の数になる．この固有値問題は，文献(10)(11)に従い，以下のような 2Mx2M の行列 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ を用いて，以下のような一般化固有値問題に変形可能である．

$$\left.\begin{aligned} &(\mathbf{A} - \xi\mathbf{B})\mathbf{Q} = \mathbf{p} \qquad (3)\\ &\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K}_1 - \omega^2\mathbf{M} \\ \mathbf{K}_1 - \omega^2\mathbf{M} & i\mathbf{K}_2 \end{bmatrix},\\ &\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 - \omega^2\mathbf{M} & 0 \\ 0 & -\mathbf{K}_3 \end{bmatrix},\\ &\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \xi\mathbf{U} \end{bmatrix},\ \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

式 (3) が解を持つためには，ξ が

$$(\mathbf{A} - \xi\mathbf{B})\mathbf{Q} = 0 \tag{5}$$

の固有値問題の 2M 個の解となる必要がある．この 2M 個の固有値 ξ_m (m=1～2M) は固有振動モードの波数を表している．また，m 番目の固有振動モードの節点変位ベクトルを $\mathbf{U}_m$ とすると，

$$\mathbf{\Phi}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_m \\ \xi_m\mathbf{U}_m \end{bmatrix} \tag{6}$$

が固有値 ξ_m に対応する固有ベクトルとなっている．得られる 2M 個の波数や固有ベクトルは M 個の進行波と M 個の後退波から成っている[7][9]．ここで，式(5)では，式(4)中の節点力ベクトル $\mathbf{F}$ をゼロとおいている．すなわち，得られる解は，計算領域にかかるすべての外力をゼロとした場合の解であり，３章以降の実験において，レールに締結や支持のない応力ゼロの領域での分散曲線を得ることに対応する．

２．２　進行波と後退波の鏡像性を利用した固有値問題次元の縮小　得られる固有値と固有ベクトルは M 個の進行波と M 個の後退波に対応した M 個ずつの対からなることが分かっている．つまり，前進波と後退波の振動分布は，z 方向が正負逆になるだけの鏡像関係を示す．すなわち，固有値はξに対して-ξが存在し，固有ベクトルは，z 方向の変位成分に対する M/3 個の要素からなる部分ベクトル $\mathbf{U}_z$ と，それ以外の 2M/3 個の要素からなる部分ベクトル $\mathbf{U}_{r\theta}$ に分解すると前進波の固有ベクトル

$$\mathbf{U}^{+} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{r\theta} \\ \mathbf{U}_z \end{bmatrix} \tag{7}$$

に対して，後退波の固有ベクトル

$$\mathbf{U}^{-} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{r\theta} \\ -\mathbf{U}_z \end{bmatrix} \tag{8}$$

が存在する．式(2)の節点力ベクトルをゼロとした方程式，

$$\left(\mathbf{K}_1 - \omega^2\mathbf{M} + i\xi\mathbf{K}_2 + \xi^2\mathbf{K}_3\right)\mathbf{U} = 0 \tag{9}$$

を次のようにz方向変位成分のみを分離して考える．

$$\left[\left(\mathbf{K}_{11} \quad \mathbf{K}_{12}\right) + i\xi\left(\mathbf{K}_{21} \quad \mathbf{K}_{22}\right) + \xi^2\left(\mathbf{K}_{31} \quad \mathbf{K}_{32}\right)\right]\begin{pmatrix} \mathbf{U}_{r\theta} \\ \mathbf{U}_z \end{pmatrix} = 0 \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{K}_1 - \omega^2\mathbf{M} &= \left(\mathbf{K}_{11} \quad \mathbf{K}_{12}\right), \\ \mathbf{K}_2 &= \left(\mathbf{K}_{21} \quad \mathbf{K}_{22}\right), \\ \mathbf{K}_3 &= \left(\mathbf{K}_{31} \quad \mathbf{K}_{32}\right) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

そのとき，後退波に対する方程式として，以下が成り立つ．

$$\left[\left(\mathbf{K}_{11} \quad \mathbf{K}_{12}\right) - i\xi\left(\mathbf{K}_{21} \quad \mathbf{K}_{22}\right) + \xi^2\left(\mathbf{K}_{31} \quad \mathbf{K}_{32}\right)\right]\begin{pmatrix} \mathbf{U}_{r\theta} \\ -\mathbf{U}_z \end{pmatrix} = 0 \tag{12}$$

[(式(10)+式(12))xξ+(式(10)-式(12))]/2 より以下の式が得られる．

$$\left[\left(\mathbf{K}_{11} + i\mathbf{K}_{21} \quad \mathbf{K}_{12}\right) - \xi^2\left(-\mathbf{K}_{31} \quad -i\mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{32}\right)\right]\begin{pmatrix} \xi\mathbf{U}_{r\theta} \\ \mathbf{U}_z \end{pmatrix} = 0 \tag{13}$$

この式は，以下のように書き換えることにより，MxM 行列 $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ からなる固有値問題とみなすことができる．

$$\left(\mathbf{H}_1 - \eta\mathbf{H}_2\right)\mathbf{V} = 0 \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \left(\mathbf{K}_{11} + i\mathbf{K}_{21} \quad \mathbf{K}_{12}\right), \\ \mathbf{H}_2 &= \left(-\mathbf{K}_{31} \quad -i\mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{32}\right), \\ \mathbf{V} &= \begin{pmatrix} \xi\mathbf{U}_{r\theta} \\ \mathbf{U}_z \end{pmatrix}, \quad \eta = \xi^2 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

これにより求められる M 個の固有値η_m (m=1,2,…M) に対し，$\xi_m = \pm\sqrt{\eta_m}$ をとると前進波および後退波のガイド波モードの波数が得られる．また，得られた固有ベクトルは

$$\mathbf{V}_m = \begin{pmatrix} \xi_m\mathbf{U}_{r\theta m} \\ \mathbf{U}_{zm} \end{pmatrix} \tag{16}$$

という形をしており，r, θ方向成分の要素をξ_m で割ることにより，m番目の振動モードの断面変位ベクトル

$$\mathbf{U}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{r\theta m} \\ \mathbf{U}_{zm} \end{pmatrix} \tag{17}$$

が得られる．

この操作により，固有値問題の行列サイズを半分にできるので，節点数をこれまでの２倍にして計算することができる．

２.３　反復型射影法による固有値計算手法を用いた低次伝播モードの導出　複素一般行列の固有値問題を解くためのサブルーチンは，IMSL などの GVCCG などを使うことができる．GVCCG では全固有値と右固有ベクトルを求められる反面，計算時間が行列サイズの約 3 乗に比例して大きくなるため，大規模固有値問題の解法には適していない．

そこで，断面内の節点数を多くしても計算が可能な反復型射影法による固有値計算手法である Arnoldi 法[13][14]を用いて，複雑断面形状の棒状材料について分散曲線の導出を行った．Arnoldi 法では大規模固有値問題 $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ を，部分空間へ射影することにより小さな固有値問題に近似して，計算を行うため，非常に大きな固有値問題でも固有値と固有ベクトルを導出することができる．$\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ に対する全ての固有値，固有ベクトルが求められるわけではないが，分散曲線の導出に必要なのは，伝播モードの波数を示す実数の固有値であるので，これらが導出できるように設定して計算すれば十分な精度で計算が可能である．Arnoldi 法のサブルーチンにはフリーで配布されている ARPACK[14]と呼ばれるフォートランサブルーチンを利用した．

3. 6kg レールの分散曲線

分散曲線の導出例として，ここでは JIS 6kg レールを用いた．図１には，IMSL GVCCV を用いたこれまでの手法で可能であった最大の要素分割におけるレール断面(a) (節点数 107)と ARAPACK を用いた固有値計算手法によって可能となった要素分割(b) (節点数 718)を示す．これまでの手法では要素分割が非常に粗く，非常に精度の悪い計算を行っていたことが想像できる．図２に，これらのときの分散曲線を示す．図２には節点数を 360 とした場合の分散曲線も合わせて示した（赤四角）．図２中 20 k Hz 以下の低周波帯では，ほぼ解は一致しているが，周波数が大きくなるにつれて，差が大きくなっているのが分かる．要素数を増やすにつれて，次第に図２の黒い円（節点数 718）に近づいていくことから，要素数・節点数が多いほど精度のよい解が得られていることが分かる．また，ここに示す節点数以外にいくつもの節点数で分散曲線の導出を試みたところ，この周波数帯域では図１(b)の要素分割数でほぼ十分であった．また，図１の要素分割例では，要素分割を左右対称になるように設定した．断面形状が左右対称であるのに，要素分割を左右対称でないようにすると，得られるモードの振動分布の対称性が崩れることがあり，分散曲線と各モードの振動分布に誤差を与えためである[12].

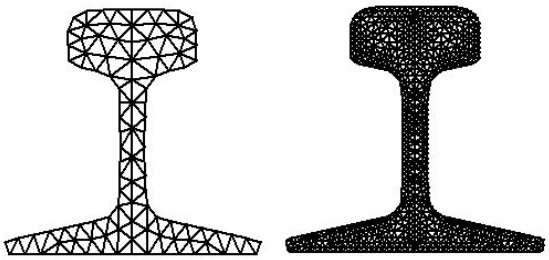

Fig. 1 Cross sectional division for calculations of dispersion curves with (a) IMSL GVCCV (107 nodes) and (b) ARPACK (718 nodes).

4. 振動分布の実験的検証

図３に，図 1(b)の要素分割で計算した場合の 6kg レールの分散曲線を示す．37kHz には(A), (B)で示された群速度の大きなモードが２つある．これらは，李らの研究[14]の中で，レール断面を縦振動して進行する波動であり，最も群速度の大きい(A)がレール断面の上端と下端が同位相で振動するモードであり，(B)がレール上下が逆位相のモードであることが示された．ここでは，同じ 37kHz において，やや群速度の遅い(a)〜(e)のモードの振動分布を測定する．

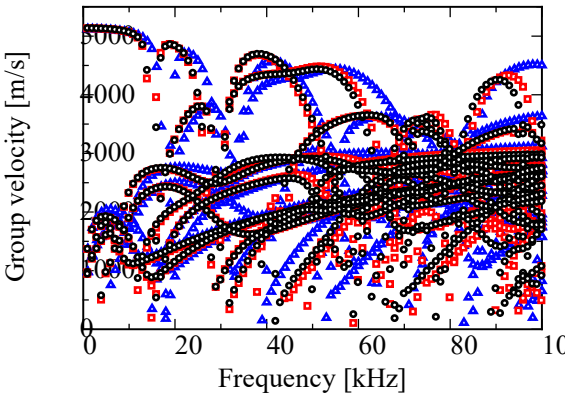

Fig. 2 Group velocity dispersion curves for JIS 6kg rails derived from (a) (107 nodes, blue triangle) and (b) (718 nodes, black circle) in Fig.1 and 360 nodes (red square).

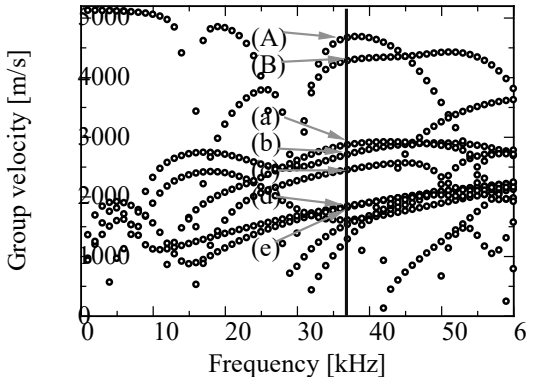

Fig.3 Group velocity dispersion curves for JIS 6kg rails (718 nodes). A vertical line denotes 37kHz and wave structures for (a)-(e) are given in Fig.4. (A) and (B) are modes with longitudinal vibrations.

図 4 に前章で述べた計算手法により求められた固有ベクトルに対応する(a)〜(e)のモードの振動分布を示す．断面に垂直方向の縦振動は断面内の振動に比べ非常に小さかったので，ここでは表していない．それぞれ，赤線が位相ゼロの位置を示し，黒が 1/4 周期後の振動分布を示しており，式(17)から得られた固有ベクトルに対応する断面変位ベクトルの実数部と虚数部に対応する．

これらの振動分布を見ると，(a), (b)は腹部が横振動するモード，(c)は頭部が上下振動するモード，(d),(e)は底部が屈曲運動するモードであることが分かる．

これら計算で求められた振動分布を検証するため，各モードを接触型低周波探触子で励起し，ロボットアームに取り付けたレーザ干渉振動計で，レール表面の多点で超音波計測を行った．図５に実験装置の概略図を示す．信号発生器から中心周波数 37kHz，４波の低周波超音波信号を発生させ，探触子には約 150Vp-p の

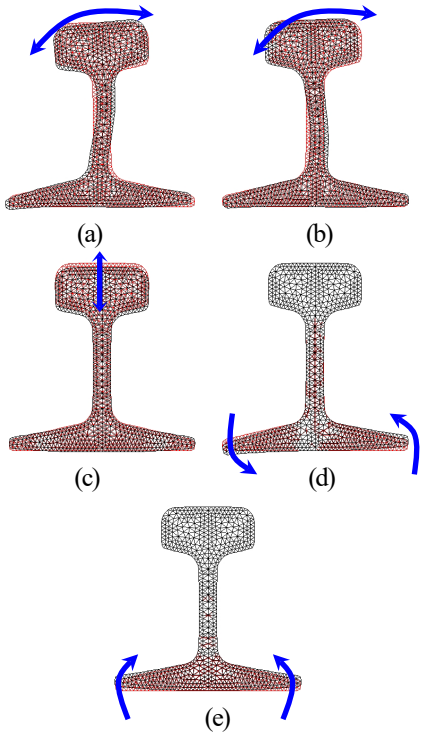

Fig.4 Wave structures for several guided wave modes in JIS 6kg rail at 37kHz. (a)-(e) correspond to (a)-(e) in Fig.3.

励起電圧を与えた．低周波探触子は，(a)～(e)の各モードが励起しやすいように，(a), (b)の検出にはレール腹部に，(c)にはレール上部に，(d),(e)にはレール底端部に対して表面に垂直に振動を入射した．JIS 6kg レールは高さ 50.8mm, 底部の幅 50.8mm であり，鉄道レールに利用されるレールサイズに比べ，約 1/3 である．長さは 5.5m であり，一端から発信し，4.3mの位置で受信した．受信にはレーザ干渉振動計（小野測器 LV-1720）を用い，自動スキャン中でも安定して波形が取れるように反射マーク(小野測器 LV-0012)をレール表面のレーザ照射部に貼り付けた．レーザ干渉振動計のセンサ部は，6 軸制御ロボット（三菱電機 RV-6S）に取り付けられ，レール表面に垂直にレーザを入射し，レールのあらゆる面に対し垂直方向の振動を検出できるようにした．4.3m の位置で受信することにより，レーザ干渉振動計側の端面からの反射波が後に出てくる受信波形の中に入らないようになっている．逆に，入射用低周波探触子側の端面からの反射波は後の受信波形中に直接波と重なって受信されているが，探触子が端面近傍に設置してあるため，信号形状の変化は大きくない．レールは 2 箇所で支持しているが，支持部からの反射波は見られず，支持点を変えても測定波形に変化がほとんど無かったことから，分散曲線と振動分布を変化させるほどの影響は与えていないと考えられる．図 6 にはレール表面上のスキャンした領域を示す．ロボットアーム長の限界のため，スキャン領域はレールの半分のみ A～E とした．各領域上を 1 mm間隔でレーザを移動させて，表面に垂直方向の振動を受信した．ロボットの位置決め精度は±0.02mm であり，低周波超音波を検出するのに十分な精度で位置決めできているものと考えられる．また，図 6 中の領域 A, B, C, D, E ではそれぞれ 12 点，7 点，22 点，17 点，26 点の受信点があり，図 4 に示した振動分布を表現するのに十分な数の計測点数となっている．

図 3，図 4 中の(a)(b)のモードを確認するために，発信探触子をレール腹部に垂直に入射（図５）した場合の，領域 A における 12 個の受信点での波形を図 7 に示す．図 7 は発信探触子で振動を入射した瞬間をゼロとしており，得られた波形の時刻がレール中を伝播していた時間を示している．図 3(a)(b)の群速度から，それぞれのモードの到達時刻はそれぞれ約 1520μs，1590□μs であり，図 7 中の時刻 1500μs～2000μs に見られる最初の波束に(a), (b)が含まれている．A～E の領域では図 7 同様に多点で波形が受信されており，各受信点における面外垂直方向の変位を拡大して，レール表面の変形として示したものが図８である．図８(a)はレール腹部を加振した場合の時刻 1585μs における断面の変形を示したものであり，(b)は同様に腹部を加振した時の時刻 1720μs での断面変形である．これらの時刻は，群速度から図３，４の(a), (b)のモードが現れると考えられる．図 8 (a)では領域 A が右上がりであり，領域 C（腹部）は中央に節を持つなど，図 4 (a)に非常によく一致している．また図８(b)も領域 C（腹部）の節の位置や頭部の形状などはちょうど図 4 の (b)に非常によく似た形態をしている．同様に，図８(c)は，レール上部より垂直に入射したときの多点受信波形より得られた断面変形図であり，計算によって求められた図 4 の(c)のモードに非常によく似た形態を示す．図８(d)はレール底端部に加振した場合の変形である．分散曲線図３(d),(e)はほぼ群速度が一致しており，測定される波形はこれら両方のモードが混在した波形であると考えられる．いずれもレール底端部に変形の大きなモードであり，図 8 (d)はこれらのモードがよく表されているといえる．

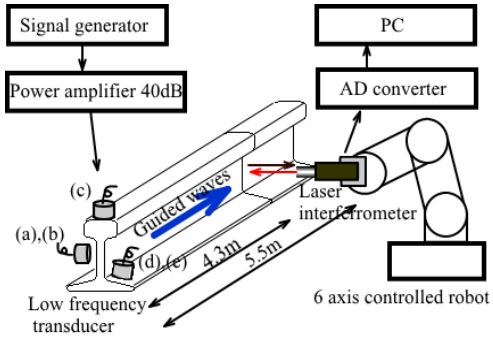

Fig.5 Experimental set-up

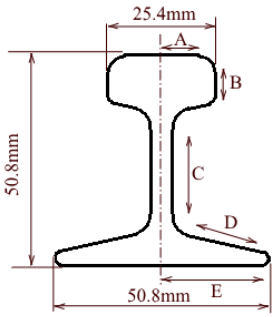

Fig.6 Cross-section of JIS 6kg rail and scanning regions.

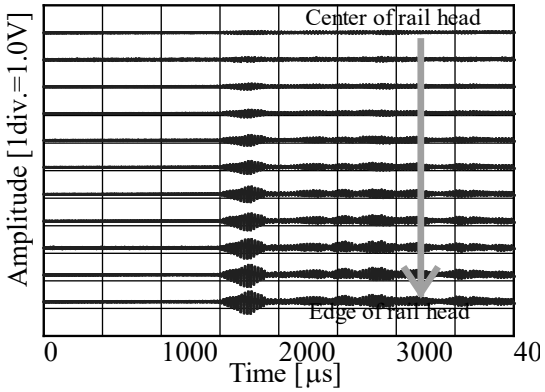

Fig.7 Waveforms detected at region A for normal incidence on the rail web.

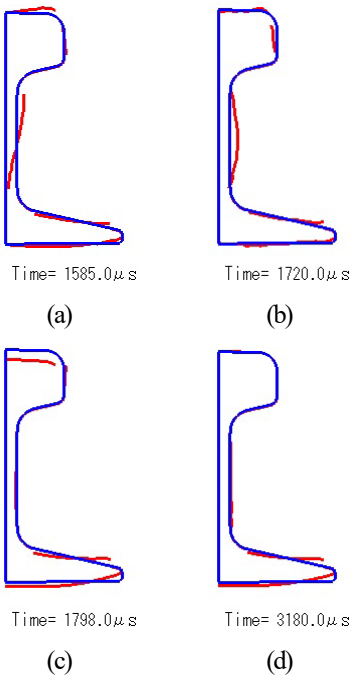

Fig.8 Displacement detected at many points on the rail surface with Laser interferometer. (a)-(c) show the modes (a)-(c) in Fig.4, and (d) shows the mixed modes of (d) and (e) in Fig.4.

5. 結　　言

任意断面形状の棒状材料中を伝播するガイド波の分散曲線と各モードの振動分布を精度よく求めるため，ガイド波モードの鏡像性と Amordi 法と呼ばれる反復型射影法による固有値問題解法を半解析的有限要素法に適用した．また JIS 6kg レール内のいくつかの代表的なモードについて，計算で得た振動分布と実験的に得られた振動分布を比較することにより，そのガイド波分散曲線導出手法の妥当性を検証した．

実験的に振動分布を得るためには，レール表面上の多点での計測が必要であるが，ロボットアームにレーザ干渉振動計を取り付けることで，レール表面のような曲面上でも十分な位置決め精度で非接触の多点受信を行うことができた．この技術は，今回のようなガイド波モードの解析だけでなく，たとえば配管表面のスキャニングなどにも応用可能であり，これまで表面形状に応じてスキャナーを製作する必要があった曲面のスキャンがロボットのプログラミングで簡単に実現できる．

参　考　文　献

(1) Nishino, H., *Journal of the Japanese society of Non-destructive testing*, Vol.52, No.12, (2003) pp.654-661.

(2) Cawley, P. et. al., *Materials Evaluation*, Vol.61, No.1, (2003) pp. 66-74.

(3) Hayashi, T., *Journal of the Japanese society of Non-destructive testing*, Vol.54, No.11, (2004) pp.590-594.

(4) Gazis, D. C., *Journal of the acoustical society of America*. Vol.31, No.5 (1959) pp.568-578.

(5) Nishino, H. et.al., *Jpn. J. Appl. Phys*, 40 No.1 A (2001)pp.364-370.

(6) Rose, J. L. et. al., *Insight*, Vol.44, No.6 (2002) pp.353-358.

(7) Hayashi, T., *Japanese society of Non-destructive testing*, Vol.52, No.12, (2003) pp.662-666.

(8) Hayashi ,T., et.al., *Ultrasonics*, Vol.41, No.3 (2003) pp.175 - 183.

(9) Hayashi ,T., et. al., *Ultrasonics*, Vol.44, No.1 (2006) pp.17-24.

(10) Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method, Third Edition*, (1977), McGraw-Hill.

(11) Dong, S. B., *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.11 (1977) pp.247-267.

(12) Editorial committee of Modal analysis handbook, *Modal Analysis Handbook*, (2000) Corona publishing.

(13) Amordi, W. E., Quart. *J. Applied Mathematics*, Vol.9 (1951) pp17-29.

(14) Sorensen, D. C., *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol.13, No.1 (1992) pp.357-385.

(15) Li, S. et. al., *Proceedings of JSNDI spring conference 2005*, (2005), pp145-148.