Title	斜角探触子励起による積層平板材料中のラム波伝ぱ
Author(s)	林, 高弘; 川嶋, 紘一郎; 遠藤, 茂寿
Citation	日本機械学会論文集A編. 2001, 67(658), p. 1063-1070
Version Type	AM
URL	https://hdl.handle.net/11094/88621
rights	
Note	

斜角探触子励起による積層平板材料中のラム波伝ぱ*

林　高弘[*1]　川嶋紘一郎[*1]
遠藤茂寿[*2]

Lamb wave propagation exited by angle beam transducers in layered plates

Takahiro HAYASHI, Koichiro KAWASHIMA
Shigehisa ENDOH

Wave motion in a layered plate ,including loading regions, were fomulized using the semi-analytical finite element method (strip element method) and calculated at every frequency step, which resulted in the simulations of Lamb wave exitated by angled beam transducers in the time domain. These calculations required less computational time and memory than the conventional methods such as FEM and BEM. The numerical results were visualized and the snapshots of Lamb wave propagation revealed the some phenomena regarding S0 mode exitation and stress distributions of S0 and A0 mode. The pure S0 mode cannot be exited by angle beam transducers due to its long wavelength in a low frequency thickness range. The normal stress in the propagation direction in S0 and A0 mode and shear stress in S0 mode abruptly varied with the position in the thickness direction in a crossply plate.

Key Words: Numerical Analysis, Ultrasonic Inspection, Composite Material, Lamb Wave, Semi-analytical Finite Element Method, Angle Beam Transducer

1. 緒言

ラム波は，板材料中を長距離伝ぱするため，大領域の高効率非破壊検査に有効であり(1)，近年レーザー超音波法(2)(3)や空気結合超音波法(4)-(6)といった新しい高度な手法によるラム波利用の非破壊検査が行われてきている．しかしながら従来型の接触法に比べて低感度であるため，これらの手法によるラム波の励起現象を正確に把握し，最適励起条件を探る必要が出てきている．また，ラム波伝ぱ経路内での欠陥の有無だけでなく，欠陥形状やサイズといった定量評価が求められ，切り欠きや剥離といった欠陥周りのラム波の挙動の厳密な解析が求められている．さらに，広帯域でのラム波波形観測と信号処理技術を駆使して，複数のラム波モードの群速度を同時に算出する技術が開発されている(7)が，複数モードが重畳している観測波形から材料内部の特徴情報を抽出することは，現段階では非常に困難であり，複数モード重畳のラム波波形の理解を深めなければならない．

数値計算シミュレーションとその計算結果の可視化は，超音波非破壊検査におけるこれらの要求に答える最適なツールである．現在，弾性構造の動的挙動を再現する計算手法として，差分法(FDM)や有限要素法(FEM)，境界要素法(BEM)などが広く用いられている．しかし，ラム波のように大領域を伝ぱするような波動を扱う場合に，従来型の閉領域計算を行うと，反射波の影響を取り除くために，更に大領域を与えなくてはならなかったり，無反射境界を用いなければならず，計算機への負荷が非常に大きい．そこで著者らは，ラム波の解析解と BEM を組み合わせたハイブリッド BEM(HBEM)を用いて，任意形状の欠陥のある均質弾性材料におけるラム波のシミュレーションを可能とした(8)(9)．しかし，現在，構造物などに用いられている板状材料の多くは，力学的強度や耐腐食性，耐熱性などを向上させるため，FRP に代表される積層材料や表面処理を施した層状材料である．これらの材料を対象とした数値計算に HBEM を用いると，層の界面に境界要素を与えなければならず，莫大な要素数になる．Liu G. R.らは，この層状材料にも適用可能で，なおかつ端部を無限領域として設定できるラム波の数値計算

*原稿受付　　年 月 日．
*1 正員，名古屋工業大学機械工学科（〒466-8555　名古屋市昭和区御器所町）．
*2 非会員，資源環境技術総合研究所（〒305-8569　つくば市小野川 16-3）．
E-mail : hayashi@megw.mech.nitech.ac.jp

法として，Strip Element 法（SEM）を開発し，線音源から発せられた調和波に対する応答や，剥離や切り欠きがある場合の調和波の応答，また表面境界に水などの液体媒体が満たされている場合の調和波の応答などを求めた(10)-(12)．また，Liu T.らは同様の計算手法を用いて，逆伝ぱのラム波について詳しい説明を与えた(13)．

本研究では，この SEM の半解析的有限要素法のテクニックを取り入れ，実際の超音波非破壊検査で使用される斜角入射法によるラム波の励起シミュレーションを行った．そのために，斜角入射による板表面の応力負荷領域を含んだ SEM の定式化および離散周波数点データの集積による時間領域データ列の導出を行った．さらに，求められたデータ列を可視化することによって，斜角入射法によるラム波の励起状態および励起点から 200mm 離れた領域のラム波挙動を観察し，積層平板材料中のラム波について，いくつかの新たな知見を得た．

2. SEM によるラム波シミュレーション

本研究で用いられたラム波の数値計算では，まず平面ひずみを仮定した Strip Element 法（SEM）(10)-(12)により任意点の変位と応力を，周波数領域で求めた．SEM で求められた各離散周波数点における変位および応力の周波数領域データ列をすべて，コンピュータメモリに蓄積し，その後，逆フーリエ変換を施すことによって時間領域データ列として出力した．

2･1 SEM の定式化 繊維強化複合材料のように，板厚方向(図１中の y 軸方向)が異方性主軸となる N 個の異方性層要素から成る厚さ H の積層平板を考える．まず，角振動数ωの調和波を負荷した場合について定式化を行う．層要素は，上部境界と下部境界およびその中心線に節線をもつとする．図１において紙面に垂直方向（z 方向）に，負荷応力が一様であると考える時，z 方向の変位がゼロとなる平面ひずみ状態を仮定できる．

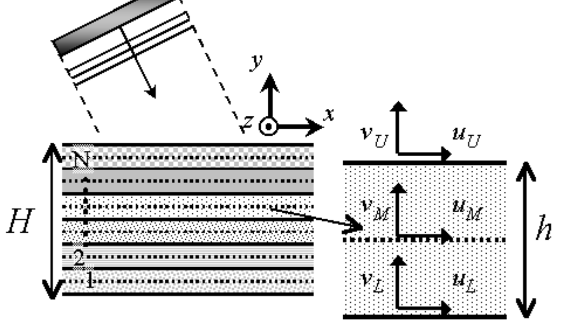

Fig.1 Coodinate system for a layered plate.

このとき応力ひずみ関係は，z 方向に関連していない９要素の剛性マトリクス

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (1)$$

で表せ，剛性マトリクスを $\mathbf{c}$，応力を$\boldsymbol{\sigma}$とひずみを$\boldsymbol{\varepsilon}$とするとは以下のようになる．

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{c}\boldsymbol{\varepsilon} \quad \cdots\cdots (2)$$

ここで

$$\boldsymbol{\sigma}=[\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy}]^T \quad \cdots\cdots (3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}=[\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{xy}]^T \quad \cdots\cdots (4)$$

である．ここで上付き添え字 Tは行列･ベクトルの転置を表す．このとき，x，y は１要素について，長手方向を x，厚み方向を y とし，層要素の厚さは h とする．ここで偏微分作用素 $\mathbf{L}$ と変位ベクトル $\mathbf{U}$ を次のようにおく．

$$\mathbf{L}=\mathbf{L}_x\,\partial/\partial x+\mathbf{L}_y\,\partial/\partial y \quad \cdots\cdots (5)$$

$$\mathbf{L}_x=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{L}_y=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (6)$$

$$\mathbf{U}=[u \quad v]^T \quad \cdots\cdots (7)$$

u，v は要素内の任意点での x，y 方向の変位である．このとき場の支配方程式は，層要素の密度をρとして

$$\rho\ddot{\mathbf{U}}-\mathbf{L}^T\mathbf{c}\mathbf{L}\mathbf{U}=0 \quad \cdots\cdots (8)$$

という波動方程式である．$\ddot{\mathbf{U}}$ は変位ベクトルの時間による２階微分を表す．y 方向の変位分布が２次式で近似できる場合，節線上の x，y 方向の変位を図１のように，u_L，v_L，u_M，v_M，u_U，v_U，で与えると，任意点の変位は，次のように書くことができる．ただし以下，変位および応力にはすべて調和振動項 $\exp(-i\omega t)$ を省略する．

$$\mathbf{U}(x,y)=\mathbf{N}(y)\mathbf{V}(x) \quad \cdots\cdots (9)$$

$$\mathbf{N}=\left[\left(1-3\frac{y}{h}+2\frac{y^2}{h^2}\right)\mathbf{I} \quad 4\left(\frac{y}{h}-\frac{y^2}{h^2}\right)\mathbf{I} \quad \left(-\frac{y}{h}+2\frac{y^2}{h^2}\right)\mathbf{I}\right] \quad \cdots\cdots (10)$$

$$\mathbf{V}=[u_L \quad v_L \quad u_M \quad v_M \quad u_U \quad v_U]^T \quad \cdots\cdots (11)$$

この層要素について，外部より節線に負荷する応力ベクトルを

$$\mathbf{T}=[\sigma_{xyL} \quad \sigma_{yyL} \quad \sigma_{xyM} \quad \sigma_{xyM} \quad \sigma_{xyU} \quad \sigma_{yyU}]^T \quad \cdots\cdots (12)$$

として与えると，仮想仕事の原理

$$\delta\mathbf{V}^T\mathbf{T} = \delta\mathbf{V}^T\mathbf{S} + \int_0^h \delta\mathbf{U}\left(\rho\ddot{\mathbf{U}} - \mathbf{L}^T\mathbf{cLU}\right)dy \quad \cdots\cdots (13)$$

から出発し，以下のような x に関する偏微分方程式が得られる[10].

$$\mathbf{T} = -\mathbf{A}_2\frac{\partial^2\mathbf{V}}{\partial x^2} + \mathbf{A}_1\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{A}_0\mathbf{V} - \omega^2\mathbf{MV} \quad \cdots\cdots (14)$$

ここで，$\mathbf{S}$ は境界から要素に作用する応力ベクトルである．また，$\mathbf{A}_2$，$\mathbf{A}_1$，$\mathbf{A}_0$，$\mathbf{M}$ は以下のように与えられる．

$$\mathbf{A}_2 = \frac{h}{30}\begin{pmatrix} 4\mathbf{D}_{xx} & 2\mathbf{D}_{xx} & -\mathbf{D}_{xx} \\ & 16\mathbf{D}_{xx} & 2\mathbf{D}_{xx} \\ sym. & & 4\mathbf{D}_{xx} \end{pmatrix} \cdots\cdots (15)$$

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3(\mathbf{D}_{xy} - \mathbf{D}_{yx}{}') & -4\mathbf{D}_{xy} & \mathbf{D}_{xy} \\ & 0 & -4\mathbf{D}_{xy} \\ asy. & & 3(\mathbf{D}_{xy} - \mathbf{D}_{yx}{}') \end{pmatrix} \cdots\cdots (16)$$

$$\mathbf{A}_0 = \frac{1}{3h}\begin{pmatrix} 7\mathbf{D}_{yy} & -8\mathbf{D}_{yy} & \mathbf{D}_{yy} \\ & 16\mathbf{D}_{yy} & -8\mathbf{D}_{yy} \\ sym. & & 7\mathbf{D}_{yy} \end{pmatrix} \cdots\cdots (17)$$

$$\mathbf{M} = \frac{\rho h}{30}\begin{pmatrix} 4\mathbf{I} & 2\mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ & 16\mathbf{I} & 2\mathbf{I} \\ sym. & & 4\mathbf{I} \end{pmatrix} \cdots\cdots (18)$$

ここで

$$\mathbf{D}_{xx} = \mathbf{L}_x{}^T\mathbf{cL}_x = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{13} \\ c_{31} & c_{33} \end{pmatrix} \cdots\cdots (19)$$

$$\mathbf{D}_{xy}{}' = \mathbf{L}_x{}^T\mathbf{cL}_y = \begin{pmatrix} c_{13} & c_{12} \\ c_{33} & c_{32} \end{pmatrix} \cdots\cdots (20)$$

$$\mathbf{D}_{yx}{}' = \mathbf{L}_y{}^T\mathbf{cL}_x = \begin{pmatrix} c_{31} & c_{33} \\ c_{21} & c_{23} \end{pmatrix} \cdots\cdots (21)$$

$$\mathbf{D}_{yy} = \mathbf{L}_y{}^T\mathbf{cL}_y = \begin{pmatrix} c_{33} & c_{32} \\ c_{23} & c_{22} \end{pmatrix} \cdots\cdots (22)$$

である．有限要素法の場合と同様に，N 個の層状要素について，境界における変位と応力の重複部分を重ね合わせることによって，

$$\mathbf{T}^t = -\mathbf{A}^t{}_2\frac{\partial^2\mathbf{V}^t}{\partial x^2} + \mathbf{A}^t{}_1\frac{\partial\mathbf{V}^t}{\partial x} + \mathbf{A}^t{}_0\mathbf{V}^t - \omega^2\mathbf{M}^t\mathbf{V}^t \cdots\cdots (23)$$

を得る．ここで，$\mathbf{T}^t$，$\mathbf{V}^t$ は要素数 M 個(M=4N+2)のベクトルであり，$\mathbf{A}^t{}_2$，$\mathbf{A}^t{}_1$，$\mathbf{A}^t{}_0$，$\mathbf{M}^t$ は MxM の正方行列である．ここで式(23)にラム波伝ぱ方向 x に関するフーリエ変換を施すことにより，

$$\tilde{\mathbf{T}}^t = \xi^2\mathbf{A}^t{}_2\tilde{\mathbf{V}}^t + i\xi\mathbf{A}^t{}_1\tilde{\mathbf{V}}^t + \mathbf{A}^t{}_0\tilde{\mathbf{V}}^t - \omega^2\mathbf{M}^t\tilde{\mathbf{V}}^t \quad (24)$$

という x 方向に伝ぱする波の波数 ξ を用いた M 個の連立方程式が得られる．$\tilde{\bullet}$ は x に関するフーリエ変換形を表す．さらに式(24)は，次のように書き換えられる．

$$\mathbf{p} = (\mathbf{A} - \xi\mathbf{B})\mathbf{d} \cdots\cdots (25)$$

ここで

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \omega^2\mathbf{M} - \mathbf{A}^t{}_0 & -i\mathbf{A}^t{}_1 \end{pmatrix},\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}^t{}_2 \end{pmatrix} \cdot (26)$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{V}}^t \\ \xi\tilde{\mathbf{V}}^t \end{pmatrix},\quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{\mathbf{T}}^t \end{pmatrix} \cdots\cdots (27)$$

である．このような変形により，波数 ξ は次の式の 2M 個の固有値として，容易に求めることができる．

$$(\mathbf{A} - \xi\mathbf{B})\mathbf{d} = 0 \cdots\cdots (28)$$

また各離散周波数点について波数 ξ を求めることによって，与えられた板材料に対する分散曲線が描ける．式(28)からは，固有値 ξ_m（m=1,2…2M）に対応する右固有ベクトル $\mathbf{\Phi}^R{}_m$（2Mx1）と左固有ベクトル $\mathbf{\Phi}^L{}_m$（1x2M）が計算できる．このとき，

$$\mathbf{X}^R = \left(\mathbf{\Phi}^R{}_1 \quad \mathbf{\Phi}^R{}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{\Phi}^R{}_{2M}\right),\quad \mathbf{X}^L = \begin{pmatrix} \mathbf{\Phi}^L{}_1 \\ \mathbf{\Phi}^L{}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{\Phi}^L{}_{2M} \end{pmatrix} \quad (29)$$

という 2Mx2M 行列を定義すると，式(25)の解が，次のように得られる．

$$\mathbf{d} = -\sum_{m=1}^{2M}\frac{\mathbf{\Phi}^L{}_m\mathbf{p}}{(\xi - \xi_m)B_m}\mathbf{\Phi}^R{}_m \cdots\cdots (30)$$

$$B_m = \mathrm{diag}(\mathbf{X}^L\mathbf{B}\mathbf{X}^R) \cdots\cdots (31)$$

ここで diag は対角要素を抽出した値を示す．したがって，節線上の変位は

$$\tilde{\mathbf{V}}^t = \mathbf{d}^{up} = -\sum_{m=1}^{2M}\frac{\mathbf{\Phi}^L{}_m\mathbf{p}}{(\xi - \xi_m)B_m}\mathbf{\Phi}^R{}_m{}^{up} \cdots\cdots (32)$$

と求められる．up はベクトル要素の上半分 M 個を抽出したベクトルであることを示す．

2・2 線音源のときの応答 音源が，2 次元断面において，板表面上の点(x_0,H)で与えられる場合，節負荷応力ベクトル $\mathbf{T}^t$ は，

$$\mathbf{T}^t = \mathbf{q}_0\delta(x - x_0) \cdots\cdots (33)$$

となり，上部表面にせん断応力 τ_{xy} および垂直応力 τ_{yy} が負荷されると考えると，

$$\mathbf{q}_0 = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yy}]^T \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (34)$$

で与えられる．式(33)を x についてフーリエ変換した後，式(27)に代入すると，節線上変位 $\tilde{\mathbf{V}}^t$ が次のように得られる．

$$\tilde{\mathbf{V}}^t = -\sum_{m=1}^{2M} \frac{\mathbf{\Phi}^L{}_m \mathbf{p}_0}{(\xi - \xi_m) B_m} \mathbf{\Phi}^R{}_m{}^{up} \exp(-i\xi x_0) \quad \cdots\cdots (35)$$

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{q}_0 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (36)$$

式(36)を逆フーリエ変換すると，

$$\mathbf{V}^t = -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{2M} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{\Phi}^L{}_m \mathbf{p}_0}{(\xi - \xi_m) B_m} \mathbf{\Phi}^R{}_m{}^{up} \exp\{i\xi(x - x_0)\}\, d\xi$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (37)$$

のように，任意の x 座標における変位ベクトルが得られる．この無限積分は留数定理を用いて解くことができ，$x - x_0 > 0$ では正の方向へ進む場合の波数を，$x - x_0 < 0$ では負の方向へ進む場合の波数を含む積分経路において解くことにより次式が得られる．

$$\mathbf{V}^t = \mp i \sum_{m=1}^{M} C_m{}^{\pm} \mathbf{\Phi}^R{}_m{}^{up\pm} \exp\{i\xi_m{}^{\pm}(x - x_0)\} \quad \cdots\cdots (38)$$

$$C_m{}^{\pm} = \frac{\mathbf{\Phi}^L{}_m{}^{\pm} \mathbf{p}_0}{B_m{}^{\pm}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (39)$$

ここで，上付き添え字の+は正方向の M 個の波数 $\xi_m{}^+$ に対応し，添え字の-は負方向の M 個の波数 $\xi_m{}^-$ に対応する場合の値を示す．一般に正方向に進む場合の波数とは，$\mathrm{Im}(\xi_m) > 0$ となる進行に伴う減衰を与える波数か，$\mathrm{Im}(\xi_m) = 0$ の場合，群速度が正になるような波数を指す．また，負方向に進む場合とは，$\mathrm{Im}(\xi_m) < 0$ であるか，$\mathrm{Im}(\xi_m) = 0$ かつ群速度が負である場合である．多くの場合，位相速度と群速度は同符号であるため，積分経路は図 2 の実線(正方向の場合)であるが，高次モードのカットオフ周波数近傍では，位相速度と群速度の符号が逆になっている領域が存在する[(1)(13)]．

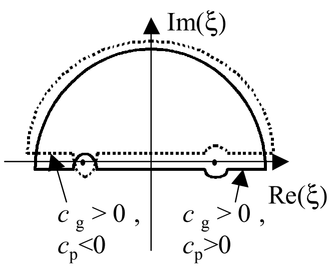

Fig.2 Contours for evaluating Eq.(37)
c_g>0 and c_p>0: solid, c_g>0 and c_p<0: dashed.

このとき，積分経路(正方向の場合)は図 2 の破線のようになるので注意が必要である．また式(38)は M 個のモードの重ね合わせで表現されており，C_m，$\mathbf{\Phi}^R{}_m{}^{up}$ はそれぞれ，m 番目のモードの振幅および板厚方向の変位分布を表している．

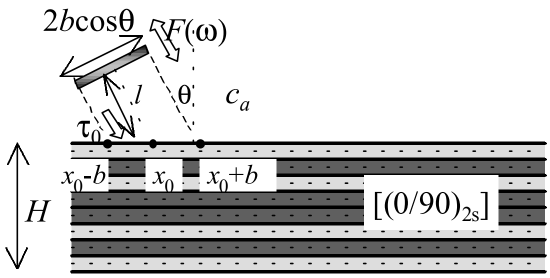

Fig.3 Configulation of the problem.

2･3　斜角入射のときの応答　斜角入射によるラム波の励起を考える．有限長 $2b\cos\theta$ の探触子が図 3 のように配置されているとする．探触子位置の振動（$F(\omega)$）は拡散することなく，直線で板表面に入射し，表面にせん断応力 $\tau_0\sin\theta$ および垂直応力 $-\tau_0\cos\theta$ を負荷するものとする．探触子の中心から超音波ビームが入射する板表面の x 座標位置を x_0，ビーム路程を l，入射角を θ，表面負荷領域を $2b$ とおく．このとき，節負荷応力ベクトル $\mathbf{T}^t$ は

$$\mathbf{T}^t = \begin{cases} \mathbf{q}_0 & |x - x_0| < b \\ 0 & |x - x_0| > b \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (40)$$

と書ける．ここで，式(34)で与えられる $\mathbf{q}_0$ 中のせん断応力 τ_{xy}，垂直応力 τ_{yy} は

$$\tau_{xy} = \tau_0 \cos\theta \qquad \tau_{yy} = -\tau_0 \sin\theta \quad \cdots\cdots\cdots (41)$$

で表される．振動子から発信した応力振動 $F(\omega)$は，板表面座標位置(x,H)において，

$$t_{\mathrm{delay}}(x) = l / c_a + (x - x_0)\sin\theta / c_a \quad \cdots\cdots\cdots (42)$$

の時間遅れをもって到達する．c_a は空気やウェッジといった結合媒体の音速である．それゆえ，表面負荷応力 τ_0 は

$$\tau_0 = F(\omega)\exp(i\omega t_{\mathrm{delay}}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (43)$$

となり，以下のように書き換えられる．

$$\tau_0 = \sigma_0 \exp\{i\xi_0(x - x_0)\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (44)$$

ここで，

$$\xi_0 = \frac{\omega}{c_a}\sin\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (45)$$

$$\sigma_0 = F(\omega)\exp(il\,\omega / c_a) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (46)$$

である．線音源の場合同様，式(40)をxについてフーリエ変換し，式(27)に代入の後，式(32)を逆フーリエ変換すると，

$$\mathbf{V}^t = -\frac{1}{2i\pi}\sum_{m=1}^{2M}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathbf{\Phi}^L{}_m\mathbf{p}_1}{(\xi-\xi_m)B_m}\mathbf{\Phi}^R{}_m{}^{up}\frac{\exp\{i\xi(x-x_0-b)\}}{\xi_0-\xi}d\xi + \frac{1}{2i\pi}\sum_{m=1}^{2M}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathbf{\Phi}^L{}_m\mathbf{p}_2}{(\xi-\xi_m)B_m}\mathbf{\Phi}^R{}_m{}^{up}\frac{\exp\{i\xi(x-x_0+b)\}}{\xi_0-\xi}d\xi \quad\cdots(47)$$

ここで，

$$\mathbf{p}_1 = \exp(i\xi_0 b)\mathbf{p}_0,\quad \mathbf{p}_2 = \exp(-i\xi_0 b)\mathbf{p}_0 \quad\cdots(48)$$

となる．式(38)の導出過程と同様に無限積分を解くと，次の３つの場合についてそれぞれ解が得られる．

$x < x_0 - b$の時，

$$\mathbf{V}^t = \sum_{m=1}^{M} C1_m{}^- \mathbf{\Phi}^R{}_m{}^{-up}\exp\{i\xi_m{}^-(x-x_0)\} - \sum_{m=1}^{M} C2_m{}^- \mathbf{\Phi}^R{}_m{}^{-up}\exp\{i\xi_m{}^-(x-x_0)\} \quad\cdots(49)$$

$x_0 - b < x < x_0 + b$の時，

$$\mathbf{V}^t = \sum_{m=1}^{M} C1_m{}^- \mathbf{\Phi}^R{}_m{}^{-up}\exp\{i\xi_m{}^-(x-x_0)\} + \sum_{m=1}^{M} C2_m{}^+ \mathbf{\Phi}^R{}_m{}^{+up}\exp\{i\xi_m{}^+(x-x_0)\} - \sum_{m=1}^{M} C0_m{}^+ \mathbf{\Phi}^R{}_m{}^{+up}\exp\{i\xi_0(x-x_0)\} - \sum_{m=1}^{M} C0_m{}^- \mathbf{\Phi}^R{}_m{}^{-up}\exp\{i\xi_0(x-x_0)\} \quad\cdots(50)$$

$x_0 + b < x$の時，

$$\mathbf{V}^t = -\sum_{m=1}^{M} C1_m{}^+ \mathbf{\Phi}^R{}_m{}^{+up}\exp\{i\xi_m{}^+(x-x_0)\} + \sum_{m=1}^{M} C2_m{}^+ \mathbf{\Phi}^R{}_m{}^{+up}\exp\{i\xi_m{}^+(x-x_0)\} \quad\cdots(51)$$

ここで

$$C0_m{}^{\pm} = \frac{\mathbf{\Phi}^L{}_m{}^{\pm}\mathbf{p}_0}{B_m{}^{\pm}(\xi_0-\xi_m{}^{\pm})} \quad\cdots(52)$$

$$C1_m{}^{\pm} = C0_m{}^{\pm}\exp\{i(\xi_0-\xi_m{}^{\pm})b\} \quad\cdots(53)$$

$$C2_m{}^{\pm} = C0_m{}^{\pm}\exp\{-i(\xi_0-\xi_m{}^{\pm})b\} \quad\cdots(54)$$

である．式(49)，(50)，(51)もまたM個のモードの重ね合わせで表現されており，$C1_m$，$C2_m$はm番目のモードの振幅を，$\mathbf{\Phi}^R{}_m{}^{up}$は板厚方向の変位分布を表す．また，式(47)の積分内の項は，ξ_mだけでなくξ_0も特異点として持っているので，ξ_0が積分経路内に含まれる場合，その留数を加える必要があり，それが，式(50)の第３項と第４項の補足解として現れる．ξ_0は表面の負荷応力の分布を示す波数であり，これらの項は，応力負荷部においては，板中の共振に関係なく，応力分布に相当する波形が励起することを表している．

2･4　ラム波伝ぱシミュレーション　任意点の変位$\mathbf{U}^t$は式(38)や式(49)～(51)の$\mathbf{V}^t$から，式(9)にしたがって求めることができる．$\mathbf{U}^t$は，ある周波数ωの調和振動に対する応答を表している．これをすべての周波数について重ね合わせると，時間領域での変位が得られる．

$$\mathbf{U}^t(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{U}^t(\omega)\exp(i\omega t)d\omega. \quad\cdots(55)$$

$\mathbf{U}^t(\omega)$は各離散周波数点における離散データ列として与えられるので，$\mathbf{U}^t(t)$は$\mathbf{U}^t(\omega)$の逆FFTによって得られる．任意点の変位より任意点の応力も導くことができる．実際には，まず任意の入射波波形$F(t)$を与え，そのフーリエ変換$F(\omega)$をとり，式(43)に代入した．すべての離散周波数点に対する応答$\mathbf{U}^t(\omega)$をコンピュータメモリに蓄積し，それから逆FFTによって$\mathbf{U}^t(t)$を得た．

3.　斜角入射によるラム波励起

前章で示したSEMによるラム波伝ぱの数値計算結果を可視化することによって，CFRP平板断面内の格子点変位および応力の時間変化について観察した．ここで計算に用いたCFRP板は板厚１mmの８層クロスプライ[$(0/90)_{2s}$]とし，繊維強化方向を1，繊維方向に垂直方向を２，３として，その材料定数を表１に示す．このCFRP板のラム波分散曲線は，式(28)の固有値ξを各周波数に対して求めることによって得られる．

Table 1 Material constants of CFRP

E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}	ν_{23}	ρ (g/cm^3)
142.17	9.255	4.795	0.3340	0.4862	1.90

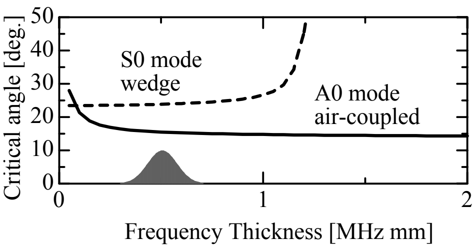

Fig.4 Dispersion curves for a CFRP and frequency spectrum used in the calculation.

図４は，空気（音速 345m/ｓ）および斜角ウェッジ（音速 2520m/ｓ）に対する臨界角で表示した分散曲線である．空気を音響結合媒体とする非接触超音波非破壊検査法の空気結合超音波法[(4)-(6)]および固体ウェッジを音響結合媒体とする斜角ウェッジ法で斜角入射する場合，これらの臨界角は，固有モード励起のための入射角に対応している[(1)(5)]．図４中に与えられている周波数スペクトルは，本報で用いた入射波の周波数分布を示しており，入射波は次式を用いた．

$$F(t) = \exp\left\{-2i\pi f_C (t-t_0) - r(t-t_0)^2\right\} \cdots\cdots (56)$$

ここで，中心周波数 $f_C = 0.5$ MHz，減衰係数 $r = 1.0\times10^{11}$ s^{-2}，時間遅れ $t_0 = 10\,\mu$s とした．ラム波を用いる非破壊検査では，高次のモードが観測波形に含まれない低周波数-板厚領域において，A0 モードや S0 モードといった基本モードが使用される．それゆえここでは，入射波の中心周波数を 0.5MHz に定めた．このとき中心周波数 0.5MHz に対応する臨界角は，空気結合超音波法の A0 モード励起の場合が 15.5°で，斜角ウェッジ法の S0 モード励起の場合が 24.0°である．そこでここでは空気結合超音波法で 15.5°で入射し，A0 モードを励起するケース A，斜角ウェッジ法で 24.0°で入射し S0 モードを励起するケース B，２つのケースのシミュレーションを行った．空気結合超音波法シミュレーションでは結合媒体である空気の音速 c_a=345m/s を用い，板表面に与えられる負荷応力は，垂直応力τ_{yy}のみとし，また斜角ウェッジ法では，結合媒体のウェッジの音速 c_a=2520m/s を用い，垂直応力τ_{yy}およびせん断応力τ_{xy}が板表面に負荷されているものとした．

シミュレーションで用いた幾何的パラメータは以下のとおりである．探触子直径 2$b$cosθ=10mm，入射角 θ=15.5°，24.0°，空中またはウェッジ中伝ぱ距離 l=10.0mm，発信点座標 x_0=0.0mm，板厚 H=1.0mm，層要素数 16（１層厚さ h=H/16=0.0625mm．すなわち，CFRP の１シート層を２層の要素で扱う）．層要素数が 32 の場合についても計算を試みたが，得られた数値の誤差はすべてにおいて 1%以下であり，今回のシミュレーションについては 16 層でも充分な精度を持っていると考えられる．

数値データの可視化領域として，ラム波の励起を観察するための探触子領域，さらに長距離伝ぱ後のラム波形態を観察するための遠隔領域の２領域について変位および応力を計算した．すなわち可視化領域は，I 探触子領域 x=-7mm から+23mm，II 遠隔領域 x=185mm から 215mm と定めた．数値計算の対象とする時刻は，ラム波波動が計算領域に存在しうる時刻を群速度理論値から判断することによって定めることができ，I の場合が，0~100μs，II の場合が 30μs~200μs とした．このとき，サンプリングデータに関するパラメータは，サンプリング周波数が 2.0MHz，サンプリングデータが，I の場合 200 点，II の場合 340 点であった．なお II の場合，30μs だけ遅れた時刻からデータを採取しているが，これは式(49)(50)(51)に $\exp(-i\omega t_1)$（ここで $t_1 = 30\,\mu$s）を乗ずることによって可能である．これらの計算は Pentium II 450MHz メモリ容量 128Mb のパーソナルコンピュータ上で十分実行可能であり，I で約 20 分，II で約 35 分の計算時間を要した．このことから，本手法が非常に短い時間でラム波伝ぱのシミュレーションを可能とし，積層平板中の探触子部分のラム波励起シミュレーションだけでなく，長距離を伝ぱするラム波のシミュレーションにも有効であることが分かる．

4. 数値計算および可視化の結果

計算結果として出力された各格子点上の変位（u_x, u_y）および応力（σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yy}）の時間領域データ列を，可視化ツール AVS（Adavanced Visual Systems 社）を用いて，時間ステップ毎に表示した．変位は格子点位置として表し，応力の強弱は HSV による赤から青の色変化として応力変化が分かりやすいよう適宜閾値を変えて表した．ここで赤が正，緑がゼロ，青が負の応力値であることを意味する．

図５に空気結合超音波法によって入射角 15.5°で入射した場合（ケース A）の，可視化領域 I，時刻 t=40.0μs における結果を示す．板断面の縦横比は，横方向を１/２に縮めて表示している．赤色の矢印は，板表面に負荷された応力分布を示しており，縦波の斜め入射によって，板表面に到達する応力に位相差が生じ，正弦曲線状の応力分布が形成されていることが分かる．A0 モードは，図上左から右（+x 方向）へ進行するにつれ，次第に成長し，応力負荷部分の右端までその振幅は増大している．このときの A0 モードの波長は，位相差があるものの負荷した応力分布に対応していることが分かる．これは，負荷応力分布が，材料固有のラム波共振波長にちょうど合ったため，波形が大きく増大されたことを意味する．

斜角ウェッジ法により，S0 モードを励起するケース B，領域 I，時刻 15.0μs の結果を図６に示す．板断面中心軸に対して対称な形状を持つ S0 モードの励起はわずかであり，A0 モードや他の高次モードが混じっ

たラム波が形成されている．これは応力負荷部分がS0 モードの波長に比べて小さすぎるからであると考えられる．赤矢印で示される負荷応力分布を見ると，1 波長分に満たない応力負荷状態である．これが S0 モードの成長には不十分であり，ケース A の A0 モードのように波形が増大しなかったのである（これについては参考文献(5)を参照）．

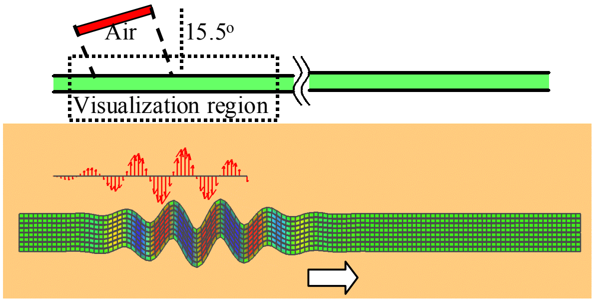

Fig.5 The snapshot of a waveform for A0 mode exitation. Case A, Region I, t=40.0μs, σ_{xy}

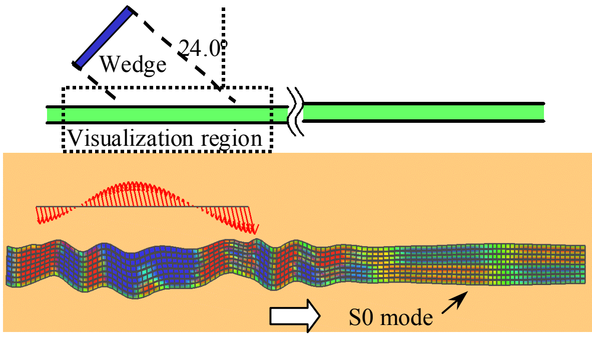

Fig.6 The snapshot of a waveform for S0 mode exitation. Case B, Region I, t=15.0μs, σ_{xy}

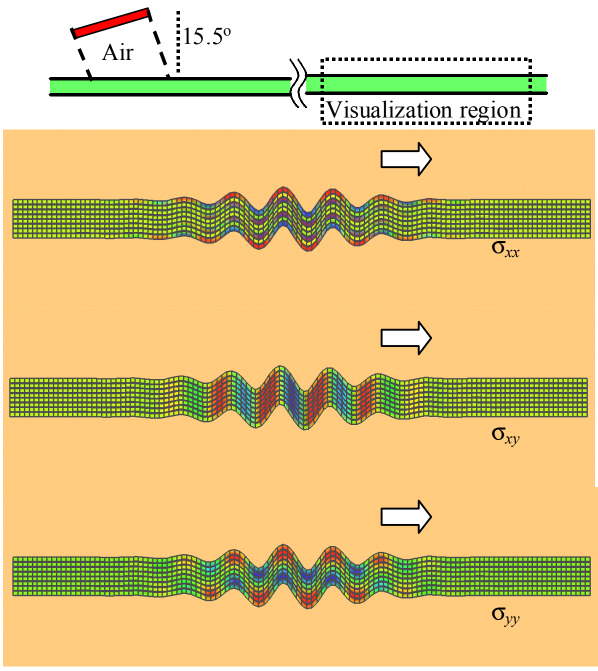

Fig.7 The snapshots of a waveform Case A, Region II, t=180.0μs.

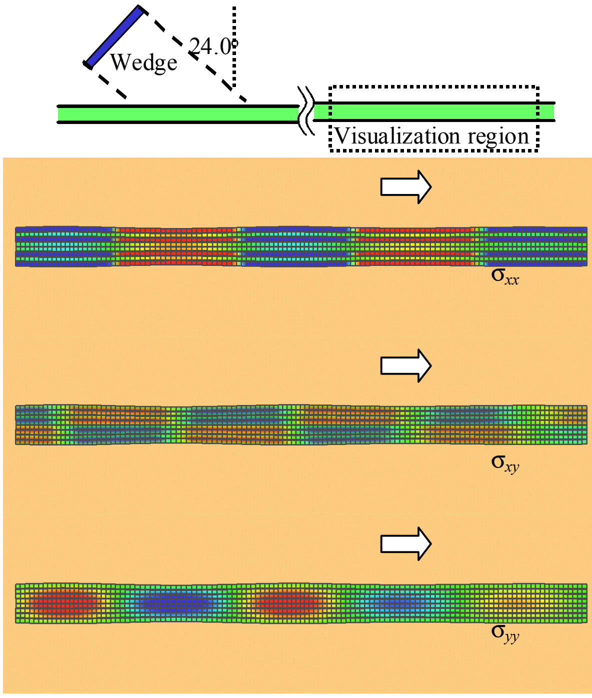

Fig.8 The snapshots of a waveform Case B, Region II, t=46.0μs.

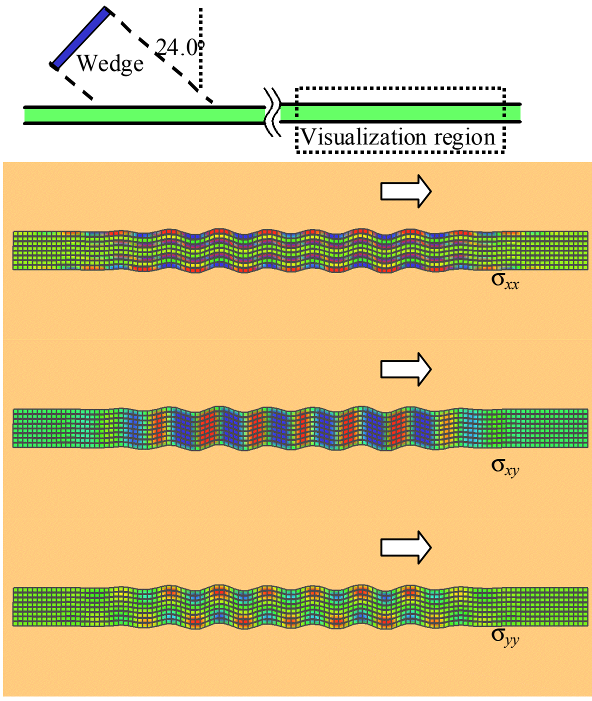

Fig.9 The snapshots of a waveform Case B, Region II, t=155.0μs.

応力負荷部分近傍では，多くのモードが混在しているため，ラム波各モードについての観察が行いにくい．そこで，ケースA，Bのそれぞれにおいて，遠隔領域IIで得られた結果を図７～図９に示す．図７はケースA，時刻180.0μsでのA0モードの伝ぱの様子を，応力σ_{xx}，σ_{xy}，σ_{yy}について表したものである．図８はケースB，時刻46.0μsでのS0モードの伝ぱを各応力について表した．また図９はケースB，時刻155.0μsでのA0モードの伝ぱを表した．S0モードとA0モードを比較すると，それぞれ応力分布に顕著な違いが見られた．まずx方向の垂直応力σ_{xx}について，S0モード波の図８では板厚方向に正負が同符号であり，A0モード波の図７，図９では，板厚中心軸に対して正負が逆転している．これは，それぞれのモードの形状からも類推することができ，伸縮波のS0モードと屈曲波のA0モードの違いを表すものである．板厚方向の垂直応力σ_{yy}についても同様のことが言える．ただし，σ_{yy}は各層の界面で応力の連続性を満たす必要があるが，σ_{xx}は応力が連続ではなく，各層の材料定数の違いから層状をなす応力の変化が見られた．一方，せん断応力σ_{xy}.は，S0モード波（図８）では板厚中心軸の上層と下層で正負の違いが見られたが，A0モード波（図７，図９）では，y方向には同符号であり，x方向で正負の応力変化が見られた．これらのS0モード，A0モードに見られるせん断応力分布は，均質材料でも見られる応力分布であるが，S0モードのせん断応力が層状に変化している点は顕著に異なる．

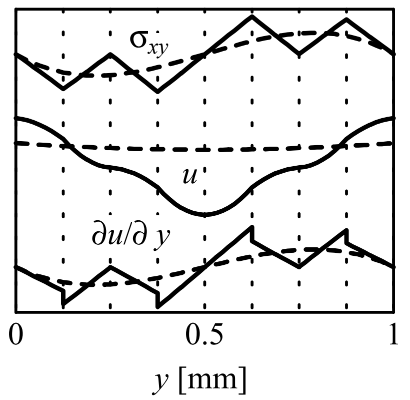

Fig.10 Distributions of σ_{xy}, u and $\partial u/\partial y$ in a crossply plate (solid) and in a homogenious plate(dashed) –in the case of S0 mode propagation-.

図１０に，表１で与えられたクロスプライ平板におけるS0モードのせん断応力，x方向の変位およびx方向変位のy方向への微分を示す．あわせて，一方向強化平板材料(均質平板)中のS0モードの場合のそれぞれの分布を破線で示す．クロスプライ材の場合は，層状に変化する材料定数のために，応力分布が複雑に変化する．これはx方向の変位uのy方向への傾き$\partial u/\partial y$に非常によく対応して変化している．すなわち$\sigma_{xy}=c_{33}\varepsilon=c_{33}(\partial u/\partial y+\partial v/\partial x)$で表される項のうち$\partial u/\partial y$の影響を大きく受けていることが分かる．

5. 結言

半解析的有限要素法であるStrip Element法を用いた応力負荷部分を含むラム波伝ぱの定式化とシミュレーション計算を行い，本手法が，層状に材料特性の変化する積層平板中のラム波励起および長距離伝ぱしたラム波のシミュレーションに有効であることを示した．さらに，得られた数値データ列を可視化することによって，以下のことが分かった．

（１）斜角入射法によるラム波の励起には，ラム波が成長するための充分な応力負荷領域が必要であり，今回の設定条件ではA0モードは空気結合超音波法を用いれば，大きく励起するが，S0モードは波長が長いため，A0モードやその他の高次モードが混在して励起した．

（２）層状に材料特性の変化する積層平板において，A0モードではσ_{xx}に，S0モードではσ_{xx}およびσ_{xy}に層状の応力変化が見られた．

文　献

(1) Rose J. L., Ultrasonic waves in solid media, (1999) Cambridge

(2) 山中一司，非破壊検査 **49**-5 (2000),292

(3) Cho H., Sato H., Takemoto M., Sato A. and Yamanaka K., *Jpn J. Appl. Phys.*, **35**-5 (1996), 3062

(4) Shindel D. W. and Hunchins D. A., *Ultrasonics* **33**-1 (1995), 11

(5) 林高弘，川嶋紘一郎，鈴木一貴，新井和吉，遠藤茂寿，非破壊検査，**50**-2(2001), 108

(6) 林高弘，川嶋紘一郎，遠藤茂寿，日本非破壊検査協会，新素材シンポジウム講演論文集，(2000), 7

(7) Murase M. and Kawashima K., *Review of progress in Quantitative Nondestructive Evaluation* (2000)

(8) 林高弘，琵琶志朗，Choi J. C.，遠藤茂寿，日本機械学会論文集 **65**-630 (1999)，210

(9) Hayashi T. Endoh S., *Ultrasonics*, **38** (2000), 770

(10) Liu G. R. and Achenbach J. D., *J. Appl Mech.*, **61** (1994), 270

(11) Liu G. R, Xi Z. C., Lam K. Y. and Shang H. M., *J. Appl. Mech.* **66** (1999), 894

(12) Wang Y. Y., Lam K. Y., Liu G. R., Reddy J. D. and Tani J., *JSME International* **40**-4 (1997), 398

(13) Liu T., Karunasena W, Kitipornchai S and Veidt M., *J. Acoust. Soc. Am.* **107**-1, (2000), 306