



Title	コンデンサー内の誘電体のエネルギーとマクスウェルの応力
Author(s)	佐々木, 祥介; 岩成, 唯夫; 北野, 保行
Citation	大学の物理教育. 2020, 26(2), p. 66-70
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/88663
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

コンデンサー内の誘電体のエネルギーとマクスウェルの応力



佐々木祥介
岩成唯夫

元静岡理科大学
元島根県立高等学校

北野保行

島根大学名誉教授

1. はじめに

電磁気学の講義で、電磁場のエネルギー密度やマクスウェルの応力などは、エネルギー保存則や運動量保存則のなめとなっています¹⁻⁴⁾。しかし具体例で記述した文献が少なく、イメージが明確に描けない学生が多いのが現状です。そこで、誘電体を含むコンデンサーの系で、それらを具体的に考察し、理解の一助としたいと思います。

2. コンデンサー内の電荷分布

2つの平行な同じ形の平面電極 A と B の間に、誘電率 ε の誘電体が挟まれている通常のコンデンサーを考えます。電極の面積を S 、電極板間の距離を d とします。距離 d は、極板の径に比べて非常に小さく極板の端から漏れる電場の影響が無視できるとします。図 1 に、コンデンサーの断面図を描きます。紙面内に、原点、 x 軸、 y 軸をとり、 z 軸は紙面に垂直で、表から裏の方向です。

電極 A に電荷 Q を、下部電極 B に電荷 $-Q$ を与えたときの電場を考えます。電極金属を斜線で示し、誘電体をクロス線で表しました。金属の表面電荷には、厚みがあります。光電効果の仕事関

数から閉じ込めポテンシャルがあることは明白です。その傾きによる力と、電場による力のつり合いで表面電荷が分布します。電極の表面電荷や誘電体の表面電荷も、それぞれの物質に応じた厚みを持っています。

図 1 に電極の表面電荷を赤色で、誘電体の分極電荷を青色で描きました⁵⁾。厚みがわかるように極端に拡大しています。電極 A 下面の位置 y ($y_A \leq y \leq y_0$) での電荷密度を $\rho(y)$ 、誘電体上部表面の位置 y ($y_0 \leq y \leq y_1$) での分極電荷密度を $\rho'(y)$ 、分極電荷総量を $-q$ と書きます。下部 ($y_2 \leq y \leq y_3$) の分極電荷総量は q となります。表面電荷の分布は、一般形で議論します。 y 座標値が y_0, y_1, y_2, y_3 の場所での電場の値は、 $\rho(y), \rho'(y)$ の関数形には依存しません。

また、分極電荷 $\rho'(y)$ と分極ベクトル $\mathbf{P}$ の関係は、 x, z 方向の一様性から、下式で与えられます。

$$\rho'(y) = -\text{div } \mathbf{P} = -dP_y/dy \quad (1)$$

3. 電場の計算とその位置変化

図 2 に、表面電荷付近を拡大し、閉曲面を描きました。この下面の位置は y で、電極に平行な面です。上面は金属中の電場のない部分にある平行面です。側面はコンデンサーの側面です。この閉曲面内に含まれる電荷量 $\eta(y)$ は、 $\rho(y)$ を積分した (2) 式となります。

$$\eta(y) = S \int_{y_A}^y \rho(y) dy \quad (2)$$

閉曲面上では、上面と側面の電場が無視でき、下面だけから電場が出ていき、ガウスの法則より、電場は次のように求まります。

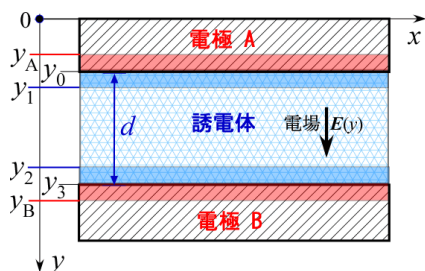


図 1 誘電体を挟んだコンデンサー

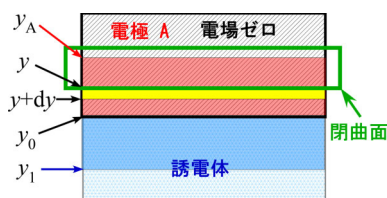


図2 表面電荷付近の拡大図

$$E(y) = \frac{\eta(y)}{\epsilon_0 S}, \quad y_A \leq y \leq y_0 \quad (3)$$

これで、電極下面内の下向き電場の値が求まりました。

$y_0 \leq y \leq y_1$ の場合、閉曲面内にある分極電荷量 $\eta'(y)$ は、 $\rho'(y)$ を積分して

$$\eta'(y) = S \int_{y_0}^y \rho'(y) dy = -SP_y \quad (4a)$$

となります。2 番目の等号は、(1) 式から導かれます。電極 A 下部の電荷 Q と合わせると、

$$\text{電荷量} = Q + \eta'(y) \quad (4b)$$

となります。ガウスの法則から電場は

$$E(y) = \frac{1}{\epsilon_0 S} (Q + \eta'(y)), \quad y_0 \leq y \leq y_1 \quad (5)$$

と求まります。ここで、境界では分布関数 ρ, ρ' の形によらず

$$\eta(y_0) = Q, \quad \eta'(y_1) = -q \quad (6)$$

となります。誘電率の定義から、 $y = y_1$ での電場が $y = y_0$ での電場の ϵ_0/ϵ 倍ですので、

$$\frac{E(y_1)}{E(y_0)} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \quad (7)$$

となります。(3), (5), (6) 式を (7) 式に代入すると、次のように q が決まります。

$$q = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} Q \quad (8)$$

領域 $y_1 \leq y \leq y_2$ では 電場は一定で、

$$E(y) = \frac{Q}{\epsilon S}, \quad y_1 \leq y \leq y_2 \quad (9)$$

です。領域 $y_2 \leq y \leq y_B$ の電場は、対称性からわかりますので省略します。

一様分布の場合、(3), (5) 式は、領域 $y_A \leq y \leq y_1$ では

$$E(y) = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \frac{y - y_A}{y_0 - y_A}, \quad y_A \leq y \leq y_0 \quad (10)$$

$$E(y) = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \left(1 - \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \right), \quad y_0 \leq y \leq y_1 \quad (11)$$

となります。 $y_1 \leq y \leq y_2$ では、(9) 式と同じになり一定値です。領域 $y_2 \leq y \leq y_B$ では、

$$E(y) = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon} + \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \frac{y - y_2}{y_3 - y_2} \right), \quad y_2 \leq y \leq y_3 \quad (12a)$$

$$E(y) = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \left(1 - \frac{y - y_3}{y_B - y_3} \right), \quad y_3 \leq y \leq y_B \quad (12b)$$

となります。分布が一樣なこの場合の電場を図3に示します。

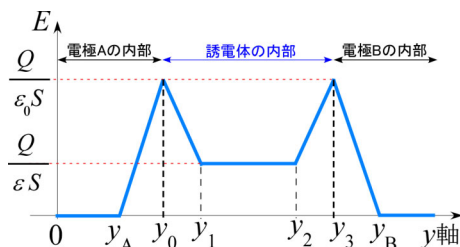


図3 (一様分布のとき) コンデンサー内の電場

4. コンデンサーの全エネルギーの計算

コンデンサーのエネルギーを4通りの方法で求めます。

(方法1) 電気工学的手法

表面電荷や分極電荷の厚みは、 d に比べて無視できるとして、極板間電位差 V は、(9) 式 $\times d$ で、 $V = Qd/(\epsilon S)$ です。電極 B から A へ微小電荷 dQ を運ぶときのエネルギーは VdQ なのでコンデンサーの全エネルギー X_1 は

$$X_1 = \int_0^Q V dQ = \frac{Q^2 d}{2\epsilon S} \quad (13)$$

となります。

(方法2) 電磁場のエネルギーから求める方法

電束密度を $\mathbf{D}$ 、磁場を $\mathbf{H}$ 、磁束密度を $\mathbf{B}$ と書くとき、電磁場のエネルギー密度は、

$\frac{1}{2}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$ です。電束密度 $\mathbf{D}$ は、誘電体内部では

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (14)$$

と表せますので、単位体積あたりの静電場のエネルギー W は、

$$W = \frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}) \quad (15)$$

となります。 d が表面電荷厚より十分大きいとしているので、表面電荷内の静電場のエネルギーを無視できます。これを無視しない精密な計算も可能ですので興味のある方は試みてください。

体積 Sd の極板間の電場と分極の各エネルギー $U_{\text{電場}}$ と $U_{\text{分極}}$ は、(15) 式より、

$$U_{\text{電場}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 Sd = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 Q^2 d}{\epsilon^2 S} \quad (16)$$

$$U_{\text{分極}} = \frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E} Sd = \frac{1}{2} \frac{(\epsilon - \epsilon_0) Q^2 d}{\epsilon^2 S} \quad (17)$$

となります。(16) 式と (17) 式を加えて、コンデンサーの全エネルギー X_2 は、次のように求まります。

$$X_2 = U_{\text{電場}} + U_{\text{分極}} = \frac{Q^2 d}{2\epsilon S} \quad (18)$$

この値は、方法 1 の結果 X_1 と一致しています。
(方法 3) 電極電荷・分極電荷の位置エネルギーと誘電体の分極エネルギーから求める方法

図 2 で $y \sim (y+dy)$ の間の電荷にはたらく力 dF は

$$dF = E(y) \rho(y) S dy \quad (19)$$

なので、電極 A の電荷 Q にはたらく力 F_A は、(2), (3) 式を用いると次のようになります。

$$F_A = \int_{y_A}^{y_0} E(y) \rho(y) S dy = \int_0^Q \frac{\eta}{\epsilon_0 S} d\eta = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} \quad (20)$$

誘電体上部の分極電荷 $-q$ にはたらく力 $F_{\text{上部分極電荷}}$ は

$$\begin{aligned} F_{\text{上部分極電荷}} &= \int_{y_0}^{y_1} E(y) \rho'(y) S dy \\ &= \int_0^{-q} \frac{(Q+\eta')}{\epsilon_0 S} d\eta' = \frac{\epsilon_0^2 - \epsilon^2}{\epsilon^2} \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} \quad (21) \end{aligned}$$

となります。2つの力 F_A と $F_{\text{上部分極電荷}}$ は、電荷分布 $\rho(y)$ と $\rho'(y)$ の形によらず決まります。 Q を一定に保った状態で極板 A を B から離し、 $0 \rightarrow d$ と動かしたときの仕事を求めます。電荷 Q の位置エネルギー α_A は、

$$\alpha_A = F_A d = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 S} \quad (22)$$

となります。同様に誘電体上部の分極電荷 $-q$ の位置エネルギー $\alpha_{\text{分極電荷}}$ は、次式になります。

$$\alpha_{\text{分極電荷}} = F_{\text{上部分極電荷}} d = \frac{\epsilon_0^2 - \epsilon^2}{\epsilon^2} \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 S} \quad (23)$$

この2つの力による位置エネルギーを足しても、コンデンサーの全エネルギーと一致しません。その理由は、誘電分極の内部エネルギー $\alpha_{\text{分極}}$ を考慮していないためです。その単位体積あたりの値は $(1/2)PE$ で、誘電体の体積 Sd をかけると、

$$\alpha_{\text{分極}} = \frac{1}{2} \frac{(\epsilon - \epsilon_0) Q^2}{\epsilon^2 S^2} Sd = \frac{(\epsilon - \epsilon_0) Q^2 d}{2\epsilon^2 S} \quad (24)$$

となります。これら3つのエネルギー(22), (23), (24) 式を足すと、方法 3 の全エネルギー X_3 が求まります。

$$X_3 = \alpha_A + \alpha_{\text{分極電荷}} + \alpha_{\text{分極}} = \frac{Q^2 d}{2\epsilon S} \quad (25)$$

以上で、 $X_1 = X_2 = X_3$ が確認できました。第 4 の方法(方法 4)での計算を次節で行います。

5. マクスウェルの応力と体積力(方法 4)

マクスウェルの応力 T は、テンソル量で、3行3列の行列で記述されています¹⁻⁴⁾。

$T =$

$$\begin{pmatrix} D_x E_x - \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} & D_x E_y & D_x E_z \\ D_y E_x & D_y E_y - \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} & D_y E_z \\ D_z E_x & D_z E_y & D_z E_z - \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \end{pmatrix} \quad (26)$$

法線ベクトルが $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ の面で分けられる2つの領域を考えます。単位ベクトル $\mathbf{n}$

の根元側の領域が、ベクトル $\mathbf{n}$ の矢先側の領域に及ぼす単位面積あたりの力 $\mathbf{F}$ は、

$$\mathbf{F} = \left(\sum_{j=x}^z T_{xj} n_j, \sum_{j=x}^z T_{yj} n_j, \sum_{j=x}^z T_{zj} n_j \right) \quad (27)$$

となります。和の記号 $\sum_{j=x}^z$ は、 j が x, y, z の 3 成分の和をとることを意味します。図 1 のような座標軸では、電場は y 成分しかなく、 T は、

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} D_y E_y & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} D_y E_y & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} D_y E_y \end{pmatrix} \quad (28)$$

となります。面の法線ベクトルを $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$ にとると

$$\mathbf{F} = \left(0, \frac{1}{2} D_y E_y, 0 \right) \quad (29)$$

となります。分極 P_y を (4a) 式から求め、電荷が一様分布の場合の $D_y, P_y, \epsilon_0 E_y$ を図 4 に示します。

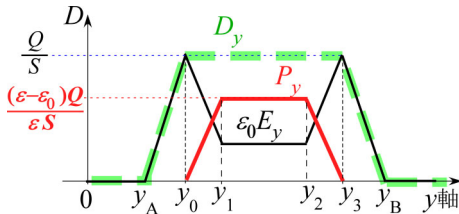


図 4 電束密度 D_y と分極 P_y の変化

面を通す応力 $\mathbf{F}$ が位置変化しない場合は、各部にはたらく単位体積あたりの体積力 f はゼロです。 y 方向の体積力 f は、(14) 式を考慮して (29) 式の $\mathbf{F}$ の微分値より

$$f = \frac{1}{2} \frac{\partial(\epsilon_0 E_y E_y + P_y E_y)}{\partial y} \quad (30)$$

となります。電場部分と分極部分に分けますと、

$$f_{\text{電場}} = \epsilon_0 E_y \frac{\partial E_y}{\partial y},$$

$$f_{\text{分極}} = \frac{P_y}{2} \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{E_y}{2} \frac{\partial P_y}{\partial y} \quad (31)$$

となります。これらの体積力を各領域に分けて計算します。

●領域 1 $y_A \leq y \leq y_0$ での体積力

この領域には分極がないので、(2), (3) 式より、

$$f(y) = f_{\text{電場}} = \frac{\eta(y)\rho(y)}{\epsilon_0 S} \quad (32)$$

となります。

●領域 2 $y_0 \leq y \leq y_1$ での体積力

(4a), (5) 式より

$$f_{\text{電場}} = \frac{(Q + \eta'(y))\rho'(y)}{\epsilon_0 S} \quad (33)$$

となります。分極ベクトル $\mathbf{P}$ は、(4a) 式より $P_y = -\eta'(y)/S$ です。(31) 式に、これを代入して微分すると、

$$\begin{aligned} f_{\text{分極}} &= -\frac{\eta'(y)\rho'(y)}{2\epsilon_0 S} - \frac{(Q + \eta'(y))\rho'(y)}{2\epsilon_0 S} \\ &= -\frac{(Q + 2\eta'(y))\rho'(y)}{2\epsilon_0 S} \end{aligned} \quad (34)$$

となります。総体積力 $f = f_{\text{電場}} + f_{\text{分極}}$ は、(33) 式と (34) 式の和で、

$$f(y) = \frac{Q\rho'(y)}{2\epsilon_0 S}, \quad y_0 \leq y \leq y_1 \quad (35)$$

と求まります。

●領域 3 $y_1 \leq y \leq y_2$ の体積力

(9)式より

$$f(y) = 0, \quad y_1 \leq y \leq y_2 \quad (36)$$

となります。

他の領域も同様に計算できます。図 5 に、一様分布の場合の体積力をグラフで表します。

領域 1 での体積力の合計は、(32) 式を積分することで、

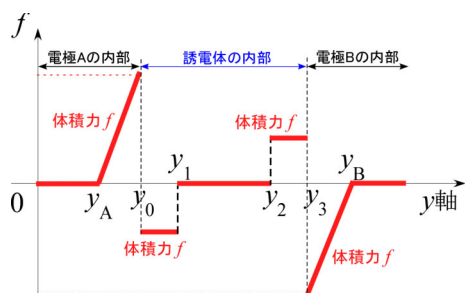


図5 コンデンサー内の体積力 $f(y)$

$$\begin{aligned} F_{\text{領域1}} &= \int_{y_A}^{y_0} \frac{\eta(y)\rho(y)}{\epsilon_0} dy \\ &= \frac{1}{2} \frac{(\eta(y_0))^2}{\epsilon_0 S} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 S} \end{aligned} \quad (37)$$

と求まり, (20) 式の力 F_A と一致しています.

領域 2 の体積力の合計は, (33), (34) 式を積分して,

$$\begin{aligned} F_{\text{領域2電場部}} &= \int_{y_0}^{y_1} \frac{(Q + \eta'(y))\rho'(y)}{\epsilon_0} dy \\ &= \frac{2Q\eta'(y_1) + (\eta'(y_1))^2}{2\epsilon_0 S} \\ &= -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} \frac{\epsilon^2 - \epsilon_0^2}{\epsilon^2} \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} F_{\text{領域2分極部}} &= -\frac{Q\eta'(y_1) + (\eta'(y_1))^2}{2\epsilon_0 S} \\ &= \frac{Q^2}{2\epsilon^2 S} (\epsilon - \epsilon_0) \end{aligned} \quad (39)$$

と求まります. (38) 式は (21) 式と合致し, (39) 式は (24) 式の $\alpha_{\text{分極}}$ を d で割った値です. 結局, 方法 3 で求めた 3 つの力は, (37)~(39) 式と一

致し, 3 つの体積力に対応しています. これら 3 つの体積力の総和は,

$$F_{\text{領域1}} + F_{\text{領域2電場部}} + F_{\text{領域2分極部}} = \frac{Q^2}{2\epsilon S} \quad (40)$$

となります. この力に電極間距離 d をかけると, 方法 4 での全エネルギー X_4 が求まります.

$$X_4 = \frac{Q^2 d}{2\epsilon S} \quad (41)$$

この結果は, $X_1 \sim X_3$ と一致しています.

6. おわりに

体積力は, 電場が変動する薄い領域 $y_A \leq y \leq y_1$ と $y_2 \leq y \leq y_B$ に存在することがわかりました. エネルギーは, 電極内 $y_A \leq y \leq y_0$ などにも分布し, $y_A \leq y \leq y_B$ の広い範囲に広がっています. このように, 表面電荷層内の電場が, 重要な役割を演じています. 近年, 電気二重層コンデンサーなど, 表面電荷層の解析が大切になってきました. 学生が電磁場のエネルギー密度やマクスウェルの応力, および, 表面の構造を深く理解し, 未来の研究に役立てていただければ本望です.

参考文献および注

- 1) 砂川重信『理論電磁気学』紀伊屋書店 (1998).
- 2) David J. Griffiths *Introduction to Electrodynamics* Benjamin Cummings (2008).
- 3) R.P. Feynman R. Leighton and M. Sands *Lectures on Physics (Volume II)* Addison Wesley (1977). §27-3, §31-8.
- 4) 今井功『電磁気学を考える』サイエンス社 (1992).
- 5) オンライン版では色がついています.

連絡先 E-mail: zazensou@gmail.com

