



Title	円柱の転がり運動
Author(s)	佐々木, 祥介; 南波, 陽平; 岩成, 唯夫 他
Citation	大学の物理教育. 2021, 27(1), p. 26-30
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/88664
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

円柱の転がり運動



佐々木祥介
岩成唯夫

元静岡理工科大学
元島根県立高等学校

南波陽平
北野保行

島根県立高等学校
島根大学名誉教授

1. はじめに

円柱が水平な床面を滑ることなく転がる問題は、平易な力学の例題として、教えられています。通常は、円柱も床も剛体として扱い、床からの接触抗力を考え、滑ることなく転がる条件下で、並進と回転の連立微分方程式を解いています。その解は速度一定の永久運動となります。この分野を教えておられる先生方から、転がり摩擦があることは知っているが、剛体模型では、いくら接触部に力を入れても、停止までの距離も時間も無限大となり、気持ちが悪いとの相談を受けてきました。そうなる理由は、現実の物体は剛体ではなく、転がり摩擦トルクがあり、そのことを考えていないためです。

静止時の接触応力は、1881年にヘルツ¹⁾が分析しました。対称な形状の物体の接触では、接触部中央から対称な位置での応力は、同一の値となり、回転トルクは生じません。このヘルツの接触応力が回転時にどうなるかを分析します。その結果、応力-ひずみの履歴効果により、転がり摩擦トルクが生じます。これ以外にも、円柱と床の表面にある凹凸が生み出す転がり摩擦トルクも存在します。これらの転がり摩擦トルクを基礎とし、回転運動の基本構造を明らかにします。回転体は、ほとんどすべての機械に組み込まれており、大学の物理教育で、これを明確にしておくことは大切です。

2. 接触力による転がり摩擦トルク

円柱と床の接触部を極端に拡大したのが図1です。左側は静止時で右側は回転時です。下部に垂直応力の分布のグラフを重ねました。鉛直上向き

に z 軸、進行方向に x 軸、紙面手前から裏面に向き y 軸をとります。円柱の半径を a とします。単位面積当たりの z 方向の力(応力)を f_z と書くと、 z 方向の応力の総量は接地面全体で積分して、

$$\iint f_z(x, y) dx dy = mg, \quad (1)$$

となり、円柱の全重力を支えています。この静止時の考察は、ヘルツによってなされました。 x_c の左右両側で応力の分布は対称になり、重心回りのトルクはゼロです。

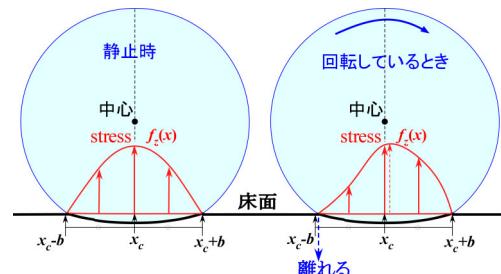


図1 静止時と回転時での床面からの応力の違い

回転時は、ひずみ-応力曲線には履歴効果が生まれ、分布が対称にならず、摩擦トルクが生じます。ここでは、定常で再現性のある現象を分析します。1回転ごとに塑性変形が進行する場合は除外します。何万回もの回転後、定常になった再現性のある領域を材料工学用語では、なじみ状態といいます。

その高速変形のひずみ-応力履歴曲線を図2に示します²⁾。応力ゼロで、塑性変形のひずみが残っています。回転体の特定な点が床と接触する際、図2の点Aから始まり、接触衝撃(impact)

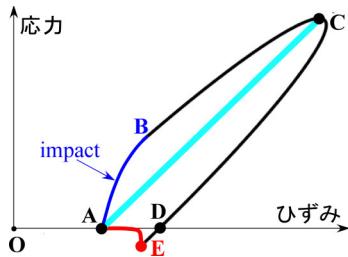


図 2 なじみ状態での高速変形ひずみ-応力の関係. 点 A : 残留ひずみ, 直線 AC は準静的な変化の場合.

を受け応力が急上昇し, ひずみと応力が増え点 C で最大応力を経て, 点 D に到達し床から離れます. 粘着力により点 E ではがれるという研究もあります. どちらの場合も, はがれてから接触時間の約 100 倍以上の間, 接触せず, ひずみが緩和し, 一回転して点 A に戻ります. このような回転は, 鉄道車輪やボールベアリングの研究で再現性のある実験が行われており, 一例を 4 節で, 紹介します.

さて, 図 2 の履歴 A→B→C→D→A により, 接地部での応力 f_z の分布が変化した状態を図 1 の右下側に描きました. 接地部中央位置より右側(進行方向)では, 回転時の垂直応力が静止時より大きく, 左側(進行方向と反対)では静止時より小さくなっています. この差が(2)式のトルク $N_{\text{接触}}$ を生みます(右回りを正とします).

$$N_{\text{接触}} = - \iint (x - x_C) f_z(x, y) dx dy. \quad (2)$$

応力 $f_z(x, y)$ は重力 mg に比例し, $x - x_C$ の下限上限幅も, 半径 a が大きくなると増えますので, $N_{\text{接触}}$ は mga と無次元数 k の積として表せます.

$$N_{\text{接触}} = -mga k. \quad (3)$$

図 2 でのひずみ増加時と減少時の応力の乖離は, ひずみの変化速度が大きくなると増加します.

これ以外に, 現実の円柱体と床には, 完全な円形や完全な水平面からはずれた凹凸が存在します. 止まっている円柱体は, そのくぼみのどれかにはまって, 重心が局所最低位置にあります. それを回転して動かすには, 転がり静止摩擦トルクが必要です. また, 回転時にも, この凹凸の影響で重

心が上下に微動し, 角との上下衝突によるエネルギー散逸が発生し, 転がり摩擦トルク $N_{\text{凹凸}}$ を生じます. 全体の転がり摩擦トルク $N_{\text{摩擦}}$ は, 両者を合わせて,

$$N_{\text{摩擦}} = N_{\text{凹凸}} + N_{\text{接触}}, \quad (4)$$

となり, mga と無次元数の積として表せます. この無次元数は, 接触応力では速度とともに大きくなることを考慮しますと, 全体の転がり摩擦トルクも,

$$N_{\text{摩擦}} = -mga(k_0 + k_1 v + k_2 v^2 + \dots), \quad (5a)$$

のような一般形を持っています. 係数 $k_0, k_1, k_2 \dots$ は, 回転体や床面の性質によって決まります. 普通に入手できる再現性の確実な実験値は, 新幹線での測定値です^{4,5)}. 車輪レール間や車軸ペアリングなどでの転がり摩擦トルクは, 速度 v の 2 次以上の項は無視できることがわかっています. そこで,

$$N_{\text{摩擦}} = -mga(k_0 + k_1 v), \quad (5b)$$

この転がり摩擦トルクを使って, 円柱の回転運動を分析します.

3. 円柱の運動方程式とその解

円柱が水平な面を滑ることなく転がる運動を図 3 に描きました. 原点を $t = 0$ での接地点とし, y 軸は紙面に垂直で, 表から裏への方向です. 拘束力 $\mathbf{R} = (R_x, R_y, R_z)$ が接地点にはたらいています.

上下動は微小で無視でき, 拘束力の z 成分 R_z と重力が均衡しています. 滑らない場合は, 円弧の長さ $a\theta$ が距離 x と一致し, 速度 $v = dx/dt$ と

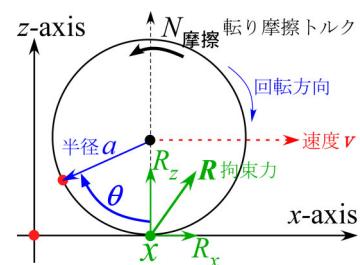


図 3 床面を円柱が転がる運動. 回転体にはたらく力と摩擦トルクの概略図.

角速度 $\omega = d\theta/dt$ との関係は,

$$v = \omega r, \quad (6)$$

です。円柱の並進運動と回転運動の方程式は,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = R_x, \quad (7)$$

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = N_{\text{摩擦}} - R_x a. \quad (8)$$

ただし、 $I = ma^2/2$ は円柱の重心まわりの慣性モーメントです。 (7) 式と (8) 式から R_x を消去すると、次式になります。

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{ma}{ma^2 + I} N_{\text{摩擦}}. \quad (9)$$

転がり摩擦トルクのない場合

通常の教科書³⁾では、 $N_{\text{摩擦}} = 0$ なので、 (9) 式より等速度運動になります。その解を (7) 式の左辺に入れると拘束力の水平成分 R_x が計算でき、

$$R_x = 0, \quad (10)$$

となります。もともとあるとしたはずの R_x は、存在しません。床は水平方向の運動に関与しないという奇妙な結果を与えます。現実には、2節で解明しました転がり摩擦トルクがありますので、 $R_x = 0$ にはなりません。

転がり摩擦トルクのある場合

$(5b)$ 式の $N_{\text{摩擦}}$ を使いますと、次式が得られます。

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{2mg}{3} (k_0 + k_1 v). \quad (11)$$

これを、 $t = 0, x = 0$ 、初速度 v_0 の初期条件のもとで、

$$(k_0 + k_1 v) = (k_0 + k_1 v_0) \exp\left(-\frac{2gk_1}{3} t\right), \quad (12)$$

となります。停止 ($v = 0$) する時刻 t_{stop} は、

$$t_{\text{stop}} = \frac{3}{2gk_1} \log\left(1 + \frac{k_1}{k_0} v_0\right). \quad (13)$$

(12) 式を積分すると、次式のようになります。

$$x = -\frac{k_0}{k_1} t - \left(\frac{k_0}{k_1} + v_0\right) \frac{3}{2gk_1} \left[\exp\left(-\frac{2gk_1}{3} t\right) - 1\right]. \quad (14)$$

停止距離 l は、 (14) 式に $t = t_{\text{stop}}$ を代入し、

$$l = -\frac{k_0}{k_1} \frac{3}{2gk_1} \log\left(1 + \frac{k_1}{k_0} v_0\right) + \frac{3}{2gk_1} v_0, \quad (15)$$

となります。初速度を変えて停止距離を測定することで、 k_0, k_1 がわかります。減速に導くのは、鉛直方向の力が作る転がり摩擦トルクです。パンクした自転車で、転がり摩擦 $N_{\text{凹凸}}$ が大きくなるのは、上下動が原因で、直感的にも理解できます。 (7) 式と (11) 式より拘束力の x 成分 R_x を求めますと、

$$R_x = -\frac{2mg}{3} (k_0 + k_1 v), \quad (16)$$

となります。滑らない条件は、 $|R_x|$ が滑り摩擦力以下なので、

$$\frac{2mg}{3} (k_0 + k_1 v) < mg \times (\text{滑り摩擦係数}), \quad (17)$$

が必要になります。

4. 新幹線の運動の解析

列車の1両を図4に描きます。8個の車輪の回転はすべて同じとします。新幹線車両での実験結果では機械抵抗と空気抵抗があります^{4,5)}。

$$\text{全抵抗力} = F_{\text{機械抵抗}} + F_{\text{空気抵抗}} \quad (18)$$

機械抵抗は、レール上の転がり摩擦や軸受けペアリングの転がり摩擦を合わせたもので、全質量に比例し、係数は速度に関する1次関数です。車輪1個当たりのトルクを $N_{\text{全摩擦}}$ と書くと

$$N_{\text{全摩擦}} = -\left(m + \frac{M}{8}\right) ga(k_0 + k_1 v), \quad (19)$$

となります。ここで、車体の質量は M 、車輪の1個の質量は m 、全質量は $M+8m$ です。

空気抵抗は、車両の断面積 S_1 (幅×高さ)に比例する項と、上下左右の側面の面積 S_2 ([幅+高さ]×2×列車の長さ)に比例する項の和で表せま

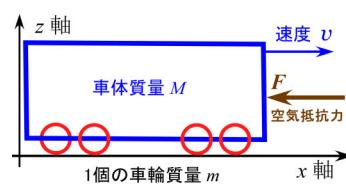


図4 列車の単純模型

す。どちらも速度の2乗に比例します。すなわち,

$$F_{\text{空気抵抗}} = (\mu_1 S_1 + \mu_2 S_2) v^2. \quad (20)$$

係数 μ_1, μ_2 は、列車に固有な係数値です。列車の連立運動方程式は,

$$(M+8m) \frac{d^2x}{dt^2} = -F_{\text{空気抵抗}} + 8R_x, \quad (21)$$

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = N_{\text{全摩擦}} - R_x a, \quad (22)$$

となり、両式から、拘束力 R_x を消去すると,

$$\frac{dv}{dt} = -G(k_0 + k_1 v + A v^2), \quad (23)$$

となります。ここで、定数 G, A は、次式で定義されています。

$$G = \frac{(8m+M)}{\left(M+8m+\frac{8I}{a^2}\right)} g, \quad A = \frac{(\mu_1 S_1 + \mu_2 S_2)}{(8m+M)g}. \quad (24)$$

この運動方程式 (23) は、次のように2つの場合に分けて、解くことができます。

Case 1 ($4k_0A > k_1^2$) の場合

(23) 式の右辺のカッコ内を標準形に書き換えます。

$$(k_0 + k_1 v + A v^2) = A[(v + \xi)^2 + \eta^2], \quad (25a)$$

$$\xi = \frac{k_1}{2A}, \quad \eta = \sqrt{\frac{k_0}{A} - \left(\frac{k_1}{2A}\right)^2}. \quad (25b)$$

(23) 式は積分できて、初速度 v_0 を使うと,

$$v + \xi = -\eta \tan(\eta G A (t - \tau)), \quad (26)$$

$$\tau = \frac{1}{\eta G A} \arctan \frac{v_0 + \xi}{\eta}, \quad (27)$$

τ は積分定数で (27) 式のように初速度 v_0 で決まります。初期条件を考慮して t で積分すると,

$$x(t) = \frac{1}{GA} \log \left[\frac{\cos(\eta G A (t - \tau))}{\cos(\eta G A \tau)} \right] - \xi t. \quad (28)$$

Case 2 ($4k_0A \leq k_1^2, A \neq 0$) の場合

$$(k_0 + k_1 v + A v^2) = A[(v + \xi)^2 - \sigma^2], \quad (29a)$$

$$\xi = \frac{k_1}{2A}, \quad \sigma = \sqrt{\left(\frac{k_1}{2A}\right)^2 - \frac{k_0}{A}}, \quad (29b)$$

と積分定数 τ を使い、積分すると,

$$\frac{(v + \xi - \sigma)}{(v + \xi + \sigma)} = \exp(-2\sigma G A (t - \tau)), \quad (30)$$

$$\tau = \frac{1}{2\sigma G A} \log \frac{v_0 + \xi - \sigma}{v_0 + \xi + \sigma}, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= -(\xi + \sigma)t \\ &+ \frac{1}{GA} \log \left[\frac{-1 + \exp(2\sigma G A (t - \tau))}{-1 + \exp(-2\sigma G A \tau)} \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

新幹線の実測では、惰性運転時の速度変化や停止距離、等速運転時に必要なエネルギーなどがわかり、上述の解を使って、係数 k_0, k_1, μ_1, μ_2 が決定されます。(21) 式と (22) 式から加速度を消去すると,

$$\begin{aligned} R_x &= \frac{\frac{I}{a^2}}{\left(M+8m+\frac{8I}{a^2}\right)} F_{\text{空気抵抗}} \\ &+ \frac{(M+8m)}{\left(M+8m+\frac{8I}{a^2}\right)} \frac{1}{a} N_{\text{全摩擦}}. \end{aligned} \quad (33)$$

車両の質量は、 $8I/a^2$ より、はるかに大きいので,

$$R_x \approx -\left(m + \frac{M}{8}\right) g (k_0 + k_1 v). \quad (34)$$

R_x は、進行方向と逆向きです。滑らない条件は,
 $(k_0 + k_1 v) < (\text{滑り摩擦係数})$,
となります。

モーターによる駆動トルク $N_{\text{駆動}}$ が加わった場合を分析します。(22) 式が次式に変わります。

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = N_{\text{全摩擦}} - R_x a + N_{\text{駆動}}. \quad (36)$$

この式と (21) 式から、 R_x を消去すると,

$$\begin{aligned} \left(M+8m+\frac{8I}{a^2}\right) \frac{d^2x}{dt^2} &= -F_{\text{空気抵抗}} + \frac{8}{a} (N_{\text{全摩擦}} + N_{\text{駆動}}). \end{aligned} \quad (37)$$

速度 v 一定の場合は、(21) 式より

$$R_x = \frac{1}{8} F_{\text{空気抵抗}} = \frac{1}{8} (\mu_1 S_1 + \mu_2 S_2) v^2, \quad (38)$$

で、 R_x は進行方向を向きます。また、滑らない条件は次式となります。

$$(\mu_1 S_1 + \mu_2 S_2)v^2 < (8m + M)g \times (\text{滑り摩擦係数}), \quad (39)$$

です。加速時・制動時は、より強い条件が必要で、鉄道の速度 v には物理的上限があります。

5. おわりに

円柱が水平な床面を転がる場合の力学を考察しました。接触部には、ヘルツの接触応力、ひずみ-応力の履歴効果などが関与していることもわかりました。剛体模型でなく、現実の自然を分析することが大切です。この分析からわかる転がり摩擦トルクが、鉄道や自動車の運動を決めています。円柱の回転運動という単純そうに見える演習

問題の中に、奥深い物理法則が潜んでいる姿を伝えることができれば幸甚です。

参考文献

- 1) H. Hertz Über die Berührung fester elastischer Körper *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 92 (1881) pp. 156–171.
- 2) P.A. Kelley *Solid Mechanics Part I: An Introduction to Solid Mechanics* University of Auckland p. 334
- 3) 原島鮮『力学(改訂版)』裳華房 (1970) pp. 165–167.
- 4) 萩原善泰、藤田武「新幹線電車の省エネルギー効果」 *IEEJ Journal* 123 (2003) pp. 406–409.
- 5) 小澤智「高速列車の空気力学的諸問題」ながれ 21 (2002) pp. 346–353.

連絡先 E-mail : zazensou@gmail.com



Jolly's Spring Balance
ジョリーばねはかり
JS-70A
¥132,000+税



e/m Measuring Apparatus
電子の比電荷測定器
EM-30N
¥218,000+税



Newton's Ring Measuring Apparatus
ニュートンリング測定器 NR-50A
¥220,000+税



Spectrometer
分光計 V-6A
¥630,000+税

