



Title	LC回路での連成振動と特徴的な電気振動現象
Author(s)	佐々木, 祥介; 花岡, 和彦; 田中, 正樹 他
Citation	大学の物理教育. 2021, 27(3), p. 154-158
Version Type	VoR
URL	<a href="https://hdl.handle.net/11094/88665">https://hdl.handle.net/11094/88665</a>
rights	
Note	

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

# LC 回路での連成振動と特徴的な電気振動現象



佐々木祥介  
田中正樹  
岩成唯夫

元静岡理工科大学  
島根県立大社高等学校  
元島根県立高等学校

花岡和彦  
南波陽平  
北野保行

島根県立松江南高等学校  
島根県立出雲高等学校  
島根大学名誉教授

## 1. はじめに

LC 回路の物理教育では、インピーダンスの計算やキルヒホッフの法則を使った電圧・電流の算出が主に行われていますが、力学の連成振動と同様の現象もあります<sup>1,2)</sup>。この現象を理論・実験の両面から検討します。

2 組の LCR 回路をコンデンサーで結合した系を作ります。この回路で連成振動現象が起きるかを調べます。周波数一定でパルス幅を変え、各種の初期条件を生み出します。コンデンサーの容量を変更して、力学の連成振動のパターンと異なる、驚くような振動パターンの電気振動を発生させます。これらの理論と実験を通して、LC 回路に内在されている種々の現象を体験し、物理の面白さを実感していただければ幸いです。

## 2. 共振回路の電圧と電流の変化

2 つの共振回路を結合し図 1 の回路を作成します。現実のコンデンサーとコイルは、どちらも熱損失を持っていますが、損失の小さなコンデンサーを入手できますので、コイルの内部抵抗  $R_L$  だけを考慮します。コイルは左右同じものを使い、

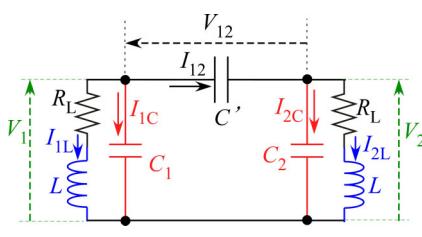


図 1 二つの共振回路が連結された系

コンデンサーの容量をいろいろ変えた場合を実験します。図 1 の左側の LCR 回路で、時刻  $t$  に関する次の微分方程式が成立します。(付録参照)

$$LC_1 \frac{d^2V_1}{dt^2} + R_L C_1 \frac{dV_1}{dt} + V_1 = -L \frac{dI_{12}}{dt} - R_L I_{12} \quad (1)$$

右側の共振回路では、容量が  $C_2$ 、電圧が  $V_2$  で、電流  $I_{12}$  が流入に変わるので考慮しますと、

$$LC_2 \frac{d^2V_2}{dt^2} + R_L C_2 \frac{dV_2}{dt} + V_2 = L \frac{dI_{12}}{dt} + R_L I_{12} \quad (2)$$

図 1 の容量  $C'$  両端の電圧と電流の関係は、

$$C' \frac{d(V_1 - V_2)}{dt} = I_{12} \quad (3)$$

(3) 式を使って、(1) 式の  $I_{12}$  を消去しますと、

$$L \frac{d^2\{(C_1 + C')V_1 - C'V_2\}}{dt^2} + R_L \frac{d\{(C_1 + C')V_1 - C'V_2\}}{dt} + V_1 = 0 \quad (4)$$

同様に(2)式を書き直し次式を得ます。

$$L \frac{d^2\{-CV_1 + (C_2 + C')V_2\}}{dt^2} + R_L \frac{d\{-CV_1 + (C_2 + C')V_2\}}{dt} + V_2 = 0 \quad (5)$$

ここで、係数を次の定義値で置き換えます。

$$A = LC' \quad B = R_L C' \quad (6a)$$

$$f_1 = \frac{C_1}{C'} \quad f_2 = \frac{C_2}{C'} \quad (6b)$$

(4) と (5) 式は,  $A, B, f_1, f_2$  を使うと,

$$A \frac{d^2((f_1+1)V_1 - V_2)}{dt^2} + B \frac{d((f_1+1)V_1 - V_2)}{dt} + V_1 = 0 \quad (7a)$$

$$A \frac{d^2(-V_1 + (f_2+1)V_2)}{dt^2} + B \frac{d(-V_1 + (f_2+1)V_2)}{dt} + V_2 = 0 \quad (7b)$$

実数定係数線形微分方程式ですが複素数の範囲にすると一般的に解けますので、複素電圧関数を次式で導入します。 $\tilde{V}_{10}$  と  $\tilde{V}_{20}$  は複素定数係数です。

$$\tilde{V}_1 = \tilde{V}_{10} e^{iWt}, \tilde{V}_2 = \tilde{V}_{20} e^{iWt} \quad (8)$$

これらを (7a), (7b) 式に代入して微分を実行し、両辺を  $e^{iWt}$  で割ると以下の式が得られます。

$$\{(-AW^2 + BiW)(f_1+1) + 1\} \tilde{V}_{10} - \{(-AW^2 + BiW)\} \tilde{V}_{20} = 0 \quad (9a)$$

$$(AW^2 - BiW) \tilde{V}_{10} + \{(-AW^2 + BiW)(f_2+1) + 1\} \tilde{V}_{20} = 0 \quad (9b)$$

(9a), (9b) 式が自明な解  $\tilde{V}_{10} = \tilde{V}_{20} = 0$  以外の解を持つには、以下の式が必要条件です。

$$\{(AW^2 - BiW)(f_1+1) - 1\} \{(AW^2 - BiW)(f_2+1) - 1\} - (AW^2 - BiW)(AW^2 - BiW) = 0 \quad (10)$$

(10) 式から未知数  $W$  を求めればよいのですが、次の量  $X$  を使い、2 次式で処理します。

$$X = AW^2 - BiW \quad (11a)$$

$$\{(f_1+1)X - 1\} \{(f_2+1)X - 1\} - X^2 = 0 \quad (11b)$$

この 2 次方程式の解は、次式となります。

$$X_1 = \frac{(f_1+f_2+2) + \sqrt{(f_1-f_2)^2 + 4}}{2(f_1f_2 + f_1 + f_2)} \quad (12a)$$

$$X_2 = \frac{(f_1+f_2+2) - \sqrt{(f_1-f_2)^2 + 4}}{2(f_1f_2 + f_1 + f_2)} \quad (12b)$$

(11a) 式に解  $X_n (n = 1, 2)$  を代入すると、

$$AW^2 - BiW - X_n = 0 \quad (13)$$

この 2 次式の解  $W$  は、次式で与えられます。

$$W = \frac{iB}{2A} \pm \frac{1}{2A} \sqrt{-B^2 + 4AX_n} \quad (n = 1, 2) \quad (14)$$

上式の平方根内が正値になるコイルやコンデンサーを選んだ場合を調べて実験します。そのため、虚部は共通で、実部は符号を除いて ( $n = 1, 2$ ) の 2 種類があります。次の量を導入しますと、

$$k = \frac{B}{2A},$$

$$\omega_n = \frac{1}{2A} \sqrt{-B^2 + 4AX_n} \quad (n = 1, 2) \quad (15)$$

$$W = ik \pm \omega_n \quad (n = 1, 2) \quad (16)$$

(8) 式より、解の関数形は次の 4 つになります。

$$e^{-kt+i\omega_1 t}, e^{-kt-i\omega_1 t}, e^{-kt+i\omega_2 t}, e^{-kt-i\omega_2 t} \quad (17)$$

(9a) 式から  $\tilde{V}_{20}$  を  $\tilde{V}_{10}$  で表すと下式となります。

$$\tilde{V}_{20} = \left\{ (f_1+1) - \frac{1}{(AW^2 - BiW)} \right\} \tilde{V}_{10} \quad (18)$$

(18) 式に (13) 式を用いると比例係数部  $\mu_n$  は、

$$\mu_n = (f_1+1) - \frac{1}{X_n} \quad (n = 1, 2) \quad (19)$$

$$\tilde{V}_{20} = \mu_n \tilde{V}_{10} \quad (n = 1, 2) \quad (20)$$

( $n = 1$  の場合)  $e^{-kt-i\omega_1 t}$  の係数を  $\tilde{V}'_{10}$  として

$$\tilde{V}_1 = \tilde{V}_{10} e^{-kt+i\omega_1 t} + \tilde{V}'_{10} e^{-kt-i\omega_1 t} \quad (21a)$$

$$\tilde{V}_2 = \mu_1 (\tilde{V}_{10} e^{-kt+i\omega_1 t} + \tilde{V}'_{10} e^{-kt-i\omega_1 t}) \quad (21b)$$

線形微分方程式の実数解を求めることが目標ですので、上の式から独立な 2 つの実数解を求めればよろしい。 $X_1, \mu_1$  がともに実数で、 $AW^2 - BiW$  も (13) から実数です。そこで  $\tilde{V}_{10}, \tilde{V}'_{10}$  は実数としてよく、独立な実数解は振幅  $\alpha_1, \beta_1$  を使って、

$$V_1 = e^{-kt} \{\alpha_1 \cos(\omega_1 t) + \beta_1 \sin(\omega_1 t)\} \quad (22a)$$

$$V_2 = \mu_1 e^{-kt} \{\alpha_1 \cos(\omega_1 t) + \beta_1 \sin(\omega_1 t)\} \quad (22b)$$

( $n = 2$  の場合)  $\cos(\omega_2 t)$  と  $\sin(\omega_2 t)$  の係数を  $\alpha_2$  と  $\beta_2$  と書くと、(22a)(22b) 式と同様の解になります。それを加えると、一般解は

$$V_1 = e^{-kt} \{\alpha_1 \cos(\omega_1 t) + \beta_1 \sin(\omega_1 t) + \alpha_2 \cos(\omega_2 t) + \beta_2 \sin(\omega_2 t)\} \quad (23a)$$

$$V_2 = e^{-kt} [\mu_1 \{\alpha_1 \cos(\omega_1 t) + \beta_1 \sin(\omega_1 t)\} + \mu_2 \{\alpha_2 \cos(\omega_2 t) + \beta_2 \sin(\omega_2 t)\}] \quad (23b)$$

となります。任意の解は、(23a), (23b) 式で表

され、初期条件は  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  の値で決まります。

### 3. 実験の概要

図1の回路は簡単に作ることができますが、初期条件を生み出す装置を作る必要があります。

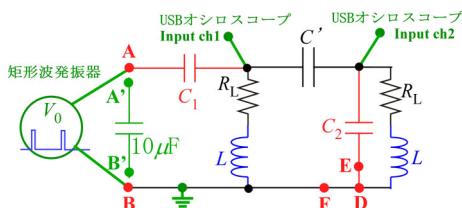


図2 矩形波発振器と連成振動回路の接続

図2に測定回路を描きました。入力にPWM信号発生器(型番B07MC4HRN9)を使用しました。周期とパルス電圧発生時間を独立に可変でき、安価なものが便利です。発振器のGround端子を点Bに接続し、出力を点Aにつなぎます。発振器の出力がゼロの場合は、点AとBを短路したのと同じで図2の回路は図1と同じになります。実際は発振器に出力抵抗があり、点AとA'、点BとB'を短路し、実効出力抵抗を減らしました。図2以外の接続は、各種試しましたが、図2の接続で実験しました。

2 チャンネル入力 USB オシロスコープを使い、データをパソコンに取り込みます。プローブは、減衰を防ぐため  $10\text{ M}\Omega$  入力を用いました。コイル 14 種とコンデンサー 14 種（容量変化を考えると数十種以上）を試し、後述の測定例のように、減衰の少ない市販品を選びました。

#### 4. 実験装置と測定手順

実験装置の全体写真を図3に載せます。コイルの合成規格値は  $L = 524 \text{ mH}$  ですが、実物は  $L \approx 560 \text{ mH}$  で、内部抵抗も  $R_L \approx 35 \Omega$  (推定値) です。電圧値の振動パターンの理論値は (23a), (23b) 式で求められます。部品が得られると実験回路を作るのは簡単です。測定も1分以下でワンショット 5218 点の電圧値をメモリーに取り込め

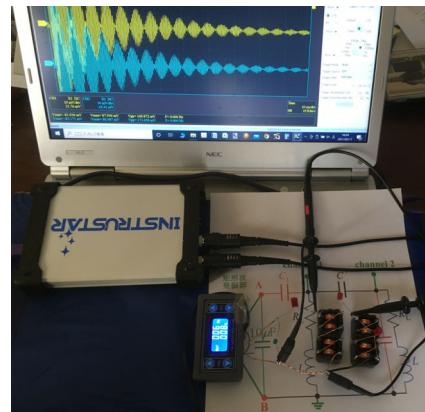


図3 実験装置全体の写真：回路部分がわかるように印刷した台紙の上に、部品をはんだ付けしています

ます。学生実験にも利用できます。

振り子の連成振動では、振れ角が小さい場合は、解の形は(23a), (23b)式と同形です。しかし、結合強度や振動数の大幅な変更が困難です。また、動画を撮って、即時に振幅を数値化する装置が必要です。筆者らは力学系の実験で5218点もの振幅数値を見たことがありません。

具体的な実験条件を考察します。パルス・ハイで、図2の左のコンデンサー  $C_1$  のA端がプラスに充電され、立下りで、A端が接地され、コイルにマイナス電圧が印加されます。そこを時刻  $t = 0$  とします。この時刻には、 $C'$  を通した電荷量がまだ少なく、 $t = 0$  では右側のLCR系の電圧  $V_2$  と時間微分はほぼゼロです。 $V_1$  は接地の瞬間にマイナスで最小値となります。式で表すと初期条件  $\alpha_2 = -\alpha_1\mu_1/\mu_2$ 、 $\beta_1 = \beta_2 = 0$  となり、 $\alpha_1$  はパルス電圧で決まります。この電圧は大きさを決めるだけで、振動形状には影響しません。

以上を実現するには、周期を長くし、減衰で両電圧がゼロ近くになってから、次のパルスが立ち上がり、非常に短いパルス幅でゼロとなるようにします。パルス幅は、PWM の Duty 比で調節でき、次節の例 3~5 では、最小の 1% に設定しました。例 1 と例 2 のみ、立ち上がりからしばらくして、条件を満たしたところで、立ち下がるよう Duty 比を微調節しました。例 1 では Duty 比

を 8 %, にし, 例 2 では Duty 比を 5 % にしました。

(23a), (23b) 式の  $k, \omega_n, \mu_n$  は,  $L, R_L$  と各例での容量  $C_1, C_2, C'$  から決まります. (6a), (6b) 式で  $A, B, f_n$  を, (12a), (12b) 式から解  $X_1, X_2$  を求め, (15), (19) 式を使います。

## 5. 多彩な振動現象とその測定結果

実験結果はすべて背景が黒の図で示してあります。縦軸は, すべて 10 mV/div です。横軸は図 4, 5, 6, 8, 9 が 5 ms/div, 図 7 が 10 ms/div です。まず, 連成振動現象が本当に起きるか確かめました。

例 1 :  $C_1 = 0.01 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 0.01 \mu\text{F}$ ,  
 $C' = 0.001 \mu\text{F}$

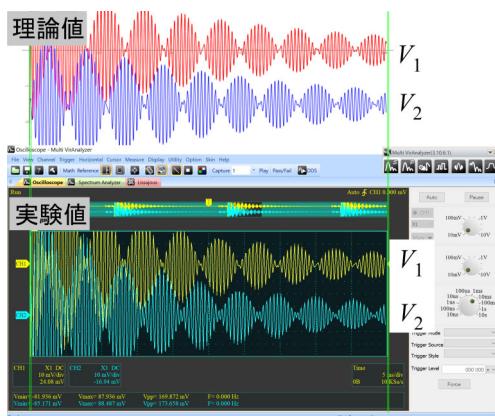


図 4 例 1 の理論値と実験値 ( $0 \leq t \leq 0.05 \text{ s}$ )

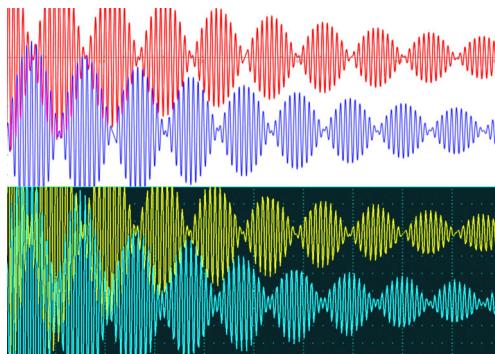


図 5 例 1 の理論値と実験値 ( $0 \leq t \leq 0.05 \text{ s}$ )

図 4 (0.05 秒幅) とそれを拡大した図 5 に理論値と実験値を描きます。4 つの振動曲線は上から理論値  $V_1, V_2$ , その下が実験値  $V_1, V_2$  です。実験値は理論値とよく合っています。このように, 連成振動の観測に成功しました。

次にコンデンサーを変えて測定しました。少々の変化では似たパターンになり面白くありません。そこで, Mathematica での理論計算で, 容量  $C_1, C_2, C'$  の異なる数百組のグラフを描きました。特徴的な振動パターンを見つけ, その容量の回路を作り, 実験を行いました。以下では, それらの結果を紹介します。

例 2 :  $C_1 = 0.01 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 0.01 \mu\text{F}$ ,  $C' = 0.2 \mu\text{F}$

容量  $C'$  を例 1 の 200 倍としました。結合度はこの容量で可変でき, 強結合例です。初期条件は,  $\alpha_2 = -\alpha_1 \mu_1 / \mu_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  です。図 6 が結果です。強結合の場合はこのような振動曲線を描きます。詳しく見ると, 実験値は理論値に比べて高周波成分が早く減衰しています。

理由は, この例 2 では  $\omega_1 / \omega_2 \approx 6.7$  で 7 倍ほど大きな周波数の波が重なっているためです。理論では減衰抵抗の周波数変化を無視しています。実験では  $R_L$  が高周波で大きくなるので, 高周波成分が早く減衰します。例 1 では, ほぼ同じ周波数のうなりで, この違いは起きず, 理論と実験が非常によく一致しています。

例 3 :  $C_1 = 0.1 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 0.0022 \mu\text{F}$ ,  
 $C' = 0.15 \mu\text{F}$

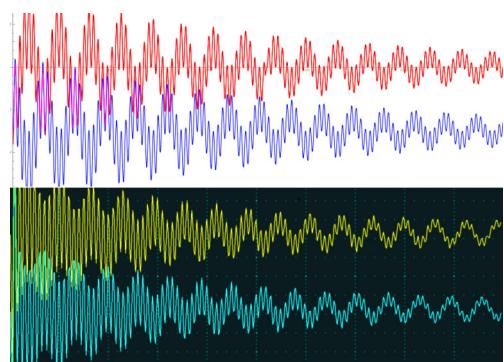


図 6 例 2 の理論値と実験値 ( $0 \leq t \leq 0.05 \text{ s}$ )

初期条件は同様です。理論値と実験値の比較を図7に描きます。特異なパターンが見えます。実験値は例2と同様、高周波成分が早く減衰します。 $V_1$ と $V_2$ が描く曲線は興味深い形状です。

以下の2例も、理論と実験が一致していますので、実験値のみ、時刻  $0.02 \leq t \leq 0.07$  s の拡大図を載せます。

例4:  $C_1 = 0.02 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 0.005 \mu\text{F}$ ,

$$C' = 0.0122 \mu\text{F}$$

$V_2$ の振動に $V_1$ にない微細構造のある例です。

例5:  $C_1 = 0.02 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 0.01 \mu\text{F}$ ,

$$C' = 0.0067 \mu\text{F}$$

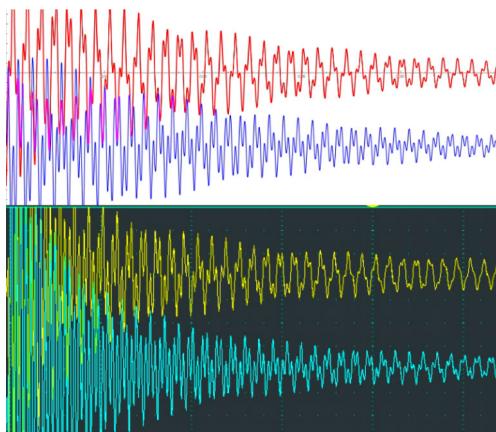


図7 例3の理論値と実験値 ( $0 \leq t \leq 0.10$  s)

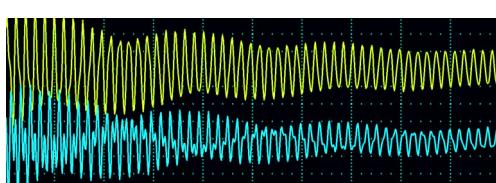


図8 例4の実験値 ( $0.02 \leq t \leq 0.07$  s)

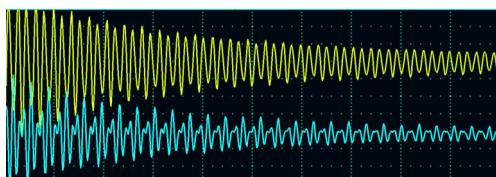


図9 例5の実験値 ( $0.02 \leq t \leq 0.07$  s)

$V_1$ は2振動ごとに振幅が大きくなります。 $V_2$ は電圧ゼロで勾配もゼロとなる振動が3振動ごとに現れます。 $C_1$ と $C_2$ の容量を入れ替えますと、 $V_1$ ,  $V_2$ とも3振動ごとに振幅が大きくなります。

## 6. おわりに

力学の場合と違って、コンデンサーを交換するだけで、周波数や結合定数が変化し、2つの電圧値をサンプリングしたデータも簡単に保存できます。数百回もの振動のようすを実験後に理論値と比較することも容易です。3つの容量を変えると、多様な振動パターンが次々と得られます。LC回路という演習問題の中にも、魅力的な現象が隠れています。自然は驚きに満ちています。

## 付録. (1)式の導出

図1左側のコンデンサーの電荷量 $C_1 V_1$ が単位時間内に増加する量が $I_{1C}$ となります。それゆえ

$$C_1 \frac{dV_1}{dt} = I_{1C} \quad (\text{A1})$$

コイルを流れる電流が変化して生み出す誘導電圧と抵抗 $R_L$ の両端に生じる電圧の和が $V_1$ なので、

$$V_1 = L \frac{dI_{1L}}{dt} + R_L I_{1L} \quad (\text{A2})$$

(A1)式の両辺を $t$ で微分して $L$ をかけ、(A2)式と辺々を加えると、

$$LC_1 \frac{d^2V_1}{dt^2} + V_1 = L \left( \frac{dI_{1C}}{dt} + \frac{dI_{1L}}{dt} \right) + R_L I_{1L} \quad (\text{A3})$$

これに、(A1)式の両辺に $R_L$ をかけたものを足し、電流保存則 $I_{12} = -I_{1C} - I_{1L}$ を考慮すると、(1)式を得ます。

## 参考文献

- 1) 後藤憲一、山崎修一郎『電磁気学演習』共立出版、初版104刷(1993)。
- 2) Frank S. Crawford Jr. Berkeley Phys. Course vol. 3 Waves Berkeley Physics Laboratory (1968)。

連絡先 E-mail: zazensou@gmail.com