

Title	ハイブリッド境界要素法を用いた大領域ラム波シミュ レーション							
Author(s)	林, 高弘; 琵琶, 志朗; 遠藤, 茂寿							
Citation	日本機械学会論文集 A編. 1999, 65(630), p. 210- 217							
Version Type	АМ							
URL	https://hdl.handle.net/11094/89239							
rights								
Note								

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

ハイブリッド境界要素法を用いた大領域ラム波シミュレーション*

林 高 弘*1,琵琶 志朗*2, Joon Chul CHOI*3,遠 藤 茂 寿*4

Large-scale simulation of Lamb wave propagation by Hybrid Boundary Element Method

Takahiro HAYASHI^{*5}, Shiro BIWA, Joon Chul CHOI and Shigehisa ENDOH

*5National Institute for Resources and Environment, Onogawa 16-3, Tsukuba Ibaraki, 305-8569 Japan

The simulation of Lamb wave propagation is an efficient tool to improve the accuracy of non-destructive inspection of metallic plates by ultrasonic methods. However the widely used modeling techniques such as FDM, FEM and BEM require too much computation time. Since the Lamb wave technique is often used for large structures relative to the ultrasonic wavelength (e.g. fluid pipes, storage tanks etc.), its computing requires a huge number of nodes or elements which are nearly proportional to computation time. This study is therefore focused on the Hybrid BEM (HBEM), which is the combination of exact Lamb wave theory and BEM for two-dimensional elastodynamics. In HBEM much less nodes should be considered in the calculations, and it results in much shorter calculation time. A description of HBEM used for Lamb wave simulation is given in this paper. The parameters for the exact solution of Lamb wave propagation were optimized to achieve the shortest calculation time. Finally, an effective simulation of a large structure is presented under pre-determined conditions.

Key Words: Ultrasonic Inspection, Boundary Element Method, Computational Mechanics, Lamb Wave, Large-Scale Simulation

1. はじめに

ラム波はさまざまなモードで屈曲運動し板材の形状 に沿って進行する.その伝ば波形は音速・弾性定数以 外に,板厚や板形状・損傷・劣化・はく離・異方性と いった被検査材料の特性や,入射超音波の振動周波数 に大きく依存することが知られている⁽¹⁾.また板の屈 曲振動であるため,バルク波のような拡散によるエネ ルギ散逸が起こらず比較的長距離を伝ぱする特徴を持 つ.これらの性質からラム波による板材料の非破壊検 査は非常に効果的であり,特に輸送管や大型タンクな どの大型構造材料に多く使用されている.しかし,損 傷・劣化部分の形状や大きさ,不均質部分の同定とい った非破壊検査技術の高度化が求められるに従って, ラム波伝ぱ状態の精密な観察および分析が不可欠とな ってきている.数値計算シミュレーションはその要求 に答える最適なツールである.

超音波シミュレーションに使用される従来の数値計 算法として,差分法(FDM),有限要素法(FEM),境界 要素法(BEM)⁽²⁾⁽³⁾⁽⁴⁾などがあげられ,ラム波をこれらの 方法で表現するとき,扱う材料が波長に比べ大きくな ればなるほど,要素や節点を多く取る必要があり,計 算時間が要素節点数に比例して長くなるという問題を 持っている.特にラム波は大型構造物の検査に応用さ れる事が多く,ラム波シミュレーション⁽⁵⁾⁽⁶⁾を実用オ ーダーに適用するためには,その計算時間の短縮は必 要不可欠である.

ラム波は無数の振動モードにより形成されており, 境界条件によって各振動モードのエネルギ量は決定さ れる.通常,振動形態の複雑な高次モードは,減衰が 大きいためエネルギ量が小さく無視される.これらの 性質は Mindlin ら⁽⁷⁾⁻⁽¹¹⁾の理論的検討によって見出され たものであり,ラム波理論という.これは欠陥・損傷の ない単純平板部分に用いることができる.一方 BEM は 波動方程式にしたがうすべての現象を描写することが

き

,

で

^{*} 原稿受付 1998年 月 日

^{*1} 正員,資源環境技術総合研究所, (〒305-8569,つくば市小野川 16-3)

^{*2} 正員,名古屋大学工学研究科

^{*3} 新エネルギー・産業技術総合開発機構

任意形状をした領域に適用される.本研究では、欠陥 や損傷のない平板部分にラム波理論を適用し, 欠陥・損 傷・その他任意形状部分に BEM を適用するハイブリッ ド境界要素法(HBEM)⁽¹²⁾⁽¹³⁾の定式化を行う.これによ って BEM の節点数が大幅に減少し,計算時間を飛躍的 に節約できる. さらに、ラム波理論で高次モードを無 視したために発生する誤差の取り扱いについて検討し, BEM 領域の操作によって計算精度の向上を図る.また, 節点数が最小になる条件を探索的に求め、その条件を 使って実用オーダーに相当する長距離を伝ばするラム 波の発信・受信シミュレーションを行う.

2. ハイブリッド境界要素法

2.1 単純平板に対するラム波理論(1) ラム波 シミュレーションのためのハイブリッド境界要素法 の定式化を行う前に,ラム波理論を導出しておく必 要がある. ラム波理論は, 平行な2つの境界面を持 った単純平板に調和振動を付加したとき,任意点で の変位および応力を関数式として表す解析的手法で あり,多くの文献や著書にまとめられている⁽⁵⁾⁻⁽¹¹⁾. 本節では一様,等方性,線形単純平板について複素波 数を用いたラム波理論を導出する. 図1に示すよう に板中のラム波の伝播方向を x,板厚方向を y とする. 一般にこのような平板材料の表面から縦波弾性波を 斜角入射する場合,紙面に垂直方向の変位(SH 波) は発生しない. したがってここでは x, yの2次元平 面について考える. 一様等方性線形弾性体に対する 波動方程式を,板表面において y 方向垂直応力 Twe せん断応力 τ_wがかからないという境界条件

 $\tau_{yy} = 0$, $\tau_{xy} = 0$ $(y = \pm d/2)$ (1) のもとで解くことにより, ラム波はつぎの Rayleigh-Lamb 方程式によって支配される.角周波数 ωの調和振動波はこれらいずれかの式を満たす波数 *ξ*あるいは位相速度 *c*でのみ伝ばが許される.

$$\Delta_{S} \equiv \left(\xi^{2} - \xi_{\beta}^{2}\right)^{2} \cos(\xi_{\alpha} d/2) \sin(\xi_{\beta} d/2) + 4\xi^{2} \xi_{\alpha} \xi_{\beta} \sin(\xi_{\alpha} d/2) \cos(\xi_{\beta} d/2) = 0 \dots (2 \cdot b)$$

ここで、 c_L , c_T はそれぞれ弾性平板の縦波音速、横波



Fig.1 Coordinate system for a plate of thickness d

 $\Delta_{A} = 0 を満たすとき伝ば波形は板厚中心の直線$ y=0 に対して非対称であり非対称モードと呼ばれ, $\Delta_s = 0$ を満たすとき伝ば波形は直線 y=0 に対して対 称であり対称モードと呼ばれる.非対称モード及び 対称モードの伝ば形態は無数に存在するので、一般 に最低次数のモードから順に非対称モードに A0, A1, A2... または対称モードに S0, S1, S2... と記号を 付す. また群速度は

で表され、位相速度同様に各モード固有の速度分布 を持つ.

x,y方向の変位は次の式で与えられる.

 $u_i = u^A_i + u^S_i \quad (5)$

ここで $u^{A_{i}}$, $u^{S_{i}}$ はそれぞれ i(=x,y)方向の非対称及び 対称モードの変位であり,次式から得られる.なお, exp(-iat)はすべてに共通の項として持つので以下で は省略する.

$$\hat{u}^{Aj}{}_{x} = (i\xi\sin\xi_{\alpha}y - R_{A}\xi_{\beta}\sin\xi_{\beta}y)\exp(i\xi x)\cdots(7\cdot a)$$
$$\hat{u}^{Aj}{}_{y} = (\xi_{\alpha}\cos\xi_{\alpha}y - R_{A}i\xi\cos\xi_{\beta}y)\exp(i\xi x)\cdots(7\cdot b)$$
$$\hat{u}^{Sj}{}_{x} = (i\xi\cos\xi_{\alpha}y + R_{S}\xi_{\beta}\cos\xi_{\beta}y)\exp(i\xi x)\cdots(7\cdot c)$$

$$\hat{u}^{Sj}{}_{y} = (-\xi_{\alpha} \sin \xi_{\alpha} y - R_{S} i\xi \sin \xi_{\beta} y) \exp(i\xi x) \cdots (7 \cdot d)$$

$$R_{A} = \frac{-2i\xi\xi_{\alpha}\cos(\xi_{\alpha} d/2)}{\left(\xi^{2} - \xi_{\beta}^{2}\right)\cos(\xi_{\beta} d/2)} \cdots (8 \cdot a)$$

$$R_{S} = \frac{2i\xi\xi_{\alpha}\sin(\xi_{\alpha} d/2)}{\left(\xi^{2} - \xi_{\beta}^{2}\right)\sin(\xi_{\beta} d/2)} \cdots (8 \cdot b)$$

である. ただし
$$\sum_{\xi=\xi_A}$$
は $j(=0,1...∞)$ 番目の非対称モード
Aj における $\Delta_A=0$ の解 ξ_A を,式中の ξ に代入した

値の総和を表し、 $\sum_{\xi = \xi_{n}}$ は対称モードでの総和である *VI_{Ai}*, *VI_{si}*は各モードのエネルギ量を決定する振幅係 数であり,境界条件から決定される.また変位から,

任意点での応力が

$$\tau_{xx} = \mu \left(\frac{1}{\beta} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \gamma \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \cdots (9 \cdot a)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \cdots (9 \cdot b)$$

$$\tau_{yy} = \mu \left(\gamma \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \cdots (9 \cdot c)$$

 $\beta = (c_T/c_I)^2$, $\gamma = 1/\beta - 2 \cdots (10)$ によって求められる. μは横弾性定数である. 境界条件として式(1)の代わりに

$$\tau_{yy} = \int_{-\infty}^{\infty} Z(\xi) \exp\{i(\xi x - \omega t)\} d\xi \qquad y = +d/2 \cdots (11 \cdot a)$$

$$\tau_{yy} = 0 \qquad \qquad y = -d/2 \cdots (11 \cdot b)$$

$$\tau_{xy} = 0 \qquad \qquad y = \pm d/2 \cdots (11 \cdot c)$$

という調和振動を板の片表面に付加した場合,式(7)の 振幅係数は次のように決定される(9).

$$VI_{Aj} = -\frac{\pi}{\mu} \frac{iZ(\xi)(\xi^2 - \xi_{\beta}^2)\cos(\xi_{\beta} d/2)}{\Delta_A'} \cdots \cdots (12 \cdot a)$$
$$VI_{Sj} = -\frac{\pi}{\mu} \frac{iZ(\xi)(\xi^2 - \xi_{\beta}^2)\sin(\xi_{\beta} d/2)}{\Delta_A'} \cdots \cdots (12 \cdot b)$$

 Δ_{s}

ここで Δ_A , Δ_S はそれぞれ Δ_A , Δ_S の ξ に関する 導関数

を表す. たとえば境界条件が

という平板の片側面に局所的な調和振動垂直応力を付 加した場合, $(11 \cdot a)$ はフーリエ変換の形であるから $Z(\xi)$ は逆フーリエ変換によって求められ,

となる.式(14)を用いたとき,式(13)は式(11)の形で書 き表すことができる.したがって境界条件式(13)が与え られた単純無限平板に対して,式(5)~式(12)によって 任意点の変位及び応力を求めることができる.

 2.2 境界要素法による2次元動弾性問題⁽²⁾⁽³⁾⁽⁴⁾ 振動数 ωの調和振動に対する波動方程式は,

$$(c_L^2 - c_T^2)u_{i,ij} + c_T^2 u_{j,ii} + \omega^2 u_j = 0$$
 (15)

であり、また表面力ベクトルは

 $p_i = \tau_{ii} n_i \qquad (16)$ $(n_i は境界 \Gamma の単位垂直ベクトル) となる. このとき$ グリーン公式から導かれる境界積分方程式は次で表さ れる.

$$c_{ki}(\mathbf{r})u_{k}(\mathbf{r}) + \int_{\Gamma} p_{ij}^{*}(\mathbf{r}',\mathbf{r})u_{j}(\mathbf{r}')d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^{*}(\mathbf{r}',\mathbf{r})p_{j}(\mathbf{r}')d\Gamma$$

ここで \mathbf{r} は任意点ベクトル、 \mathbf{r} は境界 Γ 上の位置ベクト ルを表し、 c_{ki} は \mathbf{r} が滑らかな境界上のとき対角要素に 1/2の値を取る性質を持つテンソルである.また,基本 解 u^{*}_{ij}, p^{*}_{ij} は

 $(c_{L}^{2} - c_{T}^{2})u_{ik,kj}^{*} + c_{T}^{2}u_{ij,kk}^{*} + \omega^{2}u_{ij}^{*} = -\delta_{ij}\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ $\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \quad (18)$

および式(9),式(16)から求められるテンソルである(付 録参照). ここで δ_{ii} は Kronecker デルタであり、 $\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})$ は Dirac のデルタ関数である.

式(17)の境界積分は離散化され、それぞれ要素ごとに 数 値 積 分 が 行 わ れ る が , r=|r'-r|→0 に お い て $u_{ij}^{*} = O(1/r), p_{ij}^{*} = O(1/r^{2})$ の特異性を有するため,その まま数値積分することができず、静弾性問題の基本解 u^{*STA}_{ij} 及び p^{*STA}_{ij} を導入するのが一般的である. $u_{ij}^{*} - u^{*STA}_{ij} \ge p_{ij}^{*} - p^{*STA}_{ij}$ は正則であり、また u^{*STA}_{ij} は特異 性が弱いため、これらはそのまま Gauss 積分を使って 積分計算ができる.また p^{*STA}_{ij} の特異部分とテンソル c_{ij} は、p^{*STA};;の正則部分から剛体変位条件を使って計算さ れる(2). このように得られた式(17)の離散化方程式は,

という線型連立方程式となる.u, pはそれぞれ各節点 での x, y 方向の変位, 表面力を要素にもつベクトル, H, Gはそれぞれ p_{ij}^{*} , u_{ij}^{*} の境界積分を要素とする行列で ある.境界要素法では通常,uまたはpの未知数が式(19) の方程式数に等しいため未知数の値を求めることがで きる.一般に任意幾何形状に対して境界積分要素に曲 線要素を用いた方が精度良く解が求められる.本報に おいては,曲線要素の中でも最も簡単な2次要素を,ま た境界積分として, Gauss の4 点積分を用いた. これら を用いた境界要素法による解の正当性については、剛 体円柱や円柱空洞からの平面波の散乱理論解(14)(15)と 比較することによって確認した.

2.3 ハイブリッド境界要素法の定式化 図2のよ うに欠陥の存在する平板材料を、欠陥周りの領域と半 無限単純平板領域に分割して考える.このとき,それ ぞれ

領域名をLAMB領域 I, BEM領域 I, LAMB領域 IIと, 境界名を Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 , Γ_4 と図 2 のように名づける. BEM 領域 II においては,従来の閉領域 BEM のように 式(19)の行列 HとGを組み立てることができる.行列 H, Gおよび変位,表面カベクトル u, pのうち境界 $\Gamma_1 \sim \Gamma$ 4 に対応する小行列およびベクトルをそれぞれ添え字 1 ~4 で表すと.

		_ ,		
	$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \end{bmatrix}$	H_2	H_3	\mathbf{H}_{4}] · · · · · · · · · · · (20 · a)
	$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \end{bmatrix}$	G_2	G ₃	\mathbf{G}_{4}] · · · · · · · · · · · (20 · b)
	$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \end{bmatrix}$	$\mathbf{u_2}^T$	$\mathbf{u_3}^T$	$\mathbf{u_4}^T \mathbf{u_4}^T$
	$\mathbf{p} = \left[\mathbf{p}_1^T\right]$	$\mathbf{p_2}^T$	$\mathbf{p_3}^T$	$\mathbf{p_4}^T \mathbf{p_4}^T \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots (20 \cdot \mathbf{d})$
と	なり、式	(19)	は	

 $\mathbf{H}_{1}\mathbf{u}_{1} + \mathbf{H}_{2}\mathbf{u}_{2} + \mathbf{H}_{3}\mathbf{u}_{3} + \mathbf{H}_{4}\mathbf{u}_{4}$

 $= \mathbf{G}_{1}\mathbf{p}_{1} + \mathbf{G}_{2}\mathbf{p}_{2} + \mathbf{G}_{3}\mathbf{p}_{3} + \mathbf{G}_{4}\mathbf{p}_{4} \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots (21)$

で表される. ●^Tは行列●の転置行列である.



Fig.2 Hybrid Boundary Element Method for Lamb wave propagation.

次に LAMB 領域 I における変位と応力を考える.入 射波に対しては式(6)をそのまま用いることができる. ここで式(6)の定数 VI_{Aj} , VI_{Sj} は入射波の性質のよって式 (12)などで決定される入射振幅係数である.反射波では 式(6)の既知入射振幅係数 VI_{Aj} , VI_{Sj} を未知反射振幅係数 VR_{Aj} , VR_{Sj} に, 波数 $\xi を - \xi$ に置き換えればよい. この ようにして, LAMB 領域 I における任意点の変位と応 力は,既知定数 VI_{Aj} , VI_{Sj} と未知定数 VR_{Aj} , VR_{Sj} の線形 和として与えられる.境界 Γ_3 上の節点の変位 \mathbf{u}_3 と表面 力 \mathbf{p}_3 は

$\mathbf{u}_3 = \mathbf{H}_{g1}\mathbf{v}1 + \mathbf{H}_{g2}\mathbf{v}2 \cdot \cdots \cdot \cdots \cdot (22 \cdot \mathbf{a})$
$\mathbf{p}_3 = \mathbf{G}_{g_1} \mathbf{v} 1 + \mathbf{G}_{g_2} \mathbf{v} 2 \cdot \cdots \cdot \cdots \cdot \cdots \cdot (22 \cdot \mathbf{b})$
$\mathbf{v1} = \begin{bmatrix} VI_{A0} & VI_{S0} & VI_{A1} & VI_{S1} & \cdots \end{bmatrix}^T \cdots \cdots \cdots \cdots (22 \cdot \mathbf{c})$
$\mathbf{v2} = \begin{bmatrix} VR_{A0} & VR_{S0} & VR_{A1} & VR_{S1} & \cdots \end{bmatrix}^T \cdots \cdots \cdots (22 \cdot \mathbf{d})$
$\mathbf{H_{g1}} = \begin{bmatrix} \hat{u}^{A0}{}_{x} & \hat{u}^{S0}{}_{x} & \hat{u}^{A1}{}_{x} & \cdots \\ \hat{u}^{A0}{}_{y} & \hat{u}^{S0}{}_{y} & \hat{u}^{A1}{}_{y} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots (22 \cdot \mathbf{e})$
$\mathbf{H}_{g2} = \begin{bmatrix} \hat{u}^{A0}{}_{x} & \hat{u}^{S0}{}_{x} & \hat{u}^{A1}{}_{x} & \cdots \\ \hat{u}^{A0}{}_{y} & \hat{u}^{S0}{}_{y} & \hat{u}^{A1}{}_{y} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}_{\xi \to -\xi} \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots (22 \cdot \mathbf{f})$
$\mathbf{G}_{\mathbf{g}1} = \begin{bmatrix} \hat{p}^{A0}{}_{x} & \hat{p}^{S0}{}_{x} & \hat{p}^{A1}{}_{x} & \cdots \\ \hat{p}^{A0}{}_{y} & \hat{p}^{S0}{}_{y} & \hat{p}^{A1}{}_{y} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots (22 \cdot \mathbf{g})$
$\mathbf{G}_{g2} = \begin{bmatrix} \hat{p}^{A0}{}_{x} & \hat{p}^{S0}{}_{x} & \hat{p}^{A1}{}_{x} & \cdots \\ \hat{p}^{A0}{}_{y} & \hat{p}^{S0}{}_{y} & \hat{p}^{A1}{}_{y} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}_{\xi \to -\xi} \cdots \cdots \cdots \cdots (22 \cdot \mathbf{h})$

のように行列とベクトルで表すことができる.領域III についても同様に考えることができ、境界 Γ_4 上の節点 上の変位と表面力は未知透過振幅係数 VT_{Aj} , VT_{Sj} を使って、

$\mathbf{u}_4 = \mathbf{H}_{\mathbf{g}3}\mathbf{v}3$					 (23 · a)
$\mathbf{p}_4 = \mathbf{G}_{\mathbf{g3}} \mathbf{v3}$					 (23·b)
$\mathbf{v3} = \begin{bmatrix} VT_{A0} \end{bmatrix}$	VT_{s0}	VT_{A1}	VT_{S1}	$\cdots]^T$ · ·	 (23·c)

で与えられる. \mathbf{H}_{g3} , \mathbf{G}_{g3} は \mathbf{H}_{g1} , \mathbf{G}_{g1} と同じ式を使って得られる行列である.

式(22),式(23)を式(21)に代入し左辺を未知項で,右 辺を既知項でまとめと,次の連立方程式が得られる.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_3 \mathbf{H}_{g1} - \mathbf{G}_3 \mathbf{G}_{g1} & \mathbf{H}_4 \mathbf{H}_{g2} - \mathbf{G}_4 \mathbf{G}_{g2} \end{bmatrix}$$

$$\cdots \cdots \cdots \cdots (24 \cdot b)$$

_

 $\mathbf{b} = \mathbf{G}_{1}\mathbf{p}_{1} + \mathbf{G}_{2}\mathbf{p}_{2} - (\mathbf{H}_{3}\mathbf{H}_{g1} - \mathbf{G}_{3}\mathbf{G}_{g1})\mathbf{v}\mathbf{1}\cdots\cdots(24\cdot d)$

通常, ラム波の高次モードは無視できるほどエネルギ 量が小さく,式(7)の無限和を低次モードのみを考慮 した有限和として扱うことができる.例えば, A0から A3 および S0から S3モードを考慮した場合, v2, v3の 未知要素はそれぞれ8個ずつである.多くの場合,連 立方程式(24)は,条件式過多,未知数不足,すなわち行 列Aが列より行の方が多い非正則行列になっている. そこで, x に次の式によって求められる最小二乗解 ⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾を用いた.

ここで行列 A^* は行列 Aのエルミート共役を示す. v2, v3 が求められることによって,LAMB 領域 I および LAMB 領域 IIIの任意点での変位ならびに応力を求める ことができる.また,境界 $\Gamma_1 \sim \Gamma_4$ 上のすべての節点 での変位及び表面力が求められることによって,BEM 領域 II の任意点の変位及び応力を導くことができる.

3. HBEMの最適化

3.1 HBEM 結合誤差の緩和 厚さ 2mmのアルミニ ウム板 (c_L=6300m/s, c_T=3100m/s, d=2.0mm)に対する複素波 数の分散曲線は,図3 (波数の実数部),図4 (波数の虚 数部)で示される. (波数は周波数によって実数,純虚 数または複素数をとり,実数は x 方向伝ぱ波動を,純 虚数及び複素数は減衰波動を表している.通常,板表 面より入射され伝ぱするラム波は,実数波数の低次モ ードである. この低次モード波が欠陥や板端面によっ て散乱・反射する場合,無限個の高次モード波がさまざ まなエネルギ量を持って反射する.)

BEM 領域においては、波動方程式(15)にしたがうすべての



現象を表現することができるため、反射・散乱によって発生した無限個の高次モードも含めて計算されているが、LAMB 領域においては、ラム波理論式(6)の無限和を計算上、有限和として扱うため打ち切られた高次モード波の存在を無視していることになり、ラム波波動を正確に表現しない. このとき BEM 領域と LAMB 領域の間に誤差が生じ、正確な解を求められないということが起こる.

そこでこの誤差を解消するために高次モード波の減 衰性を用いた.高次モード波は波数の虚部が正値を持 つ減衰波動であり,モードの次数が大きくなるほどそ の波数虚部の値は大きい(図4). BEM 領域中にあ る散乱・反射点により発生した高次モード波は,ある距 離だけ離れた位置で十分無視できるほど小さくなり, この距離は減衰の大きな高次モードほど短い. このよ うに BEM 領域に散乱・反射点からある距離離れた緩和 領域を与えることによって,有限和をとったラム波理 論解と BEM による解を一致させることができた.また この誤差緩和距離はラム波理論計算で次数の大きなモ ードまで考慮するほど短くてよいことが分かった.

ここでは次の4通りについて,厚さ2mmのアルミニ ウム板(*c*_L=6300m/s, *c*_T=3100m/s, *d*=2.0mm)に対し, 周波数 0<*f*<2.0MHz の範囲で考察する.a).9 個のモード A0,S0,...A4 を考慮に入れるとき.b).8 個のモード A0,S0,...S3 を考慮に入れるとき.c).7 個のモード A0,S0,...A3 を考慮に入れるとき.d).6 個のモード A0,S0,...S2 を考慮に入れるとき.

この誤差緩和距離を求める方法として、ラム波の進

行波エネルギと板端面からの反射波エネルギの保存を 用いた.図5のように,端面がBEM領域であり,端面 から1の距離にLAMB領域とBEM領域の境界があると する.このとき BEM 節点の間隔は,分散曲線や式(7) より予想されるラム波波長及び変位,応力分布から決 定される.一般に一波長につき8節点で波形を十分に 表現できるとされているのでこれを用いて,x方向節点 間隔0.1mm, y方向節点数32個とした.板の断面平均 エネルギは,

$$E = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[-i\omega \int_{-d/2}^{d/2} \left(\tau_{xx} \overline{u}_x + \tau_{xy} \overline{u}_y \right) dy \right] \cdots \cdots \cdots (26)$$

で与えられ、入射波エネルギ E_I と反射波エネルギ E_R の 比を

 $R = E_R / E_I \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (27)$

で与える. *ū*は*u*の複素共役を示す.入射進行波には A0 波と S0 波を組み合わせた伝ば波,

*VI*_{A0} = 1,*VI*_{S0} = 1,*VI*_{Aj,Sj} = 0 (*j* = 1,2....) · · · · · · · (28) を用いた. 0<*f*<2.0MHz の周波数範囲で入射と反射のエ ネルギ比が1%の誤差の範囲内, すなわち 0.99<*R*<1.01 が成り立つとき解が正しいこととした.

その結果, 0<f<2.0MHzの周波数範囲内で解が正しく 求められる最小の誤差緩和距離は, a), b), c)及び d)に 対し, それぞれ 0.6mm, 0.8mm, 1.0mm, 2.8mm であった. ただし x 方向の節点間隔が 0.1mm で境界要素法におい て 2 次要素を用いているので, この距離は 0.2mm ステ ップで変化させた.これらの値は, それぞれ S4モード, A4 モード, S3 モード, A3 モードの, 周波数 2.0MHz における波数の虚部に反比例している.



Fig.5 Test of Lamb wave reflection.

3.2 節点数の最小化 前節で用いた節点数は,一 波長につき8点を参考に取っているため,解の精度向 上とは無関係に多く取りすぎている可能性がある.そ こで,上記条件 a),b),c),d)に対して,それぞれ求めら れた最小誤差緩和距離を用いた条件で,節点数を変化 させ,解が正しくなるような節点数を探索した.その とき最少の節点数を図6に示す.d)のように誤差緩和 距離が長い場合は,x方向の節点数が多くなるため,総 節点数も多くなる.また a)のように考慮に入れるラム 波モードが多い場合,y方向断面の変位及び応力分布が 複雑になり,複雑な分布を十分表現するために必要な 節点数が多くなるため,総節点数も多くなる.最も節 なったのは、モードを7つ考慮した条件 c)の場合であった.このとき、x方向の節点は5個、y方向の節点は 9個、反射壁から LAMB 領域と BEM 領域の境界までの距離は 1.0mm であった.



Fig.6 The minimum number of nodes for four kinds of mode selections.

4. ラム波発信・受信シミュレーション

2章により求められる任意点の変位や応力は,ある 調和振動周波数ωに対する値である.各点の変位や応 力を時間変化として求めるときには,あらゆる離散周 波数による値を求めた上で,高速逆フーリエ変換を施 す.

図7のような設定条件のもとでラム波発信及び受信 のシミュレーションを行った.図8のような波形(a)お よび周波数分布(b)を持つ入射波を使用した.計算に使 用する周波数範囲は0MHz~2.0MHzで,観測時間範囲は 100µs~420µs とした.これは群速度と入射点・観測点 距離の関係からラム波の観測時刻を推定して求められ た時間である.このとき離散周波数点数は640点とな った.図8の仮想欠陥の状態では節点数は48個である. この場合の計算時間はPentium MMX 200MHzのパソコ ン上で約2時間程度であり,さらに大型の対象物や長 い観測時間に対しても今回提案した HBEM で十分適用 可能である.





超音波探子と平板表面の間で超音波縦波を伝達する 媒体の縦波音速を $c_a = 2080 \text{ m/s}$ とする.平板中を伝ばす るラム波の各モードの構成は入射角 θ_1 によって大き く変化し、スネルの法則 にしたがう位相速度 c に相当するモードが大きく発生 する.また受信探触子の角度に関しても,同じことが いえる.この性質を利用すると,入射角によってラム 波モードを選択的に発生させることができ,受信角に よって選択的に受信することができる.

中心周波数が図8(b)であらわされるように 1.0MHz のとき,厚さ 2.0mm のアルミニウム平板を伝ばする A0モードの位相速度は約 2500m/s,S0モードの位相速 度は約 4800m/s である.したがって A0モードを選択 するとき式(31)から,入射角または受信角は約 57.3°, S0モードを選択するとき,約 25.7°を選べばよい.



Fig.8 Incident wave used in this study

図9は欠陥のない平板に A0 モードを選択的に入射 し、入射点から 500mm 離れた観測点で A0 モードを受 信したときのラム波理論により計算された波形と、 HBEM により計算された波形である. 3 章で反射波に 対して HBEM が正確な値を返すことを示したが図9の 比較から HBEM が透過波に対しても正確な値を与えて いることが分かる.受信される時刻は探子間距離と A0 モードの群速度から計算される時刻に等しい. S0 モー ドも A0 モードに比べ振幅は非常に小さいが時刻 300µs 前後で受信され,その観測時刻も距離と群速度の関係 によく合う.

図10は図7のような欠陥の存在するモデルに入射 角 57.3°で入射したときの応答波形である.図10(a) は受信角 57.3°で A0 モードを選択的に受信した場合 の応答で,図10(b)は受信角 25.7°で S0 モードを選 択的に受信した場合の応答である.図9と図10(a)を 比較すると,A0 モードの受信波が小さくなっている. これは欠陥によってエネルギが反射するため受信点に 到達する A0 モードエネルギが小さくなったからであ る.また図10(b)を見ると入射波の周波数分布帯にお いて群速度が周波数に依存して大きく変化しているた め,分散性が大きく,時間方向に広がった波形になる. 200µs 前後に第一 S0 モードが大きく, 300µs 前後の第二 S0 モードが小さく受信されている. 第二 S0 モードは図 9 においても確認されており,入射 波にわずかに含まれていた S0 モードを受信したもの であると考えられる.第一 S0 モードは,発信点から入 射された A0 モードが 250mm 伝ばし,欠陥においてモ ード変換が起こり,そこから S0 モードとして 250mm 伝ばしたラム波を受信したものである.また A0 モー ドの群速度は入射波の周波数分布が集中している 0.5MHz<f<1.5MHzにおいてほぼ一定であるため波形は 入射波形同様パルス状をしているが,S0 モードは群速 度が周波数によって大きく異なるため,到達時刻に差 を生じ波形は広がっている.



Fig.9 Comparison between (a) Lamb wave theory and (b)HBEM without cracks. $\theta_1 = \theta_2 = 57.3^{\circ}$ (A0 mode generator and receiver).



Fig.10 A signal of (a) A0 mode receiver $\theta_2 = 57.3^{\circ}$ and (b) S0 mode receiver $\theta_2 = 25.7^{\circ}$.

5. まとめ

本研究では、複素波数を用いた厳密なラム波理論、 および2次元動弾性問題に対する境界要素法について 明らかにした上で、ラム波シミュレーションのための HBEM の定式化を行った.また正確なラム波波動を表 現する条件について検討し、その条件内で得られる最 少の節点数を用いて、実用オーダーに相当する長距離 を伝ばするラム波の発信・受信シミュレーションが可 能であることを示した.

付 録

2次元動弾性問題の基本解は次で表される.
$$u^*_{ij} = \frac{i}{4\mu} \left\{ \delta_{ij} U_1 - r_i r_j U_2 \right\}$$
 (A1)

$$U_{1} = H_{0}^{(1)}(k_{T}r) - (k_{T}r)^{-1} \left\{ H_{1}^{(1)}(k_{T}r) - \beta^{\frac{1}{2}} H_{1}^{(1)}(k_{L}r) \right\}$$

....(A2)
$$U_{2} = \left\{ H_{0}^{(1)}(k_{T}r) - \beta H_{0}^{(1)}(k_{L}r) \right\}$$

$$- 2(k_{T}r)^{-1} \left\{ H_{1}^{(1)}(k_{T}r) - \beta^{\frac{1}{2}} H_{1}^{(1)}(k_{L}r) \right\}$$
....(A3)

$$p^{*}_{ij} = \frac{i}{4} k_{T} \left\{ (\gamma n_{j} r_{,i} + n_{i} r_{,j} + \delta_{ij} n_{e} r_{,e}) P_{1} - ((\gamma + 2) n_{j} r_{,i} + n_{i} r_{,j} + \delta_{ij} n_{e} r_{,e} - 4 r_{,i} r_{,j} n_{e} r_{,e}) P_{2} - (\gamma n_{j} r_{,i} + 2 r_{,i} r_{,j} n_{e} r_{,e}) P_{3} \right\} \cdots \cdots \cdots \cdots (B1)$$

$$P_{1} = -(k_{T} r)^{-1} \left\{ H_{0}^{(1)}(k_{T} r) - \beta H_{0}^{(1)}(k_{L} r) \right\} - H_{1}^{(1)}(k_{T} r) + 2(k_{T} r)^{-2} \left\{ H_{1}^{(1)}(k_{T} r) - \beta^{\frac{1}{2}} H_{1}^{(1)}(k_{L} r) \right\} \cdots (B2)$$

$$P_{2} = (k_{T}r)^{-1} \left\{ H_{0}^{(1)}(k_{T}r) - \beta H_{0}^{(1)}(k_{L}r) \right\}$$

$$- 2(k_{T}r)^{-2} \left\{ H_{1}^{(1)}(k_{T}r) - \beta^{\frac{1}{2}} H_{1}^{(1)}(k_{L}r) \right\} \cdots (B3)$$

$$P_{3} = -2(k_{T}r)^{-1} \left\{ H_{0}^{(1)}(k_{T}r) - \beta H_{0}^{(1)}(k_{L}r) \right\}$$

$$- \left\{ H_{1}^{(1)}(k_{T}r) - \beta^{\frac{3}{2}} H_{1}^{(1)}(k_{L}r) \right\}$$

$$+ 4(k_{T}r)^{-2} \left\{ H_{1}^{(1)}(k_{T}r) - \beta^{\frac{1}{2}} H_{1}^{(1)}(k_{L}r) \right\} \cdots (B4)$$

$$k_{L} = \omega/c_{L}, \quad k_{T} = \omega/c_{T}, \quad r = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \cdots \cdots \cdots (C)$$

で与えられている.ここで H_j⁽ⁱ⁾は第 i 種 j 次ハンケル関 数である.

文 献

- e.g., Graff , K. F., Wave Motion in Elastic Solids, (1991), 431, Dover.
- (2) 境界要素法研究会編,境界要素法の理論と応用, (1986),45, コロナ社.
- (3) Kitahara, M., Boundary Integral Equation Methods in Eigenvalue Problems of Elastodynamics and Thin Plates, (1985), 109, Elsevier.
- (4) Brebbia, C. A. and Dominguez, J., Boundary Elements-An Introductory Course, Second Edition, (1992), Computational Mechanics Publications and McGraw-Hill(田中正隆·松本敏郎·中村正行共訳, 詳細 境界要素法, 1993, オーム社).
- (5) Lowe, M. J. S, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelecer.* Freq. Control. **42-4**, (1995), 525
- (6) Alleyne, D. N. and Cawley, P., *IEEE Trans. Ultrason.* Ferroelecer. Freq. Control. 39-3, (1992), 381
- (7) Mindlin, R. D., Medick, M. A, J. Appl. Mech., 27,

(1959), 561

- (8) Onoe, M., J. Acoust. Soc. Ame., 30-12, (1958), 1159
- (9) Viktorov, I. A., *Rayleigh and Lamb waves*, (1970), Plenum Press.
- (10) Torvik, P. J., J. Acoust. Soc. Ame., 41-2, (1967), 346.
- (11) Auld, B. A. and TSAO, E. M., *IEEE Trans. Ultrason.* Ferroelecer. Freq. Control. **SU24-5**, (1977), 317.
- (12) Cho, Y., Hongerholt, D. D. and Rose, J. L., *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelecer. Freq. Control.* 44-1,

(1997), 44.

- (13) Cho, Y. and Rose, J. L., J. Acoust. Soc. Ame., 99-4, (1996), 2097.
- (14) Mow, C. C. and Mente L. J., J. Appl. Mech., 30, (1963), 598
- (15) Pao, Y. H., J. Appl. Mech., 29, (1962), 299.
- (16) 岡本良夫, 逆問題とその解き方, (1992), オーム社.
- (17) 久保司郎, 逆問題, (1992), 培風館.