The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	ハイブリッド境界要素法を用いた大領域ラム波シミュレーション
Author(s)	林, 高弘; 琵琶, 志朗; 遠藤, 茂寿
Citation	日本機械学会論文集 A編. 1999, 65(630), p. 210-217
Version Type	AM
URL	https://hdl.handle.net/11094/89239
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

ハイブリッド境界要素法を用いた大領域ラム波シミュレーション*

林　高　弘[*1], 琵琶　志朗[*2], Joon Chul CHOI[*3], 遠　藤　茂　寿[*4]

Large-scale simulation of Lamb wave propagation by Hybrid Boundary Element Method

Takahiro HAYASHI[*5], Shiro BIWA, Joon Chul CHOI and Shigehisa ENDOH

[*5]*National Institute for Resources and Environment, Onogawa 16-3, Tsukuba Ibaraki, 305-8569 Japan*

The simulation of Lamb wave propagation is an efficient tool to improve the accuracy of non-destructive inspection of metallic plates by ultrasonic methods. However the widely used modeling techniques such as FDM, FEM and BEM require too much computation time. Since the Lamb wave technique is often used for large structures relative to the ultrasonic wavelength (e.g. fluid pipes, storage tanks etc.), its computing requires a huge number of nodes or elements which are nearly proportional to computation time. This study is therefore focused on the Hybrid BEM (HBEM), which is the combination of exact Lamb wave theory and BEM for two-dimensional elastodynamics. In HBEM much less nodes should be considered in the calculations, and it results in much shorter calculation time. A description of HBEM used for Lamb wave simulation is given in this paper. The parameters for the exact solution of Lamb wave propagation were optimized to achieve the shortest calculation time. Finally, an effective simulation of a large structure is presented under pre-determined conditions.

Key Words: Ultrasonic Inspection, Boundary Element Method, Computational Mechanics, Lamb Wave, Large-Scale Simulation

1.　はじめに

ラム波はさまざまなモードで屈曲運動し板材の形状に沿って進行する．その伝ぱ波形は音速・弾性定数以外に，板厚や板形状・損傷・劣化・はく離・異方性といった被検査材料の特性や，入射超音波の振動周波数に大きく依存することが知られている(1)．また板の屈曲振動であるため，バルク波のような拡散によるエネルギ散逸が起こらず比較的長距離を伝ぱする特徴を持つ．これらの性質からラム波による板材料の非破壊検査は非常に効果的であり，特に輸送管や大型タンクなどの大型構造材料に多く使用されている．しかし，損傷・劣化部分の形状や大きさ，不均質部分の同定といった非破壊検査技術の高度化が求められるに従って，ラム波伝ぱ状態の精密な観察および分析が不可欠となってきている．数値計算シミュレーションはその要求に答える最適なツールである．

超音波シミュレーションに使用される従来の数値計算法として，差分法(FDM)，有限要素法(FEM)，境界要素法(BEM)(2)(3)(4)などがあげられ，ラム波をこれらの方法で表現するとき，扱う材料が波長に比べ大きくなればなるほど，要素や節点を多く取る必要があり，計算時間が要素節点数に比例して長くなるという問題を持っている．特にラム波は大型構造物の検査に応用される事が多く，ラム波シミュレーション(5)(6)を実用オーダーに適用するためには，その計算時間の短縮は必要不可欠である．

ラム波は無数の振動モードにより形成されており，境界条件によって各振動モードのエネルギ量は決定される．通常，振動形態の複雑な高次モードは，減衰が大きいためエネルギ量が小さく無視される．これらの性質は Mindlin ら(7)-(11)の理論的検討によって見出されたものであり，ラム波理論という．これは欠陥･損傷のない単純平板部分に用いることができる．一方 BEM は波動方程式にしたがうすべての現象を描写することができ，

*　原稿受付　1998 年　月　日
*1　正員，資源環境技術総合研究所，(〒305-8569, つくば市小野川 16-3)
*2　正員，名古屋大学工学研究科
*3　新エネルギー･産業技術総合開発機構
*4　資源環境技術総合研究所

任意形状をした領域に適用される．本研究では，欠陥や損傷のない平板部分にラム波理論を適用し，欠陥･損傷･その他任意形状部分に BEM を適用するハイブリッド境界要素法(HBEM)[12][13]の定式化を行う．これによって BEM の節点数が大幅に減少し，計算時間を飛躍的に節約できる．さらに，ラム波理論で高次モードを無視したために発生する誤差の取り扱いについて検討し，BEM 領域の操作によって計算精度の向上を図る.また，節点数が最小になる条件を探索的に求め，その条件を使って実用オーダーに相当する長距離を伝ぱするラム波の発信･受信シミュレーションを行う.

2． ハイブリッド境界要素法

2.1 単純平板に対するラム波理論[1]　ラム波シミュレーションのためのハイブリッド境界要素法の定式化を行う前に,ラム波理論を導出しておく必要がある．ラム波理論は，平行な２つの境界面を持った単純平板に調和振動を付加したとき,任意点での変位および応力を関数式として表す解析的手法であり，多くの文献や著書にまとめられている[5]-[11]．本節では一様，等方性,線形単純平板について複素波数を用いたラム波理論を導出する．図１に示すように板中のラム波の伝播方向を x,板厚方向を y とする．一般にこのような平板材料の表面から縦波弾性波を斜角入射する場合，紙面に垂直方向の変位(SH 波)は発生しない．したがってここでは x, y の２次元平面について考える．一様等方性線形弾性体に対する波動方程式を，板表面において y 方向垂直応力 τ_{yy} とせん断応力 τ_{xy} がかからないという境界条件

$$\tau_{yy}=0 \quad , \quad \tau_{xy}=0 \quad \left(y=\pm d/2\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

のもとで解くことにより，ラム波はつぎの Rayleigh-Lamb 方程式によって支配される.角周波数 ω の調和振動波はこれらいずれかの式を満たす波数 ξ あるいは位相速度 c でのみ伝ぱが許される.

$$\Delta_A \equiv \left(\xi^2-\xi_\beta{}^2\right)^2 \sin(\xi_\alpha d/2)\cos(\xi_\beta d/2) + 4\xi^2\xi_\alpha\xi_\beta \cos(\xi_\alpha d/2)\sin\left(\xi_\beta d/2\right)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot a)$$

$$\Delta_S \equiv \left(\xi^2-\xi_\beta{}^2\right)^2 \cos(\xi_\alpha d/2)\sin(\xi_\beta d/2) + 4\xi^2\xi_\alpha\xi_\beta \sin(\xi_\alpha d/2)\cos\left(\xi_\beta d/2\right)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot b)$$

$$\xi=\omega/c, \quad \xi_\alpha=\sqrt{\omega^2/c_L{}^2-\xi^2}, \quad \xi_\beta=\sqrt{\omega^2/c_T{}^2-\xi^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

ここで，c_L, c_T はそれぞれ弾性平板の縦波音速，横波音速を示す.

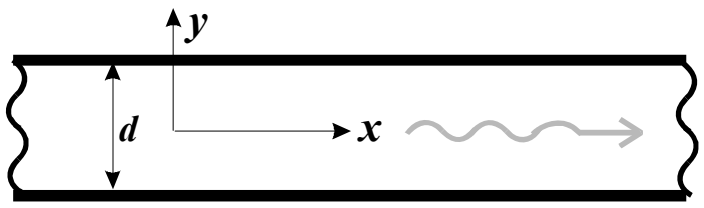

Fig.1 Coordinate system for a plate of thickness ***d***

$\Delta_A=0$ を満たすとき伝ぱ波形は板厚中心の直線 $y=0$ に対して非対称であり非対称モードと呼ばれ，$\Delta_S=0$ を満たすとき伝ぱ波形は直線 $y=0$ に対して対称であり対称モードと呼ばれる．非対称モード及び対称モードの伝ぱ形態は無数に存在するので，一般に最低次数のモードから順に非対称モードに $A0, A1, A2\ldots$ または対称モードに $S0, S1, S2\ldots$ と記号を付す．また群速度は

$$c_g=\frac{\partial\omega}{\partial\xi} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

で表され，位相速度同様に各モード固有の速度分布を持つ.

x,y 方向の変位は次の式で与えられる.

$$u_i=u^A{}_i+u^S{}_i \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

ここで $u^A{}_i$, $u^S{}_i$ はそれぞれ $i(=x,y)$ 方向の非対称及び対称モードの変位であり,次式から得られる.なお,$\exp(-i\omega t)$ はすべてに共通の項として持つので以下では省略する.

$$u^A{}_x=\sum_{\xi=\xi_{Aj}} VI_{Aj}\hat{u}^{Aj}{}_x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6\cdot a)$$

$$u^A{}_y=\sum_{\xi=\xi_{Aj}} VI_{Aj}\hat{u}^{Aj}{}_y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6\cdot b)$$

$$u^S{}_x=\sum_{\xi=\xi_{Sj}} VI_{Sj}\hat{u}^{Sj}{}_x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6\cdot c)$$

$$u^S{}_y=\sum_{\xi=\xi_{Sj}} VI_{Sj}\hat{u}^{Sj}{}_y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6\cdot d)$$

$$\hat{u}^{Aj}{}_x=(i\xi\sin\xi_\alpha y-R_A\xi_\beta\sin\xi_\beta y)\exp(i\xi x) \cdots\cdots (7\cdot a)$$

$$\hat{u}^{Aj}{}_y=(\xi_\alpha\cos\xi_\alpha y-R_A i\xi\cos\xi_\beta y)\exp(i\xi x) \cdots\cdots (7\cdot b)$$

$$\hat{u}^{Sj}{}_x=(i\xi\cos\xi_\alpha y+R_S\xi_\beta\cos\xi_\beta y)\exp(i\xi x) \cdots\cdots (7\cdot c)$$

$$\hat{u}^{Sj}{}_y=(-\xi_\alpha\sin\xi_\alpha y-R_S i\xi\sin\xi_\beta y)\exp(i\xi x) \cdots\cdots (7\cdot d)$$

ここで

$$R_A=\frac{-2i\xi\xi_\alpha\cos\left(\xi_\alpha d/2\right)}{\left(\xi^2-\xi_\beta{}^2\right)\cos(\xi_\beta d/2)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8\cdot a)$$

$$R_S=\frac{2i\xi\xi_\alpha\sin\left(\xi_\alpha d/2\right)}{\left(\xi^2-\xi_\beta{}^2\right)\sin(\xi_\beta d/2)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8\cdot b)$$

である．ただし $\sum_{\xi=\xi_{Aj}}$ は $j(=0,1\ldots\infty)$ 番目の非対称モード Aj における $\Delta_A=0$ の解 ξ_{Aj} を，式中の ξ に代入した

値の総和を表し，$\sum_{\xi=\xi_{Sj}}$ は対称モードでの総和である

VI_{Aj}，VI_{Sj} は各モードのエネルギ量を決定する振幅係数であり，境界条件から決定される．また変位から，任意点での応力が

$$\tau_{xx}=\mu\left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial u_x}{\partial x}+\gamma\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9\cdot a)$$

$$\tau_{xy}=\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9\cdot b)$$

$$\tau_{yy}=\mu\left(\gamma\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{1}{\beta}\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9\cdot c)$$

$$\beta=\left(c_T/c_L\right)^2,\quad \gamma=1/\beta-2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

によって求められる．μ は横弾性定数である．

境界条件として式(1)の代わりに

$$\tau_{yy}=\int_{-\infty}^{\infty}Z(\xi)\exp\{i(\xi x-\omega t)\}d\xi \qquad y=+d/2\ \cdots (11\cdot a)$$

$$\tau_{yy}=0 \qquad y=-d/2\ \cdots (11\cdot b)$$

$$\tau_{xy}=0 \qquad y=\pm d/2\ \cdots (11\cdot c)$$

という調和振動を板の片表面に付加した場合，式(7)の振幅係数は次のように決定される[9]．

$$VI_{Aj}=-\frac{\pi}{\mu}\frac{iZ(\xi)\left(\xi^2-\xi_\beta{}^2\right)\cos\left(\xi_\beta d/2\right)}{\Delta_A{}'}\cdots\cdots\cdots (12\cdot a)$$

$$VI_{Sj}=-\frac{\pi}{\mu}\frac{iZ(\xi)\left(\xi^2-\xi_\beta{}^2\right)\sin\left(\xi_\beta d/2\right)}{\Delta_S{}'}\cdots\cdots\cdots (12\cdot b)$$

ここで $\Delta_A{}'$，$\Delta_S{}'$ はそれぞれ Δ_A，Δ_S の ξ に関する導関数を表す．たとえば境界条件が

$$\tau_{yy}=\begin{cases}\sigma_0\exp\{i(\xi_0 x-\omega t)\} & |x|\le b\\ 0 & |x|>b\end{cases}\quad y=+d/2\cdots (13\cdot a)$$

$$\tau_{yy}=0 \qquad y=-d/2\cdots (13\cdot b)$$

$$\tau_{xy}=0 \qquad y=\pm d/2\ \cdots\cdots (13\cdot c)$$

という平板の片側面に局所的な調和振動垂直応力を付加した場合，(11・a)はフーリエ変換の形であるから $Z(\xi)$ は逆フーリエ変換によって求められ，

$$Z(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tau_{yy}\exp\{-i(\xi x-\omega t)\}dx$$

$$=\frac{\sigma_0\sin(\xi_0-\xi)b}{\pi(\xi_0-\xi)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

となる．式(14)を用いたとき，式(13)は式(11)の形で書き表すことができる．したがって境界条件式(13)が与えられた単純無限平板に対して，式(5)～式(12)によって任意点の変位及び応力を求めることができる．

2.2 境界要素法による２次元動弾性問題[2][3][4]

振動数 ω の調和振動に対する波動方程式は，

$$(c_L{}^2-c_T{}^2)u_{i,ij}+c_T{}^2u_{j,ii}+\omega^2u_j=0\ \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\ (15)$$

であり，また表面力ベクトルは

$$p_i=\tau_{ij}n_j\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

（n_j は境界 Γ の単位垂直ベクトル）となる．このときグリーン公式から導かれる境界積分方程式は次で表される．

$$c_{ki}(\mathbf{r})u_k(\mathbf{r})+\int_\Gamma p_{ij}{}^*(\mathbf{r}',\mathbf{r})u_j(\mathbf{r}')d\Gamma=\int_\Gamma u_{ij}{}^*(\mathbf{r}',\mathbf{r})p_j(\mathbf{r}')d\Gamma$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

ここで $\mathbf{r}$ は任意点ベクトル，$\mathbf{r}'$ は境界 Γ 上の位置ベクトルを表し，c_{ki} は $\mathbf{r}$ が滑らかな境界上のとき対角要素に 1/2 の値を取る性質を持つテンソルである．また，基本解 $u^*{}_{ij}, p^*{}_{ij}$ は

$$(c_L{}^2-c_T{}^2)u^*{}_{ik,kj}+c_T{}^2u^*{}_{ij,kk}+\omega^2u^*{}_{ij}=-\delta_{ij}\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})$$

$$\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\ (18)$$

および式(9),式(16)から求められるテンソルである（付録参照）．ここで δ_{ij} は Kronecker デルタであり，$\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})$ は Dirac のデルタ関数である．

式(17)の境界積分は離散化され，それぞれ要素ごとに数値積分が行われるが，$r=|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|\to 0$ において $u^*{}_{ij}=O(1/r)$，$p^*{}_{ij}=O(1/r^2)$ の特異性を有するため，そのまま数値積分することができず，静弾性問題の基本解 $u^{*STA}{}_{ij}$ 及び $p^{*STA}{}_{ij}$ を導入するのが一般的である．$u^*{}_{ij}-u^{*STA}{}_{ij}$ と $p^*{}_{ij}-p^{*STA}{}_{ij}$ は正則であり，また $u^{*STA}{}_{ij}$ は特異性が弱いため，これらはそのまま Gauss 積分を使って積分計算ができる．また $p^{*STA}{}_{ij}$ の特異部分とテンソル c_{ij} は，$p^{*STA}{}_{ij}$ の正則部分から剛体変位条件を使って計算される[2]．このように得られた式(17)の離散化方程式は，

$$\mathbf{Hu}=\mathbf{Gp}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

という線型連立方程式となる．$\mathbf{u}$，$\mathbf{p}$ はそれぞれ各節点での x, y 方向の変位，表面力を要素にもつベクトル，$\mathbf{H}$，$\mathbf{G}$ はそれぞれ $p^*{}_{ij}$，$u^*{}_{ij}$ の境界積分を要素とする行列である．境界要素法では通常，$\mathbf{u}$ または $\mathbf{p}$ の未知数が式(19)の方程式数に等しいため未知数の値を求めることができる．一般に任意幾何形状に対して境界積分要素に曲線要素を用いた方が精度良く解が求められる．本報においては，曲線要素の中でも最も簡単な２次要素を，また境界積分として，Gauss の４点積分を用いた．これらを用いた境界要素法による解の正当性については，剛体円柱や円柱空洞からの平面波の散乱理論解[14][15]と比較することによって確認した．

2.3 ハイブリッド境界要素法の定式化

図２のように欠陥の存在する平板材料を，欠陥周りの領域と半無限単純平板領域に分割して考える．このとき，それぞれ

領域名をLAMB領域Ⅰ,BEM領域Ⅱ,LAMB領域Ⅲと，境界名をΓ_1，Γ_2，Γ_3，Γ_4と図２のように名づける．BEM 領域Ⅱにおいては，従来の閉領域 BEM のように式(19)の行列**H**と**G**を組み立てることができる.行列**H**，**G**および変位，表面力ベクトル**u**，**p**のうち境界Γ_1～Γ_4に対応する小行列およびベクトルをそれぞれ添え字 1～4 で表すと，

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}\mathbf{H_1} & \mathbf{H_2} & \mathbf{H_3} & \mathbf{H_4}\end{bmatrix} \cdots\cdots (20\cdot a)$$

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}\mathbf{G_1} & \mathbf{G_2} & \mathbf{G_3} & \mathbf{G_4}\end{bmatrix} \cdots\cdots (20\cdot b)$$

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}\mathbf{u_1}^T & \mathbf{u_2}^T & \mathbf{u_3}^T & \mathbf{u_4}^T\end{bmatrix}^T \cdots\cdots (20\cdot c)$$

$$\mathbf{p}=\begin{bmatrix}\mathbf{p_1}^T & \mathbf{p_2}^T & \mathbf{p_3}^T & \mathbf{p_4}^T\end{bmatrix}^T \cdots\cdots (20\cdot d)$$

となり，式(19)は

$$\mathbf{H_1u_1}+\mathbf{H_2u_2}+\mathbf{H_3u_3}+\mathbf{H_4u_4}$$
$$=\mathbf{G_1p_1}+\mathbf{G_2p_2}+\mathbf{G_3p_3}+\mathbf{G_4p_4} \cdots\cdots (21)$$

で表される．$\bullet^T$は行列$\bullet$の転置行列である．

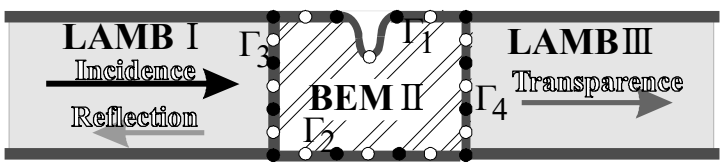

Fig.2 Hybrid Boundary Element Method for Lamb wave propagation.

次に LAMB 領域Ⅰにおける変位と応力を考える．入射波に対しては式(6)をそのまま用いることができる．ここで式(6)の定数 VI_{Aj}, VI_{Sj}は入射波の性質のよって式(12)などで決定される入射振幅係数である.反射波では式(6)の既知入射振幅係数 VI_{Aj}, VI_{Sj}を未知反射振幅係数 VR_{Aj}，VR_{Sj} に，波数ξを$-\xi$に置き換えればよい．このようにして，LAMB 領域Ⅰにおける任意点の変位と応力は，既知定数 VI_{Aj}，VI_{Sj}と未知定数 VR_{Aj}，VR_{Sj}の線形和として与えられる.境界Γ_3上の節点の変位$\mathbf{u_3}$と表面力$\mathbf{p_3}$は

$$\mathbf{u_3}=\mathbf{H_{g1}v1}+\mathbf{H_{g2}v2} \cdots\cdots (22\cdot a)$$

$$\mathbf{p_3}=\mathbf{G_{g1}v1}+\mathbf{G_{g2}v2} \cdots\cdots (22\cdot b)$$

$$\mathbf{v1}=\begin{bmatrix}VI_{A0} & VI_{S0} & VI_{A1} & VI_{S1} & \cdots\end{bmatrix}^T \cdots\cdots (22\cdot c)$$

$$\mathbf{v2}=\begin{bmatrix}VR_{A0} & VR_{S0} & VR_{A1} & VR_{S1} & \cdots\end{bmatrix}^T \cdots\cdots (22\cdot d)$$

$$\mathbf{H_{g1}}=\begin{bmatrix}\hat{u}^{A0}{}_x & \hat{u}^{S0}{}_x & \hat{u}^{A1}{}_x & \cdots\\ \hat{u}^{A0}{}_y & \hat{u}^{S0}{}_y & \hat{u}^{A1}{}_y & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{bmatrix} \cdots\cdots (22\cdot e)$$

$$\mathbf{H_{g2}}=\begin{bmatrix}\hat{u}^{A0}{}_x & \hat{u}^{S0}{}_x & \hat{u}^{A1}{}_x & \cdots\\ \hat{u}^{A0}{}_y & \hat{u}^{S0}{}_y & \hat{u}^{A1}{}_y & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{bmatrix}_{\xi\to-\xi} \cdots\cdots (22\cdot f)$$

$$\mathbf{G_{g1}}=\begin{bmatrix}\hat{p}^{A0}{}_x & \hat{p}^{S0}{}_x & \hat{p}^{A1}{}_x & \cdots\\ \hat{p}^{A0}{}_y & \hat{p}^{S0}{}_y & \hat{p}^{A1}{}_y & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{bmatrix} \cdots\cdots (22\cdot g)$$

$$\mathbf{G_{g2}}=\begin{bmatrix}\hat{p}^{A0}{}_x & \hat{p}^{S0}{}_x & \hat{p}^{A1}{}_x & \cdots\\ \hat{p}^{A0}{}_y & \hat{p}^{S0}{}_y & \hat{p}^{A1}{}_y & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{bmatrix}_{\xi\to-\xi} \cdots\cdots (22\cdot h)$$

のように行列とベクトルで表すことができる．領域Ⅲについても同様に考えることができ，境界Γ_4上の節点上の変位と表面力は未知透過振幅係数 VT_{Aj}，VT_{Sj} を使って，

$$\mathbf{u}_4=\mathbf{H_{g3}v3} \cdots\cdots (23\cdot a)$$

$$\mathbf{p}_4=\mathbf{G_{g3}v3} \cdots\cdots (23\cdot b)$$

$$\mathbf{v3}=\begin{bmatrix}VT_{A0} & VT_{S0} & VT_{A1} & VT_{S1} & \cdots\end{bmatrix}^T \cdots\cdots (23\cdot c)$$

で与えられる．$\mathbf{H_{g3}}$，$\mathbf{G_{g3}}$は$\mathbf{H_{g1}}$，$\mathbf{G_{g1}}$と同じ式を使って得られる行列である．

式(22)，式(23)を式(21)に代入し左辺を未知項で，右辺を既知項でまとめと，次の連立方程式が得られる．

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b} \cdots\cdots (24\cdot a)$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{H_1} & \mathbf{H_2} & \mathbf{H_3H_{g1}}-\mathbf{G_3G_{g1}} & \mathbf{H_4H_{g2}}-\mathbf{G_4G_{g2}}\end{bmatrix} \cdots\cdots (24\cdot b)$$

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\mathbf{u_1}^T & \mathbf{u_2}^T & \mathbf{v2}^T & \mathbf{v3}^T\end{bmatrix}^T \cdots\cdots (24\cdot c)$$

$$\mathbf{b}=\mathbf{G_1p_1}+\mathbf{G_2p_2}-(\mathbf{H_3H_{g1}}-\mathbf{G_3G_{g1}})\mathbf{v1} \cdots\cdots (24\cdot d)$$

通常，ラム波の高次モードは無視できるほどエネルギ量が小さく,式（7）の無限和を低次モードのみを考慮した有限和として扱うことができる.例えば，A0 から A3 および S0 から S3 モードを考慮した場合，**v2**，**v3**の未知要素はそれぞれ８個ずつである．多くの場合，連立方程式(24)は，条件式過多，未知数不足，すなわち行列**A**が列より行の方が多い非正則行列になっている．そこで，**x** に次の式によって求められる最小二乗解[16][17]を用いた．

$$\mathbf{x}=\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{b} \cdots\cdots (25)$$

ここで行列$\mathbf{A}^*$は行列**A**のエルミート共役を示す．**v2**，**v3**が求められることによって，LAMB 領域Ⅰおよび LAMB 領域Ⅲの任意点での変位ならびに応力を求めることができる．また，境界Γ_1～Γ_4上のすべての節点での変位及び表面力が求められることによって，BEM 領域Ⅱの任意点の変位及び応力を導くことができる．

３． HBEMの最適化

3.1 HBEM結合誤差の緩和　厚さ 2mm のアルミニウム板（c_L=6300m/s, c_T=3100m/s, d=2.0mm）に対する複素波数の分散曲線は，図３（波数の実数部），図４（波数の虚数部）で示される．（波数は周波数によって実数，純虚数または複素数をとり，実数は x 方向伝ぱ波動を，純虚数及び複素数は減衰波動を表している．通常，板表面より入射され伝ぱするラム波は，実数波数の低次モードである．この低次モード波が欠陥や板端面によって散乱･反射する場合，無限個の高次モード波がさまざまなエネルギ量を持って反射する．）

BEM 領域においては，波動方程式(15)にしたがうすべての

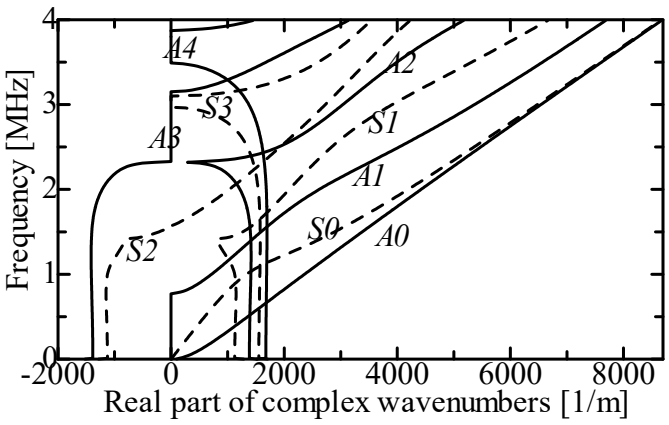

Fig.3 Dispersion curves
for real part of complex wavenumbers.

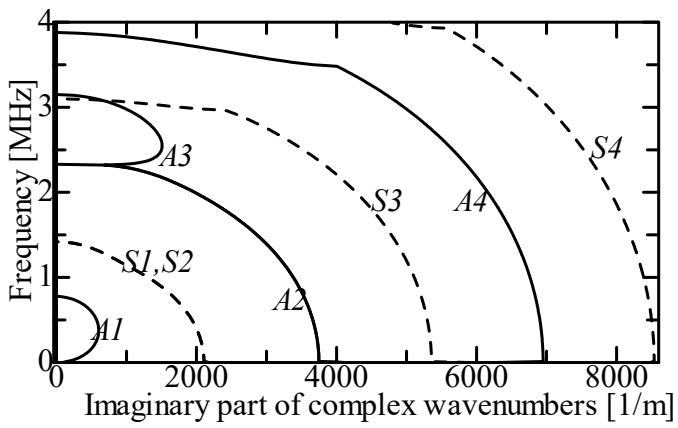

Fig.4 Dispersion curves for
imaginary part of complex wavenumbers.

現象を表現することができるため，反射･散乱によって発生した無限個の高次モードも含めて計算されているが, LAMB 領域においては，ラム波理論式(6)の無限和を計算上，有限和として扱うため打ち切られた高次モード波の存在を無視していることになり，ラム波波動を正確に表現しない．このとき BEM 領域と LAMB 領域の間に誤差が生じ，正確な解を求められないということが起こる．

そこでこの誤差を解消するために高次モード波の減衰性を用いた．高次モード波は波数の虚部が正値を持つ減衰波動であり，モードの次数が大きくなるほどその波数虚部の値は大きい（図４）． BEM 領域中にある散乱･反射点により発生した高次モード波は, ある距離だけ離れた位置で十分無視できるほど小さくなり，この距離は減衰の大きな高次モードほど短い．このように BEM 領域に散乱･反射点からある距離離れた緩和領域を与えることによって，有限和をとったラム波理論解と BEM による解を一致させることができた．またこの誤差緩和距離はラム波理論計算で次数の大きなモードまで考慮するほど短くてよいことが分かった．

ここでは次の 4 通りについて，厚さ 2mm のアルミニウム板（c_L=6300m/s，c_T=3100m/s， d=2.0mm）に対し，周波数 0<f<2.0MHz の範囲で考察する．a).9 個のモード A0,S0,…A4 を考慮に入れるとき．b).8 個のモード A0,S0,…S3 を考慮に入れるとき．c).7 個のモード A0,S0,…A3 を考慮に入れるとき．d).6 個のモード A0,S0,…S2 を考慮に入れるとき．

この誤差緩和距離を求める方法として，ラム波の進行波エネルギと板端面からの反射波エネルギの保存を用いた．図５のように，端面が BEM 領域であり，端面から l の距離に LAMB 領域と BEM 領域の境界があるとする．このとき BEM 節点の間隔は，分散曲線や式(7)より予想されるラム波波長及び変位，応力分布から決定される．一般に一波長につき 8 節点で波形を十分に表現できるとされているのでこれを用いて, x 方向節点間隔 0.1mm，y 方向節点数 32 個とした．板の断面平均エネルギは,

$$E = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[-i\omega\int_{-d/2}^{d/2}\left(\tau_{xx}\bar{u}_x + \tau_{xy}\bar{u}_y\right)dy\right] \cdots\cdots\cdots (26)$$

で与えられ, 入射波エネルギ E_I と反射波エネルギ E_R の比を

$$R = E_R / E_I \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (27)$$

で与える． $\bar{u}$ は u の複素共役を示す．入射進行波には A0 波と S0 波を組み合わせた伝ぱ波,

$$VI_{A0} = 1, VI_{S0} = 1, VI_{Aj,Sj} = 0 \quad (j = 1,2....) \cdots\cdots\cdots\cdots (28)$$

を用いた．0<f<2.0MHz の周波数範囲で入射と反射のエネルギ比が 1 %の誤差の範囲内, すなわち 0.99<R<1.01 が成り立つとき解が正しいこととした．

その結果，0<f<2.0MHz の周波数範囲内で解が正しく求められる最小の誤差緩和距離は， a)，b)，c)及び d)に対し, それぞれ 0.6mm, 0.8mm, 1.0mm, 2.8mm であった．ただし x 方向の節点間隔が 0.1mm で境界要素法において 2 次要素を用いているので，この距離は 0.2mm ステップで変化させた. これらの値は, それぞれ S4 モード，A4 モード，S3 モード，A3 モードの，周波数 2.0MHz における波数の虚部に反比例している．

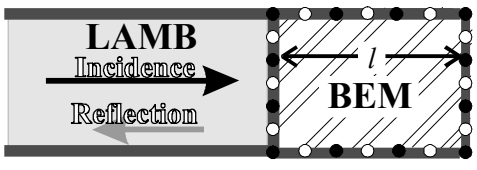

Fig.5 Test of Lamb wave reflection.

3.2 節点数の最小化　前節で用いた節点数は, 一波長につき 8 点を参考に取っているため，解の精度向上とは無関係に多く取りすぎている可能性がある．そこで，上記条件 a), b), c), d)に対して，それぞれ求められた最小誤差緩和距離を用いた条件で，節点数を変化させ，解が正しくなるような節点数を探索した．そのとき最少の節点数を図 6 に示す．d)のように誤差緩和距離が長い場合は, x 方向の節点数が多くなるため，総節点数も多くなる．また a)のように考慮に入れるラム波モードが多い場合, y 方向断面の変位及び応力分布が複雑になり，複雑な分布を十分表現するために必要な節点数が多くなるため，総節点数も多くなる．最も節点が少なく

なったのは，モードを 7 つ考慮した条件 c)の場合であった．このとき，x 方向の節点は 5 個，y 方向の節点は 9 個，反射壁から LAMB 領域と BEM 領域の境界までの距離は 1.0mm であった．

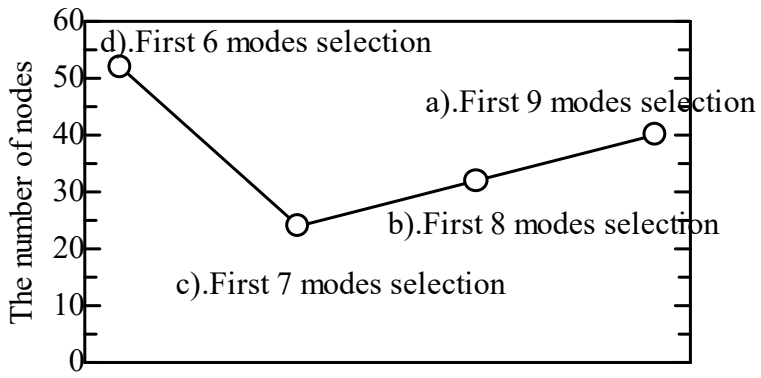

Fig.6 The minimum number of nodes for four kinds of mode selections.

4． ラム波発信･受信シミュレーション

２章により求められる任意点の変位や応力は，ある調和振動周波数 ω に対する値である．各点の変位や応力を時間変化として求めるときには，あらゆる離散周波数による値を求めた上で，高速逆フーリエ変換を施す．

図 7 のような設定条件のもとでラム波発信及び受信のシミュレーションを行った．図 8 のような波形(a)および周波数分布(b)を持つ入射波を使用した．計算に使用する周波数範囲は 0MHz~2.0MHz で，観測時間範囲は 100μs~420μs とした．これは群速度と入射点･観測点距離の関係からラム波の観測時刻を推定して求められた時間である．このとき離散周波数点数は 640 点となった．図 8 の仮想欠陥の状態では節点数は 48 個である．この場合の計算時間は Pentium MMX 200MHz のパソコン上で約 2 時間程度であり，さらに大型の対象物や長い観測時間に対しても今回提案した HBEM で十分適用可能である．

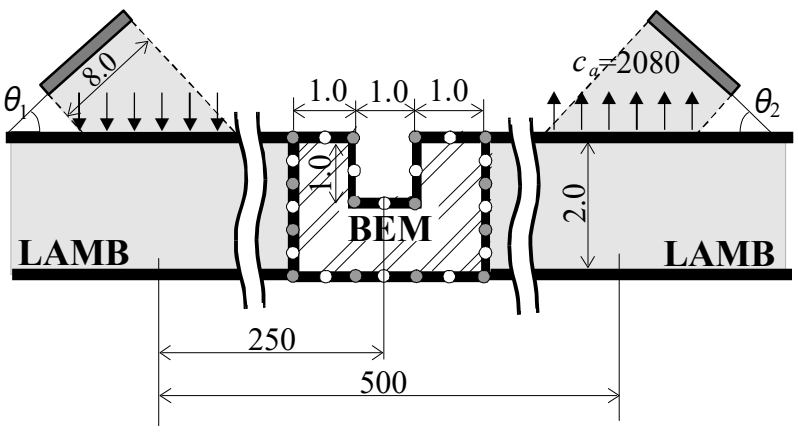

Fig.7 Large-scale simulation of Lamb wave. Unit [mm][m/s]

超音波探子と平板表面の間で超音波縦波を伝達する媒体の縦波音速を $c_a = 2080\,\mathrm{m/s}$ とする．平板中を伝ぱするラム波の各モードの構成は入射角 θ_1 によって大きく変化し，スネルの法則

$$\sin\theta_1 / \sin 90^\circ = c_a / c \quad \cdots\cdots (29)$$

にしたがう位相速度 c に相当するモードが大きく発生する．また受信探触子の角度に関しても，同じことがいえる．この性質を利用すると，入射角によってラム波モードを選択的に発生させることができ，受信角によって選択的に受信することができる．

中心周波数が図 8 (b)であらわされるように 1.0MHz のとき，厚さ 2.0mm のアルミニウム平板を伝ぱする A0 モードの位相速度は約 2500m/s, S0 モードの位相速度は約 4800m/s である．したがって A0 モードを選択するとき式(31)から，入射角または受信角は約 57.3°，S0 モードを選択するとき，約 25.7° を選べばよい．

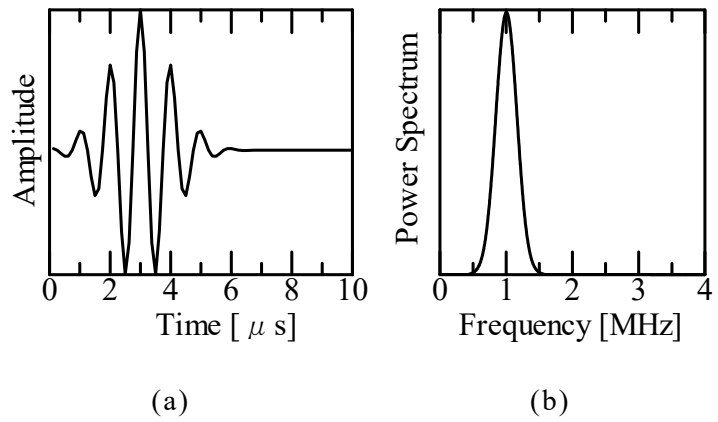

Fig.8 Incident wave used in this study

図 9 は欠陥のない平板に A0 モードを選択的に入射し，入射点から 500mm 離れた観測点で A0 モードを受信したときのラム波理論により計算された波形と，HBEM により計算された波形である．３章で反射波に対して HBEM が正確な値を返すことを示したが図 9 の比較から HBEM が透過波に対しても正確な値を与えていることが分かる．受信される時刻は探子間距離と A0 モードの群速度から計算される時刻に等しい．S0 モードも A0 モードに比べ振幅は非常に小さいが時刻 300μs 前後で受信され，その観測時刻も距離と群速度の関係によく合う．

図１０は図 7 のような欠陥の存在するモデルに入射角 57.3° で入射したときの応答波形である．図１０(a)は受信角 57.3° で A0 モードを選択的に受信した場合の応答で，図１０(b)は受信角 25.7° で S0 モードを選択的に受信した場合の応答である．図 9 と図１０(a)を比較すると，A0 モードの受信波が小さくなっている．これは欠陥によってエネルギが反射するため受信点に到達する A0 モードエネルギが小さくなったからである．また図１０(b)を見ると入射波の周波数分布帯において群速度が周波数に依存して大きく変化しているため，分散性が大きく，時間方向に広がった波形になる．２００μs 前後に第一 S0 モードが大きく，

300μs 前後の第二 S0 モードが小さく受信されている．第二 S0 モードは図 9 においても確認されており，入射波にわずかに含まれていた S0 モードを受信したものであると考えられる．第一 S0 モードは，発信点から入射された A0 モードが 250mm 伝ぱし，欠陥においてモード変換が起こり，そこから S0 モードとして 250mm 伝ぱしたラム波を受信したものである．また A0 モードの群速度は入射波の周波数分布が集中している 0.5MHz<f<1.5MHz においてほぼ一定であるため波形は入射波形同様パルス状をしているが，S0 モードは群速度が周波数によって大きく異なるため，到達時刻に差を生じ波形は広がっている．

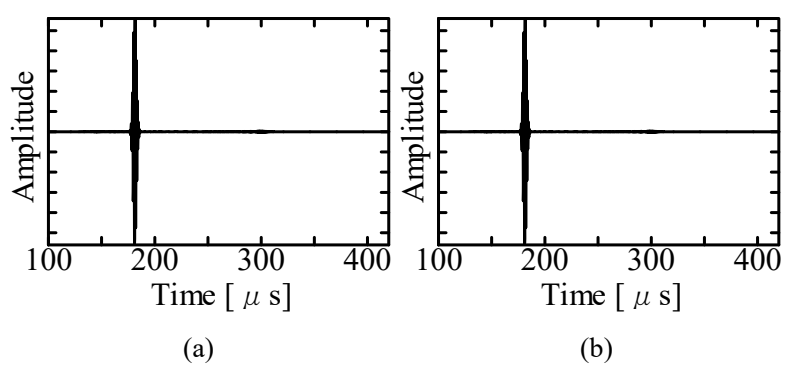

Fig.9 Comparison between (a) Lamb wave theory and (b)HBEM without cracks. $\theta_1 = \theta_2 = 57.3^\circ$ (A0 mode generator and receiver).

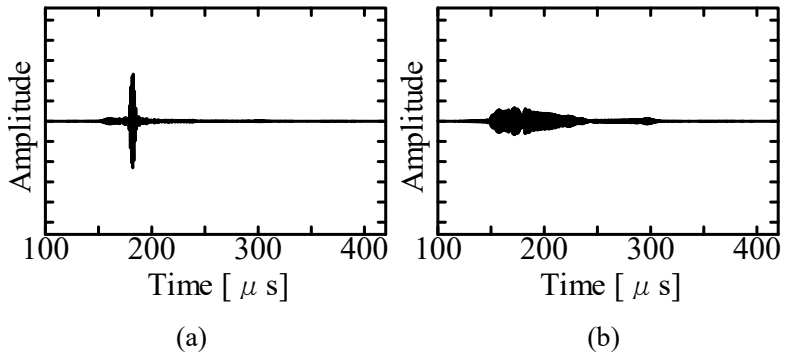

Fig.10 A signal of (a) A0 mode receiver $\theta_2 = 57.3^\circ$ and (b) S0 mode receiver $\theta_2 = 25.7^\circ$.

5． まとめ

本研究では，複素波数を用いた厳密なラム波理論，および２次元動弾性問題に対する境界要素法について明らかにした上で，ラム波シミュレーションのための HBEM の定式化を行った．また正確なラム波波動を表現する条件について検討し，その条件内で得られる最少の節点数を用いて，実用オーダーに相当する長距離を伝ぱするラム波の発信･受信シミュレーションが可能であることを示した．

付 録

２次元動弾性問題の基本解は次で表される．

$$u^*_{ij} = \frac{i}{4\mu}\left\{\delta_{ij}U_1 - r_{,i}r_{,j}U_2\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{(A1)}$$

$$U_1 = H_0^{(1)}(k_T r) - (k_T r)^{-1}\left\{H_1^{(1)}(k_T r) - \beta^{\frac{1}{2}} H_1^{(1)}(k_L r)\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{(A2)}$$

$$U_2 = \left\{H_0^{(1)}(k_T r) - \beta H_0^{(1)}(k_L r)\right\} - 2(k_T r)^{-1}\left\{H_1^{(1)}(k_T r) - \beta^{\frac{1}{2}} H_1^{(1)}(k_L r)\right\} \cdots\cdots \quad \text{(A3)}$$

$$p^*_{ij} = \frac{i}{4}k_T\left\{\left(\gamma n_j r_{,i} + n_i r_{,j} + \delta_{ij} n_e r_{,e}\right)P_1 - \left((\gamma+2)n_j r_{,i} + n_i r_{,j} + \delta_{ij} n_e r_{,e} - 4 r_{,i} r_{,j} n_e r_{,e}\right)P_2 - \left(\gamma n_j r_{,i} + 2 r_{,i} r_{,j} n_e r_{,e}\right)P_3\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{(B1)}$$

$$P_1 = -(k_T r)^{-1}\left\{H_0^{(1)}(k_T r) - \beta H_0^{(1)}(k_L r)\right\} - H_1^{(1)}(k_T r) + 2(k_T r)^{-2}\left\{H_1^{(1)}(k_T r) - \beta^{\frac{1}{2}} H_1^{(1)}(k_L r)\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{(B2)}$$

$$P_2 = (k_T r)^{-1}\left\{H_0^{(1)}(k_T r) - \beta H_0^{(1)}(k_L r)\right\} - 2(k_T r)^{-2}\left\{H_1^{(1)}(k_T r) - \beta^{\frac{1}{2}} H_1^{(1)}(k_L r)\right\} \cdots\cdots \quad \text{(B3)}$$

$$P_3 = -2(k_T r)^{-1}\left\{H_0^{(1)}(k_T r) - \beta H_0^{(1)}(k_L r)\right\} - \left\{H_1^{(1)}(k_T r) - \beta^{\frac{3}{2}} H_1^{(1)}(k_L r)\right\} + 4(k_T r)^{-2}\left\{H_1^{(1)}(k_T r) - \beta^{\frac{1}{2}} H_1^{(1)}(k_L r)\right\} \cdots\cdots \quad \text{(B4)}$$

$$k_L = \omega / c_L, \quad k_T = \omega / c_T, \quad r = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{(C)}$$

で与えられている．ここで $H_j^{(i)}$ は第 i 種 j 次ハンケル関数である．

文 献

(1) e.g., Graff , K. F., *Wave Motion in Elastic Solids*, (1991), 431, Dover.

(2) 境界要素法研究会編，境界要素法の理論と応用，(1986), 45, コロナ社.

(3) Kitahara, M., *Boundary Integral Equation Methods in Eigenvalue Problems of Elastodynamics and Thin Plates*, (1985), 109, Elsevier.

(4) Brebbia, C. A. and Dominguez, J., *Boundary Elements–An Introductory Course, Second Edition*, (1992), Computational Mechanics Publications and McGraw-Hill(田中正隆･松本敏郎･中村正行共訳，詳細 境界要素法, 1993, オーム社).

(5) Lowe, M. J. S, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelecer. Freq. Control.* **42**-4, (1995), 525

(6) Alleyne, D. N. and Cawley, P., *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelecer. Freq. Control.* **39**-3, (1992), 381

(7) Mindlin, R. D., Medick, M. A, *J. Appl. Mech.*, **27**,

(1959), 561

(8) Onoe, M., *J. Acoust. Soc. Ame.*, **30**-12, (1958), 1159

(9) Viktorov, I. A., *Rayleigh and Lamb waves*, (1970), Plenum Press.

(10) Torvik, P. J., *J. Acoust. Soc. Ame.*, **41**-2, (1967), 346.

(11) Auld, B. A. and TSAO, E. M., *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelecer. Freq. Control.* **SU24**-5, (1977), 317.

(12) Cho, Y., Hongerholt, D. D. and Rose, J. L., *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelecer. Freq. Control.* **44**-1, (1997), 44.

(13) Cho, Y. and Rose, J. L., *J. Acoust. Soc. Ame.*, **99**-4, (1996), 2097.

(14) Mow, C. C. and Mente L. J., *J. Appl. Mech.*, **30**, (1963), 598

(15) Pao, Y. H., *J. Appl. Mech.*, **29**, (1962), 299.

(16) 岡本良夫, 逆問題とその解き方, (1992), オーム社.

(17) 久保司郎, 逆問題,(1992),培風館.