

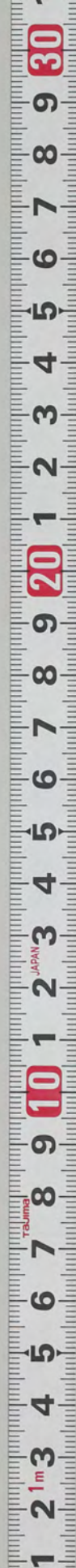
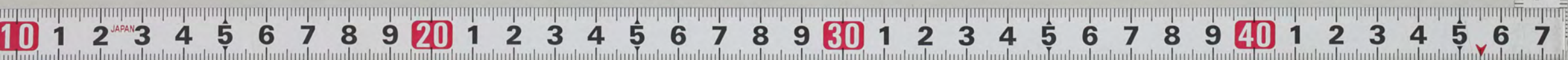


Title	寺尾寿自筆ノート[061]
Author(s)	寺尾, 寿
Citation	
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/89945
rights	Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International
Note	

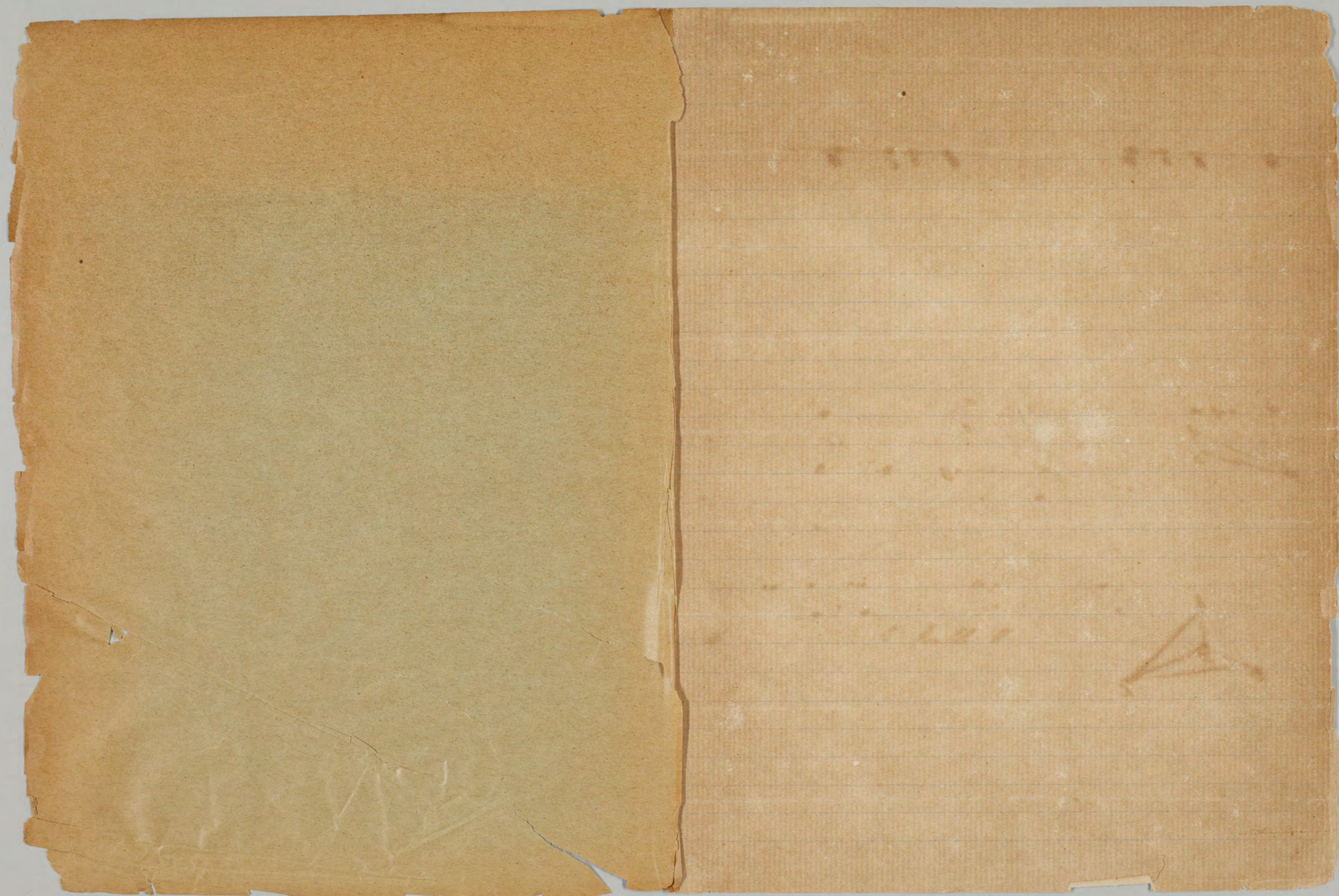
The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

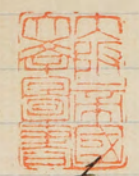
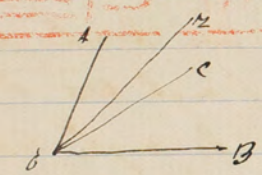
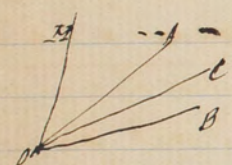
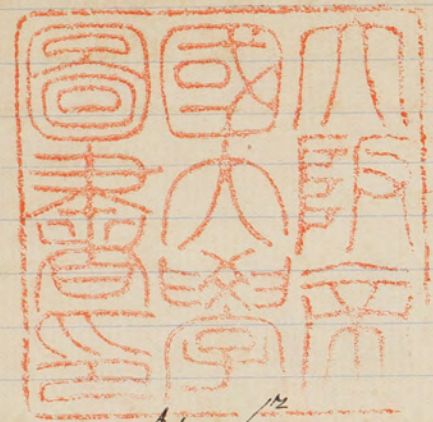
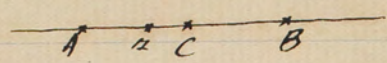
<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka









Cambette. Livre I.

1. Si l'on considère trois pts M, A, B en ligne droite, C étant le milieu de AB, la longueur MC sera la demi-somme ou la demi-différence des distances MA, MB, suivant que le pt M sera extérieur ou intérieur au segment AB.

1 ^{er} cas	$\begin{cases} MA = MC - AC \\ MB = MC + AC \end{cases}$	2 ^e cas	$\begin{cases} MA = AC - MC \\ MB = AC + MC \end{cases}$
Donc	$MC = \frac{1}{2}(MA + MB)$	Donc	$MC = \frac{1}{2}(MB - MA)$

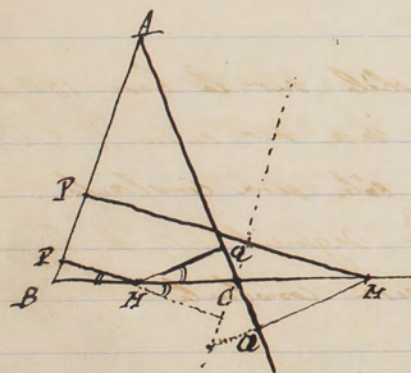
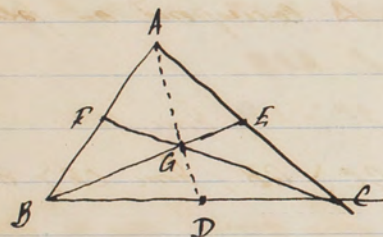
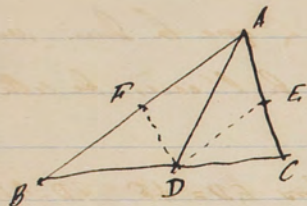
2. Si l'on considère trois droites OA, OB, OM, concourantes en O, OC étant la bissectrice de l'angle AOB, l'angle MOC sera la demi-somme ou la demi-différence des angles MOA, MOB, suivant que OM sera extérieur ou intérieur à l'angle AOB.

même démonstration que 1.

3. Le périmètre d'un triangle est plus grand que la somme des droites qui joignent un pt intérieur aux trois sommets, et moindre que le double de cette somme.

1 ^o	$AD + BD < AC + BC$	2 ^o	$AB < AD + BD$
	$AD + CD < AB + BC$		$AC < AD + CD$
	$BD + CD < AB + AC$		$BC < BD + CD$

Donc:	$2(AD + BD + CD) < 2(AB + BC + CA)$	Donc:	$AB + BC + CA < 2(AD + BD + CD)$
-------	-------------------------------------	-------	----------------------------------



4. Une médiane qq d'un triangle est $<$ que la demi-somme des côtés qui la comprennent, et $>$ que la $\frac{1}{2}$ de l'un des côtés sur le 3^e côté.

1^o E, milieu de AC; F, milieu de AB; alors $ED = AF$, $FD = AE$.

Cela posé:

$$AD < AE + ED$$

$$AD < AF + FD$$

Donc $2AD < AB + AC$.

2^o

$$AD < AE + ED$$

$$AD < AF + FD$$

D'où $2AD < AC + AB - BC$.

(*)

5. Le périmètre d'un Δ est supérieur à la somme des 3 médianes et inférieur au double de cette somme.

Corollaire immédiat du théorème précédent.

6. La plus petite médiane d'un Δ correspond au plus grand côté.

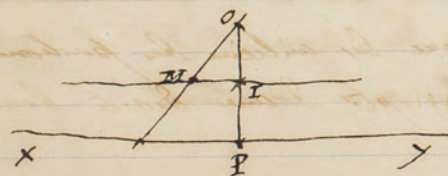
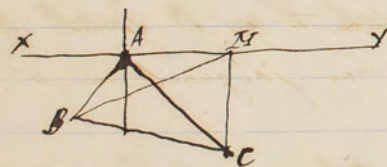
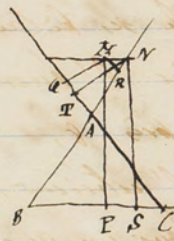
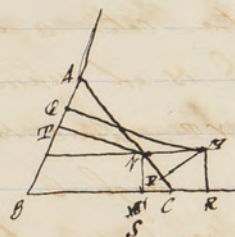
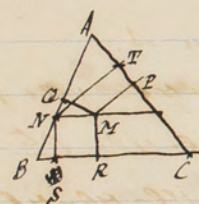
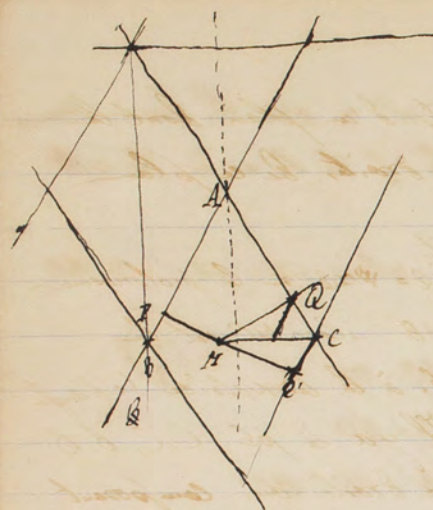
Dans les $\Delta^s ABD, ACD$, on a $AC > AB$; donc $ADC > ADB$.

Donc dans les $\Delta^s GBD, GCD$, on a $GC > GB$; donc $CE > BE$.

7. Les droites qui joignent les sommets d'un Δ isolé aux milieux des côtés opposés sont concurrentes.

8. Si l'on considère un pt M mobile sur la base BC d'un Δ isolé ABC : 1^o tant que le pt M sera sur entre B & C , la somme de ses distances aux deux autres côtés sera constante.

2^o tant que le pt M sera hors du segment BC , la différence de ses distances aux deux autres côtés sera constante.



9. Quel est le lieu géométrique des pts d'un plan dont la somme ou la différence de distances à deux droites de ce plan soit à une valeur donnée?

Soit H un pt du lieu $HA + HQ = S$; soit $HQ = HQ'$ sur le prolongement de HQ , alors $HQ' = S$; soit QC parallèle à AB , alors HC est la bissectrice de l'angle QHQ' et par suite perp. à la bissectrice de l'angle A ; la droite HC est ainsi déterminée. Il y a 2 pts C, C' , B, B' répondant à la question; par conséquent 2 droites qui composent le lieu.

10. Lorsqu'un pt est intérieur à un Δ équilatéral ABC , la somme de ses distances aux trois côtés a une valeur constante. Modifier l'énoncé quand H est extérieur au Δ .

D'après 8, $HA + HB = NE$. Donc $HA + HB + HC = NE + NF = CE$

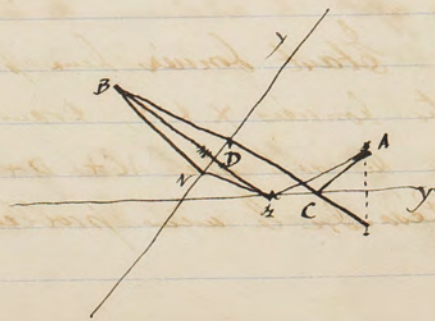
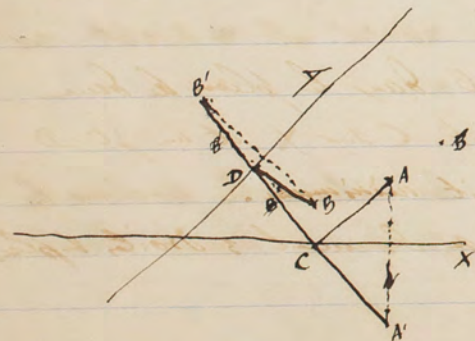
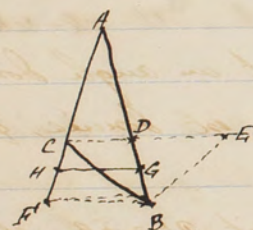
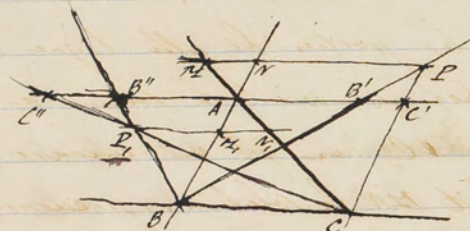
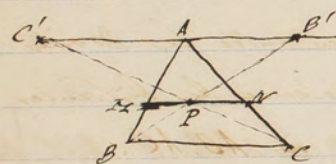
2° l'extérieur, 1° dans un angle B , $HQ + HR - HL = CE$

2° dans un angle opposé par le sommet à A , $HL - HQ - HR = CE$.

11. Par le sommet A d'un ΔABC , on mène une droite indéfinie xy $\perp$ à la bissectrice de l'angle A . Démontrer qu'on forme un Δ ABC le périmètre plus grand que ABC en joignant un pt quel que soit de xy aux pts B et C .

En effet, le minimum de la somme $HB + HC$ est $AB + BC$, car AB et BC sont également inclinées sur xy .

12. Quel est le lieu géométrique des milieux des portions de droites qui joignent un pt donné aux diff. pts d'une droite donnée?



13. Pour recouvrir une déchirure triangulaire dans une étoffe qui a un endroit à un envers, on a taillé un triangle égal dans une étoffe identique, mais on l'a taillé à l'envers. Trouver le moyen d'utiliser le triangle découpé pour recouvrir la déchirure.

Si le triangle est isocèle, pas de difficulté. Sinon, on le découpera en trois triangles isocèles ayant pour sommet commun le pt de rencontre des prop. élevés aux milieux des côtés.

14. Tracer une parall. au côté BC d'un ΔABC de telle sorte que les portions de cette ligne comprises entre les droites AB, AC indéfinies, soient la somme ou la différence des distances des pts B & C au pt de rencontre avec le côté AB, AC.

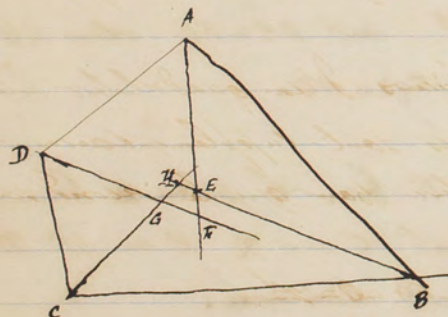
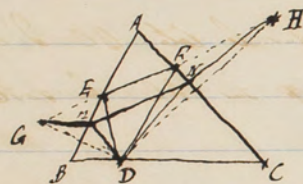
1° Soit MN la solution, prenons MP = MB, alors NP = NC; donc les triangles ABB' & ACC' sont isocèles; donc les pts B', C' d'abord puis les droites BB', CC' enfin le pt P se trouvent déterminés.
2° De même pour le second cas.

15. Parmi tous les triangles qui ont un angle donné compris entre deux côtés dont la somme est donnée, quel est celui qui a le plus petit périmètre?

C'est le triangle isocèle. En effet, soit DE = FB; alors EB = FC. Donc $\angle BC < CD + DE$ ou $BC < \frac{1}{2}(CD + FB) = HG$.

16. Étant données deux pts A & B dans le plan de deux droites données X & Y, trouver un pt C sur X et un pt D sur Y, de sorte que AC + CD + DB soit minimum.

Résoudre le même problème en se donnant 3 droites & plus.



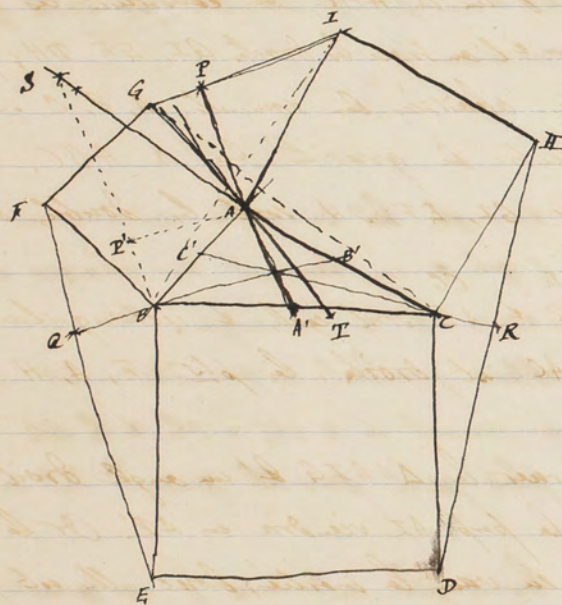
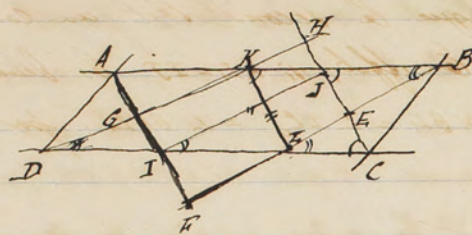
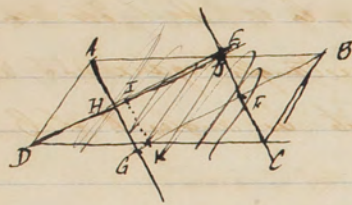
Il s'agit de rendre minimum, la somme $AK + NB$. Or soit menée la paral. BGK à la direction donnée & prise la longueur $BB' = EK$; alors on a $NB = KB'$. Donc C se trouve sur AB' .

18. Étant donné un pt D sur le côté BC d'un ΔABC , trouver un pt E sur AB & un pt F sur AC , de sorte que le périm. du ΔDEF soit un minimum.

Dans la figure du problème précédent, le périmètre = GH . Mais le triangle AGH est isocèle et l'angle au sommet = 2 . $BAC = C\hat{A}E$, & les côtés $AG = AH = AD$, donc le 2^e côté sera le plus petit possible, quand AD sera perp. sur BC .

$$2d - \angle G = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B \quad \angle G = \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle D. \quad \text{So } \angle A + \angle C = 2d.$$

Pour que le 2^d  soit un rectangle, il faut que le 1^{er} soit un parallélogramme.



Pour que le second soit un carré, le 1^{er} doit être un rectangle. — En effet, si $KL = IS$, les deux rectangles égaux AIS , BKI , donnent $\angle KBI = \angle ICS = \angle BKL$: par suite les angles A et B sont égaux.

21. Quel est le nombre des côtés d'un polygone qui a 119 diagonales?

Réponse 17.

$$\frac{n(n-3)}{2} = 119.$$

22. Sur les côtés d'un ΔABC , on construit les carrés: BCDE, ACHI, ^{ABFG} et l'on trace les droites GI, EK, DH; prouver:

1^o que les perp. abaissées des sommets A, B, C sur ces droites, sont concourantes au centre de gravité du ΔABC .

2^o que les longueurs GI, EK, DH sont les doubles des médianes du ΔABC .

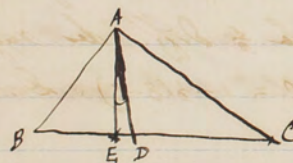
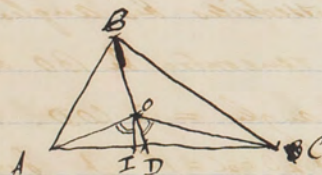
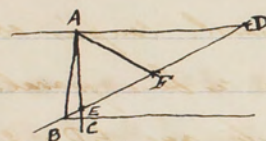
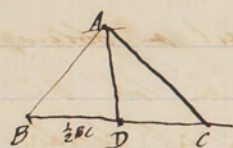
3^o que les droites CR & AE sont égales & rectangulaires.

4^o que, si l'angle BAC est droit, les pts F, A, H sont en ligne droite.

1^o & 2^o. Faisons tourner le ΔAIG d'un angle droit de façon à le faire venir en ASB; la perp. AI viendra en AP'. Or la médiane AA' est paral. à SB et en vaut la moitié; donc elle est perp. sur AP' et par suite en est le prolongement de PA.

3^o Faisons aussi tourner AB d'un angle droit en AP; BI sera = SP. Or les deux ΔABE & ACG sont égaux, donc CG est égale & paral. à SP, donc etc.

4^o Car alors B, A, I sont en ligne droite, & avec elle les droites AH & AP font des angles égaux à $\frac{1}{2}$ droit.



23. Le pt O étant intérieur au triangle ABC , l'angle BOC est $>$ que l'angle BAC .

En effet, le 1^{er} est la somme des angles extérieurs & le 2^{d} la somme de deux angles intérieurs du $\Delta \pm AOB, AOC$.

24. L'angle A du triangle ABC est aigu, droit ou obtus, prouve que la médiane AD est $>, =$ ou $<$ que la $\frac{1}{2}$ du côté BC .
Il suffit de construire la médiane AD qui est facile.

25. $AD \perp BC$ étant deux parall. coupés obliquement par AB & perp. par AC , on mène entre ces deux parall. la droite BED qui coupe AC en E , de sorte que $ED = 2AB$. Prouver que l'angle DBC est le tiers de l'angle ABC .

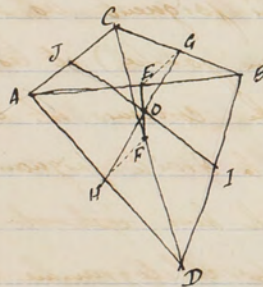
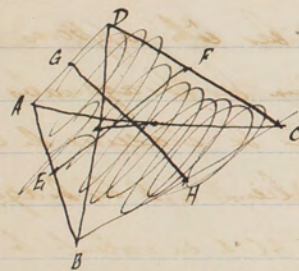
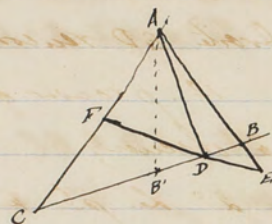
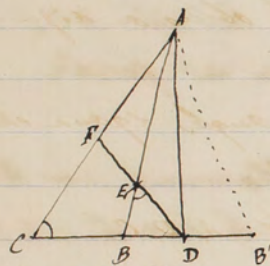
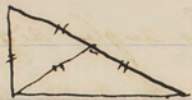
Soit R le milieu de E , les triangles $\triangle RAD$ et $\triangle EAE$ sont isocèles; & par hypothèse le $\triangle AFB$ aussi. Donc: $ABR = ARB = \frac{1}{2} RAD = \frac{1}{2} RDA = \frac{1}{2} DBC$. Donc etc.

26. Soit O le pt de concours des bissectrices des angles intérieurs du triangle ABC , & soit D le pt de rencontre de BO avec AC ; la perp. à OI à AC fait avec AO un angle $=$ à COB .

En effet, $AOI = 1^{\text{d}} - \frac{1}{2}A$. Or $COB = 1^{\text{d}} - \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C = 1^{\text{d}} - \frac{1}{2}A$. Donc $AOI = COB$.

27. La bissectrice de l'angle A du ΔABC forme avec la hauteur issue de ce sommet un angle $=$ à la $\frac{1}{2}$ Diff. des angles B & C .

En effet, $ADE = \frac{1}{2}A + C = 1 - \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C + C = 1 - \frac{1}{2}(B-C)$. Donc $EAD = \frac{1}{2}(B-C)$.



28. Si l'hypoténuse d'un Δ rectangle est double d'un côté de l'angle droit, l'un des angles aigus est double de l'autre, & réciproquement.

29. Soit ABC un Δ dont l'angle B est double de l'angle C; nous traçons la hauteur AD, & nous portons BE = BD sur BA, ou en sens inverse suivant que l'angle B est obtus ou aigu; la droite ED rencontre AC en F:

1° prouver que les Δ ABC, EDF ont les angles égaux chacun à chacun;

2° Le pt F est à égale distance des pts A, D, C

3° AB est la diff. ou la somme des longueurs DB, DC suivant que l'angle B est aigu ou obtus.

En effet. 1° l'angle en E est la $\frac{1}{2}$ du supplément de $\angle$ EBD; donc $E = C$. 2° $EDB = BED = C$, donc $DE = EC$, puis $FDA = \angle - C = FAD$; donc $DF = AF$. 3° Soit $DB' = DB$, $CAB' = \angle C - C$ (ou $2 - (\angle - \angle C + C) = C$; donc $AB = CB'$.

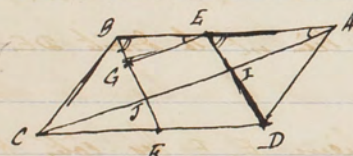
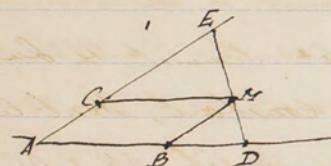
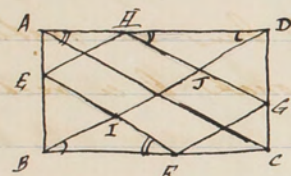
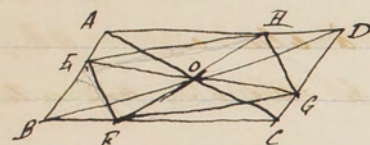
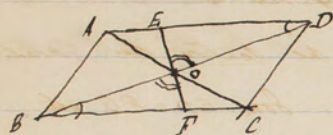
30. Les droites qui joignent les milieux des côtés opposés d'un quadrilatère (plan ou gauche) et les milieux des diagonales sont concourantes; le pt de concours est le milieu de chacune de ces lignes.

Soit O le milieu de la droite joignant les milieux E, F des diagonales. EG & HP sont toutes les deux égales et parall. à AC & en valent la $\frac{1}{2}$; donc GEHF est un parallélogramme & par suite GH passe par O.

31. Si par le pt de concours des diagonales d'un parallélogramme on mène une droite arbitraire:

1° Elle partage la figure en 2 quadrilatères égaux.

2° La portion de cette droite comprise dans le parallélogramme



a pour milieu le pt de concours des diagonales
(Ce pt porte pour cette raison le nom de centre du parall.
En effet, $\angle EDO = \angle FBO$, $OD = OB$, $\angle EOD = \angle FOB$; donc $ED = FB$ etc.

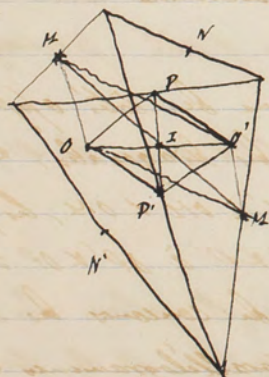
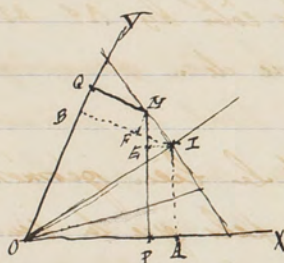
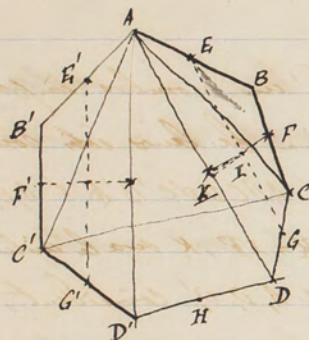
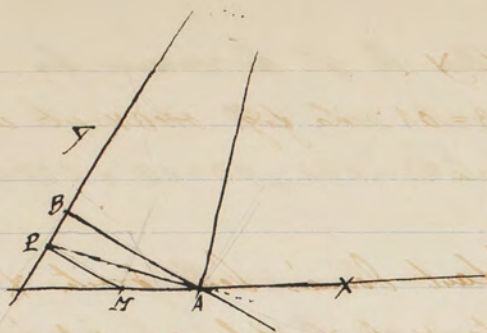
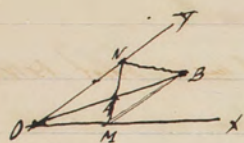
32. Le centre d'un parallélogramme est commun à tous les
parallélogrammes que l'on peut inscrire à celui-ci.
On peut, effet, prouver d'abord l'égalité de HO & BO , puis celle
de DO , AO

33. Les parallélogrammes inscrits dans un rectangle &
dont les côtés sont parallèles aux diagonales de ce rectangle
ont un périmètre constant.
On prouve en effet que les ΔIOE , IOG sont isocèles.

34. Quel est le lien géométrique du 4^e sommet & du
parall. $ABAC$ dont le périmètre est constant, dont le
sommet A est fixe ainsi que les directions des côtés AB & AC ?
Soit $BD = 3/2$; alors $AD = AB + BD = \frac{1}{2}$ périm. const., donc le pt D est
fixe; de même le pt E. Le lien est la droite DE.

35. Si l'on joint les milieux E, F des côtés AB & CD d'un
parall. aux sommets D & B, ces droites partagent la diagonale
AC en trois parties égales.
D'abord ED & BF sont paral. à cause de l'égalité des ΔAED
& CBF ; puis $AI = EG = IS$.

36. Par un pt donné A dans le plan des droites x & y ,
tracer une droite dont A soit le milieu de la portion comprise



entre X et Y .

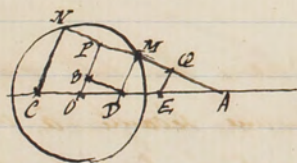
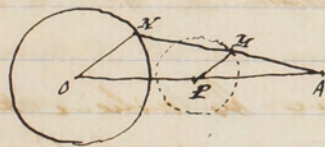
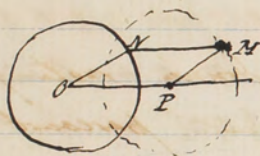
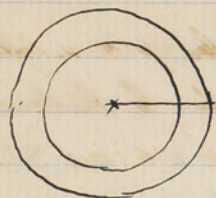
Soit $AB = OA$. La fig. $ONBN$ est un parallélogramme dont ON est une diagonale.

37. Étant donné deux droites X et Y , et un pt A sur X , trouver les pts M de X , tels que MA égale la distance de M à Y . Soient P et B les pieds des perp. de A sur Y : $BAP = APB = PAH$; donc AP est la bissectrice de l'angle de AB et X : deux solutions.

38. Deux polygones convexes d'un nombre impair de côtés sont égaux lorsque les pts milieu de leurs côtés coïncident. Soit par exemple un polygone de 7 côtés $ABCDD'E'B'A$ et $A'B'C'D'E'B'A$. Joignons P au milieu I de EG et soit $IK = IP$, K sera le milieu de AD . Ainsi les milieux des côtés des Δ^s ADD' et $A'D'D'$ coïncident, donc les Δ^s eux-mêmes. Donc etc.

39. Quel est le lieu géométrique des pts M du plan d'un angle XOY , tels que la somme ou la différence des distances du pt O aux proj. du pt M sur OX, OY soit une valeur donnée? Soit MI perp. à la bissectrice de XOY . $PA = EI = MK = OQ$; donc $OA = OB = \frac{1}{2}(OP + OQ)$; le pt I est donc déterminé.

40. Soit M, M' et N, N' les milieux des côtés opposés d'un quadrilatère, soit P, P' les milieux des diagonales, et O un pt arbitraire du plan: les paral. menés par M et M' à OM et OM' , les paral. menés par N et N' à ON et ON' , enfin les paral. par P et P' à OP et OP' sont 6 droites concourantes. Soit I le milieu de PP' , O' le pt de concours des 2 dernières droites. Alors $OM'O'$ et $ON'O'$ sont des parallélogrammes (30).



Combette. Livre II.

1. Quel est le lieu géométrique des pts situés à une distance donnée d'une circonf. donnée.

C'est une circonf. concentrique à la circonf. donnée.

2. Trouver les pts d'intersection d'un plan situés à des distances données de deux circonf. données.

Intersection de deux circonf.; discussion connue.

3. Une droite mobile de longueur donnée reste parallèle à elle-même, tandis qu'une de ses extrémités parcourt une circonf. Quel est le lieu géom. de l'autre extrémité?

Soit MN parallèle à NO; $OP = NX = CT$ $PH = NO$; donc le lieu est la circonf. de centre P et de rayon égal à ON et de centre P.

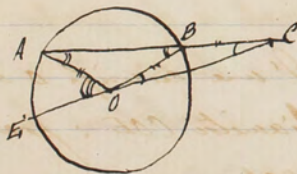
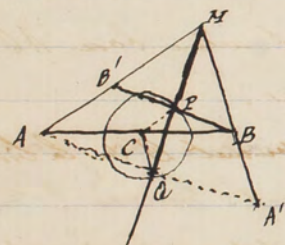
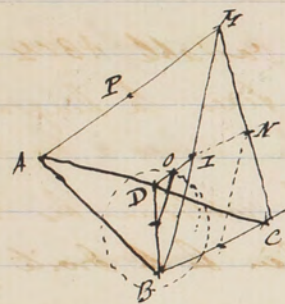
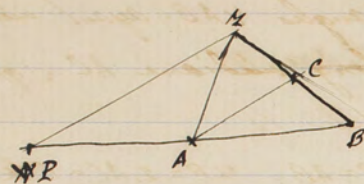
4. Quel est le lieu géométrique des milieux des portions de droites comprises entre un pt et une circonf. donnée?

C'est la circonf. de centre P, milieu de OA et de rayon égal à $\frac{1}{2}$ du rayon de O.

5. Tracer par un pt donné une sécante à une circonf. donnée, telle que la partie intérieure soit égale à la partie extérieure.

Donc $OD = \frac{1}{2}OA = DE$; donc D est au $\frac{2}{3}$ de AO. D se trace sur la circonf. de centre D et de rayon $AE = \frac{1}{3}AO$. — Condition de possibilité

$$R + \frac{1}{3}AO > \frac{2}{3}AO > R - \frac{1}{3}AO \quad \text{ou} \quad 3R > AO > R$$



6. On considère tous les triangles $\triangle ABC$ ayant même base AB , et même longueur pour le long médian AC ; quel est le lieu géom. du sommet variable C ?

Soit MP paral. à AC . On a $AP = AB$, $MP = 2 \cdot AC = CQ$, donc le lieu est une circonf. de centre P & de rayon $2 \cdot AC$.

7. On considère un quadrilatère variable $ABCH$ dans lequel les trois sommets A, B, C sont fixes, la diagonale BC ayant une longueur donnée:

1^o Quels sont les lieux géom. des milieux des côtés AB, AC ?

2^e Quel est le lien géom. le milieu de la droite qui joint les milieux des diagonales ?

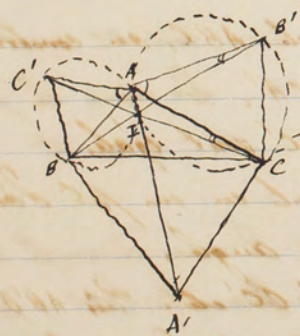
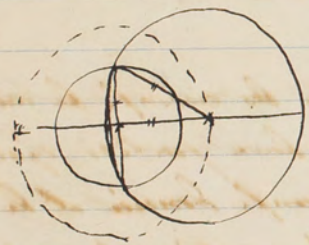
1° Le lieu du 6^e milieu N de MC est la circonf. de rayon $= \frac{1}{2} BC$ et ayant son centre au milieu de B. 2° le lieu du 6^e milieu O de D se trouve par le prob. 4.

8. On considère deux les Δ^z HAB ayant même base AB , & dans lesquels la diff. $HA-HB$ a même valeur:

1^o Trouver le lieu géom. de la proj. du sommet B sur la bissectrice de l'angle $A \pm B$;

2^e Trouver le lieu géom. de la proj. du sommet A sur la même directrice.
La proj. ρ de B est au milieu de BB' ; donc, soit PC parall. à AA' , C est
le milieu de AB' & PC est $\frac{1}{2}$ de $AB' = C\frac{1}{2}$. De même la proj. de Q est
à une distance de C = à $\frac{1}{2}$ de $BA' = \frac{1}{2} AB' = C\frac{1}{2}$. Donc etc

9. On prolonge une corde AB d'une circonfr. O d'une longueur BC égal au rayon, & l'on trace le diamètre COE : prouver que l'angle BOC est le $\frac{1}{2}$ de l'angle EOA .



10. Tracer, par un pt donné, une circonf. qui passe à la même distance de trois pts donnés non en ligne droite.

Problème facile pour la circonf. extérieure ou intérieure à deux des trois pts donnés, mais difficile pour celle qui ~~est~~ laisse un pt d'un côté & deux pts de l'autre côté.

12. Étant donnés sur une carte quatre pts dont trois ne sont pas en ligne droite, tracer une route circulaire qui passe à la même distance de chacun de ces pts

1^{er} système de solutions: circonf. ~~extérieure~~ concentriques à la circonf. circonscrite à trois des 4 pts donnés, il y en a 4.

2^d système de solution: circonf. ayant pour centre l'intersection des ^{la prop. inverse} médianes élevées aux milieux de la droite qui joint 2 des pts & de celle élevée au milieu de la droite qui joint les 2 autres pts; il y en a $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}$ ou 6.

13. Quel est le lien géom. des centres des circonf. de même rayon qui partagent une circonf. donnée en deux parties égales?

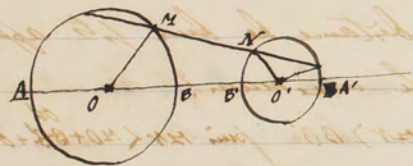
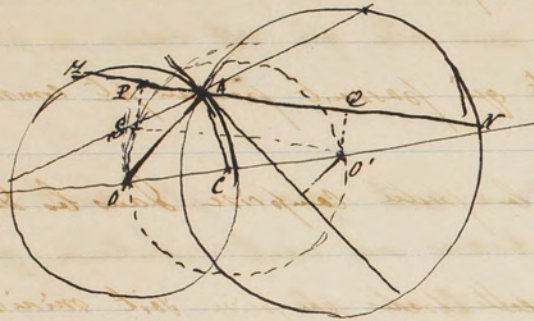
C'est une circonf. concentrique à la circonf. donnée et le rayon tel qu'il forme avec les deux rayons donnés un triangle rectangle

14. Sur les trois côtés d'un triangle ABC, on construit, extérieurement, des triangles équilatéraux ACB', ABC', BCA';

1^o Prouver que les droites AA', BB', CC' sont égales

2^o Prouver que ces droites concourent en un pt où l'on voit les trois côtés du Δ sous le même angle.

D'abord $\angle CAB' = \angle BAC' = 60^\circ$; donc $BB' = CC'$ etc. Puis $AB'B = ACC'$, donc $\angle B'IC = 180^\circ - (\angle B'IC + \angle C'IC + \angle ACC') = 180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ$. Donc le pt d'intersection



Le $BB' \times CC'$ se trouvent sur l'intersection des circonf. construites aux $\Delta^s ABC' \times ACB'$. Mais cette dernière appartient aussi à la circonf. circonscrite à ABC puisque de ce point on voit BC sous 120° . Donc le.

15. Parmi les sécantes qui passent par un pt commun à deux circonf. :

1^{re} Quelle est celle dont la partie comprise dans les deux courbes est maximum ?

2^{de} Quelle est celle dont cette partie comprise soit minimum ?

3^{de} Quelle est celle dont le milieu de la partie comprise est au pt commun aux deux courbes.

Soient $OP, O'Q$ perp. sur LN & $S'S$ parall. à PQ ; on a $LN = 2 \cdot PQ = 2 \cdot SO'$. Or SO' est une corde de la circonf. C de diamètre OO' ; donc etc.

Quand LN est perp. à AC , les deux parties $LA \times NA$ sont égales.

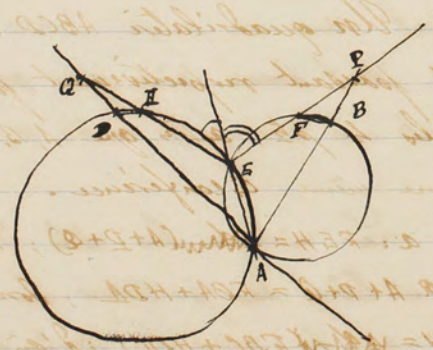
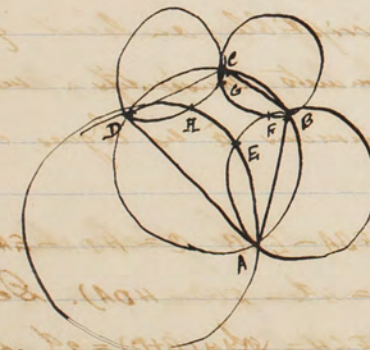
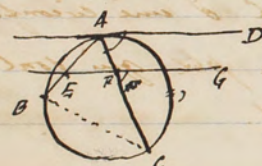
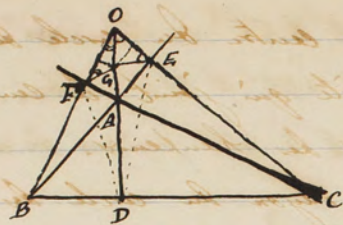
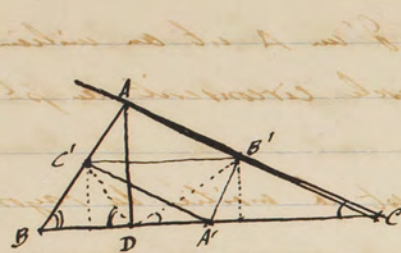
16. Quel est le minimum de la distance de deux pts appartenant à deux circonf. données? Quel est le maximum?

On a $OM + MN + NO' > OB + OB' + OB'$ ou $LN > BB'$ puis $LN < MO + OB' + O'N = AA'$.

17. Quel est le lieu des centres des circonf. de rayon donné qui coupent sous un angle donné une circonf. donnée?

OLC étant donné ainsi que $OL \times OC$, la long. OC est etc.; donc le lieu est une circonf. de centre O .

18. Les milieux des côtés d'un triangle, les pieds des hauteurs & les milieux des portions de hauteur comprises entre le sommet & leur pt de concours, sont neuf pts situés sur une même circonf. (Cercle des 9 pts).



Le centre du cercle des 9 pts d'un Δ est au milieu de la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au pt de concours des hauteurs.

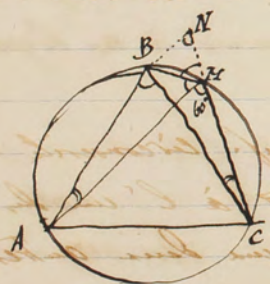
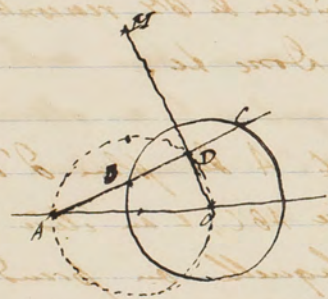
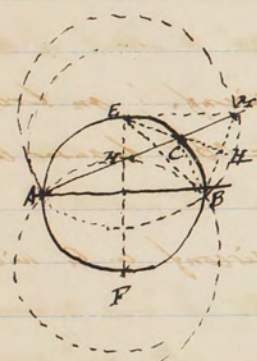
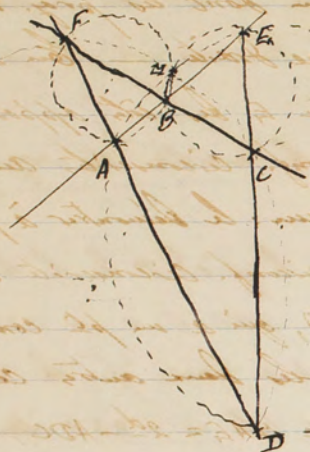
Le rayon du cercle des 9 pts est la moitié du rayon du cercle circonscrit.

1^{re} Soient A', B', C' les milieux de a, b, c , le pied D de la hauteur AD se trouve sur la circonf. $A'B'C'$: car $\angle BDC = \angle B$ $\angle B'DC = C$ & par suite $\angle B'DC' = 180^\circ - (B+C) = A = \angle B'A'C'$. 2^{de} Le milieu G de OA se trouve sur la circonf. DEF ; car $\angle EGR = 2\angle EOG + 2\angle FOG = 2\angle EOF = 2\angle EAC$ (le $\square EAFO$ étant inscriptible), mais dans les $\square$ inscriptibles $ADCE$, $ADBR$, on a $\angle EDC = \angle EAC$, $\angle FDB = \angle FAB = \angle EAC$. Donc le. 3^{de} Soit I le milieu de OO' , O' étant le centre du cercle circonscrit. La prop. au milieu de EB' étant parall. aux bases du trapèze $OO'B'E$ passe par I; de même etc. 4^{de} Le rayon IH (H étant le milieu de OB) est parall. à OO' et en vaut la moitié.

19. Si l'on coupe deux cordes AB, AC d'une circonf. par une parallèle à la tangente en A, on obtient deux pts qui sont situés avec les pts B & C sur une même circonf.
Car $\angle GFC = \angle DAC = \angle ABC$.

20. Un quadrilatère ABCD étant inscriptible, on décrit quatre circonf. passant respectivement par 2 sommets consécutifs: montrer que les 4 pts, autres que A, B, C, D, communs à ces lignes, sont sur une même circonf.

On a: $\angle FEH = \angle FEA + \angle AED$; mais $P = \angle FEA - \angle EAB$, $Q = \angle HDA - \angle EAD$; donc $\angle A + D + Q = \angle FEA + \angle HDA$; donc $\angle FEH = \angle FEA + \angle HDA$. De même $\angle FGH = \angle FGD + \angle HDC$; d'où $\angle FEH + \angle FGH = \angle FEA + \angle HDC = \angle A + D$. Donc le.



21. Trouver un pt H d'un plan dont les proj. sur les cotes d'un quadrilatere $ABCD$ sont en ligne droite. — En se disant que, si l'on prend les pts de rencontre E des cotes opposés AB , CD & F des cotes BC , AD , les quatre circonscr. circonscrites aux Δ s: ADE , BCE , ABF , DCF , ont un pt commun: le démontre à priori.

Le pt cherché doit se trouver sur la circonscr. circonscrite au ΔABC & sur la circonscr. circonscrite au ΔFAD , qui a un pt commun B avec la 1^{re}. ~~Il~~ Il doit se trouver sur les deux autres circonscr.

A priori: $\angle AHB = \angle AFB$ $\angle BHE = \angle FCD$; donc $\angle HAE = \angle ADC$, H doit donc se trouver sur la circonscr. EAD .

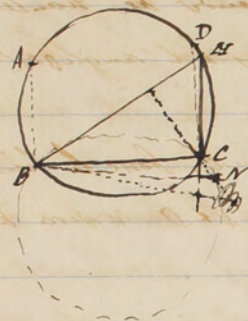
22. Soit AB le diamètre d'une circonscr.; on trace la corde arbitraire AC , sur laquelle on prend $CH = CB$: tracer le lieu géom. du pt H .

La perp. au milieu de CH rencontre la circonscr. en E milieu de AEB . & $EH = EB = CE$. Donc le.

23. D'un pt A du plan d'une circonscr., on trace une corde arbitraire BC , & on tire une au milieu D de BC une perp. sur laquelle on prend $DH = DA$. Quel est le lieu du pt H ?

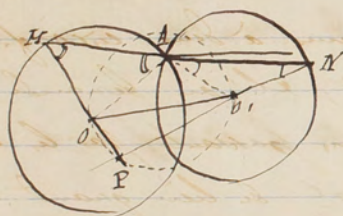
D se trouve sur la circonscr. de diamètre AO ; on est donc ramené au problème précédent.

24. Si H est un pt de la circonscr. circonscrite au triangle équilatéral ABC , la distance du pt H à l'un des trois sommets est égale la somme de ses distances aux deux autres sommets.



25. Lien géométrique du pt. de concours des hauteurs des ΔABC dont les sommets B & C sont fixes & l'angle BNC constant (discuter les positions du lien).

Soit N un pt. du lien, l'angle BNC est const. donc le lien est une segment capable, circonscr. Tant que N est entre A & D, N sera dans le segment AD DC.

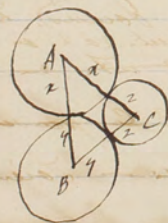
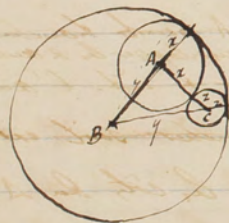


26. Lien géom. des centres des cercles tangents aux trois côtés du triangle ABC dans lequel les sommets B & C sont fixes & l'angle BNC constant, (discussion complète).

Ce sont des circonscr. capables d'angle donné.

27. Par l'un des pts A communs à deux circonscr. données, on trace une sécante arbitraire MN, et on demande le lien géom. du pt. de concours des diam. passant par les extrémités M & N. (Suivre le mouvement du pt. du lien quand la sécante prend toutes les positions possibles.)

$AO'P = 2M$ $AO'P = 2N$; donc $2(M+N) + P + A = 4C$. mais $M+N = 2 - P$. donc $P = A$.

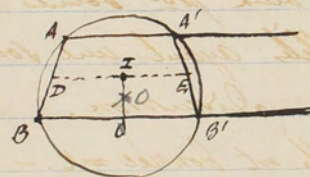
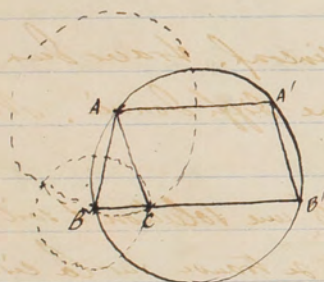
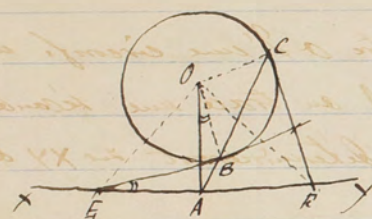
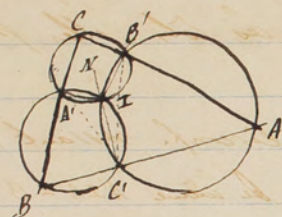


28. Tracer trois circonscr. ayant pour centres trois pts donnés, telles que chacune touche les deux autres. Nombre des solutions.

Soient A, B, C les trois pts donnés. ^{non en ligne droite} Le cercle A peut toucher B & C. Les 3 cercles peuvent être ext. à à 2, ou un peut envelopper les 2 autres. Donc 2 cas.

Dans chacun de ces 4 cas, B, C peuvent se toucher soit ext. soit int. Donc en tout 8 cas. — Soient a, b, c les côtés du ΔABC & 2p son périmètre

$$y - z = a \quad x + z = b \quad y - x = c \therefore y = \frac{1}{2}(a + c + b) = p \text{ ou } b; \quad z = p - a, \quad x = p - c; \text{ etc.}$$



29. Si trois circonf. passant respectivement par les sommets d'un triangle de l'angle 2α à α sur les côtés, elles passent par un même pt.

Soit I le second pt. commun des deux circonf. passant par A & par B. - On a $\angle IAN = \angle IC'B + \angle IBC' = \angle IAB + \angle IAC = A$; de même $\angle IAN = B$; donc $\angle IAB = A + B$. Donc I se trouve sur la circonf. passant par A, B, C.

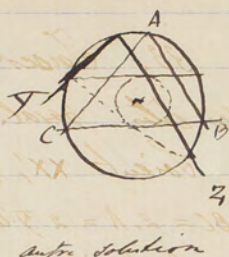
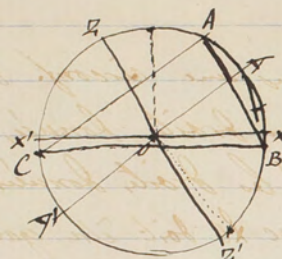
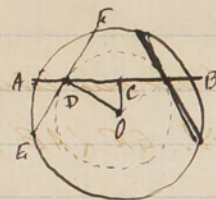
30. Si l'on projette le centre O d'une circonf. en A sur une droite XY, que par le pt A on trace une sécante arbitraire ABC, les tangentes aux pts B & C détermineront sur XY deux pts également distants de A.

D'abord de l'égalité des angles $\angle AOB$ & $\angle AOC$, il résulte que $OEBA$ est inscriptible, donc $\angle AOE = \angle EBA$. De même dans le $\square$ inscriptible $AOCE$, on a $\angle OEA = \angle ACF$; donc $\angle AOE = \angle AOF$.

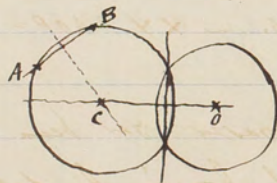
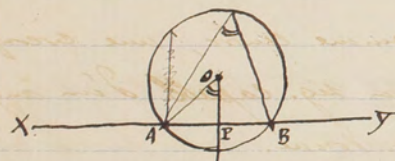
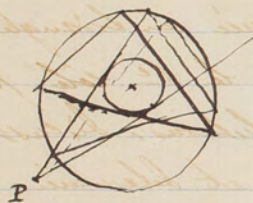
31. Par deux pts donnés sur une circonf., tracer deux droites parallèles ayant une somme ou une diff. donnée. Nombre des solutions. Discussion.

1^{re} - La diff. est donnée $= k$. - Soit AA', BB' une solution & soit AC paral. à $A'B'$; $BC = k$; & $\angle ACB = \angle ABC$. Donc C se trouve sur la circonf. de centre A & de rayon AB & sur celle de centre B & de rayon k. 2 solutions possibles sans la condition $k < 2AB$. - 2^{de} La somme est donnée $= k$. Soient D, E les milieux de AB & A'B' & I le milieu de E, D. On a $DI = \frac{1}{2}k$, la recte I est sur la circonf. de diamètre DO, 2 solutions, condition $\frac{1}{2}k < DO$.

32. Tracer dans un cercle donné une corde de long. donnée qui soit partagée par une corde donnée en deux parties égales.



autre solution



- Nombre de solutions. - Discussion.

Le pt P milieu de la corde cherchée est sur une circonf. qu'on peut tracer. 2 sol.; condition $OD > OC$ c'ad. $GR < AB$.

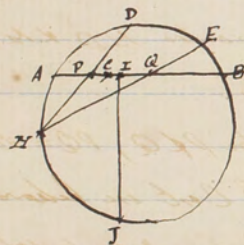
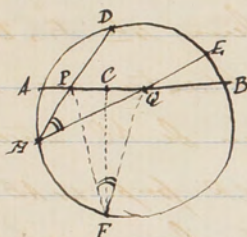
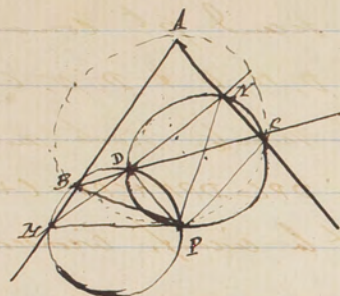
33. Inscrire dans une circonf. donnée un triangle ayant ses côtés paral. à trois droites données. Nombre des solutions. Soient XX', YY', ZZ' les droites données & soit ABC une solution. $OBC = 2.A = 2.YOZ'$. Donc XB doit être égal à la diff. de XOZ & d'un angle droit. 8° solutions égales 2 à 2.

34. Inscrire dans une circonf. donnée un triangle ayant deux côtés paral. à deux droites données, le 3° côté passant par un pt donné. - Nombre des solutions, Discussion. La long. de la corde que le 3° côté intercepte est déterminée; il est donc tang. à une circonf. déterminée. Condition: le pt donné & doit être dans ou à l'extérieur de la -trouvée circonf.; alors 2 solutions.

35. Tracer, d'un pt donné comme centre, une circonf. sur laquelle une droite donnée intercepte un seg. capable d'un ang. donné. Soit OL la perp. sur XY , $AOP = \text{ang. donné}$.

36. Faire passer par deux pts données une circonf. qui coupe une circonf. donnée de telle sorte que la corde commune ait une direction donnée. La ligne des centres doit être perp. à la ~~donnée~~ direction donnée.

37. Soit D un pt situé sur le côté BC du triangle ABC , on trace par le pt une sécante qui rencontre AB en H & AC



en N: quel est le lien geom. du second pt commun P
 aux circonfs. passant par les pts D, M, B & D, N, C? (Suivre
 le déplacement du pt P quand la sécante pivote autour du pt D).

On a $DPB = DPM - BPM = B - D$; $DPC = DPN + CPN = C + D$
 donc $BPC = B + C$. Donc le lien est la circonf. circonscrite à ABC.

38. Étant donné une corde AB d'une circonf., un
 pt C sur cette corde, & deux pts E, D sur l'un des arcs
 sans-tendus, trouver sur l'autre arc un pt M tel que
 C soit le milieu de la portion de AB interceptée entre MD & ME.

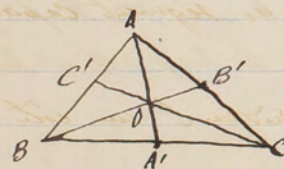
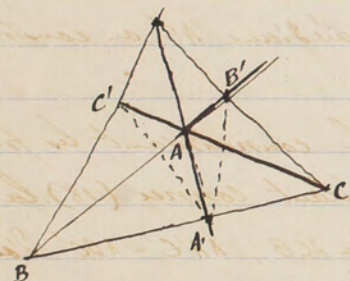
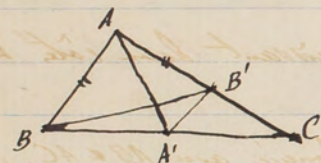
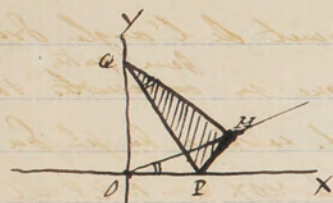
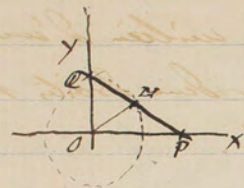
Fait ~~MD~~ ME la solution; CP perp. sur AB, l'angle au sommet
 du A isocèle EPA est déterminé, donc aussi P & Q.

38 bis. - Trouver le pt M tel que la somme ou la diff. des
 distances du pt C aux pts où AB rencontre MD & ME ait
 une valeur donnée. Nombre de solutions.

1^{re} La somme est donnée. - Si C est entre P & Q, PQ = somme donnée
 et par suite PQ est déterminé: 2 solutions. Si C est en dehors de PQ,
 le milieu de PQ est à une distance donnée de C: 2 ou 1 solutions.

2^{de} La différence est donnée. Si C est entre P & Q le milieu de PQ
 est déterminé; 2 ou 1 solutions; sinon la long. PQ est donnée: 2 solutions
 possibles.

39. Lorsqu'une circonf. roule, sans glisser, dans une circonf.
 de rayon double, tout pt de cette courbe décrit une droite.
 Il me semble qu'il est nécessaire de faire intervenir la proportion-
 nalité de la longueur d'un arc au rayon du cercle.



40. Quel est le lien géométrique du milieu d'une droite de long. donné, dont les extrémités glissent sur deux droites rect. ?
Le long. est égal à $\frac{1}{2}$ de la long. donnée.

41. Quel est le lien géom. du sommet de l'angle droit d'une équerre qui se déplace de sorte que ses ^{deux autres} sommets parcourent des droites données rect. (posit. extrême du pt. du lien)
Le cercle OPQ étant inscriptible, l'angle $\angle OXP = \angle QP = C^\circ$.
Le lien est donc une droite.

42. Construire un triangle connaissant deux côtés & une médiane (deux cas).

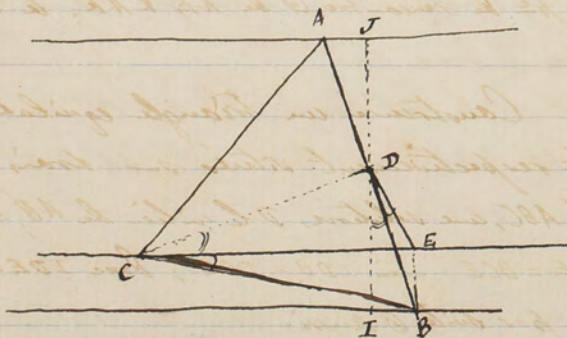
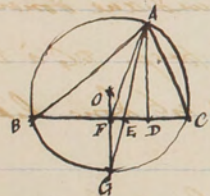
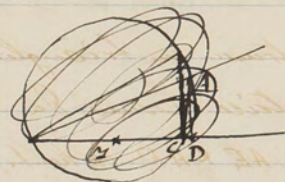
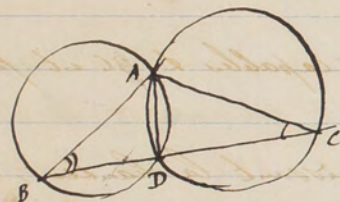
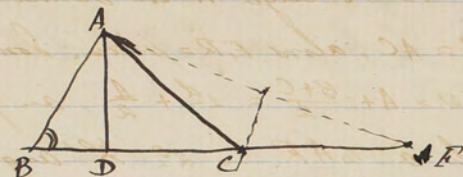
1^o Si c'est la médiane AA' qui est donnée avec AB & AC , on construira le $\Delta AA'B'$. 2^o Si c'est la médiane AB' , on construira ABB' .

43. Construire un triangle connaissant les pieds des hauteurs.
D'abord le cercle des 9 pts étant connu (18) la circonscr. circonscrite est connue; puis on a $AA'B' = ACB$, $AA'C' = ABC'$ d'où $B'AC' = \angle C'AB' + \angle BAC' = 2^\circ - 2\angle CAB$. Donc l'angle A est connu; de même les autres, de sorte qu'on peut construire les segments capables de ces angles.

44. Construire un triangle connaissant un côté & deux médianes (deux cas).

Soit BC le côté donné. Si BB' , CC' sont données, on obtiendra le centre O avec $BO = \frac{2}{3}BB'$, $CO = \frac{2}{3}CC'$. Si AA' & BB' sont données, on emploiera $BO = \frac{2}{3}BB'$, $AO = \frac{1}{3}AA'$.

45. Construire un triangle connaissant un angle, une hauteur



1^o L'angle A est donné avec la hauteur AD. Soient $EB = AB$
 $EC = AC$, alors $ER =$ perim. donné. Or $\angle AEB = \frac{B}{2}$, $\angle AEC = \frac{C}{2}$, donc
 $\angle AER = A + \frac{B+C}{2} = 180^\circ + \frac{A}{2}$, on peut donc construire une figure
égale à EAR . — 2^o L'angle B est donné. Alors la partie ADB
est facile à construire; pour l'autre partie, on prendra $DR = p. - (AB + BD)$
et l'on obtiendra la prop. au milieu de AF.

46. Construire un triangle connaissant le périmètre & deux angles.

Dans la fig. du problème précédent (1^{er} cas), les ang. en E. & P. sont connus. Le sommet A se trouve ainsi déterminé.

47. Construire un triangle connaissant deux angles & une hauteur.

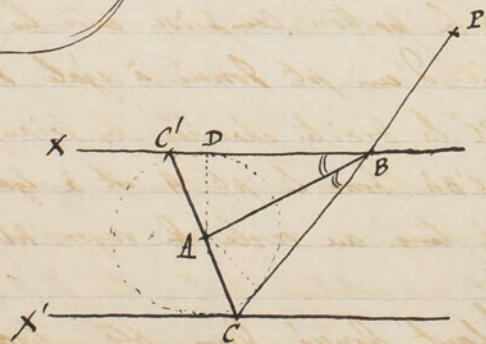
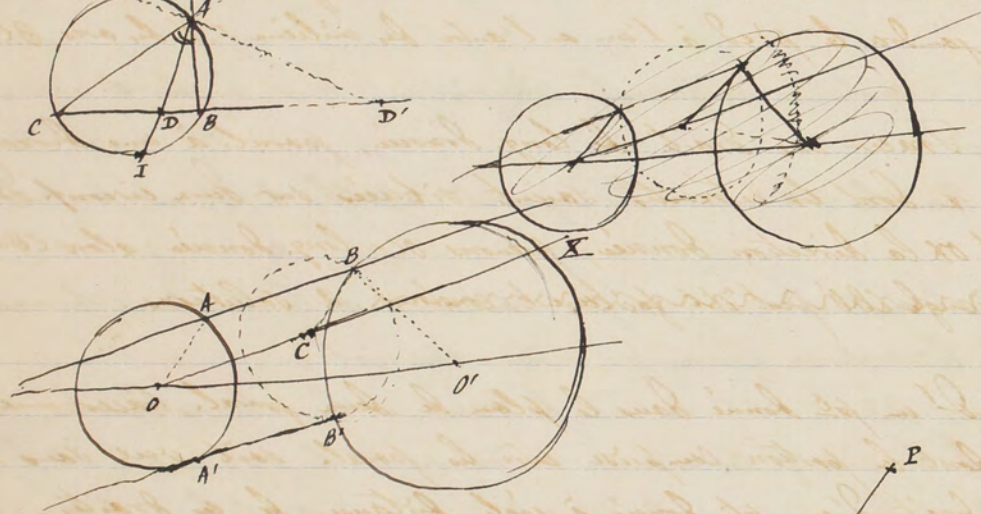
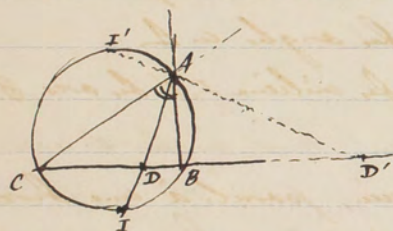
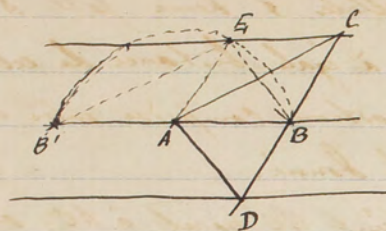
Les lignes de B & C sont des segments capables & BC est perp. à AD.

48. Construire un triangle connaissant la hauteur, la médiane et la bissectrice issues du même sommet.

Savoir AD, AE & AF la haute, la largeur, et la médiane données, Le centre de la circonscr. circonscrite se trouve sur la perp. FG à DF & passe par le pt. de rencontre G de AE & AF, le centre O est donc déterminé.

49. Construire un triangle équilatéral dont les sommets soient respectivement situés sur trois parallèles données.

Soit ABC, une solution, de l'intér de AB; dans le quadr. inscriptible CDEB, on a $\angle BDE = \angle BCE$; mais $\angle DBE = \angle DCE$; donc $\angle DEB = \angle BCD = 30^\circ$. Le pt E est donc connu, par suite B aussi.



50. Étant données deux parallèles & deux pts A, B situés sur la paral. aux droites données à égale distance de celles-ci, tracer par le pt A une droite dont la portion comprise entre les paral. soit vue du pt A sous un angle donné.

Fait AE paral. à la droite cherchée, et EB' paral. à AC ; on a $AB' = AB$
 $\angle EAB' = \angle CAB =$ donné. Le pt E est donc déterminé; 2 solutions

21. Construire un triangle ABC connaissant BC, l'angle A et la longueur de la médiane AD

52. Construire un $\triangle ABC$ connaissant BC , l'angle A & le pied sur BC de l'une des bissectrices des angles en A

On joindra le pied à l'un ou l'autre des milieux I, I' des axes BC.

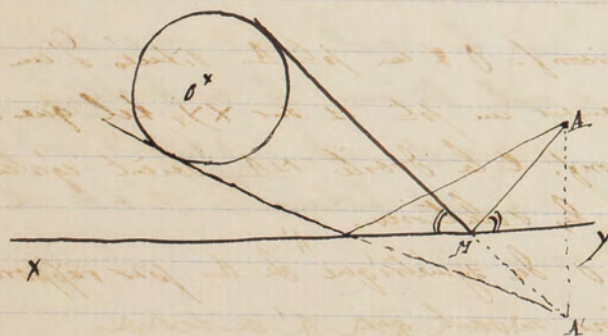
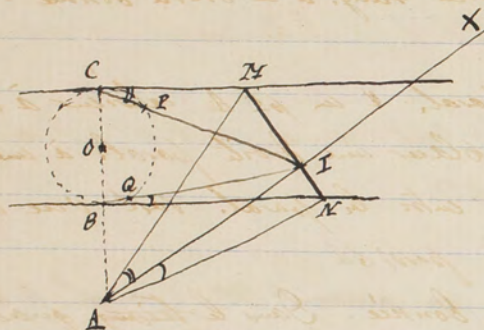
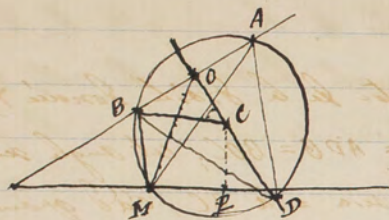
53. Tracer une droite de long. donnée, paral. à une direction donnée & dont les extrémités soient situées sur deux circonf. données.

Soit OX la direction donnée; prenons $OC = \text{long. donnée}$; alors $CB = OA$
 & la trouée CB peut être facilement construite: 2 solutions.

54. D'un pt donné dans le plan de deux paral., tracer une droite dont la portion comprise entre les paral. soit vue sans un angle droit d'un pt donné à égale distance de ces droites.

Soit BC la droite cherchée, les triangles rect. BCA & $BC'A$ sont égaux,
donc $CBA = C'BA$, donc le pt A est à égale distance de BC' & de BC ;
donc BC est tang. au cercle de rayon AD .

55. Étant donné deux p^{tes}, trouver sur une droite donnée le p^c qui l'on voit la distance de ces deux p^{tes} sous un angle



plus grand angle possible.

Si les pts A, B sont de part & d'autre de la droite donnée XY , la solution se trouve AB . Sinon, on a $APB = ADB = BOC$, cet angle sera donc le plus grand possible quand CP sera $\perp$ à BC , c'est à dire quand P sera le pt de contact du cercle tang. à la droite donnée.

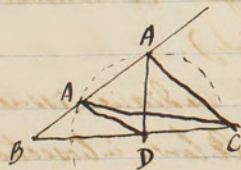
56. Étant données deux paral. & un pt A extérieur à la portion du plan qu'elles comprennent, tracer une droite paral. à une direction donnée dont la partie comprise entre les paral. soit vue du pt A sous le plus grand angle possible.

Soit AX la perp. à la direction donnée. Dans le triang. quadrilatère inscriptible $AIAC$, on a $MAI = CIM$; de même $MAI = CIA$, donc le maximum cherché se répond au maximum de $PC + CB$ ou demi-circonf. — PC c'est à dire l'angle BIC . On est donc ramené au prob. précédent.

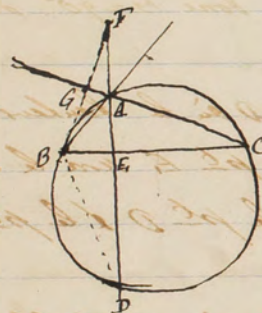
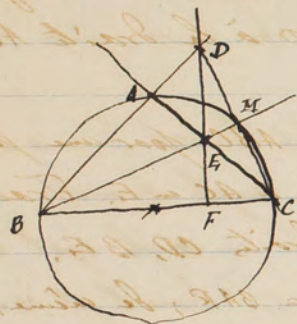
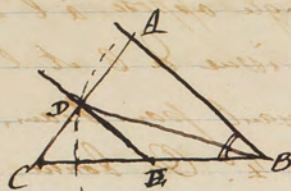
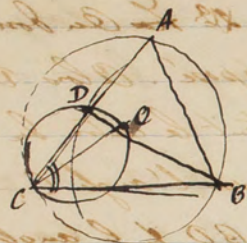
57. Étant données trois pts A, B, C , trouver un 4^e pt M , tel que les angles AMB, BMC soient égaux à des angles donnés (diversion). Intersection de deux segments capable. Substitution quand les angles donnés sont respectivement égaux à ACB & BAC .

58. Étant données une circonf. O & un pt A situé d'un même côté d'une droite XY , trouver un pt M sur XY , tel que la tang. issue de M à la circonf. & la droite MA soient également inclinées sur XY . Nombre des solutions.

Ce sont les tang. menées à O du symétrique de A par rapport à XY . 2, 1 ou 0 solutions suivant que A' se trouve



1^{re} On donne un côté, la médiane issue du sommet opposé à ce
l'angle au même sommet. Alors, intersection de deux circonf. 2^{de} idem
avec $\frac{1}{2}$ de un des angles adjacents au côté donné. Alors cas ambigu



De deux côtés l'angle opposé à l'un d'eux. 2°. On donne la côté BC, la médiane issue de B et l'angle opposé. Alors on trouve sur la circonfer. ayant pour diam. CO, O étant le centre du segment capable de $\frac{1}{2}$. 3°. On donne BC, BD avec l'angle C. même construction que 2°. 4°. Enfin on donne BC, BD & l'angle B. Alors le p^e D se trouve sur la paral. ED à la droite AB.

64. On coupe un triangle rectangle ABC par une perpend.
à l'hypothénuse BC , qui rencontre AB en D , & AC en E . Trouver
le lieu géom. du pt^e de concours H , des droites CD , BE .

Dans le Δ inscriptible $A E F B$, on a $BEF = BAF$; de même, $RDC = RAC$; donc dans le ΔEFD , $D + E = A = 90^\circ$. donc $M = 90^\circ$. donc etc.

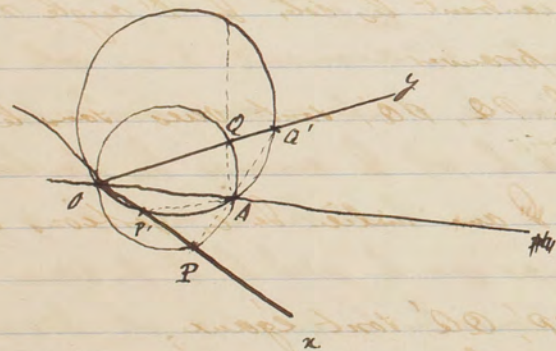
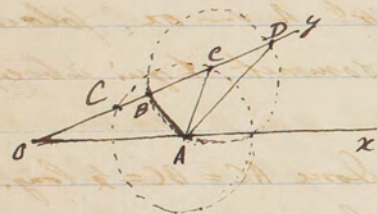
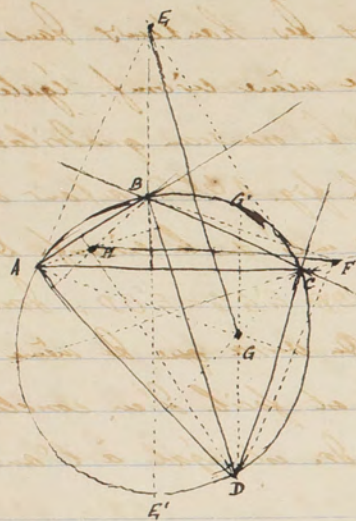
65. Si l'on considère le second pt D à la hauteur AE du triangle ABC rencontre le cercle circonscrit, le pt E sera le milieu de la partie de cette hauteur comprise entre le pt D & le pt H concours H des trois hauteurs.

Soit BG une seconde hauteur. Dans le $\square$ inscriptible AEBG, on a $\angle GBE = \angle EAC = \angle DBE$. Donc les triangles rect. BED & BGE sont =.

66. La distance du centre du ^{cercle} circonscrit à un côté d'un triangle est égale à la $\frac{1}{2}$ de la portion de hauteur correspondante à ce côté comprise entre le sommet & le pt. de concours des hauteurs.

Cela prouve le deuxième par la considération du cercle des 9 pts (18).
On prouve en même temps que le pied de la distance considérée ^{force} se trouve avec le pt de concours des hauteurs 2 pts diamétralement opposés dans le cercle des 9 pts.





67. Si l'on considère un quadrilatère $ABCD$ inscrit à une circonfer., les pts de concours des hauteurs dans les triangles ABC , BCD , CDA , DAB , sont sur une même circonfer. égale à la siée.

Soient E, F, G, H les sommets du nouveau quadrilatère. On a $AEC = B$, $AGC = D$; donc si l'on ^{fait} la fig. $AGCE$, autour de AEC comme charnière E viendra en E' et G en G' sur la circonfer. Donc $EG = G'E' = BD$; de plus, on a $E'EG = EGG' = BD$ et $E'G'G = E'OD$; donc le $\square EBDG$ est un paral.^{me} et $BE = DG$. On verra que de même que $AHEC$ est un paral.^{me} et $CH = AH$. Il est facile d'en conclure que $EF = AD$. Et l'on que le nouveau $\square$ quadr. est égal à l'ancien.

68. On donne un angle xy et un pt A sur ox ; placer un angle droit ayant le pt A pour sommet, et qui intercepte sur oy une longueur donnée.

Le pt A se trouve sur la circonfer. BD . Donc $AC = BC = \frac{1}{2}$ long. donnée. Donc le pt C se trouve sur la circonfer. de centre A et de rayon $= \frac{1}{2} BC$.

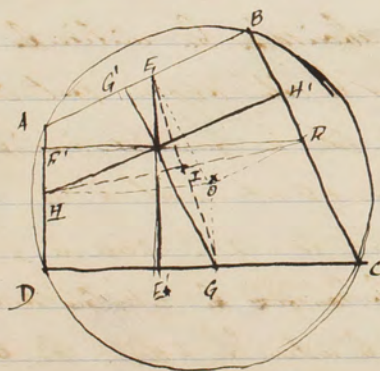
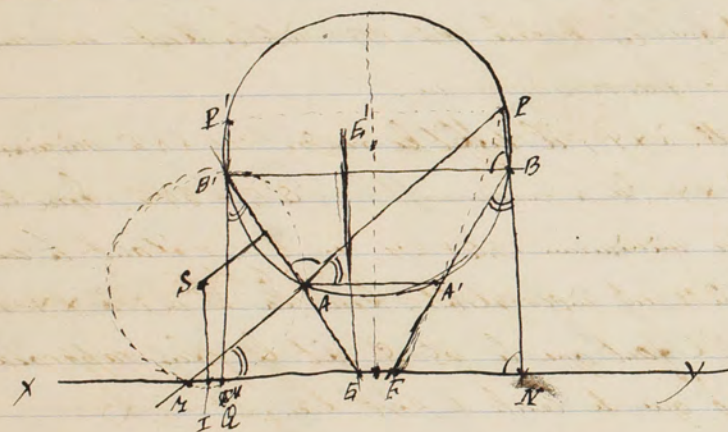
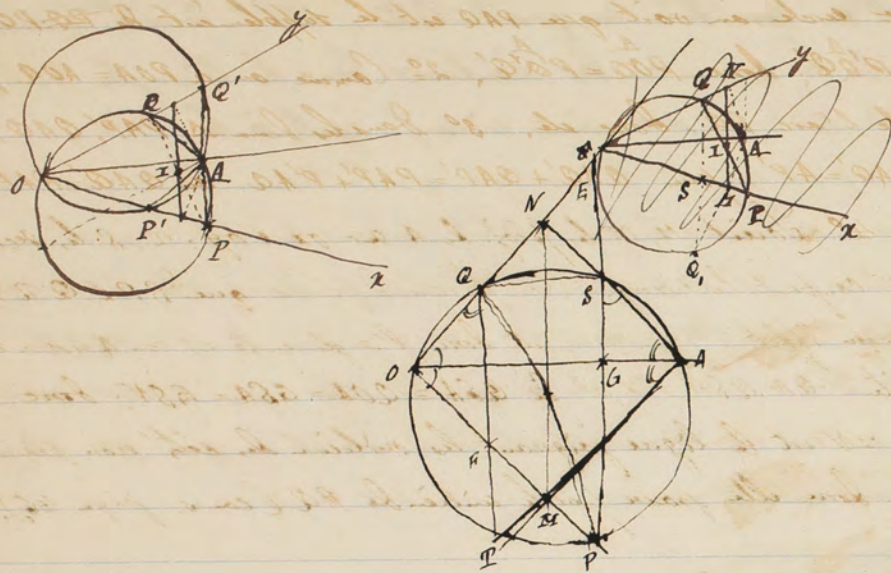
69. On considère un pt fixe A situé sur la bissectrice de l'angle fixe xy , et par les pts O et A on fait passer deux circonfer. arbitraires qui se coupent les côtés de l'angle xy aux seconds pts P, Q, P', Q' ; prouver

1° que les portions des $PQ, P'Q'$ sont vues sous le même angle du pt A ;
 droite

2° que les perp. élevés de A aux milieux de ces portions de droite passent par le pt A

3° que les segments PP', QQ' sont égaux;

4° que les milieux des cordes $PQ, P'Q'$ sont sur la droite qui passe par les proj. du pt A sur les côtés de l'angle xy .



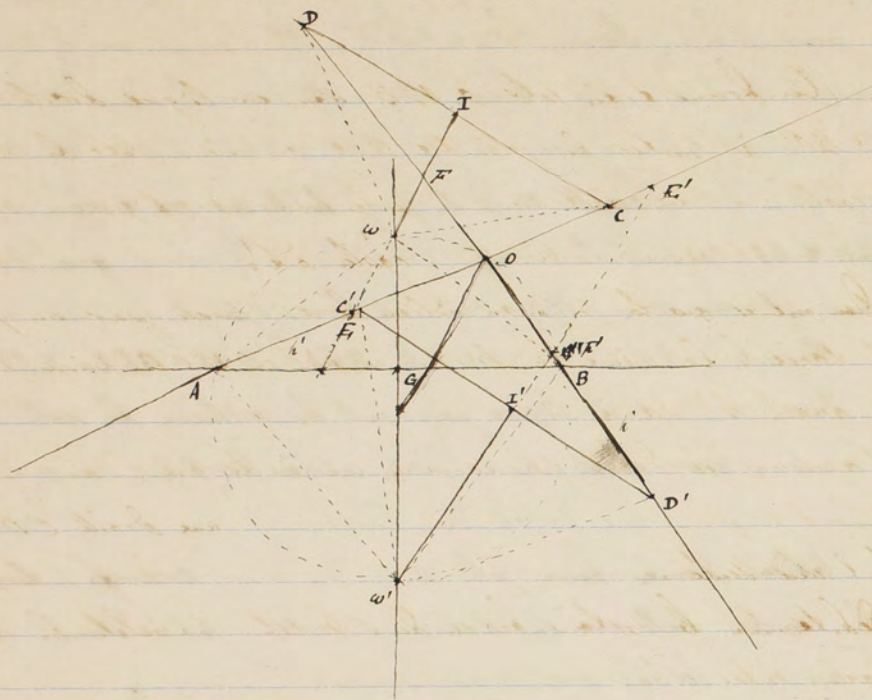
1° Dans le Δ rectangle, on voit que $\angle PAQ$ est le supplément de $\angle PQA$ ou $\angle POA$; de même pour $\angle P'Q'Q'$; donc $\angle POQ = \angle P'Q'Q'$. 2° Comme on a $\angle POA = \angle NOQ$, A est le milieu de l'arc PQ , donc etc. 3° Dans les deux Δ PAP', QAQ' , on a $\angle PAQ = \angle P'AQ'$, $\angle APQ = \angle A'P'Q'$; puis $\angle PAQ' + \angle QAP' = \angle P'AP + \angle P'AQ$ ou $\angle PAQ' = \angle P'AP$; donc $PP' = QQ'$. 4° Soient M, N les proj. de A sur OX et OY ; I, S les points ptés de AM et AN coupent la circonf. On prouve d'abord que $\angle SPQ = \angle QPT$ sont $\perp$ sur OA ; en effet $\angle PSA = \angle AOP$, etc. donc l'angle en G est $= \angle AHO = 90^\circ$. donc etc. Ensuite $\angle QAN = \angle QBN = \angle QBA = \angle QOA = \angle GBA = \angle GBN$; donc $QN = NB$. Donc MN est la ligne joignant les milieux des côtés non paral. d'un trapèze; donc elle passe par le milieu de PQ (cons. page 46).

70. Soient données deux pts A, B sur une circonf., trouver un pt P de la corde, tel que les droites PA, PB interceptent sur une droite donnée XY la longueur minimum.

Soient AA', BB' parall. à XY ; il suffit de rendre $ME + NE$ minimum. Soit encore PP' parall. à XY . On a évidemment $\angle B'Q'E = \angle BNE$. donc $EQ = NE$. On a donc à rendre minimum $EQ + EN$ ou EI , I étant le milieu de ME . Or le $\square$ $EAQM$ est inscriptible, ~~donc la~~ ^{pt S est pt au} I en I à XY rencontre celle au milieu de AB . Il faut que le pt S soit le plus rapproché possible de E , c'est-à-dire que le cercle I soit tangent à XY .

71. Les perpendiculaires abaissées du milieu de chaque côté d'un quadrilatère inscriptible sur le côté opposé sont concourantes.

Soient E, F, G, H les milieux des côtés du quadrilat. inscrit dans une circonf. de centre O . La perp. abaissée de E sur CD est parall. à OG , de même la perp. de G sur AB est parall. à OE . Soit donc I le milieu de la diagonale EG de parall. construit sur OE, OG le pt de concours de EF, GG' sera sur OI prolongée d'une long. égale. Comme I est aussi le milieu de AC (7, 30), le pt de concours rencontre



la prop. FF' , HH' sera au même pt.

72. On donne trois pts O, A, B non en ligne droite; on porte sur $AO \pm BO$, à partir du pt $A \pm B$ et du même côté de AB , les long. AC, BD égales à h ; on porte aussi sur les mêmes droites, mais de part et d'autre de AB , les long. AC', BD' , égales à h' .

1^{re} Démontrer que la prop. au milieu de CD passe par un pt fixe w , quand h varie: de même la prop. au milieu de $C'D'$ passe par un pt fixe w' , quand h' varie.

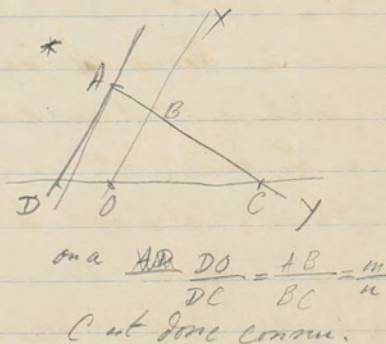
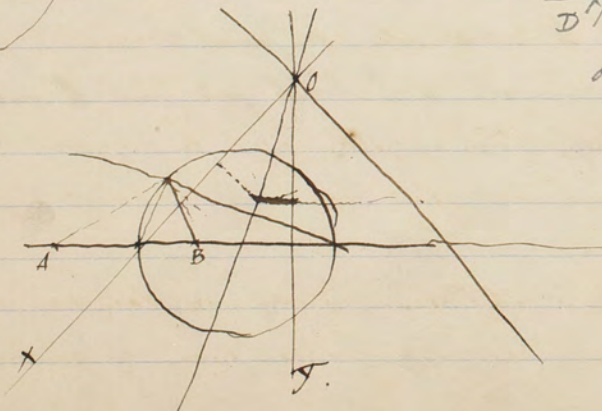
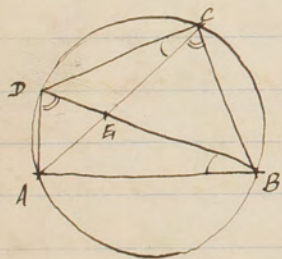
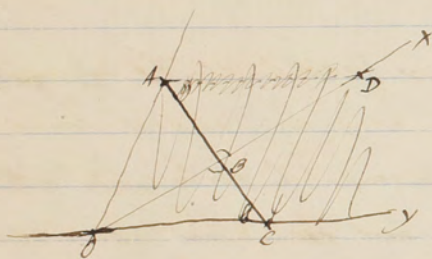
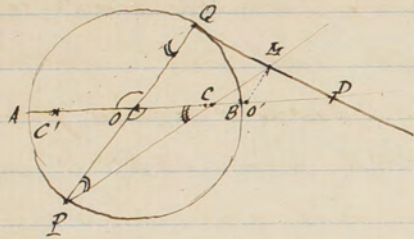
2^o Construire la droite CD , connaissant sa longueur, de même pour $C'D'$.

3^o Montrer qu'à une droite CD correspond une droite $C'D'$ qui lui est parallèle et une seule.

4^o Déterminer le système de ces deux droites parallèles de façon qu'elles soient égales, entre elles.

Soit d'abord w le pt où la prop. au milieu de CD rencontre celle au milieu G de AB ; les deux triangles ACw et OBw sont égaux, donc $CAw = OBw$, donc w se trouve sur la circonf. circonscrite à OAB . De même pour w' : car $w'AC' = w'BD'$. 2^o Car $D = AwB = AOB$, $CwD = AwB = \text{suppl. de } AOB$, donc quand IC ou IC' est donné on peut construire la long. wC ou $w'C$. 3^o Pour que $C'D'$ soit paral. à CD , il faut il suffit que wI' le soit à wI ; alors $w'C$ est déterminée en direction. 4^o Si de plus $IC = IC'$, on a $IE = IE'$, $IR = IR'$, d'où $ER = E'R'$ et le pt O est le centre de parallélisme $ERR'E'$; donc ER ou OE et $w'I'$ doivent être paral. à la droite qui joint le milieu de ww' (c'est-à-d. le centre de la circonf.) au pt O .

Combette. Livre III.



1. Etant donnés une circonf. O , un diamètre fixe AB & deux pts C, D sur le diamètre, on considère un diamètre mobile PQ dont on joint les extrémités aux pts C, D . Trouver le lieu géométrique du pt de concours des droites PC, QD .

Menons HO' paral. à QO & QC' paral. à HC . On a $\frac{HO'}{QO} = \frac{OD}{OQ} = \frac{HO'}{QO} = \frac{CD}{OQ}$. Mais les deux triangles CPO & $C'QO$ sont égaux & $CO = CO = C'O$. Donc $HO' = C'O$ & $O'D = C'O$. Donc le lieu est une circonf.

* 2. Par un pt donné, tracer une sécante ABC à un angle donné XOY , de telle sorte que A partage BC dans un rapport donné.

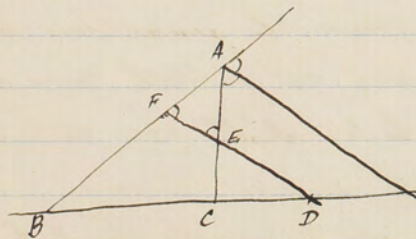
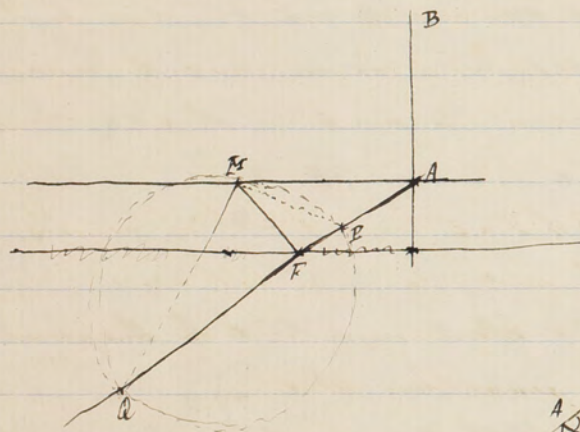
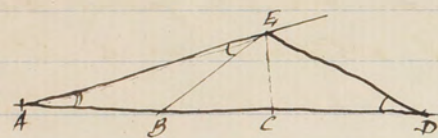
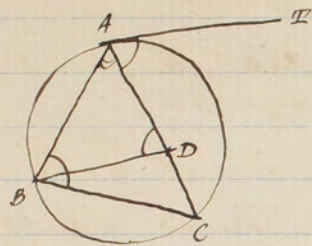
Soit $\frac{AB}{AC} = \frac{m}{n}$ le rapport donné. Menons AD paral. à OY . On aura $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{DC}$ ou $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{DC}$; donc on doit avoir $\frac{AO}{AD} = \frac{m}{n}$. Donc le pt D est connu, & par suite le pt C .

3. Le quadrilatère $ABCD$ étant inscrit, & les diagonales AC, BD se coupant en E , prouver la proposition $\frac{EA}{EC} = \frac{AD \times AB}{CD \times CB}$.

Les deux ΔAED & BEC sont semblables, comme ayant les angles égaux; donc $\frac{EA}{EB} = \frac{AD}{CB}$. De même les Δ semblables ABE, CED donnent $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{CD}$. Donc la.

4. Trouver les pts d'un plan dont le rapport donné des distances à deux pts donnés du plan égale le rapport des distances à deux droites données.

Ce sont les pts d'intersection d'un Δ faisceau harmonique avec une circonf. (Cours. page 152). 4 solutions en général.



5. On considère le tang. en A au cercle circonscrit à un triangle ABC & l'on prend le pt. D, où la paral. OD à cette tangente rencontre AC; prouver la proportion $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AB}$.

On a $\angle ADB = \angle DAC = \angle ABC$; donc les deux triangles ABC & ABD sont semblables, comme ayant les angles égaux; donc le.

6. Quatre pts A, B, C, D en ligne droite étant tels que: $AC^2 = AB \times AD$, on trace une droite arbitraire par le pt. A, sur laquelle on prend un pt. E, tel que $AE = AC$; prouver que la droite EC partage l'angle BED en deux parties égales.

Comme on a $\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{AD}$, les triangles ABE & ADE sont semblables; donc $\frac{EB}{ED} = \frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AD} = \frac{AC-AB}{AD-AC} = \frac{BC}{CD}$; donc EC est bissectrice de l'angle E (page 133).

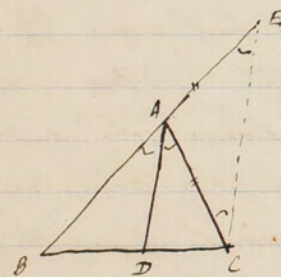
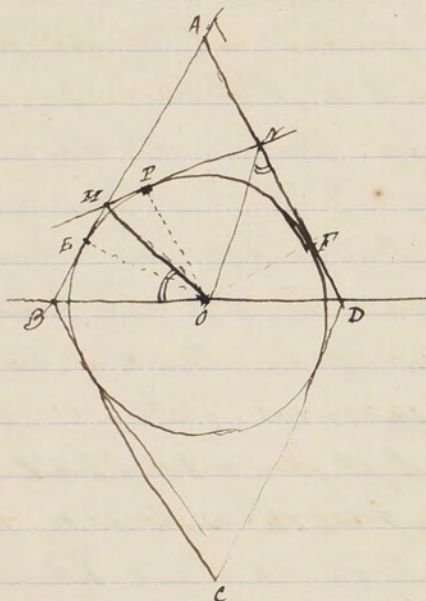
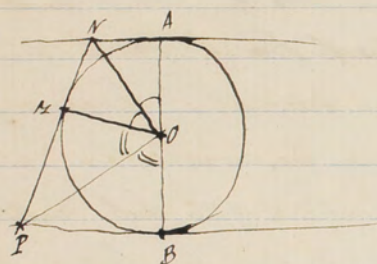
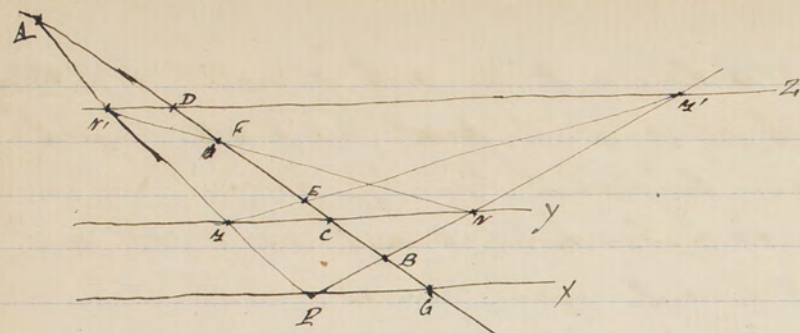
7. Construire le pt. I' une droite donnée dont le rapport des distances à un pt. du plan & à une droite perp. à la 1^{re} a une valeur donnée.

Soient R le pt. donné & AB la droite donnée & M le pt. cherché. Menons la bissectrice ML, ML des angles en M; comme on doit avoir $\frac{RM}{PA} = \frac{RM}{QA} = \frac{ML}{QA} = \text{rap. donné}$, les pts P & Q sont déterminés, le pt. M se trouve sur le cercle de diamètre PQ. En général deux solutions.

8. On coupe un triangle ABC par une paral. à une des bissectrices de l'angle A; elle rencontre respectivement les côtés BC, AC, AB aux pts D, E, F; prouver la proportion $\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC}$.

On a d'après le théorème de Menelaüs $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$; mais le AAEF est insc. à l'arc EA=FA, donc le.

9. Soit l'on considère trois paral. X, Y, Z, & deux pts A & B,



en joignant les pts à un pt P de X, les droites vont couper les deux autres paral. en les pts M & M': montrer que la droite MM' passe par un pt fixe quand le pt P parcourt X.

On a dans le Δ $\frac{EM}{EN} = \frac{EC}{ED}$, $\frac{BM}{BN} = \frac{BD}{BN}$, $\frac{AP}{AN} = \frac{AG}{AD}$; donc en remplaçant: $\frac{EC}{ED} = \frac{BD}{BN} \cdot \frac{AD}{AG} = \frac{CE}{EN}$; donc le pt E est fixe. De même pour R.

10. Si l'on considère deux tang. paral. à une même circf., & une tang. variable dont le pt de contact est M, & qui rencontre les tang. fixes en N & P, prouver que le produit MN x MP est const. On a $\angle ON = \frac{1}{2} \angle NOA$, $\angle OP = \frac{1}{2} \angle POB$; donc $\angle NOP = 90^\circ$ donc $MN \times MP = R^2$.

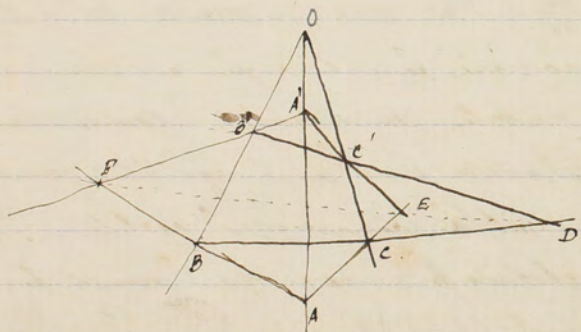
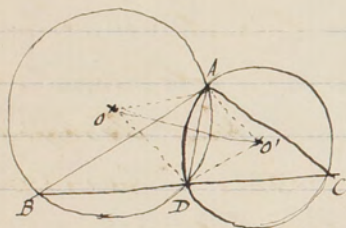
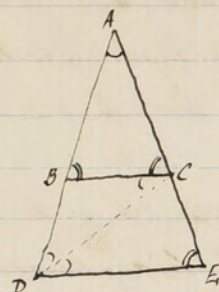
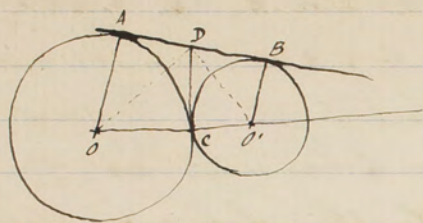
11. Un losange ABCD est circonscrit à une circf., & une tang. variable rencontre en M & N les côtés AB, AD; prouver que le produit BM x DN est const.

On a $\angle OND = \frac{1}{2} \angle ONR = \frac{1}{2} (\angle NOA - \angle NOR) = \frac{1}{2} (\angle NOA + \angle NOB) = \frac{1}{2} (\angle NOA + \angle NOB + \angle NOE) = \frac{1}{2} \angle NOB + \frac{1}{2} \angle NOE = \angle NOB$. Donc les Δ $\angle NOB$ & $\angle NOE$ sont semblables, donc: $\frac{ON}{OB} = \frac{OE}{NO}$ d'où $ON \times NO = OB \times OE = R^2 = C^2$.

12. Construire un triangle connaissant deux côtés & la long. de la bissectrice de l'angle qu'ils forment & comprise entre le sommet & le côté opposé.

La relation de la page 201 permet de calculer le 3^e côté. Mais soit la paral. CE à AD; on a $\frac{CE}{AD} = \frac{BE}{AB} = \frac{AB+AC}{AB}$, car AE = AB. Donc on peut construire le Δ ACE & par suite ABC.

13. Lorsque deux circf. sont tang. extérieurement, la portion de tang. commune extérieure comprise entre les pts de contact



Réciproque - Les 2 Δ ECC' , FBB' ayant leurs ~~angles~~^{sommets} situés 2 à 2 sur les trois droites concourantes FED , $BC'D$, BCD , leurs cotés se coupent en les pts situés en ligne droite; donc c'ad que le pt de rencontre de CC' , BB' se trouve sur la droite AA' .

est moyenne géométrique entre les diamètres de l'une circon.

$\angle DOC = \frac{1}{2} \angle AOC$, $\angle DO'C' = \frac{1}{2} \angle BO'C'$; J'ai $\angle DOC + \angle DO'C' = \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle BO'C') = \frac{1}{2}d$. Donc le triangle ODO' est rectangle en D , donc etc.

14. Dans un triangle isocèle ABC , chacun des angles à la base BC étant double de l'angle au sommet, trouver la relation

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + AB \times BC.$$

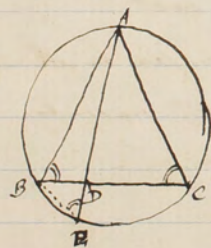
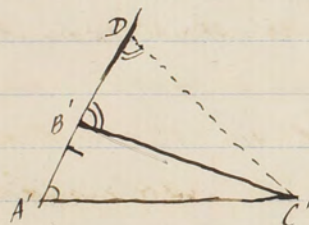
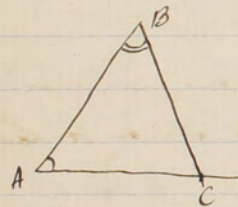
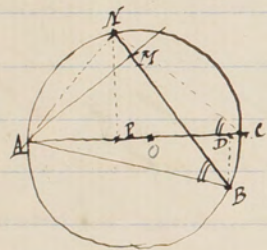
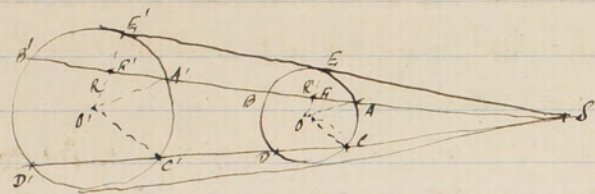
Prenez $BD = CE = BC$. On aura, $\frac{AB+BC}{AB} = \frac{DE}{BC}$. Or le double de l'angle à la base du triang. isocèle BDC étant égal à l'angle ABC , cet angle à la base est égal à BAC ; donc aussi CDE ; donc $DE = AB$, &c.

15. Soit deux cercles AB, AC d'un triangle, on décrit une circonf. dont le second pt commun est sur le côté BC ; prouver que les rayons de ce circonf sont toujours dans le rapport $\frac{BC}{AB}, \frac{AC}{AB}$.
L'angle au sommet du triangle isocèle $OAO = 2B$; l'arc $AO = \frac{1}{2} \text{ arc } BO$
 $= \frac{1}{2} \text{ arc } BO$; l'angle $AOO = \frac{1}{2} \text{ arc } BO = \frac{1}{2} \text{ arc } BO = \frac{1}{2} \text{ arc } BO = \frac{1}{2} \text{ arc } BO$. Donc les
rayons $AOO = B$; la même $AOO = C$; donc etc.

16. Lorsque deux triangles ont leurs sommets situés deux à deux sur trois droites concourantes, les côtés homologues se coupent en trois pts situés en ligne droite & réciproquement.

Il s'agit de démontrer l'égalité $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$. Or le triangle
 OBC, OCA, ~~OAB~~ OAB coupés respectivement par les transversales, BC'D, AC'E, AB'F
 donnent $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{C'E}{C'O} \cdot \frac{B'O}{B'B} = 1$, $\frac{EC}{EA} \cdot \frac{A'F}{A'O} \cdot \frac{C'O}{C'C} = 1$, $\frac{FA}{FB} \cdot \frac{B'B}{B'O} \cdot \frac{A'O}{A'A} = 1$, J'ai en multipliant
 membre à membre le. - (La réciproque n'est pas un autre théorème.)
 (2) 解在面 = P1.)

27. Par le pt^e de rencontre la deux tang. communes extérieures à deux circonf., on trace deux sécantes $SABA'B'$, $SCDC'D'$; prouver



que l'on a. $SA \times SB' = SD \times SC' = SB \times SA' = SC \times SO'$. - Démontrer la même propriété dans le cas où le pt S est commun aux deux tang. communes intérieures.

On a $\frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'} = \frac{R}{R'}$. J'ai $SA \times SB' = SD \times SC' = \frac{R}{R'} \times SA \times SB' = \frac{R}{R'} \times \text{puiss. de S par rap. à la circonf. de ray. } R'$. On aura de même $SC \times SD = SD \times SC' =$ la même chose donc etc. - De même pour le pt de rencontre des tang. intérieures.

Démonstration Directe. - On a $\frac{SO}{SO'} = \frac{OS}{OS} = \frac{SE}{SE'} = \frac{R}{R'}$; donc les deux Δ rectangles ROA , $S'O'A'$ sont semblables (page 142) et AO est parall. à A'O'. de même $BO, BO'; CO, CO'; DO, DO'$; donc $SB'C' = SDA$. donc $\frac{SA}{SC'} = \frac{SB'}{SD}$.

18. On considère un angle droit $A \times B$ dont les côtés passent par deux pts fixes A & B d'une circonf. de centre O; on projette en P sur le diamètre du pt A le second pt N où AB rencontre la circonf.; prouver que le rapport $\frac{AN^2}{AP}$ a une valeur constante.

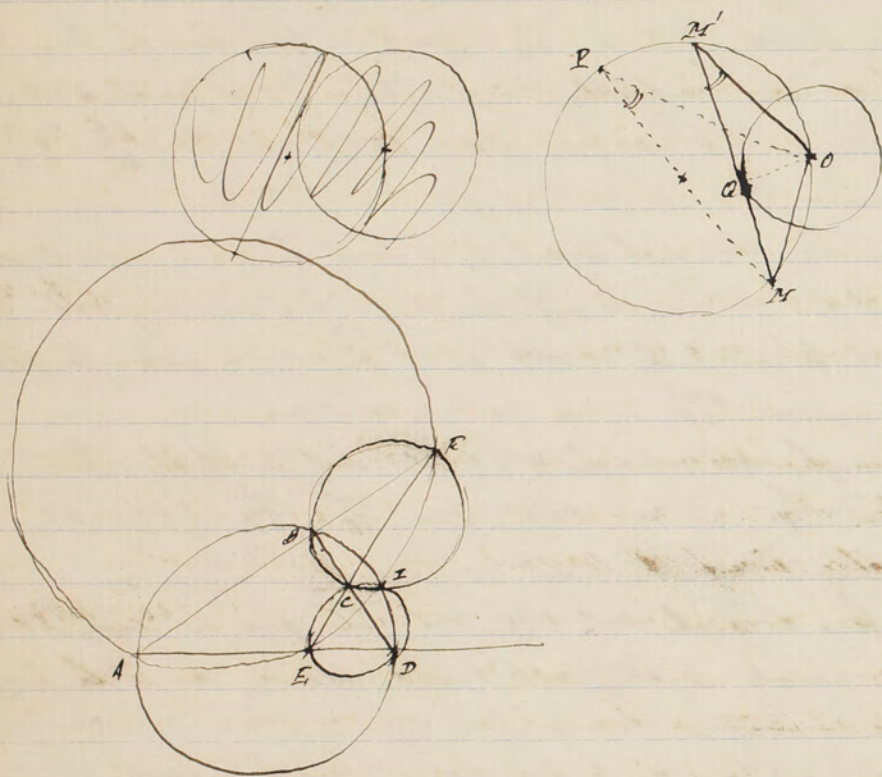
Les deux triangles ABC rectangles ABM & ACN sont semblables; donc $\frac{AN}{AN} = \frac{AB}{AC}$ ou $\frac{AN^2}{AN} = \frac{AB^2}{AC}$; or $AN^2 = AP \times AC$. donc $\frac{AN^2}{AP} = \frac{AB^2}{AC} = \frac{AC \times AD}{AC} = AD$.

19. Lorsque deux triangles $ABC, A'B'C'$ sont tels que les angles $A \times A'$ sont égaux & les angles $B \times B'$ sont supplémentaires, on a la proportion $\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{AC'}$.

Ces deux Δ si l'on prend $CD = C'B'$ on a $B'DC' = DB'C' = B$.

20. Si par le sommet A d'un triangle isocèle ABC on trace une parall. droite arbitraire qui rencontre la base en D, & la circonf. circonscrite en E, on a: $AD \times AE = AB^2$.

On a $AE \times D = ACD = ABC$; donc les deux ΔAED & ADB sont semblables. donc: $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AE}$. J'ai le.



D'abord, $\frac{ID}{CD} = \frac{AC}{CC'}$. Puis on a $BCD = BAO$; donc: $\frac{BP}{BD} = \frac{BD}{AB}$.
J'ai en multipliant: $\frac{ID \times BD}{CD \times CD} = \frac{AC \times BD}{AB \times CC'} = \frac{1}{2}$, ou $\frac{ID \times BD}{BD^2} = \frac{1}{2}$.

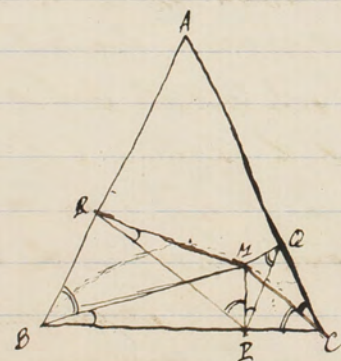
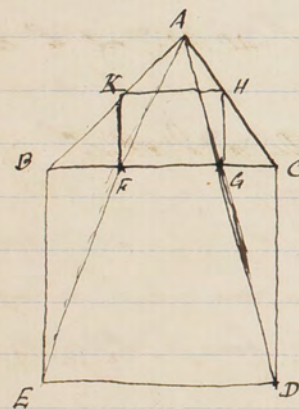
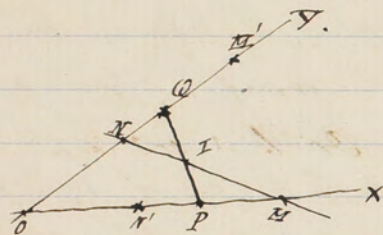
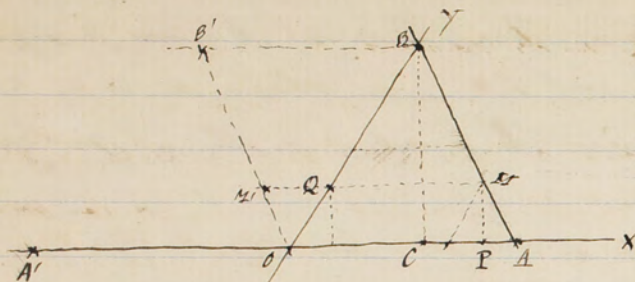
Soit $2R$ le diamètre de la 2^e circonf. passant par H . On a $P=H'$
Donc les deux Δ rectangles, $OH'A$ & $OH'D$ sont semblables; donc $\frac{OH'}{OA} = \frac{OH'}{OD}$.

Soit I le 2^d pt commun aux circonf. ^{circumscrite} passant aux Δ^s ABD , AER .
 Dans la 1^{re} circonf. on a: $BPI = BAI$ & dans la 2^e $IGL = GAI$; donc $BPI =$
 IGL ; donc les 4 pts C, E, D, I & traversent sur une seule même circonf.; &
 même pour F, B, C, I . — (Ce prob. peut se trouver dans le Livre II).

24. Étant donné, deux droites OX, OY , tracer le lieu des pts R du plan pour lesquels la somme de la distance RE à OX & de la portion RE de paral. à OX comprise entre R & OY a une valeur donnée. En déduire la construction graphique d'un rectangle de périmètre donné inscrit dans un triangle donné; & discuter.

Soient ~~donnés~~ A, B les pts du lieu situés sur OX & OY , la recte que





$OA = OC = a = \text{val. don.}$ Prenons sur la parall. à OX , $MM' = OB' = a$, la droite, AM , AB étant respectivement parall. à OM' , OB' . Or on a $\frac{AM}{OM} = \frac{a}{OB}$ ou $\frac{AM}{OM} = \frac{OB'}{OB}$, donc les deux $\triangle OAM$, OAB' sont semblables, $\angle OAM = \angle OAB'$. Donc M est sur la droite AB . Donc etc. - Le lieu se compose de quatre droites AB , $A'B$, AO' , $A'B'$.

25. Les droites MX qui coupent les côtés d'un angle XOY fixe en des pts M , N , tels que la somme des inverses de OM & ON soit constante, passent par un pt fixe.

Prenons sur OX , XOY , $OP = OQ$ tels que $\frac{1}{OP} = \frac{1}{OQ} = \frac{1}{OM} + \frac{1}{ON}$. Alors on aura $\frac{OM}{OP} = \frac{ON}{OQ} = \frac{NQ}{NO}$. Or le $\triangle OPQ$ coupé par la transversale MN donne: $\frac{OM}{OP} \cdot \frac{NQ}{NO} \cdot \frac{IQ}{IP} = 1$ ou $\frac{IQ}{IP} = 1$. Donc le pt I est fixe.

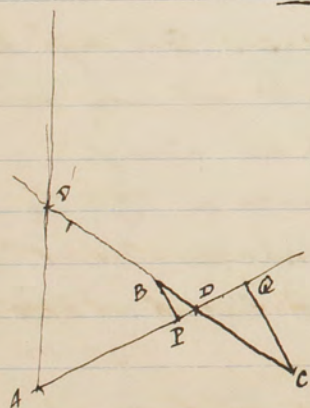
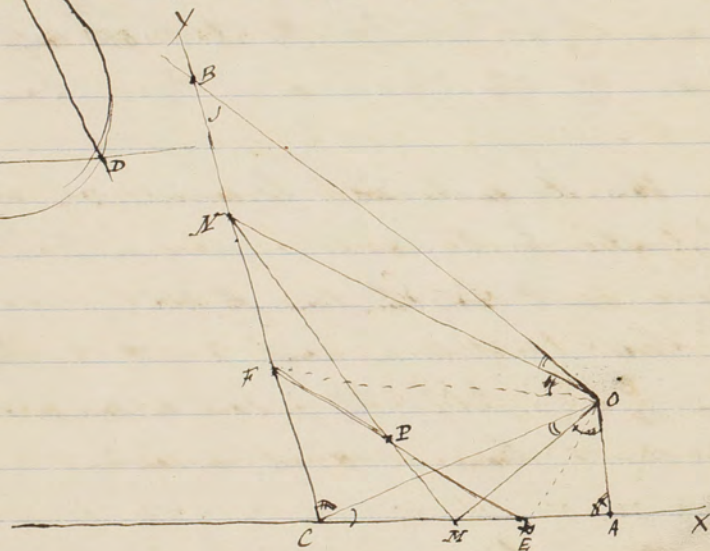
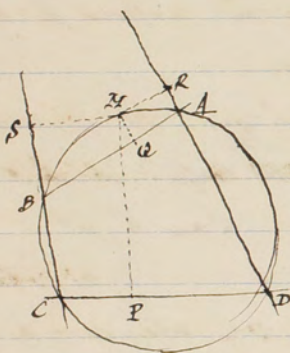
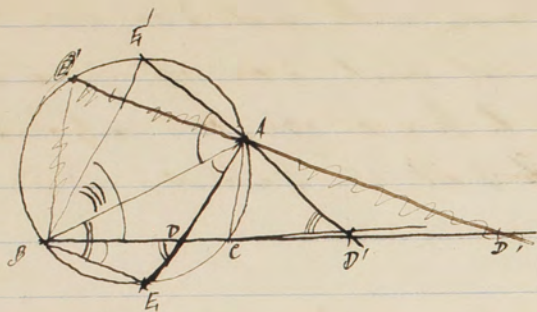
26. En construisant le carré $BCDE$ intérieur au triangle ABC , la portion de BC comprise entre les droites AD , AE , est le côté du carré inscrit dans le triangle ABC .

Soient $FK \perp GH$ la parall. à BC , CD . On a d'abord: $\frac{FG}{ED} = \frac{AG}{AD} = \frac{AE}{AE}$. Puis $\frac{HG}{ED} = \frac{AG}{AD}$, $\frac{AK}{BE} = \frac{AE}{AE}$. Donc en comparant: $\frac{FG}{ED} = \frac{HG}{ED} = \frac{AK}{BE}$, ou $FG = HG = AK$. Donc $FGHK$ est un carré.

27. Le lieu géométrique des pts intérieurs à l'angle A d'un triangle ABC dont la distance à la base BC est moy. geom. entre les distances aux côtés égaux AB , AC est une circonfer.

On a $PMQ = PMR$ & comme on $MP^2 = MQ \times MR$ ou $\frac{MQ}{MP} = \frac{MP}{MR}$ les deux $\triangle MPQ$, MPR sont semblables & par suite $\angle MQP + \angle MRP = \angle ABC + \angle ACB = \angle C$. Donc le lieu de pt M est un segment capable de l'angle $\angle C$ à $\angle ADC + \angle BAC$.

28. Si l'on considère le cercle circonscrit au triangle ABC ,



il est rencontré en E & E' par la bissectrice AD , AD' des angles intérieurs & extérieurs au sommet A ; prouver que BE est moyenne géométrique entre EA & ED , & que BE' est moy. gé. entre EA & ED' .

On a $\angle DBE = \angle BAE$, donc: $\frac{EA}{BE} = \frac{BE}{ED}$. Puis comme $\angle BDE = \angle E'AB = \angle E'BC$, on aura: $\frac{EA}{BE'} = \frac{BE'}{ED'}$.

29. Le produit des distances d'un pt de la circonfer. circonscrite à un quadrilatère à deux côtés opposés, égal le produit des distances du même pt aux deux autres côtés.

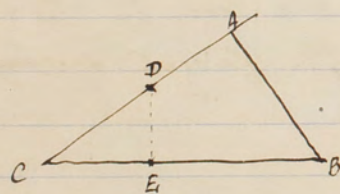
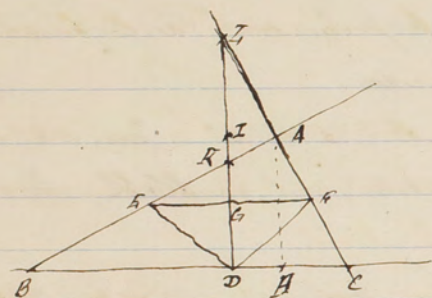
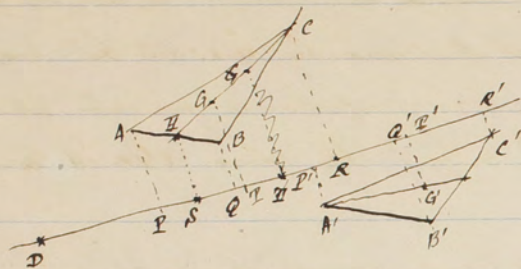
On a $\angle RPL = \angle DPL$, $\angle QPS = \angle BPS = 2^d - \angle BCL = \angle DPL$; donc, $\angle RPL = \angle QPS$, de même $\angle LPR = \angle SQP$, donc les $\triangle LPR$, $\triangle SQP$ sont semblables; donc se.

30. Un angle $\angle MON$ de grandeur constante pivote autour de son sommet, & ses côtés viennent couper en M & N les côtés d'un angle fixe supplémentaire du premier. Trouver le lieu du pt P qui partage MN dans un rapport donné.

Soit $\angle XOY$ l'angle fixe, prenons $\angle COA = \angle COB = \text{ang. donné}$ & $EC = \frac{n}{m+n} CA$, $FC = \frac{m}{m+n} CB$; les pts E & F appartiendront au lieu. Car $\angle MCA + \angle MCE = \angle NCB + \angle NCF = \angle COA = \angle COB = \angle XOY$; donc $\angle MCE = \angle NCF$, de même $\angle MCE = \angle NCF$; donc les $\triangle MCE$ & $\triangle NCF$ sont semblables; On a $\angle OBC + \angle OCB = 2^d - \angle BOC = \angle ACB = \angle OCB + \angle OCA$; donc $\angle OBC = \angle OCA$; de plus, on a: $\frac{CE}{CF} = \frac{EC}{CB} = \frac{OC}{OB}$; donc $\angle OCE = \angle OFC$; donc $\angle ECO = \angle FOA$, donc, $\frac{ME}{NF} = \frac{OE}{OF} = \frac{EC}{FC} = \frac{OC}{OB}$; or $\frac{ME}{NF} = \frac{EC}{FC} \cdot \frac{FC}{OB} = \frac{EC}{OC} \cdot \frac{n}{m}$. On a donc $\frac{PM}{PN} \cdot \frac{FY}{FC} \cdot \frac{EC}{EM} = \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = 1$; donc les 3 pts E , P , F sont en ligne droite; donc se.

31. Etant donnés trois pts A , B , C , mener par le pt A une droite telle que les distances du pt B , C à cette droite soient dans un rapport donné. (nombre des solutions).

On doit avoir $\frac{DB}{DC} = \frac{BP}{CP} = \text{rapp. donné}$. 2 solutions.



32. Étant donné deux triangles ABC , $A'B'C'$ et un pt D , tracer par ce pt une droite telle que la somme des distances des sommets A, B, C à cette ligne, soit dans un rapport donné avec la somme des distances, à la même ligne des sommets A', B', C' . — Généraliser en prenant deux systèmes de pts.

Soit H le milieu de AB et G le centre de gravité de ABC . On a (page 146). $2HS = AS + BS$. $3GT = THS + CR = AS + BS + CR$. De même $GT' = AS' + BS' + CR'$. On est donc ramené au prob. précédent. — Facile de généraliser.

33. Étant donné un triangle ABC , et un pt D sur BC , tracer une parall. EF à BC , telle que la portion EF comprise dans l'angle A soit vue du pt D sous un angle droit.

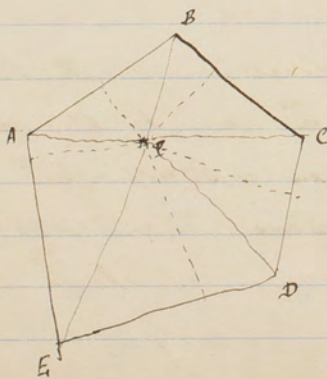
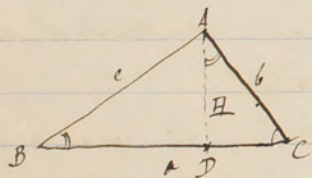
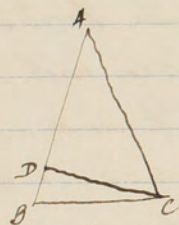
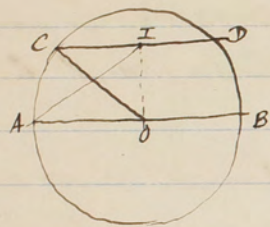
Posons-nous au cas où A est un angle droit. On a, $EG \times FG = GD^2$. Mais on a $\frac{EG}{GH} = \frac{KD-GD}{AH}$, $\frac{FG}{GH} = \frac{LD-GD}{AH}$. J'ai $\frac{GD^2}{GH \cdot GH} = \frac{(KD-GD)(LD-GD)}{AH^2}$, en remarquant que $BH \times CH = AH^2$. $KD \cdot LD = (KD+LD) \cdot GD$ ou $\frac{2}{GD} = \frac{1}{KD} + \frac{1}{LD}$ donc si l'on pose $LD = 2GD$, L est la conjuguée harmonique de D .

34. Soit quatre pts A, B, C, D en ligne droite; C étant le milieu de AB , on a la relation: $AD^2 + DB^2 = 4CD^2 + 2AD \times DB$.

Cela résulte du prob. 1 livre I. (il faut donner des signes aux segments)

35. La projection du milieu d'un côté d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse, détermine sur cette ligne deux segments dont la diff. des carrés égal le carré du 3^e côté.

On a, $\frac{CE}{AC} = \frac{CD}{BC}$ ou $2 \cdot BC \times CE = AC^2$ ou $2 \cdot (CE + BE) \cdot CE = AC^2$
 $= (CE + BE)^2 - AB^2$ ou encore $AB^2 = (CE + BE)^2 - 2CE \cdot (CE + BE) = (BE - CE)(BE + CE)$.
 Donc etc.



36. Soit l'angle droit AOB au centre d'une circonf.; nous abaissons d'un pt C de l'arc intercepté une perp. CD sur le rayon OA , qui rencontre en E la bissectrice de l'angle AOB , prouver que les lignes DE, DC & OA sont les côtés d'un même rectangle
Car $DE = CD$.

37. La somme des carrés des distances du milieu d'une corde d'une circonf. à ses extrémités & aux extrémités du diamètre qui lui est parall., égale le carré du diamètre.

On a $CI^2 = CO^2 - IO^2$, $AI^2 = AO^2 + IO^2$, j'ai $CI^2 + AI^2 = 2.R^2$. Donc le.

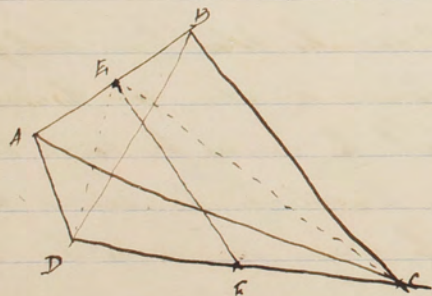
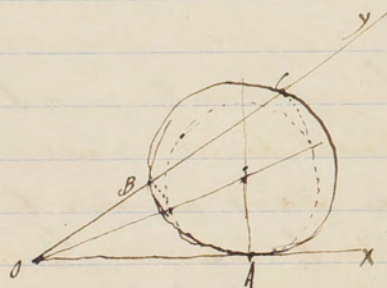
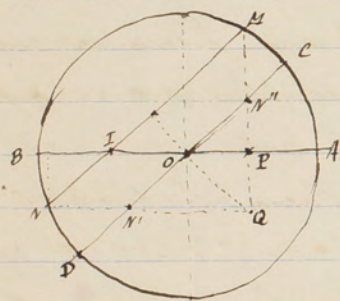
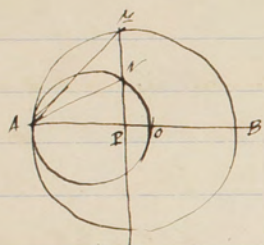
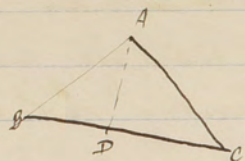
38. Le triangle ABC étant isocèle, d'une extrémité C de la base on abaisse la perp. CD sur le côté AB ; prouver que la somme des carrés des trois côtés du triangle égale $3.CD^2 + 2.AD^2 + BD^2$.

On a $AC^2 = CD^2 + AD^2$, $BC^2 = CD^2 + BD^2$ j'ai $2.AC^2 + BC^2 = \dots$

39. En représentant par a, b, c les côtés d'un triangle rectangle dont l'hypothénuse est a et par H la hauteur, les 3 lignes $H, a+H, b+c$ sont les côtés d'un même triangle rectangle.

On a $\frac{H}{c} = \frac{b}{a}$ ou $H = \frac{bc}{a}$ $a+H = \frac{a^2+bc}{a}$, j'ai $a+H$
 $(a+H)^2 - H^2 = \frac{(a^2+bc)^2 - b^2c^2}{a^2} = \frac{a^4+2abc}{a^2} = b^2+c^2+2bc = (b+c)^2$.

40. Lorsqu'on projette un pt P sur les côtés d'un polygone $ABCDE$, on détermine les segments tels sur les côtés, que la somme des carrés des segments non consécutifs égale la somme des carrés des autres, Car ces deux sommes sont égales à l'un des la somme des carrés des lignes $PA, PB, PC, \dots$ sur elle de la somme des carrés des lignes projetantes



41. Le triangle rectangle ayant pour hauteur AD, on a la relation

$$\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

Car: $AD \times AC = AD \times BC$ ou $\frac{1}{AD^2} = \frac{BC^2}{AD^2 \times AC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{AD^2 \times AC^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AC^2}$

42. Si l'on considère deux circonf. tang. en A, l'une passant par le centre de l'autre, en les coupant par une perp. au diamètre du pt A, le rapport des carrés des distances du pt A aux pts de rencontre est constant.

On a $AN^2 = AP \times AB$, $AN'^2 = AP \times AO$. J'ai $\frac{AN^2}{AN'^2} = \frac{AB}{AO} = 2$. (Pour la simplicité constante du rapport le rayon du petit cercle peut être qq).

43. La somme des carrés des segm. déterminés par un diamètre fixe d'un arc sur une corde inclinée à 45 degrés sur ce diamètre est constant.

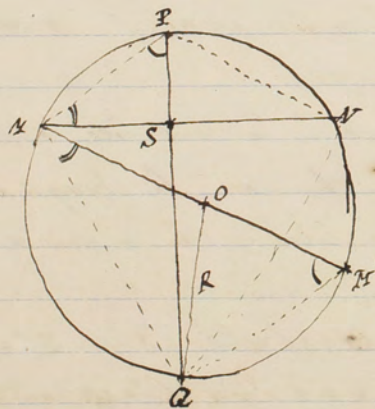
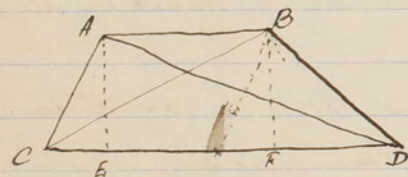
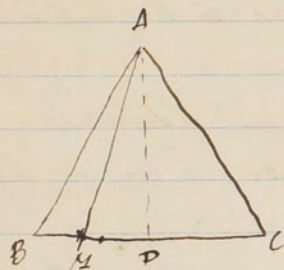
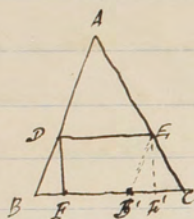
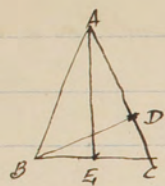
On a d'abord $MI^2 = 2 \cdot MP^2$. Puis menant la paral. NQ à AB, on voit que $NI^2 = NO^2 = N'O^2 = 2 \cdot OP^2$. Donc $MI^2 + NI^2 = 2 \cdot (MP^2 + OP^2) = 2 \cdot R^2$.

44. Étant donné un angle XOY & un pt A sur OX, tracer une circonf. tang. à OX en A & qui intercepte une tang. donnée sur OY.

Soit OC = l. on doit avoir OC - OB = l. OC x OB = OA^2. Donc etc.

45. La somme des carrés de deux côtés opposés AB, CD d'un quadrilatère, augmentée de la somme des carrés des diagonales, égale la somme des carrés des deux autres côtés, plus 4 fois le carré de la ligne qui joint le milieu de ces côtés.

On a (page 195): $AD^2 + BC^2 = 2ED^2 + 2AE^2$, $DC^2 + AB^2 = 2CE^2 + 2BE^2$. J'ai en ajoutant $AD^2 + BC^2 + AC^2 + BD^2 = 2(ED^2 + CE^2) + AB^2$. Mais $ED^2 + CE^2 = 2EF^2 + 2DE^2$. Donc $S = 4EF^2 + CD^2 + AB^2$.



46. Soit BC la base d'un triangle isocèle ABC, et la hauteur BD, montrer que l'on a : $BC^2 = 2AC \times DC$.

La ^{similitude} proportionnalité des 2 triangles, AEC, BDC donne : $\frac{BC}{AC} = \frac{CD}{BC}$.

47. Si l'on coupe le triangle isocèle ABC par une parallèle DE à BC qui rencontre AB en D, on aura $BD^2 = AC^2 - BC \times DE$.

On a : $ABD^2 = AD^2 + BD^2$, $AD^2 = AC^2 - DC^2$ d'où en ajoutant $BD^2 = AC^2 - (AC^2 - DC^2)$
 $= DC^2 - (AC + BD)(AC - BD) = DC^2 - BC \times DE$, car $BD = B'D$.

48. Soit H un pt arbitraire pris sur la base BC d'un triangle isocèle ABC, prouver que l'on a : $4B \times HC = AB^2 - AH^2$.

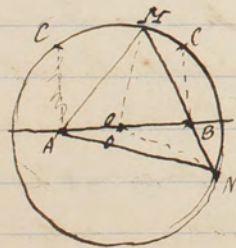
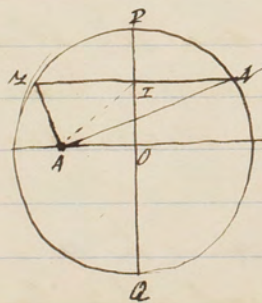
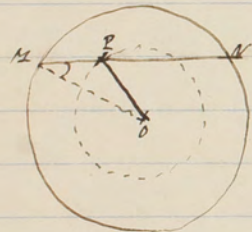
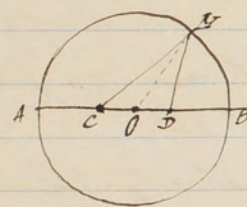
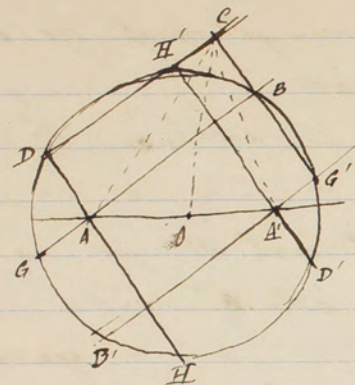
Soit AD la hauteur. On a $AB^2 = AD^2 + BD^2$, $AH^2 = AD^2 + HD^2$; d'où $AB^2 - AH^2 = BD^2 - HD^2 = (BD + HD)(BD - HD) = HC \times 4B$.

49. Dans tout trapèze, la somme des carrés des diagonales égale la somme des carrés des cotés non parall., augmentée du produit des deux bases.

On a $AD^2 = AE^2 + ED^2$, $AE^2 = AC^2 - EC^2$, d'où $AD^2 = AC^2 + ED^2 - EC^2 = AC^2 + CD \times (ED - EC)$. De même $BC^2 = BD^2 - CD \times (EC - ED)$, donc $AD^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2 + CD \times (ED + EC - (EC + ED))$ Mais $ED + EC = ED + AB + AB + EC$, donc le second membre égale $AC^2 + BD^2 + 2AB \times CD$.

50. La somme des carrés des 4 segments de 2 cordes rectangulaires d'un cercle, est indépendante de la position du pt de concours.

On a d'abord : $2(PB^2 + PS^2 + PD^2 + QS^2) = EP^2 + PN^2 + EQ^2 + QN^2$. Mais si PHN est le diam. de H, on a $EP^2 + PN^2 = 4R^2$. De même $EQ^2 + QN^2 = 4R^2$. Donc la somme considérée égale le carré du diamètre.



51. Un rectangle a un sommet A fixe, tandis que les deux sommets voisins B & D parcourent une même circonfer. ; quel est le lieu géométrique du 4^e sommet C ?

Prenez sur le diam. la pt^e A, OA' = OA. On voit alors que AG = ADG, AH = AH, & l'on a $CA^2 + CA'^2 = AB^2 + AD^2 + AH^2 + AG^2 = 4R^2$ (d'après 50). Donc le lieu est une circonfer. d'après la page 197.

52. Si l'on partage le diamètre AB d'une circonfer. en trois parties égales aux pt^s C, D, en joignant un pt^e M de la circonfer. à ces deux pt^s, la somme des carrés des cotés du triangle MCD vaut les $\frac{2}{3}$ du carré du diamètre.

On a (page 195). $CM^2 + DM^2 = 2 \cdot OM^2 + 2 \cdot OD^2$. Donc $CM^2 + DM^2 + CD^2 = 2 \cdot OM^2 + 2 \cdot OD^2 + CD^2$.
 $= 3 \cdot \left(\frac{D^2}{9} + \frac{D^2}{9} \right) = 2 \cdot \frac{D^2}{36} + \frac{D^2}{9} + 2 \cdot \frac{D^2}{4} = \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2} \right) \cdot D^2 = \frac{2}{3} D^2$.

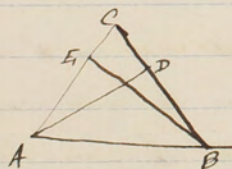
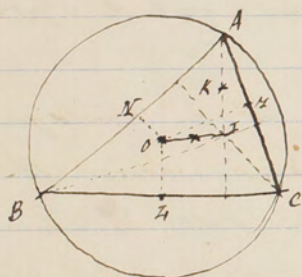
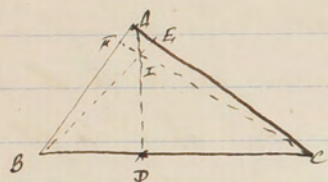
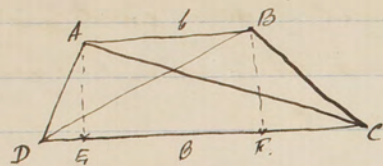
53. Quel est le lieu géom. des pt^s qui partagent toutes les cordes égales d'une même circonfer. dans un rapport donné ?

MP a une long. fixe ainsi que l'angle PMO. Le lieu est donc une circ.

54. Si A est un pt^e fixe dans une circonfer., & MN une corde arbitraire paral. au diam. du pt^e A, la somme $AM^2 + AN^2$ sera c^{te}.

On a $AM^2 + AN^2 = 2(AI^2 + MI^2)$. Mais $AI^2 = OA^2 + OI^2$, & $MI^2 = PI \times QI = (R - OI) \times (R + OI) = R^2 - OI^2$. Donc $AM^2 + AN^2 = 2 \cdot (OA^2 + R^2)$.

55. Si deux pt^s A, B sont sur un x^e même diamètre & équidistants du centre, en tirant par B une corde arbitraire MN, on forme un triangle AMN dont la somme des carrés des cotés est c^{te}.
 On a $AM^2 + MB^2 = 2R^2 + 2 \cdot OB^2$, $AN^2 + NB^2 = 2R^2 + 2 \cdot OB^2$; d'ailleurs $MB \times NB = BC^2$ donc en ajoutant $AM^2 + AN^2 + (MB + NB)^2 = 4R^2 + 4 \cdot OB^2 + BC^2 = C^2$



56. Le rapport de la Diff. des carrés des diagonales d'un trapèze à la Diff. des carrés des côtés non parall. est le même que le rapport de la somme des bases à leur Diff.

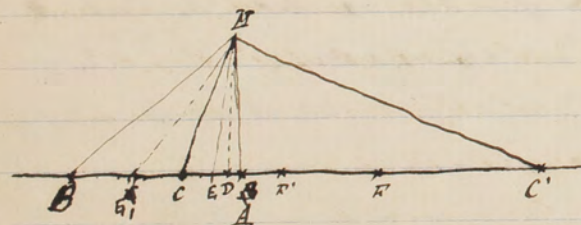
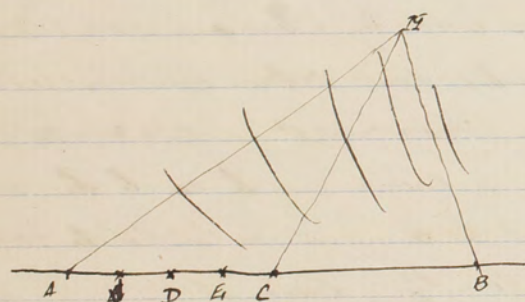
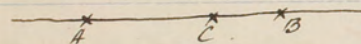
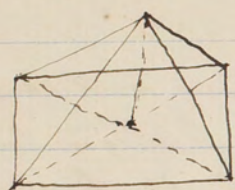
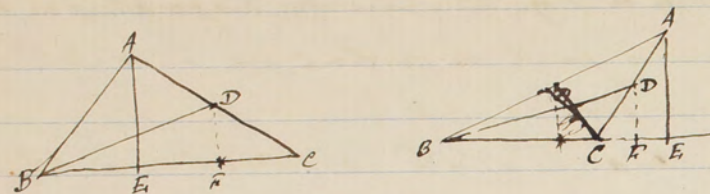
Soit h la hauteur. On a: $AC^2 = h^2 + EC^2$, $BD^2 = h^2 + DR^2$, d'où $AC^2 - BD^2 = EC^2 - DR^2 = (EC + DR)(EC - DR) = (AB + EC + DR)(EC - DR) = (B + b)(EC - DR)$.
D'un autre côté $BC^2 = h^2 + RC^2$, $AD^2 = h^2 + DE^2$, d'où $BC^2 - AD^2 = RC^2 - DE^2 = (B - b)(RC - DE)$.
Donc: $\frac{AC^2 - BD^2}{BC^2 - AD^2} = \frac{B + b}{B - b}$.

57. La somme des carrés des trois côtés d'un triangle quelconque est égale au double de la somme des produits de chaque hauteur par la partie comprise entre le sommet et le pt. de concours. — Elle est aussi égale à 12 fois le carré du rayon du cercle circonscrit, moins la somme des carrés des distances du pt. de concours des hauteurs aux trois sommets.

1° On a: $a^2 = h^2 + CE^2 = h'^2 + IC^2 - IE^2$, $b^2 = h'^2 + RB^2 = h''^2 + ID^2 - IR^2$. En ajoutant ces égalités & 2 autres analogues, on obtient $2(a^2 + b^2 + c^2) = 2(h^2 + h'^2 + h''^2) + 2(IE^2 + ID^2 + IR^2) - 2(IE^2 + IR^2 + IE^2)$. Mais on a $ID = b - IA$ donc $ID^2 = b^2 - 2b \cdot IA + IA^2$. Donc en substituant $a^2 + b^2 + c^2 = 2(h^2 + h'^2 + h''^2) - 2(IA^2 + IB^2 + IC^2)$.
2° On a $(\frac{a}{2})^2 = R^2 - OI^2$, &c. d'où $a^2 + b^2 + c^2 = 12R^2 - 4(OI^2 + OI^2 + OI^2)$. Mais le milieu K de AI & le pt. Z se trouvent sur le cercle des 9 pts (prob. 18 Livre II & page 178), dont le centre est au milieu de IO . Il est facile d'en conclure que $OZ = IK = \frac{OI}{2}$. Donc etc.

58. Dans un triangle quelconque quel ABC , on trace les hauteurs AD , BE , prouver la relation $AB^2 = AE \times AC + BD \times BC$.

On a: $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \times AE$, $AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2BC \times BD$. d'où en ajoutant $0 = 2AB^2 - 2AC \times AE - 2BC \times BD$. Donc le.



Soient C, C' les 2 pts qui partagent
 AB dans le rapport de 3 à 5. On a:
 $4A^2 - 4C^2 = 2 \cdot AC \times DE$ (page 95)
 $4B^2 - 4C'^2 = 2 \cdot BC' \times DE$
 On a: $5 \cdot 4A^2 + 3 \cdot 4B^2 = 8 \cdot 4C^2 + 2 \cdot 6AC \times DE + 2 \cdot 6BC' \times DE$
 $= 8 \cdot 4C^2 + \frac{5}{2} \cdot AB \times (DE + DE) = 8 \cdot 4C^2 + \frac{5}{2} \cdot AB^2$
 Le 1^{er} lien est donc une circ. de centre C .
 De même, on a
 $4C^2 - 4A^2 = 2 \cdot AC' \times DE$
 $4C'^2 - 4B^2 = 2 \cdot BC' \times DE$
 On a: $5 \cdot 4A^2 - 3 \cdot 4B^2 = 2 \cdot 4C^2 - 2 \cdot 6AC' \times DE - 2 \cdot 6BC' \times DE$
 $= 2 \cdot 4C^2 - \frac{5}{2} \cdot AB^2$
 Le second lien est donc une circ. de centre C' .

59. Dans un triangle req. ABC , on trace la médiane BD & la
 hauteur AE , prouver que l'on a la relation:

$$BD^2 = DC^2 + BC \times BE \quad \text{si } C < 90^\circ$$

$$BD^2 = DC^2 - BC \times BE \quad \text{si } C > 90^\circ$$

On a dans le 1^{er} cas $BD^2 = DE^2 + BE^2 = DC^2 - EC^2 + DE^2 = DC^2 + (DE + EC)(DE - EC)$
 $= DC^2 + BC \times (BE + ER - EC) = DC^2 + BC \times BE$. Le.

60. La somme des carrés des distances d'un pt du plan à deux sommets
 opposés d'un rectangle, égale la somme des carrés des distances
 du même pt aux deux autres sommets.

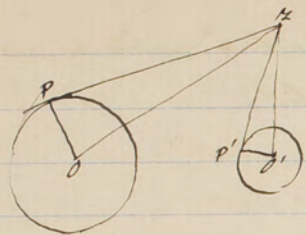
Car toutes les deux sont égales au double de la somme des carrés du même
 pt au centre du rectangle & de la moitié de la diagonale.

61. Lorsque une droite AB est partagée par un pt C en moyenne
 & extrême raison, la somme des carrés de la droite entière AB & du
 plus petit segment BC , égale le triple carré du plus grand segm. AC .

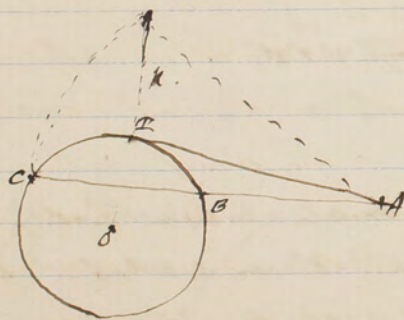
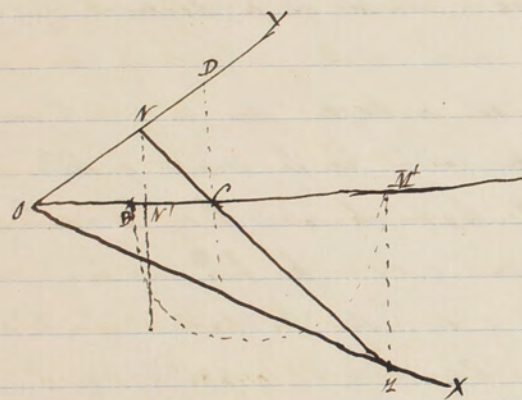
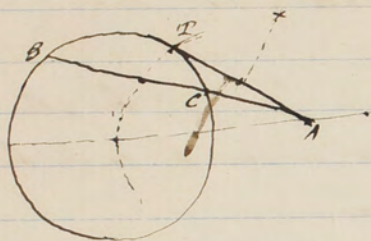
On a: $AB \times BC = AC^2$, ce qui peut s'écrire de deux manières suivantes
 $AB \times (AB - BC) = AC^2$, $(AC + BC) \times BC = AC^2$ ou $AB^2 = AC^2 + AB \times AC$, $BC^2 = AC^2 - BC \times AC$;
 d'où en ajoutant $AB^2 + BC^2 = 2AC^2 + (AB - BC) \times AC = 3AC^2$.

62. Étant donné deux circonfs. AA' & BB' d'un plan, tracer
 le lieu géom. des pts pour lesquels on a, soit: $5AA'^2 + 3BB'^2 = R^2$,
 soit $5AA'^2 - 3BB'^2 = R^2$.

1^{er} Soit C le milieu de AB . On a: $4A^2 + 4B^2 = 2 \cdot AC^2 + 2 \cdot BC^2$. Donc notre
 eq. peut s'écrire: $2 \cdot 4A^2 + 3 \cdot (2 \cdot AC^2 + 2 \cdot BC^2) = R^2$ ou $2 \cdot 4A^2 + 6 \cdot AC^2 = R^2 - 6 \cdot BC^2$,
 ou $2(4A^2 + 4C^2) + 4 \cdot AC^2 = R^2 - 6 \cdot AC^2$, $4 \cdot (4A^2 + 4C^2) + 4 \cdot AC^2 = \dots$ au inf.
 $8 \cdot (4A^2 + 4C^2) + 4 \cdot AC^2 = \dots$ c'est-à-d. $8 \cdot (4A^2 + 4C^2) = R^2 - 6 \cdot AC^2 - 4 \cdot AC^2 - 8 \cdot DC^2$, le lieu
 est donc une circonf. de centre E . On opérera de même pour 2^o.



Comme on a $4P^2 = 4O^2 + R^2$, $4P = 4O^2 + R^2$
on est ramené au prob. précédent, on a peu près.



63. Étant donné deux circonf. $O \times O'$, trouver le lieu géom. de
pt x du plan, tel que les tang. xx', xx'' issues de ce pt aux
deux circonf. satisfassent à la relation: $4xx'^2 \pm 3xx''^2 = R^2$.

64. D'un pt. donné lors d'une circonf., tracer une sécante telle que la corde interceptée soit moy. géom. entre la sécante entière & sa partie extérieure.

On doit avoir $BC^2 = AB \times AC = AP^2$ ou $BC = AP$. Le probl^e revient donc à tracer une corde de long. donnée.

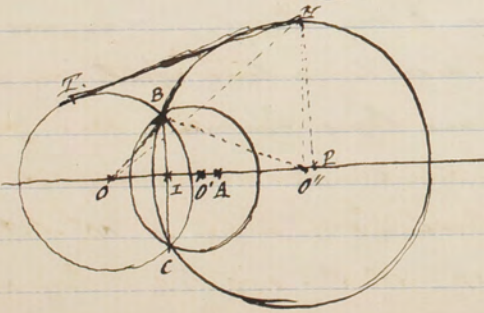
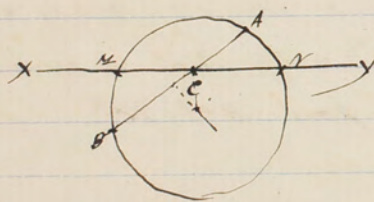
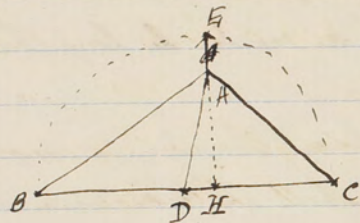
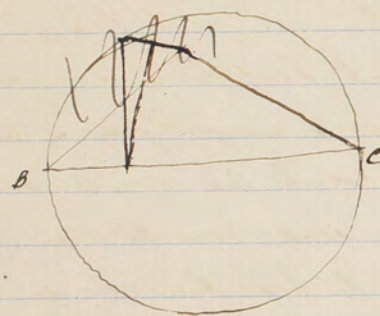
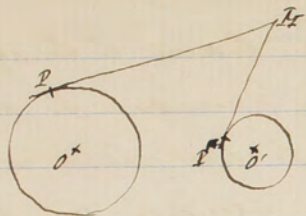
65. Étant donné un angle XOY et un pt fixe A sur la bissectrice de cet angle: par A on mène à l'angle une sécante arbitraire XA', dont on projette les extrémités en X' et Y' sur OX; on prend le milieu B de OX, et l'on décrit la circonsp. de diamètre XB, qui rencontre X'Y' en D: prouver que le lieu géom. du pt D est la circonsp. de diamètre OX.

Comme on a $\overline{BP}^2 = \overline{BX} \times \overline{BX'}$, il suffit de prouver que $\overline{BX} \times \overline{BX'} = \overline{OB}^2$.
Or on a $\overline{BX} \times \overline{BX'} = (\overline{OX} - \overline{OB}) \times (\overline{OX'} - \overline{OB}) = \overline{OX} \times \overline{OX'} - (\overline{OX} + \overline{OX'}) \times \overline{OB} + \overline{OB}^2$. D'un
autre côté, on a: $\frac{\overline{OX} - \overline{OC}}{\overline{OC} - \overline{OX'}} = \frac{\overline{OX}}{\overline{OX'}}$ d'où $2 \cdot \overline{OX} \times \overline{OX'} - (\overline{OX} + \overline{OX'}) \times \overline{OC} = 0$
soit $\overline{OX} \times \overline{OX'} - (\overline{OX} + \overline{OX'}) \times \frac{\overline{OC}}{2} = 0$. Donc $\overline{BP}^2 = \overline{OB}^2$.

66. D'un pt donné hors d'une circon^f. mener une sécante telle que le produit de la sécante entière égal par sa partie inférieure égale le carré d'une ligne donnée.

On doit avoir $AC \times (AC - AB) = K^2$ ou $\overline{AC}^2 - AB \times AC = K^2$ ou $\overline{AC}^2 = K^2 + AB^2$. AC est donc facile à construire.





67. On donne dans un plan deux circonf. : on demande le lieu des pts tels que si de chacun d'une ou même on mène 2 sécantes à la 1^{re} circonf., & n' à la seconde, la somme des produits de chaque sécante entière par sa partie extérieure soit égale à une quantité donnée.

On doit avoir $n \cdot HP^2 + n' \cdot H'P'^2 = C^2$. C'est une généralisation du prob. 62. Le lieu est une circonf. ayant pour centre le pt qui partage OO' dans le rapport de n à n' .

68. Étant donné un triangle ABC, dont l'angle A est obtus, tracer par le sommet A une droite dont la portion AD comprise dans le triangle, soit moyenne proportionnelle entre les deux segs. DB, DC qu'elle détermine sur le côté BC.

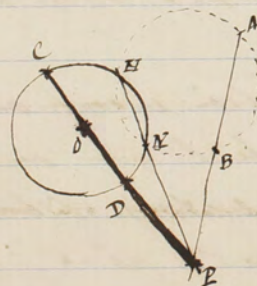
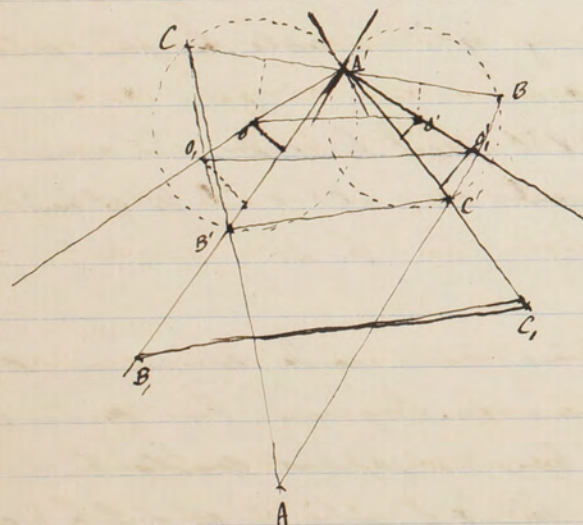
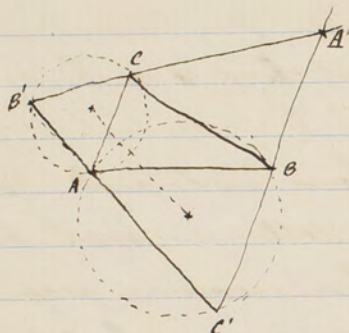
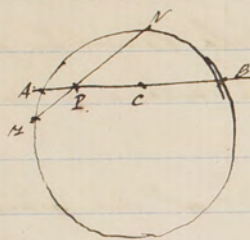
On a $AD^2 = AH^2 + DH^2$. On doit donc avoir $(BH + DH)(CH - DH) = AH^2 + DH^2$. ou $-(BH - CH) \times DH = AH^2 - BH \times CH = AH^2 - 4H^2$. On peut donc construire DH.

69. Étant donné deux pts A, B de côtés différents d'une droite xy, tracer par ces pts une circonf. qui intercepte la plus petite corde sur xy.

On a $CM \times CN = CA \times CB = C^2$, & il s'agit de rendre minimum la somme $CM + CN$. Il suffira de prendre $CM = \sqrt{C^2}$ c'est à dire de mener par C une perp. sur xy. (page 210).

70. Si trois circonf. ont une même corde commune, & que d'un pt de l'une ou même des tang. aux deux autres, les longueurs de ces tang. sont dans un rapport constant.

D'abord $HP^2 = HO^2 - R^2$. Or soit I le milieu de OO' et I la proj. de H sur OO' , on a $HO^2 - R^2 = 2 \cdot OI \times AI$, $R'^2 - R^2 = 2 \cdot OI \times IA$, donc $HO^2 - R^2 =$



200°. II. De même $AP^2 = AO^2 - r^2 = 2.00'' \times 1.11''$. Donc, $\frac{AP^2}{AO^2} = \frac{0.00''}{0.00''}$.

71. Soit AB une ^{corde} fixe d'un cercle dont le milieu est C, & soit MN une corde arbitraire qui rencontre la fixe en P, prouver que $CP^2 + PM \times PN$ est constant.

On a $PM \times PN = AP \times BP = (AC - CP)(AC + CP) = AC^2 - CP^2$. Donc le,

72. Circumscrire à un triangle donné le triangle de périmètre minimum semblable à un triangle donné.

Le sommet B' doit se trouver sur le segm. capable de l'angle donné B' construit sur AC; semblablement pour C'. On est donc ramené au prob. 5 Livre II. (^{longue} corde maximum passant par le pt commun A).

73. Inscrire dans un triangle donné un triangle de périmètre minimum semblable à un triangle donné.

Soit A'B'C' un triangle semblable au triangle ABC, inscrit dans le triangle ABC; il faut que l'on ait $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$, 0 & 0' étant les centres des segments capables de B & C sur AC' & A'B'. Donc le minimum du périm. du triangle inscrit sera atteint quand on aura $OO' = \frac{1}{2}BC$. Or on a $\frac{OO'}{AO} = \frac{AO'}{AO}$, donc on doit avoir $AO = \frac{BC \times AO}{2AO}$. les pts O, O' sont ainsi déterminés & par p suite les ^{trois} positions relatives de BC, AC', A'B'. On n'a plus qu'à copier la figure pour la porter sur ABC.

74. Par deux pts donnés, faire passer une circonf. qui partage en deux parties égales une circonf. donnée.

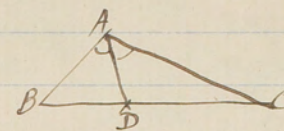
Tracons une circonf. arbitraire passant par AB; soit D le pt de concours de AB & de la sécante MN. On aura, $CP \times DP = MP \times NP = AP \times BP$. Donc la circonf. passant par ABC passera aussi par D & répondra à la question.

45. Inscrire dans une circonscr. donnée un triangle dont un
côté passe par un pt. donné, les deux autres côtés étant parall.
à des directions données. (prob. déjà résolu page 102, 2^e livre).

菊池幾何学小教科書.

第一編

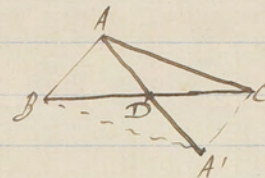
24.



$$\angle ADC > \angle BAD$$

$$\therefore AC > CD.$$

26.



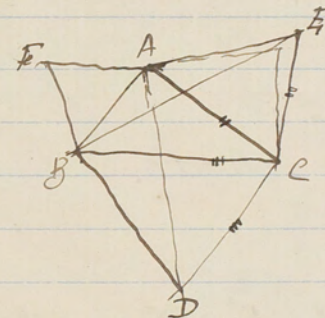
$$BD = DC \text{ 假定.}$$

$$DA' = AD \text{ 作.}$$

$$\therefore CA' = AB$$

$$\therefore 2AD < AC + AB.$$

35.



$$EC = AC$$

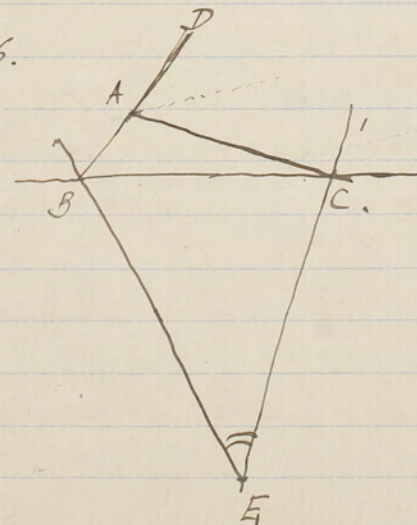
$$BC = CD$$

$$ACE = \frac{2}{3} R.$$

$$BCD = \frac{2}{3} R.$$

$$\therefore ECB = ACD.$$

36.

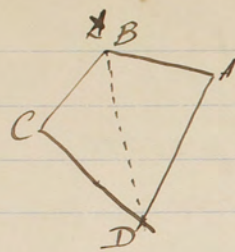


$$E + \frac{B+A}{2} + \frac{C+A}{2} = 2R.$$

$$E + R + \frac{A}{2} = 2R.$$

$$E = R - \frac{A}{2} = \frac{1}{2}(2R - A).$$

37.



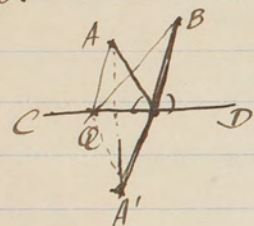
$$B > D \quad C > A.$$

$$CBA > CDB$$

$$ABD > ADB$$

$$\therefore B > D.$$

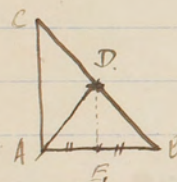
38.



39.

$$n \cdot \frac{2}{3} R = 4R. \quad n=6.$$

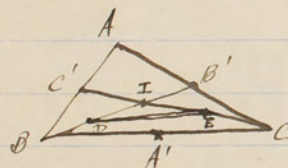
44.



$$DE \perp AD.$$

$$AE = EB. \therefore AD = DB.$$

50.



D, E + $\frac{1}{3} CC'$ & $\frac{1}{3} CI$ 中点 + $\frac{1}{3} CC'$

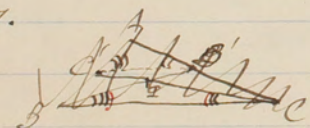
$B'E DC'$ 平行四边形的故 $IC' = EI$

$$= \frac{1}{3} CC'. \text{ 故 } CI = \frac{2}{3} CC'.$$

$CC' \perp AA'$ 且 I 在 AA' 上 故 I 在 AA' 上

$$CI = \frac{2}{3} CC' + \frac{1}{3} CC' = CC'. \text{ 故 } I \text{ 在 } CC' \text{ 上.}$$

51.



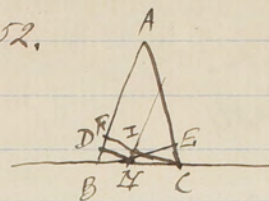
$$AB < AC \text{ 且 } \angle B < \angle C. \text{ 故 } \angle B < \angle C.$$

$$\angle B < \angle C \Rightarrow \angle B < \angle C.$$

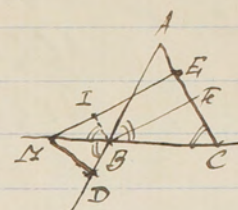
$$\angle B < \angle C \Rightarrow \angle B < \angle C.$$

$$\angle B < \angle C \Rightarrow \angle B < \angle C.$$

52.



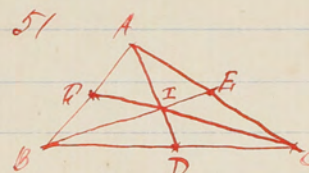
$$IAC = ECH \therefore IC = HE.$$



$$MI = MD.$$

$$\therefore ME - MD = EI = BE = \text{const.}$$

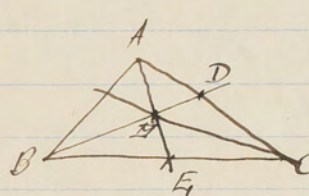
51.



$$AC > AB \text{ 且 } \angle C > \angle B. \text{ 故 } AC > AB.$$

$$\text{故 } IC > IB \therefore IC.$$

53.



$$BD + AD < BA + AD$$

$$EC < ED + DC.$$

$$\therefore BD + EC < BA + AD + DC.$$

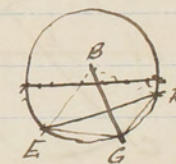
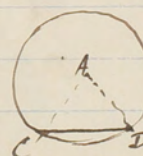
$$\angle BE > \angle AE$$

$$\angle CE > \angle AE$$

$$\therefore \angle BEC > \angle BAC.$$

第二篇.

7.

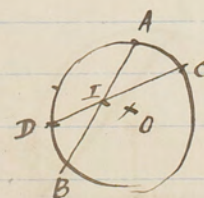


$$EGR = 2 \sin CD.$$

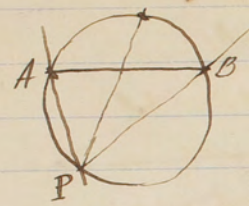
$$\therefore EG = EG = EG = EG.$$

$$\angle E < 2 CD.$$

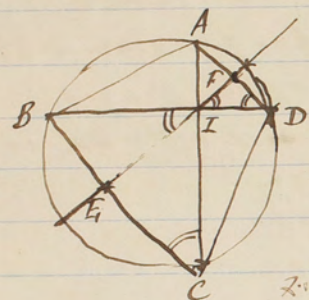
8



24.



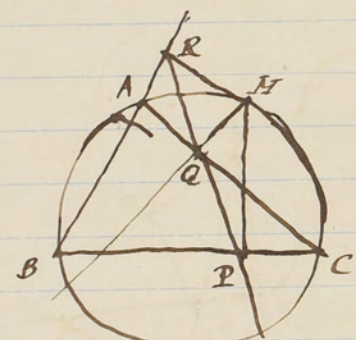
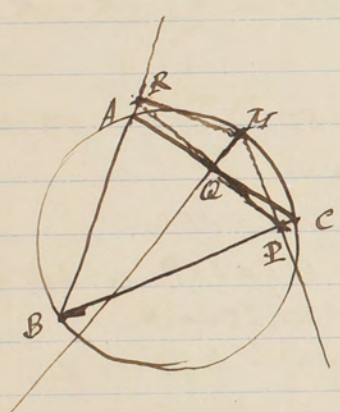
25



$$\begin{aligned} \angle ADB &= \angle ACB \\ \angle FID &= \angle BIE = \angle ACB \\ \therefore \angle ADB &= \angle FID \\ \therefore FI &= FD \end{aligned}$$

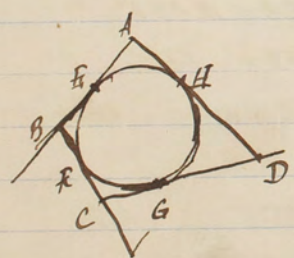
又由 $PI = PF$ 故 $PI = R$ 且 ADI 中 I 在 AD 上
同法 $FI = RA$ 故 $FI = R$

26.



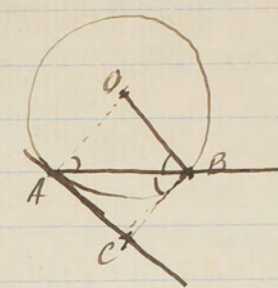
$$\begin{aligned} \text{由 } \angle AQR &= \angle R, \angle QRA = \angle QAR \\ \text{由 } \angle APR &= \angle R, \angle PRA = \angle PAB \\ \therefore \angle R &= \angle QAR = \angle PAB \\ \therefore \angle QRA &= \angle PRA \text{ 故 } QR = PR \end{aligned}$$

29.



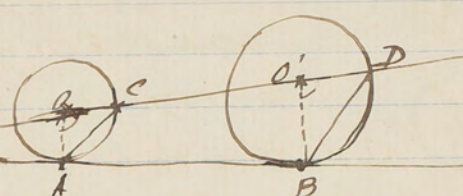
$$\begin{aligned} AH &= AE \\ BE &= BF \\ CE &= CG \\ DH &= DG \\ (AH + DH) + (BE + CE) &= (AE + BE) + (CE + DG) \end{aligned}$$

33.



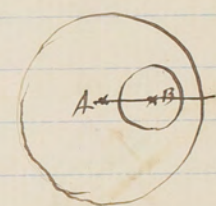
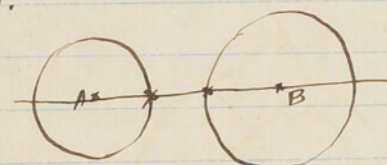
$$\begin{aligned} OA &\perp BC \text{ 于 } P \\ \therefore OA &\text{ 为 } BC \text{ 的垂直平分线} \\ \therefore OA &= OB \\ \therefore \angle OAB &= \angle OBA \\ \therefore \angle OBC &= \angle OCB \end{aligned}$$

35

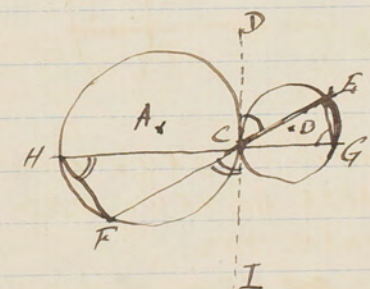


$$\begin{aligned} OA &\perp O'B \text{ 于 } P \\ \therefore OA &= O'B \\ \therefore \angle OAB &= \angle O'BA \\ \therefore \angle OBC &= \angle O'CB \end{aligned}$$

36.

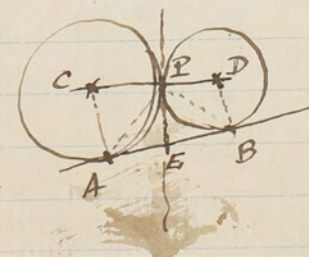


38



$$\begin{aligned} \angle EGC &= \angle ECD \\ \angle FHC &= \angle FCI \\ \therefore \angle EGC &= \angle FHC \end{aligned}$$

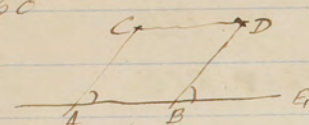
39.



$$\begin{aligned} PE &= PD \text{ 故 } PE = PD \\ \text{由 } \angle EPD &= \angle EPD, \angle PED = \angle PDE \\ PD &= PE, PE = PD \\ \text{同法 } PE &= PD \\ \therefore PE &= PD \end{aligned}$$

59. 正三角形の内部に点Pをとり、

60. $AB = AC$ の二等辺三角形 ABC において、 D は AB の中点、 E は AC の中点、 DE を結ぶ。また、 F は BC の中点、 AF を結ぶ。このとき、 DE と AF は垂直であることを示せ。

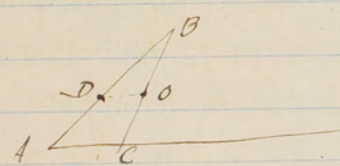


61. (1) 円周上に点A, B, C, D, E, Fをとり、 $AB \parallel CD$, $BC \parallel DE$, $CD \parallel EF$, $DE \parallel FA$, $EF \parallel AB$ となるように点をとり、六角形 $ABCDEF$ を作る。この六角形は正六角形であることを示せ。

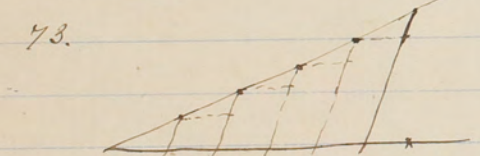
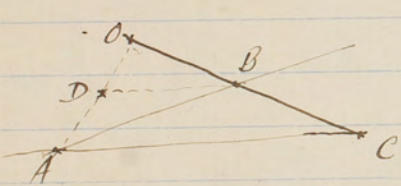
(2) 円周上に点A, B, C, D, E, Fをとり、 $AB \perp CD$, $BC \perp DE$, $CD \perp EF$, $DE \perp FA$, $EF \perp AB$ となるように点をとり、六角形 $ABCDEF$ を作る。この六角形は正六角形であることを示せ。



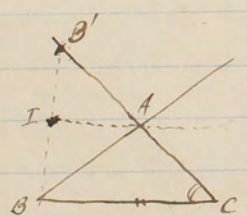
70. $AB \parallel CD$ の台形 $ABCD$ において、 E は AD の中点、 F は BC の中点、 EF を結ぶ。このとき、 EF は AB と CD の平均線であることを示せ。



71. $AB \parallel CD$ の台形 $ABCD$ において、 E は AD の中点、 F は BC の中点、 EF を結ぶ。このとき、 EF は AB と CD の平均線であることを示せ。

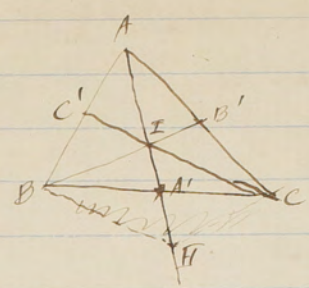


74. $AB \parallel CD$ の台形 $ABCD$ において、 E は AD の中点、 F は BC の中点、 EF を結ぶ。このとき、 EF は AB と CD の平均線であることを示せ。



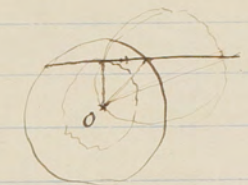
75. 中点定理の逆定理として、 $DE \parallel AB$ かつ $DE = \frac{1}{2}AB$ ならば、 D は AC の中点であることを示せ。

76.

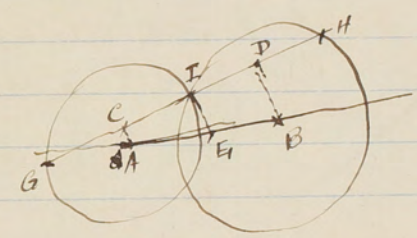


77. 二つの円 O と O' が点 A で接し、 AB は O の直径、 AC は O' の直径とする。このとき、 BC は AO と AO' の公切線であることを示せ。

77.

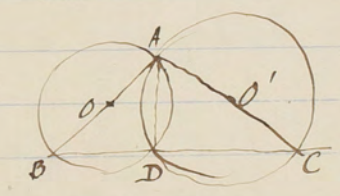


78.



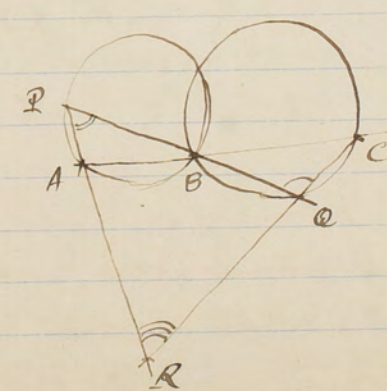
79. 二つの円 O と O' が点 A で接し、 AB は O の直径、 AC は O' の直径とする。このとき、 BC は AO と AO' の公切線であることを示せ。

83.



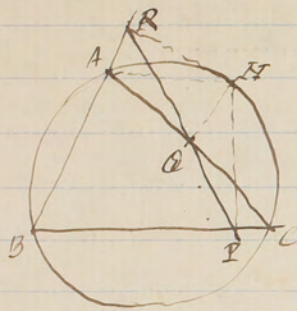
84. 二つの円 O と O' が点 A で接し、 AB は O の直径、 AC は O' の直径とする。このとき、 BC は AO と AO' の公切線であることを示せ。

84.

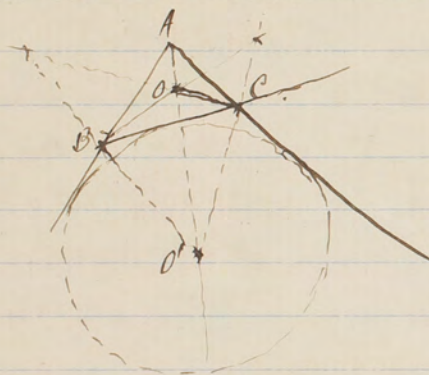


85. 二つの円 O と O' が点 A で接し、 AB は O の直径、 AC は O' の直径とする。このとき、 BC は AO と AO' の公切線であることを示せ。

85. 一点の三角形の三辺に引いた垂線は、互に一直線上に
 在り、此点の外接円の周上に一点あり。

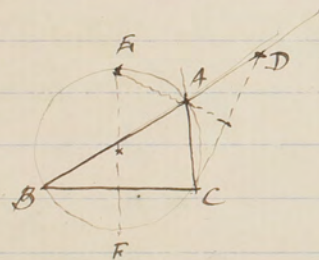


88.
 及 89.



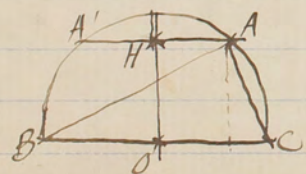
角 BOB' の直角あり、如何に
 して、此二線は平行なり
 角 OCO' も同様なり
 故に $BOB'C$ の四角は内接なり。

90.



$AD = AC$ と取れ
 AE は $\angle DAC$ の平分線とす、 E は
 BC の中点なり
 故に D は、中心 O 、半径 OA の円周
 上、中心 B 、半径 $BD = 5$ の円周と
 の交点なり。
 BD が極小なる $\angle BAC$ の形は、 A 点を得。
 BAC の交点 A 点を得。

91.



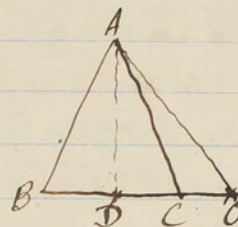
BC は直径に平行な弦であり、 $BC =$
 垂直に半径 $OH = 5$ の円周
 上の点 H より BC は平行線なり。

92. 先づ外接円の中心 O を求め、 O を中心として、 OA を半径とする。

93. 此の二つの角の補角は、等しい中心角を作り出す。

第三編

11.

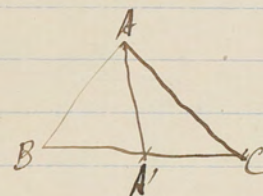


$$OC \cdot OB = OD^2 - OD^2 \quad \text{頁 153.}$$

$$\text{然るに} \quad OD^2 = AD^2 - AD^2 \\ CD^2 = AC^2 - AD^2$$

故に $AC = AD$.

12.

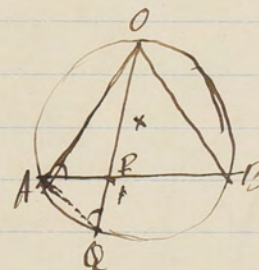


$$AB^2 + AC^2 = 2(AA'^2 + BA'^2) \quad \text{頁 140.} \\ = 2AA'^2 + \frac{1}{2}BC^2.$$

故に $AC = AD$.

$$AD^2 = AC^2 + AB^2$$

14.



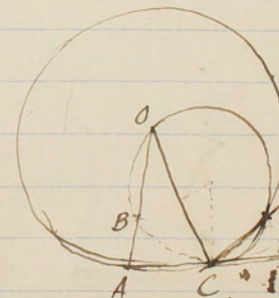
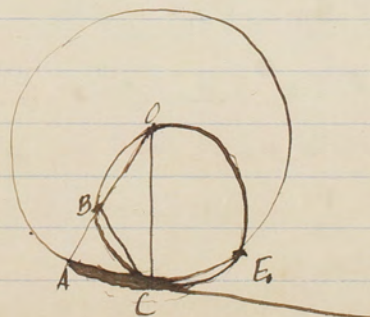
$$AQD = \angle AOB, OBA = OAB.$$

$$\text{然るに} \quad \angle AOB = \angle AOB$$

$$OA \perp APQ \text{ は } \angle AOB \text{ の } \angle AOB \text{ の } \angle AOB$$

$$\text{故に} \quad OP \cdot OQ = OA^2.$$

15.



$$DCE = AOC \\ = \frac{1}{3} \cdot R = \frac{2}{3}R.$$

$$\therefore EOC = \\ EOC = OEC = \frac{1}{3}R.$$

$$2R + \frac{1}{3}R - \frac{2}{3}R = \frac{4}{3}R$$

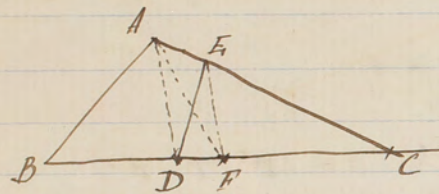
$$\therefore COE = (2 - \frac{1}{3})R = \frac{5}{3}R.$$

故に $AC = AD$.

16. 底=高の角の正+邊、腰=對角中心角=等し。

17. 此ハラレ斜邊^ト他、一四ト^リ以テ、直角三角形ヲ作ル^ヲ一掃ス。

18.



DがABCに於て、此ハラレ
点ナリトセヨ。DEの求ル所
ノ直線ナリトセヨ。ADヲ延長
シテ、~~ER~~ AD=EFト
引ク。△ADE=△ADF

$$\triangle EDF = \triangle AEF + \triangle ADF$$

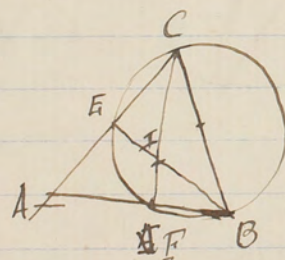
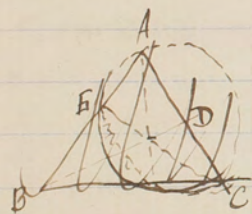
又、△ADD=△ADCト、故=BCノ中点ナリ、故=ミク。

19. 16ト同ノ事=一掃ス

21. 頁183. 定理6ノ系カラ自然ニ出テ来ル

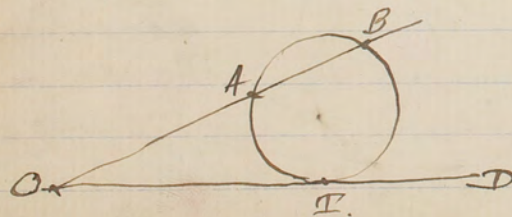
22. Ⅲ12ノ系3 (194)ノ系ナリ

23.



CEBRハ内接
シ得ベキ四角
形ナリ、故=ミク。

24.



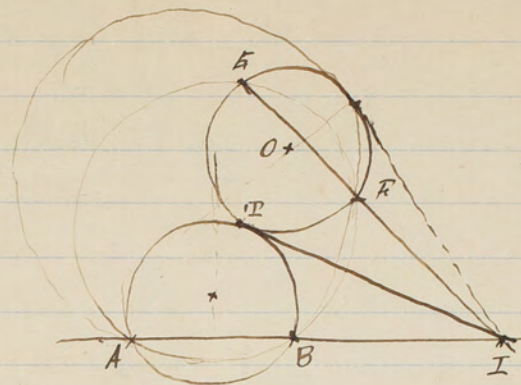
A, Bガ与点、ODガ与点ナリトセヨ。

OT、正方形ハOA, OB、矩形=相等シ、

故=180度4 (203)ニ引テOTヲ作ル^ヲ

出来ル

25

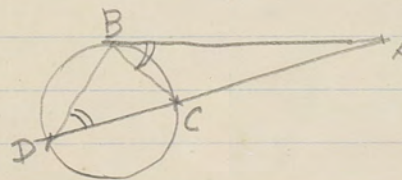


A, Bガ与点、Oガ与点
トス。Iガ求ル所ノ接点
トス。ABヲ過リ、Oヲ過リ
ニテ、任意ノ直線ヲ引キ、
AB, ACノ交点ニテ、
TIヲ共切線トシ、
Iヲ此切線トABトノ交点
トス。Iヲ任意ノ直線ヲ引キ

5点トER=7交ラレハ、 $IE \times IR = IT^2 = IA \times IB$ ト、
同円上ニ在リ、(此ハⅢ12ノ系ニテ証明シ得ベシ)。
任意ノ直線ヲ引キ、5点トER=7交ラレハ、
ERトABトノ交点ヲOトシ、
切線ヲ引キ、共切線ヲ得ベシ

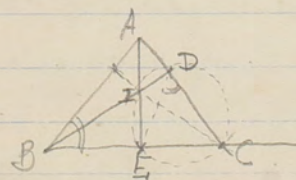
第四編

2.



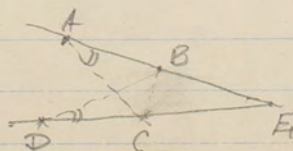
$$ABC = BDC + \angle B + \angle C$$

3.



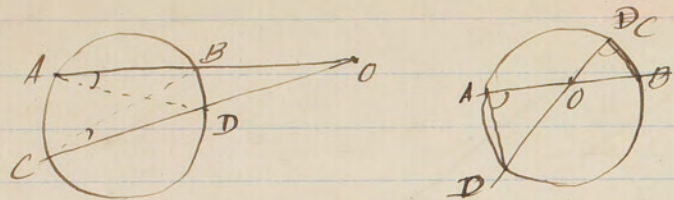
$$CDE = CIE = \angle ICE = ABC$$

4.

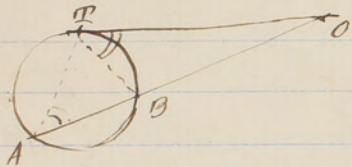


ACE, BDEハ相似形ナリ、故= $BAC = BDC + \angle B$ ト、
故=BCヲ過リ、
D点ヲ過ル。

13.

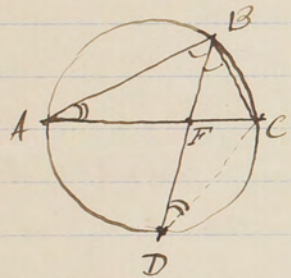


三角形 OAC, OBC 二 等角ナリ。故ニ云々



三角形 OBE, OAB 二 等角ナリ
故ニ云々。

14.

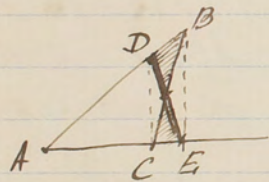


二 角ナリ ABE, BDC 二 相似ナリ
ナリ。故ニ
 $AB:BE = BD:AC$
故ニ云々。

15. 正方形ノ一辺ト内ノ半径トノ比ニ等シ。

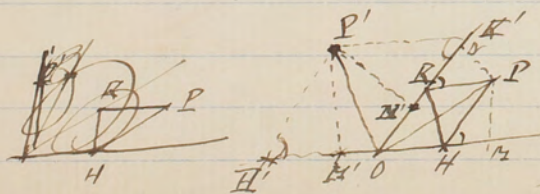
(直接ノ証明)

三角形 ABC, AED 二 相等ナリ。
然レバ BCE ト EDB ト 二 相等シ
キヲ明カナリ。故ニ DC 八 BE 二 平行
ナリ。故ニ $AE:ABC = AB:AD$ 。



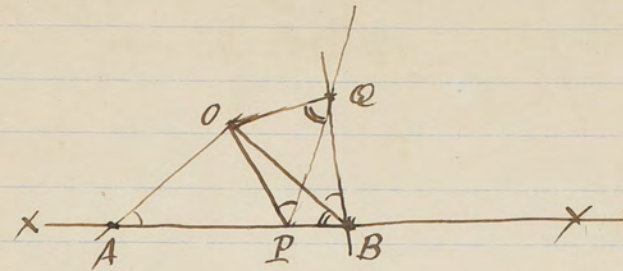
20. 二 四 17, 特別ノ場合ナリ。

25.

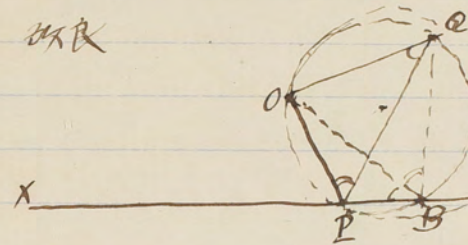


$RE:PH = PN:PM$
 $= PN:PM = PK:PH$
 $\therefore PK:KO = OH:OR$
 $\therefore POK = HOK$ 。

26.



故ニ

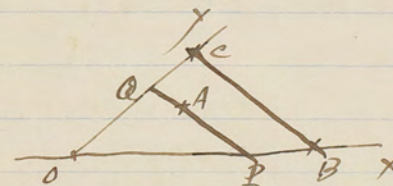


逆ニ証明スルニハ OBE 二 作ルニ 可シ。

OPQ 二 OAB 二 相似
ナリ。四 边形 $OPBQ$ 二
内接シ得ル。
故ニ $OBE = OPQ =$ 定角
故ニ云々。

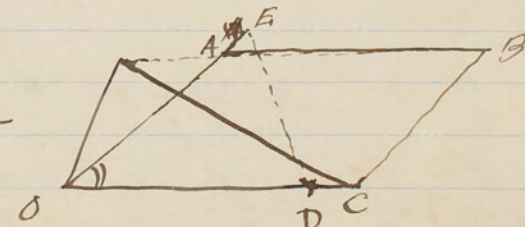
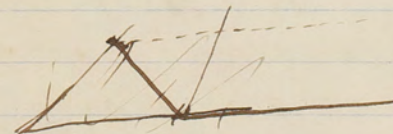
OPQ 二 相似
ナリ。四 边形 $OPBQ$ 二
内接シ得ル。
故ニ $OBE = OPQ =$ 定角
故ニ云々。

27.



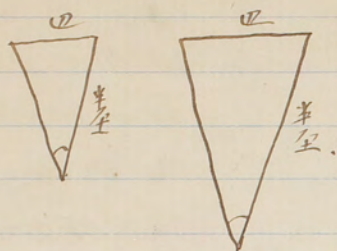
此ノニ 等シ 比ヲ有ル OB ,
 OC 二 作ル A 二 BC 二 平行
線ヲ引クニ 可シ。

28. 此ノニ 等シ 比ヲ有ル 二 三角形 一ニ 倍ニ 等シ 平行四 边形 $OABC$
ヲ作ル (四 作 1). OA, OC 二 比例中 項ヲ OD 二 作ル $OE = OD$ 二 作ル



二 ODE 二
相似ナリ
三角形ナリ

29.

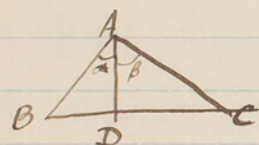


頂角相等的二三角形の
底 = 相似比の二乗。

30. 二直線と和の二乗の四、面積二倍、其比例中項二倍の
二、二倍の二乗。

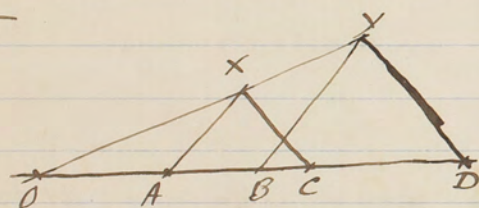
31. A, B 二直線と二。 $A, A: A, B = A, B$ }
 $A, B: B, B = A, B$ } + 二乗の二乗。

334.



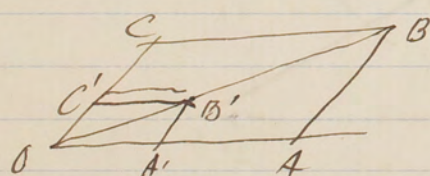
* $BD:AD=AD:DC$.
 + 二乗の二乗 ADB, ADC 二相似の二乗、故二
 $\angle ADB, \beta = \angle B = \angle C - \alpha$.
 $\therefore \angle BAC = \angle ADB - (\alpha + \beta) \therefore \alpha + \beta = \angle C$.

35



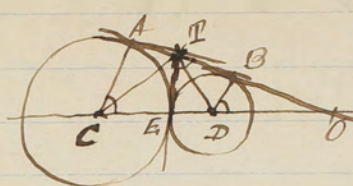
$OA:OB=OX:OY$
 $OC:OD=OX:OY$
 故二 $OA:OB=OC:OD$
 故二 二二。

38



$OA=OC=OA':OB'$
 故二 $CB:OC=C'B':OC'$
 而二 $BCD=B'C'O$.
 故二 二二二三角形二相似二、
 因二 $BOC=B'O'C'$ 二。

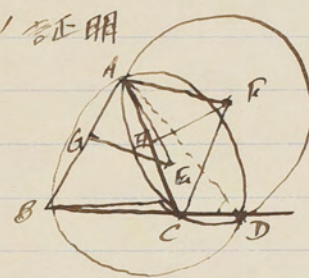
39.



$CE \parallel AB$ 二相似の二
 $DE \parallel AB$ 二、
 故二 CED 二相似の二。
 故二 二二。

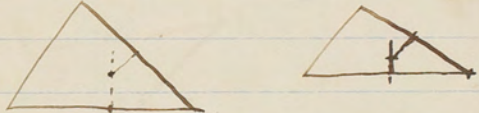
40. 問題 6 二特別二場合二。

直接二証明

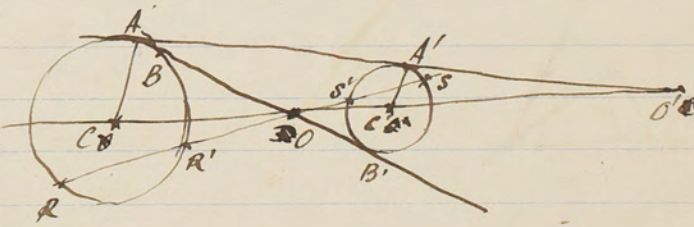


$AE=AD$
 $AF=AD$
 $\therefore AE=AF$. $\therefore AB=AH$
 $\therefore AE=AF$.

41.



42.



43. (上二圖).

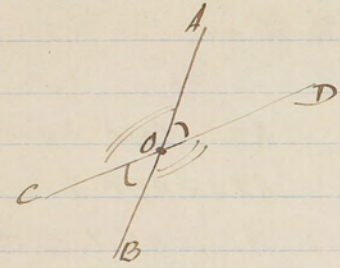
$CS:CR=R':R=CO:CO$ 二相似の二。
 $CS'=C'$ 二、 CR 二平行二相似の二、 RO 二相似の二、 RO 二相似の二、
 $CS'':CR=CO:CO$ 二。 故二 CS'' 二、 CS' 二一致二、 CS'' 二
 一致二、 故二 $OS:OR=OC:OC$. 故二 $OS:OR=OC:OC$.
 故二 $OS \times OR=OR \times OS$. 故二 $OS:OC=OC:OR$ 二。

菊池幾何學小教科書

雜問

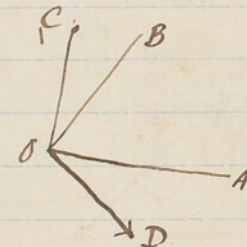
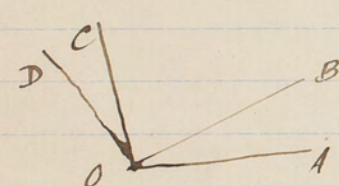
I.

1.

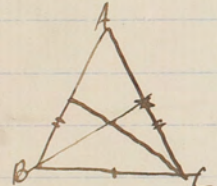


$$\begin{aligned} \angle AOD + \angle AOC &= \angle COB + \angle BOD \\ &= \frac{1}{2} \text{ 四角 } \\ &= 2 \text{ 直角 } \\ &= 360^\circ \end{aligned}$$

4

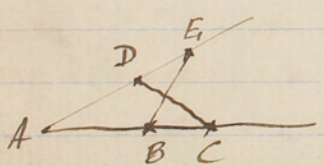


5

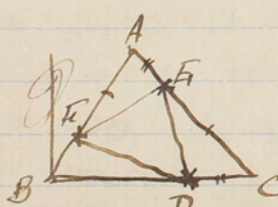


$$\angle B = \angle C + \angle A + \angle D$$

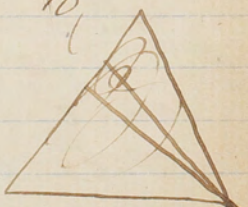
6



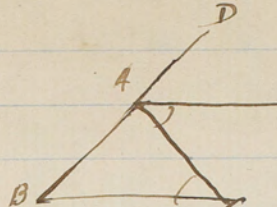
8



10



11



$$\begin{aligned} \angle CAD &= 2 \angle ACB \\ \therefore \frac{1}{2} \angle CAD &= \angle ACB \\ \therefore \angle C &= \angle C \end{aligned}$$





