

Title	Sur une totalisation dans les espaces de plusieurs dimensions. I
Author(s)	Enomoto, Shizu
Citation	Osaka Mathematical Journal. 1955, 7(1), p. 69-102
Version Type	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/8995">https://doi.org/10.18910/8995</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

## *Sur une Totalisation dans les Espaces de Plusieurs Dimensions. I*

By Shizu ENOMOTO

Le but principal de ce mémoire est l'extension de l'intégrale au sens de Denjoy (Denjoy-Perron) dans l'espace (euclidien) d'une dimension à l'espace de plusieurs dimensions. Les études dans cette direction ont été déjà données par MM. M. Krzyński<sup>1)</sup>, J. Ridder<sup>2)</sup>, S. Kempisty<sup>3)</sup> et M. Romanowski<sup>4)</sup>. Comme totalisation d'une fonction de point définie sur un intervalle de l'espace euclidien de  $n$  dimensions, ces auteurs ont fait appel à la notion d'une fonction d'intervalle. Nous allons aussi employer cette notion.

Comme on verra dans § 2, il y a, pour une fonction  $f(x)$  intégrable au sens de Denjoy sur un intervalle  $I$ , une suite  $F_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) d'ensembles fermés telle que les intégrales de  $f(x)$  au sens de Lebesgue sur  $F_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) convergent avec  $n \rightarrow \infty$  vers l'intégrale au sens de Denjoy de  $f(x)$  sur  $I$ . Conséquemment, si l'on prend l'intégrale au sens de Lebesgue comme la base de totalisation d'une fonction, cette suite peut être considérée comme une suite fondamentale, qui donne une manière d'approximation par des intégrales au sens de Lebesgue pour la totalisation au sens de Denjoy.

Dans § 3, nous donnerons une totalisation telle que les valeurs des fonctions d'intervalles, qui sont données comme l'intégrale ( $\mathfrak{D}$ ), peuvent être approchées aussi bien qu'on veut par celles des intégrales au sens de Lebesgue. Notre totalisation sera l'extension de l'intégration au sens de Denjoy de l'espace d'une dimension et jouira de toutes les propriétés principales qu'on attribue aux intégrales.

D'abord, dans § 1, nous étudierons une propriété d'une suite des ensembles fermés dont la somme couvre un intervalle d'un espace

---

1) Krzyński: Sur les fonctions absolument continues généralisées de deux variables, C. R. de Paris, **198** (1934).

2) J. Ridder: Über Denjoy-Perron Integration von Funktionen zweier Variablen, C. R. de Varsovie **28** (1935).

3) S. Kempisty: [1] Sur les fonctions absolument continues d'intervalle, Fund. Math. **27** (1936); [2] Fonctions d'intervalle non additives, Actuarités Scientifiques et Industrielles (1939).

4) M. Romanowski: [1] Intégrale de Denjoy dans l'espace abstrait, Recueil Math. Moscou, **8** (1941); [2] Intégrale de Denjoy dans l'espace à  $n$  dimensions, ibid. **9** (1941).

euclidien d'une ou plusieurs dimensions. Cette propriété jouera un rôle capital dans la théorie de l'intégrale ( $\mathfrak{D}$ )—surtout de l'intégrale ( $\mathfrak{D}$ ) multiple—qui sera définie dans § 3. Dans § 2, nous étudierons les propriétés de l'intégrale au sens de Denjoy pour l'espace d'une dimension, en examinant les relations avec l'intégrale au sens de Lebesgue. Ces propriétés elles-mêmes caractérisent l'intégrale au sens de Denjoy. Dans § 3, nous donnerons la définition de l'intégrale ( $\mathfrak{D}$ ), qui sera une totalisation d'une fonction  $f(p)$  définie sur un intervalle de l'espace de plusieurs dimensions. Dans § 4 nous montrerons que l'intégrale ( $\mathfrak{D}$ ) peut être regardée comme l'intégrale multiple des intégrales au sens de Denjoy d'une dimension.

L'esquisse de cette étude pour le cas de 2 dimension a été déjà publiée sans démonstration<sup>5)</sup>.

#### NOTATIONS et TERMINOLOGIES.

On entend par  $E_n$  un espace euclidien à  $n$  dimensions composé des points  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  dont les coordonnées sont  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Étant donné un système  $a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n$  de  $2n$  nombres réels tels que  $a_i < b_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ , on appelle intervalle  $I = [a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n]$  de l'espace  $E_n$  l'ensemble de tous les points  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , où  $a_i \leq x_i \leq b_i$  pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$ . On appelle le plus grand des nombres  $b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n$  la norm de l'intervalle  $I$ , et la désigne par *norm* ( $I$ ).

Étant donné un système  $a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n$  de  $2n$  nombres réels tels que  $a_i \leq b_i$  pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$  et qu'il y a  $m$  indices tels que  $a_i = b_i$ , on appelle notamment intervalle de  $n - m$  dimensions dans  $E_n$  ou simplement celui de  $n - m$  dimensions l'ensemble de tous les points  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  où  $a_i \leq x_i \leq b_i$  pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$ , et le désigne brièvement  $[a_{i_1}, b_{i_1}; a_{i_2}, b_{i_2}; \dots; a_{i_{n-m}}, b_{i_{n-m}}]$  où  $a_{i_k} \neq b_{i_k}$  pour tout  $k = 1, 2, \dots, n - m$ .

Pour un ensemble quelconque de points  $A$ , désignons par  $\bar{A}$  son adhérence et par  $A^\circ$  son intérieur. Désignons par  $A - B$  la différence de deux ensembles  $A$  et  $B$ , par  $A \cup B$  ou  $A + B$  leur réunion et par  $A \cap B$  leur intersection. De même,  $\bigcup_{\lambda} A_{\lambda}$  désigne la réunion des  $A_{\lambda}$  et  $\bigcap_{\lambda} A_{\lambda}$  leur intersection. Désignons par  $\{p\}$  l'ensemble réduit au seul point  $p$ .

5) Shizu Enomoto: Notes sur l'intégration. I—Quelques Propriétés des Fonctions d'Intervalle, Proc. Japan Acad. 30, 176 (1954); II—Une Propriété du Recouvrement Fermé de l'Intervalle, Proc. Japan Acad., 30, 289 (1954); III—Théorème de Fubini, Proc. Japan Acad. 30, 437 (1954).

Nous dirons que les intervalles  $I_i$  ( $i = 1, 2, \dots, i_0$ ) tels que  $(I_i)^\circ \cap (I_{i'})^\circ = 0$  pour  $i \neq i'$  n'empiètent pas les uns sur les autres. Pour un intervalle  $[a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n]$  de  $E_n$  on appelle notamment  $m^e$ -réseau dans  $I$  la famille d'intervalles  $\left[ a_1 + \frac{k_1(b_1 - a_1)}{m}, a_1 + \frac{(k_1 + 1)(b_1 - a_1)}{m}; a_2 + \frac{k_2(b_2 - a_2)}{m}, a_2 + \frac{(k_2 + 1)(b_2 - a_2)}{m}; \dots; a_n + \frac{k_n(b_n - a_n)}{m}, a_n + \frac{(k_n + 1)(b_n - a_n)}{m} \right]$ , où  $k_i$  est le nombre naturel tel que  $0 \leq k_i \leq m - 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), les intervalles étant dits les mailles du  $m^e$ -réseau. On le désigne par  $\mathfrak{R}_m(I)$  pour tout  $m = 1, 2, \dots$ .

Nous pouvons considérer, comme on sait bien, l'espace  $E_n$  comme l'espace produit  $E_{n_1} \times E_{n_2}$  de  $E_{n_1}$  par  $E_{n_2}$  pour  $n_1, n_2$  tels que  $n_1 + n_2 = n$ , c.-à-d. l'espace composé des couples  $(p, q)$  dont le premier  $p$  est un point quelconque de  $E_{n_1}$  et le second  $q$  un point quelconque de  $E_{n_2}$ . Pour un ensemble  $A$  quelconque de  $E_n$ , on entend par  $\underset{E_{n_1}}{\text{proj.}}_x(A)$  la première projection de  $A$  sur  $E_{n_1}$  et par  $\underset{E_{n_2}}{\text{proj.}}_y(A)$  la seconde projection de  $A$  sur  $E_{n_2}$ . Pour un point  $p$  de  $E_{n_1}$ , on écrit par  $A^p$  l'ensemble des points  $(p, q')$  tels que  $(p, q') \in A$ . Pour un point  $q$  de  $E_{n_2}$ , on écrit de même par  $A^q$  l'ensemble des points  $(p', q)$  tels que  $(p', q) \in A$ . En particulier, si  $n_1 = 1$ , resp.  $n_2 = 1$ , on écrit simplement par  $A^x$  et  $\underset{E_{n_1}}{\text{proj.}}_x(A)$ , resp.  $A^y$  et  $\underset{E_{n_2}}{\text{proj.}}_y(A)$ , aux lieux des  $A^p$  et  $\underset{E_{n_1}}{\text{proj.}}_x(A)$ , resp.  $A^q$  et  $\underset{E_{n_2}}{\text{proj.}}_y(A)$ . Pour des ensembles  $A$  et  $B$  tels que  $A \subseteq E_{n_1}$  et  $B \subseteq E_{n_2}$ , désignons par  $A \times B$  l'ensemble produit de  $A$  par  $B$ .

On entend par  $\mu_n(A)$  la mesure d'ensemble  $A$  de l'espace  $E_n$  mesurable au sens de Lebesgue. En particulier, on désigne par  $|I|$  la mesure  $\mu_n(I)$  pour un intervalle  $I$ . On écrit l'intégrale d'une fonction  $f(p)$  sommable (au sens de Lebesgue) par la notation  $(L) \int_A f(p) dp$  ou  $(L) \iint \dots \int_A f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n)$ . Dans le cas où une fonction  $f(x)$  de  $E_1$  est intégrable au sens de Denjoy (Denjoy-Perron), on écrit l'intégrale de  $f(x)$  par  $(D) \int_A f(x) dx$ .

$\Omega$  désigne le premier des nombres ordinaux de la troisième classe.

### § 1. Une propriété du recouvrement fermé de l'intervalle.

D'abord, nous allons étudier une propriété d'une suite des ensembles fermés, où la somme couvre un intervalle contenu dans un espace euclidien d'une ou plusieurs dimensions. Elle jouira un rôle capital dans la théorie, particulièrement pour l'intégrale multiple, de l'intégrale  $(\mathfrak{D})$ , qui sera donné dans § suivant de ce mémoire comme une extension

de l'intégrale au sens Denjoy (Denjoy-Perron) d'une dimension aux espaces de plusieurs dimensions.

**Lemme 1.** Soit  $J_0$  un intervalle de l'espace  $E_1$ . Soit  $M_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) une suite quelconque non-décroissante des ensembles fermés de total  $J_0$ . Alors, tout sous-intervalle  $J$  de  $J_0$  possède la propriété  $(A_1)$  pour la suite  $M_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) et une suite quelconque  $\varepsilon_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) telle que  $\varepsilon_n \downarrow 0$ , c.-à-d.

il y a une suite non-décroissante des ensembles fermés  $F_{n_i, m_i}(J)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) de total  $J$ , où  $F_{n_i, m_i}(J) \subseteq M_{m_i}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) et  $n_i < m_i < n_{i+1}$  pour tout  $i$ , et qui possède la propriété suivante:

Si  $F_{n_i, m_i}(J)$  n'est pas identique à  $J$ , il possède la propriété  $(B_1)$  pour  $M_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) et  $\varepsilon_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ )—on entend par là que la suite  $\{F_{n_i, m_i}\}$  satisfait à la proposition suivante:

la suite des intervalles  $J_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) contigus à l'ensemble formé des points de  $F_{n_i, m_i}(J)$  et d'extrémités de  $J$  se peut classer en un nombre  $m_i - n_i + 1$  des suites des intervalles  $J_{kj}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ), où  $n_i \leq k \leq m_i$  et  $J_{kj}$ , pouvant être vide, satisfont aux conditions suivantes pour tout indice  $k$ :

$$1^\circ) \sum_{j=1}^{\infty} |J_{kj}| < \varepsilon_k.$$

$$2^\circ) (J_{kj})^\circ \cap M_k = 0 \text{ pour tout } j = 1, 2, \dots.$$

3°) L'un au moins des extrémités d'intervalle  $J_{kj}$ , qui sera dit le point caractéristique de  $J_{kj}$ , appartient à  $M_k$  pour tout  $j = 1, 2, \dots$ .

Dans le cas de plusieurs dimensions on y peut donner la forme suivante:

**Lemme 2.** Soit  $R_0$  un intervalle de l'espace  $E_{n_0}$  ( $n_0 \geq 2$ ). Soit  $M_n$  une suite quelconque non-décroissante des ensembles fermés de total  $R_0$ . Alors, tout sous-intervalle  $R$  de  $R_0$  possède la propriété  $(A_{n_0})$  pour la suite  $M_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) et une suite quelconque  $\varepsilon_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) telle que  $\varepsilon_n \downarrow 0$ , c.-à-d. il y a une suite  $F_{n_i, m_i}(R)$  non-décroissante des ensemble fermés, où  $F_{n_i, m_i} \subseteq M_{m_i}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) et  $n_i < m_i < n_{i+1}$  pour tout  $i$ , possédant les propriétés suivantes:

$$\text{Posons } Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{proj.}_x(F_{n_i, m_i}(R)) \text{ et } Z = \text{proj.}_y(R) - Y, \text{ on a alors}$$

$$1^\circ) \mu_{n_0-1}(Z) = 0.$$

2°) pour tout point  $q$  de  $Y$ ,  $(F_{n_i, m_i}(R))^q$  n'étant pas identique à  $R^q$ , l'ensemble fermé  $(F_{n_i, m_i}(R))^q$  possède la propriété  $(B_1)$  pour  $(M_n)^q$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) et  $\varepsilon_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

$$3^\circ) \bigcup_{i=1}^{\infty} (F_{n_i, m_i}(R))^q = R^q \text{ pour tout point } q \text{ de } Y.$$

Nous allons donner la démonstration de Lemme 2 seulement pour le cas où  $n_0 = 2$ , parce qu'on peut faire de la même manière pour l'autre cas de Lemme 2 ou pour Lemme 1.

Démonstration. i) Si  $R$  possède la propriété  $(A_2)$ , il en est de même d'un sous-intervalle  $R'$  de  $R$ : Car, soient  $B_1$  et  $B_2$  deux côtés de  $R'$  parallèles à l'axe  $y$ . Posons  $Y_n = proj._y(B_1 \cap M_n) \cap proj._y(B_2 \cap M_n)$  et  $Y_n^* = proj._x(R') \times Y_n$ . Alors, il en résulte évidemment que la suite des ensembles  $F_{n_i m_i}(R') = F_{n_i m_i}(R) \cap Y_n^*$  jouit de toutes les propriétés voulues.

ii) Soit  $R$  un intervalle tel que son intérieur soit contenu dans la somme d'un ensemble fermé  $F$  et une suite de l'intervalles  $R_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ), n'empiétant pas les uns sur les autres et n'appartenant aucun point commun à  $F$ . Si, de plus,  $R_j$  possède la propriété  $(A_2)$  pour tout  $j$  et si  $F$  est contenu dans certain  $M_{m_0}$ , alors  $R$  jouit de la propriété  $(A_2)$ : Il suffit évidemment de montrer le cas

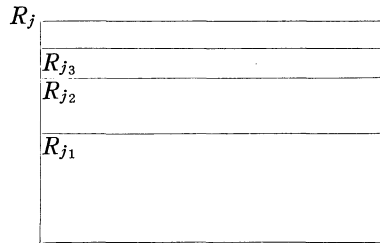


Fig. 1

où  $F \subseteq R$  et  $R_j^\circ \subseteq R^\circ$  pour tout  $j$ . Divisons  $R_j$  en la suite d'intervalles  $R_{j_k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) comme fig. 1.

Pour  $R_j$ , soit  $F_{n_j t m_{j t}}(R_j)$  ( $t = 1, 2, \dots$ ) une suite d'ensembles fermés possédant la propriété  $(A_2)$  pour la suite  $\varepsilon_n \downarrow 0$  donnée d'avance. Pour la brièveté de la démonstration, soient  $(F_{n_j t m_{j t}}(R_j))^y \cap B_{j_1} \neq 0$  et  $(F_{n_j t m_{j t}}(R_j))^y \cap B_{j_2} \neq 0$  pour tout point  $y$  de  $proj._y(F_{n_j t m_{j t}}(R_j))$ , où  $B_{j_1}$  et  $B_{j_2}$  sont les deux côtés de  $R_j$  parallèles à l'axe  $y$ , puisque cela se peut bien. Dans la suite, désignons simplement  $R_{j_k}$  ( $j = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots$ ) par  $Q_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ). Posons  $F_{n_j t m_{j t}}(Q_j) = F_{n_j t m_{j t}}(R_{j_t}) \cap Q_j$  ( $t = 1, 2, \dots$ ), où  $R_{j_t}$  est l'intervalle contenant  $Q_j$ . La suite  $F_{n_j t m_{j t}}(Q_j)$  ( $t = 1, 2, \dots$ ) possède évidemment la propriété  $(A_2)$  pour  $\varepsilon_n \downarrow 0$ .

Nous allons maintenant montrer l'existence d'une suite  $F_{n_i m_i}(R)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) possédant les propriétés voulues pour  $R$ . Définissons des indices  $n_i, m_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) et une suite des nombres naturels  $k(i)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) en utilisant la méthode d'induction.

1') Soient  $n_0 = 0, m_0$  le nombre déterminé d'avance comme  $M_{m_0} \supseteq F$  et  $k(0) = 0$ .

2') Supposé que  $n_{i-1}, m_{i-1}$  et  $k(i-1)$  soient définis, nous allons définir les nombres  $n, m$  et  $k(i)$ : Soit  $k(i)$  un nombre naturel tel que  $k(i) > k(i-1)$  et  $\mu_2(R - (\bigcup_{j=1}^{k(i)} Q_j \cup F)) < (\varepsilon_{m_{i-1}} / 2^{m_{i-1}+1})^2$ .

Considérons une suite des indices

$m_{i-1} + 1 < n_1, t_{1i} < m_1, t_{1i} < n_2, t_{2i} < m_2, t_{2i} < \dots < n_{k(i)}, t_{k(i)i} < m_{k(i)}, t_{k(i)i}$   
tels que

$$\mu_1(\text{proj.}_y(R) - \text{proj.}_y(F^{n_j, t_{ji} m_j, t_{ji}}(Q_j))) < \frac{\varepsilon_{m_{i-1}}}{N_i \times 2^{m_{i-1}+1}} \text{ pour tout } j =$$

$1, 2, \dots, k(i)$ , où  $N_i = \sum_{n=1}^{k(i)} \sum_{r=1}^n (nC_r)$ .

Posons  $n_i = m_{i-1} + 1$  et  $m_i = m_{k(i)}, t_{k(i)i}$ .

Soient  $y$  un point quelconque de  $\text{proj.}_y(R)$  et  $g(y)$  la ligne droite parallèle à l'axe  $x$  et qui passe par le point  $(0, y)$ . Considérons, pour tout  $i$ , le système composé des intervalles  $Q_j$  tels que  $Q_j \cap g(y) \neq 0$  et  $Q_j \in \{Q_j (j = 1, 2, \dots, k(i))\}$ . Désignons, pour tout  $i$ , par  $\mathfrak{A}_i$  l'ensemble de tous les systèmes. On écrit un élément de  $\mathfrak{A}_i$ , par  $P_i: (Q_{j_1}(P_i), Q_{j_2}(P_i), \dots, Q_{j_{h(P_i)}}(P_i))$ . Le nombre de  $\mathfrak{A}_i$  set  $\leq N_i$ .

Posons maintenant:

$$E_i = \left\{ y; y \in \text{proj.}_y(R^\circ), \mu_2((R)^y - (\bigcup_{j=1}^{k(i)} Q_j \cup F)^y) \leq \frac{\varepsilon_{m_{i-1}}}{2^{m_{i-1}+1}} \right\}$$

$S_i$  soit un sous-ensemble fermé de  $E_i$  tel que  $\mu_1(E_i - S_i) < \frac{\varepsilon_{m_{i-1}}}{2^{m_{i-1}+1}}$  et que  $S'_i = S_i - (\bigcup_{j=1}^{k(i)} \text{proj.}_y(Q_j))$  est fermé.

$$T_i = \bigcup_{P_i \in \mathfrak{A}_i} \left( \bigcap_{h=1}^{h(P_i)} \text{proj.}_y(F^{n_{j_h}, t_{j_h i}, m_{j_h}, t_{j_h i}}(Q_{j_h}(P_i))) \right)$$

$$U_i = S_i \cap (S'_i \cup T_i)$$

$$V_i = Y_i \cap (\bigcap_{j=i}^{\infty} U_j) \text{ où } Y_i = \text{proj.}_y(B_1 \cap M_i) \cap \text{proj.}_y(B_2 \cap M_i),$$

$B_1, B_2$  désignant les deux côtés de  $R$  parallèles à l'axe  $y$ .

$$V_i^* = \text{proj.}_x(R) \times V_i.$$

Alors, on peut voir que  $F_{n_i m_i}(R) = V_{n_i}^* \cap (\bigcup_{j=1}^{k(i)} F^{n_j, t_{ji} m_j, t_{ji}}(Q_j) \cup M_{n_i})$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) est une suite des ensembles fermés voulues.

On peut facilement tirer de la construction que  $F_{n_i m_i}(R)$  est fermé.

On a  $V_i = Y_i \cap (\bigcap_{j=i}^{\infty} V_j) \leq Y_{i+1} \cap (\bigcap_{j=i+1}^{\infty} U_j) = V_{i+1}$ , puisque  $Y_i \leq Y_{i+1}$ . On a donc  $V_{n_i}^* \leq V_{n_{i+1}}^*$  par  $n_i < n_{i+1}$ . En notant que  $k(i) < k(i+1)$  et  $t_{ji} < t_{j,i+1}$  pour tout  $j = 1, \dots, k(i)$ , on peut voir  $F_{n_i m_i}(R) \leq F_{n_{i+1} m_{i+1}}(R)$ . Il résulte  $F_{n_i m_i}(R) \leq M_{m_i}$ , puisque  $F^{n_j, t_{ji} m_j, t_{ji}}(Q_j) \leq M_{m_j, t_{ji}} \leq M_{m_{k(i)}, t_{k(i)i}} = M_{m_i}$  pour tout  $j = 1, \dots, k(i)$  et  $m_i > n_i$ .

On a immédiatement  $n_i < m_i < n_{i+1}$  pour tout  $i$ .

Montrons maintenant  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_2(F_{n_i m_i}(R)) = \mu_2(R)$ . Pour cela, nous posons  $M_i^* = \bigcup_{j=1}^{k(i)} F^{n_j, t_{ji} m_j, t_{ji}}(Q_j)$  pour tout  $i$ . En vertu de l'inclusion

$M_{n_i} - M_i^* \supseteq F$ , on a d'abord  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_2(F_{n_i m_i}(R)) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_2(V_{n_i}^* \cap (M_i^* \cup M_{n_i}))$   
 $= \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_2(V_{n_i}^* \cap (M_{n_i} - M_i^*)) + \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_2(V_{n_i}^* \cap M_i^*) \geq \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_2(V_{n_i}^* \cap F) + \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_2(V_{n_i}^*$   
 $\cap M_i^*)$ .  $\mu_1(\text{proj. } _y(R) - E_i) \times \frac{\varepsilon_{m_{i-1}}}{2^{m_{i-1}+1}} \leq \mu_2(R - (\bigcup_{j=1}^{k(i)} Q_j \cup F)) < \left(\frac{\varepsilon_{m_{i-1}}}{2^{m_{i-1}+1}}\right)^2$  en

vertu de la définition de  $E_i$ , on a donc  $\mu_1(\text{proj. } _y(R) - E_i) < \frac{\varepsilon_{m_{i-1}}}{2^{m_{i-1}+1}}$ . De plus on a  $\mu_1(E_i - S_i) < \frac{\varepsilon_{m_{i-1}}}{2^{m_{i-1}+1}}$ . D'ailleurs on a  $\mu_1(S_i - U_i) = \mu_1(S_i - (S_i'$

$\cup T_i)) = \mu_1(S_i - S_i' \cup \bigcup_{P_i \in \mathfrak{P}_i} (\bigcap_{h=1}^{h(P_i)} \text{proj. } _y(F_{n_{j_h}, t_{j_h} m_{j_h}, t_{j_h} (Q_{j_h})))) \leq \mu_1(\text{proj. } _y(R)$   
 $- \bigcup_{P_i \in \mathfrak{P}_i} (\bigcap_{h=1}^{h(P_i)} \text{proj. } _y(F_{n_{j_h}, t_{j_h} m_{j_h}, t_{j_h} (Q_{j_h})))) = \mu_1(\bigcap_{P_i \in \mathfrak{P}_i} (\bigcap_{h=1}^{h(P_i)} \text{proj. } _y(R)$   
 $- \text{proj. } _y(F_{n_{j_h}, t_{j_h} m_{j_h}, t_{j_h} (Q_{j_h})))) \leq \sum_{P_i \in \mathfrak{P}_i} \sum_{h=1}^{h(P_i)} \mu_1(\text{proj. } _y(R) - \text{proj. } _y(F_{n_{j_h}, t_{j_h} m_{j_h}, t_{j_h} (Q_{j_h})))$   
 $< \frac{\varepsilon_{m_{i-1}}}{N_i \times 2^{m_{i-1}+1}} \times N_i = \frac{\varepsilon_{m_{i-1}}}{2^{m_{i-1}+1}}$ . En effet on a  $\mu_1(\text{proj. } _y(R) - U_i)$

$\leq \mu_1(\text{proj. } _y(R) - E_i) + \mu_1(E_i - S_i) + \mu_1(S_i - U_i) < \frac{\varepsilon_{m_{i-1}}}{2^{m_{i-1}+1}} \times 3 = \frac{\varepsilon_{m_{i-1}}}{2^{m_{i-1}}} \times \frac{1}{2}$ .

D'où on peut tirer  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_1(V_i) = \mu_1(\text{proj. } _y(R))$ . Car, on a  $\mu_1(\text{proj. } _y(R) - V_i)$   
 $= \mu_1(\text{proj. } _y(R) - (Y_i \cap (\bigcap_{j=i}^{\infty} U_j))) \leq \mu_1(\text{proj. } _y(R) - Y_i) + \sum_{j=i}^{\infty} \mu_1(\text{proj. } _y(R) - U_j)$

$\leq \mu_1(\text{proj. } _y(R) - Y_i) + \sum_{j=i}^{\infty} ((\varepsilon_{m_{j-1}}/2^{m_{j-1}}) \times \frac{1}{2}) = \mu_1(\text{proj. } _y(R) - Y_i) + \varepsilon_i/2^i$ . On a donc  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_2(V_i^*) = \mu_2(R)$ . En effect, on a  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_2(V_{n_i}^* \cap F) = \mu_2(F)$ .

D'autre part, on a, pour tout  $j_0$ ,  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_2(V_{n_i}^* \cap M_i^*) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_2(V_{n_i}^* \cap$   
 $\bigcup_{j=1}^{k(i)} F_{n_j, t_{j_i}, m_j, t_{j_i}(Q_j)) \geq \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_2(V_{n_i}^* \cap F_{n_j, t_{j_i}, m_j, t_{j_i}(Q_j)}) = \sum_{j=1}^{j_0} \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_2(V_{n_i}^* \cap$   
 $F_{n_j, t_{j_i}, m_j, t_{j_i}(Q_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_2(Q_j)$ .

On a donc  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_2(F_{n_i m_i}(R)) \geq \mu_2(F) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_2(Q_j) = \mu_2(R)$ . Conséquentment, il en résulte  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_2(F_{n_i m_i}(R)) = \mu_2(R)$ .

Montrons maintenant qu'on a  $R^y = \bigcup_{i=1}^{\infty} (F_{n_i m_i}(R))^y$  pour tout  $y$  de  $Y$ , où  $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{proj. } _y(F_{n_i m_i}(R))$ . Il y a pour tout  $y \in Y$  un  $i_0 = i_0(y)$  tel que  $\text{proj. } _y(F_{n_i m_i}(R)) \ni y$  pour tout  $i \geq i_0$ . On a généralement  $R^y = \bigcup_{j=1}^{\infty} (Q_j)^y + F^y + \{p(y), q(y)\}$  pour tout  $y \in Y$ , où  $p(y) = B_1 \cap g(y)$  et  $q(y) = B_2 \cap g(y)$ ,  $g(y)$  désignant la ligne droite parallèle à l'axe  $x$  contenant le point  $(0, y)$ . Il en suffit de prouver de  $y \in Y$  tel qu'il y a un  $j = j(y)$  tel que  $(Q_j)^y \neq 0$ . Posons  $t' = \max(n_{i_0}, j)$ , alors  $k(t') \geq j'$  et  $k(t') \geq n_{i_0}$ . Il en résulte  $y \in \text{proj. } _y(F_{n_j, t_{j_k} m_j, t_{j_k}(Q_j))$  pour tout  $k \geq t'$ . On a donc  $(R)^y = \bigcup_{i=1}^{\infty} (F_{n_i m_i}(R))^y$ .



Or, puisqu'on a  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_2(F_{n_i, m_i}(R)) = \mu_2(R)$  et  $(R)^y = \bigcap_{i=1}^{\infty} (F_{n_i, m_i}(R))^y$  pour tout  $y \in Y$ , il résulte  $\mu_1(Z) = 0$ , où  $Z = \text{proj.}_y(R) - Y$ .

Facilement, on peut voir que, en vertu de la construction d'ensembles  $F_{n_i, m_i}(R)$ , pour tout  $y \in Y$  tel que  $(F_{n_i, m_i}(R))^y$  n'est pas identique à  $R^y$ , l'ensemble fermé  $(F_{n_i, m_i}(R))^y$  possède la propriété  $(B_1)$  pour  $(M_n)^y$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) et  $\varepsilon_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

iii) En vertu de i), il suffit de prouver que  $R_0$  possède la propriété  $(A_2)$ . Pour cela, nous allons faire usage de l'induction transfinie.

1°) Pour le cas où  $\nu = 1$ : Puisque  $R_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ , il y a, en vertu de Théorème de Baire, un indice  $n'$  et un intervalle  $R \subseteq R_0$  tels que  $R \cap M_{n'} = R$ . On peut savoir aussitôt que si l'on pose  $E_1 = R$ , alors  $E_1$  possède la propriété  $(A_2)$  en posant  $F_{n_i, m_i}(E_1) = E_1$ , où  $n_i = n' + 2i$ ,  $m_i = n_i + 1$  ( $i = 1, 2, \dots$ ).

2°) Pour le cas où  $\nu < \Omega$ : Supposé que l'ensemble  $E_\mu$ , possédant les propriétés suivantes, soit défini pour tout  $\mu < \nu$ .

1')  $E_\mu = \bigcup_{j=1}^{\infty} R_{\mu_j}$ , où  $R_{\mu_j}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) est une suite des intervalles possédant la propriété  $(A_2)$  et n'empiétant pas les uns sur les autres.

2')  $(\bigcup_{\mu' < \mu} E_{\mu'})^\circ \subseteq (E_\mu)^\circ$ , mais  $(\bigcup_{\mu' < \mu} E_{\mu'})^\circ \neq (E_\mu)^\circ$ .

Nous allons montrer que si  $\bigcup_{\mu < \nu} E_\mu \neq R_0$ , il y a un ensemble  $E_\nu$  tel que  $E_\mu (\mu < \nu + 1)$  possède les propriétés 1') 2').

Soit  $A = R_0 - \bigcup_{\mu < \nu} E_\mu$ . Puisqu'alors  $A$  est un ensemble  $G_\delta$  et  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A \cap M_n)$ , il y a, en vertu de Théorème de Baire, un indice  $n'$  et deux intervalles  $R, R'$  tels que  $(R')^\circ \cap A \neq 0$ ,  $R \supseteq R'$  et  $\overline{A \cap M_{n'}} \supseteq R^\circ \cap A$ .

L'ensemble  $\{R_{\mu_j}; \mu < \nu, j = 1, 2, \dots\}$  est dénombrable, puisque  $\nu < \Omega$ , donc l'ensemble  $\bigcup_{\mu < \nu} \bigcup_{j=1}^{\infty} R_{\mu_j}$  se divise en les intervalles  $R_n'$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) n'empiétant pas les uns sur les autres et tels que pour tout  $R_n'$  il y a un  $R_{n_j}$  contenant  $R_n'$ . De plus, divisons tout intervalle  $R_n'$  en les intervalles  $R'_{n_i}$  ( $i = 0, 1, \dots, i_n$ ) tels que  $R'_{n_0} \subseteq R'$  et  $(R'_{n_i})^\circ \cap (R')^\circ = 0$  ( $i \neq 0$ ). Posons  $R_{\nu_0} = R'$  et désignons  $R'_{n_i}$  ( $n = 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, i_n$ ) par  $R_{\nu_j}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ). Alors, nous pouvons montrer que  $E_\nu = \bigcup_{j=0}^{\infty} R_{\nu_j}$  est l'ensemble voulu.

Pour 1').  $R_{\nu_j}$  ( $j \neq 0$ ) est contenu dans certain intervalle  $R_{\mu_j}$  ( $\mu' < \nu$ ), donc  $R_{\nu_j}$  ( $j \neq 0$ ) possède la propriété  $(A_2)$ . Par conséquent, il suffit de prouver que  $R_{\nu_0}$  la possède.

Posons  $A^* = R' \wedge \bar{A}$ , on a alors  $M_n \supseteq A^*$ . Car, on a  $\overline{A \wedge M_n} \supseteq R^\circ \wedge A$ , de sorte que  $\overline{M_n} \supseteq \overline{R^\circ \wedge A} \supseteq (R^\circ)^\circ \wedge \bar{A} \supseteq R' \wedge \bar{A} = A^*$ . Posons  $G = (R')^\circ - A^*$ .  $G$  étant l'ensemble ouvert, il y a une suite des intervalles  $J_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) tels que  $G = \bigcup_{i=1}^\infty J_i$  et  $(J_i)^\circ \wedge (J_{i'})^\circ = 0$  ( $i \neq i'$ ). Puisqu'alors on a

$$\begin{aligned} J_i &\subseteq (R')^\circ - A^* \subseteq R' - A = R' \wedge (R_0 - A) = R' \wedge (\bigcup_{\mu < \nu} E_\mu) = R' \wedge (\bigcup_{\mu < \nu} \bigcup_{j=1}^\infty R_{\mu j}) \\ &= R' \wedge (\bigcup_{n=1}^\infty R_n') = \bigcup_{n=1}^\infty (R' \wedge R_n'), \end{aligned}$$

où  $R' \wedge R_n'$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) est la suite des intervalles possédant la propriété  $(A_2)$  et n'empiétant pas les uns sur les autres.  $J_j$  la possède selon

ii). De plus, on a  $(R')^\circ \subseteq A^* + \bigcup_{i=1}^\infty J_i$ , donc  $R'$  possède la propriété  $(A_2)$ .

Pour (2').  $E_\nu = R_{\nu_0} + \bigcup_{j=1}^\infty R_{\nu j} = R' + \bigcup_{\mu < \nu} \bigcup_{j=1}^\infty R_{\mu j} = R' + \bigcup_{\mu < \nu} E_\mu = (R' \wedge A) + \bigcup_{\mu < \nu} E_\mu$ , on a donc  $(E_\nu)^\circ \supseteq (\bigcup_{\mu < \nu} E_\mu)^\circ$ . En outre, puisque  $(R')^\circ \wedge A \neq 0$ , il y a un point  $p$  de  $(R')^\circ \wedge A$ , par suite  $p \in (R')^\circ = (R_{\nu_0})^\circ \subseteq (E_\nu)^\circ$ . Pour le point on a de plus  $p \in (\bigcup_{\mu < \nu} E_\mu)^\circ$  de ce que  $p \in A$  et  $A \wedge (\bigcup_{\mu < \nu} E_\mu) = 0$ . Il en résulte  $(E_\nu)^\circ \neq (\bigcup_{\mu < \nu} E_\mu)^\circ$ .

iii) Il y a un  $\nu_0$  tel que  $\nu_0 < \Omega$  et  $\bigcup_{\mu < \nu_0} E_\mu = R_0$ , puisque  $(\bigcup_{\mu < \mu} E_\mu)^\circ \subseteq (\bigcup_{\mu' < \mu+1} E_{\mu'})^\circ$  et  $(\bigcup_{\mu' < \mu_\infty} E_{\mu'})^\circ \neq (\bigcup_{\mu' < \mu+1} E_{\mu'})^\circ$  pour tout  $\mu < \nu$ . On a alors  $R_0 = \bigcup_{\mu < \nu_0} E_\mu = \bigcup_{\mu < \nu_0} \bigcup_{j=1}^\infty R_{\mu j}$ , où  $R_{\mu j}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) est une suite, de total  $E_\mu$ , des intervalles possédant la propriété  $(A_2)$ , n'empiétant pas les uns sur les autres. En notant que  $\bigcup_{\mu < \nu_0} \bigcup_{j=1}^\infty R_{\mu j}$  se divise en des intervalles  $R_k'$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) tels que  $(R_k')^\circ \wedge (R_h')^\circ = 0$  ( $k \neq h$ ) et  $R_k'$  soit contenu dans certain  $R_{\mu j}$  pour tout  $k$ . On peut voir que  $R_0$  possède la propriété  $(A_2)$  par ii).

### § 2. Quelques propriétés de l'intégrale au sens de Denjoy.

Dans ce chapitre, nous allons étudier la propriété qu'elle-même caractérise l'intégrale au sens de Denjoy dans l'espace  $E_1$  et qui est regardée comme une base de l'intégrale que nous donnerons dans le chapitre prochain comme une extension de l'intégration au sens de Denjoy d'une dimension à l'espace de plusieurs dimensions.

D'abord, commençons par montrer la définition dite constructive des intégrales de Denjoy basée sur l'induction transfinitie<sup>6)</sup>.

6) S. Saks: Theory of the Integral (1937), p. 254,

Sait  $\mathfrak{F}$  une opération intégrale. On appelle le domaine de l'opération intégrale  $\mathfrak{F}$  sur un intervalle  $I_0$  l'ensemble de toutes les fonctions intégrables ( $\mathfrak{F}$ ) sur  $I_0$ , et le désigne par  $\mathfrak{F}(I_0)$ . Désignons par  $\mathfrak{F}(f; I_0)$  l'intégrale de  $f(x)$  sur  $I_0$  pour toute  $f(x)$  de  $\mathfrak{F}(I_0)$ . La borne supérieure des valeurs absolues de  $\mathfrak{F}(f; I)$  sur  $I \subseteq I_0$  est désignée par  $O(\mathfrak{F}; f; I_0)$ . Deux intégrales  $\mathfrak{F}_1$  et  $\mathfrak{F}_2$  sont dites compatibles, lorsque  $\mathfrak{F}_1(f; I) = \mathfrak{F}_2(f; I)$  pour tout intervalle  $I$  et pour toute  $f(x)$  intégrable ( $\mathfrak{F}_1$ ) et ( $\mathfrak{F}_2$ ) sur  $I$  simultanément. On écrit  $\mathfrak{F}_1 \geq \mathfrak{F}_2$ , lorsque les deux intégrales sont compatibles et que toute fonction intégrable ( $\mathfrak{F}_2$ ) est intégrable ( $\mathfrak{F}_1$ ).

Soit  $\{\mathfrak{F}_\xi\}$  une suite d'opérations intégrales, en général transfinie et telle que  $\mathfrak{F}_\xi \leq \mathfrak{F}_\eta$  pour  $\xi < \eta$ . Nous désignons alors par  $\sum_{\xi < \alpha} \mathfrak{F}_\xi$  l'opération intégrale  $\mathfrak{F}$  dont le domaine sur un intervalle  $I$ , quel que soit l'intervalle  $I$ , est la somme des domaines des intégrales  $\mathfrak{F}_\xi$  sur  $I$  pour  $\xi < \alpha$  et qui est définie pour toute fonction  $f(x)$  appartenant à son domaine sur  $I$  par l'égalité  $\mathfrak{F}(f; I) = \mathfrak{F}_{\xi_0}(f; I)$ , où  $\xi_0$  est le moindre des indices  $\xi < \alpha$  tels que  $f(x)$  est intégrable ( $\mathfrak{F}_\xi$ ) sur  $I$ .

Pour une opération intégrale  $\mathfrak{F}$ , on désigne par  $\mathfrak{F}^c$  l'opération intégrale généralisée ( $\mathfrak{F}$ ) de Cauchy et par  $\mathfrak{F}^{H*}$  l'opération intégrale généralisée ( $\mathfrak{F}$ ) de Harnack au sens restreint.

Ceci dit, soit  $\{\mathfrak{Q}_\xi^*\}$  la suite transfinie, définie par induction à partir de l'intégrale  $\mathfrak{Q}$  de Lebesgue comme il suit:

$$\mathfrak{Q}_0^* = \mathfrak{Q}, \quad \mathfrak{Q}_\alpha^* = \left( \sum_{\xi < \alpha} \mathfrak{Q}_\xi^* \right)^{CH*} \quad \text{où } \alpha > 0.$$

Alors,  $\mathfrak{D}^* = \sum_{\xi < \Omega} \mathfrak{Q}_\xi^* = \mathfrak{Q}_\Omega^*$  est l'intégrale de Denjoy (Denjoy-Perron).

**Théorème 1.** *Soit  $f(x)$  une fonction intégrable au sens de Denjoy sur un intervalle  $I_0 = [a, b]$  de l'espace  $E_1$ . Posons  $F(I) = (D) \int_I f(x) dx$  pour tout intervalle  $I \subseteq I_0$ . Alors pour toute suite  $\varepsilon_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) des nombres positifs telle que  $\varepsilon_n \downarrow 0$ , il y a une suite  $F_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) non-décroissante, de total  $I_0$ , des ensembles fermés satisfaisant aux conditions suivantes:*

- 1)  $f(x)$  est sommable sur tout  $F_n$ .
- 2) À tout ensemble  $F_n$ , la condition telle que  $I_i \cap F_n \neq \emptyset$  pour tout  $i$  entraîne  $\left| \sum_{i=1}^{i_0} F(I_i) - \sum_{i=1}^{i_0} (L) \int_{I_i \cap F_n} f(x) dx \right| < \varepsilon_n$ , quel que soit le système composé des intervalles  $I_i$  ( $i = 1, 2, \dots, i_0$ ) contenus dans  $I_0$  et n'empiétant pas les uns sur les autres.

Démonstration. Il suffit de montrer que toute fonction de  $\mathfrak{Q}_\alpha^*(I_0)$  pour  $\alpha < \Omega$  jouit de toutes les propriétés voulues. Nous le démontrons par l'induction,

1°) Pour le cas où  $\alpha = 0$ : Puisqu'alors  $\mathfrak{L}_0^*(I_0) = \mathfrak{L}(I_0)$ , il suffit de poser  $F_n = I_0$  pour tout  $n$ .

2°) Pour le cas où  $\alpha < \Omega$ : Montrons que si toute fonction de  $\mathfrak{L}_\xi^*(I_0)$  pour  $\xi < \alpha$  possède les propriétés voulues, on en peut tirer que toute fonction de  $\mathfrak{L}_\alpha^*(I_0)$  les possède.

a) Le cas où  $f \in (\sum_{\xi < \alpha} \mathfrak{L}_\xi^*)^c(I_0)$ : Soit  $\{a_1, a_2, \dots, a_l\}$  l'ensemble des points singuliers<sup>7)</sup> ( $\sum_{\xi < \alpha} \mathfrak{L}_\xi^*$ ) de  $f$  dans  $I_0$ . En vertu de la continuité de  $F(I) = (D) \int_I f(x) dx$ , il y a une suite  $J_k^n$  ( $k = 1, 2, \dots, l+1; n = 1, 2, \dots$ ) d'intervalles telle que:

1')  $J_k^n \subseteq (a_{k-1}, a_k)$ , où  $a_0 = a, a_{l+1} = b$ ,

2')  $J_k^n \subseteq J_k^{n+1}$ ,

3')  $\mu_1(I_0 - \bigcup_{k=1}^{l+1} J_k^n) < \delta_n$ , où  $\delta_n$  est un nombre positif tel que  $|I| < \delta_n$

entraîne  $|F(I)| < \varepsilon_n/4l$  pour tout intervalle  $I \subseteq I_0$ .

Étant  $f(x) \in (\sum_{\xi < \alpha} \mathfrak{L}_\xi^*)(J_k^n)$  pour tout  $n, k$ , il y a un  $\xi_k^n$  tel que  $f(x) \in \mathfrak{L}_{\xi_k^n}^*(J_k^n)$  et  $\xi_k^n < \alpha$ . En vertu de l'hypothèse d'induction, il y a, pour  $\varepsilon_n \downarrow 0$  donnée d'avance, une suite non-décroissante  $F_{km}^n$  ( $m = 1, 2, \dots$ ), de total  $J_k^n$ , des ensembles fermés satisfaisant aux conditions suivantes:

1)  $f(x)$  est sommable sur tout  $F_{km}^n$ .

2) À tout ensemble  $F_{km}^n$ , la condition telle que  $I_i \cap F_{km}^n \neq \emptyset$  pour tout  $i$  entraîne  $|\sum_i F(I_i) - \sum_i (L) \int_{I_i \cap F_{km}^n} f(x) dx| < \varepsilon_n/4l$ , quel que soit le système élémentaire composé des intervalles  $I_i$  ( $i = 1, 2, \dots, i_0$ ) contenus dans  $J_k^n$  et n'empiétant pas les uns sur les autres.

En notant que  $J_k^{n+1}$  peut être représenté comme la somme des intervalles  $J_k^n, I_{k1}^n$  et  $I_{k2}^n$ , n'empiétant pas les uns sur les autres, on peut savoir facilement qu'on y peut choisir  $\{F_{km}^n\}$  tel que  $F_{km}^n \supseteq F_{km}^{n+1}$ . Il en résulte que la suite d'ensembles fermés  $F_n = \{a_1, a_2, \dots, a_l\} \cup \{\bigcup_{k=1}^l F_{km}^n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) possède les propriétés voulues.

b) Le cas où  $f \in (\sum_{\xi < \alpha} \mathfrak{L}_\xi^*)^{CH^*}(I_0)$ : Montrons que si toute fonction de  $(\sum_{\xi < \alpha} \mathfrak{L}_\xi^*)^c(I_0)$  possède les propriétés voulues, on en peut tirer que toute fonction de  $\mathfrak{L}_\alpha^*(I_0)$  les possède. Soit  $S$  l'ensemble fermé composé de tous les points singuliers  $(\sum_{\xi < \alpha} \mathfrak{L}_\xi^*)^c$  de  $f$  dans  $I_0$ . Soit  $J_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) la suite des intervalles contigus à l'ensemble formé des points de  $S$  et d'extrémités de  $I_0$ . Puisqu'alors  $f(x)$  est intégrable  $(\sum_{\xi < \alpha} \mathfrak{L}_\xi^*)^c$  sur  $S$ , la

7) S. Saks; ibid. p. 255.

fonction  $f_S(x) = C_S(x) f(x)$  ( $x \in I_0$ ) est intégrable  $(\sum_{\xi < \alpha} \mathcal{Q}_\xi^*)^c$  sur  $I_0$ , où  $C_S(x)$  est la fonction caractéristique d'ensemble  $S$ . En effet, il y a une suite non-décroissante  $F'_{0n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), de total  $I_0$ , des ensembles fermés satisfaisant aux conditions suivantes:

- 1)  $f_S(x)$  est sommable sur tout  $F'_{0n}$ .
- 2) À tout ensemble  $F'_{0n}$ , la condition telle que  $I_i \cap F'_{0n} \neq \emptyset$  pour tout  $i$  entraîne  $|\sum_i F_S(I_i) - \sum_i (L) \int_{I_i \cap F'_{0n}} f(x) dx| < \varepsilon_n/8$ , quel que soit le système élémentaire composé des intervalles  $I_i$  ( $i = 1, 2, \dots, i_0$ ) contenus dans  $I_0$  et n'empiétant pas les uns sur les autres, où  $F_S(I_i) = (D) \int_{I_i} f_S(x) dx$  pour tout  $I_i$ .  $f$  étant intégrable  $(\sum_{\xi < \alpha} \mathcal{Q}_\xi^*)^c$  sur  $J_k$  pour tout  $k$ , il y a une suite non-décroissante  $F_{kn}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), de total  $J_k$ , des ensembles fermés satisfaisant aux conditions suivantes:

- 1)  $f(x)$  est sommable sur tout  $F_{kn}$ .
- 2) À tout ensemble  $F_{kn}$ , la condition telle que  $I_i \cap F_{kn} \neq \emptyset$  pour tout  $i$  entraîne  $|\sum_i F(I_i) - \sum_i (L) \int_{I_i \cap F_{kn}} f(x) dx| < \varepsilon_n/2^{k+3}$ , quel que soit le système élémentaire composé des intervalles  $I_i$  ( $i = 1, 2, \dots, i_0$ ) contenus dans  $J_k$  et n'empiétant pas les uns sur les autres.

D'autre part, puisque  $\sum_{k=1}^{\infty} O((\sum_{\xi < \alpha} \mathcal{Q}_\xi^*)^c; f; J_k) < \infty$ , il y a pour  $\varepsilon_n$  un  $k_n$  tel que  $\sum_{k=k_n+1}^{\infty} O((\sum_{\xi < \alpha} \mathcal{Q}_\xi^*)^c; f; J_k) < \varepsilon_n/8$ . On y peut choisir  $\{k_n\}$  telle que  $k_n > k_{n'}$  pour  $n > n'$ .

En posant  $F_n = F'_{0n} + \bigcup_{n=1}^{k_n} F_{kn}$ , où  $F'_{0n} = F'_{0n} \cap S$ , nous allons montrer que  $F_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) est la suite voulue.

Soit  $I_i$  ( $i = 1, 2, \dots, i_0$ ) un système élémentaire dans  $I_0$ . Désignons par  $I_i^1$  ( $i = 1, 2, \dots, i_1$ ) la sous-famille composée des intervalles contenus dans  $\bigcup_{k=1}^{k_n} J_k$  et par  $I_i^2$  ( $i = 1, 2, \dots, i_2$ ) les autres intervalles de celle-ci. On a alors

$$\left| \sum_{i=1}^{i_1} F(I_i^1) - \sum_{i=1}^{i_1} (L) \int_{I_i^1 \cap F_n} f(x) dx \right| < \sum_{k=1}^{k_n} ((\varepsilon_n/2^{k+3}) \times 2) < \varepsilon_n/4,$$

$$\left| \sum_{i=1}^{i_2} F_S(I_i^2) - \sum_{i=1}^{i_2} (L) \int_{I_i^2 \cap F'_{0n}} f(x) dx \right| < (\varepsilon_n/8) \times 2 = \varepsilon_n/4.$$

D'autre part, désignons par  $J_{ij}^2$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) la suite des intervalles contigus à l'ensemble formé des pointes de  $S \cap I_i^2$  et d'extrémités de  $I_i^2$ .

Alors, on a facilement  $\sum_{i=1}^{i_2} \sum_{j=1}^{\infty} O((\sum_{\xi < \alpha} \mathcal{Q}_\xi^*)^c; f; J_{ij}^2) < (\varepsilon_n/8) \times 2 = \varepsilon_n/4$ . Selon la définition, on a  $F(I_i^2) = F_S(I_i^2) + \sum_{j=1}^{\infty} F(J_{ij}^2)$ . En effet,  $|\sum_{i=1}^{i_0} F(I_i) - \sum_{i=1}^{i_0} (L)$

$$\begin{aligned} \int_{I_i \cap F_n} f(x) dx &\leq \left| \sum_{i=1}^{i_1} F(I_i) - \sum_{i=1}^{i_1} (L) \int_{I_i} f(x) dx \right| + \left| \sum_{i=1}^{i_2} F(I_i^2) - \sum_{i=1}^{i_2} (L) \int_{I_i^2} f(x) dx \right| \\ &\leq \varepsilon_n/4 + \left| \sum_{i=1}^{i_2} (F_S(I_i^2) + \sum_{j=1}^{\infty} F(J_{ij}^2)) - \sum_{i=1}^{i_2} (L) \int_{I_i^2} f(x) dx \right| \\ &\leq \varepsilon_n/4 + \left| \sum_{i=1}^{i_2} F_S(I_i^2) - \sum_{i=1}^{i_2} (L) \int_{I_i^2} f(x) dx \right| + \left| \sum_{i=1}^{i_2} \sum_{j=1}^{\infty} F(J_{ij}^2) \right| < \varepsilon_n/4 + \varepsilon_n/4 \\ &+ \varepsilon_n/4 < \varepsilon_n. \end{aligned}$$

On peut tirer immédiatement de Théorème 1 deux théorèmes suivants.

**Théorème 2.** Soit  $f(x)$  une fonction intégrable au sens de Denjoy sur un intervalle  $I_0$ . Alors, on peut choisir une suite  $F_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) non-décroissante, de total  $I_0$ , d'ensembles fermés telle que:

- 1) (D)  $\int_I f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_{I \cap F_n} f(x) dx$  pour tout intervalle  $I \subseteq I_0$ .
- 2) Pour toute suite d'intervalles  $\{I_i\}$  n'empiétant pas les uns sur les autres et dont il y a un indice  $n_0$  tel que  $I_i \cap F_{n_0} \neq \emptyset$  pour tout  $i$ , on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_{I_i \cap F_n} f(x) dx \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (L) \int_{\left(\bigcup_i I_i\right) \cap F_n} f(x) dx \right\}.$$

En particulier, si  $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$  est un intervalle  $I$ , on a

$$(D) \int_I f(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} (D) \int_{I_i} f(x) dx.$$

Démonstration. Comme une suite voulue, il suffit de prendre la suite  $F_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) mentionnée au Théorème 1 pour  $f(x)$  et pour  $\varepsilon_n \downarrow 0$ . Pour 1): Il y a pour tout sous-intervalle  $I$  de  $I_0$  un indice  $n' = n'(I)$  tel que  $F_{n'} \cap I \neq \emptyset$ ; on a donc  $|(D) \int_I f(x) dx - (L) \int_{I \cap F_n} f(x) dx| < \varepsilon_n$  pour tout  $n \geq n'$ . Par suite, on a 1). Pour 2): Quel que soit  $\varepsilon > 0$ , il y a un indice  $n'(\varepsilon)$  tel que  $\varepsilon/2 > \varepsilon_{n'(\varepsilon)}$  et  $n'(\varepsilon) \geq n_0$ . Pour tout  $n \geq n'(\varepsilon)$ , il y a un nombre  $i(n, \varepsilon)$  tel que  $|\sum_{i=i'+1}^{\infty} (L) \int_{I_i \cap F_n} f(x) dx| < \varepsilon/2$  pour tout  $i' \geq i(n, \varepsilon)$ . Puisque  $I_i \cap F_n \neq \emptyset$  pour tout  $i = 1, 2, \dots$  et  $n \geq n_0$ , on a, pour tout  $i' \geq i(n, \varepsilon)$ ,  $|\sum_{i=1}^{i'} (D) \int_{I_i} f(x) dx - \sum_{i=1}^{i'} (L) \int_{I_i \cap F_n} f(x) dx| < \varepsilon_n \leq \varepsilon_{n'(\varepsilon)} < \varepsilon/2$ . En effet, il en résulte que si  $n \geq n'(\varepsilon)$ , on a  $|\sum_{i=1}^{i'} (D) \int_{I_i} f(x) dx - \sum_{i=1}^{\infty} (L) \int_{I_i \cap F_n} f(x) dx| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$  pour tout  $i' \geq i(n, \varepsilon)$ , de sorte que  $|\sum_{i=1}^{\infty} (D) \int_{I_i} f(x) dx - \sum_{i=1}^{\infty} (L) \int_{I_i \cap F_n} f(x) dx| < \varepsilon$  pour tout  $n \geq n'(\varepsilon)$ . On a donc  $\sum_{i=1}^{\infty} (D) \int_{I_i} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^{\infty} (L) \int_{I_i \cap F_n} f(x) dx \right)$ . Par

suite, de 1) on a  $\sum_{i=1}^{\infty} \{\lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_{I_i \cap F_n} f(x) dx\} = \lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_{(\cup_i I_i) \cap F_n} f(x) dx$ .

Il en résulte que  $(D) \int_I f(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} (D) \int_{I_i} f(x) dx$ , quand  $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$  est un intervalle.

**Théorème 3.** Soient  $f(x)$  une fonction intégrable au sens de Denjoy sur un intervalle  $I_0$  et  $F(I) = (D) \int_I f(x) dx$  pour tout  $I \subseteq I_0$ . Alors, il y a une suite  $F_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) non-décroissante, de total  $I_0$ , des ensembles fermés satisfaisant aux conditions suivantes:

1)  $f(x)$  est sommable sur tout  $F_n$ ,  
 2) à tout ensemble  $F_n$  et tout  $\varepsilon > 0$ , on peut faire correspondre un nombre  $\delta(n, \varepsilon) > 0$  tel que les conditions suivantes:

2.1)  $I_i \cap F_n \neq \emptyset$  pour tout  $i$ ,

2.2)  $\mu_1(\bigcup_{i=1}^{i_0} I_i - F_n) < \delta(n, \varepsilon)$

entraînent

$$|\sum_{i=1}^{i_0} F(I_i) - \sum_{i=1}^{i_0} (L) \int_{I_i \cap F_n} f(x) dx| < \varepsilon.$$

quel que soit le système composé des intervalles  $I_i$  ( $i = 1, 2, \dots, i_0$ ) contenus dans  $I_0$  et n'empiétant pas les uns sur les autres.

Démonstration. Comme une suite voulue, il suffit de prendre la suite  $F_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) mentionnée au Théorème 1 pour  $f(x)$  et pour une suite  $\varepsilon_n \downarrow 0$ . Puisque  $f(x)$  est sommable sur  $F_n$ , il y a pour  $\varepsilon > 0$  un nombre  $\rho(n, \varepsilon) > 0$  tel que  $\mu_1(E) < \rho(n, \varepsilon)$  entraîne  $|(L) \int_{E \cap F_n} f(x) dx| < \varepsilon/2$  pour tout ensemble  $E \subseteq I_0$ . Soit  $n'(n, \varepsilon)$  un indice tel que  $\varepsilon_{n'(n, \varepsilon)} < \varepsilon/2$  et  $n'(n, \varepsilon) \geq n$ . Posons  $\delta(n, \varepsilon) = \rho(n'(n, \varepsilon), \varepsilon)$ . Soit  $I_i$  ( $i = 1, 2, \dots, i_0$ ) un système des intervalles contenus dans  $I_0$  et n'empiétant pas l'un sur l'autre. Vu le Théorème 1, la condition telle que  $I_i \cap F_n \neq \emptyset$  pour tout  $i$  entraîne  $|\sum_{i=1}^{i_0} F(I_i) - \sum_{i=1}^{i_0} (L) \int_{I_i \cap F_{n'(n, \varepsilon)}} f(x) dx| < \varepsilon_{n'(n, \varepsilon)} < \varepsilon/2$ , puisque  $F_{n'(n, \varepsilon)} \supseteq F_n$ . D'autre part, si l'on a  $\mu_1(\bigcup_{i=1}^{i_0} I_i - F_n) < \delta(n, \varepsilon)$ , par suite  $\mu_1(\bigcup_{i=1}^{i_0} (I_i \cap F_{n'(n, \varepsilon)}) - F_n) < \delta(n, \varepsilon) = \rho(n'(n, \varepsilon), \varepsilon)$ , il résulte que  $|\sum_{i=1}^{i_0} (L) \int_{I_i \cap (F_{n'(n, \varepsilon)} - F_n)} f(x) dx| < \varepsilon/2$ . En effet, pour  $I_i$  ( $i = 1, 2, \dots, i_0$ ) satisfaisant les conditions 1), 2), l'égalité voulue est vraie.

Maintenant, nous allons montrer la réciproque dans une forme un peu générale, que nous donnons ici comme

**Théorème 4.** Soit  $f(x)$  une fonction définie sur un intervalle  $I_0$  et

telle qu'il y a une fonction d'intervalle  $F(I)$  fini-additive, une suite  $M_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) non-décroissante d'ensembles de total  $I$  et une suite  $F_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), de presque total  $I_0$ , non-décroissante des ensembles fermés tels que  $F_n \subseteq M_n$  pour tout  $n$ , satisfaisant aux conditions suivantes:

- 1)  $f(x)$  est sommable sur tout  $F_n$ .
- 2) à tout nombre  $n$  et tout  $\varepsilon > 0$ , on peut faire correspondre un nombre  $\delta(n, \varepsilon) > 0$  tel que les conditions:
  - 2.1)  $I_i \cap M_n \neq 0$  pour tout  $i$ ,
  - 2.2)  $\mu_1(\bigcup_i I_i - M_n) < \delta(n, \varepsilon)$

entraînent

$$|\sum_i F(I_i) - \sum_i (L) \int_{I_i \cap F_n} f(x) dx| < \varepsilon,$$

quel que soit le système composé des intervalles  $I_i$  ( $i = 1, 2, \dots, i_0$ ) contenus dans  $I_0$  et n'empiétant pas l'un sur l'autre.

Alors,  $f(x)$  est intégrable au sens de Denjoy sur  $I_0$  et  $F(I) = (D) \int_I f(x) dx$  pour tout  $I \subseteq I_0$ .

Démonstration.  $F(I)$  est continue, c.-à-d. il existe pour tout  $\varepsilon > 0$  un nombre  $\eta(\varepsilon) > 0$  tel que  $|I| < \eta(\varepsilon)$  entraîne  $|F(I)| < \varepsilon$ : D'après ce qu'on a  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{M}_n = I_0$ , il y a selon Lemme 1 une suite non-décroissante des ensembles fermés  $F_{n_i, m_i}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) contenus dans  $\bar{M}_{m_i}$  et qui jouit de la propriété  $(B_1)$  pour  $\bar{M}_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) et  $\gamma_n = \min_{1 \leq m \leq n} (m, 1/2^m)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), où  $n_i < m_i < n_{i+1}$  pour tout  $i$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , soient  $i(\varepsilon)$  un nombre naturel tel que  $1/2^{n_i(\varepsilon)} < \varepsilon/4$  et  $\rho(\varepsilon)$  un nombre positif tel que  $\mu_1(E) < \rho(\varepsilon)$  entraîne  $|(L) \int_{F_{m_i(\varepsilon)} \cap E} f(x) dx| < \varepsilon/4$ . Nous allons montrer que  $\eta(\varepsilon) = \min(\rho(\varepsilon), \delta(m_{i(\varepsilon)}, \varepsilon/4))$  est un nombre voulu. Soit  $I$  un intervalle tel que  $|I| < \eta(\varepsilon)$ . Alors, si l'on a  $I \cap F_{n_{i(\varepsilon)}, m_{i(\varepsilon)}} = 0$ , il y a de la propriété  $(B_1)$  un intervalle  $I'$  tel que  $I + I'$  soit un intervalle,  $(I)^\circ \cap (I')^\circ = 0$ , et pour un nombre naturel tel que  $n_{i(\varepsilon)} \leq k \leq m_{i(\varepsilon)}$ ,  $|I + I'| < \gamma_k \leq \delta(k, 1/2^k)$ ,  $\mu_1(I' \cap F_k) < \rho(\varepsilon)$  et de plus l'un des extrémités de  $I'$  appartient à  $M_k$ . Il s'ensuit que  $|F(I + I') - (L) \int_{F_k \cap (I + I')} f(x) dx| < 1/2^k \leq 1/2^{n_{i(\varepsilon)}} < \varepsilon/4$  et de même  $|F(I') - (L) \int_{F_k \cap I'} f(x) dx| < \varepsilon/4$ . En effet, on a  $|F(I)| \leq |F(I + I')| + |F(I')| < \varepsilon$ . Pour le cas où  $I \cap F_{n_{i(\varepsilon)}, m_{i(\varepsilon)}} \neq 0$ , puisqu'alors  $I \cap \bar{M}_{m_{i(\varepsilon)}} \neq 0$ , il y a un intervalle  $I'$  tel que  $I + I'$  soit un intervalle,  $(I)^\circ \cap (I')^\circ = 0$ ,  $|I + I'| < \eta(\varepsilon)$  et  $I' \cap M_{m_{i(\varepsilon)}} = 0$ . Il en résulte que  $|F(I') - (L) \int_{F_{m_{i(\varepsilon)}} \cap I'} f(x) dx| < \varepsilon/4$  et  $|F(I + I') - (L) \int_{F_{m_{i(\varepsilon)}} \cap (I + I')} f(x) dx| < \varepsilon/4$ , puisque  $|I'| \leq |I + I'| \leq \delta(m_{i(\varepsilon)}, \varepsilon/4)$ . On a donc  $|F(I')| < 2\varepsilon/4$  et



$|F(I+I')| < 2\varepsilon/4$ , puisque  $\mu_1(F_{m_i(\varepsilon)} \cap (I+I')) < \rho(\varepsilon)$ . Par suite  $|F(I)| < \varepsilon$ .

$F(I)$  est  $AC_*$  sur tout  $M_n$ , autrement dit, quel que soit  $\varepsilon > 0$ , il a un  $\eta(n, \varepsilon) > 0$  tel que, pour toute suite finie d'intervalles  $\{I_i\}$  n'empiétant pas les uns sur les autres et dont les extrémités appartiennent à  $M_n$ , la condition  $\sum_i |I_i| < \eta(n, \varepsilon)$  entraîne  $\sum_i O(F; I_i) < \varepsilon$ , où par  $O(F; I)$  on désigne le plus grand des nombres  $|F(I')| (I' \subseteq I)$ : Étant donné un nombre positif  $\varepsilon$ , désignons par  $\rho(n, \varepsilon)$  un nombre positif tel que  $\mu_1(E) < \rho(n, \varepsilon)$  entraîne  $|(L) \int_{F_n \cap E} f(x) dx| < \varepsilon/4$ . Posons  $\eta(n, \varepsilon) = \min(\rho(n, \varepsilon), \delta(n, \varepsilon/4))$ . Alors, on peut voir facilement que le nombre  $\eta(n, \varepsilon)$  est le nombre voulu.

$F'(x) = f(x)$  presque partout dans  $I_0$ : Nous le donnerons dans une forme plus générale dans le mémoire prochain<sup>8)</sup>.

En particulier, on peut établir de Théorème 4, de même manière que Théorème 3, le

**Théorème 5.** *Soit  $f(x)$  une fonction définie sur un intervalle  $I_0$  pour laquelle il existe une fonction d'intervalle  $F(I)$  fini-additive, telle que, pour tout  $\varepsilon_n \downarrow 0$ , il y a une suite non-décroissante d'ensembles  $M_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) de total  $I_0$  et une suite non-décroissante d'ensembles fermés  $F_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) de presque total  $I_0$ , qui satisfont aux conditions suivantes*

1)  $F_n \subseteq M_n$ .

2)  $f(x)$  est sommable sur tout  $F_n$ .

3)  $I_i \cap M_n \neq 0$  pour tout  $i$ , implique  $|\sum_{i=1}^{i_0} F(I_i) - \sum_{i=1}^{i_0} (L) \int_{I_i \cap F_n} f(x) dx| < \varepsilon_n$ , quel que soit le système composé des intervalles  $I_i$  ( $i = 1, 2, \dots, i_0$ ) contenus dans  $I_0$  et n'empiétant pas les uns sur les autres.

Alors,  $f(x)$  est totalisable au sens de Denjoy sur  $I_0$  et on a  $F(I) = (D) \int_I f(x) dx$  pour tout  $I \subseteq I_0$ .

### § 3. Totalisation d'une fonction de point dans l'espace de plusieurs dimensions.

Comme on l'a vu dans § 2, pour une fonction  $f(x)$  intégrable au sens de Denjoy sur un intervalle  $I_0$  d'une dimension, il y a une suite d'ensembles fermés  $F_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) telle que les intégrales  $\mathfrak{F}_n$  de  $f(x)$  au sens de Lebesgue sur  $F_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) convergent avec  $n \rightarrow \infty$  vers l'intégrale au sens de Denjoy de  $f(x)$  sur  $I_0$ . Conséquemment, si l'on prend l'intégrale au sens de Lebesgue comme point de départ de la

8) S. Saks: *ibid.* p. 241.

totalisation d'une fonction, la suite  $\mathfrak{S}_n$  peut être considérée comme une suite fondamentale, qui donne une sorte d'approximation par des intégrales au sens de Lebesgue pour la totalisation au sens de Denjoy.

À partir de cette notion nous définirons maintenant une totalisation d'une fonction définie sur un intervalle de l'espace de plusieurs dimensions, qui sera l'extension de l'intégration au sens de Denjoy qui jouira de toutes les propriétés fondamentales de comme l'intégration.

Nous allons définir tout d'abord certaines familles d'ensembles élémentaires de points.

On dit qu'un système d'intervalles est *élémentaire*, lorsqu'il est composé d'un nombre fini d'intervalles  $I_i$  ( $i = 1, 2, \dots, i_0$ ) de l'espace  $E_{n_0}$  sans points commun deux à deux, et on le désigne par  $S: \{I_i$  ( $i = 1, 2, \dots, i_0$ ) $\}$ .  $S$  signifie quelquefois la somme des intervalles  $I_i$  ( $i = 1, 2, \dots, i_0$ ). On écrit simplement  $|S|$  pour désigner  $\sum_{i=1}^{i_0} |I_i|$ . On appelle notamment *(\*)-système élémentaire* un système élémentaire  $S: \{I_i$  ( $i = 1, 2, \dots, i_0$ ) $\}$  tel que  $\underset{E_{n_0-1}}{proj.}_y(I_1) = \underset{E_{n_0-1}}{proj.}_y(I_2) = \dots = \underset{E_{n_0-1}}{proj.}_y(I_{i_0})$ . Un système élémentaire composé *(\*)-systèmes élémentaires*  $S_l: \{(I_{li}$  ( $i = 1, 2, \dots, i_0(l)$ ) $\}$  ( $l = 1, 2, \dots, l_0$ ) s'appelle *(\*\*)-système élémentaire*, lorsque  $\underset{E_{n_0-1}}{proj.}_y(S_l) \cap \underset{E_{n_0-1}}{proj.}_y(S_{l'}) = 0$  pour tout  $l \neq l'$ .

Un ensemble ou un système d'ensembles dans un sous-espace  $E_n$  de l'espace  $E_{n_0}$  est appelé parfois l'ensemble ou le système de  $n$  dimensions (dans  $E_{n_0}$ ) respectivement.

Pour une fonction d'intervalle  $F(I)$  et un système élémentaire  $S: \{I_i$  ( $i = 1, 2, \dots, i_0$ ) $\}$  désignons simplement par  $F(S)$  la somme  $\sum_{i=1}^{i_0} F(I_i)$ .

DÉFINITION 1. Étant donnée dans un intervalle  $R_0$  de l'espace  $E_{n_0}$  une fonction de point quelconque  $f(p)$ , nous dirons qu'elle est *intégrable* ( $\mathfrak{D}$ ) dans  $R_0$ , lorsqu'il existe une fonction d'intervalle  $F(I)$  fini-additive, une suite non-décroissante d'ensembles fermés  $M_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), de total  $R_0$ <sup>9)</sup>, et une suite non-décroissante des ensembles fermés  $F_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), de presque total  $R_0$ , tels que  $F_n \subseteq M_n$  pour tout  $n$ , satisfaisant aux conditions suivantes:

- 1)  $f(p)$  est sommable sur tout  $F_n$ .
- 2) À tout  $n$  et  $\varepsilon > 0$ , on peut faire correspondre un nombre  $\delta(n, \varepsilon) > 0$  tel que les conditions suivantes:
  - 2.1)  $I_i \cap M_n \neq 0$  pour tout  $n$ ,

9) Nous voyons qu'il ne faut pas que  $M_n$  est fermé.

$$2.2) \quad \mu_{m_0}(\bigcup_{i=1}^{i_0} I_i - M_n) < \delta(n, \varepsilon),$$

2.3)  $norm(I_i) < 1/n$  pour tout  $i$   
entraînent

$$|\sum_{i=1}^{i_0} F(I_i) - \sum_{i=1}^{i_0} (L) \int_{I_i \cap F_n} f(p) dp| < \varepsilon,$$

quel que soit le système élémentaire d'intervalles  $I_i$  ( $i = 1, 2, \dots, i_0$ ) contenus dans  $R_0$ . Nous dirons que, pour tout intervalle  $I \subseteq R_0$ ,  $F(I)$  est *intégrale* ( $\mathfrak{D}$ ) de la fonction  $f(p)$  sur  $I$ . Nous l'écrivons par ( $\mathfrak{D}$ )  $\int_I f(p) dp$  ou ( $\mathfrak{D}$ )  $\iint \dots \int_I f(x_1, \dots, x_{n_0}) dx_1, \dots, x_{n_0}$ .  $M_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) s'appelle la *suite caractéristique* pour l'intégration ( $\mathfrak{D}$ ) de  $f(p)$  et  $F_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) s'appelle la *suite fondamentale* pour l'intégrale ( $\mathfrak{D}$ ) de  $f(p)$ <sup>10)</sup>.

Or, nous voyons que dans la définition on peut choisir  $\delta(n, \varepsilon)$  de façon que  $\delta(n, \varepsilon) > \delta(n', \varepsilon)$  pour  $n' > n$ . Par conséquent, nous le supposerons dans la suite. Désormais, on entendra par  $\delta(n, \varepsilon)$  le nombre qu'on a mentionné dans la Définition 1.

#### § 4. Intégrales multiples.

Dans ce §, nous montrerons que cette intégrale ( $\mathfrak{D}$ ) peut être représentée comme l'intégrale multiple des intégrales au sens de Denjoy dans l'espace d'une dimension.

Commençons maintenant par trois lemmes qu'on utilisera dans la démonstration. D'abord, nous allons définir à présent certains termes.

Désormais, dans les démonstrations des lemmes suivants, soient  $f(p)$  une fonction intégrable ( $\mathfrak{D}$ ) dans l'intervalle  $R_0 = [0,1; 0,1; \dots; 0,1]$  de l'espace  $E_{n_0}$ ,  $M_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) une suite caractéristique pour l'intégration ( $\mathfrak{D}$ ) de  $f(p)$  et  $F_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) une suite fondamentale pour l'intégrale ( $\mathfrak{D}$ ) de  $f(p)$ .

Soit  $\varepsilon'_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) une suite des nombres positifs tels que  $\varepsilon'_n \downarrow 0$ . Désormais, désignons par  $F_{n_i m_i}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), sauf indication contraire, une suite non-décroissante d'ensembles fermés jouissant de la propriété ( $A_{n_0}$ ) pour la suite  $M_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) et la suite  $\varepsilon'_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

En outre, étant donné un point  $q$  de l'ensemble  $Z = proj. y(R_0) - \bigcup_{i=1}^{\infty} proj. y(F_{n_i m_i})$ , désignons par  $F_{n_i(q) m_i(q)}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), sauf indication contraire, une suite non-décroissante d'ensemble fermés jouissant de la propriété ( $A_1$ ) pour la suite  $(M_n)^q$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) et la suite  $\varepsilon'_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

10) Shizu Enomoto: *ibid.* III.

L'existence des suites  $F_{n,m_i}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) et  $F_{n_i(q) m_i(q)}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) peut être vue en vertu de Lemme 2 et Lemme 1, puisque  $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = R_0$  et  $(M_n)^q = (R_0)^q$  respectivement.

**Lemme 3.** Pour une fonction  $f(p)$  intégrable ( $\mathfrak{D}$ ) dans un intervalle  $R_0$  de l'espace  $E_{n_0}$ , il y a une suite non-décroissante des ensembles fermés  $B_h$  ( $h = 1, 2, \dots$ ), de total  $R_0$  et telle que:

À tout  $h$  et tout  $\varepsilon > 0$ , on peut faire correspondre un nombre  $\rho(h, \varepsilon) > 0$  tel que  $\rho(h, \varepsilon) > \rho(h', \varepsilon)$  pour tout  $h < h'$  et que les conditions suivantes:

- 1) il y a pour tout  $l$  un point  $q_l$  de  $\text{proj.}_y(S_l) \cap \text{proj.}_y(B_h)$  tel que  $(B_h)^{q_l} \cap I_{lj} \neq 0$  pour tout  $j = 1, 2, \dots, j_0(l)$ ,
- 2)  $|\text{proj.}_y(S) |_{E_{n_0-1}} < \rho(h, \varepsilon)$ ,
- 3)  $\text{norm}_{E_{n_0-1}}(\text{proj.}_y(S_l)) < 1/h$  pour tout  $l$ ,

entraînent

$$|F(S)| < \varepsilon,$$

quel que soit le  $(**)$ -système élémentaire  $S$  composé de  $(*)$ -systèmes élémentaires  $S_l$  ( $l = 1, 2, \dots, l_0$ ), où, pour tout  $l$ ,  $S_l$  est composé d'intervalles  $I_{lj}$  ( $j = 1, 2, \dots, j_0(l)$ ) contenus dans  $R_0$ .

Démonstration. Pour la brièveté, nous allons démontrer le cas où  $n_0 = 2$ . Considérons la suite  $F_{n,m_i}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) déjà mentionnée pour la suite  $\varepsilon'_n = \min(1/n, \eta(n, \varepsilon_n/2^{n+4}), \delta(n, \varepsilon_n/2^{n+5}))$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), où  $\varepsilon_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), est une suite telle que  $\varepsilon_n \downarrow 0$  et  $\eta(n, \varepsilon)$  est le nombre positif tel que  $\eta(n, \varepsilon) > \eta(n', \varepsilon)$  pour  $n < n'$  et que  $\mu_2(E) < \eta(n, \varepsilon)$  entraîne  $|(L) \iint_{E \cap F_n} f(x, y) d(x, y)| < \varepsilon$ . À tout  $h$ , nous allons faire correspondre  $F_{n_i(h) m_i(h)}$  tel que  $i(h)$  est le plus grand des nombres  $i$  où  $m_i \leq h$ . De même, pour tout  $y$  de  $Z = \text{proj.}_y(R_0) - \bigcup_{i=1}^{\infty} (\text{proj.}_y(F_{n,m_i}))$  considérons la suite  $F_{n_i(y) m_i(y)}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) déjà mentionnée pour la suite  $\varepsilon'_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). À tout  $h$ , nous allons faire correspondre  $F_{n_i(y, h) m_i(y, h)}$  tel que  $i(y, h)$  est le plus grand des nombre  $i$  où  $m_i(y) \leq h$ . Posons  $B_h = F_{n_i(h) m_i(h)} + \bigcup_{y \in Z} F_{n_i(y, h) m_i(y, h)}$  pour tout  $h$ . Évidemment,  $B_h$  ( $h = 1, 2, \dots$ ) est une suite non-décroissante des ensembles mesurables de total  $R_0$ .

Posons  $\rho'(h, \varepsilon) = \min(\delta(h, \varepsilon/32h), \eta(h, \varepsilon/16h))$  et d'abord montrerons que pour la suite  $B_h$  ( $h = 1, 2, \dots$ ),  $\rho'(h, \varepsilon)$  est le nombre voulu pour  $h$  et  $\varepsilon > 0$ .

Soit  $S$  un système satisfaisant aux conditions 1)-3) pour  $B_h$  et  $\rho'(h, \varepsilon)$ . Considérons, d'abord, le cas où  $S$  possède de plus la propriété suivante:

4) Soit  $y_l$  le point de  $\text{proj.}_y(S_l) \cap \text{proj.}_y(B_h)$  pris dans la condition 1) pour tout  $l$ . Soient  $a_j$  le point d'extrémité droite d'intervalle  $(I_{ij})^{y_l}$  et  $b_j$  le point d'extrémité gauche d'intervalle  $(I_{l, j+1})^{y_l}$ . Alors, on a  $[a_j, b_j] \cap B_h \neq 0$  pour tout  $j = 1, 2, \dots, j_0(l) - 1$ .

Considérons la famille, s'il en existe, de tous les intervalles  $I_{ij}$  tels que  $\text{norm}(I_{ij}) < 1/h$  et le désignons simplement par  $R_m^1$  ( $m = 1, 2, \dots, m_1$ ). On a  $R_m^1 \cap M_h \neq 0$  pour tout  $m$ , puisqu'alors  $R_m^1 \cap B_h \neq 0$  et  $B_h \subseteq M_h$ .

Pour un intervalle  $I_{ij}$  tel que  $\text{norm}(I_{ij}) \geq 1/h$ , s'il en existe, considérons la suite des intervalles contigus à l'ensemble formé des points de  $(B_h)^{y_l} \cap (I_{ij})^{y_l}$  et d'extrémités de  $(I_{ij})^{y_l}$ , soit désignée par  $J_{ijr}$  ( $r = 1, 2, \dots$ ), où, en outre, on peut supposer qu'on ait  $|J_{ijr}| \geq |J_{ijr+1}|$  ( $r = 1, 2, \dots$ ). Soit  $r_0(l, j)$  un indice tel que  $|J_{ijr_0(l, j)}| \geq 1/2h$  et  $|J_{ijr_0(l, j)+1}| < 1/2h$ . Soit  $J'_{ijr}$  ( $r = 0, 1, \dots, r_0(l, j)$ ) la suite des intervalles contigus à l'ensemble formé des points de  $\bigcup_{r=1}^{r_0(l, j)} J_{ijr}$  et d'extrémités de  $(I_{ij})^{y_l}$ . On a évidemment  $\bigcup_{r=1}^{r_0(l, j)} J'_{ijr} = \bigcup_{r=r_0(l, j)+1}^{\infty} J_{ijr}$ .

Parmi  $J'_{ijr}$  ( $l = 1, 2, \dots, l_0, j = 1, 2, \dots, j_0(l), r = 0, 1, \dots, r_0(l, j)$ ), considérons la famille, s'il en existe, de tous les intervalles  $J'_{ijr}$  tels que  $|J'_{ijr}| < 1/h$ , et à tel  $J'_{ijr}$ , faisons correspondre l'intervalle  $\text{proj.}_x(J'_{ijr}) \times \text{proj.}_y(S_l)$  de  $E_2$ . Désignons par  $R_m^2$  ( $m = 1, 2, \dots, m_2$ ) chacune de tels intervalles. Alors, on a  $R_m^2 \cap M_h \neq 0$  pour tout  $m$ , puisque  $J'_{ijr} \cap B_h \neq 0$  et  $B_h \subseteq M_h$ .

Pour  $J'_{ijr}$  tel que  $|J'_{ijr}| \geq 1/h$ , s'il en existe, soit  $J''_{ijrs}$  ( $s = 1, 2, \dots, s_0(l, j, r)$ ) une famille d'intervalles d'une dimension n'empiétant pas les uns sur les autres et dont la somme couvre  $J'_{ijr}$  et  $1/2h \leq |J''_{ijrs}| < 1/h$ . Or, à tout  $J''_{ijrs}$ , faisons correspondre l'intervalle  $\text{proj.}_x(J''_{ijrs}) \times \text{proj.}_y(S_l)$  de  $E_2$  et les désignons par  $R_m^3$  ( $m = 1, 2, \dots, m_3$ ). Alors on a  $R_m^3 \cap M_h \neq 0$  pour tout  $m$ . Pour cela, il suffit de montrer  $J''_{ijrs} \cap (B_h)^{y_l} \neq 0$ . Supposons maintenant que  $J''_{ijrs} \cap (B_h)^{y_l} = 0$ . Alors,  $J''_{ijrs} \subseteq \bigcup_{r=1}^{\infty} J_{ijr}$ , par suite il y a un  $J_{ijr'}$  tel que  $J_{ijr'} \supseteq J''_{ijrs}$  et  $r' > r_0(l, j)$ . Par suite  $|J''_{ijrs}| \leq |J_{ijr'}| < 1/2h$ , contrairement à  $|J''_{ijrs}| \geq 1/2h$ .

Pour la simplicité, posons  $\{R_m \ (m = 1, 2, \dots, m_0)\} = \{R_m^1 \ (m = 1, 2, \dots, m_1); R_m^2 \ (m = 1, 2, \dots, m_2); R_m^3 \ (m = 1, 2, \dots, m_3)\}$ . On peut déduire aussitôt de la construction de  $R_m$  ( $m = 1, 2, \dots, m_0$ ) qu'elle-même se divise en deux systèmes élémentaire. D'ailleurs, on a  $R_m \cap M_h \neq 0$ ,  $\text{norm}(R_m) < 1/h$  pour tout  $m$  et  $\bigcup_{m=1}^{m_0} |R_m| < \delta(h, \varepsilon/32h)$ , puisque  $|\text{proj.}_y(S)| < \rho'(h, \varepsilon) \leq \delta(h, \varepsilon/16h)$  et  $|\text{proj.}_x(R)| = 1$ . En effect on a par définition  $|\sum_{m=1}^{m_0} F(R_m) - \sum_{m=1}^{m_0} (L) \iint_{R_m \cap F_h} f(x, y) d(x, y)| < (\varepsilon/32h) \times 2 = \varepsilon/16h$ . Par

suite, on a  $|\sum_{m=1}^{m_0} F(R_m)| < \varepsilon/16h + \varepsilon/16h = \varepsilon/8h$ , puisque  $|\sum_{m=1}^{m_0} (L) \iint_{R_m \cap F_h} f(x, y) d(x, y)| < \varepsilon/16h$ , d'après ce qu'on a  $\sum_{m=1}^{m_0} |R_m| < \rho(h, \varepsilon) \leq \eta(h, \varepsilon/16h)$ .

Enfin, considérons  $J_{l_j r}$  ( $l = 1, 2, \dots, l_0; j = 1, 2, \dots, j_0(l); r = 1, 2, \dots, r_0(l, j)$ ). À  $J_{l_j r}$ , faisons correspondre un intervalle  $K_{l_j r}$ , déterminé par les quatre conditions suivantes: 1°)  $K_{l_j r}$  est contenu dans un intervalle  $K'$  contigu à l'ensemble formé des points de  $(B_h)^{y_l}$  et d'extrémités de  $(R_0)^{y_l}$ ; 2°) une extrémité de  $K_{l_j r}$  est une des celles de  $J_{l_j r}$ ; 3°) l'autre extrémité est le point caractéristique de  $K'$ ; 4°)  $K_{l_j r} \supseteq J_{l_j r}$ . Évidemment,  $K_{l_j r}$  ( $l = 1, 2, \dots, l_0; j = 1, 2, \dots, j_0(l), r = 1, 2, \dots, r_0(l, j)$ ) n'ont pas de points communs deux à deux selon la propriété 4). À  $J_{l_j r}$ , faisons correspondre l'intervalle  $Q_{l_j r} = \text{proj.}_x(J_{l_j r}) \times \text{proj.}_y(S_l)$  de l'espace  $E_2$ . De même, faisons correspondre à  $K_{l_j r}$  l'intervalle  $Q'_{l_j r} = \text{proj.}_x(K_{l_j r}) \times \text{proj.}_y(S_l)$  de 2 dimension. Nous désignons simplement  $Q_{l_j r}$ , resp.  $Q'_{l_j r}$ , ( $l = 1, 2, \dots, l_0; j = 1, 2, \dots, j_0(l); r = 1, 2, \dots, r_0(l, j)$ ) par  $Q_n$ , resp.  $Q'_n$ , ( $n = 1, 2, \dots, n_0$ ) de façon que  $Q'_n \supseteq Q_n$ .

Pour tout nombre naturel  $k$  où  $1 \leq k \leq h$ , considérons la famille  $Q'_{k_n}$  ( $n = 1, 2, \dots, n_0(k)$ ), s'il en existe, de tous les  $Q'_n$  tels que  $Q'_n \supseteq K_{l_j r}$ , où le point caractéristique appartient à  $M_k$ . Soit  $Q_{k_n}$  ( $n = 1, 2, \dots, n_0(k)$ ) la famille telle que  $Q_{k_n} \subseteq Q'_{k_n}$  pour tout  $n$ . On a alors  $Q'_{k_n} \cap M_k \neq 0$  et  $\text{norm}(Q'_{k_n}) < 1/k \leq 1/h$  pour tout  $n$  en vertu de la propriété  $(B_1)$  pour  $\varepsilon'_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). De plus on a  $\mu_2(\bigcup_{n=1}^{n_0(k)} Q'_{k_n} - M_k) \leq \mu_2(S) < \rho'(h, \varepsilon) \leq \delta(h, \varepsilon/32h) \leq \delta(k, \varepsilon/32h)$ . Puisque  $Q'_{k_n}$  ( $n = 1, 2, \dots, n_0(k)$ ) se divise en deux systèmes élémentaires, on a de la définition.

$$|\sum_{n=1}^{n_0(k)} F(Q'_{k_n}) - \sum_{n=1}^{n_0(k)} (L) \iint_{Q'_{k_n} \cap F_k} f(x, y) d(x, y)| < (\varepsilon/32h) \times 2 = \varepsilon/16h.$$

D'ailleurs, d'après ce qu'on a  $\sum_{n=1}^{n_0(k)} |Q'_{k_n}| < \rho'(h, \varepsilon) \leq \eta(h, \varepsilon/16h)$  et  $k \leq h$ , il résulte  $|\sum_{n=1}^{n_0(k)} (L) \iint_{Q'_{k_n} \cap F_k} f(x, y) d(x, y)| < \varepsilon/16h$ . On a donc  $|\sum_{n=1}^{n_0(k)} F(Q'_{k_n})| < \varepsilon/16h + \varepsilon/16h = \varepsilon/8h$  pour tout  $1 \leq k \leq h$ . Par suite, on a  $|\sum_{k=1}^h \sum_{n=1}^{n_0(k)} F(Q'_{k_n})| < \varepsilon/8$ . De même, on a  $|\sum_{k=1}^h \sum_{n=1}^{n_0(k)} F(Q'_{k_n} - Q_{k_n})| < \varepsilon/8$ . En effet,

$$|\sum_{k=1}^h \sum_{n=1}^{n_0(k)} F(Q_{k_n})| < \varepsilon/8 + \varepsilon/8 = \varepsilon/4.$$

Conséquemment, on a  $|F(S)| \leq |\sum_{m=1}^{m_0} F(R_m)| + |\sum_{k=1}^h \sum_{n=1}^{n_0(k)} F(Q_{k_n})| < \varepsilon/8h + \varepsilon/4 < \varepsilon/2$ , puisque  $S = \bigcup_{m=1}^{m_0} R_m + \bigcup_{k=1}^h \bigcup_{n=1}^{n_0(k)} Q_{k_n}$ .

En général, le cas où  $S$  soit un  $(**)$ -système élémentaire satisfaisant aux conditions 1)-3) et composé de  $(*)$ -systèmes élémentaires

$S_l (l = 1, 2, \dots, l_0)$ , où  $S_l$  est composé d'intervalle  $I_{lj} (j = 1, 2, \dots, j_0(l))$ : Soit  $S_1, \text{ resp. } S_2$ , le  $(**)$ -système élémentaire composé des  $(*)$ -systèmes  $S_{l_1} (l = 1, 2, \dots, l_0), \text{ resp. } S_{l_2} (l = 1, 2, \dots, l_0)$ , où  $S_{l_1}, \text{ resp. } S_{l_2}$ , est composé des  $I_{l, 2j-1} (j = 1, 2, \dots, 2j-1 \leq j_0(l)), \text{ resp. } I_{l, 2j} (j = 1, 2, \dots, 2j \leq j_0(l))$ . Alors  $S_{l_1}$  et  $S_{l_2}$  jouissent de la propriété 4). Par suite  $|F(S_1)| < \varepsilon/2$  et  $|F(S_2)| < \varepsilon/2$  en vertu du résultat mentionné plus haut. On a donc  $|F(S)| < \varepsilon$ .

Enfin, on peut voir facilement que, pour la suite non-décroissante d'ensembles fermés  $\bar{B}_h (h = 1, 2, \dots)$ , dont le total est  $R_0$ , le nombre  $\rho(h, \varepsilon) = \rho'(h, \varepsilon/8)$  est un des ceux qu'on a pour  $h$  et  $\varepsilon > 0$ . Par conséquent, il suffit de prendre  $\bar{B}_h (h = 1, 2, \dots)$  comme la suite  $B_h (h = 1, 2, \dots)$  de ce Lemme.

**Lemme 4.** *Etant donnée une fonction  $f(p)$  intégrable  $(\mathfrak{D})$  dans un intervalle  $R_0 = [a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_{n_0}, b_{n_0}]$  de l'espace  $E_{n_0}$ , il y a, pour une suite  $\varepsilon_i \downarrow 0$  quelconque, une suite non-décroissante d'ensembles fermés  $A_i (i = 1, 2, \dots)$  telle que  $\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i)^q = (R_0)^q$  pour tout point  $q$  de l'ensemble  $\bigcup_{i=1}^{\infty} \text{proj.}_y(A)$  et une suite non-décroissante d'ensembles fermés  $D_i (i = 1, 2, \dots)$ , de presque total  $R_0$ , telle que  $D_i \subseteq A_i$  et  $f(p)$  est sommable sur tout  $D_i$ , de telles sortes qu'on puisse faire correspondre pour tout  $i$  un  $\kappa_i > 0$  tel que  $\kappa_i \geq \kappa_{i+1}$  et les conditions suivantes:*

1) *norm  $(\text{proj.}_y(S_l))_{E_{n_0-1}} < \kappa_i$  pour tout  $l$ ,*

2) *il y a un ensemble  $Y$  contenu dans  $\text{proj.}_y(S) \cap \text{proj.}_y(A_i)$  tel que  $\text{proj.}_y(S_l) \cap Y \neq \emptyset$  pour tout  $l$ ,  $\mu_{n_0-1}(\text{proj.}_y(S) - Y)_{E_{n_0-1}} < \kappa_i$ , pour tout  $l$  si  $q \in \text{proj.}_y(S_l) \cap Y$ , on a  $(I_{lj})^q \cap A_i \neq \emptyset$  pour tout  $j = 1, 2, \dots, j_0(l)$ , entraînent*

$$|F(S) - (L) \int_{S \cap D_i} f(p) d(p)| < \varepsilon_i,$$

*quel que soit le  $(**)$ -système élémentaire  $S$  composé de  $(*)$ -systèmes élémentaires  $S_l (l = 1, 2, \dots, l_0)$ , où  $S_l$  est composé d'intervalles  $I_{lj} (j = 1, 2, \dots, j_0(l))$  contenus dans  $R_0$ .*

Démonstration. Pour la brièveté, nous allons démontrer le cas où  $n_0 = 2$ . Pour la suite  $\varepsilon_i (i = 1, 2, \dots)$  donnée d'avance, soit  $F_{n_i m_i} (i = 1, 2, \dots)$  la suite prise dans la démonstration de Lemme 3 pour la suite  $\varepsilon'_n = \min(1/n, \eta(n, \varepsilon_n/2^{n+4}), \delta(n, \varepsilon_n/2^{n+5})) (n = 1, 2, \dots)$ , où  $\eta(n, \varepsilon)$  est le nombre positif tel que  $\eta(n, \varepsilon) > \eta(n', \varepsilon)$  pour  $n < n'$  et que  $\mu_2(E)$

$\langle \eta(n, \varepsilon)$  entraîne  $|(L) \iint_{E \cap F_n} f(x, y) d(x, y)| < \varepsilon$ . Posons  $A_i = F_{n_i m_i}$ ,  $D_i = F_{n_i m_i} \cap F_{m_i}$  pour tout  $i$ , et montrerons qu'elles sont les suites voulues.

Pour cela, il suffit de montrer l'existence d'un nombre  $\kappa_i > 0$  qui jouit des propriétés voulu pour tout  $i$ , puisque les autres conditions sont évidemment satisfaites.

Posons  $\kappa_i = 1/2 \min(1/m_i, \eta(m_i, \varepsilon_i/7), \delta(m_i, \varepsilon_i/28), \rho(m_i, \varepsilon_i/8))$  où  $\rho(n, \varepsilon)$  est le nombre mentionné à Lemme 3. Désignons par  $\mathfrak{R}_m(I_{ij})$   $m^e$ -réseau dans  $I_{ij}$ . Puisqu'alors  $I_{ij} \cap A_j$  est fermé, il y a un  $m_0 = m_0(i)$ , où  $m_0 > m_i$ , et il y a un système  $R_{ljs}$  ( $s = 1, 2, \dots, s_0(l, j)$ ), pouvant être vide, composé des mailles de  $\mathfrak{R}_{m_0}(I_{ij})$  tel que

- 1)  $R_{ljs} \cap A_i \neq 0$  pour tout  $s = 1, 2, \dots, s_0(l, j)$ ,
- 2)  $R' \cap A_i = 0$  pour toute autre maille  $R'$  de  $\mathfrak{R}_{m_0}(I_{ij})$ ,
- 3)  $\bigcup_{s=1}^{s_0(l, j)} R_{ljs} \supseteq I_{ij} \cap A_i$ ,
- 4)  $\mu_2(\bigcup_{s=1}^{s_0(l, j)} R_{ljs} - A_i) < \kappa_i / \sum_{i=1}^{l_0} j_0(l)$ .

Soit  $y$  un point de  $Y \cap \text{proj.}_y(S_i^\circ)$  tel qu'il y a une maille  $R$  de  $\mathfrak{R}_{m_0}(I_{ij})$  ( $j = 1, 2, \dots, j_0(l)$ ) pour laquelle  $(R)^y \cap A_i = 0$ . Pour cela, considérons la famille de toutes les mailles  $R$  de  $\mathfrak{R}_{m_0}(I_{ij})$  ( $j = 1, 2, \dots, j_0(l)$ ) telles que  $(R)^y \cap A_i = 0$ , et la désignons par  $R_{lk}(y)$  ( $k = 1, 2, \dots, k_0(l)$ ). Désignons de plus par  $L_{lh}(y)$  ( $h = 1, 2, \dots, h_0(l)$ ) le système d'intervalles qui n'ont deux à deux aucun point commun et tel que  $\bigcup_{h=1}^{h_0(l)} L_{lh}(y) = \bigcup_{k=1}^{k_0(l)} R_{lk}(y)$ . Posons  $l_{lh}(y) = (L_{lh}(y))^y$  pour tout  $h$ . On a évidemment  $l_{lh}(y) \cap A_i = 0$ . Puisque  $l_{lh}(y)$  est fermé, il y a un intervalle  $K_{lh}(y)$  de 2 dimensions pour tout  $l_{lh}(y)$  ( $l = 1, 2, \dots, l_0; h = 1, 2, \dots, h_0(l)$ ) tel que  $(K_{lh}(y))^y = l_{lh}(y)$ ,  $K_{lh}(y) \cap A_i = 0$  et  $\text{proj.}_y(S_l) \supseteq \text{proj.}_y(R) \supseteq (\text{proj.}_y(K_{lh}(y)))^\circ \ni y$ , où  $R$  est une maille de  $\mathfrak{R}_{m_0}(I_{ij})$  telle que  $\text{proj.}_y(R) \ni y$ . Posons  $J'(y) = \bigcap_{h=1}^{h_0(y)} (\text{proj.}_y(K_{lh}(y)))$ .

Soit  $y$  un point de  $Y \cap \text{proj.}_y(S_i^\circ)$  tel qu'il n'y a aucune maille  $R$  de  $\mathfrak{R}_{m_0}(I_{ij})$  ( $j = 1, 2, \dots, j_0(l)$ ) pour laquelle on a  $(R)^y \cap F_{n_i m_i} = 0$ . Pour cela, soit  $J'(y)$  un intervalle de  $J_0$  tel que  $\text{proj.}_y(S_l) \supseteq \text{proj.}_y(R) \supseteq (J'(y))^\circ \ni y$ , où  $R$  est une maille de  $\mathfrak{R}_{m_0}(I_{ij})$  telle que  $\text{proj.}_y(R) \ni y$ .

Désignons pour tout point  $y$  de densité de l'ensemble  $Y \cap \text{proj.}_y(S_i^\circ)$  ( $l = 1, 2, \dots, l_0$ ) par  $\{J_\lambda(y)\}$  la famille tous les intervalles tels que  $J'(y) \supseteq J_\lambda(y)$ ,  $(J_\lambda(y))^\circ \ni y$  et les deux extrémités de  $J_\lambda(y)$  appartiennent à  $Y$ . En faisant usage de  $\{J_\lambda(y)\}$  pour l'ensemble  $Y$ , il y a, en vertu de Théorème de Vitali,  $J_{\lambda(v)}(y_v)$  ( $v = 1, 2, \dots, v_0$ ), où  $y_v \in Y$ , désignant simplement par  $J(y_v)$  ( $v = 1, 2, \dots, v_0$ ), possédant les propriétés suivantes:



- 1)  $\bigcup_{v=1}^{v_0} J(y_v) \subseteq \text{proj.}_y(S^\circ), |J(y_v)| < 1/m_i,$
- 2)  $\mu_1(Y - \bigcup_{v=1}^{v_0} J(y_v)) < \kappa_i,$
- 3)  $J(y_v) \cap J(y_{v'}) = 0$  pour  $v \neq v',$
- 4) les deux extrémités de  $J(y_v)$  appartiennent à  $Y.$

Désignons par  $I_v^*$  l'intervalle  $\text{proj.}_x(R_0) \times J(y_v)$  de 2 dimensions pour tout  $v = 1, 2, \dots, v_0.$  Par  $I_{v_j}^*$  ( $j = 1, 2, \dots, j_0(l)$ ), pour tout  $v = 1, 2, \dots, v_0,$  désignons la famille d'intervalles  $I_v^* \cap I_{lj}$  ( $j = 1, 2, \dots, j_0(l)$ ), où  $l$  le nombre tel que  $\text{proj.}_y(S_l) \supseteq J(y_v).$  Soit  $J_u'$  ( $u = 1, 2, \dots, u_0$ ) le système des intervalles contenus dans  $\text{proj.}_y(S)$ , contigus à l'ensemble formé des points de  $\bigcup_{v=1}^{v_0} J(y_v)$  et d'extrémités de tous les intervalles  $\text{proj.}_y(S_l)$  ( $l = 1, 2, \dots, l_0$ ). Désignons par  $I_u^{**}$  l'intervalle  $\text{proj.}_x(R_0) \times J_u'$  de 2 dimensions pour tout  $u = 1, 2, \dots, u_0$  et par  $I_{u_j}^{**}$  ( $j = 1, 2, \dots, j_0(u)$ ), pour tout  $u = 1, 2, \dots, u_0,$  la famille d'intervalles  $I_u^{**} \cap I_{lj}$  ( $j = 1, 2, \dots, j_0(l)$ ), où  $l$  le nombre tel que  $\text{proj.}_x(S_l) \supseteq J_u'.$

Désignons par  $R_{vs}$  ( $s = 1, 2, \dots, s_0(v)$ ), pour tout  $v = 1, 2, \dots, v_0,$  la famille de tous les intervalles de 2 dimensions  $I_v^* \cap R_{ljs}$  contenant des points communs à  $A_i$  ( $j = 1, 2, \dots, j_0(l)$ ;  $s = 1, 2, \dots, s_0(l, j)$ ), où  $l$  le nombre tel que  $\text{proj.}_y(S_l) \supseteq J(y_v).$  Désignons en outre par  $K_{vz}$  ( $z = 1, 2, \dots, z_0(v)$ ) la famille, pouvant être vide, des intervalles de 2 dimensions contenus dans  $\bigcup_{j=1}^{j_0(v)} I_{v_j}^*$ , contigus à l'ensemble formé des points de  $\bigcup_{s=1}^{s_0(v)} R_{vs}$  et des côtés parallèles à l'axe  $y$  de tous les intervalles  $I_{v_j}^*$  ( $j = 1, 2, \dots, j_0(v)$ ).

1°) Pour  $K_{vz}$  ( $v = 1, 2, \dots, v_0$ ;  $z = 1, 2, \dots, z_0(v)$ ): Divisons le système  $K_{vz}$  ( $z = 1, 2, \dots, z_0(v)$ ) en les deux systèmes  $K_{v, 2z-1}$  ( $z = 1, 2, \dots, 2z-1 \leq z_0(v)$ ),  $K_{v, 2z}$  ( $z = 1, 2, \dots, 2z \leq z_0(v)$ ). Simplement, désignons-les respectivement par  $K_{vz}^1$  ( $z = 1, 2, \dots, z_1(v)$ ),  $K_{vz}^2$  ( $z = 1, 2, \dots, z_2(v)$ ) pour tout  $v = 1, 2, \dots, v_0.$  Désignons par  $J_{vz}^1$  l'intervalle d'une dimension, déterminé par les quatre conditions suivantes: 1\*)  $J_{vz}^1$  est contenu dans un intervalle  $J''$  contigu à l'ensemble formé des points de  $(F_{n, m_i})^{y^v}$  et d'extrémités d'intervalle  $(R_0)^{y^v}$ ; 2\*) une extrémité de  $J_{vz}^1$  est une des celles de  $K_{vz}^1$ ; 3\*) l'autre extrémité est le point caractéristique de l'intervalle  $J''$ ; 4\*)  $J_{vz}^1 \supseteq (K_{vz}^1)^{y^v}.$  Posons  $H_{vz}^1 = J_{vz}^1 \times \text{proj.}_y(K_{vz}^1)$  pour tout  $v, z.$  Désignons par  $H_{vk_z}^1$  ( $z = 1, 2, \dots, z_1(v, k)$ ) la suite de tous les intervalles  $H_{vz}^1$  tels que le point caractéristique de  $J_{vz}^1$  appartient à  $M_k$  ( $n_i \leq k \leq m_i$ ). Alors,  $H_{vk_z}^1$  ( $v = 1, 2, \dots, v_0$ ;  $z = 1, 2, \dots, z_1(v, k)$ ) est le système d'intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres et tel que:

- 1)  $H_{vk_z}^1 \cap M_k \neq 0.$

2)  $\mu_2(\bigcup_{v=1}^{v_0} \bigcup_{z=1}^{z_1(v,k)} H_{vk_z}^1 - M_k) \leq \sum_{v=1}^{v_0} \sum_{z=1}^{z_1(v,k)} |H_{vk_z}^1| < \varepsilon'_k \leq \delta(k, \varepsilon_k/2^{k+5})$ , puisque l'ensemble  $(F_{n_i m_i})^y$  jouit de la propriété  $(B_1)$  pour  $(M_n)^y$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) et pour  $\varepsilon'_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

3)  $norm(H_{vk_z}^1) \leq \max(|J_{vk_z}^1|, |proj. y(K_{vz}^1)|) < \max(\varepsilon'_k, 1/m_i) \leq 1/k$ . Par suite on a puisque  $k \leq m_i$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{v=1}^{v_0} \sum_{z=1}^{z_1(v,k)} (F(H_{vk_z}^1) - (L) \iint_{H_{vk_z}^1 \cap F_k} f(x, y) d(x, y)) \right| \\ & < (\varepsilon_k/2^{k+5}) \times 2 = \varepsilon_k/2^{k+4}. \end{aligned}$$

En outre, on a  $\left| \sum_{v=1}^{v_0} \sum_{z=1}^{z_1(v,k)} (L) \iint_{H_{vk_z}^1 \cap F_k} f(x, y) d(x, y) \right| < \varepsilon_k/2^{k+4}$ , puisque  $\sum_{v=1}^{v_0} \sum_{z=1}^{z_1(v,k)} |H_{vk_z}^1| < \varepsilon'_k \leq \eta(k, \varepsilon_k/2^{k+4})$ . Il en résulte  $\left| \sum_{v=1}^{v_0} \sum_{z=1}^{z_1(v,k)} F(H_{vk_z}^1) \right| < \varepsilon_k/2^{k+3}$ . Par suite,  $\left| \sum_{v=1}^{v_0} \sum_{z=1}^{z_1(v)} F(H_{vk_z}^1) \right| < \sum_{k=i}^{m_i} \varepsilon_k/2^{k+3} < \varepsilon_{m_i}/7 \leq \varepsilon_i/7$ . De même,  $\left| \sum_{v=1}^{v_0} \sum_{z=1}^{z_1(v)} F(H_{vk_z}^1 - K_{vk_z}^1) \right| < \varepsilon_i/7$ . On a donc  $\left| \sum_{v=1}^{v_0} \sum_{z=1}^{z_1(v)} F(K_{vk_z}^1) \right| < 2\varepsilon_i/7$ . De même, on a  $\left| \sum_{v=1}^{v_0} \sum_{z=1}^{z_2(v)} F(K_{vz}^2) \right| < 2\varepsilon_i/7$ . En effet,  $\left| \sum_{v=1}^{v_0} \sum_{z=1}^{z_0(v)} F(K_{vz}^2) \right| < (2\varepsilon_i/7) \times 2 = 4\varepsilon_i/7$ . D'autre part, on a  $\left| \sum_{v=1}^{v_0} \sum_{z=1}^{z_0(v)} (L) \iint_{K_{vz}^2 \cap D_i} f(x, y) d(x, y) \right| = 0$ , puisque  $K_{vz}^2 \cap A_i = 0$  et  $A_i \supseteq D_i$ .

2°) Désignons simplement par  $R_s$  ( $s = 1, 2, \dots, s_0$ ) la famille de toutes les mailles  $R_{vs}$  ( $v = 1, 2, \dots, v_0; s = 1, 2, \dots, s_0(v)$ ). Il est un système composé des intervalles n'impétant pas les uns sur les autres, possédant les propriétés suivantes:

1)  $R_s \cap M_{m_i} \neq 0$ , puisque  $R_s \cap A_i \neq 0$  et  $M_{m_i} \supseteq A_i$ , pour tout  $s = 1, 2, \dots, s_0$ .

2)  $\mu_2(\bigcup_{s=1}^{s_0} R_s - M_{m_i}) \leq \mu_2(\bigcup_{s=1}^{s_0} R_s - A_i) \leq \sum_{l=1}^{l_0} \sum_{j=1}^{j_0(l)} \mu_2(\bigcup_{s=1}^{s_0} R_{ljs} - A_i) < (\kappa_i / \sum_{l=1}^{l_0} j_0(l)) \times \sum_{l=1}^{l_0} j_0(l) = \kappa_i < \delta(m_i, \varepsilon_i/28)$ .

3)  $norm(R_s) < 1/m_i$ , puisque  $m_i < m_0$ .

Par suite, en vertu de la définition, on a

$$\left| \sum_{s=1}^{s_0} (F(R_s) - (L) \iint_{R_s \cap F_{m_i}} f(x, y) d(x, y)) \right| < (\varepsilon_i/28) \times 4 = \varepsilon_i/7.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{s=1}^{s_0} (F(R_s) - (L) \iint_{R_s \cap D_i} f(x, y) d(x, y)) \right| \leq \\ & \left| \sum_{s=1}^{s_0} (L) \iint_{R_s \cap (F_{m_i} - D_i)} f(x, y) d(x, y) \right| + \varepsilon_i/7. \end{aligned}$$

En outre, on a  $\left| \sum_{s=1}^{s_0} (L) \iint_{R_s \cap (F_{m_i} - D_i)} f(x, y) d(x, y) \right| < \varepsilon_i/7$ , puisque

$$\begin{aligned} \mu_2\left(\bigcup_{s=1}^{S_0} R_s \cap (F_{m_i} - D_i)\right) &= \mu_2(F_{m_i} \cap (\bigcup_{s=1}^{S_0} R_s - A_i)) \leq \mu_2(\bigcup_{s=1}^{S_0} R_s - A_i) \\ &< \kappa_i \leq \eta(m_i, \varepsilon_i/7). \end{aligned}$$

On a donc  $|\sum_{s=1}^{S_0} (F(R_s) - (L) \iint_{R_s \cap D_i} f(x, y) d(x, y))| < 2\varepsilon_i/7$ .

3°) Pour  $I_{u_j}^{**}$  ( $u=1, 2, \dots, u_0; j=1, 2, \dots, j_0(u)$ ): Évidemment, on a  $\text{norm}(I_{u_j}^{**}) < \kappa_i \leq 1/m_i$ . On a  $\mu_1(\bigcup_{u=1}^{u_0} \bigcup_{j=1}^{j_0(u)} \text{proj.}_y(I_{u_j}^{**})) \leq \mu_1(\text{proj.}_y(S) - \bigcup_{v=1}^{v_0} J(y_v)) = \mu_1[\{(\text{proj.}_y(S) - Y) + (\text{proj.}_y(S) \cap Y)\} - \bigcup_{v=1}^{v_0} J(y_v)] = \mu_1[\{(\text{proj.}_y(S) - Y) + Y\} - \bigcup_{v=1}^{v_0} J(y_v)] \leq \mu_1(\text{proj.}_y(S) - Y) + \mu_1(Y - \bigcup_{v=1}^{v_0} J(y_v)) < \kappa_i + \kappa_i = 2\kappa_i \leq \rho(m_i, \varepsilon_i/7)$ . Puisque  $I_{i_j}^{**} \cap A_i \neq 0$ , on a  $I_{i_j}^{**} \cap F_{n_i m_i} \neq 0$ . Donc,  $I_{i_j}^{**} \cap B_{m_i} \neq 0$ , puisque  $F_{n_i m_i} \subseteq B_{m_i}$  en vertu de la construction de la suite d'ensembles fermés  $B_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) prise dans le Lemme 3. On a donc  $|\sum_{u=1}^{u_0} \sum_{j=1}^{j_0(u)} F(I_{u_j}^{**})| < \varepsilon_i/7$ . D'autre part, on a  $|\sum_{u=1}^{u_0} \sum_{j=1}^{j_0(u)} (L) \iint_{I_{i_j}^{**} \cap D_i} f(x, y) d(x, y)| < \varepsilon_i/7$ , puisque  $\bigcup_{i=1}^{I_0} \bigcup_{j=1}^{j_0(I)} |I_{i_j}^{**}| < \eta(m_i, \varepsilon_i/7)$ .

4°) Selon 1°)-3°),  $|F(S) - (L) \iint_{S \cap D_i} f(x, y) d(x, y)| < \varepsilon_i$ .

Remarque (1). On déduit aussitôt des constructions des suites  $A_i, D_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) que pour tout  $B_i$ , pris dans Lemme 4, il y a un indice  $n(i)$  tel que  $0 \leq n(i) < n(i')$  pour tout  $i < i'$  et on a  $D_{n(i)} \subseteq A_{n(i)} \subseteq B_i$ , où l'on pose  $D_{n(i)} = 0$  pour  $n(i) = 0$ .

**Lemme 5.** Soient  $A_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) une suite non-décroissante d'ensembles dont le total est un intervalle  $I_0$  d'une dimension et  $D_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) une suite non-décroissante des ensembles mesurables de presque total  $I_0$  et tels que  $D_i \subseteq A_i$ . Si une fonction  $f(x)$ , définie sur  $I_0$  et sommable sur tout  $D_n$ , ne jouit pas de la propriété suivante:

(\*) Il y a  $\lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_{I \cap D_n} f(x) dx$  pour tout  $I \subseteq I_0$  et de plus, quel que soit la suite  $\varepsilon_n \downarrow 0$ , pour tout  $n$  il y a un  $m(n) \geq n$  tel que la condition  $I_t \cap A_{m(n)} \neq 0$  ( $t=1, 2, \dots, t_0$ ) entraîne

$$|\sum_{t=1}^{t_0} F(I_t) - \sum_{t=1}^{t_0} (L) \int_{I_t \cap D_{m(n)}} f(x) dx| < \varepsilon_n,$$

quel que soit le système élémentaire  $I_t$  ( $t=1, \dots, t_0$ ), on désigne par  $F(I)$  le nombre  $\lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_{I \cap D_n} f(x) dx$ .

Alors, il y a un nombre  $h_0 > 0$  et une suite partielle  $A_{m_j}$  ( $j=1, 2, \dots$ ) de  $A_m$  ( $m=1, 2, \dots$ ), jouissant de la propriété telle que pour tout  $m_j$  il y a,

quel que soit  $\eta > 0$ , un système élémentaire  $I_t = I_t(i, \eta)$  ( $t = 1, 2, \dots, t_0$ ,  $= t_0(i, \eta)$ ) tel que:

1) les deux extrémités d'intervalle  $I_t$  sont les points rationnels pour tout  $t$ .

2)  $I_t \cap A_{m_j} \neq 0$  pour tout  $t$ .

3) il y a un  $m_j'$  tel que  $m_j' > m_j$  et  $|\sum_{t=1}^{t_0} (L) \int_{(D_{m_j'} - D_{m_j}) \cap I_t} f(x) dx| > h_0$ ,

4)  $|\sum_{t=1}^{t_0} (L) \int_{D_{m_j} \cap I_t} f(x) dx| < \eta$ .

Démonstration. i) Le cas où il y a un intervalle  $I$  tel qu'il n'y a pas  $\lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_{I \cap D_n} f(x) dx$ . Dans le cas il y a un nombre  $h_0 > 0$  et un  $m_0$  tels que  $D_{m_0} \cap I \neq 0$  et pour tout  $m \geq m_0$  il y a un  $m' = m'(m)$  tel que  $m' > m$  et  $|(L) \int_{(D_{m'} - D_m) \cap I} f(x) dx| = \alpha_0 > h_0$ . Puisque  $f(x)$  est sommable sur  $D_{m'}$ , il y a pour tout  $\varepsilon > 0$  tel que  $\varepsilon < \min(\eta, \alpha_0 - h_0)$ , un nombre  $\pi(\varepsilon, m')$  tel que  $\mu(E) < \pi(\varepsilon, m')$  entraîne  $|(L) \int_{D_{m'} \cap E} f(x) dx| < \varepsilon/2$ .

i.i) Pour le cas où  $\mu_1(D_m \cap I) < \pi(\varepsilon, m')$  pour un  $m$  certain tel que  $m \geq m_0$ : Soit  $I_1$  un intervalle, possédant les extrémités rationnelles, tel que  $I_1 \supseteq I$  et  $\mu_1(I_1 - I) < \pi(\varepsilon, m')$ . On a  $I_1 \cap A_m \neq 0$ , puisque  $I \cap D_{m_0} \neq 0$ . On a de plus  $|(L) \int_{(D_{m'} - D_m) \cap I_1} f(x) dx| \geq |(L) \int_{(D_{m'} - D_m) \cap I} f(x) dx| - |(L) \int_{(D_{m'} - D_m) \cap (I_1 - I)} f(x) dx| = \alpha_0 - \varepsilon/2 > h_0$  et  $|(L) \int_{D_m \cap I_1} f(x) dx| \leq |(L) \int_{D_m \cap (I_1 - I)} f(x) dx| + |(L) \int_{D_m \cap I} f(x) dx| < \varepsilon$ .

i.ii) Pour le cas où  $\mu_1(D_m \cap I) \geq \pi(\varepsilon, m')$  pour un certain  $m$  tel que  $m \geq m_0$ : En vertu du Théorème de Vitali il y a des intervalles  $J_t$  ( $t = 1, 2, \dots, t_0 - 1$ ), qui n'ont deux à deux aucun point commun, possédant les extrémités appartenant à  $D_m$  et tels qu'on ait  $J_t \subseteq I$  pour tout  $t$ ,  $\mu_1(\bigcup_{t=1}^{t_0-1} J_t - D_m) < \pi(\varepsilon, m')$  et  $\mu_1(D_m - \bigcup_{t=1}^{t_0-1} J_t) < \pi(\varepsilon, m')$ . Soient  $I_t'$  ( $t = 1, 2, \dots, t_0$ ) les intervalles contigus à l'ensemble formé des points de  $\bigcup_{t=1}^{t_0-1} J_t$  et d'extrémités de  $I$ . Pour ces intervalles  $I_t'$  il y a d'autres intervalles  $I_t$  ( $t = 1, 2, \dots, t_0$ ), qui n'ont deux à deux aucun point commun, possédant les extrémités rationnelles et tels que  $I_t \supseteq I_t'$  pour tout  $t$  et  $\sum_{t=1}^{t_0} \mu_1(I_t - I_t') < \pi(\varepsilon, m')$ . On a alors  $I_t \cap A_m \neq 0$  pour tout  $t$ . De plus on a  $|\sum_{t=1}^{t_0} (L) \int_{(D_{m'} - D_m) \cap I_t} f(x) dx| \geq |(L) \int_{(D_{m'} - D_m) \cap I} f(x) dx| - |(L) \int_{(D_{m'} - D_m) \cap (\bigcup_{t=1}^{t_0-1} J_t - \bigcup_{t=1}^{t_0-1} I_t)} f(x) dx| \geq \alpha_0 - \varepsilon/2 > h_0$  et  $|\sum_{t=1}^{t_0} (L) \int_{D_m \cap I_t} f(x) dx|$

$\leq |(L) \int_{D_m \cap (\bigcup_{t=1}^{t_0} I_t')} f(x) dx| + |(L) \int_{D_m \cap (\bigcup_{t=1}^{t_0-1} J_t \cap \bigcup_{t=1}^{t_0} I_t)} f(x) dx| < \varepsilon \leq \eta$ . Conséquentement, en posant  $m_j = m_0 + j$  et  $m_j' = (m_0 + j)'$  pour tout  $j = 1, 2, \dots$ , on peut voir le résultat voulu par i. i) et i. ii).

ii) Le cas où il y a  $\lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_{I \cap D_n} f(x) dx$  pour tout  $I \subseteq I_0$ : Dans le cas où il y a un nombre  $h_0 > 0$  et un  $m_0$  tels que pour tout  $m \geq m_0$  il y a un système élémentaire  $I_t$  ( $t = 1, 2, \dots, t_0$ ), dépendant de  $m$ , tel que  $I_t \cap A_m \neq 0$  pour tout  $t$  et  $|\sum_{t=1}^{t_0} F(I_t) - \sum_{t=1}^{t_0} (L) \int_{I_t \cap D_m} f(x) dx| > h_0$ . Par suite, puisque  $F(I_t) = \lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_{I_t \cap D_n} f(x) dx$ , pour tout  $m \geq m_0$  il y a un  $m' = m'(m)$  tel qu'on ait  $m' > m$  et  $|\sum_{t=1}^{t_0} (L) \int_{(D_{m'} - D_m) \cap I_t} f(x) dx| > h_0$ . On en peut conclure le résultat voulu en raisonnant de la même manière que i).

**Théorème 6.** Soit  $f(x_1, x_2, \dots, x_{n_0})$  une fonction intégrable  $(\mathfrak{D})$  sur un intervalle  $R_0 = [a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_{n_0}, b_{n_0}]$  de l'espace  $E_{n_0}$ . Alors, elle jouit des propriétés suivantes:

1) Pour tout  $n$  ( $n = 1, 2, \dots, n_0$ ), la fonction  $f(x_1, x_2, \dots, x_{n_0})$  considérée comme fonction de  $x_n$  dans l'intervalle  $[a_n, b_n]$  est intégrable au sens de Denjoy sur  $[a_n, b_n]$  pour presque toutes les valeurs de  $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}, \dots, x_{n_0})$  de l'intervalle  $[a_1, b_1; \dots; a_{n-1}, b_{n-1}; a_{n+1}, b_{n+1}; \dots; a_{n_0}, b_{n_0}]$ .

$$2) (\mathfrak{D}) \iint \dots \int_{R_0} f(x_1, \dots, x_{n_0}) d(x_1, \dots, x_{n_0}) \\ = (D) \int_{a_{n_1}}^{b_{n_1}} ((D) \int_{a_{n_2}}^{b_{n_2}} \dots ((D) \int_{a_{n_{n_0}}}^{b_{n_{n_0}}} f(x_1, \dots, x_{n_0}) d(x_{n_{n_0}})) \dots d(x_{n_2})) d(x_{n_1}),$$

où  $n_1, n_2, \dots, n_{n_0}$  une suite arbitraire composé des nombres  $1, 2, \dots, n_0$ .

3) Pour tout  $n$  ( $n = 1, 2, \dots, n_0$ ), il y a une suite des ensembles fermés  $D_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), dépendante de  $n$ , non-décroissante, de presque total  $R_0$  et telle qu'elle jouit de

$$(D) \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_{n_0}) d(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_{D_i^q} f(x_1, \dots, x_{n_0}) d(x_n),$$

pour presque toutes les valeurs de  $q = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}, \dots, x_{n_0})$  de l'intervalle  $[a_1, b_1; \dots; a_{n-1}, b_{n-1}; a_{n+1}, b_{n+1}; \dots; a_{n_0}, b_{n_0}]$ .

Démonstration. Simplement, nous nous bornons au cas de  $R_0 = [0, 1; 0, 1]$ . Commençons d'abord par la démonstration de 1). Soit  $\varepsilon_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) une suite telle que  $\varepsilon_n \downarrow 0$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$ . Soient  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) et  $D_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) les deux suites d'ensembles et  $\kappa_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ )

la suite de nombres naturels, mentionnés à Lemme 4 pour la fonction  $f(x, y)$  et la suite  $\varepsilon_n \downarrow 0$ . Il y a alors un sous-ensemble  $Z_0$  de  $proj. y(R_0)$ , de mesure nulle et tel que pour tout  $y$  de  $proj. y(R_0) - Z_0$ ,  $A_i^y$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) soit la suite non-décroissante des ensembles fermés de total  $(R_0)^y$ , que  $D_i^y$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) soit la suite non-décroissante d'ensembles fermés de presque total  $R_0^y$  et satisfaisant à  $D_i^y \subseteq A_i^y$  et que  $f(x, y)$  soit sommable comme fonction de  $x$  sur  $D_i^y$  pour tout  $i$ . Par suite, vu le Théorème 5, il suffit de montrer que pour presque tous les points  $y$  de  $proj. y(R_0) - Z_0$ , la fonction  $f(x, y)$ , comme fonction de  $x$ , jouit de la propriété (\*) de Lemme 5 pour les deux suites  $A_i^y, D_i^y$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Désignons par  $Y^*$  l'ensemble de tous les points  $y$  de  $proj. y(R_0) - Z_0$ , ne jouissant pas de la propriété (\*). En supposant que la mesure extérieure de  $Y^*$  soit positive, nous allons tirer la contradiction.

Pour tout  $y \in Y^*$ , de Lemme 5, il y a un nombre  $h_0(y)$  et une suite partielle  $A_{i_j(y)}^y$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) de  $A_i^y$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) jouissant de la propriété telle que pour tout  $i_j(y)$  il y a, quel que soit  $\eta > 0$ , un système élémentaire  $I_t = I_t(y, j, \eta)$  ( $t = 1, 2, \dots, t_0 = t_0(y, j, \eta)$ ) d'une dimension tel que:

- 1) les deux extrémités de  $I_t$  sont les points rationnels pour tout  $t$ .
- 2)  $I_t \cap A_{i_j(y)}^y \neq \emptyset$  pour tout  $t$ .
- 3) il y a un  $i'_j(y)$  tel que  $i'_j(y) > i_j(y)$  et

$$|\sum_{t=1}^{t_0} (L) \int_{(D_{i'_j(y)}^y - D_{i_j(y)}^y) \cap I_t} f(x, y) dx| > h_0(y).$$

$$4) |\sum_{t=1}^{t_0} (L) \int_{D_{i_j(y)}^y \cap I_t} f(x, y) dx| < \eta.$$

Soit  $h_0$  un nombre positif tel que la mesure extérieure de l'ensemble  $Y^{**}$  de tous les points  $y$  de  $Y^*$ , où  $h_0(y) \geq h_0$ , est égale à  $2k_0 (> 0)$ .

Soient  $i_0, i_1, i_2$  les indices tels que  $\varepsilon_{i_0} + \varepsilon_{i_1} < \frac{h_0 \cdot k_0}{8}$ ,  $\varepsilon_{i_1} < \varepsilon_{i_0}$  et  $\sum_{i=i_0}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon_{i_0}$ .

En effet, pour tout  $y \in Y^{**}$ , il y a deux nombres naturels  $i'(y), i(y)$ , où  $i'(y) > i(y) \geq i_0$ , et un système élémentaire  $I_t(y)$  ( $t = 1, 2, \dots, t_0(y)$ ) d'une dimension, jouissant des propriétés suivantes:

$\alpha$ ) les deux extrémités de  $I_t(y)$  sont les points rationnels pour tout  $t$ .

$\beta$ )  $I_t(y) \cap A_{i(y)}^y \neq \emptyset$  pour tout  $t$ .

$$\gamma) |\sum_{t=1}^{t_0(y)} (L) \int_{(D_{i'(y)}^y - D_{i(y)}^y) \cap I_t} f(x, y) dx| > h_0,$$

$$\delta) |\sum_{t=1}^{t_0(y)} (L) \int_{D_{i(y)}^y \cap I_t} f(x, y) dx| < \frac{\varepsilon_{i_1}}{2}.$$

Supposons qu'il y a un sous-ensemble  $Y'$  de  $Y^{**}$  tel que la mesure extérieure  $\geq k_0$  et que pour tout  $y$  de  $Y'$  on a

$$\gamma') \sum_{t=1}^{t_0(y)} (L) \int_{(D_{i'(y)} - D_{i(y)}) \cap I_t} f(x, y) dx > h_0$$

au lieu de  $\gamma$ ), puisqu'il en est de même du cas contraire.

Soit, pour tout nombre naturel  $i$ ,  $Y_i$  l'ensemble de tous les points  $y$  de  $\text{proj.}_y(R_0) - Z_0$  tels qu'il y a deux nombres naturels  $i'(y), i(y)$ , où  $i \geq i'(y) > i(y) \geq i_2$ , et un système élémentaire  $I_t(y)$  ( $t = 1, 2, \dots, t_0(y)$ ) d'une dimension, jouissant des propriétés  $(\alpha), (\beta), (\gamma'), (\delta)$ . Alors, on peut voir aussitôt que  $Y_i$  est mesurable ( $\mu_i$ ). Par suite, il y a un indice  $i^*$  tel que  $\mu_1(Y_{i^*}) > \frac{3}{4}k_0$ , puisqu'alors  $\bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i \supseteq Y'$ . Posons simplement que  $Y_0 = Y_{i^*}$ .

L'ensemble de toutes les combinaisons  $C: (S^1, i', i)$ , où  $S^1$  est un système élémentaire d'une dimension dans  $\text{proj.}_x(R_0)$  possédant les extrémités rationnelles et  $i', i$  sont deux nombres naturels tels que  $i^* \geq i' > i \geq i_2$ , est dénombrable. Donc, nous le désignons simplement par  $C_s: (S_s, i'(s), i(s)), S_s^1: \{J_{st} (t = 1, 2, \dots, t_0(s))\}$  ( $s = 1, 2, \dots$ ). Pour tout  $C_s$ , désignons par  $Y'_s$  l'ensemble de tous les points de  $Y_0$  jouissant des propriétés suivantes:

$$\beta^*) (J_{st} \times \{y\}) \cap A_{i(s)} \neq 0 \text{ pour tout } t = 1, 2, \dots, t_0(s),$$

$$\gamma^*) \sum_{t=1}^{t_0(s)} (L) \int_{(D_{i'(s)} - D_{i(s)}) \cap (J_{st} \times \{y\})} f(x, y) dx > h_0,$$

$$\delta^*) \left| \sum_{t=1}^{t_0(s)} (L) \int_{D_{i(s)} \cap (J_{st} \times \{y\})} f(x, y) dx \right| < \varepsilon_{i_1}/2.$$

Alors,  $Y'_s$  est mesurable ( $\mu_1$ ). Posons  $Y_s = Y'_s - \bigcup_{t=1}^{s-1} Y'_t$ , où  $Y_s$  peut être vide. On a évidemment  $Y_0 = \bigcup_{s=1}^{\infty} Y_s$ . Par suite, il y a un  $s_0$  tel que  $\sum_{s=1}^{s_0} \mu_1(Y_s) > \frac{3}{4}k_0$ .

En vertu du Théorème de Vitali, il y a, pour tout  $s$  tel que  $s \leq s_0$  et  $Y_s \neq 0$ , un système élémentaire  $K_j^s$  ( $j = 1, 2, \dots, j_0(s)$ ) dans  $\text{proj.}_y(R_0)$  tel que  $K_j^s \cap Y_s \neq 0$  pour tout  $j$ ,  $\text{norm}(K_j^s) < \kappa_i$  pour tout  $j$ ,  $\mu_1(Y_s - \bigcup_{j=1}^{j_0(s)} K_j^s) < \frac{k_0}{2s_0}$  et  $\mu_1(\bigcup_{j=1}^{j_0(s)} K_j^s - Y_s) < (1/s_0) \min(\delta, \kappa_i^*)$ , où  $\delta$  un nombre positif tel que  $\mu_2(E) < \delta$  entraîne  $|(L) \iint_{E \cap D_{i^*}} f(x, y) d(x, y)| < \varepsilon_{i_1}/2$ . Mais, pour tout  $s \leq s_0$  tel que  $Y_s = 0$ , considérons le système vide. En outre,  $K_j^s$  ( $s = 1, 2, \dots, s_0; j = 1, 2, \dots, j_0(s)$ ) n'ont deux à deux aucun point commun.

Posons  $I_{tj}^s = I_{st} \times K_j^s$ . Alors  $S: \{I_{tj}^s (s = 1, 2, \dots, s_0; t = 1, 2, \dots, t_0(s); j = 1, 2, \dots, j_0(s))\}$  est  $(**)$ -système élémentaire dans  $R$  composé de  $(*)$ -systèmes élémentaires  $S_{sj}: \{I_{tj}^s (t = 1, 2, \dots, t_0(s))\}$  ( $s = 1, 2, \dots, s_0$ ;

$j = 1, 2, \dots, j_0(s)$ . Pour tout  $s, S_{sj} (j=1, 2, \dots, j_0(s))$  jouit des propriétés suivantes:

- 1)  $norm(proj. y(S_{sj})) = norm(K_j^s) < \kappa_i$ .
- 2) Posons  $Y_s' = proj. y(\bigcup_{j=1}^{j_0(s)} S_{sj}) \cap Y_s$ , alors on a:
  - 2.1)  $Y_s' \leq proj. y(\bigcup_{j=1}^{j_0(s)} S_{sj}) \cap proj. y(A_{i(s)})$ , selon  $\beta^*$ .
  - 2.2)  $proj. y(S_{sj}) \cap Y_s' \neq 0$  pour tout  $j$ , puisque  $K_j^s \cap Y_s \neq 0$ .
  - 2.3)  $\mu_1(proj. y(\bigcup_{j=1}^{j_0(s)} S_{sj}) - Y_s') = \mu_1(\bigcup_{j=1}^{j_0(s)} K_j^s - Y_s') < \frac{1}{S_0} \min(\delta, \kappa_i^*)$ .
  - 2.4) Pour tout  $y$  de  $S_{sj} \cap Y_s'$ , on a  $(I_{t_j}^s)^y \cap A_{i(s)} = (J_{st} \times \{y\}) \cap A_{i(s)} \neq 0$  pour tout  $t = 1, 2, \dots, t_0(s)$ .

On a, selon 2.3),  $\mu_1(\bigcup_{i(s)=t} (proj. y(\bigcup_{j=1}^{j_0(s)} S_{sj}) - Y_s')) < \frac{1}{S_0} \min(\delta, \kappa_i^*) \times S_0 = \min(\delta, \kappa_i^*) \leq \min(\delta, \kappa_i) \leq \kappa_i$ , où  $\bigcup_{i(s)=t}$  se désigne la somme par rapport à  $s$  tels que  $i(s) = i$  et  $s \leq s_0$ .

Conséquemment, en vertu du Lemme 4, on a

$$|\sum_{i(s)=t} \sum_{j=1}^{j_0(s)} (F(S_{sj}) - (L) \iint_{S_{sj} \cap D_i} f(x, y) d(x, y))| < \varepsilon_i.$$

D'où on a

$$|\sum_{i=i_2}^{i^*} \sum_{i(s)=i} \sum_{j=1}^{j_0(s)} (F(S_{sj}) - (L) \iint_{S_{sj} \cap D_i} f(x, y) d(x, y))| < \sum_{i=i_2}^{i^*} \varepsilon_i < \varepsilon_{i_0}.$$

On a donc

$$|F(S) - \sum_{s=1}^{S_0} \sum_{j=1}^{j_0(s)} (L) \iint_{S_{sj} \cap D_{i(s)}} f(x, y) d(x, y)| < \varepsilon_{i_0}.$$

Par suite,  $|F(S)| < \varepsilon_{i_0} + |\sum_{s=1}^{S_0} \sum_{j=1}^{j_0(s)} (L) \iint_{S_{sj} \cap D_{i(s)}} f(x, y) d(x, y)|$ . Or, posons

simplement  $V_s = \bigcup_{t=1}^{t_0(s)} J_{st}$  et  $W_s = \bigcup_{j=1}^{j_0(s)} K_j^s$ . On a alors  $|\sum_{s=1}^{S_0} \sum_{j=1}^{j_0(s)}$

$$(L) \iint_{S_{sj} \cap D_{i(s)}} f(x, y) d(x, y)| \leq |\sum_{s=1}^{S_0} (L) \iint_{(V_s \times Y_s') \cap D_{i(s)}} f(x, y) d(x, y)| + |\sum_{s=1}^{S_0}$$

$$(L) \iint_{(V_s \times (W_s - Y_s')) \cap D_{i(s)}} f(x, y) d(x, y)| < \varepsilon_{i_1}/2 + \varepsilon_{i_1}/2 = \varepsilon_{i_1}.$$

Pour le voir, il suffit de nous rappeler  $\delta^*$  et le Théorème de Fubini, et ce qu'on a  $\sum_{s=1}^{S_0} \mu_1(W_s - Y_s') < \delta$  et  $i(s) \leq i^*$ . Enfin, nous sommes amenés à

l'inégalité importante:  $|F(S)| < \varepsilon_{i_0} + \varepsilon_{i_1} < h_0 k_0 / 8$ .

D'autre part, de même que le cas de  $i(s)$ , on peut tirer, pour  $i'(z)$ ,

$$|F(S) - \sum_{s=1}^{S_0} \sum_{j=1}^{j_0(s)} (L) \iint_{S_{sj} \cap D_{i'(s)}} f(x, y) d(x, y)| < \varepsilon_{i_0}.$$

Par suite, on a  $|F(S)|$



$$\begin{aligned}
 &> \sum_{s=1}^{s_0} \sum_{j=1}^{j_0(s)} (L) \iint_{S_{sj} \cap D_{V'(s)}} f(x, y) d(x, y) - \varepsilon_{i_0}. \text{ D'ailleurs, } \sum_{s=1}^{s_0} \sum_{j=1}^{j_0(s)} (L) \iint_{S_{sj} \cap D_{V'(s)}} \\
 f(x, y) d(x, y) &\geq \sum_{s=1}^{s_0} (L) \iint_{(V_s \times Y_{s'}) \cap (D_{V'(s)} - D_{i(s)})} f(x, y) d(x, y) - \left| \sum_{s=1}^{s_0} (L) \iint_{(V_s \times Y_{s'}) \cap D_{i(s)}} \right. \\
 &\left. f(x, y) d(x, y) \right| - \left| \sum_{s=1}^{s_0} (L) \iint_{(V_s \times (W_s - Y_{s'})) \cap D_{V'(s)}} f(x, y) d(x, y) \right| \\
 &> \left( h_0 \times \frac{k_0}{4} \right) - \frac{\varepsilon_{i_1}}{2} - \frac{\varepsilon_{i_1}}{2} = \frac{h_0 k_0}{4} - \varepsilon_{i_1}. \text{ Car, on a } \sum_{s=1}^{s_0} \mu_1(Y_s - \bigcup_{j=1}^{j_0(s)} K_j^s) < k_0/2, \\
 \text{par suite } \sum_{s=1}^{s_0} \mu_1(Y_{s'}) &= \sum_{s=1}^{s_0} \mu_1(Y_s) - \sum_{s=1}^{s_0} \mu_1(Y_s - \bigcup_{j=1}^{j_0(s)} K_j^s) > \frac{3}{4} k_0 - \frac{k_0}{2} = \frac{k_0}{4}. \text{ On} \\
 \text{a, de plus, pour tout } y \in Y_{s'} \text{ (} &s = 1, 2, \dots, s_0), (L) \int_{(D_{V'(s)} - D_{i(s)}) \cap (V_{st} \times \{y\})} f(x, y) dx > h_0. \text{ En effet, en vertu du Théorème de Fubini, on a} \\
 \sum_{s=1}^{s_0} (L) \iint_{(V_s \times Y_{s'}) \cap (D_{V'(s)} - D_{i(s)})} &f(x, y) d(x, y) > h_0 k_0 / 4. \text{ D'après } \delta^*, \text{ on a} \\
 \left| \sum_{s=1}^{s_0} (L) \iint_{(V_s \times Y_{s'}) \cap D_{i(s)}} f(x, y) d(x, y) \right| &< \varepsilon_{i_1} / 2. \text{ Enfin, on a } \left| \sum_{s=1}^{s_0} (L) \iint_{(V_s \times (W_s - Y_{s'})) \cap D_{V'(s)}} \right. \\
 &\left. f(x, y) d(x, y) \right| < \varepsilon_{i_1} / 2, \text{ puisque } \sum_{s=1}^{s_0} \mu_1(W_s - Y_{s'}) < \delta \text{ et} \\
 i'(s) \leq i^*. \text{ Conséquemment, } |F(S)| &> \frac{h_0 k_0}{4} - (\varepsilon_{i_0} + \varepsilon_{i_1}) > \frac{h_0 k_0}{4} - \frac{h_0 k_0}{8} = \frac{h_0 k_0}{8}, \\
 \text{contrairement à } |F(S)| &< \frac{h_0 k_0}{8}.
 \end{aligned}$$

En effet, pour tout point  $y$  de  $\text{proj.}_y(R_0)$  n'appartenant pas à  $W_0$ , où  $W_0$  est un ensemble de mesure ( $\mu_1$ ) nulle, il y a  $\lim_{i \rightarrow \infty} (L) \int_{D_i^y} f(x, y) dx$ ,  $f(x, y)$  est intégrable au sens de Denjoy comme fonction de  $x$  dans  $\text{proj.}_x(R_0)$  et  $(D) \int_0^1 f(x, y) dx = \lim_{i \rightarrow \infty} (L) \int_{D_i^y} f(x, y) dx$ .

Passons maintenant à la démonstration de 2). On pose

$$f_i(y) = \begin{cases} (L) \int_{D_i^y} f(x, y) dx & \text{pour tout } y \in \text{proj.}_y(R_0) - W_0, \\ 0 & \text{pour tout } y \in W_0, \end{cases}$$

$$f(y) = \begin{cases} (D) \int_{D_i^y} f(x, y) dx & \text{pour tout } y \in \text{proj.}_y(R_0) - W_0, \\ 0 & \text{pour tout } y \in W_0, \end{cases}$$

Puisqu'alors  $f(y) = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(y)$  et  $f(y), f_i(y)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) sont mesurables ( $\mu_1$ ), il y a, en vertu du Théorème d'Egoroff, une suite  $M_i'$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) d'ensembles, de total  $\text{proj.}_y(R_0)$ , jouissant des propriétés:  $M_0'$  est l'ensemble de mesure  $\mu_1$  nulle,  $M_i'$  est fermé pour tout  $i = 1, 2, \dots$ ,  $M_{i+1}' \supseteq M_i'$  pour tout  $i = 1, 2, \dots$  et la convergence de  $\{f_i(y)\}$  vers  $f(y)$  dans  $M_i'$  est uniforme pour tout  $i = 1, 2, \dots$ .

Soit  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) une suite d'ensembles mentionnée à Lemme 3 pour la fonction  $f(x, y)$ . Posons  $X_0 = \text{proj.}_y(R_0) - \bigcap_{i=1}^{\infty} \text{proj.}_y(D_i)$ .  $M_i = \{(\text{proj.}_y(B_i) \cap X_0) \cup \text{proj.}_y(D_i)\} \cap \{M_0' \cup M_i'\}$ ,  $N_i = \text{proj.}_y(D_i) \cap M_i'$  pour tout  $i = 1, 2, \dots$ . On peut voir aussitôt que  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) est la suite non-décroissante d'ensembles telle que  $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i = \text{proj.}_y(R_0)$  et que  $N_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) est la suite non-décroissante d'ensembles fermés telle que  $M_i \supseteq N_i$ ,  $\mu_1(\text{proj.}_y(R_0) - \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i) = 0$ . On voit de plus que  $f(y)$  est sommable sur tout  $N_i$ . Car, puisque la convergence de  $\{f_j(y)\}$  vers  $f(y)$  dans  $N_i$  ( $\subseteq M_i'$ ) est uniforme, il y a pour tout  $\varepsilon > 0$  un  $j_0 = j_0(\varepsilon)$  tel que  $|f(y) - f_{j_0}(y)| < \varepsilon$  pour tout  $y \in N_i$ , de sorte que  $|f(y)| \leq |f_{j_0}(y)| + \varepsilon$  pour tout  $y \in N_i$ . De plus, puisque  $f_{j_0}(y)$  est intégrable sur  $N_i$ , il en est de même de  $f(y)$ .

Conséquemment, il suffit de montrer 2) de la définition 1. Pour un indice  $i$  et  $\varepsilon > 0$ , il y a  $i_0 = i_0(i, \varepsilon)$  tel que  $i_0 \geq i$ ,  $\varepsilon_{i_0} < \varepsilon/5$  et  $|f(y) - f_{i_0}(y)| < \varepsilon/5$  pour tout  $y \in M_i - M_0'$ . Soit  $\eta(i, \varepsilon)$  un nombre positif tel que  $\mu_2(E) < \eta(i_0, \varepsilon)$  entraîne  $|(L) \iint_{E \cap D_{i_0}} f(x, y) d(x, y)| < \varepsilon/5$ . Soit  $\eta^*(i, \varepsilon)$  un nombre positif tel que  $\mu_1(E) < \eta^*(i, \varepsilon)$  entraîne  $|(L) \int_{E \cap N_i} f(y) dy| < \varepsilon/5$ . Posons  $\delta'(i, \varepsilon) = \min(\kappa_{i_0}, \rho(i, \varepsilon/5), \eta(i_0, \varepsilon), \eta^*(i, \varepsilon))$ , où  $\rho(i, \varepsilon/5)$  le nombre mentionné à Lemme 3. Soit  $I_t$  ( $t = 1, 2, \dots, t_0$ ) un système élémentaire dans  $\text{proj.}_y(R_0)$  tel que  $I_t \cap M_i \neq \emptyset$  pour tout  $t$ ,  $\mu_1(\bigcup_{t=1}^{t_0} I_t - M_i) < \delta'(i, \varepsilon)$  et  $\text{norm}(I_t) < 1/i$  pour tout  $t$ . Montrons que  $|\sum_{t=1}^{t_0} G(I_t) - \sum_{t=1}^{t_0} (L) \int_{I_t \cap N_i} f(y) dy| < \varepsilon$ , où  $G(I) = F(I^*)$ ,  $I^* = \text{proj.}_x(R_0) \times I$ . Désignons par  $I_{1t}$  ( $t = 1, 2, \dots, t_1$ ) tous les intervalles  $I_t$  tels que  $I_t \cap \text{proj.}_y(D_i) \neq \emptyset$  parmi des  $I_t$  ( $t = 1, 2, \dots, t_0$ ) et par  $I_{2t}$  ( $t = 1, 2, \dots, t_2$ ) tous les autres intervalles.

1°) Pour  $I_{2t}$  ( $t = 1, 2, \dots, t_2$ ):  $\mu_1(\bigcup_{t=1}^{t_2} I_{2t}) = \mu_1(\bigcup_{t=1}^{t_2} I_{2t} - M_i) < \delta'(i, \varepsilon) = \rho(i, \varepsilon/5)$ . Posons  $I_{2t}^* = \text{proj.}_x(R_0) \times I_{2t}$  ( $t = 1, 2, \dots, t_2$ ). On a alors  $I_{2t} \cap \text{proj.}_y(B_i) \neq \emptyset$  et  $\text{norm}(I_{2t}) < 1/i$ . Par suite de Lemme 3 on a  $|\sum_{t=1}^{t_2} F(I_{2t}^*)| < \varepsilon/5$ . Il en résulte  $|\sum_{t=1}^{t_2} (L) \int_{I_{2t} \cap N_i} f(y) dy| < \varepsilon/5$ , puisque  $\mu_1(\bigcup_{t=1}^{t_2} I_{2t}) < \delta'(i, \varepsilon) \leq \eta^*(i, \varepsilon)$ . En effet,  $|\sum_{t=1}^{t_2} G(I_{2t}) - \sum_{t=1}^{t_2} (L) \int_{I_{2t} \cap N_i} f(y) dy| < (\varepsilon/5) \times 2 = 2\varepsilon/5$ .

2°) Pour  $I_{1t}$  ( $t=1, 2, \dots, t_1$ ):  $|\sum_{t=1}^{t_1} G(I_{1t}) - \sum_{t=1}^{t_1} (L) \int_{I_{1t} \cap N_i} f(y) dy| \leq |\sum_{t=1}^{t_1} G(I_{1t}) - \sum_{t=1}^{t_1} (L) \int_{I_{1t}} f_{i_0}(y) dy| + |\sum_{t=1}^{t_1} (L) \int_{I_{1t} - N_i} f_{i_0}(y) dy| + |\sum_{t=1}^{t_1} (L) \int_{I_{1t} \cap N_i} (f(y) - f_{i_0}(y)) dy|$

$-f_{i_0}(y)) dy|$ . On a  $|\sum_{t=1}^{t_1} G(I_{1t}) - \sum_{t=1}^{t_1} (L) \int_{I_{1t}} f_{i_0}(y) dy| = |\sum_{t=1}^{t_1} F(I_{1t}^*) - \sum_{t=1}^{t_1} (L) \int_{I_{1t}^* \cap D_{i_0}} f(x, y) d(x, y)| < \varepsilon_{i_0} < \varepsilon/5$ , puisque  $I_{1t} \cap \text{proj.}_y(A_{i_0}) \neq 0$  pour tout  $t$ ,  $\text{norm}(I_{1t}) < \kappa_{i_0}$  pour tout  $t$  et  $\mu_1(\bigcup_{t=1}^{t_1} I_{1t} - \bigcup_{t=1}^{t_1} (I_{1t} \cap \text{proj.}_y(D_{i_0}))) \leq \mu_1(\bigcup_{t=1}^{t_1} I_{1t} - M_i) < \delta'(i, \varepsilon) \leq \kappa_{i_0}$ . On a  $|\sum_{t=1}^{t_1} (L) \int_{I_{1t} \cap N_i} (f(y) - f_{i_0}(y)) dy| < \varepsilon/5$ , puisque  $|f(y) - f_{i_0}(y)| < \varepsilon/5$  pour tout  $y \in N_i$ . Enfin, on a  $|\sum_{t=1}^{t_1} (L) \int_{I_{1t} - N_i} f_{i_0}(y) dy| = |\sum_{t=1}^{t_1} (L) \iint_{(I_{1t} - N_i)^* \cap D_{i_0}} f(x, y) d(x, y)| < \varepsilon/5$ , où  $(I_{1t} - N_i)^* = \text{proj.}_x(R_0) \times (I_{1t} - N_i)$ , puisque  $\mu_1(\bigcup_{t=1}^{t_1} I_{1t} - N_i) = \mu_1(\bigcup_{t=1}^{t_1} I_{1t} - M_i) < \delta'(i, \varepsilon) \leq \eta(i, \varepsilon)$ . Conséquemment, il en résulte que  $|\sum_{t=1}^{t_1} G(I_{1t}) - \sum_{t=1}^{t_1} (L) \int_{I_{1t} \cap N_i} f(y) dy| < (\varepsilon/5) \times 3$ . Évidemment 1°) et 2°) nous donnons le résultat voulu.

Quant à la propriété 3) de ce théorème on peut la voir dans la démonstration de 1).

Remarque (2). Pour traiter la cas où  $n_0 > 2$ , il suffit de poser  $M_i = \{(\text{proj.}_y(B) \cap X_0) \cup \text{proj.}_y(D_{n(i)})\} \cap \{M'_0 \cup M'_i\}$ ,  $N_i = \text{proj.}_y(D_{n(i)}) \cap M'_i$  pour tout  $i = 1, 2, \dots$  dans la démonstration de 2) du Théorème 6 (voir p. 101), où  $n(i)$  est un indice tel que  $0 \leq n(i) \leq n(i')$  pour tout  $i < i'$  et qu'on a  $D_{n(i)} \subseteq A_{n(i)} \subseteq B_i$  (pour  $n(i) = 0$ , on pose  $D_{n(i)} = A_{n(i)} = 0$ )<sup>11)</sup>.

(Reçu le 25 Mars, 1955)

11) Voir Remarque (1).