Osaka Mathematical Journal
Vol. 7, No. 1, June, 1955.

Sur une Totalisation dans les Espaces de Plusieurs Dimensions. I

By Shizu ENOMOTO

Le but principal de ce mémoire est l'extension de l'intégrale au sens de Denjoy (Denjoy-Perron) dans l'espace (euclidien) d'une dimension à l'espace de plusieurs dimensions. Les études dans cette direction ont été déjà données par MM. M. Krzyański[1], J. Ridder[2], S. Kempisty[3] et M. Romanowski[4]. Comme totalisation d'une fonction de point définie sur un intervalle de l'espace euclidien de n dimensions, ces auteurs ont fait appel à la notion d'une fonction d'intervalle. Nous allons aussi employer cette notion.

Comme on verra dans § 2, il y a, pour une fonction $f(x)$ intégrable au sens de Denjoy sur un intervalle I, une suite F_n $(n=1, 2, \cdots)$ d'ensembles fermés telle que les intégrales de $f(x)$ au sens de Lebesgue sur F_n $(n=1, 2, \cdots)$ convergent avec $n \to \infty$ vers l'intégrale au sens de Denjoy de $f(x)$ sur I. Conséquemment, si l'on prend l'intégrale au sens de Lebesgue comme la base de totalisation d'une fonction, cette suite peut être considérée comme une suite fondamentale, qui donne une manière d'approximation par des intégrales au sens de Lebesgue pour la totalisation au sens de Denjoy.

Dans § 3, nous donnerons une totalisation telle que les valeurs des fonctions d'intervalles, qui sont données comme l'intégrale ($\mathfrak{D}$), peuvent être approchées aussi bien qu'on veut par celles des intégrales au sens de Lebesgue. Notre totalisation sera l'extension de l'intégration au sens de Denjoy de l'espace d'une dimension et jouira de toutes les propriétés principales qu'on attribue aux intégrales.

D'abord, dans § 1, nous étudierons une propriété d'une suite des ensembles fermés dont la somme couvre un intervalle d'un espace

---

1) Krzyański: Sur les fonctions absolument continues généralisées de deux variables, C. R. de Paris, **198** (1934).

2) J. Ridder: Über Denjoy-Perron Integration von Funktionen zweier Variablen, C. R. de Varsovie **28** (1935).

3) S. Kempisty: [1] Sur les fonctions absolument continues d'intervalle, Fund. Math. **27** (1936): [2] Fonctions d'intervalle non additives, Actuarités Scientifiques et Industrielles (1939).

4) M. Romanowski: [1] Intégrale de Denjoy dans l'espace abstrait, Recueil Math. Moscou, 8 (1941); [2] Intégrale de Denjoy dans l'espace à n dimensions, ibid. **9** (1941).

euclidien d'une ou plusieurs dimensions. Cette propriété jouera un rôle capital dans la théorie de l'integrale ($\mathfrak{D}$)—surtout de l'intégrale ($\mathfrak{D}$) multiple—qui sera définie dans § 3. Dans § 2, nous étudierons les propriétés de l'intégrale au sens de Denjoy pour l'espace d'une dimension, en examinant les relations avec l'intégrale au sens de Lebesgue. Ces propriétés elles-mêmes caractérisent l'intégrale au sens de Denjoy. Dans § 3, nous donnerons la définition de l'intégrale ($\mathfrak{D}$), qui sera une totalisation d'une fonction $f(p)$ définie sur un intervalle de l'espace de plusieurs dimensions. Dans § 4 nous montrerons que l'intégrale ($\mathfrak{D}$) peut être regardée comme l'intégrale multiple des intégrales au sens de Denjoy d'une dimension.

L'esquisse de cette étude pour le cas de 2 dimension a été déjà publiée sans démonstration[5].

NOTATIONS et TERMINOLOGIES.

On entend par E_n un espace euclidien à n dimensions composé des points $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dont les coordonnées sont $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

Étant donné un système $a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_n, b_n$ de $2n$ nombres réels tels que $a_i < b_i$ pour $i=1, 2, \cdots, n$, on appelle intervalle $I=[a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_n, b_n]$ de l'espace E_n l'ensemble de tous les points $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, où $a_i \leq x_i \leq b_i$ pour tout $i=1, 2, \cdots, n$. On appelle le plus grand des nombres $b_1-a_1, b_2-a_2, \cdots, b_n-a_n$ la norm de l'intervalle I, et la désigne par *norm* (I).

Étant donné un système $a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_n, b_n$ de $2n$ nombres réels tels que $a_i \leq b_i$ pour tout $i=1, 2, \cdots, n$ et qu'il y a m indices tels que $a_i=b_i$, on appelle notamment intervalle de $n-m$ dimensions dans E_n ou simplement celui de $n-m$ dimensions l'ensemble de tous les points $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ où $a_i \leq x_i \leq b_i$ pour tout $i=1, 2, \cdots, n$, et le désigne brièvement $[a_{i_1}, b_{i_1}; a_{i_2}, b_{i_2}; \cdots; a_{i_{n-m}}, b_{i_{n-m}}]$ où $a_{i_k} \neq b_{i_k}$ pour tout $k=1, 2, \cdots, n-m$.

Pour un ensemble quelconque de points A, désignons par $\bar{A}$ son adhérence et par A° son intérieur. Désignons par $A-B$ la différence de deux ensembles A et B, par $A \bigcup B$ ou $A+B$ leur réunion et par $A \bigcap B$ leur intersection. De même, $\bigcup_\lambda A_\lambda$ désigne la réunion des A_λ et $\bigcap_\lambda A_\lambda$ leur intersection. Désignons par $\{p\}$ l'ensemble réduit au seul point p.

5) Shizu Enomoto: Notes sur l'intégration. I–Quelques Propriétés des Fonctions d'Intervalle, Proc. Japan Acad. **30**, 176 (1954); II–Une Propriéte du Recouvrement Fermé de l'Intervalle, Proc. Japan Acad., 30, 289 (1954); III–Théorème de Fubini, Proc. Japan Acad. **30**, 437 (1954).

Nous dirons que les intervalles I_i $(i = 1, 2, \cdots, i_0)$ tels que $(I_i)^\circ \frown (I_{i'})^\circ = 0$ pour $i \neq i'$ n'empiètent pas les uns sur les autres. Pour un intervalle $[a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_n, b_n]$ de E_n on appelle notamment m^e–réseau dans I la famille d'intervalles $\Big[a_1 + \frac{k_1(b_1-a_1)}{m},\ a_1 + \frac{(k_1+1)(b_1-a_1)}{m};$ $a_2 + \frac{k_2(b_2-a_2)}{m},\ a_2 + \frac{(k_2+1)(b_2-a_2)}{m}; \cdots; a_n + \frac{k_n(b_n-a_n)}{m},\ a_n + \frac{(k_n+1)(b_n-a_n)}{m}\Big]$, où k_i est le nombre naturel tel que $0 \leq k_i \leq m-1$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, les intervalles étant dits les mailles du m^e–réseau. On le désigne par $\mathfrak{R}_m(I)$ pour tout $m = 1, 2, \cdots$.

Nous pouvons considérer, comme on sait bien, l'espace E_n comme l'espace produit $E_{n_1} \times E_{n_2}$ de E_{n_1} par E_{n_2} pour n_1, n_2 tels que $n_1 + n_2 = n$, c.–à–d. l'espace composé des couples (p, q) dont le premier p est un point quelconque de E_{n_1} et le sécond q un point quelconque de E_{n_2}. Pour un ensemble A quelconque de E_n, on entend par $\underset{E_{n_1}}{proj._x}(A)$ la première projection de A sur E_{n_1} et par $\underset{E_{n_2}}{proj._y}(A)$ la seconde projection de A sur E_{n_2}. Pour un point p de E_{n_1}, on écrit par A^p l'ensemble des points (p, q') tels que $(p, q') \in A$. Pour un point q de E_{n_2}, on écrit de même par A^q l'ensemble des points $(p'\ q)$ tels que $(p', q) \in A$. En particulier, si $n_1 = 1$, *resp.* $n_2 = 1$, on écrit simplement par A^x et $proj._x(A)$, *resp.* A^y et $proj._y(A)$, aux lieux des A^p et $\underset{E_{n_1}}{proj._x}(A)$, *resp.* A^q et $\underset{E_{n_2}}{proj._y}(A)$. Pour des ensembles A et B tels que $A \leq E_{n_1}$ et $B \leq E_{n_2}$, désignons par $A \times B$ l'ensemble produit de A par B.

On entend par $\mu_n(A)$ la mesure d'ensemble A de l'espace E_n mesurable au sens de Lebesgue. En particulier, on désigne par $|I|$ la mesure $\mu_n(I)$ pour un intervalle I. On écrit l'intégrale d'une fonction $f(p)$ sommable (au sens de Lebesgue) par la notation $(L) \int_A f(p)\, dp$ ou $(L) \iint \cdots \int_A f(x_1, \cdots, x_n)\, d(x_1, \cdots, x_n)$. Dans le cas où une fonction $f(x)$ de E_1 est intégrable au sens de Denjoy (Denjoy-Perron), on écrit l'intégrale de $f(x)$ par $(D) \int_A f(x)\, dx$.

Ω désigne le premier des nombres ordinaux de la troisième classe.

§ 1. Une propriété du recouvrement fermé de l'intervalle.

D'abord, nous allons étudier une propriété d'une suite des ensembles fermés, où la somme couvre un intervalle contenu dans un espace euclidien d'une ou plusieurs dimensions. Elle jouira un rôle capital dans la théorie, particulièrement pour l'intégrale multiple, de l'intégrale $(\mathfrak{D})$, qui sera donné dans § suivant de ce mémoire comme une extension de l'intégrale au sens Denjoy (Denjoy-Perron) d'une dimension aux espaces de plusieurs dimensions.

Lemme 1. *Soit J_0 un intervalle de l'espace E_1. Soit M_n $(n=1, 2, \cdots)$ une suite quelconque non-décroissante des ensembles fermés de total J_0. Alors, tout sous-intervalle J de J_0 possède la propriété (A_1) pour la suite M_n $(n=1, 2, \cdots)$ et une suite quelconque ε_n $(n=1, 2, \cdots)$ telle que $\varepsilon_n \downarrow 0$, c.-à-d.*
il y a une suite non-décroissante des ensembles fermés $F_{n_i m_i}(J)$ $(i=1, 2, \cdots)$ de total J, où $F_{n_i m_i}(J) \leqq M_{m_i}$ $(i=1, 2, \cdots)$ et $n_i < m_i < n_{i+1}$ pour tout i, et qui possède la propriété suivante:

Si $F_{n_i m_i}(J)$ n'est pas identique à J, il possède la propriété (B_1) pour M_n $(n=1, 2, \cdots)$ et ε_n $(n=1, 2, \cdots)$—on entend par là que la suite $\{F_{n_i m_i}\}$ satisfait à la proposition suivante:
la suite des intervalles J_j $(j=1, 2, \cdots)$ contigus à l'ensemble formé des points de $F_{n_i m_i}(J)$ et d'extrémités de J se peut classifier en un nombre $m_i - n_i + 1$ des suites des intervalles J_{kj} $(j=1, 2, \cdots)$, où $n_i \leqq k \leqq m_i$ et J_{kj}, pouvant être vide, satisfont aux conditions suivantes pour tout indice k;

1°) $\sum_{j=1}^{\infty} |J_{kj}| < \varepsilon_k$.

2°) $(J_{kj})^\circ \frown M_k = 0$ *pour tout* $j=1, 2, \cdots$.

3°) *L'un au moins des extrémités d'intervalle J_{kj}, qui sera dit le point caractéristique de J_{kj}, appartient à M_k pour tout $j=1, 2, \cdots$.*

Dans le cas de plusieurs dimensions on y peut donner la forme suivante:

Lemme 2. *Soit R_0 un intervalle de l'espace E_{n_0} $(n_0 \geqq 2)$. Soit M_n une suite quelconque non-décroissante des ensembles fermés de total R_0. Alors, tout sous-intervalle R de R_0 possède la propriété (A_{n_0}) pour la suite M_n $(n=1, 2, \cdots)$ et une suite quelconque ε_n $(n=1, 2, \cdots)$ telle que $\varepsilon_n \downarrow 0$, c.-à-d. il y a une suite $F_{n_i m_i}(R)$ non-décroissante des ensemble fermés, où $F_{n_i m_i} \leqq M_{m_i}$ $(i=1, 2, \cdots)$ et $n_i < m_i < n_{i+1}$ pour tout i, possédant les propriétés suivantes:*

Posons $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} \underset{E_{n_0-1}}{proj._x}(F_{n_i m_i}(R))$ *et* $Z = \underset{E_{n_0-1}}{proj._y}(R) - Y$, *on a alors*

1°) $\mu_{n_0-1}(Z) = 0$.

2°) *pour tout point q de Y, $(F_{n_i m_i}(R))^q$ n'étant pas identique à R^q, l'ensemble fermé $(F_{n_i m_i}(R))^q$ possède la proprété (B_1) pour $(M_n)^q$ $(n=1, 2, \cdots)$ et ε_n $(n=1, 2, \cdots)$.*

3°) $\bigcup_{i=1}^{\infty} (F_{n_i m_i}(R))^q = R^q$ *pour tout point q de Y.*

Nous allons donner la démonstration de Lemme 2 seulement pour le cas où $n_0 = 2$, parce qu'on peut faire de la même manière pour l'autre cas de Lemme 2 ou pour Lemme 1.

Démonstration. i) Si R possède la propriété (A_2), il en est de même d'un sous-intervalle R' de R: Car, soient B_1 et B_2 deux côtés de R' parallèles à l'axe y. Posons $Y_n = proj._y(B_1 \frown M_n) \frown proj._y(B_2 \frown M_n)$ et $Y_n^* = proj._x(R') \times Y_n$. Alors, il en résulte évidemment que la suite des ensembles $F_{n_i m_i}(R') = F_{n_i m_i}(R) \frown Y_{n_i}^*$ jouit de toutes les propriétés voulues.
ii) Soit R un intervalle tel que son intérieur soit contenu dans la somme d'un ensemble fermé F et une suite de l'intervalles R_j $(j = 1, 2, \cdots)$, n'empiétant pas les uns sur les autres et n'appartenant aucun point commun à F. Si, de plus, R_j possède la propriété (A_2) pour tout j et si F est contenu dans certain M_{m_0}, alors R jouit de la propriété (A_2): Il suffit évidemment de montrer le cas où $F \leq R$ et $R_j^\circ \leq R^\circ$ pour tout j. Divisons R_j en la suite d'intervalles R_{jk} $(k = 1, 2, \cdots)$ comme fig. 1.

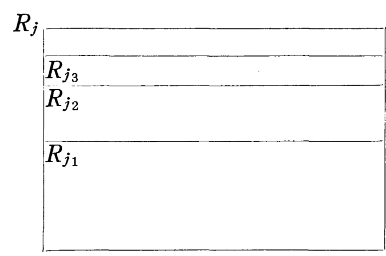

Fig. 1

Pour R_j, soit $F_{n_{jt} m_{jt}}(R_j)$ $(t = 1, 2, \cdots)$ une suite d'ensembles fermés possédant la propriété (A_2) pour la suite $\varepsilon_n \downarrow 0$ donnée d'avance. Pour la brièveté de la démonstration, soient $(F_{n_{jt} m_{jt}}(R_j))^y \frown B_{j1} \neq 0$ et $(F_{n_{jt} m_{jt}}(R_j))^y \frown B_{j2} \neq 0$ pour tout point y de $proj._y(F_{n_{jt} m_{jt}}(R_j))$, où B_{j_1} et B_{j_2} sont les deux côtés de R_j parallèles à l'axe y, puisque cela se peut bien. Dans la suite, désignons simplement R_{jk} $(j = 1, 2, \cdots ; k = 1, 2, \cdots)$ par Q_j $(j = 1, 2, \cdots)$. Posons $F_{n_{jt} m_{jt}}(Q_j) = F_{n_{j't} m_{j't}}(R_{j'}) \frown Q_j$ $(t = 1, 2, \cdots)$, où $R_{j'}$ est l'intervalle contenant Q_j. La suite $F_{n_{jt} m_{jt}}(Q_j)$ $(t = 1, 2, \cdots)$ possède évidemment la propriété (A_2) pour $\varepsilon_n \downarrow 0$.

Nous allons maintenant montrer l'existence d'une suite $F_{n_i m_i}(R)$ $(i = 1, 2, \cdots)$ possédant les propriétés voulues pour R. Définissons des indices n_i, m_i $(i = 1, 2, \cdots)$ et une suite des nombres naturels $k(i)$ $(i = 1, 2, \cdots)$ en utilisant la méthode d'induction.

1′) Soient $n_0 = 0$, m_0 le nombre déterminé d'avance comme $M_{m_0} \geq F$ et $k(0) = 0$.

2′) Supposé que n_{i-1}, m_{i-1} et $k(i-1)$ soient définis, nous allons définir les nombres n, m et $k(i)$: Soit $k(i)$ un nombre naturel tel que $k(i) > k(i-1)$ et $\mu_2(R - (\bigcup_{j=1}^{k(i)} Q_j \cup F)) < (\varepsilon_{m_{i-1}}/2^{m_{i-1}+1})^2$.
Considérons une suite des indices

$m_{i-1}+1<n_1, {}_{t_{1i}}<m_1, {}_{t_{1i}}<n_2, {}_{t_{2i}}<m_2, {}_{t_{2i}}<\cdots<n_{k(i)}, {}_{t_{k(i)i}}<m_{k(i)}, {}_{t_{k(i)i}}$
tels que

$$\mu_1(proj._y(R)-proj._y(F_{n_j, t_{ji} m_j, t_{ji}}(Q_j)) < \frac{\varepsilon_{m_{i-1}}}{N_i \times 2^{m_{i-1}+1}} \quad \text{pour tout } j =$$

$1, 2, \cdots, k(i)$, où $N_i = \sum_{n=1}^{k(i)} \sum_{r=1}^{n} ({}_nC_r)$.
Posons $n_i = m_{i-1}+1$ et $m_i = m_{k(i)}, {}_{t_{k(i)i}}$.

Soient y un point quelconque de $proj._y(R)$ et $g(y)$ la ligne droite parallèle à l'axe x et qui passe par le point $(0, y)$. Considérons, pour tout i, le système composé des intervalles $Q_{j'}$ tels que $Q_{j'} \cap g(y) \neq 0$ et $Q_{j'} \in \{Q_j \ (j=1, 2, \cdots, k(i))\}$. Désignons, pour tout i, par $\mathfrak{P}_i$ l'ensemble de tous les systèmes. On écrit un élément de $\mathfrak{P}_i$, par P_i: $(Q_{j_1}(P_i)$, $Q_{j_2}(P_i), \cdots, Q_{j_{h(P_i)}}(P_i))$. Le nombre de $\mathfrak{P}_i$ set $\leq N_i$.
Posons maintenant:

$$E_i = \left\{ y\,;\, y \in proj._y(R^\circ)\,,\ \mu_2((R)^y - (\bigcup_{j=1}^{k(i)} Q_j \cup F)^y) \leq \frac{\varepsilon_{m_{i-1}}}{2^{m_{i-1}+1}} \right\}$$

S_i soit un sous-ensemble fermé de E_i tel que $\mu_1(E_i - S_i) < \frac{\varepsilon_{m_{i-1}}}{2^{m_{i-1}+1}}$ et que $S_i' = S_i - (\bigcup_{j=1}^{k(i)} proj._y(Q_j))$ est fermé.

$$T_i = \bigcup_{P_i \in \mathfrak{P}_i} (\bigcap_{h=1}^{h(P_i)} proj._y(F_{n_{j_h}, t_{j_h i}, m_{j_h}, t_{j_h i}}(Q_{j_h}(P_i))))$$

$$U_i = S_i \cap (S_i' \cup T_i)$$

$$V_i = Y_i \cap (\bigcap_{j=i}^{\infty} U_j) \quad \text{où} \quad Y_i = proj._y(B_1 \cap M_i) \cap proj._y(B_2 \cap M_i)\,,$$

B_1, B_2 désignant les deux côtés de R parallèles à l'axe y.

$$V_i^* = proj._x(R) \times V_i.$$

Alors, on peut voir que $F_{n_i m_i}(R) = V_{n_i}^* \cap (\bigcup_{j=1}^{k(i)} F_{n_j, t_{ji} m_j, t_{ji}}(Q_j) \cup M_{n_i})$ $(i=1, 2, \cdots)$ est une suite des ensembles fermés voulues.

On peut facilement tirer de la construction que $F_{n_i m_i}(R)$ est fermé. On a $V_i = Y_i \cap (\bigcap_{j=i}^{\infty} V_j) \leq Y_{i+1} \cap (\bigcap_{j=i+1}^{\infty} U_j) = V_{i+1}$, puisque $Y_i \leq Y_{i+1}$. On a donc $V_{n_i}^* \leq V_{n_{i+1}}^*$ par $n_i < n_{i+1}$. En notant que $k(i) < k(i+1)$ et $t_{ji} < t_{ji+1}$ pour tout $j = 1, \cdots, k(i)$, on peut voir $F_{n_i m_i}(R) \leq F_{n_{i+1} m_{i+1}}(R)$. Il résulte $F_{n_i m_i}(R) \leq M_{m_i}$, puisque $F_{n_j, t_{ji} m_j, t_{ji}}(Q_j) \leq M_{m_j, t_{ji}} \leq M_{m_{k(i)}, t_{k(i)i}}$ $= M_{m_i}$ pour tout $j = 1, \cdots, k(i)$ et $m_i > n_i$.

On a immédiatement $n_i < m_i < n_{i+1}$ pour tout i.

Montrons maintenant $\lim_{i \to \infty} \mu_2(F_{n_i m_i}(R)) = \mu_2(R)$. Pour cela, nous posons $M_i^* = \bigcup_{j=1}^{k(i)} F_{n_j, t_{ji} m_j, t_{ji}}(Q_j)$ pour tout i. En vertu de l'inclusion

$M_{n_i}-M_i^*\supseteq F$, on a d'abord $\lim_{i\to\infty}\mu_2(F_{n_i m_i}(R))=\lim_{i\to\infty}\mu_2(V^*_{n_i}\frown(M_i^*\smile M_{n_i}))$ $=\lim_{i\to\infty}\mu_2(V^*_{n_i}\frown(M_{n_i}-M_i^*))+\lim_{i\to\infty}\mu_2(V^*_{n_i}\frown M_i^*)\geqq\lim_{i\to\infty}\mu_2(V^*_{n_i}\frown F)+\lim_{i\to\infty}\mu_2(V^*_{n_i}$ $\frown M_i^*)$. $\mu_1(proj._y(R)-E_i)\times\frac{\varepsilon_{m_{i-1}}}{2^{m_{i-1}+1}}\leqq\mu_2(R-(\bigcup_{j=1}^{k(i)}Q_j\smile F))<\left(\frac{\varepsilon_{m_{i-1}}}{2^{m_{i-1}+1}}\right)^2$ en vertu de la définition de E_i, on a donc $\mu_1(proj._y(R)-E_i)<\frac{\varepsilon_{m_{i-1}}}{2^{m_{i-1}+1}}$. De plus on a $\mu_1(E_i-S_i)<\frac{\varepsilon_{m_{i-1}}}{2^{m_{i-1}+1}}$. D'ailleurs on a $\mu_1(S_i-U_i)=\mu_1(S_i-(S_i'$ $\smile T_i))=\mu_1(S_i-S_i'\smile\bigcup_{P_i\in\mathfrak{P}_i}^{h(P_i)}(\bigcap_{h=1}^{h(P_i)}proj._y(F_{n_{j_h},t_{j_h i}m_{j_h},t_{j_h i}}(Q_{j_h}))))\leqq\mu_1(proj._y(R)$ $-\bigcup_{P_i\in\mathfrak{P}_i}^{h(P_i)}(\bigcap_{h=1}^{h(P_i)}proj._y(F_{n_{j_h},t_{j_h i}m_{j_h},t_{j_h i}}(Q_{j_h}))))=\mu_1(\bigcap_{P_i\in\mathfrak{P}_i}(\bigcap_{h=1}^{h(P_i)}proj._y(R)$ $-proj._y(F_{n_{j_h},t_{j_h i}m_{j_h},t_{j_h i}}(Q_{j_h}))))\leqq\sum_{P_i\in\mathfrak{P}_i}\sum_{h=1}^{h(P_i)}\mu_1(proj._y(R)-proj._y(F_{n_{j_h},t_{j_h i}m_{j_h},t_{j_h i}}$ $(Q_{j_h}))<\frac{\varepsilon_{m_{i-1}}}{N_i\times 2^{m_{i-1}+1}}\times N_i=\frac{\varepsilon_{m_{i-1}}}{2^{m_{i-1}+1}}$. En effet on a $\mu_1(proj._y(R)-U_i)$ $\leqq\mu_1(proj._y(R)-E_i)+\mu_1(E_i-S_i)+\mu_1(S_i-U_i)<\frac{\varepsilon_{m_{i-1}}}{2^{m_{i-1}+1}}\times 3=\frac{\varepsilon_{m_{i-1}}}{2^{m_{i-1}}}\times\frac{1}{2}$.
D'où on peut tirer $\lim_{i\to\infty}\mu_1(V_i)=\mu_1(proj._y(R))$. Car, on a $\mu_1(proj._y(R)-V_i)$ $=\mu_1(proj._y(R)-(Y_i\frown(\bigcap_{j=i}^{\infty}U_j))\leqq\mu_1(proj._y(R)-Y_i)+\sum_{j=i}^{\infty}\mu_1(proj._y(R)-U_j)$ $\leqq\mu_1(proj._y(R)-Y_i)+\sum_{j=i}^{\infty}((\varepsilon_{m_{j-1}}/2^{m_{j-1}})\times\frac{1}{2})=\mu_1(proj._y(R)-Y_i)+\varepsilon_1/2^i$. On a donc $\lim_{i\to\infty}\mu_2(V_i^*)=\mu_2(R)$. En effect, on a $\lim_{i\to\infty}\mu_2(V^*_{n_i}\frown F)=\mu_2(F)$. D'autre part, on a, pour tout j_0, $\lim_{i\to\infty}\mu_2(V^*_{n_i}\frown M_i^*)=\lim_{i\to\infty}\mu_2(V^*_{n_i}\frown$ $\bigcup_{j=1}^{k(i)}F_{n_j,t_{ji},m_j,t_{ji}}(Q_j))\geqq\lim_{\substack{i\to\infty\\ i>j_0}}\sum_{j=1}^{\infty}\mu_2(V^*_{n_i}\frown F_{n_j,t_{ji},m_j,t_{ji}}(Q_j))=\sum_{j=1}^{j_0}\lim_{\substack{i\to\infty\\ i>j_0}}\mu_2(V^*_{n_i}\frown$ $F_{n_j,t_{ji},m_j,t_{ji}}(Q_j))=\sum_{j=1}^{\infty}\mu_2(Q_j)$.
On a donc $\lim_{i\to\infty}\mu_2(F_{n_i m_i}(R))\geqq\mu_2(F)+\sum_{j=1}^{\infty}\mu_2(Q_j)=\mu_2(R)$. Conséquemment, il en résulte $\lim_{i\to\infty}\mu_2(F_{n_i m_i}(R))=\mu_2(R)$.

Montrons maintenant qu'on a $R^y=\bigcup_{i=1}^{\infty}(F_{n_i m_i}(R))^y$ pour tout y de Y, où $Y=\bigcup_{i=1}^{\infty}proj._y(F_{n_i m_i}(R))$. Il y a pour tout $y\in Y$ un $i_0=i_0(y)$ tel que $proj._y(F_{n_i m_i}(R))\ni y$ pour tout $i\geqq i_0$. On a généralement $R^y=\bigcup_{j=1}^{\infty}(Q_j)^y$ $+F^y+\{p(y),q(y)\}$ pour tout $y\in Y$, où $p(y)=B_1\frown g(y)$ et $q(y)$ $=B_2\frown g(y)$, $g(y)$ désignant la ligne droite parallèle à l'axe x contenant le point $(0,y)$. Il en suffit de prouver de $y\in Y$ tel qu'il y a un $j=j(y)$ tel que $(Q_j)^y\neq 0$. Posons $t'=\max(n_{i_0},j)$, alors $k(t')\geqq j'$ et $k(t')\geqq n_{i_0}$. Il en résulte $y\in proj._y(F_{n_j,t_{jk}m_j,t_{jk}}(Q_j))$ pour tout $k\geqq t'$. On a donc $(R)^y=\bigcup_{i=1}^{\infty}(F_{n_i m_i}(R))^y$.

Or, puisqu'on a $\lim_{i\to\infty}\mu_2(F_{n_im_i}(R))=\mu_2(R)$ et $(R)^y=\bigcup_{i=1}^{\infty}(F_{n_im_i}(R))^y$ pour tout $y\in Y$, il résulte $\mu_1(Z)=0$, où $Z=proj._y(R)-Y$.

Facilement, on pout voir que, en vertu de la construction d'ensembles $F_{n_im_i}(R)$, pour tout $y\in Y$ tel que $(F_{n_im_i}(R))^y$ n'est pas identique à R^y, l'ensemble fermé $(F_{n_im_i}(R))^y$ possède la propriété (B_1) pour $(M_n)^y$ $(n=1, 2, \cdots)$ et ε_n $(n=1, 2, \cdots)$.

iii) En vertu de i), il suffit de prouver que R_0 possède la propriété (A_2). Pour cela, nous allons faire usage de l'induction transfinie.

1°) Pour le cas où $\nu=1$: Puisque $R_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n$, il y a, en vertu de Théorème de Baire, un indice n' et un intervalle $R\leq R_0$ tels que $R\frown M_{n'}=R$. On peut savoir aussitôt que si l'on pose $E_1=R$, alors E_1 possède la propriété (A_2) en posant $F_{n_im_i}(E_1)=E_1$, où $n_i=n'+2i$, $m_i=n_i+1$ $(i=1, 2, \cdots)$.

2°) Pour le cas où $\nu<\Omega$: Supposé que l'ensemble E_μ, possédant les propriétés suivantes, soit défini pour tout $\mu<\nu$.

1′) $E_\mu=\bigcup_{j=1}^{\infty}\mathrm{R}_{\mu j}$, où $R_{\mu j}$ $(j=1, 2, \cdots)$ est une suite des intervalles possédant la propriété (A_2) et n'empiétant pas les uns sur les autres.

2′) $(\bigcup_{\mu'<\mu}E_{\mu'})^\circ\leq(E_\mu)^\circ$, mais $(\bigcup_{\mu'<\mu}E_{\mu'})^\circ\neq(E_\mu)^\circ$.

Nous allons montrer que si $\bigcup_{\mu<\nu}E_\mu\neq R_0$, il y a un ensemble E_ν tel que $E_\mu(\mu<\nu+1)$ possède les propriétés 1′) 2′).

Soit $A=R_0-\bigcup_{\mu<\nu}E_\mu$. Puisqu'alors A est un ensemble G_δ et $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\frown M_n)$, il y a, en vertu de Théorème de Baire, un indice n' et deux intervalles R, R' tels que $(R')^\circ\frown A\neq 0$, $R\geq R'$ et $\overline{A\frown M_{n'}}\geq R^\circ\frown A$.

L'ensemble $\{R_{\mu j};\ \mu<\nu, j=1, 2, \cdots\}$ est dénombrable, puisque $\nu<\Omega$, donc l'ensemble $\bigcup_{\mu<\nu}\bigcup_{j=1}^{\infty}R_{\mu j}$ se divise en les intervalles R_n' $(n=1, 2, \cdots)$ n'empiétant pas les uns sur les autres et tels que pour tout R_n' il y a un R_{nj} contenant R_n'. De plus, divisons tout intervalle R_n' en les intervalles R'_{ni} $(i=0, 1, \cdots i_n)$ tels que $R'_{n0}\leq R'$ et $(R'_{ni})^\circ\frown(R')^\circ=0$ $(i\neq 0)$. Posons $R_{\nu 0}=R'$ et désignons R'_{ni} $(n=1, 2, \cdots;\ i=1, 2, \cdots, i_n)$ par $R_{\nu j}$ $(j=1, 2, \cdots)$. Alors, nous pouvons montrer que $E_\nu=\bigcup_{j=0}^{\infty}R_{\nu j}$ est l'ensemble voulu.

Pour 1′). $R_{\nu j}$ $(j\neq 0)$ est contenu dans certain intervalle $R_{\mu' j'}(\mu'<\nu)$, donc $R_{\nu j}$ $(j\neq 0)$ possède la propriété (A_2). Par conséquent, il suffit de prouver que $R_{\nu 0}$ la possède.

Posons $A^* = R'\frown\bar{A}$, on a alors $M_{n'} \geqq A^*$. Car, on a $\overline{A\frown M_{n'}} \geqq R^\circ\frown A$, de sorte que $\bar{M}_{n'} \geqq \overline{R^\circ\frown A} \geqq (R)^\circ\frown\bar{A} \geqq R'\frown\bar{A} = A^*$. Posons $G = (R')^\circ - A^*$. G étant l'ensemble ouvert, il y a une suite des intervalles J_i $(i = 1, 2, \cdots)$ tels que $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$ et $(J_i)^\circ \frown (J_{i'})^\circ = 0$ $(i \neq i')$. Puisqu'alors on a

$$J_i \leqq (R')^\circ - A^* \leqq R' - A = R'\frown(R_0 - A) = R'\frown(\bigcup_{\mu<\nu} E_\mu) = R'\frown(\bigcup_{\mu<\nu}\bigcup_{j=1}^{\infty} R_{\mu j})$$
$$= R'\frown(\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n') = \bigcup_{n=1}^{\infty}(R'\frown R_n'),$$

où $R'\frown R_n'$ $(n = 1, 2, \cdots)$ est la suite des intervalles possédant la propriété (A_2) et n'empiétant pas les uns sur les autres. J_j la possède selon ii). De plus, on a $(R')^\circ \leqq A^* + \bigcup_{i=1}^{\infty} J_j$, donc R' possède la proyriété (A_2).

Pour (2'). $E_\nu = R_{\nu 0} + \bigcup_{j=1}^{\infty} R_{\nu j} = R' + \bigcup_{\mu<\nu}\bigcup_{j=1}^{\infty} R_{\mu j} = R' + \bigcup_{\mu<\nu} E_\mu = (R'\frown A) + \bigcup_{\mu<\nu} E_\mu$, on a donc $(E_\nu)^\circ \geqq (\bigcup_{\mu<\nu} E_\mu)^\circ$. En outre, puisque $(R')^\circ\frown A \neq 0$, il y a un point p de $(R')^\circ\frown A$, par suite $p \in (R')^\circ = (R_{\nu 0})^\circ \leqq (E_\nu)^\circ$. Pour le point on a de plus $p \bar{\in} (\bigcup_{\mu<\nu} E_\mu)^\circ$ de ce que $p \in A$ et $A\frown(\bigcup_{\mu<\nu} E_\mu) = 0$. Il en résulte $(E_\nu)^\circ \neq (\bigcup_{\mu<\nu} E_\mu)^\circ$.

iiii) Il y a un ν_0 tel que $\nu_0 < \Omega$ et $\bigcup_{\mu<\nu_0} E_\mu = R_0$, puisque $(\bigcup_{\mu'<\mu} E_{\mu'})^\circ \leqq (\bigcup_{\mu'<\mu+1} E_{\mu'})^\circ$ et $(\bigcup_{\mu'<\mu} E_{\mu'})^\circ \neq (\bigcup_{\mu'<\mu+1} E_{\mu'})^\circ$ pour tout $\mu < \nu$. On a alors $R_0 = \bigcup_{\mu<\nu_0} E_\mu = \bigcup_{\mu<\nu_0}\bigcup_{j=1}^{\infty} R_{\mu j}$, où $R_{\mu j}$ $(j = 1, 2, \cdots)$ est une suite, de total E_μ, des intervelles possédant la propriété (A_2), n'empiétant pas les uns sur les autres. En notant que $\bigcup_{\mu<\nu_0}\bigcup_{j=1}^{\infty} R_{\mu j}$ se divise en des intervalles R_k' $(k = 1, 2, \cdots)$ tels que $(R_k')^\circ \frown (R_h')^\circ = 0$ $(k \neq h)$ et R_k' soit contenu dans certain $R_{\mu j}$ pour tout k. On peut voir que R_0 possède la propriété (A_2) par ii).

§ 2. Quelques propriétés de l'intégrale au sens de Denjoy.

Dans ce chapitre, nous allons étudier la propriété qu'elle-même caractérise l'intégrale au sens de Denjoy dans l'espace E_1 et qui est regardée comme une base de l'intégrale que nous dennerons dans le chapitre prochain comme une extension de l'intégration au sens de Denjoy d'une dimension à l'espace de plusieurs dimensions.

D'abord, commençons par montrer la définition dite constructive des intégrales de Denjoy basée sur l'induction transfinie[6].

---

6) S, Saks: Theory of the Integral (1937), p. 254,

Sait $\mathfrak{J}$ une opération intégrale. On appelle le domaine de l'opération intégrale $\mathfrak{J}$ sur un intervalle I_0 l'ensemble de toutes les fonctions intégrables ($\mathfrak{J}$) sur I_0, et le désigne par $\mathfrak{J}(I_0)$. Désignons par $\mathfrak{J}(f; I_0)$ l'intégrale de $f(x)$ sur I_0 pour toute $f(x)$ de $\mathfrak{J}(I_0)$. La borne supérieure des valeurs absolues de $\mathfrak{J}(f; I)$ sur $I \leq I_0$ est désignée par $\mathrm{O}(\mathfrak{J}; f; I_0)$. Deux intégrales $\mathfrak{J}_1$ et $\mathfrak{J}_2$ sont dites compatibles, lorsque $\mathfrak{J}_1(f; I) = \mathfrak{J}_2(f; I)$ pour tout intervalle I et pour toute $f(x)$ intégrable ($\mathfrak{J}_1$) et ($\mathfrak{J}_2$) sur I simultanément. On écrit $\mathfrak{J}_1 \geq \mathfrak{J}_2$, lorsque les deux intégrales sont compatibles et que toute fonction intégrable ($\mathfrak{J}_2$) est intégrable ($\mathfrak{J}_1$).

Soit $\{\mathfrak{J}_\xi\}$ une suite d'opérations intégrales, en général transfinie et telle que $\mathfrak{J}_\xi \leq \mathfrak{J}_\eta$ pour $\xi < \eta$. Nous désignons alors par $\sum_{\xi<\alpha} \mathfrak{J}_\xi$ l'opération intégrale $\mathfrak{J}$ dont le domaine sur un intervalle I, quel que soit l'intervalle I, est la somme des domaines des intégrales $\mathfrak{J}_\xi$ sur I pour $\xi < \alpha$ et qui est définie pour toute fonction $f(x)$ appartenant à son domain sur I par l'égalité $\mathfrak{J}(f; I) = \mathfrak{J}_{\xi_0}(f; I)$, où ξ_0 est le moindre des indices $\xi < \alpha$ tels que $f(x)$ est intégrable ($\mathfrak{J}_\xi$) sur I.

Pour une opération intégrale $\mathfrak{J}$, on désigne par $\mathfrak{J}^C$ l'opération intégrale généralisée ($\mathfrak{J}$) de Cauchy et par $\mathfrak{J}^{H*}$ l'opération intégrale généralisée ($\mathfrak{J}$) de Harnack au sens restreint.

Ceci dit, soit $\{\mathfrak{L}_\xi^*\}$ la suite transfinie, définie par induction à partir de l'intégrale $\mathfrak{L}$ de Lebesgue comme il suit:

$$\mathfrak{L}_0^* = \mathfrak{L}, \quad \mathfrak{L}_\alpha^* = (\sum_{\xi<\alpha} \mathfrak{L}_\xi^*)^{CH*} \quad \text{où} \quad \alpha > 0.$$

Alors, $\mathfrak{D}^* = \sum_{\xi<\Omega} \mathfrak{L}_\xi^* = \mathfrak{L}_\Omega^*$ est l'intégrale de Denjoy (Denjoy-Perron).

Theorème 1. *Soit $f(x)$ une fonction intégrable au sens de Denjoy sur un intervalle $I_0 = [a, b]$ de l'espace E_1. Posons $F(I) = (D)\int_I f(x)\,dx$ pour tout intervalle $I \leq I_0$. Alors pour toute suite ε_n $(n = 1, 2, \cdots)$ des nombres positifs telle que $\varepsilon_n \downarrow 0$, il y a une suite F_n $(n = 1, 2, \cdots)$ non-décroissante, de total I_0, des ensembles fermés satisfaisant aux conditions suivantes:*

1) *$f(x)$ est sommable sur tout F_n.*

2) *À tout ensemble F_n, la condition telle que $I_i \frown F_n \neq 0$ pour tout i entraîne $\left| \sum_{i=1}^{i_0} F(I_i) - \sum_{i=1}^{i_0} (L) \int_{I_i \cap F_n} f(x)\,dx \right| < \varepsilon_n$, quel que soit le système composé des intervalles I_i $(i = 1, 2, \cdots, i_0)$ contenus dans I_0 et n'empiétant pas les uns sur les autres.*

Démonstration. Il suffit de montrer que toute fonction de $\mathfrak{L}_\alpha^*(I_0)$ pour $\alpha < \Omega$ jouit de toutes les propriétés voulues. Nous le démontrons par l'induction.

1°) Pour le cas où $\alpha = 0$: Puisqu'alors $\mathfrak{L}_0^*(I_0) = \mathfrak{L}(I_0)$, il suffit de poser $F_n = I_0$ pour tout n.

2°) Pour le cas où $\alpha < \Omega$: Montrons que si toute fonction de $\mathfrak{L}_\xi^*(I_0)$ pour $\xi < \alpha$ possède les propriétés voulues, on en peut tirer que toute fonction de $\mathfrak{L}_\alpha^*(I_0)$ les possède.

a) Le cas où $f \in (\sum_{\xi<\alpha} \mathfrak{L}_\xi^*)^C(I_0)$: Soit $\{a_1, a_2, \cdots, a_l\}$ l'ensemble des points singuliers[7] $(\sum_{\xi<\alpha} \mathfrak{L}_\xi^*)$ de f dans I_0. En vertu de la continuité de $F(I) = (D)\int_I f(x)\,dx$, il y a une suite J_k^n $(k = 1, 2, \cdots, l+1;\ n = 1, 2, \cdots)$ d'intervalles telle que:

1′) $J_k^n \subseteq (a_{k-1}, a_k)$, où $a_0 = a$, $a_{l+1} = b$,

2′) $J_k^n \subseteq I_k^{n+1}$,

3′) $\mu_1(I_0 - \bigcup_{k=1}^{l+1} J_k^n) < \delta_n$, où δ_n est un nombre positif tel que $|I| < \delta_n$ entraîne $|F(I)| < \varepsilon_n/4l$ pour tout intervalle $I \subseteq I_0$.

Étant $f(x) \in (\sum_{\xi<\alpha} \mathfrak{L}_\xi^*)(J_k^n)$ pour tout n, k, il y a un ξ_k^n tel que $f(x) \in \mathfrak{L}_{\xi_k^n}^*(J_k^n)$ et $\xi_k^n < \alpha$. En vertu de l'hypothèse d'induction, il y a, pour $\varepsilon_n \downarrow 0$ donnée d'avance, une suite non-décroissante F_{km}^n $(m = 1, 2, \cdots)$, de total J_k^n, des ensembles fermés satisfaisant aux conditions suivantes:

1) $f(x)$ est sommable sur tout F_{km}^n.

2) À tout ensemble F_{km}^n, la condition telle que $I_i \cap F_{km}^n \neq 0$ pour tout i entraîne $|\sum_i F(I_i) - \sum_i (L)\int_{I_i \cap F_{km}^n} f(x)\,dx| < \varepsilon_n/4l$, quel que soit le système élémentaire composé des intervalles I_i $(i = 1, 2, \cdots, i_0)$ contenus dans J_k^n et n'empiétant pas les uns sur les autres.

En notant que J_k^{n+1} peut être représanté comme la somme des intervalles J_k^n, I_{k1}^n et I_{k2}^n, n'empiétant pas les uns sur les autres, on peut savoir facilement qu'on y peut choisir $\{F_{km}^n\}$ tel que $F_{km}^n \supseteq F_{km}^{n+1}$. Il en résulte que la suite d'ensembles fermés $F_n = \{a_1, a_2, \cdots, a_l\} \cup \{\bigcup_{k=1}^{l} F_{km}^n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ possède les propriétés voulues.

b) Le cas où $f \in (\sum_{\xi<\alpha} \mathfrak{L}_\xi^*)^{CH*}(I_0)$: Montrons que si toute fonction de $(\sum_{\xi<\alpha} \mathfrak{L}_\xi^*)^C(I_0)$ possède les propriéte voulues, on en peut tirer que toute fonction de $\mathfrak{L}_\alpha^*(I_0)$ les possède. Soit S l'ensemble fermé composé de tous les points singuliers $(\sum_{\xi<\alpha} \mathfrak{L}_\xi^*)^C$ de f dans I_0. Soit J_k $(k = 1, 2, \cdots)$ la suite des intervalles contigus à l'ensemble formé des points de S et d'extrémités de I_0. Puisqu'alors $f(x)$ est intégrable $(\sum_{\xi<\alpha} \mathfrak{L}_\xi^*)^C$ sur S, la

7) S. Saks; ibid. p. 255.

fonction $f_S(x) = C_S(x) f(x) (x \in I_0)$ est intégrable $(\sum_{\xi<\alpha} \mathfrak{L}_\xi^*)^C$ sur I_0, où $C_S(x)$ est la fonction caractéristique d'ensemble S. En effet, il y a une suite non-décroissante F'_{0n} $(n = 1, 2, \cdots)$, de total I_0, des ensembles fermés satisfaisant aux conditions suivantes:

1) $f_S(x)$ est sommable sur tout F'_{0n}.

2) À tout ensemble F'_{0n}, la condition telle que $I_i \frown F'_{0n} \neq 0$ pour tout i entraîne $|\sum_i F_S(I_i) - \sum_i (L) \int_{I_i \cap F'_{0n}} f(x)\,dx| < \varepsilon_n/8$, quel que soit le système élémentaire composé des intervalles I_i $(i = 1, 2, \cdots, i_0)$ contenus dans I_0 et n'empiétant pas les uns sur les autres, où $F_S(I_i) = (D) \int_{I_i} f_S(x)\,dx$ pour tout I_i. f étant intégrable $(\sum_{\xi<\alpha} \mathfrak{L}_\xi^*)^C$ sur J_k pour tout k, il y a une suite non-décroissante F_{kn} $(n = 1, 2, \cdots)$, de total J_k, des ensembles fermés satisfaisant aux conditions suivantes:

1) $f(x)$ est sommable sur tout F_{kn}.

2) À tout ensemble F_{kn}, la condition telle que $I_i \frown F_{kn} \neq 0$ pour tout i entraîne $|\sum_i F(I_i) - \sum_i (L) \int_{I_i \cap F_{kn}} f(x)\,dx| < \varepsilon_n/2^{k+3}$, quel que soit le systéme élémentaire composé des intervalles I_i $(i = 1, 2, \cdots, i_0)$ contenus dans J_k et n'empiétant pas les uns sur les autres.

D'autre part, puisque $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{O}((\sum_{\xi<\alpha} \mathfrak{L}_\xi^*)^C; f; J_k) < \infty$, il y a pour ε_n un k_n tel que $\sum_{k=k_n+1}^{\infty} \mathrm{O}((\sum_{\xi<\alpha} \mathfrak{L}_\xi^*)^C; f; J_k) < \varepsilon_n/8$. On y peut choisir $\{k_n\}$ telle que $k_n > k_{n'}$ pour $n > n'$.

En posant $F_n = F_{0n} + \bigcup_{n=1}^{k_n} F_{kn}$, où $F_{0n} = F'_{0n} \frown S$, nous allons montrer que F_n $(n = 1, 2, \cdots)$ est la suite voulue.

Soit I_i $(i = 1, 2, \cdots, i_0)$ un système élémentaire dans I_0. Désignons par I_i^1 $(i = 1, 2, \cdots, i_1)$ la sous-famille composée des intervalles contenus dans $\bigcup_{k=1}^{k_n} J_k$ et par I_i^2 $(i = 1, 2, \cdots, i_2)$ les autres intervalles de celle-ci. On a alors

$$|\sum_{i=1}^{i_1} F(I_i^1) - \sum_{i=1}^{i_1} (L) \int_{I_i^1 \cap F_n} f(x)\,dx| < \sum_{k=1}^{k_n} ((\varepsilon_n/2^{k+3}) \times 2) < \varepsilon_n/4,$$

$$|\sum_{i=1}^{i_2} F_S(I_i^2) - \sum_{i=1}^{i_2} (L) \int_{I_i^2 \cap F_{0n}} f(x)\,dx| < (\varepsilon_n/8) \times 2 = \varepsilon_n/4.$$

D'autre part, désignons par J_{ij}^2 $(j = 1, 2, \cdots)$ la suite des intervalles contigues à l'ensemble formé des pointes de $S \frown I_i^2$ et d'extrémités de I_i^2. Alors, on a facilement $\sum_{i=1}^{i_2} \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{O}((\sum_{\xi<\alpha} \mathfrak{L}_\xi^*)^C, f; J_{ij}^2) < (\varepsilon_n/8) \times 2 = \varepsilon_n/4$. Selon la définition, on a $F(I_i^2) = F_S(I_i^2) + \sum_{j=1}^{\infty} F(I_{ij}^2)$. En effet, $|\sum_{i=1}^{i_0} F(I_i) - \sum_{i=1}^{i_0} (L)$

$\int_{I_i \cap F_n} f(x)\, dx| \leq | \sum_{i=1}^{i_1} F(I_i^1) - \sum_{i=1}^{i_1} (L) \int_{I_i^1 \cap F_n} f(x)\, dx| + | \sum_{i=1}^{i_2} F(I_i^2) - \sum_{i=1}^{i_2} (L)$ $\int_{I_i^2 \cap F_n} f(x)\, dx| < \varepsilon_n/4 + | \sum_{i=1}^{i_2} (F_S(I_i^2) + \sum_{j=1}^{\infty} F(J_{ij}^2)) - \sum_{i=1}^{i_2} (L) \int_{I_i^2 \cap F_n} f(x)\, dx|$ $\leq \varepsilon_n/4 + |\sum_{i=1}^{i_2} F_S(I_i^2) - \sum_{i=1}^{i_2} (L) \int_{I_i^2 \cap F_{0n}} f(x)\, dx| + | \sum_{i=1}^{i_2} \sum_{j=1}^{\infty} F(J_{ij}^2)| < \varepsilon_n/4 + \varepsilon_n/4$ $+ \varepsilon_n/4 < \varepsilon_n$.

On peut tirer immédiatement de Théorème 1 deux théorèmes suivants.

Théorème 2. *Soit $f(x)$ une fonction intégrable au sens de Denjoy sur un intervalle I_0. Alors, on peut choisir une suite F_n $(n = 1, 2, \cdots)$ non-décroissante, de total I_0, d'ensembles fermés telle que:*

1) $(D) \int_I f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} (L) \int_{I \cap F_n} f(x)\, dx$ *pour tout intervalle* $I \leq I_0$.

2) *Pour toute suite d'intervalles $\{I_i\}$ n'empiétant pas les uns sur les autres et dont il y a un indice n_0 tel que $I_i \frown F_{n_0} \neq 0$ pour tout i, on a*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \{\lim_{n\to\infty} (L) \int_{I_i \cap F_n} f(x)\, dx\} = \lim_{n\to\infty} \{(L) \int_{(\bigcup_i I_i) \cap F_n} f(x)\, dx\}.$$

En particulier, si $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ est un intervalle I, on a

$$(D) \int_I f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{\infty} (D) \int_{I_i} f(x)\, dx.$$

Démonstration. Comme une suite voulue, il suffit de prendre la suite F_n $(n = 1, 2, \cdots)$ mentionnée au Théorème 1 pour $f(x)$ et pour $\varepsilon_n \downarrow 0$. Pour 1): Il y a pour tout sous-intervalle I de I_0 un indice $n' = n'(I)$ tel que $F_{n'} \frown I \neq 0$; on a donc $|(D) \int_I f(x)\, dx - (L) \int_{I \cap F_n} f(x)\, dx|$ $< \varepsilon_n$ pour tout $n \geq n'$. Par suite, on a 1). Pour 2): Quel que soit $\varepsilon > 0$, il y a un indice $n'(\varepsilon)$ tel que $\varepsilon/2 > \varepsilon_{n'(\varepsilon)}$ et $n'(\varepsilon) \geq n_0$. Pour tout $n \geq n'(\varepsilon)$, il y a un nombre $i(n, \varepsilon)$ tel que $| \sum_{i=i'+1}^{\infty} (L) \int_{I_i \cap F_n} f(x)\, dx| < \varepsilon/2$ pour tout $i' \geq i(n, \varepsilon)$. Puisque $I_i \frown F_n \neq 0$ pour tout $i = 1, 2, \cdots$ et $n \geq n_0$, on a, pour tout $i' \geq i(n, \varepsilon)$, $|\sum_{i=1}^{i'} (D) \int_{I_i} f(x)\, dx - \sum_{i=1}^{i'} (L) \int_{I_i \cap F_n} f(x)\, dx| < \varepsilon_n$ $\leq \varepsilon_{n'(\varepsilon)} < \varepsilon/2$. En effet, il en résulte que si $n \geq n'(\varepsilon)$, on a $|\sum_{i=1}^{i'} (D)$ $\int_{I_i} f(x)\, dx - \sum_{i=1}^{\infty} (L) \int_{I_i \cap F_n} f(x)\, dx| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ pour tout $i' \geq i(n, \varepsilon)$, de sorte que $|\sum_{i=1}^{\infty} (D) \int_{I_i} f(x)\, dx - \sum_{i=1}^{\infty} (L) \int_{I_i \cap F_n} f(x)\, dx| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n'(\varepsilon)$. On a donc $\sum_{i=1}^{\infty} (D) \int_{I_i} f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} (\sum_{i=1}^{\infty} (L) \int_{I_i \cap F_n} f(x)\, dx)$. Par suite, de 1) on a $\sum_{i=1}^{\infty}\{\lim_{n\to\infty}(L)\int_{I_i\cap F_n}f(x)\,dx\}=\lim_{n\to\infty}(L)\int_{(\bigcup_i I_i)\cap F_n}f(x)\,dx.$ Il en résulte que $(D)\int_I f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{\infty}(D)\int_{I_i}f(x)\,dx$, quand $\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$ est un intervalle.

Théorème 3. *Soient $f(x)$ une fonction intégrable au sens de Denjoy sur un intervalle I_0 et $F(I)=(D)\int_I f(x)\,dx$ pour tout $I\subseteq I_0$. Alors, il y a une suite F_n $(n=1, 2, \cdots)$ non-décroissante, de total I_0, des ensembles fermés satisfaisant aux conditions suivantes:*

1) *$f(x)$ est sommable sur tout F_n,*

2) *à tout ensemble F_n et tout $\varepsilon>0$, on peut faire correspondre un nombre $\delta(n, \varepsilon)>0$ tel que les conditions suivantes:*

2. 1) *$I_i\cap F_n\neq 0$ pour tout i,*

2. 2) $\mu_1(\bigcup_{i=1}^{i_0}I_i-F_n)<\delta(n, \varepsilon)$

entraînent

$$|\sum_{i=1}^{i_0}F(I_i)-\sum_{i=1}^{i_0}(L)\int_{I_i\cap F_n}f(x)\,dx|<\varepsilon.$$

quel que soit le système composé des intervalles I_i $(i=1, 2, \cdots, i_0)$ contenus dans I_0 et n'empiétant pas les uns sur les autres.

Démonstration. Comme une suite voulue, il suffit de prendre la suite F_n $(n=1, 2, \cdots)$ mentionnée au Théorème 1 pour $f(x)$ et pour une suite $\varepsilon_n\downarrow 0$. Puisque $f(x)$ est sommable sur F_n, il y a pour $\varepsilon>0$ un nombre $\rho(n, \varepsilon)>0$ tel que $\mu_1(E)<\rho(n, \varepsilon)$ entraîne $|(L)\int_{E\cap F_n}f(x)\,dx|<\varepsilon/2$ pour tout ensemble $E\subseteq I_0$. Soit $n'(n, \varepsilon)$ un indice tel que $\varepsilon_{n'(n,\varepsilon)}<\varepsilon/2$ et $n'(n, \varepsilon)\geq n$. Posons $\delta(n, \varepsilon)=\rho(n'(n, \varepsilon), \varepsilon))$. Soit I_i $(i=1, 2, \cdots, i_0)$ un système des intervalles contenus dans I_0 et n'empiétant pas l'un sur l'autre. Vu le Théorème 1, la condition telle que $I_i\cap F_n\neq 0$ pour tout i entraîne $|\sum_{i=1}^{i_0}F(I_i)-\sum_{i=1}^{i_0}(L)\int_{I_i\cap F_{n'(n,\varepsilon)}}f(x)\,dx|<\varepsilon_{n'(n,\varepsilon)}<\varepsilon/2$, puisque $F_{n'(n,\varepsilon)}\supseteq F_n$. D'autre part, si l'on a $\mu_1(\bigcup_{i=1}^{i_0}I_i-F_n)<\delta(n, \varepsilon)$, par suite $\mu_1(\bigcup_{i=1}^{i_0}(I_i\cap F_{n'(n,\varepsilon)})-F_n)<\delta(n, \varepsilon)=\rho(n'(n, \varepsilon), \varepsilon)$, il résulte que $|\sum_{i=1}^{i_0}(L)\int_{I_i\cap(F_{n'(n,\varepsilon)}-F_n)}f(x)\,dx|<\varepsilon/2$. En effet, pour I_i $(i=1, 2, \cdots, i_0)$ satisfaisant les conditions 1), 2), l'égalité voulue est vraie.

Maintenant, nous allons montrer la réciproque dans une forme un peu générale, que nous donnons ici comme

Théorème 4. *Soit $f(x)$ une fonction définie sur un intervalle I_0 et* *telle qu'il y a une fonction d'intervalle $F(I)$ fini-additive, une suite M_n $(n = 1, 2, \cdots)$ non-décroissante d'ensembles de total I et une suite F_n $(n = 1, 2, \cdots)$, de presque total I_0, non-décroissante des sensembles fermés tels que $F_n \subseteq M_n$ pour tout n, satisfaisant aux conditions suivants:*

1) *$f(x)$ est sommable sur tout F_n.*

2) *à tout nombre n et tout $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre un nombre $\delta(n, \varepsilon) > 0$ tel que les conditions:*

2.1) $I_i \frown M_n \neq 0$ *pour tout* i,

2.2) $\mu_1(\bigcup_i I_i - M_n) < \delta(n, \varepsilon)$

entraînent

$$|\sum_i F(I_i) - \sum_i (L) \int_{I_i \frown F_n} f(x)\, dx| < \varepsilon,$$

quel que soit le système composé des intervalles I_i $(i = 1, 2 \cdots, i_0)$ contenus dans I_0 et n'empiétant pas l'un sur l'autre.

Alors, $f(x)$ est intégrable au sens de Denjoy sur I_0 et $F(I) = (D) \int_I f(x)\, dx$ pour tout $I \subseteq I_0$.

Démonstration. $F(I)$ est continue, c.-à-d. il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un nombre $\eta(\varepsilon) > 0$ tel que $|I| < \eta(\varepsilon)$ entraîne $|F(I)| < \varepsilon$: D'après ce qu'on a $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{M}_n = I_0$, il y a selon Lemme 1 une suite non-décroissante des ensembles fermés $F_{n_i m_i}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ contenus dans $\bar{M}_{m_i}$ et qui jouit de la propriété (B_1) pour $\bar{M}_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ et $\gamma_n = \min_{1 \leq m \leq n} (m, 1/2^m)$ $(n = 1, 2, \cdots)$, où $n_i < m_i < n_{i+1}$ pour tout i. Pour $\varepsilon > 0$, soient $i(\varepsilon)$ un nombre naturel tel que $1/2^{n_{i(\varepsilon)}} < \varepsilon/4$ et $\rho(\varepsilon)$ un nombre positif tel que $\mu_1(E) < \rho(\varepsilon)$ entraîne $|(L) \int_{F_{m_{i(\varepsilon)}} \frown E} f(x)\, dx| < \varepsilon/4$. Nous allons montrer que $\eta(\varepsilon) = \min(\rho(\varepsilon), \delta(m_{i(\varepsilon)}, \varepsilon/4))$ est un nombre voulu. Soit I un intervalle tel que $|I| < \eta(\varepsilon)$. Alors, si l'on a $I \frown F_{n_{i(\varepsilon)} m_{i(\varepsilon)}} = 0$, il y a de la propriété (B_1) un intervalle I' tel que $I + I'$ soit un intervalle, $(I)^\circ \frown (I')^\circ = 0$, et pour un nombre naturel tel que $n_{i(\varepsilon)} \leq k \leq m_{i(\varepsilon)}$, $|I + I'| < \gamma_k \leq \delta(k, 1/2^k)$, $\mu_1(I' \frown F_k) < \rho(\varepsilon)$ et de plus l'un des extrémités de I' appartient à M_k. Il s'ensuit que $|F(I+I') - (L) \int_{F_k \frown (I+I')} f(x)\, dx| < 1/2^k \leq 1/2^{n_{i(\varepsilon)}} < \varepsilon/4$ et de même $|F(I') - (L) \int_{F_k \frown I'} f(x)\, dx| < \varepsilon/4$. En effet, on a $|F(I)| \leq |F(I+I')| + |F(I')| < \varepsilon$. Pour le cas où $I \frown F_{n_{i(\varepsilon)} m_{i(\varepsilon)}} \neq 0$, puisqu'alors $I \frown \bar{M}_{m_{i(\varepsilon)}} \neq 0$, il y a un intervalle I' tel que $I + I'$ soit un intervalle, $(I)^\circ \frown (I')^\circ = 0$, $|I + I'| < \eta(\varepsilon)$ et $I' \frown M_{m_{i(\varepsilon)}} = 0$. Il en résulte que $|F(I') - (L) \int_{F_{m_{i(\varepsilon)}} \frown I'} f(x)\, dx| < \varepsilon/4$ et $|F(I+I') - (L) \int_{F_{m_{i(\varepsilon)}} \frown (I+I')} f(x)\, dx| < \varepsilon/4$, puisque $|I'| \leq |I + I'| \leq \delta(m_{i(\varepsilon)}, \varepsilon/4)$. On a donc $|F(I')| < 2\varepsilon/4$ et

$|F(I+I')|<2\varepsilon/4$, puisque $\mu_1(F_{m_{i(\varepsilon)}}\frown(I+I'))<\rho(\varepsilon)$. Par suite $|F(I)|<\varepsilon$.

$F(I)$ est AC_* sur tout M_n, autrement dit, quel que soit $\varepsilon>0$, il a un $\eta(n,\varepsilon)>0$ tel que, pour toute suite finie d'intervalles $\{I_i\}$ n'empiétant pas les uns sur les autres et dont les extrémités appartiennent à M_n, la condition $\sum_i|I_i|<\eta(n,\varepsilon)$ entraîne $\sum_i \mathrm{O}(F;I_i)<\varepsilon$, où par $\mathrm{O}(F;I)$ on désigne le plus grand des nombres $|F(I')|\,(I'\leq I)$: Étant donné un nomber positif ε, désignons par $\rho(n,\varepsilon)$ un nombre positif tel que $\mu_1(E)<\rho(n,\varepsilon)$ entraîne $|(L)\int_{F_n\cap E}f(x)\,dx|<\varepsilon/4$. Posons $\eta(n,\varepsilon)=\min(\rho(n,\varepsilon), \delta(n,\varepsilon/4))$. Alors, on peut voir facilement que le nombre $\eta(n,\varepsilon)$ est le nombre voulu.

$F'(x)=f(x)$ presque partout dans I_0: Nous le donnerons dans une forme plus générale dans le mémoire prochain[8].

En particulier, on peut établir de Théorème 4, de même manière que Théorème 3, le

Théoreme 5. *Soit $f(x)$ une fonction définie sur un intervalle I_0 pour laquelle il existe une fonction d'intervalle $F(I)$ fini-additive, telle que, pour tout $\varepsilon_n\downarrow 0$, il y a une suite non-décroissante d'ensembles M_n $(n=1,2,\cdots)$ de total I_0 et une suite non-décroissante d'ensembles fermés F_n $(n=1,2,\cdots)$ de presque total I_0, qui satisfont aux conditions suivantes*

1) $F_n\leq M_n$.

2) *$f(x)$ est sommable sur tout F_n.*

3) *$I_i\frown M_n\neq 0$ pour tout i, implique $|\sum_{i=1}^{i_0}F(I_i)-\sum_{i=1}^{i_0}(L)\int_{I_i\cap F_n}f(x)\,dx|<\varepsilon_n$, quel qne soit le système composé des intervalles I_i $(i=1,2,\cdots,i_0)$ contenus dans I_0 et n'empiétant pas les uns sur les autres.*

Alors, $f(x)$ est totalisable au sens de Denjoy sur I_0 et on a $F(I)=(D)\int_I f(x)\,dx$ pour tout $I\leq I_0$.

§ 3. Totalisation d'une fonction de point dans l'espace de plusieurs dimensions.

Comme on l'a vu dans § 2, pour une fonction $f(x)$ intégrable au sens de Denjoy sur un intervalle I_0 d'une dimension, il y a une suite d'ensembles fermés F_n $(n=1,2,\cdots)$ telle que les intégrales $\mathfrak{J}_n$ de $f(x)$ au sens de Lebesgue sur F_n $(n=1,2,\cdots)$ convergent avec $n\to\infty$ vers l'intégrale au sens de Denjoy de $f(x)$ sur I_0. Conséquemment, si l'on prend l'intégrale au sens de Lebesgue comme point de départ de la

8) S. Saks: ibid. p. 241.

totalisation d'une fonction, la suite $\mathfrak{J}_n$ peut être considérée comme une suite fondamentale, qui donne une sorte d'approximation par des intégrales au sens de Lebesgue pour la totalisation au sens de Denjoy.

À partir de cette notion nous définirons maintenant une totalisation d'une fonction définie sur un intervalle de l'espace de plusieurs dimensions, qui sera l'extension de l'intégration au sens de Denjoy qui jouira de toutes les propriétés fondamentales de comme l'intégration.

Nous allons définir tout d'abord certaines familles d'ensembles élémentaires de points.

On dit qu'un système d'intervalles est *élémentaire*, lorsqu'il est composé d'un nombre fini d'intervalles I_i $(i = 1, 2, \cdots, i_0)$ de l'espace E_{n_0} sans points commun deux à deux, et on le désigne par S: $\{I_i\ (i = 1, 2, \cdots, i_0)\}$. S signifie quelquefois la somme des intervalles I_i $(i = 1, 2, \cdots, i_0)$. On écrit simplement $|S|$ pour désigner $\sum_{i=1}^{i_0} |I_i|$. On appelle notamment $(*)$*–système élémentaire* un système élémentaire S: $\{I_i\ (i = 1, 2, \cdots, i_0)\}$ tel que $\underset{E_{n_0-1}}{proj.}{}_y(I_1) = \underset{E_{n_0-1}}{proj.}{}_y(I_2) = \cdots = \underset{E_{n_0-1}}{proj.}(I_{i_0})$. Un système élémentaire composé $(*)$–systèmes élémentaires S_l: $\{(I_{li}\ (i=1, 2, \cdots, i_0(l))\}$ $(l=1, 2, \cdots, l_0)$ s'appelle $(**)$*–système élémentaire*, lorsque $\underset{E_{n_0-1}}{proj.}{}_y(S_l) \frown \underset{E_{n_0-1}}{proj.}{}_y(S_{l'}) = 0$ pour tout $l \neq l'$.

Un ensemble ou un système d'ensembles dans un sous-espace E_n de l'espace E_{n_0} est appellé parfois l'ensemble ou le système de n dimensions (dans E_{n_0}) respectivement.

Pour une fonction d'intervalle $F(I)$ et un système élémentaire S: $\{I_i\ (i = 1, 2, \cdots, i_0)\}$ désignons simplement par $F(S)$ la somme $\sum_{i=1}^{i_0} F(I_i)$.

DÉFINITION 1. Étant donnée dans un intervalle R_0 de l'espace E_{n_0} une fonction de point quelconque $f(p)$, nous dirons qu'elle est *intégrable* $(\mathfrak{D})$ dans R_0, lorsqu'il existe une fonction d'intervalle $F(I)$ fini-additive, une suite non-décroissante d'ensembles fermés M_n $(n = 1, 2, \cdots)$, de total R_0[9], et une suite non-décroissante des ensembles fermés F_n $(n = 1, 2, \cdots)$, de presque total R_0, tels que $F_n \leq M_n$ pour tout n, satisfaisant aux conditions suivantes:

1) $f(p)$ est sommable sur tout F_n.

2) À tout n et $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre un nombre $\delta(n, \varepsilon) > 0$ tel que les conditions suivantes:

2.1) $I_i \frown M_n \neq 0$ pour tout n,

9) Nous voyons qu'il ne faut pas que M_n est fermé.

2. 2) $\mu_{n_0}(\bigcup_{i=1}^{i_0} I_i - M_n) < \delta(n, \varepsilon)$,

2. 3) *norm* $(I_i) < 1/n$ pour tout i

entraînent

$$\left|\sum_{i=1}^{i_0} F(I_i) - \sum_{i=1}^{i_0} (L) \int_{I_i \cap F_n} f(p)\, dp\right| < \varepsilon,$$

quel que soit le système élémentaire d'intervalles I_i $(i = 1, 2, \cdots, i_0)$ contenus dans R_0. Nous dirons que, pour tout intervalle $I \leq R_0$, $F(I)$ est *intégrale* $(\mathfrak{D})$ de la fonction $f(p)$ sur I. Nous l'écrivons par $(\mathfrak{D}) \int_I f(p)\, dp$ ou $(\mathfrak{D}) \iint \cdots \int_I f(x_1, \cdots, x_{n_0})\, d(x_1, \cdots, x_{n_0})$. M_n $(n = 1, 2, \cdots)$ s'appelle la *suite caractéristique* pour l'intégration $(\mathfrak{D})$ de $f(p)$ et F_n $(n = 1, 2, \cdots)$ s'appelle la *suite fondamentale* pour l'intégrale $(\mathfrak{D})$ de $f(p)$[10].

Or, nous voyons que dans la définition on peut choisir $\delta(n, \varepsilon)$ de façon que $\delta(n, \varepsilon) > \delta(n', \varepsilon)$ pour $n' > n$. Par conséquent, nous le supposerons dans la suite. Désormais, on entendra par $\delta(n, \varepsilon)$ le nombre qu'on a mentionné dans la Définition 1.

§ 4. Intégrales multiples.

Dans ce §, nous montrerons que cette intégrale $(\mathfrak{D})$ peut être représentée comme l'intégrale multiple des intégrales au sens de Denjoy dans l'espace d'une dimension.

Commençons maintenant par trois lemmes qu'on utilisera dans la démonstration. D'abord, nous allons définir à présent certains termes.

Désormais, dans les démonstrations des lemmes suivants, soient $f(p)$ une fonction intégrable $(\mathfrak{D})$ dans l'intervalle $R_0 = [0,1; 0,1; \cdots; 0,1]$ de l'espace E_{n_0}, M_n $(n = 1, 2, \cdots)$ une suite caractéristique pour l'intégration $(\mathfrak{D})$ de $f(p)$ et F_n $(n = 1, 2, \cdots)$ une suite fondamentale pour l'intégrale $(\mathfrak{D})$ de $f(p)$.

Soit ε_n' $(n = 1, 2, \cdots)$ une suite des nombres positifs tels que $\varepsilon_n' \downarrow 0$. Désormais, désignons par $F_{n_i m_i}$ $(i = 1, 2, \cdots)$, sauf indication contraire, une suite non-décroissante d'ensembles fermés jouissant de la propriété (A_{n_0}) pour la suite M_n $(n = 1, 2, \cdots)$ et la suite ε_n' $(n = 1, 2, \cdots)$.

En outre, étant donné un point q de l'ensemble $Z = proj._y(R_0) - \bigcup_{i=1}^{\infty} proj._y(F_{n_i m_i})$, désignons par $F_{n_{i(q)} m_{i(q)}}(q)$ $(i = 1, 2, \cdots)$, sauf indication contraire, une suite non-décroissante d'ensemble fermés jouissant de la propriété (A_1) pour la suite $(M_n)^q$ $(n = 1, 2, \cdots)$ et la suite ε_n' $(n = 1, 2, \cdots)$.

10) Shizu Enomoto: ibid. III.

L'existence des suites $F_{n_i m_i}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ et $F_{n_{i(q)} m_{i(q)}}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ peut être vue en vertu de Lemme 2 et Lemme 1, puisque $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = R_0$ et $(M_n)^q = (R_0)^q$ respectivement.

Lemme 3. *Pour une fonction $f(p)$ intégrable $(\mathfrak{D})$ dans un intervalle R_0 de l'espace E_{n_0}, il y a une suite non-décroissante des ensembles fermés B_h $(h = 1, 2, \cdots)$, de total R_0 et telle que:*

À tout h et tout $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre un nombre $\rho(h, \varepsilon) > 0$ tel que $\rho(h, \varepsilon) > \rho(h', \varepsilon)$ pour tout $h < h'$ et que les conditions suivantes:

1) *il y a pour tout l un point q_l de $\underset{E_{n_0-1}}{proj._y}(S_l) \cap \underset{E_{n_0-1}}{proj._y}(B_h)$ tel que $(B_h)^{q_l} \cap I_{lj} \neq 0$ pour tout $j = 1, 2, \cdots, j_0(l)$,*

2) $|\underset{E_{n_0-1}}{proj._y}(S)| < \rho(h, \varepsilon)$,

3) *norm* $(\underset{E_{n_0-1}}{proj._y}(S_l)) < 1/h$ pour tout l,

entraînent

$$|F(S)| < \varepsilon,$$

quel que soit le $(**)$*-système élémentarire S composé de* $(*)$*-systèmes élémentaires S_l $(l = 1, 2, \cdots, l_0)$, où, pour tout l, S_l est composé d'intervalles I_{lj} $(j = 1, 2, \cdots, j_0(l))$ contenus dans R_0.*

Démonstration. Pour la brièveté, nous allons démontrer le cas où $n_0 = 2$. Considérons la suite $F_{n_i m_i}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ déjà mentionée pour la suite $\varepsilon_n' = \min(1/n, \eta(n, \varepsilon_n/2^{n+4}), \delta(n, \varepsilon_n/2^{n+5}))$ $(n = 1, 2, \cdots)$, où ε_n $(n=1, 2, \cdots)$, est une suite telle que $\varepsilon_n \downarrow 0$ et $\eta(n, \varepsilon)$ est le nombre positif tel que $\eta(n, \varepsilon) > \eta(n', \varepsilon)$ pour $n < n'$ et que $\mu_2(E) < \eta(n, \varepsilon)$ entraîne $|(L) \iint_{E \cap F_n} f(x, y)\, d(x, y)| < \varepsilon$. À tout h, nous allons faire correspondre $F_{n_{i(h)} m_{i(h)}}$ tel que $i(h)$ est le plus grand des nombres i où $m_i \leq h$. De même, pour tout y de $Z = proj._y(R_0) - \bigcup_{i=1}^{\infty}(proj._y(F_{n_i m_i}))$ considérons la suite $F_{n_{i(y)} m_{i(y)}}(y)$ $(i = 1, 2, \cdots)$ déjà mentionée pour la suite ε_n' $(n=1, 2, \cdots)$. À tout h, nous allons faire correspondre $F_{n_{i(y,h)(y)}, m_{i(y,h)(y)}}(y)$ tel que $i(y, h)$ est le plus grand des nombre i où $m_i(y) \leq h$. Posons $B_h = F_{n_{i(h)} m_{i(h)}} + \bigcup_{y \in Z} F_{n_{i(y,h)(y)}, m_{i(y,h)(y)}}(y)$ pour tout h. Évidemment, B_h $(h = 1, 2, \cdots)$ est une suite non-décroisante des enssembles mesurables de total R_0.

Posons $\rho'(h, \varepsilon) = \min(\delta(h, \varepsilon/32h), \eta(h, \varepsilon/16h))$ et d'abord montrerons que pour la suite B_h $(h = 1, 2, \cdots)$, $\rho'(h, \varepsilon)$ est le nombre voulu pour h et $\varepsilon > 0$.

Soit S un système satisfaisant aux conditions 1)–3) pour B_h et $\rho'(h, \varepsilon)$. Considérons, d'abord, le cas où S possède de plus la propriété suivante:

4) Soit y_l le point de $proj._y(S_l) \frown proj._y(B_h)$ pris dans la condition 1) pour tout l. Soient a_j le point d'extrémité droite d'intervalle $(I_{lj})^{y_l}$ et b_j le point d'extrémité gauche d'intervalle $(I_{l,j+1})^{y_l}$. Alors, on a $[a_j, b_j] \frown B_h \neq 0$ pour tout $j=1, 2, \cdots, j_0(l)-1$.

Considérons la famille, s'il en existe, de tous les intervalles I_{lj} tels que $norm\ (I_{lj}) < 1/h$ et le désignons simplement par R_m^1 $(m=1, 2, \cdots, m_1)$. On a $R_m^1 \frown M_h \neq 0$ pour tout m, puisqu'alors $R_m^1 \frown B_h \neq 0$ et $B_h \leqq M_h$.

Pour un intervalle I_{lj} tel que $norm\ (I_{lj}) \geqq 1/h$, s'il en existe, considérons la suite des intervalles contigus à l'ensemble formé des points de $(B_h)^{y_l} \frown (I_{lj})^{y_l}$ et d'extrémités de $(I_{lj})^{y_l}$, soit désignée par J_{ljr} $(r=1, 2, \cdots)$, où, en outre, on peut supposer qu'on ait $|J_{ljr}| \geqq |J_{ljr+1}|$ $(r=1, 2, \cdots)$. Soit $r_0(l, j)$ un indice tel que $|J_{ljr_0(l,j)}| \geqq 1/2h$ et $|J_{ljr_0(l,j)+1}| < 1/2h$. Soit J'_{ljr} $(r=0, 1, \cdots, r_0(l, j))$ la suite des intervalles contigus à l'ensemble formé des points de $\bigcup_{r=1}^{r_0(l,j)} J_{ljr}$ et d'extrémités de $(I_{lj})^{y_l}$. On a évidemment $\bigcup_{r=1}^{r_0(l,j)} J'_{ljr} = \bigcup_{r=r_0(l,j)+1}^{\infty} J_{ljr}$.

Parmi J'_{ljr} $(l=1, 2, \cdots, l_0, j=1, 2, \cdots, j_0(l), r=0, 1, \cdots, r_0(l, j))$, considérons la famille, s'il en existe, de tous les intervalles J'_{ljr} tels que $|J'_{ljr}| < 1/h$, et à tel J'_{ljr}, faisons correspondre l'intervalle $proj._x(J'_{ljr}) \times proj._y(S_l)$ de E_2. Désignons par R_m^2 $(m=1, 2, \cdots, m_2)$ chacune de tels intervalles. Alors, on a $R_m^2 \frown M_h \neq 0$ pour tout m, puisque $J'_{ljr} \frown B_h \neq 0$ et $B_h \leqq M_h$.

Pour J'_{ljr} tel que $|J'_{ljr}| \geqq 1/h$, s'il en existe, soit J''_{ljrs} $(s=1, 2, \cdots, s_0(l, j, r))$ une famille d'intervalles d'une dimension n'empiétant pas les uns sur les autres et dont la somme couvre J'_{ljr} et $1/2h \leqq |J''_{ljrs}| < 1/h$. Or, à tout J''_{ljrs}, faisons correspondre l'intervalle $proj._x(J''_{ljrs}) \times proj._y(S_l)$ de E_2 et les désignons par R_m^3 $(m=1, 2, \cdots, m_3)$. Alors on a $R_m^3 \frown M_h \neq 0$ pour tout m. Pour cela, il suffit de montrer $J''_{ljrs} \frown (B_h)^{y_l} \neq 0$. Supposons maintenant que $J''_{ljrs} \frown (B_h)^{y_l} = 0$. Alors, $J''_{ljrs} \leqq \bigcup_{r=1}^{\infty} J_{ljr}$, par suite il y a un $J_{ljr'}$ tel que $J_{ljr'} \geqq J''_{ljrs}$ et $r' > r_0(l, j)$. Par suite $|J''_{ljrs}| \leqq |J_{ljr'}| < 1/2h$, contrairement à $|J''_{ljrs}| \geqq 1/2h$.

Pour la simplicité, posons $\{R_m\ (m=1, 2, \cdots, m_0)\} = \{R_m^1\ (m=1, 2, \cdots, m_1);\ R_m^2\ (m=1, 2, \cdots, m_2);\ R_m^3\ (m=1, 2, \cdots, m_3)\}$. On peut déduire aussitôt de la construction de R_m $(m=1, 2, \cdots, m_0)$ qu'elle-même se divise en deux systèmes élémentaire. D'ailleurs, on a $R_m \frown M_h \neq 0$, $norm\ (R_m) < 1/h$ pour tout m et $\bigcup_{m=1}^{m_0} |R_m| < \delta(h, \varepsilon/32h)$, puisque $|proj._y(S)| < \rho'(h, \varepsilon) \leqq \delta(h, \varepsilon/16h)$ et $|proj._x(R)| = 1$. En effect on a par définition $|\sum_{m=1}^{m_0} F(R_m) - \sum_{m=1}^{m_0} (L) \iint_{R_m \frown F_h} f(x, y)\, d(x, y)| < (\varepsilon/32h) \times 2 = \varepsilon/16h$. Par suite, on a $|\sum_{m=1}^{m_0} F(R_m)| < \varepsilon/16h + \varepsilon/16h = \varepsilon/8h$, puisque $|\sum_{m=1}^{m_0}(L) \iint_{R_m \cap F_h} f(x, y)\, d(x, y)| < \varepsilon/16h$, d'après ce qu'on a $\sum_{m=1}^{m_0} |R_m| < \rho(h, \varepsilon) \leq \eta(h, \varepsilon/16h)$.

Enfin, considérons J_{ljr} ($l = 1, 2, \cdots, l_0$; $j = 1, 2, \cdots, j_0(l)$; $r = 1, 2, \cdots, r_0(l, j)$). À J_{ljr}, faisons correspondre un intervalle K_{ljr}, déterminé par les quatre conditions suivantes: 1°) K_{ljr} est contenu dans un intervalle K' contigu à l'ensemble formé des points de $(B_h)^{y_l}$ et d'extrémités de $(R_0)^{y_l}$; 2°) une extrémité de K_{ljr} est une des celles de J_{ljr}; 3°) l'autre extrémité est le point caractéristique de K'; 4°) $K_{ljr} \supseteq J_{ljr}$. Évidemment, K_{ljr} ($l = 1, 2, \cdots, l_0$; $j = 1, 2, \cdots, j_0(l)$, $r = 1, 2, \cdots, r_0(l, j)$ n'ont pas de points communs deux à deux selon la propriété 4). À J_{ljr}, faisons correspondre l'intervalle $Q_{ljr} = proj._x(J_{ljr}) \times proj._y(S_l)$ de l'espace E_2. De même, faisons correspondre à K_{ljr} l'intervalle $Q'_{ljr} = proj._x(K_{ljr}) \times proj._y(S_l)$ de 2 dimension. Nous désignons simplement Q_{ljr}, *resp.* Q'_{ljr}, ($l = 1, 2, \cdots, l_0$; $j = 1, 2, \cdots, j_0(l)$; $r = 1, 2, \cdots, r_0(l, j)$) par Q_n, *resp.* Q_n', ($n = 1, 2, \cdots, n_0$) de façon que $Q_n' \supseteq Q_n$.

Pour tout nombre naturel k où $1 \leq k \leq h$, considérons la famille Q'_{k_n} ($n = 1, 2, \cdots, n_0(k)$), s'il en existe, de tous les Q_n' tels que $Q_n' \supseteq K_{ljr}$, où le point caractéristique appartient à M_k. Soit Q_{k_n} ($n = 1, 2, \cdots, n_0(k)$) la famille telle que $Q_{k_n} \subseteq Q'_{k_n}$ pour tout n. On a alors $Q'_{k_n} \cap M_k \neq 0$ et $norm\,(Q'_{k_n}) < 1/k \leq 1/h$ pour tout n en vertu de la propriéte (B_1) pour ε_n' ($n = 1, 2, \cdots$). De plus on a $\mu_2(\bigcup_{n=1}^{n_0(k)} Q'_{k_n} - M_k) \leq \mu_2(S) < \rho'(h, \varepsilon) \leq \delta(h, \varepsilon/32h) \leq \delta(k, \varepsilon/32h)$. Puisque Q'_{k_n} ($n = 1, 2, \cdots, n_0(k)$) se divise en deux systèmes élémentaires, on a de la définition.

$$|\sum_{n=1}^{n_0(k)} F(Q'_{k_n}) - \sum_{n=1}^{n_0(k)} (L) \iint_{Q'_{k_n} \cap F_k} f(x, y)\, d(x, y)| < (\varepsilon/32h) \times 2 = \varepsilon/16h.$$

D'ailleurs, d'après ce qu'on a $\sum_{n=1}^{n_0(k)} |Q'_{k_n}| < \rho'(h, \varepsilon) \leq \eta(h, \varepsilon/16h)$ et $k \leq h$, il résulte $|\sum_{n=1}^{n_0(k)} (L) \iint_{Q'_{kn} \cap F_k} f(x, y)\, d(x, y)| < \varepsilon/16h$. On a donc $|\sum_{n=1}^{n_0(k)} F(Q'_{kn})| < \varepsilon/16h + \varepsilon/16h = \varepsilon/8h$ pour tout $1 \leq k \leq h$. Par suite, on a $|\sum_{k=1}^{h} \sum_{n=1}^{n_0(k)} F(Q'_{k_n})| < \varepsilon/8$. De même, on a $|\sum_{k=1}^{h} \sum_{n=1}^{n_0(k)} F(Q'_{k_n} - Q_{k_n})| < \varepsilon/8$. En effet, $|\sum_{k=1}^{h} \sum_{n=1}^{n_0(k)} F(Q_{k_n})| < \varepsilon/8 + \varepsilon/8 = \varepsilon/4$.

Conséquemment, on a $|F(S)| \leq |\sum_{m=1}^{m_0} F(R_m)| + |\sum_{k=1}^{h} \sum_{n=1}^{n_0(k)} F(Q_{k_n})| < \varepsilon/8h + \varepsilon/4 < \varepsilon/2$, puisque $S = \bigcup_{m=1}^{m_0} R_m + \bigcup_{k=1}^{h} \bigcup_{n=1}^{n_0(k)} Q_{k_n}$.

En général, le cas où S soit un $(**)$-système élémentaire satisfaisant aux conditions 1)–3) et composé de $(*)$-systèmes élémentaires

$S_l(l=1,2,\cdots,l_0)$, où S_l est composé d'intervalle I_{lj} $(j=1,2,\cdots,j_0(l))$: Soit S_1, *resp.* S_2, le $(**)$–système élémentaire composé des $(*)$–systèmes S_{l1} $(l=1,2,\cdots,l_0)$, *resp.* S_{l2} $(l=1,2,\cdots,l_0)$, où S_{l1}, *resp.* S_{l2}, est composé des $I_{l,2j-1}$ $(j=1,2,\cdots,2j-1\leq j_0(l))$, *resp.* $I_{l,2j}$ $(j=1,2,\cdots,2j\leq j_0(l))$. Alors S_{l1} et S_{l2} jouissent de la propriété 4). Par suite $|F(S_1)|<\varepsilon/2$ et $|F(S_2)|<\varepsilon/2$ en vertu du résultat mentionné plus haut. On a donc $|F(S)|<\varepsilon$.

Enfin, on peut voir facilement que, pour la suite non-décroissante d'ensembles fermés $\overline{B}_h$ $(h=1,2,\cdots)$, dont le total est R_0, le nombre $\rho(h,\varepsilon)=\rho'(h,\varepsilon/8)$ est un des ceux qu'on a pour h et $\varepsilon>0$. Par conséquent, il suffit de prendre $\overline{B}_h$ $(h=1,2,\cdots)$ comme la suite B_h $(h=1,2,\cdots)$ de ce Lemme.

Lemme 4. *Etant donnée une fonction $f(p)$ intégrable $(\mathfrak{D})$ dans un intervalle $R_0=[a_1,b_1;\ a_2,b_2;\ \cdots;\ a_{n_0},b_{n_0}]$ de l'espace E_{n_0}, il y a, pour une suite $\varepsilon_i\downarrow 0$ quelqonque, une suite non-décroissante d'ensembles fermés A_i $(i=1,2,\cdots)$ telle que $\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i)^q=(R_0)^q$ pour tout point q de l'ensemble $\bigcup_{i=1}^{\infty}\underset{E_{n_0-1}}{proj._y}(A)$ et une suite non-décroissante d'ensembles fermés D_i $(i=1,2,\cdots)$, de presque total R_0, telle que $D_i\leq A_i$ et $f(p)$ est sommable sur tout D_i, de telles sortes qu'on puisse faire correspondre pour tout i un $\kappa_i>0$ tel que $\kappa_i\geq\kappa_{i+1}$ et les conditions suivantes:*

1) *norm $(\underset{E_{n_0-1}}{proj._y}(S_l))<\kappa_i$ pour tout l,*

2) *il y a un ensemble Y contenu dans $\underset{E_{n_0-1}}{proj._y}(S)\frown\underset{E_{n_0-1}}{proj._y}(A_i)$ tel que $\underset{E_{n_0-1}}{proj._y}(S_l)\frown Y\neq 0$ pour tout l, $\mu_{n_0-1}(\underset{E_{n_0-1}}{proj._y}(S)-Y)<\kappa_i$, pour tout l si $q\in\underset{E_{n_0-1}}{proj._y}(S_l)\frown Y$, on a $(I_{lj})^q\frown A_i\neq 0$ pour tout $j=1,2,\cdots,j_0(l)$,*

entraînent

$$|F(S)-(L)\int_{S\frown D_i}f(p)\,d(p)|<\varepsilon_i,$$

quel que soit le $(**)$–système élémentaire S composé de $(*)$–systèmes élémentaires S_l $(l=1,2,\cdots,l_0)$, où S_l est composé d'intervalles I_{lj} $(j=1,2,\cdots,j_0(l))$ contenus dans R_0.

Démonstration. Pour la brièveté, nous allons démontrer le cas où $n_0=2$. Pour la suite ε_i $(i=1,2,\cdots)$ donnée d'avance, soit $F_{n_im_i}$ $(i=1,2,\cdots)$ la suite prise dans la démonstration de Lemme 3 pour la suite $\varepsilon_n'=\min(1/n,\ \eta(n,\varepsilon_n/2^{n+4}),\ \delta(n,\varepsilon_n/2^{n+5}))(\ (n=1,2,\cdots)$, où $\eta(n,\varepsilon)$ est le nombre positif tel que $\eta(n,\varepsilon)>\eta(n',\varepsilon)$ pour $n<n'$ et que $\mu_2(E)$

$<\eta(n, \varepsilon)$ entraîne $|(L)\iint_{E\cap F_n} f(x, y)\, d(x, y)|<\varepsilon$. Posons $A_i = F_{n_i m_i}$, $D_i = F_{n_i m_i} \frown F_{m_i}$ pour tout i, et montrerons qu'elles sont les suites voulues.

Pour cela, il suffit de montrer l'existence d'un nombre $\kappa_i > 0$ qui jouit des propriétés voulu pour tout i, puisque les autres conditions sont évidemment satisfaites.

Posons $\kappa_i = 1/2 \min(1/m_i, \eta(m_i, \varepsilon_i/7), \delta(m_i, \varepsilon_i/28), \rho(m_i, \varepsilon_i/8))$ où $\rho(n, \varepsilon)$ est le nombre mentionné à Lemme 3. Désignons par $\mathfrak{R}_m(I_{lj})$ m^e-réseau dans I_{lj}. Puisqu'alors $I_{lj} \frown A_j$ est fermé, il y a un $m_0 = m_0(i)$, où $m_0 > m_i$, et il y a un système R_{ljs} $(s = 1, 2, \cdots, s_0(l, j))$, pouvant être vide, composé des mailles de $\mathfrak{R}_{m_0}(I_{lj})$ tel que

1) $R_{ljs} \frown A_i \neq 0$ pour tout $s = 1, 2, \cdots, s_0(l, j)$,

2) $R' \frown A_i = 0$ pour toute autre maille R' de $\mathfrak{R}_{m_0}(I_{lj})$,

3) $\bigcup\limits_{s=1}^{s_0(l,j)} R_{ljs} \supseteq I_{lj} \frown A_i$,

4) $\mu_2(\bigcup\limits_{s=1}^{s_0(l,j)} R_{ljr} - A_i) < \kappa_i / \sum\limits_{l=1}^{l_0} j_0(l)$.

Soit y un point de $Y \frown proj._y(S_l^\circ)$ tel qu'il y a une maille R de $\mathfrak{R}_{m_0}(I_{lj})$ $(j = 1, 2, \cdots, j_0(l))$ pour laquelle $(R)^y \frown A_i = 0$. Pour cela, considérons la famille de toutes les mailles R de $\mathfrak{R}_{m_0}(I_{lj})$ $(j = 1, 2, \cdots, j_0(l))$ telles que $(R)^y \frown A_i = 0$, et la désignons par $R_{lk}(y)$ $(k = 1, 2, \cdots, k_0(l))$. Désignons de plus par $L_{lh}(y)$ $(h = 1, 2, \cdots, h_0(l))$ le système d'intervalles qui n'ont deux à deux ancun point commun et tel que $\bigcup\limits_{h=1}^{h_0(l)} L_{lh}(y) = \bigcup\limits_{k=1}^{k_0(l)} R_{lk}(y)$. Posons $l_{lh}(y) = (L_{lh}(y))^y$ pour tout h. On a évidemment $l_{lh}(y) \frown A_i = 0$. Puisque $l_{lh}(y)$ est fermé, il y a un intervalle $K_{lh}(y)$ de 2 dimensions pour tout $l_{lh}(y)$ $(l = 1, 2, \cdots, l_0;\ h = 1, 2, \cdots, h_0(l))$ tel que $(K_{lh}(y))^y = l_{lh}(y)$, $K_{lh}(y) \frown A_i = 0$ et $proj._y(S_l) \supseteq proj._y(R) \supseteq (proj._y(K_{lh}(y)))^\circ \ni y$, où R est une maille de $\mathfrak{R}_{m_0}(I_{lj})$ telle que $proj._y(R) \ni y$. Posons $J'(y) = \bigcap\limits_{h=1}^{h_0(y)} (proj._y(K_{lk}(y)))$.

Soit y un point de $Y \frown proj._y(S_l^\circ)$ tel qu'il n'y a aucune maille R de $\mathfrak{R}_{m_0}(I_{lj})$ $(j = 1, 2, \cdots, j_0(l))$ pour laquelle on a $(R)^y \frown F_{n_i m_i} = 0$. Pour cela, soit $J'(y)$ un intervalle de J_0 tel que $proj._y(S_l) \supseteq proj._y(R) \supseteq (J'(y))^\circ \ni y$, où R est une maille de $\mathfrak{R}_{m_0}(I_{lj})$ telle que $proj._y(R) \ni y$.

Désignons pour tout point y de densité de l'ensemble $Y \frown proj._y(S_l^\circ)$ $(l = 1, 2, \cdots, l_0)$ par $\{J_\lambda(y)\}$ la famille tous les intervalles tels que $J'(y) \supseteq J_\lambda(y)$, $(J_\lambda(y))^\circ \ni y$ et les deux extrémités de $J_\lambda(y)$ appartiennent à Y. En faisant usage de $\{J_\lambda(y)\}$ pour l'ensemble Y, il y a, en vertu de Théorème de Vitali, $J_{\lambda(v)}(y_v)$ $(v = 1, 2, \cdots, v_0)$, où $y_v \in Y$, désignant simplement par $J(y_v)$ $(v = 1, 2, \cdots, v_0)$, possédant les propriétés suivantes;

1) $\bigcup_{v=1}^{v_0} J(y_v) \subseteq proj._y(S^\circ)$, $|J(y_v)| < 1/m_i$,

2) $\mu_1(Y - \bigcup_{v=1}^{v_0} J(y_v)) < \kappa_i$,

3) $J(y_v) \frown J(y_{v'}) = 0$ pour $v \neq v'$,

4) les deux extrémités de $J(y_v)$ appartiennent à Y.

Désignons par I_v^* l'intervalle $proj._x(R_0) \times J(y_v)$ de 2 dimensions pour tout $v = 1, 2, \cdots, v_0$. Par I_{vj}^* $(j = 1, 2, \cdots, j_0(l))$, pour tout $v = 1, 2, \cdots, v_0$, désignons la famille d'intervalles $I_v^* \frown I_{lj}$ $(j = 1, 2, \cdots, j_0(l))$, où l le nombre tel que $proj._y(S_l) \supseteq J(y_v)$. Soit J_u' $(u = 1, 2, \cdots, u_0)$ le système des intervalles contenus dans $proj._y(S)$, contigus à l'ensemble formé des points de $\bigcup_{v=1}^{v_0} J(y_v)$ et d'extrémités de tous les intervalles $proj._y(S_l)$ $(l = 1, 2, \cdots, l_0)$. Désignons par I_u^{**} l'intervalle $proj._x(R_0) \times J_u'$ de 2 dimensions pour tout $u = 1, 2, \cdots, u_0$ et par I_{uj}^{**} $(j = 1, 2, \cdots, j_0(u))$, pour tout $u = 1, 2, \cdots, u_0$, la famille d'intervalles $I_u^{**} \frown I_{lj}$ $(j = 1, 2, \cdots, j_0(l))$, où l le nombre tel que $proj._x(S_l) \supseteq J_u'$.

Désignons par R_{vs} $(s = 1, 2, \cdots, s_0(v))$, pour tout $v = 1, 2, \cdots, v_0$, la famille de tous les intervalles de 2 dimensions $I_v^* \frown R_{ljs}$ contenant des points communs à A_i $(j = 1, 2, \cdots, j_0(l);\ s = 1, 2, \cdots, s_0(l, j))$, où l le nombre tel que $proj._y(S_l) \supseteq J(y_v)$. Désignons en outre par K_{vz} $(z = 1, 2, \cdots, z_0(v))$ la famille, pouvant être vide, des intervalles de 2 dimensions contenus dans $\bigcup_{j=1}^{j_0(v)} I_{vj}^*$, contigus à l'ensemble formé des points de $\bigcup_{s=1}^{s_0(v)} R_{vs}$ et des côtés parallèles à l'axe y de tous les intervalles I_{vj}^* $(j = 1, 2, \cdots, j_0(v))$.

1°) Pour K_{vz} $(v = 1, 2, \cdots, v_0;\ z = 1, 2, \cdots, z_0(v))$: Divisons le système K_{vz} $(z = 1, 2, \cdots, z_0(v))$ en les deux systèmes $K_{v, 2z-1}$ $(z = 1, 2, \cdots, 2z-1 \leq z_0(v))$, $K_{v, 2z}$ $(z = 1, 2, \cdots, 2z \leq z_0(v))$. Simplement, désignons-les respectivement par K_{vz}^1 $(z = 1, 2, \cdots, z_1(v))$, K_{vz}^2 $(z = 1, 2, \cdots, z_2(v))$ pour tout $v = 1, 2, \cdots, v_0$. Désignons par J_{vz}^1 l'intervalle d'une dimension, déterminé par les quatre conditions suivantes: 1*) J_{vz}^1 est contenu dans un intervalle J'' contigu à l'ensemble formé des points de $(F_{n_i m_i})^{y_v}$ et d'extrémités d'intervalle $(R_0)^{y_v}$; 2*) une extrémité de J_{vz}^1 est une des celles de K_{vz}^1; 3*) l'autre extrémité est le point caractéristique de l'intervalle J''; 4*) $J_{vz}^1 \supseteq (K_{vz}^1)^{y_v}$. Posons $H_{vz}^1 = J_{vz}^1 \times proj._y(K_{vz}^1)$ pour tout v, z. Désignons par $H_{vk_z}^1$ $(z = 1, 2, \cdots, z_1(v, k))$ la suite de tous les intervalles H_{vz}^1 tels que le point caractéristique de J_{vz}^1 appartient à M_k $(n_i \leq k \leq m_i)$. Alors, $H_{vk_z}^1$ $(v = 1, 2, \cdots, v_0;\ z = 1, 2, \cdots, z_1(v, k))$ est le système d'intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres et tel que:

1) $H_{vk_z}^1 \frown M_k \neq 0$.

2) $\mu_2(\bigcup_{v=1}^{v_0}\bigcup_{z=1}^{z_1(v,k)} H^1_{vk_z}-M_k)\leq\sum_{v=1}^{v_0}\sum_{z=1}^{z_1(v,k)}|H^1_{vk_z}|<\varepsilon_k'\leq\delta(k, \varepsilon_k/2^{k+5})$, puisque l'ensemble $(F_{n_im_i})^y$ jouit de la propriété (B_1) pour $(M_n)^y$ $(n=1, 2, \cdots)$ et pour ε_n' $(n=1, 2, \cdots)$.

3) *norm* $(H^1_{vk_z})\leq\max(|J^1_{vk_z}|, |proj._y(K^1_{vz})|)<\max(\varepsilon_k', 1/m_i)\leq 1/k$, Par suite on a puisque $k\leq m_i$

$$|\sum_{v=1}^{v_0}\sum_{z=1}^{z_1(v,k)}(F(H^1_{vk_z})-(L)\iint_{H^1_{vk_z}\cap F_k}f(x, y)\,d(x, y))|$$
$$<(\varepsilon_k/2^{k+5})\times 2=\varepsilon_k/2^{k+4}.$$

En ontre, on a $|\sum_{v=1}^{v_0}\sum_{z=1}^{z_1(v,k)}(L)\iint_{H^1_{vk_z}\cap F_k}f(x, y)\,d(x, y)|<\varepsilon_k/2^{k+4}$, puisque $\sum_{v=1}^{v_0}\sum_{z=1}^{z_1(v,k)}|H^1_{vk_z}|<\varepsilon_k'\leq\eta(k, \varepsilon_k/2^{k+4})$. Il en résulte $|\sum_{v=1}^{v_0}\sum_{z=1}^{z_1(v,k)}F(H^1_{vk_z})|<\varepsilon_k/2^{k+3}$. Par suite, $|\sum_{v=1}^{v_0}\sum_{z=1}^{z_1(v)}F(H^1_{vk_z})|<\sum_{k=n_i}^{m_i}\varepsilon_k/2^{k+3}<\varepsilon_{m_i}/7\leq\varepsilon_i/7$. De même, $|\sum_{v=1}^{v_0}\sum_{z=1}^{z_1(v)}F(H^1_{vk_z}-K^1_{vk_z})<\varepsilon_i/7$. On a donc $|\sum_{v=1}^{v_0}\sum_{z=1}^{z_1(v)}F(K^1_{vz})|<2\varepsilon_i/7$. De même, on a $|\sum_{v=1}^{v_0}\sum_{z=1}^{z_2(v)}F(K^2_{vz})|<2\varepsilon_i/7$. En effet, $|\sum_{v=1}^{v_0}\sum_{z=1}^{z_0(v)}F(K_{vz})|<(2\varepsilon_i/7)\times 2=4\,\varepsilon_i/7$. D'autre part, on a $|\sum_{v=1}^{v_0}\sum_{z=1}^{z_0(v)}(L)\iint_{K_{vz}\cap D_i}f(x, y)\,d(x, y)|=0$, puisque $K_{vz}\frown A_i=0$ et $A_i\supseteq D_i$.

2°) Désignons simplement par R_s $(s=1, 2, \cdots, s_0)$ la famille de toutes les mailles R_{vs} $(v=1, 2, \cdots, v_0;\ s=1, 2, \cdots, s_0(v))$. Il est un système composé des intervalles n'impiétant pas les uns sur les autres, possédant les propriétés suivantes:

1) $R_s\frown M_{m_i}\neq 0$, puisque $R_s\frown A_i\neq 0$ et $M_{m_i}\supseteq A_i$, pour tout $s=1, 2, \cdots, s_0$.

2) $\mu_2(\bigcup_{s=1}^{s_0}R_s-M_{m_i})\leq\mu_2(\bigcup_{s=1}^{s_0}R_s-A_i)\leq\sum_{l=1}^{l_0}\sum_{j=1}^{j_0(l)}\mu_2(\bigcup_{s=1}^{s_0}R_{ljs}-A_i)<(\kappa_i/\sum_{l=1}^{l_0}j_0(l))\times\sum_{l=1}^{l_0}j_0(l)=\kappa_i<\delta(m_i, \varepsilon_i/28)$.

3) *norm* $(R_s)<1/m_i$, puisque $m_i<m_0$.

Par suite, en vertu de la définition, on a

$$|\sum_{s=1}^{s_0}(F(R_s)-(L)\iint_{R_s\cap F_{m_i}}f(x, y)\,d(x, y))|<(\varepsilon_i/28)\times 4=\varepsilon_i/7.$$

D'autre part,

$$|\sum_{s=1}^{s_0}(F(R_s)-(L)\iint_{R_s\cap D_i}f(x, y)\,d(x, y))|\leq$$
$$|\sum_{s=1}^{s_0}(L)\iint_{R_s\cap(F_{m_i}-D_i)}f(x, y)\,d(x, y)|+\varepsilon_i/7.$$

En outre, on a $|\sum_{s=1}^{s_0}(L)\iint_{R_s\cap(F_{m_i}-D_i)}f(x, y)\,d(x, y)|<\varepsilon_i/7$, puisque

$$\mu_2(\bigcup_{s=1}^{s_0} R_s \frown (F_{m_i} - D_i)) = \mu_2(F_{m_i} \frown (\bigcup_{s=1}^{s_0} R_s - A_i)) \leq \mu_2(\bigcup_{s=1}^{s_0} R_s - A_i)$$
$$< \kappa_i \leq \eta(m_i, \varepsilon_i/7).$$

On a donc $|\sum_{s=1}^{s_0}(F(R_s)-(L)\iint_{R_s \cap D_i} f(x,y)\,d(x,y))| < 2\varepsilon_i/7$.

3°) Pour I_{uj}^{**} $(u=1,2,\cdots,u_0;\ j=1,2,\cdots,j_0(u))$: Évidemment, on a $norm\,(I_{uj}^{**}) < \kappa_i \leq 1/m_i$. On a $\mu_1(\bigcup_{u=1}^{u_0}\bigcup_{j=1}^{j_0(u)} proj._y(I_{uj}^{**})) \leq \mu_1(proj._y(S) - \bigcup_{v=1}^{v_0} J(y_v)) = \mu_1[\{(proj._y(S)-Y)+(proj._y(S)\frown Y)\} - \bigcup_{v=1}^{v_0} J(y_v)] = \mu_1[\{(proj._y(S) - Y)+Y\} - \bigcup_{v=1}^{v_0} J(y_v)] \leq \mu_1(proj._y(S)-Y)+\mu_1(Y-\bigcup_{v=1}^{v_0} J(y_v)) < \kappa_i + \kappa_i = 2\kappa_i \leq \rho\,(m_i, \varepsilon_i/7)$. Puisque $I_{ij}^{**}\frown A_i \neq 0$, on a $I_{ij}^{**}\frown F_{n_i m_i} \neq 0$. Donc, $I_{ij}^{*}\frown B_{m_i} \neq 0$, puisque $F_{n_i m_i} \leq B_{m_i}$ en vertu de la construction de la suite d'ensembles fermés B_i $(i=1,2,\cdots)$ prise dans le Lemme 3. On a donc $|\sum_{u=1}^{u_0}\sum_{j=1}^{j_0(u)} F(I_{uj}^{*})| < \varepsilon_i/7$. D'autre part, on a $|\sum_{u=1}^{u_0}\sum_{j=1}^{j_0(u)}(L)\iint_{I_{ij}^{*}\cap D_i} f(x,y)\,d(x,y)| < \varepsilon_i/7$, puisque $\bigcup_{l=1}^{l_0}\bigcup_{j=1}^{j_0(l)} |I_{ij}^{**}| < \eta(m_i, \varepsilon_i/7)$.

4°) Selon 1°)-3°), $|F(S)-(L)\iint_{S\cap D_i} f(x,y)\,d(x,y)| < \varepsilon_i$.

Remarque (1). On déduit aussitôt des constructions des suites A_i, D_i $(i=1,2,\cdots)$ que pour tout B_i, pris dans Lemme 4, il y a un indice $n(i)$ tel que $0 \leq n(i) < n(i')$ pour tout $i < i'$ et on a $D_{n(i)} \leq A_{n(i)} \leq B_i$, où l'on pose $D_{n(i)} = 0$ pour $n(i) = 0$.

Lemme 5. *Soient A_n $(n=1,2,\cdots)$ une suite non-décroissante d'ensembles dont le total est un intervalle I_0 d'une dimension et D_n $(n=1,2,\cdots)$ une suite non-décroissante des ensembles mesurables de presque total I_0 et tels que $D_i \leq A_i$. Si une fonction $f(x)$, définie sur I_0 et sommable sur tout D_n, ne jouit pas de la propriété suivante:*

(*) *Il y a $\lim_{n\to\infty}(L)\int_{I\cap D_n} f(x)\,dx$ pour tout $I \leq I_0$ et de plus, quel que soit la suite $\varepsilon_n \downarrow 0$, pour tout n il y a un $m(n) \geq n$ tel que la condition $I_t \frown A_{m(n)} \neq 0$ $(t=1,2,\cdots,t_0)$ entraîne*

$$|\sum_{t=1}^{t_0} F(I_t) - \sum_{t=1}^{t_0}(L)\int_{I_t \cap D_{m(n)}} f(x)\,dx| < \varepsilon_n,$$

quel que soit le système élémentaire I_t $(t=1,\cdots,t_0)$, on désigne par $F(I)$ le nombre $\lim_{n\to\infty}(L)\int_{I\cap D_n} f(x)\,dx$.

Alors, il y a un nombre $h_0 > 0$ et une suite partielle A_{m_j} $(j=1,2,\cdots)$ de A_m $(m=1,2,\cdots)$, jouissant de la propriété telle que pour tout m_j il y a, *quel que soit* $\eta>0$, *un système elementaire* $I_t=I_t(j,\eta)$ $(t=1,2,\cdots,t_0=t_0(j,\eta))$ *tel que*:

1) *les deux extrémités d'intervalle* I_t *sont les points rationnels pour tout* t.

2) $I_t\wedge A_{m_j}\neq 0$ *pour tout* t.

3) *il y a un* m_j' *tel que* $m_j'>m_j$ *et* $|\sum_{t=1}^{t_0}(L)\int_{(D'_{m_j}-D_{m_j})\cap I_t}f(x)\,dx|>h_0$,

4) $|\sum_{t=1}^{t_0}(L)\int_{D_{m_j}\cap I_t}f(x)\,dx|<\eta$.

Démonstration. i) Le cas où il y a un intervalle I tel qu'il n'y a pas $\lim_{n\to\infty}(L)\int_{I\cap D_n}f(x)\,dx$. Dans le cas il y a un nombre $h_0>0$ et un m_0 tels que $D_{m_0}\wedge I\neq 0$ et pour tout $m\geq m_0$ il y a un $m'=m'(m)$ tel que $m'>m$ et $|(L)\int_{(D_{m'}-D_m)\cap I}f(x)\,dx|=\alpha_0>h_0$. Puisque $f(x)$ est sommable sur $D_{m'}$, il y a pour tout $\varepsilon>0$ tel que $\varepsilon<\min(\eta,\alpha_0-h_0)$, un nombre $\pi(\varepsilon,m')$ tel que $\mu(E)<\pi(\varepsilon,m')$ entraîne $|(L)\int_{D_{m'}\cap E}f(x)\,dx|<\varepsilon/2$.

i.i) Pour le cas où $\mu_1(D_m\wedge I)<\mu(\varepsilon,m')$ pour un m certain tel que $m\geq m_0$: Soit I_1 un intervalle, possédant les extrémités rationnelles, tel que $I_1\geq I$ et $\mu_1(I_1-I)<\pi(\varepsilon,m')$. On a $I_1\wedge A_m\neq 0$, puisque $I\wedge D_{m_0}\neq 0$. On a de plus $|(L)\int_{(D_{m'}-D_m)\cap I_1}f(x)\,dx|\geq|(L)\int_{(D_{m'}-D_m)\cap I}f(x)\,dx|-|(L)\int_{(D_{m'}-D_m)\cap(I_1-I)}f(x)\,dx|=\alpha_0-\varepsilon/2>h_0$ et $|(L)\int_{D_m\cap I_1}f(x)\,dx|\leq|(L)\int_{D_m\cap(I_1-I)}f(x)\,dx|+|(L)\int_{D_m\cap I}f(x)\,dx|<\varepsilon$.

i. ii) Pour le cas où $\mu_1(D_m\wedge I)\geq\pi(\varepsilon,m')$ pour un certain m tel que $m\geq m_0$: En vertu du Théorème de Vitali il y a des intervalles J_t $(t=1,2,\cdots,t_0-1)$, qui n'ont deux à deux aucun point commun, possédant les extrémités appartenant à D_m et tels qu'on ait $J_t\leq I$ pour tout t, $\mu_1(\bigcup_{t=1}^{t_0-1}J_t-D_m)<\pi(\varepsilon,m')$ et $\mu_1(D_m-\bigcup_{t=1}^{t_0-1}J_t)<\pi(\varepsilon,m')$. Soient I_t' $(t=1,2,\cdots,t_0)$ les intervalles contigus à l'ensemble formé des points de $\bigcup_{t=1}^{t_0-1}J_t$ et d'extrémités de I. Pour ces intervalles I_t' il y a d'autres intervalles I_t $(t=1,2,\cdots,t_0)$, qui n'ont deux à deux aucun point commun, possédant les extrémités rationnelles et tels que $I_t\geq I_t'$ pour tout t et $\sum_{t=1}^{t_0}\mu_1(I_t-I_t')<\pi(\varepsilon,m')$. On a alors $I_t\wedge A_m\neq 0$ pour tout t. De plus on a $|\sum_{t=1}^{t_0}(L)\int_{(D_{m'}-D_m)\cap I_t}f(x)\,dx|\geq|(L)\int_{(D_{m'}-D_m)\cap I}f(x)\,dx|-|(L)\int_{(D_{m'}-D_m)\cap(\bigcup_{t=1}^{t_0-1}J_t-\bigcup_{t=1}^{t_0}I_t)}f(x)\,dx|\geq\alpha_0-\varepsilon/2>h_0$ et $|\sum_{t=1}^{t_0}(L)\int_{D_m\cap I_t}f(x)\,dx|$

$\leq |(L)\int_{D_m\cap(\bigcup_{t=1}^{t_0} I_{t'})} f(x)\,dx| + |(L)\int_{D_m\cap(\bigcup_{t=1}^{t_0-1} J_t\cap\bigcup_{t=1}^{t_0} I_t)} f(x)\,dx| < \varepsilon \leq \eta$. Conséquemment, en posant $m_j = m_0+j$ et $m_j' = (m_0+j)'$ pour tout $j = 1, 2, \cdots$, on peut voir le résultat voulu par i. i) et i. ii).

ii) Le cas où il y a $\lim_{n\to\infty}(L)\int_{I\cap D_n} f(x)\,dx$ pour tout $I\leq I_0$: Dans le cas où il y a un nombre $h_0 > 0$ et un m_0 tels que pour tout $m \geq m_0$ il y a un système élémentaire I_t $(t = 1, 2, \cdots, t_0)$, dépendant de m, tel que $I_t \wedge A_m \neq 0$ pour tout t et $|\sum_{t=1}^{t_0} F(I_t) - \sum_{t=1}^{t_0}(L)\int_{I_t\cap D_m} f(x)\,dx| > h_0$. Par suite, puisque $F(I_t) = \lim_{n\to\infty}(L)\int_{I_t\cap D_n} f(x)\,dx$, pour tout $m \geq m_0$ il y a un $m' = m'(m)$ tel qu'on ait $m' > m$ et $|\sum_{t=1}^{t_0}(L)\int_{(D_{m'}-D_m)\cap I_t} f(x)\,dx| > h_0$. On en peut conclure le résultat voulu en raisonnant de la même manière que i).

Théorème 6. *Soit $f(x_1, x_2, \cdots, x_{n_0})$ une fonction intégrable $(\mathfrak{D})$ sur un intervalle $R_0 = [a_1, b_1;\ a_2, b_2;\ \cdots;\ a_{n_0}, b_{n_0}]$ de l'espace E_{n_0}. Alors, elle jouit des propriétés suivantes:*

1) *Pour tout n $(n = 1, 2, \cdots, n_0)$, la fonction $f(x_1, x_2, \cdots, x_{n_0})$ considérée comme fonction de x_n dans l'intervalle $[a_n, b_n]$ est intégrable au sens de Denjoy sur $[a_n, b_n]$ pour presque toutes les valeurs de $(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_{n+1}, \cdots, x_{n_0})$ de l'intervalle $[a_1, b_1;\ \cdots;\ a_{n-1}, b_{n-1};\ a_{n+1}, b_{n+1};\ \cdots\ a_{n_0}, b_{n_0}]$.*

2) $$(\mathfrak{D})\iint\cdots\int_{R_0} f(x_1, \cdots, x_{n_0})\,d(x_1, \cdots, x_{n_0})$$
$$= (D)\int_{a_{n_1}}^{b_{n_1}}((D)\int_{a_{n_2}}^{b_{n_2}}\cdots((D)\int_{a_{n_{n_0}}}^{b_{n_{n_0}}} f(x_1, \cdots, x_{n_0})\,d(x_{n_{n_0}}))\cdots d(x_{n_2}))\,d(x_{n_1})),$$

où $n_1, n_2, \cdots, n_{n_0}$ une suite arbitraire composé des nombres $1, 2, \cdots, n_0$.

3) *Pour tout n $(n = 1, 2, \cdots, n_0)$, il y a une suite des ensembles fermés D_i $(i = 1, 2, \cdots)$, dépendante de n, non-décroissante, de presque total R_0 et telle qu'elle jouit de*

$$(D)\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \cdots, x_{n_0})\,d(x_n) = \lim_{n\to\infty}(L)\int_{D_i^q} f(x_1, \cdots, x_{n_0})\,d(x_n),$$

pour presque toutes les valeurs de $q = (x_1, \cdots, x_{n-1}, x_{n+1}, \cdots, x_{n_0})$ de l'intervalle $[a_1, b_1;\ \cdots;\ a_{n-1}, b_{n-1};\ a_{n+1}, b_{n+1};\ \cdots;\ a_{n_0}, b_{n_0}]$.

Démonstration. Simplement, nous nous bornons au cas de $R_0 = [0,1\,;0,1]$. Commençons d'abord par la démonstration de 1). Soit ε_n $(n = 1, 2, \cdots)$ une suite telle que $\varepsilon_n \downarrow 0$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n < \infty$. Soient A_i $(i=1, 2, \cdots)$ et D_i $(i=1, 2, \cdots)$ les deux suites d'ensembles et κ_i $(i=1, 2, \cdots)$

la suite de nombres naturels, mentionnés à Lemme 4 pour la fonction $f(x, y)$ et la suite $\varepsilon_n \downarrow 0$. Il y a alors un sous-ensemble Z_0 de $proj._y(R_0)$, de mesure nulle et tel que pour tout y de $proj._y(R_0)-Z_0$, A_i^y $(i=1, 2, \cdots)$ soit la suite non-décroissante des ensembles fermés de total $(R_0)^y$, que D_i^y $(i=1, 2, \cdots)$ soit la suite non-décroissante d'ensembles fermés de presque total R_0^y et satisfaisant à $D_i^y \subseteq A_i^y$ et que $f(x, y)$ soit sommable comme fonction de x sur D_i^y pour tout i. Par suite, vu le Théorème 5, il suffit de montrer que pour presque tous les points y de $proj._y(R_0)-Z_0$, la fonction $f(x, y)$, comme fonction de x, jouit de la propriété $(*)$ de Lemme 5 pour les deux suites A_i^y, D_i^y $(i=1, 2, \cdots)$. Désignons par Y^* l'ensemble de tous les points y de $proj._y(R_0)-Z_0$, ne jouissant pas de la propriété $(*)$. En supposant que la mesure extérieure de Y^* soit positive, nous allons tirer la contradiction.

Pour tout $y \in Y^*$, de Lemme 5, il y a un nombre $h_0(y)$ et une suite partielle $A_{i_j(y)}^y$ $(j=1, 2, \cdots)$ de A_i^y $(i=1, 2, \cdots)$ jouissant de la propriété telle que pour tout $i_j(y)$ il y a, quel que soit $\eta > 0$, un système élémentaire $I_t = I_t(y, j, \eta)$ $(t=1, 2, \cdots, t_0 = t_0(y, j, \eta))$ d'une dimension tel que:

1) les deux extrémités de I_t sont les points rationnels pour tout t.

2) $I_t \frown A_{i_j(y)} \neq 0$ pour tout t.

3) il y a un $i_j'(y)$ tel que $i_j'(y) > i_j(y)$ et

$$\left|\sum_{t=1}^{t_0}(L)\int_{(D_{i'_j(y)}-D_{i_j(y)})\frown I_t} f(x, y)\,dx\right| > h_0(y).$$

4) $\displaystyle\left|\sum_{t=1}^{t_0}(L)\int_{D_{i_j(y)}\frown I_t} f(x, y)\,dx\right| < \eta.$

Soit h_0 un nombre positif tel que la mesure extérieure de l'ensemble Y^{**} de tous les points y de Y^*, où $h_0(y) \geq h_0$, est égale à $2k_0 (>0)$. Soient i_0, i_1, i_2 les indices tels que $\varepsilon_{i_0}+\varepsilon_{i_1} < \dfrac{h_0 \cdot k_0}{8}$, $\varepsilon_{i_1} < \varepsilon_{i_0}$ et $\sum_{i=i_0}^{\infty}\varepsilon_i < \varepsilon_{i_0}$.

En effet, pour tout $y \in Y^{**}$, il y a deux nombres naturels $i'(y)$, $i(y)$, où $i'(y) > i(y) \geq i_0$, et un système élémentaire $I_t(y)$ $(t=1, 2, \cdots, t_0(y))$ d'une dimension, jouissant des propriétés suivantes:

α) les deux extrémités de $I_t(y)$ sont les points rationnels pour tout t.

β) $I_t(y) \frown A_{i(y)} \neq 0$ pour tout t.

γ) $\displaystyle\left|\sum_{t=1}^{t_0(y)}(L)\int_{(D_{i'(y)}-D_{i(y)})\frown I_t} f(x, y)\,dx\right| > h_0,$

δ) $\displaystyle\left|\sum_{t=1}^{t_0(y)}(L)\int_{D_{i(y)}\frown I_t} f(x, y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon_{i_1}}{2}.$

Supposons qu'il y a un sous-ensemble Y' de Y^{**} tel que la mesure extérieure $\geq k_0$ et que pour tout y de Y' on a

γ') $\sum_{t=1}^{t_0(y)}(L)\int_{(D_{i'(y)}-D_{i(y)})\cap I_t} f(x,y)\,dx > h_0$

au lieu de γ), puisqu'il en est de même du cas contraire.

Soit, pour tout nombre naturel i, Y_i l'ensemble de tous les points y de $proj._y(R_0)-Z_0$ tels qu'il y a deux nombres naturels $i'(y), i(y)$, où $i \geq i'(y) > i(y) \geq i_2$, et un système élémentaire $I_t(y)$ $(t=1, 2, \cdots, t_0(y))$ d'une dimension, jouissant des propriétés α), β), γ'), δ). Alors, on peut voir aussitôt que Y_i est mesurable (μ_1). Par suite, il y a un indice i^* tel que $\mu_1(Y_{i^*}) > \frac{3}{4}k_0$, puisqu'alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i \geq Y'$. Posons simplement que $Y_0 = Y_{i^*}$.

L'ensemble de toutes les combinaisons C: (S^1, i', i), où S^1 est un système élémentaire d'une dimension dans $proj._x(R_0)$ possédant les extrémités rationnelles et i', i sont deux nombres naturels tels que $i^* \geq i' > i \geq i_2$, est dénombrable. Donc, nous le désignons simplement par C_s: $(S_s, i'(s), i(s))$, S_s^1: $\{J_{st}$ $(t=1, 2, \cdots, t_0(s)\}$ $(s=1, 2, \cdots)$. Pour tout C_s, désignons par Y_s' l'ensemble de tous les points de Y_0 jouissant des propriétés suivantes:

β^*) $(J_{st}\times\{y\})\cap A_{i(s)} \neq 0$ pour tout $t=1, 2, \cdots, t_0(s)$,

γ^*) $\sum_{t=1}^{t_0(s)}(L)\int_{(D_{i'(s)}-D_{i(s)})\cap(J_{st}\times\{y\})} f(x,y)\,dx > h_0$,

δ^*) $\left|\sum_{t=1}^{t_0(s)}(L)\int_{D_{i(s)}\cap(J_{st}\times\{y\})} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon_{i_1}/2$.

Alors, Y_s' est mesurable (μ_1). Posons $Y_s = Y_s' - \bigcup_{t=1}^{s-1} Y_t'$, où Y_s peut être vide. On a évidemment $Y_0 = \bigcup_{s=1}^{\infty} Y_s$. Par suite, il y a un s_0 tel que $\sum_{s=1}^{s_0}\mu_1(Y_s) > \frac{3}{4}k_0$.

En vertu du Théorème de Vitali, il y a, pour tout s tel que $s \leq s_0$ et $Y_s \neq 0$, un système élémentaire K_j^s $(j=1, 2, \cdots j_0(s))$ dans $proj._y(R_0)$ tel que $K_j^s \cap Y_s \neq 0$ pour tout j, $norm\,(K_j^s) < \kappa_i$ pour tout j, $\mu_1(Y_s - \bigcup_{j=1}^{j_0(s)} K_j^s) < \frac{k_0}{2s_0}$ et $\mu_1(\bigcup_{j=1}^{j_0(s)} K_j^s - Y_s) < (1/s_0)\min(\delta, \kappa_{i^*})$, où δ un nombre positif tel que $\mu_2(E) < \delta$ entraîne $\left|(L)\iint_{E\cap D_{i^*}} f(x,y)\,d(x,y)\right| < \varepsilon_{i_1}/2$. Mais, pour tout $s \leq s_0$ tel que $Y_s = 0$, considérons le système vide. En outre, K_j^s $(s=1, 2, \cdots, s_0;\ j=1, 2, \cdots, j_0(s))$ n'ont deux à deux aucun point commun.

Posons $I_{tj}^s = I_{st}\times K_j^s$. Alors S: $\{I_{tj}^s$ $(s=1, 2, \cdots, s_0;\ t=1, 2, \cdots, t_0(s);\ j=1, 2, \cdots, j_0(s)\}$ est $(**)$-système élémentaire dans R composé de $(*)$-systèmes élémentaires S_{sj}: $\{I_{tj}^s$ $(t=1, 2, \cdots, t_0(s)\}$ $(s=1, 2, \cdots, s_0;$

$j=1, 2, \cdots, j_0(s)$). Pour tout s, S_{sj} $(j=1, 2, \cdots, j_0(s))$ jouit des propriétés suivantes:

1) $norm\,(proj._y(S_{sj})) = norm\,(K_j^s) < \kappa_i$.

2) Posons $Y_s' = proj._y(\bigcup_{j=1}^{j_0(s)} S_{sj}) \frown Y_s$, alors on a:

2.1) $Y_s' \leq proj._y(\bigcup_{j=1}^{j_0(s)} S_{sj}) \frown proj._y(A_{i(s)})$, selon β^*).

2.2) $proj._y(S_{sj}) \frown Y_s' \neq 0$ pour tout j, puisque $K_j^s \frown Y_s \neq 0$.

2.3) $\mu_1(proj._y(\bigcup_{j=1}^{j_0(s)} S_{sj}) - Y_s') = \mu_1(\bigcup_{j=1}^{j_0(s)} K_{sj} - Y_s') < \frac{1}{s_0} \min(\delta, \kappa_i *)$.

2.4) Pour tout y de $S_{sj} \frown Y_s'$, on a $(I_{tj}^s)^y \frown A_{i(s)} = (J_{st} \times \{y\}) \frown A_{i(s)} \neq 0$ pour tout $t = 1, 2, \cdots, t_0(s)$.

On a, selon 2.3), $\mu_1(\bigcup_{i(s)=i}(proj._y(\bigcup_{j=1}^{j_0(s)} S_{sj}) - Y_s')) < \frac{1}{s_0} \min(\delta, \kappa_i *) \times s_0$ $= \min(\delta, \kappa_i *) \leq \min(\delta, \kappa_i) \leq \kappa_i$, où $\bigcup_{i(s)=i}$ se désigne la somme par rapport à s tels que $i(s) = i$ et $s \leq s_0$.

Conséquemment, en vertu du Lemme 4, on a

$$|\sum_{i(s)=i} \sum_{j=1}^{j_0(s)} (F(S_{sj}) - (L) \iint_{S_{sj} \cap D_i} f(x, y)\, d(x, y))| < \varepsilon_i.$$

D'où on a

$$|\sum_{i=i_2}^{i^*} \sum_{i(s)=i} \sum_{j=1}^{j_0(s)} (F(S_{sj}) - (L) \iint_{S_{sj} \cap D_i} f(x, y)\, d(x, y))| < \sum_{i=i_2}^{i^*} \varepsilon_i < \varepsilon_{i_0}.$$

On a donc

$$|F(S) - \sum_{s=1}^{s_0} \sum_{j=1}^{j_0(s)} (L) \iint_{S_{sj} \cap D_{i(s)}} f(x, y) d(x, y)| < \varepsilon_{i_0}.$$

Par suite, $|F(S)| < \varepsilon_{i_0} + |\sum_{s=1}^{s_0} \sum_{j=1}^{j_0(s)} (L) \iint_{S_{sj} \cap D_{i(s)}} f(x, y)\, d(x, y)|$. Or, posons simplement $V_s = \bigcup_{t=1}^{t_0(s)} J_{st}$ et $W_s = \bigcup_{j=1}^{j_0(s)} K_j^s$. On a alors $|\sum_{s=1}^{s_0} \sum_{j=1}^{j_0(s)} (L) \iint_{S_{sj} \cap D_{i(s)}} f(x, y)\, d(x, y)| \leq |\sum_{s=1}^{s_0} (L) \iint_{(V_s \times Y_s') \cap D_{i(s)}} f(x, y)\, d(x, y)| + |\sum_{s=1}^{s_0} (L) \iint_{(V_s \times (W_s - Y_s')) \cap D_{i(s)}} f(x, y)\, d(x, y)| < \varepsilon_{i_1}/2 + \varepsilon_{i_1}/2 = \varepsilon_{i_1}$. Pour le voir, il suffit de nous rappeler δ^*) et le Théorème de Fubini, et ce qu'on a $\sum_{s=1}^{s_0} \mu_1(W_s - Y_s') < \delta$ et $i(s) \leq i^*$. Enfin, nons sommes amenés à l'inégalité importante: $|F(S)| < \varepsilon_{i_0} + \varepsilon_{i_1} < h_0 k_0/8$.

D'autre part, de même que le cas de $i(s)$, on peut tirer, pour $i'(z)$, $|F(S) - \sum_{s=1}^{s_0} \sum_{j=1}^{j_0(s)} (L) \iint_{S_{sj} \cap D_{i'(s)}} f(x, y)\, d(x, y)| < \varepsilon_{i_0}$. Par suite, on a $|F(S)|$

$>\sum_{s=1}^{s_0}\sum_{j=1}^{j_0(s)}(L)\iint_{S_{sj}\cap D_{i'(s)}} f(x, y)\,d(x, y)-\varepsilon_{i_0}$. D'ailleurs, $\sum_{s=1}^{s_0}\sum_{j=1}^{j_0(s)}(L)\iint_{S_{sj}\cap D_{i'(s)}}$ $f(x, y)\,d(x, y)\geq\sum_{s=1}^{s_0}(L)\iint_{(V_s\times Y_s')\cap(D_{i'(s)}-D_{i(s)})} f(x, y)\,d(x, y)-|\sum_{s=1}^{s_0}(L)$ $\iint_{(V_s\times Y_s')\cap D_{i(s)}} f(x, y)\,d(x, y)|-|\sum_{s=1}^{s_0}(L)\iint_{(V_s\times(W_s-Y_s'))\cap D_{i'(s)}} f(x, y)\,d(x, y)|$ $>\left(h_0\times\frac{k_0}{4}\right)-\frac{\varepsilon_{i_1}}{2}-\frac{\varepsilon_{i_1}}{2}=\frac{h_0k_0}{4}-\varepsilon_{i_1}$. Car, on a $\sum_{s=1}^{s_0}\mu_1(Y_s-\bigcup_{s=1}^{j_0(s)}K_j^s)<k_0/2$, par suite $\sum_{s=1}^{s_0}\mu_1(Y_s')=\sum_{s=1}^{s_0}\mu_1(Y_s)-\sum_{s=1}^{s_0}\mu_1(Y_s-\bigcup_{j=1}^{j_0(s)}K_j^s)>\frac{3}{4}k_0-\frac{k_0}{2}=\frac{k_0}{4}$. On a, de plus, pour tout $y\in Y_s'$ $(s=1, 2, \cdots, s_0)$, $(L)\int_{(D_{i'(s)}-D_{i(s)})\cap(V_{st}\times\{y\})}$ $f(x, y)\,dx>h_0$. En effet, en vertu du Théorème de Fubini, on a $\sum_{s=1}^{s_0}(L)\iint_{(V_s\times Y_s')\cap(D_{i'(s)}-D_{i(s)})} f(x, y)\,d(x, y)>h_0k_0/4$. D'après δ^*), on a $|\sum_{s=1}^{s_0}(L)\iint_{(V_s\times Y_s')\cap D_{i(s)}} f(x, y)\,d(x, y)|<\varepsilon_{i_1}/2$. Enfin, on a $|\sum_{s=1}^{s_0}(L)$ $\iint_{(V_s\times(W_s-Y_s'))\cap D_{i'(s)}} f(x, y)\,d(x, y)|<\varepsilon_{i_1}/2$, puisque $\sum_{s=1}^{s_0}\mu_1(W_s-Y_s')<\delta$ et $i'(s)\leq i^*$. Conséquemment, $|F(S)|>\frac{h_0k_0}{4}-(\varepsilon_{i_0}+\varepsilon_{i_1})>\frac{h_0k_0}{4}-\frac{h_0k_0}{8}=\frac{h_0k_0}{8}$, contrairement à $|F(S)|<\frac{h_0k_0}{8}$.

En effet, pour tout point y de $proj._y(R_0)$ n'appartenant pas à W_0, où W_0 est un ensemble de mesure (μ_1) nulle, il y a $\lim_{i\to\infty}(L)\int_{D_i^y} f(x, y)\,dx$, $f(x, y)$ est intégrable au sens de Denjoy comme fonction de x dans $proj._x(R_0)$ et $(D)\int_0^1 f(x, y)\,dx=\lim_{i\to\infty}(L)\int_{D_i^y} f(x, y)\,dx$.

Passons maintenant à la démonstration de 2). On pose

$$f_i(y)=\begin{cases}(L)\int_{D_i^y} f(x, y)\,dx & \text{pour tout } y\in proj._y(R_0)-W_0,\\ 0 & \text{pour tout } y\in W_0,\end{cases}$$

$$f(y)=\begin{cases}(D)\int_{D_i^y} f(x, y)\,dx & \text{pour tout } y\in proj._y(R_0)-W_0,\\ 0 & \text{pour tout } y\in W_0,\end{cases}$$

Puisqu'alors $f(y)=\lim_{i\to\infty} f_i(y)$ et $f(y)$, $f_i(y)$ $(i=1, 2, \cdots)$ sont mesurables (μ_1), il y a, en vertu du Théorème d'Egoroff, une suite M_i' $(i=0, 1, 2, \cdots)$ d'ensembles, de total $proj._y(R_0)$, jouissant des propriétés: M_0 est l'ensemble de mesure μ_1 nulle, M_i' est fermé pour tout $i=1, 2, \cdots$, $M_{i+1}'\supseteq M_i'$ pour tout $i=1, 2, \cdots$ et la convergence de $\{f_i(y)\}$ vers $f(y)$ dans M_i' est uniforme pour tout $i=1, 2, \cdots$.

Soit B_i $(i=1, 2, \cdots)$ une suite d'ensembles mentionnée à Lemme 3 pour la fonction $f(x, y)$. Posons $X_0 = proj._y(R_0) - \bigcup_{i=1}^{\infty} proj._y(D_i)$. $M_i = \{(proj._y(B_i) \cap X_0) \cup proj._y(D_i)\} \cap \{M_0' \cup M_i'\}$, $N_i = proj._y(D_i) \cap M_i'$ pour tout $i = 1, 2, \cdots$. On peut voir aussitôt que M_i $(i = 1, 2, \cdots)$ est la suite non-décoissante d'ensembles telle que $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i = proj._y(R_0)$ et que N_i $(i = 1, 2, \cdots)$ est la suite non-décroissante d'ensembles fermés telle que $M_i \supseteq N_i$, $\mu_1(proj._y(R_0) - \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i) = 0$. On voit de plus que $f(y)$ est sommable sur tout N_i. Car, puisque la convergence de $\{f_j(y)\}$ vers $f(y)$ dans N_i $(\subseteq M_i')$ est uniforme, il y a pour tout $\varepsilon > 0$ un $j_0 = j_0(\varepsilon)$ tel que $|f(y) - f_{j_0}(y)| < \varepsilon$ pour tout $y \in N_i$, de sorte que $|f(y)| \leq |f_{j_0}(y)| + \varepsilon$ pour tout $y \in N_i$. De plus, puisque $f_{j_0}(y)$ est intégrable sur N_i, il en est de même de $f(y)$.

Conséquemment, il suffit de montrer 2) de la définition 1. Pour un indice i et $\varepsilon > 0$, il y a $i_0 = i_0(i, \varepsilon)$ tel que $i_0 \geq i$, $\varepsilon_{i_0} < \varepsilon/5$ et $|f(y) - f_{i_0}(y)| < \varepsilon/5$ pour tout $y \in M_i - M_0'$. Soit $\eta(i, \varepsilon)$ un nombre positif tel que $\mu_2(E) < \eta(i_0, \varepsilon)$ entraîne $|(L) \iint_{E \cap D_{i_0}} f(x, y)\, d(x, y)| < \varepsilon/5$. Soit $\eta^*(i, \varepsilon)$ un nombre positif tel que $\mu_1(E) < \eta^*(i, \varepsilon)$ entraîne $|(L) \int_{E \cap N_i} f(y)\, dy| < \varepsilon/5$. Posons $\delta'(i, \varepsilon) = \min(\kappa_{i_0}, \rho(i, \varepsilon/5), \eta(i_0, \varepsilon), \eta^*(i, \varepsilon))$, où $\rho(i, \varepsilon/5)$ le nombre mentionné à Lemme 3. Soit I_t $(t = 1, 2, \cdots, t_0)$ un système élémentaire dans $proj._y(R_0)$ tel que $I_t \cap M_i \neq 0$ pour tout t, $\mu_1(\bigcup_{t=1}^{t_0} I_t - M_i) < \delta'(i, \varepsilon)$ et $norm\,(I_t) < 1/i$ pour tout t. Montrons que $|\sum_{t=1}^{t_0} G(I_t) - \sum_{t=1}^{t_0} (L) \int_{I_t \cap N_i} f(y)\, dy| < \varepsilon$, où $G(I) = F(I^*)$, $I^* = proj._x(R_0) \times I$. Désignons par I_{1t} $(t = 1, 2, \cdots, t_1)$ tous les intervalles I_t tels que $I_t \cap proj._y(D_i) \neq 0$ parmi des I_t $(t = 1, 2, \cdots, t_0)$ et par I_{2t} $(t = 1, 2, \cdots, t_2)$ tous les autres intervalles.

1°) Pour I_{2t} $(t = 1, 2, \cdots, t_2)$: $\mu_1(\bigcup_{t=1}^{t_2} I_{2t}) = \mu_1(\bigcup_{t=1}^{t_2} I_{2t} - M_i) < \delta'(i, \varepsilon) = \rho(i, \varepsilon/5)$. Posons $I_{2t}^* = proj._x(R_0) \times I_{2t}$ $(t = 1, 2, \cdots, t_2)$. On a alors $I_{2t} \cap proj._y(B_i) \neq 0$ et $norm\,(I_{2t}) < 1/i$. Par suite de Lemme 3 on a $|\sum_{t=1}^{t_2} F(I_{2t}^*)| < \varepsilon/5$. Il en résulte $|\sum_{t=1}^{t_2} (L) \int_{I_{2t} \cap N_i} f(y)\, dy| < \varepsilon/5$, puisque $\mu_1(\bigcup_{t=1}^{t_2} I_{2t}) < \delta'(i, \varepsilon) \leq \eta^*(i, \varepsilon)$. En effet, $|\sum_{t=1}^{t_2} G(I_{2t}) - \sum_{t=1}^{t_2} (L) \int_{I_{2t} \cap N_i} f(y)\, (dy)| < (\varepsilon/5) \times 2 = 2\varepsilon/5$.

2°) Pour I_{1t} $(t=1, 2, \cdots, t_1)$: $|\sum_{t=1}^{t_1} G(I_{1t}) - \sum_{t=1}^{t_1} (L) \int_{I_{1t} \cap N_i} f(y) dy| \leq |\sum_{t=1}^{t_1} G(I_{1t}) - \sum_{t=1}^{t_1} (L) \int_{I_{1t}} f_{i_0}(y)\, dy| + |\sum_{t=1}^{t_1} (L) \int_{I_{1t} - N_i} f_{i_0}(y)\, dy| + |\sum_{t=1}^{t_1} (L) \int_{I_{1t} \cap N_i} (f(y)$

$-f_{i_0}(y))\,dy|$. On a $|\sum_{t=1}^{t_1} G(I_{1t}) - \sum_{t=1}^{t_1}(L)\int_{I_{1t}} f_{i_0}(y)\,dy| = |\sum_{t=1}^{t_1} F(I_{1t}^*) - \sum_{t=1}^{t_1}(L)$ $\int_{I_{1t}^* \cap D_{i_0}} f(x, y)\,d(x, y)| < \varepsilon_{i_0} < \varepsilon/5$, puisque $I_{1t} \frown proj._y(A_{i_0}) \neq 0$ pour tout t, *norm* $(I_{1t}) < \kappa_{i_0}$ pour tout t et $\mu_1(\bigcup_{t=1}^{t_1} I_{1t} - \bigcup_{t=1}^{t_1}(I_{1t} \frown proj._y(D_i)) \leq \mu_1(\bigcup_{t=1}^{t_1} I_{1t} - M_i)$ $< \delta'(i, \varepsilon) \leq \kappa_{i_0}$. On a $|\sum_{t=1}^{t_1}(L)\int_{I_{1t} \cap N_i}(f(y) - f_{i_0}(y))\,dy| < \varepsilon/5$, puisque $|f(y) - f_{i_0}(y)| < \varepsilon/5$ pour tout $y \in N_i$. Enfin, on a $|\sum_{t=1}^{t_1}(L)\int_{I_{1t} - N_i} f_{i_0}(y)\,dy|$ $= |\sum_{t=1}^{t_1}(L)\iint_{(I_{1t} - N_i)^* \cap D_{i_0}} f(x, y)\,d(x, y)| < \varepsilon/5$, où $(I_{1t} - N_i)^* = proj._x(R_0) \times (I_{1t} - N_i)$, puisque $\mu_1(\bigcup_{t=1}^{t_1} I_{1t} - N_i) = \mu_1(\bigcup_{t=1}^{t_1} I_{1t} - M_i) < \delta'(i, \varepsilon) \leq \eta(i, \varepsilon)$. Conséquemment, il en résulte que $|\sum_{t=1}^{t_1} G(I_{1t}) - \sum_{t=1}^{t_1}(L)\int_{I_{1t} \cap N_i} f(y)\,dy|$ $< (\varepsilon/5) \times 3$. Évidemment 1°) et 2°) nous donnons le résultat voulu.

Quant à la propriété 3) de ce théorème on peut la voir dans la démonstration de 1).

Remarque (2). Pour traiter la cas où $n_0 > 2$, il suffit de poser $M_i = \{(\underset{E_{n_0=1}}{proj.}{}_y(B) \frown X_0) \bigcup proj._y(D_{n(i)})\} \frown \{M_0' \bigcup M_i'\}$, $N_i = \underset{E_{n_0-1}}{proj.}{}_y(D_{n(i)}) \frown M_i'$ pour tout $i = 1, 2, \cdots$ dans la démonstration de 2) du Théorème 6 (voir *p.* 101), où $n(i)$ est un indice tel que $0 \leq n(i) \leq n(i')$ pour tout $i < i'$ et qu'on a $D_{n(i)} \subseteq A_{n(i)} \subseteq B_i$ (pour $n(i) = 0$, on pose $D_{n(i)} = A_{n(i)} = 0$)[11].

(Reçu le 25 Mars, 1955)

11) Voir Remarque (1).