Table des matières.

Introduction à la trigonométrie sphérique.

Cours d'astronomie sphérique.

Chap. I. Sphère céleste et son mouvement diurne.

Chap. V. Théorie de la Réfraction atmosphérique

Chap. VI. Complément au Chap. I.

Chap. VII. Digression sur l'Interpolation

Chap. VIII. Détermination des valeurs approchées du mouvement du Soleil

Chap. IX. Etude du mouvement de la Lune

Chap. X. Étude du mouvement de translation des planètes

Chap. XI. De la Précession

Chap. XII. De la Nutation.

Chap. XIII. Théorie de l'Aberration.

Chap. XIV. Réduction du lieu moyen d'une étoile à son lieu apparent.

Introduction à la trigonométrie sphérique.

I. Des projections.

Projections sur un plan.— ~~Définitions~~.— Étant donnés un plan fixe P et une droite ox non parallèle à ce plan, menons par un point qcq μ de l'espace la droite μm parallèle à la droite ox. Le point m où cette droite μm perce le plan P s'appelle la <u>projection</u> du point μ sur le plan P faite parallèlement à la droite ox. La ~~projetante~~ droite μm est appelée la <u>projetante</u> du point μ.

La projection est dite <u>orthogonale</u> si la droite ox est perpendiculaire sur le plan P. Ainsi, la projection orthogonale d'un point μ sur un plan fixe P est le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan P.

On appelle <u>projection d'une figure</u> qcq sur un plan donné faite parallèlement à une droite donnée le lieu géométrique des projections de tous les points de cette figure faites sur le plan donné parallèlement à ~~cette~~ la droite donnée.

Si la figure considérée est une ligne, droite ou courbe, les projetantes de tous ses points forment une surface cylindrique ; c'est ce qu'on appelle <u>cylindre projetant</u> et la projection de cette ligne ~~sur un plan~~ ne sera pas autre chose que l'intersection de ce cylindre avec le plan de projection.

Dans le cas où la ligne considérée est une droite, le cylindre projetant se réduit à un plan. Il s'en suit que la projection d'une droite sur un plan qcq est aussi une droite.

Remarquons aussi que la projection orthogonale d'une droite sur un plan qui lui est perpendiculaire se réduit à un point. Il en est de même de la projection de toute droite sur un plan qcq faite parallèlement à une droite qui lui est parallèle.

Projections ~~&~~ sur un axe.— Étant donnés une droite fixe ox et un plan fixe P non parallèle à cette droite, menons par un point qcq μ de l'espace le plan Q parallèle au plan donné P.

Le point m où ce plan Q est percé par la droite ox est nommé la <u>projection</u> du point M sur la droite ox faite parallèlement au plan P.

La projection M est dite <u>orthogonale</u> si le plan P est perpendiculaire sur la droite ox. Ainsi : la projection orthogonale d'un point M sur une droite ox est le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur cette droite.

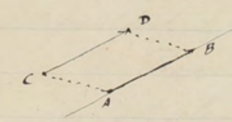
La projection d'une portion AB de ligne droite ou d'un segment sur une droite fixe est la portion ab de cette dernière comprise entre les projections a et b des extrémités du segment AB.

Avant d'aller plus loin nous allons donner succinctement la notion si importante de ce qu'on appelle vecteur.

Des vecteurs. — Soit AB un segment de droite qcq. Si l'on conçoit que ce segment ait un certain <u>sens</u>, soit le sens AB, le point A est dit l'<u>origine</u> et le point B l'<u>extrémité</u> de ce segment. On représente habituellement le sens d'un segment

de droite par un bout de flèche comme dans notre figure.

Étant donné un segment CD dont l'origine est en C



et l'extrémité en D, menons une droite qcq indéfinie et prenons sur cette droite une longueur AB égale à la longueur CD. Les quatre points CDBA formeront alors les sommets d'un parallélogramme. Choisissons la disposition des points A & B de façon que l'on puisse amener le segment AB en coïncidence avec le segment CD en faisant décrire en même temps au point A la droite AC et au point B la droite ~~égale et parallèle~~ BD ; autrement dit, choisissons les points A et B de façon que les droites AC et BD forment deux côtés du parallélogramme CDBA et non pas les deux diagonales. Le segment AB, c.à.d. le segment ayant pour origine le point A et pour extrémité le point B s'appelle un <u>vecteur</u> égal au segment CD. Un vecteur n'est donc autre chose qu'un segment de droite déterminé en direction, en longueur et en sens et dont la position reste arbitraire.

Tous les vecteurs qui sont égaux à un même segment sont considérés comme identiques.* Entre autres, des segments situés sur

* On peut démontrer aisément que l'on peut amener deux vecteurs identiques à la coïncidence en faisant décrire à l'origine & à l'extrémité de l'un d'eux deux droites parallèles & de longueurs égales.

une même droite, égaux en longueur et en sens, sont autant de vecteurs identiques.

Lorsqu'on a à considérer plusieurs vecteurs parallèles ou, ce qui revient au même, situés sur une même droite ox, on les représente par leurs longueurs respectives, rapportées à une même unité et affectés du signe + ou du signe − suivant que le vecteur considéré présente un certain sens convenu, appelé sens positif, soit le sens ox, ou qu'il présente un sens contraire. Dans le premier cas, on dit que le vecteur est *positif*; et dans le second cas, on dit qu'il est *négatif*.

~~Soit a un certain vecteur situé sur une droite ox de sens déterminé, ou sur un axe ox.~~

Une droite indéfinie ox, sur laquelle on a fixé un certain sens ~~ou~~ positif ox, porte le nom d'*axe*.

Considérons un certain vecteur a situé sur un certain axe, ox; et soit λ un coefficient numérique positif ou négatif. Nous représenterons par λa ou $a\lambda$ le vecteur situé sur le même axe, dont la longueur est égale à la valeur absolue de λa, et ayant le même sens que le vecteur a ~~ou~~ si le nombre λ est positif et de sens contraire si λ est négatif.

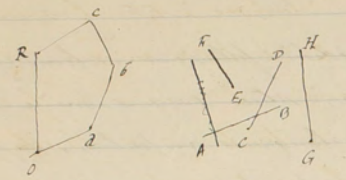
Projections des vecteurs. — La *projection* d'un vecteur sur un plan ou sur une droite est le vecteur qui a pour origine la projection de l'origine du vecteur donné et pour extrémité celle de l'extrémité du même vecteur.

Il résulte de ce que nous venons de dire, que la proj. d'un vecteur sur un axe sera *positive* ou *négative* suivant que cette projection vecteur sera de même sens que ox ou de sens contraire.

Théorème. — I^er^ Les projections de tous les vecteurs identiques sur un plan ou sur une droite sont des vecteurs identiques.

Nous admettrons ce théorème dont la démonstration n'est d'ailleurs très-facile, quoique un peu longue peut être.

Somme géométrique de vecteurs. — Étant donnés un nombre qcq de vecteurs AB, CD, EF, GH ... menons par un point qcq O d'abord un vecteur OB identique au vecteur AB; puis



du point a comme origine menons un vecteur ab identique à CD, ensuite du point b un vecteur identique à EF et ainsi de suite jusqu'au dernier vecteur c R identique au dernier vecteur donné GH. Le vecteur OR ayant pour origine l'origine du premier vecteur et pour extrémité l'extrémité du dernier s'appelle la <u>résultante</u> ou la <u>somme géométrique</u> des vecteurs donnés AB, CD, EF, GH.

Nous traduirons cette définition par l'égalité

$$OR = AB + CD + EF + GH.$$

La dénomination de <u>somme</u> se justifie suffisamment par les deux propriétés suivantes dont la démonstration est immédiate.

1º La somme géométrique d'un nombre qcq de vecteurs ne change pas quand on altère d'une façon qcq l'ordre des vecteurs composants.

2º Dans l'addition de plusieurs vecteurs on peut substituer à un nombre qcq de vecteurs composants leur somme géométrique et vice versa.

Dans le cas particulier où tous les vecteurs sont situés sur une même ~~droite~~ axe ox, leur addition géométrique se ramène à l'addition algébrique des nombres qui les représentent. On peut, en effet, démontrer facilement que la somme géométrique d'un nombre qcq de vecteurs situés sur une même ~~droite~~ axe ox et représentés par a, b, c, d... est un vecteur situé sur la même droite et qui se représente par la somme algébrique $a+b+c+d\dots$ c'à d. un vecteur ayant pour longueur la valeur absolue de cette somme et ayant le sens positif ou le sens négatif suivant que cette somme est positive ou négative.

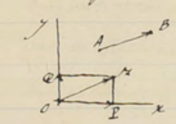
Entre autres propriétés importantes des vecteurs et de leurs sommes, celle dont nous nous servirons le plus fréquemment est la suivante:

Théorème des projections. — La projection de la somme géométrique d'un nombre qcq de vecteurs faite sur un axe donné parallèlement à un plan donné est égale à la somme géométrique des projections des vecteurs composants faites sur le même axe parallèlement au même plan. — Ou plus brièvement, la projection de la somme est égale à la somme des projections.

Cette proposition fondamentale n'est pas plus difficile à démontrer que les autres théorèmes que nous avons énoncés.

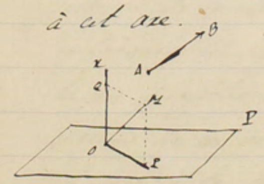
Quoique la considération des projections non-orthogonales soit très-utile dans l'étude des figures géométrique, pour le but que nous poursuivons, il nous suffira de nous borner aux projections orthogonales. Par conséquent, dans l'application du théorème des projections et dans les autres questions qui s'y rattachent, nous ne considérerons que des projections orthogonales; et même nous sous-entendrons toujours le mot orthogonal ~~pour~~ dans le seul but de simplifier notre langage. Les élèves pourront s'exercer utilement à généraliser eux-mêmes les résultats que nous obtiendrons et à les étendre, en les modifiant s'il le faut, au cas où les projections seront quelconques.

Décomposition des vecteurs. — 1° Considérons deux axes rectangulaires ox oy se coupant en O. Soit AB un vecteur situé



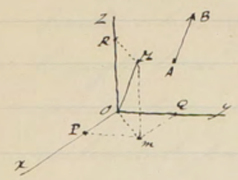
dans le plan xoy ou parallèle à ce plan. Par le point O menons le vecteur OZ identique au vecteur AB et projetons-le en OP et en OQ sur les axes ox et oy; OP et OQ seront des vecteurs identiques aux projections de AB sur les mêmes axes. Or la figure OQZP est un parallélogramme et même un rectangle et le vecteur PZ est évidemment identique au vecteur OQ. On voit donc que le vecteur OZ et par suite AB est égal à la somme géométrique des vecteurs OP, OQ. Ainsi: un vecteur situé dans le plan de deux axes rectangulaires ou dans un plan parallèle à ce plan peut être considéré comme la somme ~~la~~ géométrique de ses projections orthogonales sur ces deux axes

2° Considérons un axe ox et un plan P perpendiculaire à cet axe.



Par le point O où la droite ox perce le plan P, menons le vecteur OZ identique à un vecteur donné quelconque AB. Projetons le vecteur OZ en OP sur le plan P et en OQ sur l'axe ox. La figure ~~&~~ OQZP étant un rectangle, on voit comme précédemment que les vecteurs OP et OQ peuvent être considérés comme les composants de OZ. Donc, ~~tout~~ un vecteur qcq peut être considéré comme la somme géométrique de ses projections orthogonales sur un plan et un axe perpendiculaires l'un à l'autre.

3° Considérons trois axes ox, oy, oz rectangulaires deux à deux et concourant au même point o. Soit AB un vecteur situé d'une



façon qcq dans l'espace. Par le point o menons le vecteur oM identique au vecteur donné AB et projetons-le d'abord d'un côté sur ~~le plan~~ l'axe oz en oR et de l'autre en om sur le plan xoy qui est perpendiculaire à l'axe oz. Pour avoir maintenant les projections de oM sur ox et sur oy, remarquons que le vecteur oM étant la somme géométrique de oR et om, ses projections sur un axe qcq est égale à la somme des projections de oR et om sur le même axe. Or le vecteur oR étant perpendiculaire à ox et à oy sa projection sur chacun de ces deux axes est nulle. Donc les projections de oM sur ox et sur oy sont simplement égales aux projections oP et oQ du vecteur om sur les mêmes axes. Mais d'après les deux premiers modes de décomposition des vecteurs on a géométriquement :

$$oM = om + oR \qquad om = oP + oQ$$

On a donc :

$$AB = oM = oP + oQ + oR.$$

Ainsi : un vecteur quelconque peut être considéré comme la somme ~~des~~ géométrique de ses projections orthogonales sur trois axes rectangulaires deux à deux.

Remarquons que les vecteurs oP, oQ, oR forment les trois côtés d'un parallélépipède rectangle dont oM est la diagonale.

Composition des vecteurs. – La recherche de la somme géométrique d'un nombre qcq de vecteurs peut toujours se ramener à la recherche de la somme de trois vecteurs situés sur trois axes rectangulaires. En effet, la somme cherchée est égale à la somme de ses projections sur trois axes rectangulaires ox, oy, oz. Or, chacune de ces trois projections, par exemple celle faite sur ox est égale à la somme des projections des vecteurs composants sur le même axe. Donc pour avoir la somme géométrique d'un ~~vecteur~~ nombre qcq de vecteurs, il suffira 1° de ~~prendre~~ projeter d'abord tous ces vecteurs sur trois axes rectangulaires, d'ajouter ensuite séparément les projections faites sur chaque axe et de prendre enfin la somme géométrique des trois vecteurs résultants ainsi obtenus.

Angle de deux axes. — On appelle angle formé par deux droites situées d'une façon qcq l'une par rapport à l'autre l'angle formé par l'une des deux droites et une parallèle menée par un de ses points à l'autre droite. Cet angle ne dépend évidemment pas du choix de ce point.

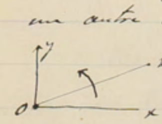
D'après cette définitions, deux droites forment toujours entre eux quatre angles égaux deux à deux et supplémentaires deux à deux et dont la somme est égale à quatre angles droits.
On peut même compter jusqu'à huit angles si l'on admet des angles plus grands que deux angles droits.

Si au lieu de deux droites indéfinies, on considère deux axes

ox, ox' c'à-d deux droites ayant chacun un sens fixe, on voit que ces axes ne forment entre eux que deux angles, l'un plus petit que deux angles droits et l'autre plus grand et ayant une somme égale toujours à quatre angles droits.

On voit facilement que les deux angles formés par deux axes ont tous les deux le même cosinus. Par conséquent, ~~grand~~ tant qu'on n'a à considérer que cette fonction trigonométrique, on pourra ne considérer que l'un de ces deux angles, par exemple celui qui est inférieur à deux droits.

Quand on a à considérer des ~~droites~~ axes situés dans un même plan, on précise davantage la signification de ce qu'on appelle angle de deux axes. Soit ox un axe fixe et soit un autre axe ox' situé dans le même plan et même ayant

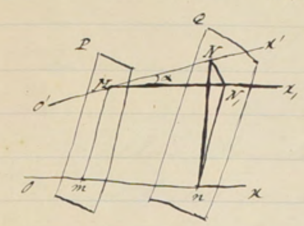


un point commun avec ox. On appelle ~~Le~~ angle que fait l'axe ox' avec l'axe ~~ox' avec l'axe~~ ox l'angle, compris entre ox et ox', que décrit l'axe ox quand on l'amène en coïncidence avec ox' ~~avec~~ par un mouvement de rotation effectué autour du point o dans un certain sens appelé sens positif.

Dans la pratique, il y a toujours un autre axe oy associé à l'axe ox et qui lui est perpendiculaire. Alors on prend habituellement pour sens positif des rotation celui de la rotation que subit l'axe ox quand on amène en coïncidence avec oy en lui faisant décrire un angle droit

Expression des projections orthogonales. — 1° Soient ox, $o'x'$ deux axes qcq et soit un vecteur situé sur l'un des axes $o'x'$ et ayant pour expression a. Je dis que la projection de ce vecteur sur l'autre axe ox a pour expression $a\cos(ox, o'x')$, $(ox, o'x')$ représentant l'un q.q. des deux angles que font entre eux les axes ox, $o'x'$.

En effet, supposons d'abord que le vecteur considéré est positif et soit MN ce vecteur. On aura alors d'après ce qu'on a dit :



$$a = + \text{longueur } MN$$

Soient m et n les projections des points M et N sur ox et P & Q les plans perpendiculaires à ox qui ont servi pour obtenir ces projections. Menons par le point M l'axe Mx_1 parallèle à l'axe ox et et du même côté du plan P que mx, l'angle $(o'x', Mx_1)$ que nous désignerons pour abréger ~~LL~~ par α sera égal à l'angle $(ox, o'x')$. Par le point n menons la droite nN_1 parallèle à mM, elle sera contenue dans le plan Q et rencontrera la droite Mx_1 en un point N_1. Le vecteur MN_1 sera identique au vecteur mn et par suite sera égal à la projection de MN sur ox. Joignons maintenant les points NN_1. La droite Mx_1 étant perpendiculaire sur le plan Q, l'est aussi sur la droite NN_1 et par suite le triangle MNN_1 est rectangle en N_1 ; on a donc :

$$\text{longueur } MN_1 = \text{longueur } MN \times \cos N_1MN.$$

Maintenant, si Mx_1 et Mx' sont du même côté du plan P comme dans notre figure, il est évident qu'on aura à la fois :

$$N_1MN = \alpha \qquad \text{project. de } a = + \text{longueur } MN_1.$$

On aura donc alors

$$\text{projection de } a = a\cos\alpha$$

Si au contraire ~~ox~~ Mx' est de l'autre côté du plan P par rapport à Mx_1, on aura évidemment :

$$N_1MN = \pi - \alpha \qquad \text{project. de } a = - \text{longueur } MN_1.$$

On aura donc encore

$$\text{projection de } a = a\cos\alpha.$$

En second lieu, ~~sit~~ ~~lors~~ supposons que le vecteur MN

soit négatif. On aura alors

$$a = -\text{longueur } zN$$

Considérons dans ce cas un vecteur ayant pour expression -a et situé sur le même axe $o'x'$. On aura d'après le cas précédent.

$$\text{projet. de } -a' = \text{longueur } zN \times \cos\alpha = -a\cos\alpha$$

Mais on a évidemment.

$$\text{projection de } a = -\text{projection de } -a'$$

on aura donc

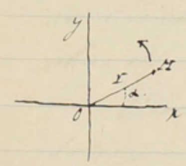
$$\text{projection de } a = a\cos\alpha.$$

Ainsi dans tous les cas possibles, la projection du vecteur a sur l'axe ox a pour expression.

$$a\cos\alpha \quad \text{ou} \quad a\cos(ox, o'x').$$

2° Soit maintenant un vecteur isolé de longueur absolue r (r est une quantité positive) et α l'angle que fait avec un axe ox la direction de ce vecteur c'àd l'axe qui va de son ~~extrémité~~ origine à son extrémité. Il résulte de la démonstration du théorème précédent que la projection de ce vecteur sur l'axe ox a pour expression $\underline{r\cos\alpha}$.

3°. Soient enfin deux axes rectangulaires ox oy concourant en un même point o, et soit un vecteur oz situé dans le plan de ces axes et ayant pour origine le point o. Appelons ~~a~~ r la longueur oz et α l'angle xoz que fait la direction oz avec l'axe, angle compté dans le sens positif adopté habituellement comme cela a été expliqué précédemment. Alors les projections du vecteur oz sur ox et sur oy ont respectivement pour expressions.

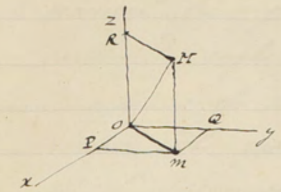


$$r\cos\alpha \quad \text{et} \quad r\sin\alpha.$$

En effet la formule proj. de oz sur $ox = r\cos\alpha$ a déjà été démontrée. Quant à la formule proj. de oz sur $oy = r\sin\alpha$, elle est d'abord évidemment vraie en valeur absolue. Elle l'est aussi vraie en signe puisque $\sin\alpha$ est positif ou négatif suivant que oz est du même côté de ox que oy ou du côté opposé et que la projection de oz sur oy est en même temps positive ou négative suivant ces deux cas.

II. Des coordonnées.

Considérons trois axes ox, oy, oz rectangulaires deux à deux et concourant en un même point o et soit M un point qcq de l'espace. La position du point M par rapport au système d'axes ox, oy, oz sera parfaitement connue si l'on connaît en grandeur et en ~~position~~ direction le vecteur oM ayant pour origine le point o et pour extrémité le point considéré M. Les quantités qui servent à définir ce vecteur s'appellent, quelles qu'elles soient, les <u>coordonnées</u> du point M par rapport aux trois axes ox, oy, oz.



Chacun de ces trois axes porte le nom d'<u>axe de coordonnée</u> et le point o d'où ils partent s'appelle <u>origine des coordonnées</u>.

Le segment de droite OM qui sert à définir la position du point M s'appelle le <u>rayon vecteur</u> du point M issu du point o. On donne souvent aussi le nom de rayon vecteur à la <u>longueur</u> du segment oM c'à-d la distance du point M à l'origine des coordonnées; ce mot est alors employé comme abréviatif de <u>longueur du rayon vecteur</u>.

Coordonnées rectilignes rectangulaires. — Les projections orthog. du rayon vecteur OM sur les trois axes rectangulaires ox, oy, oz s'appellent les <u>coordonnées rectilignes rectangulaires</u>, ou simplement <u>coordonnées rectangulaires</u>, du point M. On représente habituellement ces vecteurs projections par les lettres x, y, z ; et l'on observe dans cette représentation la convention que nous avons ~~[illegible]~~ expliquée dans le paragraphe précédent.

Comme le vecteur oM est égal à la somme géométrique des trois vecteurs x, y, z et que d'ailleurs on connaisse d'avance son origine o, on connaîtra ~~le rayon~~ la grandeur et la direction du rayon vecteur et par suite la position du point M dès que l'on se donnera ses trois coordonnées ~~rayon~~ rectangulaires x, y, z.

Trois quantités suffisent donc pour définir la position d'un point de l'espace rapporté à un système de trois axes.

Angles directeurs. — Les trois angles que le rayon vecteur OM fait respectivement avec les axes Ox, Oy, Oz se nomment les <u>angles directeurs</u> de la direction OM. Les ~~cos~~ cosinus des angles directeurs s'appellent les <u>cosinus directeurs</u>.

Les angles directeurs ont chacun deux valeurs dont la somme égale quatre angles droits. Mais les cosinus directeurs n'ont chacun qu'une seule valeur.

Appelons r la longueur absolue du rayon vecteur OM, et α, β, γ les angles directeurs de la direction ou l'axe OM. D'après le paragraphe précédent, nous aurons :

$$x = r\cos\alpha \qquad y = r\cos\beta \qquad z = r\cos\gamma.$$

Ce sont là les expressions si importantes des coordonnées rectangulaires en fonction de la longueur du rayon vecteur et des cosinus directeurs de ce rayon.

Si la longueur r est égale à l'unité, on aura

$$x = \cos\alpha \qquad y = \cos\beta \qquad z = \cos\gamma.$$

dans ce cas les coord. rectangulaires sont égales aux cosinus directeurs.

Relation entre les cosinus directeurs. — Si nous projetons le rayon vecteur OM sur sa propre direction c'à'd sur l'axe OM, nous obtiendrons évidemment un vecteur ~~égal~~ représenté par r. Il en sera donc de même de la somme des projections de ses composants x, y, z sur le même axe. On aura donc,

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = r.$$

On en tire en substituant les valeurs de x, y, z :

$$r\cos^2\alpha + r\cos^2\beta + r\cos^2\gamma = r$$

ou bien

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

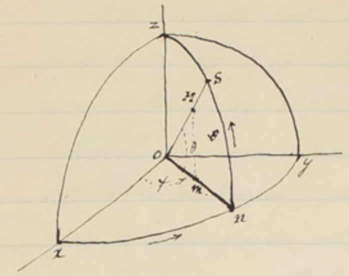
Les trois cosinus directeurs ont donc toujours la somme de leurs carrés égale à 1. Ils ne sont donc pas indépendants.

Si au lieu d'éliminer x, y, z, on élimine α, β, γ on obtient

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \qquad \text{ou} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

C'est là l'expression du rayon vecteur en fonction des coordonnées rectangulaires.

Coordonnées sphériques. —. De l'origine des coordonnées comme centre ~~xy~~ avec un rayon égal à l'unité décrivons une sphère. Les axes de coordonnées perceront cette sphère en des p^ts^ que nous appellerons x, y, z.



Le rayon vecteur OM du point M prolongé, s'il le faut, dans son propre sens, rencontrera de même la sphère en un point S. La direction du rayon vecteur M sera complètement déterminée dès que l'on connaîtra la position du point S sur notre sphère. Les quantités qui servent à définir cette position du point S s'appellent les coordonnées ~~des pôr~~ sphériques du point M.

1° Par la droite oz et le point M ou le point S, menons un plan qui coupera la sphère suivant un grand cercle ayant oz pour diamètre. L'une des deux demi-circonférences de ce cercle, celle qui contient le point S coupera le grand cercle xy en un point n. La position de cette demi-circonférence sera connue si l'on connaît la position du point n; puisqu'alors il suffira de joindre ce point aux deux pôles du grand cercle xy.

Nous appellerons la première coordonnée sphérique du point M ~~l~~ l'angle que fait la direction on avec l'axe + ox, angle compté toujours dans le sens positif. Si l'on se donne cet angle que nous désignerons par ~~appellerons~~ ψ, ou l'arc xn qui le mesure, la position du point n et par suite celle du demi-cercle znz' sera complètement définie.

Nous appellerons la seconde coordonnée sphérique du point M l'angle que forment entre eux les deux rayons on et os, ~~angle~~ affecté du signe + ou du signe − suivant que le point S sera du même côté du plan xoy que le point z ou du côté opposé. Cet angle que nous représentons par θ définira complètement la position du point sur sa demi-circonférence.

Ainsi les deux angles ψ & θ détermineront la position du point s et par suite la direction du rayon vecteur de oM.

La seconde coordonnée θ est toujours un angle compris entre $-90°$ et $+90°$; tandisque la première coordonnée ψ varie de $0°$ à $360°$. Elle peut même avoir plusieurs valeurs différant les unes des autres d'un ~~multiplex~~ multiple quelconque de la circonférence, mais elles définissent toujours la même demi-~~d~~circonférence et ont de plus les mêmes lignes trigonométriques.

Les deux coordonnées sphériques du point M jointes à la longueur du rayon vecteur portent ensemble le nom de coordonnées polaires de ce point.

Les coordonnées polaires d'un point suffisent à définir la position de ce point puisque les deux premières d'entre elles déterminent la ~~d~~ direction de son rayon vecteur et la 3ième sa longueur.

Si le point M se trouve à l'unité de distance de l'origine des coordonnées, il sera sur notre sphère, et ses coordonnées sphériques seules suffiront à définir sa position.

Expressions des cosinus directeurs en fonction des coord. sphériques.— Projetons le rayon vecteur oM d'abord sur le plan xoy et sur l'axe oz. Ces deux projections auront respectivement pour valeurs $r\cos\theta$, $r\sin\theta$, que M soit du même côté ou non du plan xoy que le point z, comme cela est facile à voir. Ensuite les projections du vecteur $r\cos\theta$ sur ox et oy seront égales à $r\cos\theta.\cos\psi$ & $r\cos\theta\sin\psi$ ~~comm~~ d'après ce que nous avons ~~dit~~ vu. Donc les projections de oM sur ox oy oz ont pour valeurs $r\cos\theta\cos\psi$, $r\cos\theta\sin\psi$, $r\sin\theta$ c'à d. que l'on a :

$$x = r\cos\theta\cos\psi \qquad y = r\cos\theta\sin\psi \qquad z = r\sin\theta.$$

Ce sont là les expressions des coord. rectangulaires en fonction des coord. polaires.

Si nous mettons à la place de x, y, z leurs valeurs $r\cos\alpha$, $r\cos\beta$, $r\cos\gamma$, nous aurons :

$$\cos\alpha = \cos\theta\cos\psi \qquad \cos\beta = \cos\theta\sin\psi \qquad \cos\gamma = \sin\theta.$$

Nous avons ainsi les cosinus directeurs exprimés en fonction des coord. sphériques.

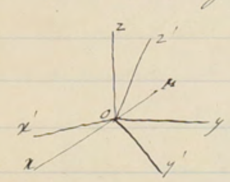
Comme nous savons que les coord. du point S ne sont autre chose que $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, le résultat qui précède peut être énoncé en disant que les coord. rectangulaires d'un point de la sphère sont égales à $\cos\theta\cos\psi$, $\cos\theta\sin\psi$, $\sin\theta$.

Transformation des coordonnées. — Le problème général de la transformation des coordonnées consiste en ceci:

Étant donnés deux systèmes d'axes de coord. dont la position relative est connue, trouver les expressions des coord. d'un point qcq de l'espace par rapport à l'un de ces systèmes d'axes en fonction des coord. du même point par rapport à l'autre système d'axes.

Nous nous bornerons à un cas particulier qui nous suffira dans l'application que nous ferons en trigonométrie sphérique de la théorie de la transformation des coordonnées: c'est le cas où les origines des coord. des deux systèmes considérés se trouvent au même point.

Soient ox, oy, oz les ~~axes~~ l'un des deux systèmes d'axes et ox', oy', oz' l'autre système. Désignons par a, b, c les cosinus directeurs de l'axe ox' par rapport ~~à l'axe ox~~ aux axes $ox\ oy\ oz$, par $a'\ b'\ c'$ ceux de l'axe oy' et par $a''\ b''\ c''$ ceux de l'axe oz', ce que nous représentons par le tableau suivant



	ox'	oy'	oz'
ox	a	a'	a''
oy	b	b'	b''
oz	c	c'	c''

Appelons maintenant x, y, z les coord. rectangulaires d'un point qcq^{ue} M par rapport au premier système d'axes et $x'\ y'\ z'$ ses coord. par rapport au second système. La projection du rayon vecteur OM sur chacun des axes ox, oy, oz est égale à la somme des projections de ses composants $x'\ y'\ z'$. Mais les projections de OM sur $ox\ oy\ oz$ sont respectivement $x\ y\ z$ et la projection d'un qcq des vecteurs $x'\ y'\ z'$ par exemple x', sur ox sur l'un qcq des axes ox, oy, oz p. ex. est égale à $x'\cos(ox, ox')$ c.à.d. ax'. Nous aurons donc.

$$x = ax' + \cancel{b}\,a'y' + a''z'. \qquad a$$
$$y = bx' + b'y' + b''z' \qquad b$$
$$z = cx' + \cancel{b}\,c'y' + c''z' \qquad c.$$

$x\,y\,z$ sont ainsi exprimés en fonction de $x'\,y'\,z'$.

Nous trouverons d'une façon analogue :

$$x' = ax + by + cz.$$
$$y' = a'x + b'y + c'z.$$
$$z' = a''x + b''y + c''z.$$

expressions de $x'\,y'\,z'$ en fonction de x, y, z.

Multiplions les trois équations du premier système respectivement par a, b, c et ajoutons, nous aurons :

$$ax + by + cz = (a^2 + b^2 + c^2)\,x' + (aa' + bb' + cc')\,y' + (aa'' + bb'' + cc'')\,z'$$

La comparaison de cette ég. avec la 1ère ég du second système montre que l'on a les identités :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \qquad aa' + bb' + cc' = 0 \qquad aa'' + bb'' + cc'' = 0.$$

On trouvera semblablement :

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1 \quad \& \quad a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0.$$
$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1$$

Nous ne nous arrêterons pas aux nombreuses conséquences de ces identités qui sont de très-grande importance en mécanique du solide et en géométrie analytique à trois dimensions.

Dans le cas particulier où l'un des axes du second système coïncide avec l'un des axes du premier, par exemple ox' avec ox, on aura $a = 1$ et $\underset{a'=0}{b=0}$, $\underset{a''=0}{c=0}$. et nos formules deviendront :

$$\left\{\begin{aligned} x &= \cancel{a}\,x' \\ y &= b'y' + b''z' \\ z &= c'y' + c''z' \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= b'y + c'z \\ z' &= b''y + c''z. \end{aligned}\right.$$

Si de plus le point M est à l'unité de distance de l'origine o c'à d. si s'il se trouve sur la sphère que nous avons considéré précédemment, on aura, en appelant $\cancel{\theta}\ \psi, \theta$ et ψ', θ' ses coord. sphériques par rapport au premier et second système :

$$x = \cos\theta\cos\psi \qquad y = \cos\theta\sin\psi \qquad z = \sin\theta.$$
$$x' = \cos\theta'\cos\psi' \qquad y' = \cos\theta'\sin\psi' \qquad z' = \sin\theta'$$

et nous aurons :

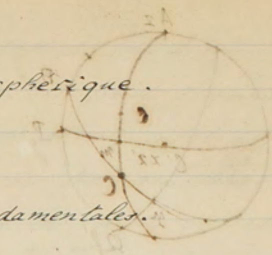
$$\cos\theta\cos\psi = \cos\theta'\cos\psi' \qquad \cos\theta'\cos\psi' = \cos\theta\cos\psi$$

$$\cos\theta\sin\psi = b'\cos\theta'\sin\psi' + b''\sin\theta' \qquad \cos\theta'\sin\psi' = b'\cos\theta\sin\psi + c'\sin\theta$$

$$\sin\theta = c'\cos\theta'\sin\psi' + c''\sin\theta' \qquad \sin\theta' = b''\cos\theta\sin\psi + c''\sin\theta.$$

Ce cas est celui qui est le plus fréquemment en usage en astronomie sphérique et celui qui fournit, comme ~~s~~ nous verrons bientôt, les formules fondamentales de la trigonométrie sphérique.

Trigonométrie sphérique.



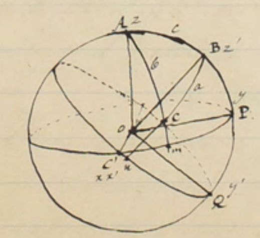
I. Formules fondamentales.

La trigonométrie sphérique est cette branche des sciences mathématiques qui a pour but principal l'étude des relations entre les lignes trigonométriques des éléments d'un triangle sphérique tracé sur une sphère de rayon égal à l'unité. Elle traite aussi de la résolution des triangles sphériques c'à d. de la recherche des éléments d'un triangle sphérique dont quelques-uns sont connus.

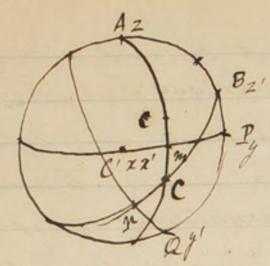
Nous supposerons que les élèves ~~[illegible]~~ possèdent toutes les notions élémentaires sur la sphère et sur les triangles sphériques. telles que la définition des éléments d'un triangle sphérique c'à d des côtés et des angles de ce triangle, la définition et les propriétés du pôle d'un cercle tracé sur une sphère, la notion des triangles sphériques polaires, celle de l'excès sphérique d'un triangle sphérique, les cas d'égalité de deux triangles sphériques etc etc.

Nous ne considérerons, bien entendu, que des triangles sphériques dont aucun élément ne dépasse deux angles droits. Ces triangles jouissent de la propriété d'être convexe c'à d qu'il est situé tout entier d'un même côté du ~~tri~~ grand cercle d'un qcq de ses côtés. On démontre aussi que dans un pareil triangle 1° la somme des trois côtés est moindre que quatre angles droits, 2° la somme des trois angles est comprise entre deux angles droits et six angles droits.

Cela étant rappelé, soit ABC un triangle sphérique quelconque tracé sur une sphère de rayon égal à l'unité.



Soit C' l'un des pôles du grand cercle AB, celui qui se trouve ~~a~~ du même côté de ce cercle que le point C. Sur le grand cercle AB, prenons à partir du point A dans un certain sens un arc AP égal à un quadrant, prenons de même sur ce



même grand cercle, à partir du point B et dans le même sens que AP, un arc BQ égal à un quadrant. Le point C' étant le pôle du grand cercle AB, les rayons OP, OQ seront perpendiculaires au rayon OC'. On peut donc concevoir trois axes rectangulaires de coordonnées Ox, Oy, Oz coïncidant respectivement avec les rayons OC', OP, OA, et un autre système d'axes rectangulaires Ox', Oy', Oz' coïncidant respectivement avec OC', OQ, OB. Nous allons d'abord chercher les cosinus directeurs de ces deux systèmes d'axes l'un par rapport à l'autre, et ensuite les coordonnées sphériques du point C par rapport à chacun de ces systèmes.

Désignons, comme en trigonométrie rectiligne, les trois angles du triangle par les lettres A, B, C affectés à ses sommets; et les trois côtés respectivement opposés aux angles A, B, C par les lettres a, b, c.

L'arc PQ qui mesure l'angle (Oy, Oy') étant évidemment égal à l'arc c qui mesure l'angle (Oz, Oz'), le tableau des cosinus directeurs sera le suivant.

	Ox'	Oy'	Oz'
Ox	1	0	0
Oy	0	$\cos c$	$\sin c$
Oz	0	$-\sin c$	$\cos c$.

Maintenant si l'on considère le point m où le grand cercle AC, prolongé s'il le faut, rencontre le grand cercle PC', on voit facilement que la première coord. sphérique du point C par rapport au premier système d'axes est, en signe et en grandeur,

$$C'P - Pm \quad \text{c.à.d.} \quad \frac{\pi}{2} - A$$

quant à sa seconde coord. sphérique, elle est égale en signe & en grandeur à

$$mA - CA \quad \text{c.à.d.} \quad \frac{\pi}{2} - b.$$

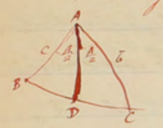
Si de même on considère le point de rencontre n du grand cercle BC et QC' on voit que la première coord. sphérique par rapport au second système d'axes est égale à

$$C'Q - Qn \quad \text{c.à.d.} \quad \frac{\pi}{2} - (\pi - B) \quad \text{ou} \quad -\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$$

et sa seconde coord. sphérique égale à $\frac{\pi}{2} - a$.

Les coordonnées rectangulaires $x\,y\,z$ et $x'\,y'\,z'$ du point C par rapport au premier système & par rapport au second système auront donc pour valeurs.

Exercice I. Démontrer que dans tout triangle sphérique, les sinus des segments d'arc déterminés par une bissectrice sont proportionnels aux sinus des côtés adjacents.
Il s'agit de démontrer que l'on a.



$$\frac{\sin DC}{\sin b} = \frac{\sin DB}{\sin c}$$

On a d'après (1).

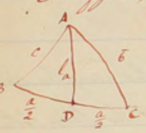
$$\sin DC \sin ADC = \sin b \sin \frac{A}{2} \qquad \sin DB \sin ADB = \sin c \sin \frac{A}{2}$$

Mais $\sin ADC = \sin ADB$. Donc etc.

Exercice II. – Les médianes l_a, l_b, l_c d'un triangle sphérique ont pour cosinus

$$\cos l_a = \frac{\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}} \qquad \cos l_b = \frac{\cos\frac{c+a}{2}\cos\frac{c-a}{2}}{\cos\frac{b}{2}} \qquad \cos l_c = \frac{\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.$$

En effet, on a d'après (3)



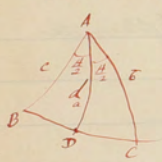
$$\cos b = \cos l_a \cos\frac{a}{2} + \sin l_a \sin\frac{a}{2}\cos ADC$$
$$\cos c = \cos l_a \cos\frac{a}{2} - \sin l_a \sin\frac{a}{2}\cos ADB$$

d'où en ajoutant

$$\cos b + \cos c = 2\cos l_a \cos\frac{a}{2} \qquad \text{D'où etc.}$$

Exercice III. – Les bissectrices d_a, d_b, d_c ont pour tangentes

$$\operatorname{tg} d_a = \frac{2\sin b \sin c \cos\frac{A}{2}}{\sin(b+c)} \qquad \text{etc.} \ldots$$



En effet, on a d'après (2)

$$\sin DC \cos ADC = \cos b \sin d_a - \sin b \cos d_a \cos\frac{A}{2}$$
$$\sin BD \cos ADB = \cos c \sin d_a - \sin b \cos d_a \cos\frac{A}{2}$$

et en tenant compte de $\sin ADC = \sin ADB$ et de $\frac{\sin DC}{\sin b} = \frac{\sin DB}{\sin c}$ on aura etc.

$$x = \sin b \sin A \qquad x' = \sin a \sin B$$
$$y = \sin b \cos A \qquad y' = \sin a \cos B$$
$$z = \cos b \qquad z' = \cos a.$$

Appliquant les formules de transformation qui expriment $x'\,y'\,z'$ en fonction de $x\,y\,z$, nous aurons donc.

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A$$
$$-\sin a \cos B = \sin b \cos A \cos c - \cos b \sin c$$
$$\cos a = \sin b \cos A \sin c + \cos b \cos c.$$

Telles sont les formules fondamentales de la trigonométrie sphérique. – On les écrit habituellement :

(1) $\qquad \sin a \sin B = \sin b \sin A$

(2) $\qquad \sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$

(3). $\qquad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$

Remarque I. – La formule (1) a lieu entre deux côtés quelconques et les angles opposés ; on aura donc par exemple :

$$\sin a \sin C = \sin c \sin A$$

Cette formule jointe à (1) peut s'écrire :

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

ce qui signifie que : dans tout triangle sphérique les sinus des angles sont proportionnels aux sinus des côtés opposés.

Remarque II. – Les deux formules (2) & (3) étant d'un usage extrêmement fréquent en astronomie, on a proposé plusieurs moyens mnémoniques pour les retenir sans effort. Mais la formule (3) qui exprime le cosinus d'un côté en fonction du cosinus de l'angle opposé et des sinus & cosinus des deux côtés adjacents, n'est pas si difficile à retenir et semble défier tout moyen mnémonique qu'on pourrait proposer. Quant à la formule (2), voici comment on peut procéder pour se la rappeler. D'abord pour former le premier membre, on prend un côté que l'on remplace par son sinus comme s'il s'agissait d'un arc infiniment petit. On le multiplie ensuite par le cosinus de l'un des angles adjacents comme pour projeter un vecteur sur un axe. Ensuite on dérive le second membre de celui de la formule (3) en y changeant d'abord la nature de la ligne trigonométrique du côté sur lequel on a opéré cette sorte de projection et en changeant ensuite le signe du second terme.

Remarque III. —. On sait par la géométrie élémentaire qu'un triangle sphérique est déterminé dès que l'on se donne trois de ses six éléments, à savoir ses trois angles & ses trois côtés. Par conséquent, il ne peut y exister entre ces six éléments que trois relations analytiques distinctes. ~~On nous venons de trouver précisément trois relations de cette nature, donc toutes les autres formules qui pourront avoir lieu entre les côtés & les angles d'un triangle sphérique ne ~~sont~~ seront que des conséquences de ces formules fondamentales, c'à-d. ne seront des transformées ou des combinaisons.~~

II. Formules diverses.

I. Formules corelatives des formules fondamentales. — Considérons le triangle polaire ~~A~~ $A'B'C'$ du triangle ABC ; ses éléments auront, d'après la géométrie, pour valeurs.

$$A' = \pi - a \qquad a' = \pi - A$$
$$B' = \pi - b \qquad b' = \pi - B$$
$$C' = \pi - c \qquad c' = \pi - C.$$

et l'on aura d'après (1) (2) (3):

$$\sin a' \sin B' = \sin b' \sin A'$$
$$\sin a' \cos B' = \cos b' \sin c' - \sin b' \cos c' \cos A'$$
$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A'$$

ou en substituant :

$$\sin A \sin b = \sin B \sin a$$
$$(4) \qquad \sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a$$
$$(5) \qquad \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

La première formule n'est pas différente de (1). La deuxième (4) s'obtiendrait en remplaçant dans (2) les côtés par les angles et les angles par les côtés. et changeant le signe du 2 terme dans le second membre Enfin la dernière (5) s'obtient en faisant le même changement dans (3) & en changeant ensuite le signe du premier terme du second membre.

II. Expressions des angles en fonction des côtés. — Reprenons la formule

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

Exercice I. — Si l'on appelle $2S$ l'excès sphérique, on aura :

$$\sin S = \frac{\sqrt{\sin p \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}} \qquad \cos S = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}} = \frac{\cos^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{b}{2}+\cos^2\frac{c}{2}-1}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

On a en effet $\quad S = \frac{A+B+C}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{A+B}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)$

Donc :

$$\sin S = \sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2} = \left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)\sin\frac{C}{2} - \left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)\cos\frac{C}{2}.$$

$$\cos S = \cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{C}{2} - \sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2} = \left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)\sin\frac{C}{2} - \left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)\cos\frac{C}{2}.$$

d'où en remplaçant les valeurs qui résultent de (6) ~~etc~~, on aura d'abord

$$\sin S = \left(\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}}\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)}{\sin a\sin c}} + \sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}}\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin a\sin c}}\right)\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}}$$

$$-\left(\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}}\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)}{\sin a\sin c}} - \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}}\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin a\sin c}}\right)\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}$$

$$= \frac{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{\sin a\sin b\sin c}\left[\sin(p-b)+\sin(p-a)+\sin p-\sin(p-c)\right]$$

or la parenthèse est égale à

$$2\cos\frac{a-b}{2}\sin\left(p-\frac{a+b}{2}\right) + 2\cos\left(p-\frac{c}{2}\right)\sin\frac{c}{2} = 2\sin\frac{c}{2}\left[\cos\frac{a-b}{2}-\cos\left(p-\frac{c}{2}\right)\right] = 4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}.$$

Donc substituant etc.

Ensuite on a

$$\cos S = \left(\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}}\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)}{\sin a\sin c}} - \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}}\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin a\sin c}}\right)\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{\sin a\sin b\sin c}\left\{\sin(p-a)\sin(p-b)\left[\sin p - \sin(p-c)\right] - \sin p\sin(p-c)\left[\sin(p-a)+\sin(p-b)\right]\right\}$$

$$= \frac{2\sin\frac{c}{2}}{\sin a\sin b\sin c}\left\{-\sin(p-a)\sin(p-b)\cos\frac{a+b}{2} - \sin p\sin(p-c)\cos\frac{a-b}{2}\right\}$$

$$= \frac{2\sin\frac{c}{2}}{\sin a\sin b\sin c}\left\{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\left[\sin(p-a)\sin(p-b)\right] + \sin p\sin(p-c)\right] - \cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\left[\sin(p-a)\sin(p-b) - \sin p\sin(p-c)\right]\right\}.$$

Mais

$$\sin(p-a)\sin(p-b) = \frac{1}{2}\cos(a-b) + \frac{1}{2}\cos(2p-a-b)$$
$$\sin p\sin(p-c) = \frac{1}{2}\cos c + \frac{1}{2}\cos(a+b)$$

il suffit de transformer les produits en sommes au fur et à mesure.

On a ensuite

$$\cos S = \cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Mais $\quad \cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2}\,\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \qquad \sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}\,\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$

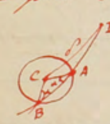
Donc :

$$\cos S = \frac{1}{\cos\frac{c}{2}}\left\{\sin^2\frac{C}{2}\cos\frac{a+b}{2} + \cos^2\frac{C}{2}\cos\frac{a-b}{2}\right\}$$

Mais $\quad \sin^2\frac{C}{2} = \frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}. \qquad \cos^2\frac{C}{2} = \frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}$

Donc, en substituant et remplaçant les rectangles de sinus par des ~~sommes~~ diff. de cosinus etc.

Ex. II. — On donne un petit cercle sur la sphère et un point P sur la sphère ; par le point P, on mène un grand cercle qcq coupant le petit cercle en A et B. Démontrer que le produit $\operatorname{tg}\frac{PA}{2}\operatorname{tg}\frac{PB}{2}$ est constant.



Posons $CA = CB = r$. $\quad CAB = CBA = \alpha \quad CP = \delta$.

On a :

$$\cos\delta = \cos AP\cos r - \sin AP\sin r\cos\alpha \qquad \sin BP$$
$$\cos\delta = \cos BP\cos r + \sin BP\sin r\cos\alpha. \qquad \sin AP.$$

d'où

$$\cos\delta\left(\sin BP+\sin AP\right) = \cos r\sin(PA+PB).$$

ou

$$\frac{\sin(PA+PB)}{\sin BP+\sin AP} = \frac{\cos\delta}{\cos r}.$$

ou

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(AP+BP)}{\cos\frac{1}{2}(AP-BP)} = \frac{\cos\delta}{\cos r}. \qquad \frac{\cos\frac{1}{2}(AP-BP) - \cos\frac{1}{2}(AP+BP)}{\cos\frac{1}{2}(AP-BP)+\cos\frac{1}{2}(AP+BP)} = \frac{\cos r-\cos\delta}{\cos r+\cos\delta}.$$

c'à d.

$$\operatorname{tg}\frac{AP}{2}\operatorname{tg}\frac{BP}{2} = \operatorname{tg}\frac{\delta-r}{2}\operatorname{tg}\frac{\delta+r}{2}. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

et écrivons-la sous la forme :

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c}.$$

On en tire

$$1+\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + \frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c} = \frac{\sin b\sin c - \cos b\cos c + \cos a}{\sin b\sin c}.$$

ou bien :

$$2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{\cos a-\cos(b+c)}{\sin b\sin c} = \frac{2\sin\frac{b+c+a}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin b\sin c}.$$

On aura de même :

$$1-\cos A = 2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c} = \frac{\sin b\sin c+\cos b\cos c-\cos a}{\sin b\sin c}$$

ou bien :

$$2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{\cos(b-c)-\cos a}{\sin b\sin c} = \frac{2\sin\frac{a+b-c}{2}\sin\frac{a-b+c}{2}}{\sin b\sin c}.$$

Posons :

$$a+b+c = 2p.$$

d'où

$$b+c-a = 2(p-a)$$
$$a-b+c = 2(p-b)$$
$$a+b-c = 2(p-c)$$

les formules précédentes deviendront :

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}$$
$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}.$$

On a donc :

(6) $\quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}} \qquad \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}} \qquad \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}}$

formules très-commodes pour les calculs logarithmiques.

III. — Expressions des côtés en fonctions des angles. — Prenons la formule (5) que nous écrirons :

$$\cos a = \frac{\cos A+\cos B\cos C}{\sin B\sin C}.$$

On en tirera comme précédemment :

$$2\cos^2\frac{a}{2} = \frac{\sin B\sin C+\cos B\cos C+\cos A}{\sin B\sin C} = \frac{\cos(B-C)+\cos A}{\sin B\sin C} = \frac{2\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A-B+C)}{\sin B\sin C}.$$

$$2\sin^2\frac{a}{2} = \frac{\sin B\sin C-\cos B\cos C-\cos A}{\sin B\sin C} = \frac{-\cos(B+C)-\cos A}{\sin B\sin C} = \frac{-2\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B\sin C}$$

Désignons par $2S$ l'excès sphérique du triangle considéré, c'à d. posons :

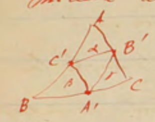
$$A+B+C-\pi = 2S$$

d'où

$$\frac{1}{2}(A+B+C) = S+\frac{\pi}{2}$$
$$\frac{1}{2}(B+C-A) = S-A+\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}-(A-S)$$
$$\frac{1}{2}(A-B+C) = \frac{\pi}{2}-(B-S)$$
$$\frac{1}{2}(A+B-C) = \frac{\pi}{2}-(C-S)$$

Nous aurons donc :

Ex. Si l'on appelle α β γ les arcs qui joignent deux à deux les milieux des côtés d'un triangle sphérique, on a



$$\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{a}{2}} = \frac{\cos\beta}{\cos\frac{b}{2}} = \frac{\cos\gamma}{\cos\frac{c}{2}} = \cos S.$$

On a

$$\cos\alpha = \cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} + \sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\cos A = \cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\left(\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}\right) + \sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\left(\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\right)$$

$$= \cos\frac{b-c}{2}\cos^2\frac{A}{2} + \cos\frac{b+c}{2}\sin^2\frac{A}{2}.$$

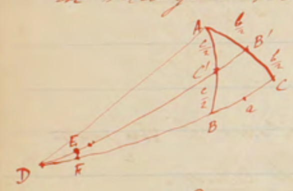
Mais $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{b-c}{2} = \cos\frac{a}{2}\sin\frac{B+C}{2}$ $\qquad$ $\sin\frac{A}{2}\cos\frac{b+c}{2} = \cos\frac{a}{2}\cos\frac{B+C}{2}.$

Donc:

$$\cos\alpha = \cos\frac{a}{2}\left(\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{A}{2}\right) = \cos\frac{a}{2}\sin\frac{A+B+C}{2}.$$

or $\frac{A+B+C}{2} = \frac{\pi}{2} + S$ $\qquad$ Donc $\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{a}{2}} = \cos S$ etc.

Ex. Si l'on prolonge l'arc α jusqu'à sa rencontre en D avec le côté a et que l'on porte à partir du point D sur l'arc α une longueur $DE = \alpha$, sur ~~l'arc~~ côté a une longueur $DF = \frac{a}{2}$, le triangle EDF est rectangle en F et l'arc EF est égal au demi-excès sphérique S.



On a d'abord en appelant D' l'angle ADC'

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sin D}{\sin\frac{b}{2}} &= \frac{\sin B'}{\sin DC} \\ \frac{\sin B'}{\sin AD} &= \frac{\sin D'}{\sin\frac{b}{2}}\end{aligned}\right\} \text{ d'où } \frac{\sin D}{\sin AD} = \frac{\sin D'}{\sin DC}.$$

De même . . . . . $\frac{\sin D}{\sin AD} = \frac{\sin D'}{\sin DB}.$

Donc $\sin DC = \sin DB = \cos\frac{a}{2}.$

On a donc.

$$\sin D = \frac{\sin\frac{b}{2}\sin B'}{\cos\frac{a}{2}} = \frac{\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\,\frac{\sin A}{\sin\alpha}\sin\frac{c}{2}.$$

ou

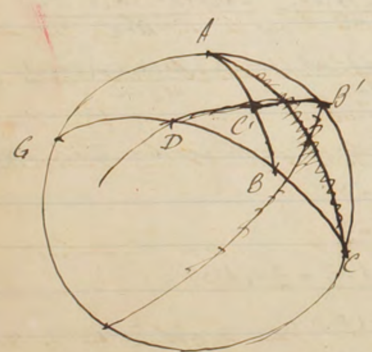
$$\sin D = \frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{\sin\alpha\cos\frac{a}{2}} = \frac{2\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{\sin b\sin c\sin\alpha\cos\frac{a}{2}}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}.$$

$$\sin D = \frac{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}\,\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\sin S}{\sin\alpha}.$$

Donc.

$$\cos D = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2 S}}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{\cos^2 S - \cos^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\frac{a}{2}} - 1}}{tg\,\alpha} = \frac{tg\frac{a}{2}}{tg\,\alpha}.$$

Donc etc.



$$\sin DE = \frac{\sin B'\sin\frac{b}{2}}{\sin D} \qquad \sin B' = \frac{\sin\frac{c}{2}\sin A}{\sin\alpha}.$$

$$\sin DB = \frac{\sin C'\sin\frac{c}{2}}{\sin D} \qquad \sin C' = \frac{\sin\frac{b}{2}\sin A}{\sin\alpha}.$$

$$\therefore \sin DE = \sin DB \qquad DE = DB = \frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}.$$

$$(7)\quad \cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(B-S)\sin(C-S)}{\sin B\sin C}} \qquad \sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin S\sin(A-S)}{\sin B\sin C}} \qquad \cot\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(B-S)\sin(C-S)}{\sin S\sin(A-S)}}.$$

formules qui se prêtent, comme (6), aux calculs logarithmiques.

Remarque. – Puisque nous supposons les éléments du triangles tous inférieurs à une demi-circonférence, leurs moitiés seront toutes moindres qu'un quadrant. Par conséquent, dans les deux systèmes de formules que nous venons d'obtenir, il faut prendre le signe + devant tous les radicaux.

IV. – Formules de Delambre. – Dans la formule.

$$\sin\frac{A+B}{2} = \sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B + \cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B$$

portons les valeurs de $\frac{1}{2}A$ et $\frac{1}{2}B$ qui résultent des ég. (6). Il vient:

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B) = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}}\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)}{\sin a\sin c}} + \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin p}{\sin b\sin c}}\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin a\sin c}}$$

ou

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B) = \sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}\,\frac{\sin(p-b)+\sin(p-a)}{\sin c} = \cos\tfrac{1}{2}C\,\frac{2\sin\left(p-\frac{a+b}{2}\right)\cos\frac{a-b}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

Mais $p - \frac{a+b}{2} = \frac{c}{2}$; donc.

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B) = \cos\tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.$$

On démontrera de cette façon et de façons analogues, les quatre formules suivantes, dites formules de Delambre ou équations de Gauss.

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} &= \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \\ \frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} &= \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned}\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} &= \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} \\ \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} &= \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}.\end{aligned}\right.$$

Voici un moyen mnémonique qu'on a imaginé pour se rappeler ces formules: si l'on met les angles d'un côté et les côtés de l'autre, 1° du côté où il y a des angles, on a le rapport de deux lignes trigonométriques différentes, tandis que là où il y a des côtés, c'est un rapport de deux lignes trigonométriques de même espèce. 2° En ne considérant que les numérateurs, un sinus dans l'un des membres correspond à – dans l'autre & un cosinus correspond à + dans l'autre. Et vice versa.

Les formules de Delambre sont d'un usage important en Astronomie.

V. Analogies de Néper. – Si dans le système d'ég. (8), on divise membre à membre d'abord les formules de la même colonne, puis les formules de la même ligne, on obtient:

Exercice. — Démontrer que l'on a :

$$\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} = \frac{\cos\frac{a}{2}\sin(A-S)}{\sin A}$$

$$\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2} = \frac{\cos\frac{a}{2}\sin S}{\sin A}$$

$$\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}\sin(B-S)}{\sin A}$$

$$\sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}\sin(C-S)}{\sin A}.$$

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\cot\frac{C}{2}} &= \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} \\ \frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\cot\frac{C}{2}} &= \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}} \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}} &= \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}} \\ \frac{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}} &= \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}} \end{aligned}\right.$$

formules qu'on appelle <u>analogies de Néper</u>.

VI. — Expression de l'excès sphérique en fonction des côtés. — Si dans les premières équations de Gauss, on remplace $\frac{A+B}{2}$ par : $\frac{\pi}{2}-\left(\frac{C}{2}-S\right)$ résultant de $S=\frac{A+B+C-\pi}{2}$, on obtient les deux relations.

$$\frac{\cos\left(\frac{C}{2}-S\right)}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \qquad \frac{\sin\left(\frac{C}{2}-S\right)}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$$

entre les deux quantités S et $\frac{1}{2}C$, en éliminant $\frac{1}{2}C$, on en tirera aisément l'expression de S en fonction des côtés. Pour faire commodément cette élimination, écrivons ces formules :

$$\frac{\cos\left(\frac{C}{2}-S\right)-\cos\frac{C}{2}}{\cos\left(\frac{C}{2}-S\right)+\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}+\cos\frac{c}{2}} \qquad \frac{\sin\left(\frac{C}{2}-S\right)-\sin\frac{C}{2}}{\sin\left(\frac{C}{2}-S\right)+\sin\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}-\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}+\cos\frac{c}{2}}.$$

c'à d.

$$\operatorname{tg}\frac{S}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{C}{2}-\frac{S}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2} \qquad \operatorname{tg}\frac{S}{2}\cot\left(\frac{C}{2}-\frac{S}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}.$$

on en tire immédiatement :

$$(10).\qquad \operatorname{tg}\frac{S}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}}.$$

formule qui a sa correspondante bien connue en trigonométrie rectiligne.

III. Cas d'un triangle rectangle.

Parmi les différents cas particuliers d'un triangle sphérique, tels que triangle isocèle, triangle rectangle, triangle dont un côté est égal à un quadrant, etc., celui qu'il importe le plus de considérer est le cas d'un triangle rectangle, c'à d celui où un angle du triangle est droit. Dans ce cas les formules établies précédemment se simplifient beaucoup & donnent lieu à des théorèmes analogues à ceux qui ont lieu dans un triangle rectangle rectiligne.

1. Supposons que l'angle A du triangle considéré soit égal à un angle droit, alors la formule (1) devient

$$(11)\qquad \sin a \sin B = \sin b \quad \text{ou} \quad \sin B = \frac{\sin b}{\sin a}$$

c.à d. que dans tout triangle sphérique rectangle, le sinus d'un

Exercice I. — Étant donnés les trois éléments a, c, B d'un triangle rectangle, démontrer qu'il existe un second triangle rectangle admettant les éléments $a' = \frac{\pi}{2} - c$ $c' = \frac{\pi}{2} - a$ $B' = B$

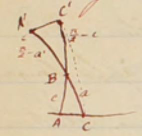
1° Analytiquement, on a d'après (12)

$$\cos B = \frac{tg\, c}{tg\, a} \qquad \cos B' = \frac{tg\, c'}{tg\, a'} = \frac{\cot a}{\cot c} = \frac{tg\, c}{tg\, a} = \cos B$$

Donc $B' = B$ c'à d que avec les côtés a' c' B' on peut construire un triangle rectangle.

2° Géométriquement, C' est le pôle de l'arc AC, donc l'arc CC' est égal à $\frac{\pi}{2}$. Comme $CA' = \frac{\pi}{2}$ aussi, il s'ensuit que C est le pôle de l'arc $A'C'$; donc l'angle en A' est un angle droit.

Donc etc.



angle est égal au sinus du côté opposé divisé par le sinus de l'hypothénuse.

II. D'après la formule (2), on a en général:

$$\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B;$$

si A est égal à $\frac{\pi}{2}$, on aura:

(12) $$0 = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B \quad \text{ou} \quad \cos B = \frac{tg\, c}{tg\, a}$$

c'à d que le cosinus d'un angle non droit est égal à la tangente du côté adjacent divisée par la tangente de l'hypothénuse.

III. La formule (3) devient, dans le cas de $a = \frac{\pi}{2}$

(13) $$\cos a = \cos b \cos c$$

c à d. que le cosinus de l'hypothénuse est égal au produit des cosinus des deux autres côtés.

IV. Divisons les deux formules (11) & (12) membre à membre, il vient

$$tg\, B = \frac{\sin b}{\cos a\, tg\, c}$$

ou en remplaçant $\cos a$ par sa valeur (13)

(14) $$tg\, B = \frac{tg\, b}{\sin c}$$

c'à d. que la tangente d'un ~~côté~~ angle non droit est égale à la tangente du côté opposé divisée par le sinus du côté adjacent.

V. D'après la formule (4), on a en général

$$\sin B \cos c = \cos C \sin A + \sin C \cos A \cos b.$$

Si A est $= \frac{\pi}{2}$, on aura:

(15) $$\sin B \cos c = \cos C \quad \text{ou} \quad \sin B = \frac{\cos C}{\cos c}.$$

VI. La formule (5), donne, si l'on y fait $A = \frac{\pi}{2}$:

(16) $$0 = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \quad \text{ou} \quad \cos a = \cot B \cot C$$

Résumé. — Pour aider la mémoire aussi bien que pour faire ressortir l'analogie, il convient d'écrire les formules que nous venons d'obtenir à côté de celles qu'on a en trigonométrie rectiligne:

triangle rectiligne	triangle sphérique
$\sin B = \frac{b}{a}$	$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}$
$\cos B = \frac{c}{a}$	$\cos B = \frac{tg\, c}{tg\, a}$
$a^2 = b^2 + c^2$	$\cos a = \cos b \cos c$
$tg\, B = \frac{b}{c}$	$tg\, B = \frac{tg\, b}{\sin c}$
$\sin B = \cos C$	$\sin B = \frac{\cos C}{\cos c}$
$1 = \cot B \cot C$	$\cos a = \cot B \cot C$

Telles sont les formules les plus importantes relatives au triangle rectangle.

Exemples numériques. — Données :

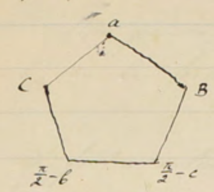
1° $\begin{cases} b = 130^\circ\ 16'\ 35'' \\ c = 21.\ 34.\ 51. \end{cases}$

2° $\begin{cases} a = 103.\ 48.\ 20. \\ b = 57.\ 12.\ 3. \end{cases}$

3° $\begin{cases} c = 65.\ 5.\ 31. \\ B = 23.\ 27.\ 48'' \end{cases}$

Prendre ensuite comme données
1° les résultats B, C du 1er exemple.
2° les résultats b, B & a, B du 2d exemple.

Règle mnémonique de Néper. — Les formules précédentes sont toutes renfermées dans la règle artificielle suivante donnée par Néper. Aux sommets d'un pentagone régulier, écrivons les



5 quantités $a, B, \frac{\pi}{2}-c, \frac{\pi}{2}-b, C$. Alors le cosinus de l'une quelconque de ces 5 quantités est égal au produit des cotangentes des deux quantités adjacentes ou au produit des sinus des deux opposées.

On peut vérifier aisément que cette règle est exacte.

Remarques. — Les formules précédentes conduisent à quelques propriétés du triangle rectangle.

1° D'abord la formule $\sin B = \frac{\cos C}{\cos c}$ montre que cos C & cos c sont de même signe puisque sin B est toujours > 0. Donc, dans tout triangle rectangle, un côté et son angle opposé sont ou tous les deux aigus ou tous les deux obtus.

2° La formule $\cos a = \cos b \cos c$ montre que, 1° dans le cas où a est aigu, b & c doivent être ou tous deux aigus ou tous deux obtus. 2° dans le cas où a est obtus, l'un des deux côtés b & c doit être aigu & l'autre obtus. Donc dans tout triangle rectangle, des deux choses l'une : ou les trois côtés sont tous aigus, ou un côté est aigu & les deux autres obtus.

IV. Résolution d'un triangle rectangle.

Comme il existe trois relations entre les 6 éléments d'un triangle quelconque, il suffit de se donner 3 de ces éléments pour avoir les 3 autres. Mais pour un triangle rectangle, il y a déjà un élément de donné, c'est l'angle droit ; il suffit donc de se donner encore deux éléments. Nous examinerons successivement les cas où l'on se donne 1° les deux côtés de l'angle droit, 2° un côté de l'angle droit & l'hypoténuse, 3° un côté de l'angle droit avec l'angle adjacent, 4° un côté de l'angle droit & l'angle opposé. 5° l'hypoténuse & un angle, 6° les deux angles non droits. Nous aurons ainsi tous les cas possibles.

Don. $b = 130^\circ\ 16'\ 35''$ $\quad 180 - b = 49^\circ\ 43'\ 25$
$c = 21.\ 34.\ 51.$ $\quad 180^\circ - B = 72.\ 41.\ 22.$

$\log tg\,b$ − 0,07194
$\log \sin c$ + $\bar{1}$,56563
$\log tg\,B$ − 0,50631
B 107° 18′ 38″

$\log tg\,c$ + $\bar{1}$,59719
$\log \sin b$ + $\bar{1}$,88249
$\log tg\,C$ + $\bar{1}$,71470
C 27° 24′ 15″

$\log tg\,c$ + $\bar{1}$,59719
$\log \cos B$ − $\bar{1}$,47356
$\log tg\,a$ − 0,12363
a 126° 57′ 7″

$\log tg\,b$ − 0,07194
$\log \cos C$ + $\bar{1}$,94830
$\log tg\,a$ − 0,12364
$180^\circ - a$ 53° 2′ 53.

$180^\circ - (a+b) = 18.\ 59.\ 37.$

Don. $a = 103^\circ\ 48'\ 20''$ $\quad a+b = 161^\circ\ 0'\ 23''$ $\quad \frac{1}{2}(a+b) = 80^\circ\ 30'\ 12'',5$
$b = 57^\circ\ 12.\ 3.$ $\quad a-b = 46.\ 36.\ 17.$ $\quad \frac{1}{2}(a-b) = 23.\ 18.\ 8,5$

$\log tg\frac{1}{2}(a-b)$ + $\bar{1}$,63419
$\log tg\frac{1}{2}(a+b)$ + 0,77652
$2\log tg\frac{c}{2}$ 0,41071
$\log tg\frac{c}{2}$ 0,20536
$2\log tg(45^\circ - \frac{B}{2})$ $\bar{2}$,85767
$\log tg(45^\circ - \frac{B}{2})$ $\bar{1}$,42883
~~$B = 87^\circ\ 45'\ 26''$~~
$C = 112.\ 24.\ 58$
$c = 116.\ 8.\ 8$
$B = 59.\ 56.\ 55$

$\log \sin(a-b)$ + $\bar{1}$,86131
$\log \sin(a+b)$ + $\bar{1}$,51250
$2\log tg\frac{C}{2}$ 0,34881
$\log tg\frac{C}{2}$ 0,17442.
$\frac{C}{2}$ 56° 12′ 29.
$\frac{C}{2}$ 58. 4. 4.
$45^\circ - \frac{B}{2}$ ~~40. 11. 34.~~
$\frac{B}{2}$ ~~40. 52. 43.~~
4. 40. 25,5
$45^\circ - \frac{B}{2}$ 15° 1′ 32,5
$\frac{B}{2}$ 29. 58. 27,5.

Don. $c = 65^\circ\ 5'\ 31''$
$B = 23.\ 27.\ 48.$

$\log tg\,c$ 0,33315
$\log \cos B$ $\bar{1}$,96252
$\log tg\,a$ 0,37063
a 66° 55′ 41″

$\log tg\,B$ $\bar{1}$,63754
$\log \sin c$ $\bar{1}$,95760
$\log tg\,b$ ~~$\bar{1}$,67994~~ $\bar{1}$,59514
b 21° 29′ 18″

$\log tg\,c$ 0,33315
$\log \sin B$ $\bar{1}$,56385
$\log tg\,C$ 0,76930
C 80° 20′ 47.

$\log \sin B$ $\bar{1}$,60006
$\log \cos c$ $\bar{1}$,62445
$\log \cos C$ $\bar{1}$,22451
...... 22139
$\bar{1}$,22451
Diff. 0.

1er Cas. Données : b, c. — On emploiera les formules,

$$\cos a = \cos b \cos c \qquad tg\,B = \frac{tg\,b}{\sin c} \qquad tg\,C = \frac{tg\,c}{\sin b}.$$

Il n'y a ni cas d'impossibilité, ni ambiguïté.

On pourra employer avec plus de précision, pour calculer a, l'une des formules.

$$tg\,a = \frac{tg\,c}{\cos B} \qquad tg\,a = \frac{tg\,b}{\cos C}$$

il faudra seulement un calcul préalable de B ou de C.

2e Cas. Données : b, a. — On aura :

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a} \qquad \cos C = \frac{tg\,b}{tg\,a} \qquad \cos c = \frac{\cos a}{\cos b}$$

Pour que l'on ait pour B une valeur réelle, il faut qu'on ait en valeur absolue $\sin b < \sin a$. Si l'on suppose d'abord b aigu, il faut pour cela ou qu'on ait $b < a$ ou qu'on ait $b < \pi - a$ c'à d. $\pi - b > a$. Il faut donc dans ce cas que a soit compris entre b & $\pi - b$. Si b est obtus, il faut ou qu'on ait $\pi - b < a$ ou qu'on ait $\pi - b < \pi - a$ c'à d. $b > a$. Il faut donc dans ce cas que a soit compris entre $\pi - b$ & b.

En résumé, pour la possibilité du triangle, il faut que l'hypothénuse soit comprise entre b son supplément. Si cette condition est remplie, on voit facilement que C & c sont réels.

On prendra pour B, qui est donné par son sinus, la valeur de même espèce que le côté opposé b.

On peut transformer les équations précédentes en des formules qui donnent plus de précision aux résultats. La 1re peut s'écrire.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \frac{\sin b}{\sin a}$$

d'où

$$\frac{1 - \cos(\frac{\pi}{2} - B)}{1 + \cos(\frac{\pi}{2} - B)} = tg^2\left(\frac{\pi}{4} - B\right) = \frac{\sin a - \sin b}{\sin a + \sin b} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}$$

Donc :

$$tg\left(\frac{\pi}{4} - B\right) = \sqrt{\frac{tg\frac{a-b}{2}}{tg\frac{a+b}{2}}}$$

On aura ensuite

$$tg^2\frac{C}{2} = \frac{tg\,a - tg\,b}{tg\,a + tg\,b} = \frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)} \quad \text{d'où} \quad tg\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}}$$

Enfin

$$tg^2\frac{c}{2} = \frac{\cos b - \cos a}{\cos b + \cos a} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}} \quad \text{d'où} \quad tg\frac{c}{2} = \sqrt{tg\frac{a+b}{2}\,tg\frac{a-b}{2}}$$

3e Cas. Données : c, B. — On aura :

$$tg\,a = \frac{tg\,c}{\cos B} \qquad \cos C = \sin B \cos c \qquad tg\,b = tg\,B \sin c.$$

Le triangle est toujours possible et il n'y a pas d'ambiguïté.

Don. $b = 57°\ 12'\ 3''$ $B - b = 24°\ 33'\ 23''$ $\frac{1}{2}(B-b) = 12.\ 16.\ 41,5$

$B = 81.\ 45.\ 26.$ $B + b = 138.\ 57.\ 29$ $\frac{1}{2}(B+b) = 69.\ 28.\ 44,5.$

suppl. $= 41.\ 2.\ 31$

$\log \sin(B-b)$ $\bar{1},61871$
$\log \sin(B+b)$ $\bar{1},81732.$
$2 \log tg(45 - \frac{c}{2})$ $\bar{1},80139$
$\log tg(45 - \frac{c}{2})$ $\bar{1},90069,5.$
$45 - \frac{c}{2}$. $38°\ 30'\ 20,5$
$\frac{c}{2}$ $6\ 29.\ 39,5$
$c = 12.\ 59.\ 19.$
$C = 15\ 20\ 49.$
$a = 58\ \ 8\ 42$

$\log tg \frac{1}{2}(B-b)$ $\bar{1},33773.$
$\log tg \frac{1}{2}(B+b)$ $0,42678$
$2 \log tg(45 - \frac{C}{2})$ $\bar{1},76451$
$2 \log tg(45° - \frac{a}{2})$ $\bar{2},91095$
$\log tg(45° - \frac{C}{2})$ $\bar{1},88225,5$
$\log tg(45° - \frac{a}{2})$ $\bar{1},45542,5.$
$45° - \frac{C}{2}$ $37°\ 19'\ 36.\ 36$
$45° - \frac{a}{2}$. $15.\ 55.\ 39,\ldots$
$\frac{C}{2}$ $7.\ 40\ 24$
$\frac{a}{2}$ $29.\ 4.\ 21.\ldots$

31,5
24,0
7,5

2e solution.
$c = 167.\ 0.\ 41.$
$C = 164.\ 39.\ 10$
$a = 121.\ 51.\ 19.$

Don. $a = 103.\ 48.\ 20.$
$B = 59.\ 56.\ 55.$
suppl. $a = 76.\ 11\ 40.$

$\log \sin a$ + $\bar{1},98727$
$\log \sin B.$ + $\bar{1},93730$
$\log \sin b.$ $\bar{1},92457$
$\bar{1},92456$
Diff. 1.

$\log tg a$ − $0,60945$
$\log \cos B$ + $\bar{1},69965$
$\log tg c$ − $0,30910$
suppl. c $63°\ 51'\ 11.$
$c = 116.\ 8.\ 49.$
$\log \sin c$ $\bar{1},95311$
$\log tg B$ $0,23766.$
$\log tg b.$ $0,19077$
$b.$ $57.\ 11.\ 52$

$\log \cos a$ − $\bar{1},37772.$
$\log tg B$ + $0,23766$
$\operatorname{colog} tg C$ − $\bar{1},61538$
suppl. C ~~22°. 24'. 50''.~~ $67.\ 35'\ 10.$
$C = 112.\ 24.\ 50.$

Don. $B = 107°\ 18'\ 38''$ $B + C = 134.\ 42.\ 53$ $\frac{1}{2}(B+C) = 67.\ 21.\ 26,5$
$C = 27.\ 24.\ 15.$ suppl. $= 45.\ 17.\ 7.$ $\frac{1}{2}(B-C) = 39.\ 57.\ 12,5$
$B - C = 79.\ 54\ 23$

$\frac{1}{2}(B+C) - 45° = 22.\ 21.\ 26,5$
$\frac{1}{2}(B-C) + 45° = 84.\ 57.\ 12,5$
$-\frac{1}{2}(B-C) + 45° = 5.\ 2.\ 47,5$

$\log \cos(B+C)$ $\bar{1},24368$
$\log \cos(B-C)$ + $\bar{1},84731.$
$2 \log tg \frac{a}{2}$ + $0,60363$
$\log tg \frac{a}{2}$ $0,30181,5.$
$\frac{a}{2}$ $63°\ 28'\ 35,$
$a = 126.\ 57.\ 10.$
$b = 130.\ 16.\ 40$
~~62. 4. 0.~~
$c = 21.\ 32\ 42$

$\log tg(\frac{B+C}{2} - 45°)$ $\bar{1},61416$
$\log tg(\frac{B-C}{2} + 45°)$ $1,05400$
$2 \log tg \frac{b}{2}$ $0,66816$
$\log tg \frac{b}{2}$ $0,33408$
$\frac{b}{2}$. $65°\ 8'\ 20''$
$\log tg(\frac{B+C}{2} - 45°)$ $\bar{1},61416.$
$\log tg(45° - \frac{B-C}{2})$ $\bar{2},94455$
$\bar{2},55871$
~~$\bar{1},77935,5.$~~
~~31° 2' 0''.~~
$2 \log tg \frac{c}{2}$ $\bar{1},27935,5.$
$\frac{c}{2}$ $10°\ 46'\ 21.$

L'angle C pourra se calculer plus avantageusement, après le calcul préalable du côté b, par la formule.

$$tg\,C = \frac{tg\,c}{\sin b}.$$

4e cas. Données : b, B. — Les formules à employer seront :

$$\sin c = \frac{tg\,b}{tg\,B} \qquad \sin C = \frac{\cos B}{\cos b} \qquad \sin a = \frac{\sin b}{\sin B}.$$

Les conditions de possibilité sont analogues à celles du 2e cas. Seulement, on sait déjà que b et B doit être tous les deux aigus ou tous les deux obtus. Dans le premier cas, on doit avoir $b < B$ et dans le second cas $\pi - b < \pi - B$ ou $b > B$.

Si cette condition est remplie, on aura deux solutions du problème. On prendra d'abord pour c l'une des deux valeurs, puis pour C l'angle de même espèce que c et enfin pour a un angle aigu ou obtus selon que b & c seront ou non de même espèce.

On pourra transformer, comme dans le 2e cas, les formules précédentes en celles-ci plus avantageuses :

$$tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{c}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sin(B-b)}{\sin(B+b)}}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{2}\right) = \sqrt{tg\frac{B+b}{2}\, tg\frac{B-b}{2}}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{tg\frac{B-b}{2}}{tg\frac{B+b}{2}}}.$$

5e cas. — Données : a, B. — On aura alors.

$$\sin b = \sin a \sin B \qquad tg\,c = tg\,a \cos B \qquad tg\,C = \frac{1}{\cos a\, tg\,B}$$

Le triangle existe toujours. — On prendra b de même espèce que B. On pourrait employer, pour le calcul de b, la formule indirecte :

$$tg\,b = \sin c\, tg\,B.$$

6e cas. — Données : B, C. — On prendra les formules :

$$\cos a = \cot B \cot C \qquad \cos b = \frac{\cos B}{\sin C} \qquad \cos c = \frac{\cos C}{\sin B}.$$

Supposons d'abord que B & C sont tous les deux aigus ; alors il faut que l'on ait $\frac{\pi}{2} - C < B$ ou $B + C > \frac{\pi}{2}$. Ensuite si B est obtus & C aigu, il faudra $B - \frac{\pi}{2} < C$ c'à d. $B - C < \frac{\pi}{2}$. Enfin, si tous les deux sont obtus, on aura pour la condition de possibilité : $\pi - B + \pi - C < \frac{\pi}{2}$ ou $B + C < \frac{3}{2}\pi$

On a donc en somme les trois conditions suffisantes :

$$B - C < \frac{\pi}{2} \qquad \frac{3}{2}\pi > B + C > \frac{\pi}{2}.$$

On emploiera avec plus de précision les formules :

Triangles quelconques.

Données:

$a = 120°\,35'\,43'',7$

$b = 100.\ 13.\ 5,3.$

$c = 59.\ 57.\ 38,4$

$2p = 280.\ 46.\ 27,4.$

$p = 140.\ 23.\ 13,7.$

~~p-a = 40. 10. 8~~

$p-a = 19.\ 47.\ 38,0$

$p-b = 40.\ 10.\ 8,4$

$p-c = 80\ 25\ 35,3$

$\log \sin p$	$\bar{1},8045462.$
$\log \sin (p-a)$	$\bar{1},5296883$
$\log \sin (p-b)$	$\bar{1},8095896.$
$\log \sin (p-c)$	$\bar{1},9939091$

$\operatorname{colog} \sin p$	$0,1954538$
$\operatorname{colog} \sin (p-a)$	$0,4703117$
$\operatorname{colog} \sin (p-b)$	$0,1904104$
$\operatorname{colog} \sin (p-c)$.	$0,0060909$

calcul de A

$\log \sin (p-b)$	$\bar{1},8095896$
$\log \sin (p-c)$	$\bar{1},9939091$
$\operatorname{col} \sin p$	$0,1954538$
$\operatorname{col} \sin (p-a)$	$0,4703117$
$2 \log \operatorname{tg} \frac{A}{2}$	$0,4692642$
$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2}$	$0,2346321.$
$\frac{A}{2}$.	$59°\,46'\,30'',25$

Calcul de B.

$\log \sin (p-a)$	$\bar{1},5296883$
$\log \sin (p-c)$	$\bar{1},9939091$
$\operatorname{col.} \sin p$	$0,1954538$
$\operatorname{col} \sin (p-b)$	$0,1904104.$
$2 \log \operatorname{tg} \frac{B}{2}$	$\bar{1},9094616$
$\log \operatorname{tg} \frac{B}{2}$	$\bar{1},9547308.$
$\frac{B}{2}$.	$42°\,1'\,9'',3.$

calcul de C

$\log \sin (p-a)$	$\bar{1},5296883$
$\log \sin (p-b)$	$\bar{1},8095896$
$\operatorname{col} \sin p$	$0,1954538$
$\operatorname{col} \sin (p-c)$	$0,0060909.$
$2 \log \operatorname{tg} \frac{C}{2}$	$\bar{1},5408226$
$\log \operatorname{tg} \frac{C}{2}$	$\bar{1},7704113.$
$\frac{C}{2}$	$30°\,30'\,54'',6$

$A = 119°\,33'\,0'',5$

$B = 84.\ 2.\ 18,6$

$C = 61.\ 1.\ 49,2$

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \sqrt{-\frac{\cos(B+C)}{\cos(B-C)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{B-C}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{C-B}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

qu'on peut déduire soit des formules précédentes soit de celles du cas général.

V. Résolution des triangles quelconques.

Nous considérerons successivement les cas où les données sont 1° les trois côtés, 2° deux côtés et l'angle compris entre eux, 3° deux côtés & l'angle opposé à l'un d'eux. 4° deux angles & le côté compris entre eux, 5° deux angles & le côté opposé à l'un d'eux, 6° les trois angles.

Les trois derniers cas peuvent se ramener aux trois premiers par la considération du triangle polaire. Mais il vaut mieux les traiter directement.

1^er^ Cas. – Données : a, b, c. – On emploiera les formules.

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-b)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p \sin(p-c)}}$$

où $$2p = a+b+c.$$

Pour que le triangle existe, il faut que la somme $a+b+c$ soit moindre que 2π et que le plus grand côté soit plus petit que la somme des deux autres. Cette condition qu'on démontre en géométrie, pourrait aussi se déduire des formules précédentes elles-mêmes.

2^e^ Cas. – Données : a, b, C. – Supposons $a > b$. Les deux angles A & B pourront se calculer par les analogies :

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\cot\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} \qquad \frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\cot\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}$$

on calculera ensuite le côté c par la formule

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}\frac{c}{2} = \operatorname{tg}\frac{a-b}{2}\,\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}$$

Données : $a = 113^\circ\, 21'\, 0'',5$ $\qquad \tfrac{1}{2}(a+b) = 84^\circ\, 39'\, 50'',9$

$b = 55^\circ\, 58'\, 31'',3$ $\qquad \tfrac{1}{2}(a-b) = 28.\, 41'\, 14'',6$

$C = 61^\circ.\, 46.\, 9.6$ $\qquad \tfrac{1}{2}C = 30.\, 53.\, 4,8$

Formules.

$$\sin\frac{c}{2}\sin\frac{A-B}{2} = \cos\frac{C}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\sin\frac{c}{2}\cos\frac{A-B}{2} = \sin\frac{C}{2}\sin\frac{a+b}{2}$$

$$\cos\frac{c}{2}\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\cos\frac{c}{2}\cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

$l.\sin\frac{a-b}{2}$	$\bar{1},6812688$	$l.\sin\frac{c}{2}\sin\frac{A-B}{2}$	$\bar{1},6148585$
$l.\cos\frac{C}{2}$	$\bar{1},9335897$	$l\frac{\sin}{\cos}\frac{A-B}{2}$	$\bar{1},8912944$
$l.\cos\frac{a-b}{2}$	$\bar{1},9431243$	$l\sin\frac{c}{2}\cos\frac{A-B}{2}$	$\bar{1},7084941$
		$l.\,tg\frac{A-B}{2}$	$\bar{1},9063644$
$l.\sin\frac{a+b}{2}$	$\bar{1},9981130$	$l.\cos\frac{c}{2}\sin\frac{A+B}{2}$	$\bar{1},8767140$
$l.\sin\frac{C}{2}$	$\bar{1},7103811$	$l.\frac{\sin}{\cos}\frac{A+B}{2}$	$\bar{1},9991283$
$l.\cos\frac{a+b}{2}$	$\bar{2},9685666$	$l.\cos\frac{c}{2}\cos\frac{A+B}{2}$	$\bar{2},6789477$
		$l.\,tg\frac{A+B}{2}$	$1,1977663$

$\frac{A+B}{2} = 86^\circ\, 22'\, 16'',0$ $\qquad l.\sin\frac{c}{2}$ $\bar{1},8171997$

$\frac{A-B}{2} = 38.\, 52.\, 14,5$ $\qquad l.\cos\frac{c}{2}$ $\bar{1},8775857$

$A = 125.\, 14.\, 30,5$ $\qquad l.\,tg\frac{c}{2}$ $\bar{1},9396140$

$B = 47.\, 30.\, 2,5$ $\qquad \frac{c}{2}$ $41^\circ\, 1'\, 46,05$

$c = 82.\, 3.\, 32,81$

2^e^ méthode pour calculer c.

$tg\varphi = tg b \cos C$ $\qquad \cos c = \frac{\cos b \cos(a-\varphi)}{\cos\varphi}$

$l.\,tg b$	$+\ 0,2706098$	$l.\cos b$	$\bar{1},7478384$
$l.\cos C$	$+\ \bar{1},6748384$	$l.\cos(a-\varphi)$	$\bar{1},9132779$
$l.\,tg\varphi$	$\bar{1},6748807$ / $\bar{1},8454905$	$col.\cos\varphi$	
φ	$35^\circ\, 0'\, 58'',16$	$l.\cos c$	
$a-\varphi$	$78.\, 20\, 1,84$	c	
$l.\cos\varphi$	$\bar{1},9132778$		

$l.\cos b$	$\bar{1},7478384$
$l.\cos(a-\varphi)$	$\bar{1},3056985$
$Col.\cos\varphi$	$0,0867222$
$l\cos c$	$\bar{1},1403620$

$c = 82.\, 3.\, 31,1$

32, 1,55

Le problème est toujours possible et admet une solution unique. Méthode de calcul de Gauss. — On écrit les formules de Delambre &....

Remarque I. — Dans la pratique, on peut n'avoir besoin que du côté c seulement. Dans ce cas on emploiera la formule:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

Pour rendre cette formule commode pour l'emploi des logarithmes, prenons un angle auxiliaire φ, compris entre 0 et π par exemple, défini par l'équation

$$tg\varphi = tg b \cos C$$

on aura alors

$$\cos c = \frac{\cos b \cos(a-\varphi)}{\cos\varphi}.$$

Remarque II. — On peut aussi avoir besoin de l'un seulement des deux angles A & B sans avoir besoin de l'autre. Cherchons pour ce cas une relation entre a, b, C & A. Pour cela, il suffit d'éliminer sin c entre les équations

$$\sin c \sin A = \sin a \sin C$$

$$\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C$$

il vient alors,

$$\cot. A = \cot. a \frac{\sin b}{\sin C} - \frac{\cos b \cos C}{\sin C}.$$

ou bien:

$$\sin C \cot A = \cot a \sin b - \cos b \cos C.$$

qu'on écrit habituellement

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A.$$

et qu'on appelle <u>équation aux cotangentes</u>.

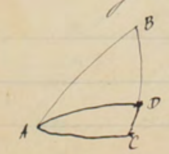
En posant comme précédemment

$$tg\psi = tg a \cos C$$

on aura

$$\cot A = \frac{\cot. C \sin(b-\psi)}{\sin\psi}.$$

Remarque III. — L'emploi des deux angles auxiliaires φ & ψ équivaut à la décomposition du triangle considéré en deux triangles rectangles. Si l'on abaisse du sommet A un arc de grand cercle AD perpendiculaire à BC, on a dans le Δ ACD



$$\cos C = \frac{tg\, CD}{tg\, b} \qquad \text{donc} \quad AD = \varphi$$

ensuite on a

$$\cos c = \cos AD \cos BD = \frac{\cos b}{\cos CD}\cos(a - CD) = \frac{\cos b \cos(a-\varphi)}{\cos\varphi}.$$

Remarque IV. – Lorsqu'on a à calculer simultanément les éléments c et A sans avoir besoin de B, on opère habituellement comme il suit. On écrit les formules fondamentales :

$$\sin c \sin A = \sin a \sin C$$
$$\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

On peut déterminer un nombre positif H et un angle K compris entre 0 et 2π et satisfaisant aux équations.

$$H \cos K = \cos a$$
$$H \sin K = \sin a \cos C$$

qui se prêtent bien aux calculs logarithmiques. On a alors.

$$\sin c \sin A = \sin a \sin C$$
$$\sin c \cos A = H \sin(b-K)$$
$$\cos c = H \cos(b-K)$$

on peut ainsi calculer A et c par logarithmes, et comme on a trois éq. entre deux inconnues, on aura un moyen de vérification.

3e Cas. – Données : a, b, A. – On calculera d'abord B par la formule :

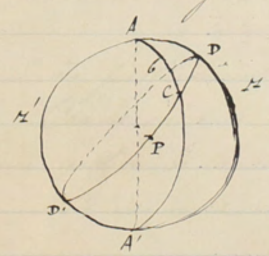
$$\sin B = \frac{\sin A \sin b}{\sin a}$$

et ensuite on aura C et c par les formules :

$$\cot \frac{C}{2} = \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{a-b}{2}} \operatorname{tg} \frac{A-B}{2}.$$

$$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A-B}{2}} \operatorname{tg} \frac{a-b}{2}.$$

Pour discuter commodément la question qui nous occupe, décrivons un grand cercle $AZA'Z'$ et un autre grand cercle ACA'



coupant le premier sous un angle égal à l'angle donné A. Prenons à partir du point A un arc AC égal à l'arc donné b. Menons enfin le grand cercle DD' qui joint C au pôle P du cercle AZA'.

1° Supposons d'abord l'angle A aigu. Alors le point C se trouvera entre P et D et sa ~~distance~~ l'arc de grand cercle CZ mené de C au point variable Z de l'arc ADA' ~~se~~ décroîtra d'abord quand Z se déplacera de A vers D, puis croîtra jusqu'à CA'. Pour que notre problème soit possible, il faudra que l'arc a

soit compris entre $CD = \sin^{-1}(\sin A \sin b)$ et le plus grand des deux arcs $CA = b$ & $CA' = \pi - b$. Si de plus a est ~~compris entre ces~~ plus grand que le plus petit des deux derniers arcs, il y aura deux solutions.

2° Supposons maintenant que A soit obtus. Alors l'arc variable CX' ~~se~~ croîtra d'abord que X' se déplacera de A vers D' et atteindra en D' la valeur $\sin^{-1}(\sin A \sin b)$, puis décroîtra jusqu'à la valeur CA'. Donc dans ce cas, pour la possibilité du problème, il faut que a soit compris entre CD' & le plus petit des deux arcs b & $\pi - b$. Si de plus, il est plus petit que le plus grand des deux derniers, il y aura deux solutions.

Dans les deux cas, on aura les deux solutions, s'il y en a deux, en prenant les deux angles B donnés par la première formule & achevant le calcul par les deux autres formules.

4° cas. — Données : A, B, c. — Dans cette question, comme dans le cas 2° cas, on peut employer avec commodité les formules de Delambre qu'on mettra sous la forme :

$$\cos\frac{c}{2}\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$
$$\cos\frac{c}{2}\cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$
$$\sin\frac{c}{2}\sin\frac{A-B}{2} = \cos\frac{C}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$
$$\sin\frac{c}{2}\cos\frac{A-B}{2} = \sin\frac{C}{2}\sin\frac{a+b}{2}$$

Dans le cas où l'on cherche A, B, c et sous forme :

$$\sin\frac{C}{2}\sin\frac{a+b}{2} = \sin\frac{c}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\sin\frac{C}{2}\cos\frac{a+b}{2} = \cos\frac{c}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$
$$\cos\frac{C}{2}\sin\frac{a-b}{2} = \sin\frac{c}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$
$$\cos\frac{C}{2}\cos\frac{a-b}{2} = \cos\frac{c}{2}\sin\frac{A+B}{2}.$$

Le problème est toujours poss. et n'admet qu'une solution.

Comme on a 4 formules pour 3 quantités, il y aura toujours une équation de condition qui servira de vérification

5° cas. — Données : A, B, a. — On emploiera d'abord la formule :

$$\sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A}$$

Il y aura des cas d'impossibilité comme dans le 3° cas, et il pourra y avoir deux solutions. On déterminera ensuite les deux autres éléments par les formules.

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}\operatorname{tg}\frac{a-b}{2} \qquad \cot\frac{C}{2} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}}\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}.$$

Données:

$A = 119^\circ\ 33'\ 0'',5$ $\quad$ $S = 42^\circ.\ 18'.\ 34'',2$

$B = 84.\ 2.\ 18,6$ $\quad$ $A-S = 77.\ 14\ \ 26,83$

$C = 61.\ 1.\ 49,2$ $\quad$ $B-S = 41\ \ 43.\ 44,4$

$2S+\pi = 264\ \ 37.\ 8,3$ $\quad$ $C-S = \cancel{17}\ 18\ \ 43\ \ 15,0$

$l. \sin S$	$\bar{1},8281022$		
$l \sin(A-S)$	$\bar{1},9891410$	$Col \sin(A-S)$	$0,0108590$
$l. \sin(B-S)$	$\bar{1},8232187$	$Col \sin(B-S)$	$0,1767813$
$log \sin(C-S)$	$\bar{1},5064474$	$Col \sin(C-S)$	$0,4935526$

Calcul de a

$l. \sin S$	$\bar{1},8281022$
$l. \sin(A-S)$	$\bar{1},9891410$
$col. \sin(B-S)$	$0,1767813$
$Col. \sin(C-S)$	$0,4935526$
$2 \log tg \frac{a}{2}$	$0,4875771$
$\log tg \frac{a}{2}$	$0,243788\bar{6}$
$\frac{a}{2}$	$60^\circ\ 17'\ 51,9$

Calcul de b

$l \sin S$	$\bar{1},8281022$
$l. \sin(B-S)$	$\bar{1},8232187$
$Col. \sin(A-S)$	$0,0108590$
$Col. \sin(C-S)$	$0,4935526$
$2 l. tg \frac{b}{2}$	$0,1557325$
$l. tg \frac{b}{2}$	$0,077866\bar{3}$
$\frac{b}{2}$	$50^\circ\ 6'\ 32'',7$

$a = 120^\circ\ 35'\ 43'',8$

$b = 100.\ 13\ \ 5,4$

$c = 59.\ 57\ \ 38,4$

Calcul de c

$l. \sin S$	$\bar{1},8281022$
$l \sin(C-S)$	$\bar{1},5064474$
$Col. \sin(A-S)$	$0,0108590$
$Col. \sin(B-S)$	$0,1767813$
$2 l. tg \frac{c}{2}$	$\bar{1},5221899$
$l. tg \frac{c}{2}$	$\bar{1},761095\bar{0}$
$\frac{c}{2}$	$29^\circ\ 58'\ 49,\frac{2}{2}$

6e Cas. — Données : A, B, C. — On emploiera les formules.

$$tg\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\sin S \sin(-S+A)}{\sin(-S+B)\sin(-S+C)}}$$

$$tg\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{-\sin S \sin(-S+B)}{\sin(-S+A)\sin(-S+C)}}$$

$$tg\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{-\sin S \sin(-S+C)}{\sin(-S+A)\sin(-S+B)}}$$

Pour que le triangle existe, il faut et il suffit que son triangle polaire existe. Supposons $A > B > C$, alors il faut.

$$\pi - A + \pi - B + \pi - C < 2\pi \qquad \pi - C < \pi - A + \pi - B.$$

c'à d.

$$A + B + C > \pi \qquad C > A + B + \pi.$$

Si ces conditions sont remplies, on aura une solution unique.

VI. Applications diverses.

I. Changement d'unité. —. Dans toutes les formules précédentes, tous les côtés, ainsi que tous les angles, n'entrent que par leurs lignes trigonométriques & jamais par eux-mêmes. On peut donc les rapporter à une unité quelconque sans nuire à l'exactitude de ces formules. Dans les tables de logarithmes les plus usitées, ces quantités sont exprimées en ~~cette unité est le~~ degrés, minutes & secondes d'arc. Mais dans les questions analytiques & autres, on a fréquemment besoin d'avoir ces quantités exprimées en une autre unité qu'on appelle unité analytique (radian des Anglais). C'est l'arc de cercle dont la longueur est égale au rayon du cercle, ou l'angle qui sous-tend un pareil angle. Nous allons par conséquent nous proposer le problème suivant.

Étant donné le nombre a qui exprime la valeur d'un angle ou d'un arc en secondes d'arc, trouver le nombre a_1 qui exprime le même angle en unités analytiques, & vice versa.

La circonférence ou 4 angles droits contient $360 \times 60 \times 60$ c'à d 1296000 secondes & elle contient 2π unités analytiques. On aura donc.

$$\frac{a}{1296000} = \frac{a_1}{2\pi}.$$

d'où

$$a_1 = a\frac{2\pi}{1296000}.$$

Cette formule appliquée à l'arc d'une seconde donne.

$$\text{arc } 1'' \text{ (exprimé en radians)} = \frac{2\pi}{1296000}.$$

Exemple. — D'après Bessel le rayon équatorial de la Terre ... a pour valeur: 637.7398 mètres.

On a ici $\log R = \cancel{4{,}68}\ 6{,}8046436.$

$\log \sin 1'' = \bar{6}{,}6855749.$

$\log R \sin 1'' = 1{,}4902185$

Donc l'arc d'une seconde sur l'équateur terrestre a pour valeur: $30{,}^{m}915 \ \left(= 17^{ken.}\ 0^{shaku},\ 0195 \right.$

L'arc d'une minute a pour log. $\left(= \frac{255^{ken}5}{15.} \right.$

1,4902185 $\quad$ 3,2683698

1,7781513 $\quad$ Nombre $\quad$ $1855{,}^{m}111$. de longitude égale à

Prob. Combien de chō ~~...~~ pour une diff. d'une seconde de temps au pour Tokio.

$\log(255{,}5) = 2{,}37199.$

$\log(r\cos\varphi') = \bar{1}{,}91003$

$col.\ 60 = \bar{2}{,}22185$

$= 0{,}50387 \quad$ Nombre. 3,1906

On aura donc:

$$a_1 = a.\ \text{arc}\ 1''.$$

Mais le logarithme de arc 1'' et le logarithme de sin 1'' ont les mêmes valeur à moins d'une unité du septième ordre près. Donc, dans les applications, on peut remplacer arc 1'' par sin 1'' et écrire

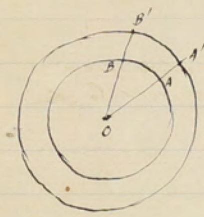
$$a_1 = a \sin 1'' \quad \text{ou} \quad a = \frac{a_1}{\sin 1''}.$$

Notre problème se trouve ainsi résolu.

Il est bon de savoir par cœur la valeur du log. sin 1'' qui est:

$$\log \sin 1'' = \bar{6}{,}6855749.$$

II. Valeur d'un arc pour un rayon quelconque. — Étant donné le nombre a qui exprime en secondes un arc de cercle d'un rayon qcq R ou un arc de grand cercle dans une sphère de rayon R, trouver le nombre ~~longueur~~ a' qui exprime la longueur de cet arc rapporté à la même unité que R & vice versa. Tel est le problème que nous allons résoudre et qu'on rencontre à chaque instant en Géodésie.



Soit $A'B'$ l'arc considéré. Du centre O du cercle $A'B'$ et dans le plan de ce cercle, décrivons un cercle AB avec l'unité de longueur comme rayon. On aura alors.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{R}{1}.$$

Mais on a

$$A'B' = a' \qquad AB = a_1 = a \sin 1''$$

Donc on a:

$$\frac{a'}{a \sin 1''} = R \quad \text{ou} \quad \frac{a'}{a} = R \sin 1''.$$

On aura donc

$$a' = a R \sin 1'' \quad \& \quad a = \frac{a'}{R \sin 1''}.$$

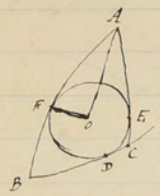
III. Surface d'un triangle sphérique. — On sait par la géométrie que la surface d'un triangle sphérique évaluée en parties de la surface totale de la sphère ~~...~~ est égale au rapport de son excès sphérique aux 8 ~~4~~ angles droits. Si donc on appelle σ ~~...~~ la surface d'un triangle sphérique sur une sphère de rayon R et ε son excès sphérique évalué <u>en secondes</u>, on aura:

$$\frac{\sigma}{4\pi R^2} = \frac{\varepsilon}{2 \times 1296000} \quad \text{ou} \quad \sigma = \frac{2\pi R^2 \varepsilon}{1296000}$$

ou en remplaçant $\frac{2\pi}{1296000}$ par sa valeur $\sin 1''$

$$\sigma = R^2 \varepsilon \sin 1''.$$

IV. – Rayon sphérique du cercle inscrit dans un triangle sphér.–



Soient D, E, F les points de contacts du cercle avec les côtés du triangle sphérique. On a évidemment.

$$AE = AF = p - a \qquad CE = CD = p - c \qquad BD = BF = p - b$$

en posant $\qquad 2p = a + b + c.$

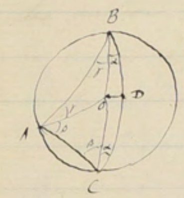
Or dans le triangle sphérique OFA, on a en appelant r le rayon sphérique du cercle considéré.

$$tg\,\frac{A}{2} = \frac{tg\,r}{\sin(p-a)} \quad \text{ou} \quad tg\,r = tg\,\frac{A}{2}\sin(p-a)$$

en remplaçant $tg\,\frac{A}{2}$ par sa valeur:

$$tg\,r = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}.$$

V. Rayon sphér. du cercle circonscrit à un triangle sphér. —.



En joignant le centre du cercle aux sommets du triangle, on le décompose en trois triangles isôcèles AOB, BOC, COA. Si nous posons

$$BCO = CBO = \alpha \quad CAO = ACO = \beta \quad ABO = BAO = \gamma$$

nous avons:

$$\beta + \gamma = A \qquad \gamma + \alpha = B \qquad \alpha + \beta = C$$

d'où $\qquad C - \alpha + B - \alpha = A \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{B + C - A}{2} = \frac{A + B + C}{2} - A$

ou bien

$$\alpha = \frac{2S + \pi}{2} - A = \frac{\pi}{2} - (A - S).$$

Abaissons maintenant l'arc OD perp. sur BC. on aura (en appelant r_1 le rayon cherché)

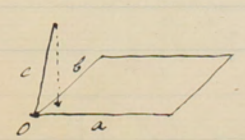
$$\cos\alpha = \frac{tg\,\frac{a}{2}}{tg\,r_1} \quad \text{ou} \quad \cot r_1 = \cot\frac{a}{2}\cos\alpha$$

c'à d. $\qquad \cot r_1 = \cot\frac{a}{2}\sin(A - S).$

ou en remplaçant $\cot\frac{a}{2}$ par sa valeur:

$$\cot r_1 = \sqrt{\frac{\sin(A-S)\sin(B-S)\sin(C-S)}{\sin S}}.$$

VI. Volume d'un parallélipipède en fonction de trois arêtes contigües & des angles qu'elles font entre elles.– Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un parallélipipède & A, B, C les angles que forment ces côtés deux à deux. Le volume de ce parallélipipède est égal, comme on sait, à sa base multiplié par sa hauteur. Si nous prenons la face formée par a, b pour la base, sa surface sera égale à $ab\sin C$. et sa hauteur égale à $c\sin D$. D étant l'angle du côté c avec le plan de la base. Or si l'on décrit du sommet o comme centre une sphère



* Numéro ajouté le 19 Sep. 1886.

de rayon égal à 1, et que nous appelons Z, M, N les points où les côtés a, b, c percent cette sphère l'angle D sera égal à l'arc NP

perp. sur l'arc ZM. Donc dans le triangle rectangle ZNP on aura.

$$\sin D = \sin NP = \sin b \sin NZM = \sin B \sin A = 2\sin b \sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

ou en remplaçant $\sin\frac{A}{2}$ et $\cos\frac{A}{2}$ par leurs valeurs.

$$\sin D = 2\sin B\sqrt{\frac{\sin(P-B)\sin(P-C)}{\sin B\sin C}}\sqrt{\frac{\sin P\sin(P-A)}{\sin B\sin C}}$$

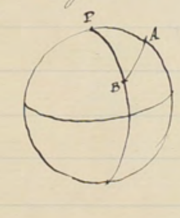
où

$$2P = A+B+C.$$

On aura donc enfin pour le volume cherché

$$2abc\sqrt{\sin P\sin(P-A)\sin(P-B)\sin(P-C)}.$$

VII. Distance de deux points de la surface terrestre. — La plupart des questions de géodésie et d'astronomie sphérique ne sont que de simples applications de la trigonométrie sphérique. Toutes ces questions ne pouvant trouver place ici, nous nous contenterons de donner un seul exemple de ce genre d'application. Voici l'énoncé du problème: Trouver la longueur de l'arc de grand cercle qui joint deux points du globe terrestre qu'on suppose sphérique, connaissant les longitudes et les latitudes de ces points.

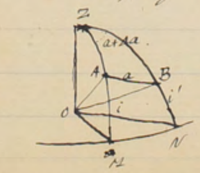


Joignons au pôle Nord P les deux points considérés A et B. Dans le triangle PAB, l'angle en P que nous supposerons $<\pi$ sera la différence des longitudes $l-l'$ et les côtés AP et BP seront respectivement égaux à $\frac{\pi}{2}-\lambda$ et $\frac{\pi}{2}-\lambda'$, λ λ' étant les latitudes données. On aura donc

$$\cos AB = \sin\lambda\sin\lambda' + \cos\lambda\cos\lambda'\cos(l-l').$$

et après avoir fait le calcul, il faudra exprimer AB en secondes et multiplier par $R\sin 1''$, R désignant le rayon de la Terre.

VIII.* Réduction d'un angle à l'horizon. — Le problème est celui-ci: Étant donné l'angle que forment entre elles deux droites inclinées sur l'horizon, trouver l'angle que forment leurs projections horizontales. — Soit $AB = a$ l'angle donné et $AZB = MN = a+\Delta a$ l'angle à trouver.



Dans le triangle ZAB, on a en nommant i et i' les inclinaisons des droites OA, OB

$$\cos a = \sin i\sin i' + \cos i\cos i'\cos(a+\Delta a).$$

Dans la pratique i & i' sont de petits angles & par suite il en est de même de $\Delta\alpha$. On a en développant:

$$\cos a = \left(i - \frac{i^3}{6} + \dots\right)\left(i' - \frac{i'^3}{6} + \dots\right) + \left(1 - \frac{i^2}{2} + \dots\right)\left(1 - \frac{i'^2}{2} + \dots\right)\left(\cos a - \frac{\Delta a}{1}\sin a - \frac{\Delta a^2}{1.2}\cos a + \dots\right)$$

ou bien

$$0 = ii' - \frac{ii'^3}{6} - \frac{i'i^3}{6} + \dots - \tfrac{1}{2}\left(i^2 + i'^2 - \tfrac{1}{2}i^2 i'^2 \dots\right)\cos a$$
$$- \left(1 - \frac{i^2}{2} + \dots\right)\left(1 - \frac{i'^2}{2} + \dots\right)\left(\Delta a \sin a + \tfrac{1}{2}\Delta a^2 \cos a + \dots\right).$$

D'où

$$\Delta a \sin a + \tfrac{1}{2}\Delta a^2 \cos a - \dots = \left[-\tfrac{1}{2}\left\{(i^2+i'^2)\cos a - 2ii'\right\} - \tfrac{1}{2}ii'\left\{\tfrac{1}{3}(i^2+i'^2) - \tfrac{1}{2}ii'\cos a\right\}\right]\left(1 - \frac{i^2}{2} + \dots\right)^{-1}(\dots)^{-1}$$
$$= -\tfrac{1}{2}\left\{(i^2+i'^2)\cos a - 2ii'\right\} - \tfrac{1}{4}(i^2+i'^2)\left\{(i^2+i'^2)\cos a - 2ii'\right\} - \tfrac{1}{2}ii'\left\{\tfrac{1}{3}(i^2+i'^2) - \tfrac{1}{2}ii'\cos a\right\}$$
$$= -\tfrac{1}{2}\left\{(i^2+i'^2)\cos a - 2ii'\right\} - \left\{(i^4 - i'^4)\cos a - \tfrac{1}{2}ii'(i^2+i'^2)\right\} - \dots$$

Si l'on néglige les quantités du 4$^{\text{ième}}$ ordre, on aura:

$$\Delta a \sin a = -\tfrac{1}{2}\left\{(i^2+i'^2)\cos a - 2ii'\right\} = -\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix}(i^2+i'^2)(\cos^2\tfrac{1}{2}a - \sin^2\tfrac{1}{2}a)\\ -\ 2ii'(\cos^2\tfrac{1}{2}a + \sin^2\tfrac{1}{2}a)\end{matrix}\right\}.$$
$$= -\tfrac{1}{2}\left\{(i-i')^2\cos^2\tfrac{1}{2}a - (i+i')^2\sin^2\tfrac{1}{2}a\right\}.$$

ou en remarquant que $\sin a = 2\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}a$.

$$\Delta a = \left(\frac{i+i'}{2}\right)^2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a - \left(\frac{i-i'}{2}\right)^2 \cot\tfrac{1}{2}a.$$

En supposant tout exprimé en secondes, il faudra écrire:

$$\Delta a = \left(\frac{i+i'}{2}\right)^2 \sin 1'' \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a - \left(\frac{i-i'}{2}\right)^2 \sin 1'' \cot\tfrac{1}{2}a.$$

Cours d'astronomie sphérique.

I. ~~Des coordonnées astronomiques.~~ Sphère céleste et son mouvement diurne

Introduction.

Nous avons vu en astronomie générale 1° que les étoiles fixes sont à des distances de nous tellement grandes que nous pouvons négliger les dimensions de la Terre par rapport à ces distances. 2° que toutes les étoiles, vues de la terre, conservent toujours les mêmes positions les unes par rapport aux autres. 3° enfin que, par suite du mouvement de la Terre autour de son axe, toutes les étoiles semblent tourner avec la même vitesse angulaire autour d'un axe <u>invariable</u>. Ce ne sont là que des résultats d'une première approximation. Des trois faits mentionnés plus haut, le plus exact est le premier; car en l'admettant, il en résulte des erreurs tellement petites que l'astronomie pratique moderne, avec toute sa perfection n'a pu parvenir ~~ne parvient pas~~ à les apprécier. Le deuxième et le troisième fait ne jouissent pas de la même exactitude. Les <u>mouvements propres</u> des étoiles et le changement de direction de l'axe terrestre sont des faits dont l'astronomie de précision doit absolument tenir compte, d'autant plus que leur effet peut devenir considérable avec le temps.

Quoi qu'il en soit, nous admettrons, au début, les lois approximatives du mouvement diurne des étoiles fixes et nous étudierons les diverses conséquences importantes qui en résultent. Mais auparavant, il nous faut étudier les différents systèmes de coordonnées dont se servent les astronomes et les moyens de passer d'un système de coordonnées à un autre système.

Sphère céleste.

De l'œil de l'observateur comme centre avec un rayon indéfini menons une surface sphérique ; cette surface sur laquelle nous prendrons la perspective des astres, s'appelle *sphère céleste*.

Par le centre de la sphère céleste, menons la droite parallèle à l'axe de rotation de la Terre. Cette droite qui est un diamètre de la sphère s'appelle *axe de la sphère céleste* et les extrémités de ce diamètre s'appelle *pôles de la sphère céleste*. L'un des deux pôles se trouvant vers les constellations des Ourses et porte le nom de *pôle Nord* ou *pôle boréal* ; l'autre pôle s'appelle *pôle Sud* ou *pôle austral*.

Le grand cercle de la sphère céleste dont le plan est perpendiculaire à l'axe est nommé *équateur céleste*. Ce cercle divise la surface sphérique en deux hémisphères qu'on appelle *hémisphère boréale* & *hémisphère australe*.

Les petits cercles dont les plans sont parallèles au plan de l'équateur s'appellele des *parallèles*.

On appelle *verticale* d'un lieu la droite qui représente la direction de la pesanteur à ce lieu.

On appelle *horizon* d'un lieu le grand cercle de la sphère céleste, relative à un observateur placé à ce lieu, dont le plan est perpendiculaire à la verticale de ce lieu.

Des deux pôles de l'horizon c'à d les points où la verticale perce la sphère céleste celui qui est au-dessus de l'horizon s'appelle *zénith* et l'autre porte le nom de *nadir*.

Tout grand cercle de la sphère céleste dont le plan est vertical c'à d ~~qui~~ qui passe par la verticale s'appelle ~~[illegible]~~ *cercle vertical* ou simplement *vertical*.

Le vertical ~~qui~~ dont le plan passe par ~~[illegible]~~ l'axe de la sphère ~~[illegible]~~ c'à d. le grand cercle qui joint les pôles de la sphère céleste et les pôles de l'horizon s'appelle le

<u>méridien</u> du lieu d'observation.

Le vertical dont le plan est perpendiculaire à celui du méridien s'appelle <u>premier vertical</u>.

Des deux points d'intersection du méridien avec l'horizon, celui qui est le plus près du pole boréal s'appelle <u>Nord</u> et l'autre s'appelle <u>Sud</u>. Ce sont là les deux pôles de ce premier vertical.

Des deux points d'intersection du premier vertical avec l'horizon, celui qui se trouve à gauche d'un observateur qui, debout, regarderait le Nord s'appelle <u>Ouest</u>, l'autre s'appelle <u>Est</u>. Ce sont là les deux pôles du méridien.

La droite qui joint le Nord & le Sud s'appelle <u>méridienne</u> ou ligne Sud-Nord; celle qui joint les points Ouest & Est s'appelle ligne Est-Ouest. Ces deux lignes sont évidemment perpendiculaires l'une à l'autre.

Il est facile de démontrer que la ligne Est-Ouest est l'intersection du plan de l'équateur avec le plan de l'horizon.

Pour compléter toutes ces définitions, disons aussi que tout grand cercle de la sphère céleste dont le plan passe par l'axe de la sphère s'appelle <u>cercle horaire</u> ou <u>cercle de déclinaison</u> par des raisons que nous verrons tout à l'heure.

Azimut, hauteur & distance zénithale.

Deux axes rectangulaires qcq passant par le centre de la sphère céleste & situés dans le plan de l'horizon, joints au rayon de cette sphère qui aboutit au zénith, forment un système de trois axes rectang. auquel on peut rapporter les positions des points de l'espace. Les coordonnées sphériques d'une ~~astre~~ étoile ou de tout autre point, par rapport à ce système d'axes, coord. définies comme nous l'avons dit, s'appellent la première l'*azimut* & la seconde la *hauteur* de ce point. Les astronomes prennent habituellement pour axe des x le rayon qui aboutit au point *Sud* et pour axe des y le rayon qui va au point *Ouest*.

Ainsi l'azimut d'une étoile est égal à l'angle formé avec le plan sud du méridien par le plan vertical qui contient cette étoile, & sa hauteur est égale à l'angle que forme son rayon visuel avec le plan de l'horizon, les angles étant affectés d'un signe convenable.

Au lieu de la hauteur d'un point, on considère souvent sa *distance zénithale* qui est l'arc de grand cercle moindre qu'une demi-circonférence qui joint le zénith à la perspective du point considéré.

Nous désignerons ordinairement l'azimut par A, la hauteur par h et la distance zénithale par z.

On aura évidemment quel que soit le signe de h:

$$z = 90° - h.$$

Ascension droite, déclinaison & distance polaire.

Si nous associons au rayon qui aboutit au *pôle boréal* de la sphère céleste deux rayons rectangulaires de l'équateur nous formerons encore un système de trois axes rectangulaires de coordonnées. Les astronomes prennent habituellement pour axe des x le rayon de l'équateur qui aboutit au point de l'équateur que l'on appelle *point vernal* ou *équinoxe de printemps*, pour axe des y la position que prendrait l'axe des x par une rotation de 90° autour de l'axe du ciel effectuée dans un sens tel, qu'un observateur debout sur le plan de l'équateur les pieds au centre et la tête vers le pôle boréal verrait le point x se déplacer de la droite vers la gauche. Ce sens est ce que l'on appelle *sens direct*.

Cela posé, l'*ascension droite*, la *déclinaison* d'un point quelconque sont la première & la seconde coordonnées sphériques de ce point par rapport au système d'axes.

défini ~~précédemment~~. comme nous venons de le dire.

On appelle la distance polaire ou mieux la distance au pôle Nord d'un astre l'arc de grand cercle qui joint le pôle ~~austral~~ boréal du ciel à cet astre ou plus exactement à la perspective de cet astre sur la sphère céleste.

Nous représenterons habituellement l'ascension droite par α, la déclinaison par δ et la distance polaire par P. On aura quel que soit δ.

$$P = 90^\circ - \delta.$$

Les déclinaisons positives s'appellent quelquefois déclinaisons boréales & les déclinaisons négatives, australes.

Angle horaire & temps sidéral.

On appelle angle horaire d'un astre ou de tout autre point l'angle formé avec le plan du méridien ou le plan du cercle de déclinaison ou cercle horaire de ce point. L'angle horaire est nul au moment où l'astre fait son passage supérieur au méridien; depuis ce moment, il est compté de 0° à 360° dans le sens du mouvement diurne apparent des étoiles fixes.

La loi du mouvement diurne des étoiles peut s'énoncer en peu de mots en disant que l'angle horaire de tout étoile fixe varie proportionnellement au temps; et sa variation par unité de temps est la même pour toutes les étoiles fixes.

L'intervalle de temps qui sépare ~~ces~~ deux passages supérieurs d'une même étoile fixe est appelé un jour sidéral. Un jour sidéral est divisé ~~par~~ en 24 parties égales nommées heures, une heure en 60 minutes & une minute en 60 secondes.

Puisque l'angle horaire varie de 0° à 360° pendant 24 heures, il variera de 15° par heure. On pourra donc exprimer l'angle horaire en heures ~~&~~, minutes & secondes de temps et dire par exemple que l'angle horaire d'un certain astre est de 1^h, 2^h, 3^h etc au lieu de dire qu'il est de $15°$, $30°$, $45°$ etc. Cela s'appelle exprimer l'angle horaire <u>en temps</u>; tandis que compter l'angle horaire par degrés, minutes & secondes d'arc s'appelle l'exprimer <u>en arc</u>.

L'angle horaire du point vernal, exprimé en temps s'appelle le <u>temps sidéral</u> à un instant qcq à l'instant considéré.

Il est évident qu'une étoile dont l'ascension droite est égale à α degrés, fera son passage supérieur au méridien $\frac{1}{15}\alpha$ heures après le passage du point vernal c'à'd. lorsque l'angle horaire du point vernal est égal à α. Si donc on <u>exprime α en temps</u> en raison de $15°$ à l'heure, ce nombre représentera le temps sidéral du passage supérieur de l'étoile au méridien.

Si nous représentons par t l'angle horaire d'un astre à un instant qcq, par Θ le temps sidéral au même instant et enfin par α l'ascension droite de l'astre considéré, il est facile de voir qu'on a

$$\Theta = \alpha + t \quad \text{ou} \quad t = \Theta - \alpha.$$

Il est important de faire remarquer que cette formule s'applique aussi bien aux astres dont l'asc. droite est variable qu'aux étoiles fixes; pourvu que l'on prenne pour Θ & t les valeurs qui correspondent au même instant où l'asc. droite variable a pour valeur α.

Problème I. — Étant donnée la valeur d'un angle horaire ou d'une ascension droite exprimée en temps, trouver la valeur de la même quantité exprimée en arc.

Nous convertirons séparément les heures, minutes & secondes.

Pour convertir les heures en ~~xxx~~ degrés, il suffit évidemment de les multiplier par 15.

Pour les minutes, elles valent généralement quelques degrés & quelques minutes d'arc. Or, puisqu'une heure vaut 15°, une minute de temps vaut $15'$ d'arc & 4 minutes de temps valent $15' \times 4 = 60' =$ un degré. Donc pour <u>extraire</u> les degrés contenus dans les minutes de temps, il suffit de diviser le nombre donné par 4 et de prendre le quotient entier. Quant au reste de la division, on le convertira en minutes de temps ~~par~~ en multipliant par 15, ce qui donnera un nombre au plus égal à $3 \times 15 = 45$.

Pour convertir les secondes, je remarque que ~~sa~~ 1^s de temps vaut $15''$ d'arc et 4^s de temps valent $1'$ d'arc. J'extrais donc d'abord les minutes d'arc en divisant par 4, ce qui donnera un nombre moindre que $\frac{60}{4} = 15$ qui ajouté au résultat précédent ~~donn~~ formera un nombre plus petit que $60'$ ou 1°. Ensuite, je convertis en secondes d'arc le reste de la division en le multipliant par 15.

Exemple. — Convertir ~~$13^h 46^m$~~ $13^h 39^m 42^s,3$.

$13 \times 15 = 195$ — 39 divisé par 4 quotient entier $= 9$ reste $= 3$.

$3 \times 15 = 45$ — 42 divisé par 4 quotient entier $= 10$ reste $= 2$.

$2,3 \times 15 = 34,5$. — Résultat $204^\circ 55' 34'',5$

Problème II. — Étant donné la valeur d'un angle horaire ou d'une ascension droite exprimée en arc, trouver la valeur de la même quantité exprimée en temps.

Nous convertirons séparément les degrés, minutes & secondes comme dans le problème précédent.

Pour extraire les heures contenues dans les degrés, il suffit de diviser par 15 et de prendre le quotient entier. Quant au reste, on remarquera que chaque degré vaut 4^m de temps; on le multipliera donc pour convertir en minutes de t. par 4, ce qui donnera un nombre au plus égal à $14 \times 4 = 56$.

On extraira ensuite les minutes de temps contenues dans les minutes d'arc données en divisant par 15, ce qui donnera un nombre $< \frac{60}{15} = 4$ qui ajouté au nombre précédent fournira les minutes de temps demandées puisqu'on aura un nombre moindre que $56 + 4$ c'à d 60^m ou 1^h. Quant au reste de la division, on le multipliera par 4 pour renvoyer le produit aux secondes de temps.

Pour convertir les secondes, on divisera simplement par 15 et l'on poussera la division aussi loin que l'on jugera convenable.

Exemple. — Convertir $204^\circ 55' 34'',5$.

Quotient de 204 par 15 = 13. reste = 9 $9 \times 4 = 36$.
quotient de ~~2~~55 par 15 = 3. reste = 10 $10 \times 4 = 40$
quotient de 34,5 par 15 = 2,3 Résultat $13^h 39^m 42^s,3$.

Remarque. — Pour résoudre les deux problèmes précédents, il est bon d'avoir sous les yeux un petit tableau contenant les produits de 15 par 1, 2, 3 ... 9. A force de se servir de ce tableau, on finira par savoir par cœur les 9 produits qu'il contient, et alors on n'en aura plus besoin.

Ascension droite et ~~la~~ déclinaison d'un lieu de la surface de la Terre.

Plaçons le centre de la sphère au centre de la Terre; et proposons-nous de trouver à un instant donné l'ascension droite et la déclinaison d'un lieu de la surface terrestre par rapport à cette sphère.

Menons par le point considéré Z et par l'axe de rotation de la Terre un plan qui coupe la surface terrestre suivant un grand cercle qu'on appelle un méridien terrestre. Nous verrons plus tard que le plan du ~~méridien~~ méridien terrestre du point Z contient la verticale de ce point; et comme il contient en outre l'axe de la Terre et par suite sa parallèle menée de Z, ce plan coïncide avec le plan du méridien céleste du point Z que nous avons défini précédemment. Il en résulte que le cercle de déclinaison du point Z ~~Dans~~ n'est autre chose que le méridien céleste du même point à l'instant donné. On en conclut que l'ascension droite cherchée de ce lieu est égale à l'~~a~~ angle horaire du point vernal ou au temps sidéral de ce lieu à l'instant considéré.

Quant à la déclinaison cherchée, elle est égale à l'angle formé par le rayon vecteur du point Σ avec le plan de l'équateur céleste, ~~que dans le~~ plan qui coïncide ici avec le plan de l'équateur terrestre. Cette déclinaison est donc égale à la <u>latitude géocentrique</u> du lieu ~~de~~ considéré.

Nous reviendrons ailleurs sur la considération des latitudes géocentriques & des latitudes géographiques.

Formules fondamentales de transformation.

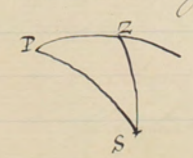
Etant données les coord. d'un astre par rapport au premier système d'axes que nous avons défini, nous nous proposons de trouver ses coord. par rapport au second système d'axes, & vice versa. Nous supposons connue la latitude géographique du lieu de l'observation, c'à d l'angle formé par la verticale du lieu avec le plan de l'équateur terrestre, angle affecté du signe + ou du signe — suivant que le lieu se trouve dans l'hémisphère boréal ou dans l'hémisphère austral.

On considère souvent au lieu de la latitude, ce qu'on appelle la <u>colatitude</u> du lieu c'à d l'angle ~~est~~ égal à 90°- latitude, dans tous les cas possibles.

Si l'on représente par φ la latitude et par C la colatitude, on aura donc par définition :

$$C = 90^\circ - \varphi.$$

Cela posé, soient P le pôle boréal, Z le zénith du lieu considéré et S la perspective de l'astre considéré. Joignons ces trois points deux à deux par des arcs de grand cercle dont chacun soit moindre qu'une demi-circonférence. Nous formons ainsi un triangle sphérique dont aucun des côtés ne dépasse une demi-circonférence. Les côtés de ce triangle ont évidemment pour valeurs.



$$PZ = c = 90^\circ - \varphi$$
$$PS = p = 90^\circ - \delta$$
$$ZS = z = 90^\circ - h.$$

Quant aux valeurs des angles en P et en Z, il faut distinguer deux cas suivant que S se trouvent dans l'hémisphère ~~orientale~~ occidentale ou dans l'hémisphère orientale, ces deux hémisphères étant celles séparées par le méridien PZ. Dans le premier cas, on a :

$$ZPS = t \qquad PZS = 180^\circ - A$$

et dans le second cas, on a :

$$ZPS = -t \qquad PZS = -(180^\circ - A)$$

Considérons d'abord le premier cas. En appliquant les formules fondamentales de la trigonométrie sphérique, on aura :

$$\sin PS \sin ZPS = \sin ZS \sin PZS$$
$$\sin PS \cos ZPS = \cos ZS \sin PZ - \sin ZS \cos PZ \cos PZS$$
$$\cos PS = \cos ZS \cos PZ + \sin ZS \sin PZ \cos PZS.$$

ou en substituant :

$$(1) \quad \begin{cases} \cos\delta \sin t = \cos h \sin A \\ \cos\delta \cos t = \sin h \cos\varphi + \cos h \sin\varphi \cos A \\ \sin\delta = \sin h \sin\varphi - \cos h \cos\varphi \cos A \end{cases}$$

On passera de là au second cas en changeant à la fois t en $-t$ et $180^\circ - A$ en $-(180^\circ - A)$, ce qui conduit aux mêmes formules.

Quand on se donne h et A ainsi que φ, les trois formules précédentes serviront à déterminer δ et t. En effet, puisque l'on sait d'avance que $\cos\delta$ est > 0, les deux premières formules donneront $\cos\delta$ et $\operatorname{tg} t$ ainsi que les signes respectifs de $\sin t$ et $\cos t$. On aura ainsi $\cos\delta$ et t. La dernière donnant $\sin\delta$ en grandeur et en signe achèvera de déterminer δ.

Maintenant, en appliquant les mêmes formules de la trigonométrie, nous aurons :

$$\sin ZS \sin PZS = \sin PS \sin ZPS$$
$$\sin ZS \cos PZS = \cos PS \sin PZ - \sin PS \cos PZ \cos ZPS$$

Les formules (3) & (4) peuvent s'écrire en éliminant m.

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{tg} M &= \frac{\operatorname{tg}\delta}{\cos t} \\ \operatorname{tg} A &= \frac{\cos M \operatorname{tg} t}{\sin(\varphi - M)} \\ \sin h &= \frac{\sin\delta}{\sin M \cos(\varphi - M)} \end{aligned}\right\}$$

Mais en général, il vaut mieux employer les formules où entrent m; car alors on a un moyen de vérification.

Exemple. $\varphi = 35^\circ\ 42'\ 40''$

$\delta = -21.\ 56.\ 48.$

$t = -3^h\ 37^m\ 16^s,5 = -54^\circ.\ 19'.\ 7'',5$

$\log \sin\delta$ $-\ \bar{1},5725735$

$\log \sin t$ $-\ \bar{1},9097028$

$\log \cos\delta$ $+\ \bar{1},9673\,\genfrac{}{}{0pt}{}{290}{\cancel{426}}$

$\log \cos t$. $+\ \bar{1},9658737$.

$\log m \sin M$ $-\ \bar{1},5725735$

$\log \cos M$ $+\ \bar{1},9152737$.

$\log m \cos M$ $+\ \bar{1},7332027$

$\log \operatorname{tg} M$ $-\ \bar{1},8393708$
3425

$\log \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos h}{\cancel{\ }} \sin A$ $-\ \bar{1},8770318$

$\log \sin A$ $-\ \bar{1},8879182$

$\log \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos h}{\cancel{\ }} \cos A$ $\bar{1},7918684$

$\log \operatorname{tg} A$ $-0,0851634$
1899

$\log \sin h$ $+\ \bar{1},3446436$

$\log \cos h$ $+\ \bar{1},9891136$

$\log \operatorname{tg} h$ $+\ \bar{1},3555300$
5197
103

$\varphi = 35^\circ\ 42'\ 40''$

$M = -34.\ 38'\ 16,3.$

$\varphi - M = +70\ \ 20\ \ 56,3$

~~$\log \sin(\varphi - M) = -\ \bar{1},9546846$~~

~~$\log m$~~

~~$\log \cos(\varphi - M)$. $+\ \bar{1},9152737$.~~

~~$A =$~~

~~$h =$~~

$\log \sin(\varphi - M)$ $+\ \bar{1},9739394$

$\log m$ $+\ \bar{1},8179290$

$\log \cos(\varphi - M)$ $+\ \bar{1},5267146$.

$A = -50^\circ\ 34'\ 55'',5$

$h = 12.\ 46.\ ~~32,8~~\ 31'',1$

$$\cos ZS = \cos PS \cos PZ + \sin PS \sin PZ \cos ZPS.$$

En substituant les valeurs des éléments, on aura dans les deux cas :

$$(2) \quad \left\{\begin{aligned} \cos h \sin A &= \cos\delta \sin t \\ \cos h \cos A &= -\sin\delta \cos\varphi + \cos\delta \sin\varphi \cos t \\ \sin h &= \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos t \end{aligned}\right.$$

Ces trois formules servent à calculer h et A quand on se donne t et δ ainsi que φ.

Remarquons que le dernier système de formules aurait pu être déduit des premières en les résolvant par rapport à $\cos h \sin A$, $\cos h \cos A$ et $\sin h$.

Les deux systèmes de formules que nous venons de trouver renferment des binômes qui sont peu commodes pour le calcul logarithmique. Mais on peut les transformer, ~~au moyen~~ en introduisant des inconnues auxiliaires, en d'autres plus commodes. Nous ferons cette transformation seulement pour le second système, qui est pratiquement plus important que le premier.

Nous poserons :

$$(3) \quad \left\{\begin{aligned} m \sin M &= \sin\delta \\ m \cos M &= \cos\delta \cos t \end{aligned}\right.$$

équations qui détermineront le nombre m que nous prendrons positif ainsi que l'angle M et qui se prêtent très commodément au calcul logarithmique. En substituant ces valeurs de $\sin\delta$ et $\cos\delta \cos t$, les deux ~~dernières~~ premières dernières formules (2) deviennent, jointes à la 1ère :

$$(4) \quad \left\{\begin{aligned} \cos h \sin A &= \cos\delta \sin t \\ \cos h \cos A &= m \sin(\varphi - M) \\ \sin h &= m \cos(\varphi - M). \end{aligned}\right.$$

Remarque I. – Si l'on veut prendre la ~~hau~~ distance zénithale Z au lieu de la hauteur, il suffira d'écrire $\sin Z$ au lieu de $\cos h$ et $\cos Z$ au lieu de $\sin h$, ce qui donne :

$$(5) \quad \left\{\begin{aligned} \sin Z \sin A &= \cos\delta \sin t \\ \sin Z \cos A &= m \sin(\varphi - M) \\ \cos Z &= m \cos(\varphi - M) \end{aligned}\right.$$

Exemple. $\varphi = 35^\circ\,42'\,40''$
$h = 12.\ 46.\ 31'',7$
$A = -50.\ 34.\ 55,5.$

$\log \cot\varphi \quad 0,1433515.$
$\log \cos A \quad \bar{1},8027546.$
$\log tg\,F \quad$ ~~0,3407969~~
$\bar{1},9461061$
871

$\log \sin F \quad \bar{1},9589370$
$\log tg\,A \quad -\ 0,0851666$
$\log \sec(h-F) \quad 0,2175616$
$\log tg\,\Pi \quad 0,2616621$

704
$\log \sin F \quad \bar{1},8208649$
$\log tg\,A \quad -\ 0,0851636$
$\log \sec(h-F) \quad 0,0568398$
$\log tg\,\Pi \quad -\ \bar{1},9628738$
8556
182
$168,8$
132

~~$h = 12^\circ\,46'\,31'',7$~~
~~$F = 65.\ 28.\ 30,5$~~
~~$h - F = -52^\circ\,41'\,59,4$~~

~~$\log\cos(h-F) = \bar{1},7824384.$~~

$h = 12^\circ\,46'\,31'',7$
$F = 41.\ 27.\ 14'',5$
$h - F = -28.\ 40\ \ 43,4$

$\bar{1},9431602.$

$\Pi = -\ 42^\circ\ 33'\ 14'',3$

Remarque II. – Comme on a,

$$t = \Theta - \alpha$$

se donner l'angle horaire d'un astre connu, revient à se donner le temps sidéral à l'époque considérée. Et les formules précédentes peuvent être regardées comme les formules de transformation pour passer des coordonnées relatives à l'équateur à celles relatives à l'horizon.

Angle parallactique.

On appelle <u>angle parallactique</u> d'un astre à un instant donné, l'angle que font entre eux, à cet instant, le cercle de déclinaison et le cercle vertical de l'astre, ou plus exactement c'est l'angle en S du triangle sphérique considéré dans le paragraphe précédent.

Nous allons nous proposer de calculer cet angle dans les divers cas qui peuvent se présenter.

I. On donne l'azimut et la hauteur.

On a dans le triangle PZS:

$$\cos\delta \sin PSZ = \cos\varphi \sin PZS$$

$$\cos\delta \cos PSZ = \sin\varphi \cos h - \cos\varphi \sin h \cos PZS.$$

Si nous convenons de prendre l'angle parallactique négatif lorsque l'astre se trouve à l'Est du méridien, et que l'on désigne par Π sa valeur algébrique, on aura,

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l} \cos\delta \sin\Pi = \cos\varphi \sin A \\ \cos\delta \cos\Pi = \sin\varphi \cos h + \cos\varphi \sin h \cos A \end{array} \right.$$

Posons:

$$(7)\quad \left\{ \begin{array}{l} f \sin F = \cos\varphi \cos A. \\ f \cos F = \sin\varphi \end{array} \right.$$

nous aurons alors les formules commodes:

$$(8)\quad \left\{ \begin{array}{l} \cos\delta \sin\Pi = \cos\varphi \sin A \\ \cos\delta \cos\Pi = f \cos(h-F) \end{array} \right.$$

Si l'on élimine f entre (7) & (8), on aura:

$$(9)\quad \left\{ \begin{array}{l} tg\,F = \cot\varphi \cos A \\ tg\,\Pi = \dfrac{\sin F\, tg\,A}{\cos(h-F)} \end{array} \right.$$

formules qui peuvent être plus pratiques.

Exemple. — $\varphi = 35^\circ 42' 40''$
$\delta = -21.56.48.$
$t = -54.19.7'',5 = -3^h 37^m 16^s,5.$

log tg G			
$\log \cot\varphi$.	0,1433515.	$\delta =$	−21. 56. 48.
$\log \cos t$.	$\bar{1}$,7658737.	$G =$	39. 3. 18,9.
$\log \operatorname{tg} G$.	$\bar{1}$,9092252	$\delta + G =$	17. 6. 30,9.
	1870		
	382	$\Pi = -$	42°. 33′ 14″,3
$\log \operatorname{tg} t$ −	0,1438291.		
$\log \sin G$	$\bar{1}$,7993885		$\bar{1}$,9803438.
$\log \sec(\delta+G)$.	0,0196562.		
$\log \operatorname{tg}\Pi$	$\bar{1}$,9628738		

II. On donne l'angle horaire et la déclinaison
On a dans ce cas:

$$(10) \quad \begin{cases} \cos h \sin\Pi = \cos\varphi \sin t \\ \cos h \cos\Pi = \sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi\sin\delta\cos t \end{cases}$$

Posant ici:

$$(11) \quad \begin{cases} g \sin G = \cos\varphi\cos t \\ g\cos G = \sin\varphi \end{cases}$$

il vient

$$(12) \quad \begin{cases} \cos h \sin\Pi = \cos\varphi\sin t \\ \cos h\cos\Pi = g\cos(\delta+G) \end{cases}$$

ou en éliminant g et $\cos h$.

$$(13) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} G = \cot\varphi\cos t \\ \operatorname{tg}\Pi = \dfrac{\sin G \operatorname{tg} t}{\cos(\delta+G)} \end{cases}$$

Remarquons que G ne diffère de π qu'en ce que A a été remplacé par t, il en est de même du numérateur de $\operatorname{tg}\Pi$. — Nous donnerons tout à l'heure une interprétation de ces quantités auxiliaires.

III. On donne l'angle horaire avec la hauteur ou l'azimut avec la déclinaison.

Des formules

$$\frac{\sin\Pi}{\cos\varphi} = \frac{\sin t}{\cos h} = \frac{\sin A}{\cos\delta}$$

on tire immédiatement

$$(14) \qquad \sin\Pi = \cos\varphi\sin t.\sec h = \cos\varphi\sin A\sec\delta.$$

IV ~~III~~. On donne l'angle horaire et l'azimut.

On a

$$(15). \qquad \cos\Pi = \cos t\cos A + \sin t\sin A\sin\varphi.$$

~~IV~~ V. On donne la déclinaison et la hauteur:

On a:

$$(16) \qquad \sin\varphi = \sin\delta\sin h + \cos\delta\cos h\cos\Pi.$$

On en tire:

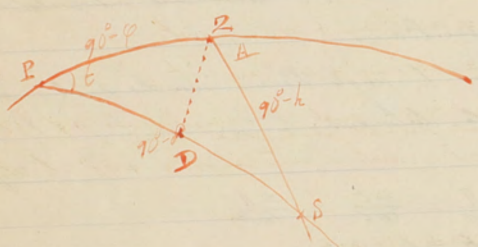
$$\cos\Pi = \frac{\sin\varphi - \sin\delta\sin h}{\cos\delta\cos h}.$$

En appliquant le procédé de transformation connu, on a:

$$\sin^2\frac{\Pi}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{-\sin\varphi + \cos(\delta-h)}{\cos\delta\cos h} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin(\delta+z) - \sin\varphi}{\cos\delta\cos h}$$

ou

$$\sin^2\frac{\Pi}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\delta+z-\varphi)\cos\frac{1}{2}(\delta+z+\varphi)}{\cos\delta\cos h}.$$



* De plus d'après notre convention, $\sin\psi$ doit avoir le signe de $\sin\varphi$. par suite ~~sin~~ $\cos B$ est toujours positif.

$$\cos^2\frac{\Pi}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{\cos(\delta+h)+\sin\varphi}{\cos\delta\cos h} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin(Z-\delta)+\sin\varphi}{\cos\delta\cos h}$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(Z-\delta+\varphi)\,\cancel{\sin}\cos\frac{1}{2}(Z-\delta-\varphi)}{\cos\delta\cos h}.$$

En posant :

$$2S = Z+\delta+\varphi.$$

on aura donc :

$$(16). \qquad \operatorname{tg}\frac{\Pi}{2} = \sqrt{\frac{\cos S\sin(S-\varphi)}{\sin(S-\delta)\cos(S-Z)}}$$

Procédé de transformation de Gauss.

Quand, pour un même lieu déterminé de la surface de la Terre, on a à faire un grand nombre de transformations de coord. traitées dans les paragraphes précédents, on abrège beaucoup le calcul en réduisant en table certaines quantités auxiliaires. C'est ce problème dont Gauss a donné une solution et que nous le allons traiter ici.

Reprenons les formules :

$$(a) \qquad \cos h\sin A = \cos\delta\sin t$$

$$(b) \qquad \cos h\cos A = -\sin\delta\cos\varphi + \cos\delta\sin\varphi\cos t$$

$$(c) \qquad \sin h = \sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos t.$$

On peut trouver un angle ψ compris entre 0 et 180° pour les latitudes boréales et entre 0° et −180° pour les latitudes australes et un autre angle B compris entre −90° et +90° et satisfaisant aux équations :

$$\cancel{\sin\varphi = \sin\psi\cos B}$$

$$\sin\psi\cos B = \sin\varphi$$

$$\sin\psi\sin B = \cos\varphi\cos t$$

$$\cos\psi = \cos\varphi\sin t.$$

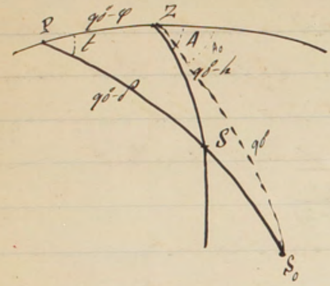
car la somme des carrés des trois seconds membres étant égale à 1, celle des carrés des deux premiers est < 1 et ψ est réel * ~~De plus, les deux carrés de sin B et de sin … signe que sin …~~ ~~De plus, cos φ cos t étant toujours > 0 sin B toujours cos B sera toujours positif ≥ 0 si l'on prend sin t > 0.~~ On peut remarquer que cos t étant > 0 si t > 0, ψ sera un angle compris entre ~~90°~~ 0 et 90° pour toutes les valeurs de t positives et entre 0 et 180° pour t < 0.

Au moyen de ces auxiliaires, la formule c devient :

$$\sin h = \sin\psi\sin(\delta+B).$$

qui permet de calculer la hauteur h.

Maintenant, ~~rappelons A, et h~~ concevons un astre



$$\begin{vmatrix} -\cos\delta_0 \sin t & -\sin\delta\cos\varphi + \cos\delta\sin\varphi\cos t \\ \cos\delta_0 \sin t. & -\sin\delta_0\cos\varphi + \cos\delta_0\sin\varphi\cos t \end{vmatrix}$$

qui, à l'instant considéré, aurait le même angle horaire que l'astre considéré et qui aurait sa hauteur nulle c'à'd. qui se trouverait à l'horizon. Appelons δ_0 la déclinaison de cet astre et A_0 son azimut à l'instant considéré. Nous aurons alors d'après les formules précédentes.

(a') $\sin A_0 = \cos\delta_0 \sin t$

(b') $\cos A_0 = -\sin\delta_0\cos\varphi + \cos\delta_0\sin\varphi\cos t$ $\quad \sin\varphi. \mid \cos\varphi$

(c') $0 = \sin\delta_0\sin\varphi + \cos\delta_0\cos\varphi\cos t.$ $\quad \cos\varphi \mid -\sin\varphi.$

On tire des formules (a), (b), (a'), (b').

$$\cos h \sin(A-A_0) = \cos\varphi \sin t \sin(\delta-\delta_0).$$

On ~~tire~~ a maintenant en ajoutant les produits de (a) par (a'), (b) par (b') et (c) par (c'):

$$\cos h\cos(A-A_0) = \cos\delta\cos\delta_0\sin^2 t + \sin\delta\sin\delta_0 + \cos\delta\cos\delta_0\cos^2 t$$

ou bien

$$\cos h\cos(A-A_0) = \cos(\delta-\delta_0).$$

Maintenant en remplaçant dans l'éq. (c') les valeurs de $\sin\varphi$ et de $\cos\varphi\cos t$ données par les éq. de définition de γ et B il vient:

$$0 = \sin\gamma\sin(\delta_0+B)$$

et comme $\delta_0 + B$ ne peuvent être ~~com~~supplémentaire, on doit avoir

$$\delta_0+B = 0 \quad \text{ou}$$

$$\delta_0 = -B.$$

On a donc:

$$\cos h\sin(A-A_0) = \cos\gamma\sin(\delta+B)$$

$$\cos h\cos(A-A_0) = \cos(\delta+B)$$

Quant à l'angle A_0, on aura d'après les formules (c)

$$\sin A_0 = \cos B \sin t$$

$$\cancel{\cos\varphi}\ \sin\varphi\ \cos A_0 = \cos B\cos t$$

$$\cos\varphi\cos A_0 = \sin B.$$

On en déduit

$$\operatorname{tg} A_0 = \sin\varphi \operatorname{tg} t.$$

et comme A_0 est de même signe que t, on peut calculer A_0 sans ambiguité.

En résumé, à l'aide des quantités A_0, B et γ qui ne dépendent ~~que~~ pour un lieu déterminé que de t

et pour lesquelles on peut construire d'avance des tables permettant de trouver leurs valeurs pour chaque valeur de t, on peut calculer rapidement h et A.

Comme on sait d'avance que $-90° < B < 90°$ et que $\sin t \sin \varphi > 0$ on pourra se servir des formules :

$$tg B = \cot . \varphi \cos t$$
$$\cot \gamma = \sin B \, tg t.$$

Si l'on pose :

$$D = \sin \gamma \qquad C = \cos \gamma \qquad E = \cot \gamma .$$

nos formules seront :

$$\sin h = D \sin(\delta + B)$$
$$\cos h \sin(A - A_0) = C \sin(\delta + B)$$
$$\cos h \cos(A - A_0) = \cos(\delta + B)$$

qui se prêtent commodément au calcul logarithmique.

Remarque I. — Dans le problème II du paragraphe précédent, on peut supposer que l'auxiliaire g ait le même signe que $\sin \varphi$; alors d'après l'éq. (13), l'angle G n'est autre chose que l'angle B et par suite

$$\sin G \, tg t = \sin B \, tg t = \cot \gamma = E.$$

On aura donc pour calculer l'angle parallactique :

$$tg \Pi = \frac{E}{\cos(\delta + B)}.$$

Remarque II. — Nous avons déjà fait remarquer que l'angle π du problème I du paragraphe précédent ne diff. de G qu'en ce que t est remplacé par A. Si donc nous appelons B', γ', A_0', C', D', E' ce que deviennent B, γ, A, C, D, E ~~et~~ si l'on remplace dans ces quantités t par A, nous aurons :

$$tg \pi = \frac{E'}{\cos(h - B)}.$$

Remarquons que les quantités B', E' etc. seront données par les tables mêmes qui donnent B & E etc. Seulement, si l'argument est t exprimé en temps, il faudra convertir d'abord A en temps c.à.d. diviser par 15.

Remarque III. En appliquant exactement le même procédé au problème inverse c.à.d. à la transformation de la hauteur et de l'azimut en déclinaison et un angle horaire, on trouvera les formules :

$$tg(A'_0 - t) = C' \, tg(h - B')$$

$$\sin P = D' \sin(h - B')$$

les auxiliaires ayant la signification définie dans la remarque précédente.

Formules différentielles.

Soit $x\,y\,z$ etc un certain nombre de variables et α une fonction de ces variables. Supposons que, avec un certain système de valeurs $x, y, z \ldots$ de ces variables, on ait calculé la valeur correspondante de la fonction α. ~~et qu'après~~ Il arrive souvent que ces valeurs ne soient qu'approchées et qu'on s'aperçoive après coup qu'il faut leur appliquer des corrections que nous appellerons $\Delta x, \Delta y, \Delta z$. Quelle est la correction correspondante $\Delta\alpha$ qu'il faut appliquer à la valeur précédemment calculée de α ?

Tel est un problème que les astronomes ont à résoudre très-fréquemment. Par exemple, dans le calcul de la hauteur d'un astre au moyen des procédés ordinaires, si la latitude du lieu est erronée et qu'il faut lui appliquer une correction égale à $\Delta\varphi$, quelle correction doit-on appliquer à la hauteur calculée ?

On a d'après la formule de Taylor appliquée au cas de plusieurs variables :

$$\Delta\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\Delta z + \cdots \frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2\alpha}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \cdots\right) + \cdots$$

Supposons que Δx Δy, etc soient assez petits pour que l'on ~~...~~ puisse négliger leurs puissances et produits à partir du 2e ordre. On aura alors :

$$\Delta\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\Delta z + \cdots$$

Or, c'est précisément la même formule que celle qui donne la différentielle totale de α sauf que les d sont remplacés par Δ. Par conséquent, ~~...~~ l'approximation où nous nous arrêtons revient à confondre les ~~...~~ corrections considérées avec les différentielles ; et l'on

$$\frac{\sin \pi}{\cos \varphi} = \frac{\sin t}{\cos h} = \frac{\sin A}{\cos \delta}.$$

aura les relations qui relient ces quantités en différentiant totalement les relations qui existent entre les quantités x, y, z etc.

D'après ce principe, cherchons les relations qui existent entre les différentielles totales des diverses quantités qui entrent dans nos formules de transform.

Reprenons les formules (1)

$$\cos\delta \sin t = \cos h \sin A$$
$$\cos\delta \cos t = \sin h \cos\varphi + \cos h \sin\varphi \cos A$$
$$\sin\delta = \sin h \sin\varphi - \cos h \cos\varphi \cos A$$

En différentiant la dernière équation, on a :

$$\cos\delta\, d\delta = (\cos h \sin\varphi + \sin h \cos\varphi \cos A)\, dh + (\sin h \cos\varphi + \cos h \sin\varphi \cos A)\, d\varphi + \cos h \cos\varphi \sin A\, dA.$$

Mais on a d'après la 1re équation (6), :

$$\cos h \sin\varphi + \cos\varphi \sin h \cos A = \cos\delta \cos\pi.$$
$$\text{ou } \cos\varphi \sin A = \cos\delta \sin\pi$$

en tenant compte de ces éq. et de la 2e éq. précédente et supprimant le facteur $\cos\delta$, il vient :

$$(17) \qquad d\delta = \cos\pi\, dh + \cos t\, d\varphi + \cos h \sin\pi\, dA \;(\text{ou} + \cos\varphi \sin t)$$

En différentiant maintenant les deux premières éq., on a

$$+\cos t. \qquad -\sin\delta \sin t\, d\delta + \cos\delta \cos t\, dt = -\sin h \sin A\, dh + \cos h \cos A\, dA$$
$$-\sin t \qquad -\sin\delta \cos t\, d\delta - \cos\delta \sin t\, dt = (\cos h \cos\varphi - \sin h \sin\varphi \cos A)\, dh - \sin\delta\, d\varphi - \cos h \cos\varphi \sin A\, dA$$

En éliminant $d\delta$ et en remarquant que :

$$\cos t \cos A + \sin t \sin A \sin\varphi = \cos\pi$$
$$-\cos t \sin A + \sin t \cos A \sin\varphi = -\sin\pi \sin h$$

, il vient

$$\cos\delta\, dt = -(\cos h \cos\varphi \sin t + \sin^2 h \sin\pi)\, dh + \cos h \cos\pi\, dA + \sin\delta \sin t\, d\varphi$$

ou en remarquant que $\cos\varphi \sin t = \cos h \sin\pi$.

$$(18) \qquad \cos\delta\, dt = -\sin\pi\, dh + \sin\delta \sin t\, d\varphi + \cos h \cos\pi\, dA.$$

En résolvant (17) et (18) par rapport à dh et dA, on a :

$$(19) \left\{ \begin{aligned} dh &= \cos\pi\, d\delta - \cos A\, d\varphi - \cos\delta \sin\pi\, dt \;(\text{ou} - \cos\varphi \sin A) \\ \cos h\, dA &= \sin\pi\, d\delta - \sin A \sin h\, d\varphi + \cos\delta \cos\pi\, dt. \end{aligned} \right.$$

Telles sont les formules différentielles les plus importantes dont nous nous servirons plus tard pour des questions importantes d'astronomie appliquée.

Coordonnées rectangulaires.

On a quelquefois à considérer les coord. rectang. d'un astre soit par rapport au premier système d'axes que nous avons considéré soit par rapport au second système. — Si on les appelle x, y, z pour le premier système et $x' y' z'$ pour le second et que l'on désigne par Δ la distance de l'astre au centre de la sphère céleste, nous aurons :

$$x = \Delta \cos h \cos A, \quad y = \Delta \cos h \sin A. \quad z = \Delta \sin h$$

$$x' = \Delta \cos \delta \cos \alpha \quad y' = \Delta \cos \delta \sin \alpha \quad z' = \Delta \sin \delta.$$

Nous ferons, dans la question des parallaxes, usage de ces coordonnées qui ne sont utiles que pour les astres situés à des distances finies de la Terre.

Problèmes divers.

Étant données l'ascension droite et la déclinaison d'une étoile, on peut se proposer plusieurs problèmes relatifs à son mouvement. Nous allons résoudre quelques-uns de ces problèmes, qui ne sont au fond que des cas particuliers du problème général de la transformation des coordonnées.

Problème I. — Trouver le temps sidéral au moment du passage supérieur ou inférieur d'une étoile donnée au méridien d'un lieu déterminé, ainsi que la hauteur de cette étoile au moment du passage.

Soit Θ le temps demandé et α l'ascension droite de l'étoile. Pour l'époque de son passage supérieur, son angle horaire est nul et l'on a

$$\Theta - \alpha = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \Theta = \alpha$$

A l'époque de son passage supérieur, son angle horaire est égal à 12^h et l'on aura :

$$\Theta - \alpha = 12^h \qquad \text{d'où} \qquad \Theta = \alpha + 12^h.$$

Si $\alpha + 12^h$ excède 24^h, il faudra évidemment en retrancher 24^h.

Cherchons maintenant la hauteur méridienne h ou

Remarque.— Le passage au méridien d'un astre s'appelle quelquefois sa <u>culmination</u>, car pour cette époque sa hauteur devient maximum ou minimum, pourvu que sa déclinaison soit invariable. En effet, on a

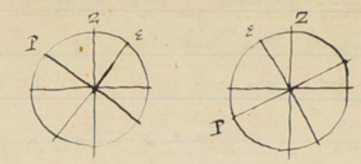
$$\sin h = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\left(1 - 2\sin^2\frac{t}{2}\right)$$
$$= \cos(\varphi-\delta) - 2\cos\varphi\cos\delta\sin^2\frac{t}{2}$$

Comme $\cos\varphi\cos\delta$ est toujours >0, le second membre devient maxim. ou minimum quand on a

$$\frac{t}{2} = 0 \text{ ou } \frac{\pi}{2} \qquad \text{c'à d } t = 0 \text{ ou } \pi.$$

Pour les astres de déclinaison variable, on conserve encore le nom de culmination.

la distance zénithale correspondante Z. La seule inspection



des deux figures ci-contre dont la première se rapporte à un lieu de l'hémisphère boréale et l'autre à un lieu de l'autre hémisphère montre que l'étoile de déclinaison δ fera son passage supérieur au méridien entre le zénith et le Sud ou entre le zénith et le Nord suivant que la valeur algébrique de δ sera inférieure ou supérieure à la valeur algébrique de la latitude φ. Dans le premier cas la distance zénithale Z au moment du passage sup. sera égal à $\varphi-\delta$ et dans le second cas, Z sera égal à $\delta-\varphi$.

$$Z = \pm(\varphi-\delta).$$

Mais si l'on convient de compter les distances zénithales méridiennes positivement vers le Sud et négativement vers le Nord, on aura la formule unique.

$$Z = \varphi-\delta.$$

En introduisant la colatitude C du lieu et la distance polaire P de l'étoile, on aura aussi.

$$Z = P - C.$$

Pour le passage inférieur, on aura en observant la même convention.

$$Z = \varphi+\delta-180^\circ \quad \text{pour l'hémisphère Nord}$$
$$Z = \varphi+\delta+180^\circ \quad \text{pour l'hémisphère Sud.}$$

Problème II.— Trouver le temps sidéral au moment du passage de une étoile donnée au premier vertical d'un lieu déterminé ainsi que sa hauteur & son angle parallactique à ce moment.

Lorsque l'étoile ~~se trouve~~ passe au premier vertical, son azimut est égal à $\pm 90^\circ$ et l'on a.

$$\sin A = \pm 1 \qquad \cos A = 0.$$

et les formules (2) deviennent

$$\pm\cos h = \cos\delta\sin t$$
$$0 = -\sin\delta\cos\varphi + \cos\delta\sin\varphi\cos t.$$

Exemple.— Trouver Θ, Z et π au moment où β Taureau passe au premier vertical de Tokio.

$\alpha = 5^h\ 19^m\ 1^s,3$		$\varphi - \delta =$	$7^\circ\ 12'\ 8''$
$\delta = +28^\circ\ 30'\ 32''$		$\varphi + \delta =$	$64.\ 13.\ 12$
$\varphi = 35^\circ\ 42'\ 40''$		$\frac{1}{2}(\varphi - \delta) =$	$3.\ 36.\ 4.$
		$\frac{1}{2}(\varphi + \delta) =$	$32.\ 6.\ 36.$
$\log \sin(\varphi - \delta)$	$\bar{1},09820$	$t =$	$\pm\ 2^h\ 43^m\ 41^s,9$
$\log \operatorname{cosec}(\varphi + \delta)$.	$0,04553$	$\alpha =$	$5.\ 19.\ 1,3$
$2 \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} t$	$\bar{1},14373$	Θ_1 Est $=$	$2^h\ 35^m\ 19^s,4$
$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} t$.	$\bar{1},57186,5.$	Θ_2 Ouest $=$	$8.\ 2.\ 43,2$
$\frac{1}{2} t =$	$20^\circ\ 27'\ 44''$		
$t =$	$40^\circ\ 55'\ 28''$		
$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - \delta)$.	$\bar{2},79888$	$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} Z$	$\bar{1},50061,5.$
$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi + \delta)$	$\bar{1},79765.$	$\log \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2}\pi)$	$\bar{1},29826,5.$
$2 \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} Z$	$\bar{1},00123$	$\frac{1}{2} Z =$	$17^\circ\ 34'\ 18'',5$ ~~45° 2' 26~~
$2 \log \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2}\pi)$	$\bar{2},59653$	$45^\circ - \frac{1}{2}\pi =$	$11.\ 14.\ 24.$
		$Z =$	$35\ 8\ 37$ ~~90. 4. 52~~
		$90^\circ - \pi =$	$22\ 28.\ 48$
		$\pi =$	$67.\ 31.\ 12.$

On tire de la première seconde :

$$(20) \qquad \cos t = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

En portant cette valeur dans la dernière des éq. (2), on a :

$$\sin h = \sin\delta \sin\varphi + \frac{\sin\delta \cos^2\varphi}{\sin\varphi}$$

ou bien :

$$(21). \qquad \sin h = \frac{\sin\delta}{\sin\varphi}.$$

Enfin la formule (4) donne :

$$(22) \qquad \sin\pi = \pm \frac{\cos\varphi}{\cos\delta}$$

On aurait pu trouver ces formules en considérant directement le triangle PZS qui est ici rectangle en Z.

Pour que t, h et π soient réels, il faut que la valeur absolue de δ soit moindre que celle de φ.* Donc il n'y a que des astres dont la déclinaison est comprise entre $-\varphi$ et $+\varphi$ qui puissent passer par le premier vertical.

L'angle horaire est donné par son cosinus. On le prendra positif ou négatif suivant que A sera égal à $+90^\circ$ ou à -90°.

On peut transformer les trois formules précédentes en d'autres plus commodes pour le calcul logarithmique, comme nous l'avons expliqué en trigonométrie. Les formules transformées sont :

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\sin(\varphi - \delta)}{\sin(\varphi + \delta)}}$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} Z = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - \delta)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi + \delta)}}$$

$$\operatorname{tg}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\pi) = \sqrt{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi - \delta)\, \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi + \delta)}.$$

Z désignant la distance zénithale et π représentant ici la valeur absolue de l'angle parallactique.

Ayant trouvé t, on calculera le temps sidéral par la formule $\qquad \Theta = \alpha + t.$

Problème III.— Trouver le temps sidéral au moment du lever et du coucher d'un astre connu, ainsi que son azimut au même moment.

Dans ce cas, on a

$$h = 0 \qquad \sin h = 0 \qquad \cos h = 1$$

* Pour que h soit > 0, il faut en outre que δ et φ soient de même signe.

Exemple. — Lever & Coucher de β Taureau à Tokio.

$C = 54^\circ\, 17'\, 20''$
$\delta = 28.\ 30.\ 32.$
$C - \delta = 25.\ 46.\ 48$
$C + \delta = 82.\ 47.\ 52$

$\log \sin (C-\delta)$ $\bar{1},63845$
$\log \operatorname{cosec} (C+\delta)$ $0,00344$
$2 \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} t$ $\bar{1},641865$
$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} t$ $\bar{1},820932,5$
$\tfrac{1}{2} t = 33.\ 30.\ 31''$
$t = \pm\ 67.\ 1.\ 2''$
$= \pm\ 4^h\ 28^m\ 4^s,1$
$\alpha = 5.\ 19.\ 1,3.$
lever Θ $0^h\ 50^m\ 57^s,2$
coucher Θ $9.\ 47.\ 5,4$

$\tfrac{1}{2}(C-\delta) = 12.\ 53.\ 24.$
$\tfrac{1}{2}(C+\delta) = 41.\ 23.\ 56.$

$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(C-\delta)$ $\bar{1},35954$
$\log \cot \tfrac{1}{2}(C+\delta)$ $0,03949$
$2 \log \operatorname{tg}(45 - \tfrac{1}{2} a)$ $\bar{1},39903$
$\log \operatorname{tg}(45 - \tfrac{1}{2} a)$ $\bar{1},69951,5.$
$45 - \tfrac{1}{2} a$ $26^\circ\ 35'\ 36,5.$
$90 - \tfrac{1}{2} a$ $53\ 11.\ 13$
$a = 36.\ 48.\ 47.$

$l \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(C-\delta) = \bar{1},35954.$
$\log \cot \tfrac{1}{2}(C+\delta) = 0,05474.$
$2 \log \operatorname{tg}(45^\circ - \tfrac{1}{2} a)$ $\bar{1},41428$
$\log \operatorname{tg}(45 - \tfrac{1}{2} a)$ $\bar{1},70714.$ 685
$45 - \tfrac{1}{2} a = 26^\circ\ 59'\ 54''$
$90 - a = 53\ 59\ 48$
$a = 26^\circ.\ 0'.\ 12''$

29
$6,7$
23

Pour tenir compte de la réfraction horizontale moyenne ε, on emploie la formule.

$$t - t_0 = \frac{15\,\varepsilon}{\sqrt{\sin(C-\delta)\sin(C+\delta)}} \qquad \varepsilon = 35' \quad 15\varepsilon = 140^s.$$

et les deux dernières équations (2) deviennent

$$\cos A = -\sin\delta\cos\varphi + \cos\delta\sin\varphi\cos t \qquad -\cos\varphi$$
$$0 = \sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos t \qquad +\sin\varphi$$

La seconde éq. donne immédiatement :

$$(23) \qquad \cos t = -\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta$$

et l'élimination de $\cos t$ entre les deux éq. donne :

$$(24) \qquad \cos A = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi}$$

Pour que ces éq. donnent les angles réels, il faut que la valeur absolue de δ soit moindre que le complément de celle de φ, ce qui s'accordent bien avec ce que nous avons vu en astronomie générale. Les étoiles qui se trouvent à des distances du pôle boréal pour un lieu de l'hémisphère Nord et du pôle austral pour un lieu de l'autre hémisphère, moindres que le ~~pôx~~ complément de la latitude de ce lieu, ~~ne se couchent jamais et~~ sont constamment visibles et ces étoiles s'appellent circompolaires. Les étoiles qui se couchent et qui se lèvent s'appellent étoiles horaires.

Dans le cas d'une étoile horaire, l'éq. (22) donnera deux valeurs de t ; on prendra t positif pour le coucher et négatif pour le lever et on calculera dans les deux cas le temps sidéral correspondant Θ par la formule

$$\Theta = \alpha + t$$

dans laquelle il faut bien observer le signe de t.

La valeur absolue de l'angle horaire ainsi obtenu s'appelle quelquefois le demi-arc diurne de l'astre

La distance angulaire d'un astre au moment de son lever et au moment de son coucher au points Est et ouest de l'horizon s'appellent amplitude ortive ou & occidentale amplitude occase

En appelant a l'amplitude regardée comme positive si l'étoile est au Sud de la ligne Est-ouest, et comme négative dans le cas contraire, nous aurons.

$$\sin a = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi}.$$

On emploiera si l'on veut les formules transformées.

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}t = \sqrt{\frac{\sin(C-\delta)}{\sin(C+\delta)}}$$
$$\operatorname{tg}(45^\circ - \tfrac{1}{2}a) = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(C-\delta)}{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(C+\delta)}}$$

Exemple. – Plus grande digression de δ P^te Ourse.

$\alpha = 18^h\ 8^m\ 51^s,6 \qquad \delta = 86°\ 37'\ 0''$

$\delta = 86°\ 37'\ 0''$
$\varphi = 35.\ 42.\ 40''$
$\delta - \varphi = 50\ 54.\ 20$
$\delta + \varphi = 122.\ 19.\ 40$
$= 180° - 57°.\ 40.\ 20.$

$\frac{1}{2}(\delta - \varphi) = 25.\ 27.\ 10$
$\frac{1}{2}(\delta + \varphi) = 61.\ 9.\ 50.$

$\log \sin(\delta-\varphi)$	$\bar{1},88992.$
$\log \operatorname{cosec}(\delta-\varphi)$	$0,07312.$
$2 \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} t$	$\bar{1},96306$
$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} t$	$\bar{1},98153$
$\frac{1}{2} t$	$43.\ 46.\ 55.$
t	$87\ 33\ 50$

$\alpha =$	$18^h\ 18^m\ 51^s,6$
$t = \pm$	$5.\ 50.\ 15.\ 5$
$\Theta_1 =$	$12.\ 18\ 36,1$
$\Theta_2 =$	$23.\ 59\ 7,1$

$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta-\varphi)$	$\bar{1},67758.$
$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta+\varphi)$	$0,25918.$
$2 \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} z$	$\bar{1},41840$
$2 \log \operatorname{tg}(45 - \frac{1}{2} a)$	$\bar{1},93676$
$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} z$	$\bar{1},70920$
$\log \operatorname{tg}(45 - \frac{1}{2} a)$	$\bar{1},96838.$

$\frac{1}{2} z$	$27.\ 6.\ 30.$
$45 - \frac{1}{2} a$	$42.\ 54.\ 57.$
$90 - a$	$85\ 49\ 54$
$z =$	$54.\ 13.\ 0$
$a =$	$4.\ 10.\ 6$

où C désigne la colatitude du lieu considéré.

Problème IV. – Trouver le temps sidéral au moment où une circompolaire a la plus grande digression ; ainsi que son azimut et sa hauteur au même moment.

Reprenons la formule différentielle.

$$\cos h\, dA = \sin \pi\, d\delta - \sin A \sin h\, d\varphi + \cos\delta \cos\pi\, dt.$$

L'azimut d'une étoile donnée pour un lieu donné ne varie qu'avec l'angle horaire et sa dérivée par rapport à cette variable est égale, d'après cette éq., à

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\cos\delta}{\cos h} \cos\pi$$

L'azimut de l'astre considéré atteindra donc une valeur maximum ou minimum quand on aura :

$$\cos\pi = 0 \qquad \text{c'à d} \quad \pi = \pm 90°.$$

c'à d. lorsque son cercle horaire et son cercle vertical seront perpendiculaires entre eux ; résultat facile à démontrer géométriquement. – On dit alors que l'étoile présente sa plus grande digression.

La formule (10) où l'on fait $\cos\pi = 0$ donne :

$$0 = \sin\varphi \cos\delta - \cos\varphi \sin\delta \cos t$$

d'où

$$(25) \qquad \cos t = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\delta}.$$

et la formule (16) devient :

$$\sin\varphi = \sin\delta \sin h$$

d'où

$$(26) \qquad \sin h = \frac{\sin\varphi}{\sin\delta}$$

et enfin la première éq. (6) fournit

$$\pm \cos\delta = \cos\varphi \sin A$$

d'où

$$(27) \qquad \sin A = \pm \frac{\cos\delta}{\cos\varphi}.$$

La formule (26) montre que h n'est réel & positif qu'à condition que φ & δ aient le même signe & que valeur absolue de δ > valeur absolue de φ. ~~c'à d pour~~ ce qui arrivent seulement pour les circompolaires.

On aurait pu trouver ces formules en considérant directement le triangle ZSP qui est ici rectangle en S.

Remarque. – Dans le cas où l'on a à trouver fréquemment t en fonction de h et de δ, pour un même lieu d'observation, on peut réduire certaines quantités en table et abréger ainsi le calcul.

En effet d'après la formule:

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

on a

$$\cos t = \sec\varphi . \sec\delta . \sin h - \mathrm{tg}\varphi\, \mathrm{tg}\delta .$$

Posons

$$A = \sec\varphi \sec\delta .$$
$$B = -\mathrm{tg}\varphi\, \mathrm{tg}\delta .$$

On aura

$$\cos t = A \sin h + B$$

et l'on pourra construire une table donnant les valeurs des coefficients A et B pour les différentes valeurs de δ par exemple, de $-24°$ à $+24°$.

Si l'on se sert des tables de Gauss, on peut trouver prendre d'autres quantités plus commodes. En effet $\cos t$ est de la forme $a \pm b$ et d'ailleurs dans notre latitude on a toujours

$$a > b \quad \text{ou} \quad \frac{\sin h}{\cos\varphi \cos\delta} > \frac{\sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta} \quad \text{ou} \quad \sin h > \sin\varphi \sin\delta .$$

Posons:

$$R = \log\frac{a}{b} = \log\sin h + \log \mathrm{cos\acute{e}c}\,\varphi + \log \mathrm{cos\acute{e}c}\,\delta .$$
$$R_1 = \log \mathrm{cos\acute{e}c}\,\varphi + \log \mathrm{cos\acute{e}c}\,\delta$$

On aura

$$R = \log\sin h + R_1$$

Donc, si l'on construit une table donnant A et R, on aura rapidement le logarithme de $\cos t$.

En prenant

$$Z = 90° - h \quad \text{et} \quad A = 180° \pm a$$

on aura les formules transformées.

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}t = \sqrt{\frac{\sin(\delta - \varphi)}{\sin(\delta + \varphi)}}$$
$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}Z = \sqrt{\frac{\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(\delta - \varphi)}{\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(\delta + \varphi)}}$$
$$\mathrm{tg}(45° - \tfrac{1}{2}a) = \sqrt{\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(\delta - \varphi)\, \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(\delta + \varphi)} .$$

Problème V. – Étant donnée la distance zénithale d'un astre connu dans un lieu de latitude connue, trouver le temps sidéral de l'observation ainsi que l'azimut et ~~la hauteur~~ l'angle parallactique de l'astre au même moment.

Dans le triangle $Z P S$, les trois côtés sont connus et il s'agit de trouver les trois angles. Posons:

$$2S = \varphi + \delta + Z$$

et appliquons la formule connue.

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}} .$$

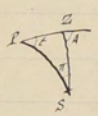
où l'on a ici

$$2p = 90° - \varphi + 90° - \delta + Z = 180° - \varphi - \delta + Z$$

ou bien:

$$p = 90° - (S - Z)$$

On aura donc:



$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}t = \sqrt{\frac{\sin(S-\varphi)\sin(S-\delta)}{\cos S \cos(S-Z)}} .$$
$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\cos(S-Z)\sin(S-\varphi)}{\cos S \sin(S-\delta)}} .$$
$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\pi = \sqrt{\frac{\cos S \sin(S-\varphi)}{\cos(S-Z)\sin(S-\delta)}}$$

La dernière formule est celle que nous avons déjà trouvée (16).

Nous verrons plus loin l'usage pratique de ces formules.

II. Premières notions sur le mouvement du Soleil.

Lois de Képler.

Les deux premières lois de Képler appliquées au mouvement de la Terre autour du Soleil peuvent s'énoncer ainsi.

1°. Le centre de la Terre se meut dans un plan fixe passant par le centre du Soleil et le rayon vecteur qui va du centre du Soleil à celui de la Terre décrit des aires égales dans des intervalles de temps égaux.

2°. L'orbite que décrit le centre de la Terre autour de celui du Soleil est une ellipse dont l'un des deux foyers est au centre du Soleil.

Ces deux lois auxquelles nous reviendrons plus tard ne sont qu'approchées, car, pour mieux se conformer à la vérité, on est obligé d'admettre que la Terre se meut sur une ellipse variable située dans un plan variable. Mais dans une première approximation, on peut admettre ces deux lois sans commettre des erreurs qui puissent altérer sensiblement ~~dans~~ les conclusions générales que l'on en tire.

Nous allons conséquemment nous occuper d'abord de traduire les lois de Képler en des formules analytiques; et auparavant, nous allons donner quelques définitions.

Écliptique, son obliquité.

Si par le centre de la sphère céleste, on mène un plan parallèle au plan de l'orbite de la Terre autour du Soleil, ce plan coupe la sphère céleste suivant un grand cercle qu'on appelle <u>écliptique</u>. Si l'on place le centre de la sphère céleste soit au centre de la Terre, soit au centre du Soleil, le plan de l'écliptique n'est donc autre chose que le plan même de l'orbite terrestre.

Le plan de l'orbite terrestre ~~est~~ fait avec le plan de l'équateur terrestre un angle égal à peu près à 23° 27'. Il en résulte que le plan de l'écliptique fait avec l'équateur céleste le même angle de 23° 27'. Cet angle est appelé l'obliquité de l'écliptique

L'axe de l'écliptique perce la sphère céleste en deux points diamétralement opposés dont l'un est situé dans l'hémisphère Nord et l'autre dans l'hémisphère Sud. Le premier est appelé le pôle boréal de l'écliptique et le second son pôle austral

La droite d'intersection du plan de l'écliptique avec celui de l'équateur s'appelle ligne des équinoxes et la perpendiculaire menée du centre de la sphère à cette ligne droite et dans le plan ~~des~~ de l'écliptique s'appelle ligne des solstices.

Des deux extrémités de la ligne des ~~équinoxes~~ solstices, celle ~~par laquelle passe le Soleil~~ qui se trouve dans l'hémisphère boréale s'appelle solstice d'été et l'autre s'appelle solstice d'hiver.

Des deux extrémités de la lignes des équinoxes, celle qui se trouve à droite d'un observateur qui, ~~debout sur le~~ embrassant l'axe de l'écliptique et la tête tournée vers le pôle boréal de l'écliptique, et regardait le solstice d'été, s'appelle équinoxe du printemps. L'autre extrémité de la ligne des équinoxes s'appelle équinoxe d'automne.

Le point vernal que nous avons considéré dans le chapitre précédent et que nous avons pris pour origine des ascensions droites n'est autre chose que l'équinoxe du printemps.

Le grand cercle qui joint les équinoxes aux pôles de l'écliptique ~~et~~ s'appelle colure de l'équinoxe, et le grand cercle joignant les solstices aux mêmes pôles porte le nom de colure du solstice.

Les équinoxes sont les pôles du colure du solstice et les solstices sont ceux du colure des équinoxes.

Il est très-important de remarquer que le colure du solstice passe par les pôles du ciel c'à-d de l'équateur, car les équinoxes, étant des points qui appartiennent à l'équateur sont à des distances angulaires de 90° de ces pôles et que le colure du solstice est le lieu des points distants de 90° des équinoxes.

Coordonnées écliptiques.

Le rayon de la sphère céleste qui aboutit à l'équinoxe du printemps, pris pour axe des x, et le rayon qui aboutit au solstice d'été, pris pour axe des y, fournit ensemble un système de deux axes rectangulaires, qui joint au rayon qui va au pôle boréal de l'écliptique, constituera un système de trois axes rectangulaires de coordonnées. Les coord. sphériques d'un astre ou de tout autre point, prises par rapport à ce système de coord. s'appellent la première la longitude et la seconde la latitude du point considéré.

La longitude et la latitude d'un astre s'appellent coordonnées écliptiques de cet astre, tandis que son ascension droite & sa déclinaison portent le nom générique de coordonnées équatoriales.

Problème. — Etant données les coordonnées écliptiques d'un point, trouver ses coordonnées équatoriales et vice versa.

Nous emploierons ici le procédé direct de la transformation des coordonnées.

Appelons l la longitude et λ la latitude du point considéré ; α et δ son ascension droite et sa déclinaison, enfin γ l'obliquité de l'écliptique.

Soient $ox\ oy\ oz$ les axes équatoriaux et $ox'\ oy'\ oz'$ les axes écliptiques. Nous aurons le tableau suivant des cosinus directeurs :

Exemple. — Les coord. écliptiques équatoriales app. de Vénus, le 19 Nov. 1885 au moment de son passage au méridien de Greenwich sont:

$\alpha = 19^h\ 0^m\ 50^s,74 \quad \delta = -25°.\ 36'\ 26'',8 \quad \gamma = 23°\ 27'\ 5'',84$

quelles sont ses coord. écliptiques au même moment?

$\alpha = 285°\ 12'\ 41'',1 = 360° - 74°\ 47'\ 18'',9$

$\log \sin\delta - \bar{1},6356877$
$\log \sin\alpha - \bar{1},9845112$
$\log \cos\delta + \bar{1},9550988$
$\log \cos\alpha - \bar{1},4189331$

$\log m \sin M - \bar{1},6356877$
$\log \cos M - \bar{1},9521204$
$\log m \cos M - \bar{1},9396100$
$\log \operatorname{tg} M + \bar{1},6960777$
$\phantom{\log \operatorname{tg} M + \bar{1},69607}470$

$360° - f = 69°\ 18'\ 14'',05.$
$l = 290°\ 41'\ 45'',95$

$\lambda = -47°\ 58'\ 16'',9.$

$l = 360° - 76.\ 17'\ 46''$

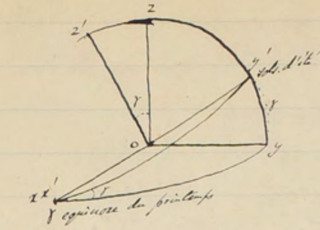
$\lambda = -2°\ 52'\ 35''$

$M = 360° - 26°\ 24'\ 45,8$
$\gamma = 23.\ 27'\ 5,4.$
$M - \gamma = 360° - 49\ 51'.\ 51'',2$

$\log \sin(M-\gamma) - \bar{1},8833883.$
$\log m \quad \bar{1},9874896$
$\log \cos(M-\gamma) - \bar{1},8092911.$

$\log \cos\lambda \sin l - \bar{1},7967807$
$\log \sin l - \bar{1},9710290$
$\log \cos\lambda \cos l - \bar{1},3740319$
$\log \operatorname{tg} l. + 0,4227488$
$\phantom{\log \operatorname{tg} l. + 0,422}7230$
$\phantom{\log \operatorname{tg} l. + 0,4227}258$

$\log \sin\lambda - \bar{1},8708779$
$\log \cos\lambda + \bar{1},8257517$
$\log \operatorname{tg}\lambda - 0,0451262$
$\phantom{\log \operatorname{tg}\lambda - 0,045}0968$
$\phantom{\log \operatorname{tg}\lambda - 0,0451}294$



	ox'	oy'	oz'
ox ...	1	0	0
oy ...	0	$\cos\gamma$	$-\sin\gamma$
oz ...	0	$\sin\gamma$	$\cos\gamma$.

Les coordonnées rectangulaires de la perspective du point considéré, par rapport aux axes $ox\ oy\ oz$ seront, en prenant le rayon de la sphère pour unité:

$$x = \cos\delta\cos\alpha \qquad y = \cos\delta\sin\alpha \qquad z = \sin\delta$$

et de même ses coord. par rapport à $ox'\ oy'\ oz'$ seront:

$$x' = \cos\lambda\cos l \qquad y' = \cos\lambda\sin l \qquad z' = \cancel{\cos\lambda}\sin\lambda.$$

Les formules générales des transformations donnent donc:

$$(1)\quad \begin{cases} \cos\lambda\cos l = \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\lambda\sin l = \overset{\cos\gamma\cos\delta\sin\alpha}{\cancel{\cos\delta\sin\alpha\cos\gamma}} + \sin\gamma\sin\delta \\ \sin\lambda = -\sin\gamma\cos\delta\sin\alpha + \cos\gamma\sin\delta \end{cases}$$

et

$$(2)\quad \begin{cases} \cos\delta\cos\alpha = \cos\lambda\cos l \\ \cos\delta\sin\alpha = \cos\gamma\cos\lambda\sin l - \sin\gamma\sin\lambda \\ \sin\delta = \sin\gamma\cos\lambda\sin l + \cos\gamma\sin\lambda. \end{cases}$$

système de formules qui résolvent notre problème.

Posons comme d'habitude.

$$m\sin M = \sin\delta$$
$$m\cos M = \cos\delta\sin\alpha$$

les formules (1) deviennent alors:

$$\cos\lambda\cos l = \cos\delta\,\overset{\cos\alpha}{\cancel{\sin\alpha}}$$
$$\cos\lambda\sin l = m\cos(M-\gamma)$$
$$\sin\lambda = m\sin(M-\gamma).$$

En posant de même

$$n\sin N = \sin\lambda$$
$$n\cos N = \cos\lambda\sin l$$

les formules (2) deviennent

$$\cos\delta\cos\alpha = \cos\lambda\cos l$$
$$\cos\delta\sin\alpha = n\cos(N+\gamma)$$
$$\sin\delta = n\sin(N+\gamma)$$

Cas particulier. — Dans le cas particulier d'un astre situé sur l'écliptique, on aura

Ex. Étant données $l = 48^\circ\, 27'\, 32'',7$
$\omega = 23.\ 27.\ 5'',3.$

Calculer α et δ.

$\mathrm{tg}\,\alpha = \cos\omega\,\mathrm{tg}\,l \qquad \sin\delta = \sin\omega\,\sin l.$

$\log\cos\omega$	$\bar{1},962\,5575$	$\log\sin\omega$	$\bar{1},599\,8528$	
$\log\mathrm{tg}\,l$	$0,052\,5666$	$\log\sin l$	$\bar{1},874\,1815$	40343
$\log\mathrm{tg}\,\alpha$	$0,015\,1241$	$\log\sin\delta$	$\bar{1},474\,0343$	39797
	1207		39797	546
	34			
$\alpha =$	$45^\circ\, 59'\, 50'',8$	$\delta =$	$17^\circ\, 19'\, 48'',41$	
$=$	$3^h\ 3^m\ 59^s,39$			

$$\lambda = 0 \qquad \sin\lambda = 0 \qquad \cos\lambda = 1$$

et les formules (2) deviendront :

$$(3)\quad \begin{cases} \cos\delta\cos\alpha = \cos l \\ \cos\delta\sin\alpha = \cos\omega\sin l \\ \sin\delta = \sin\omega\sin l \end{cases}$$

Des deux premières, on déduit

$$(4)\qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \cos\omega\,\mathrm{tg}\,l$$

et comme α est ~~variable~~ $<$ ou $> 180^\circ$ en même temps que l, cette formule permettra de calculer α sans ambiguité.

La dernière formule (1) devient dans le cas actuel

$$0 = -\sin\omega\cos\delta\sin\alpha + \cos\omega\sin\delta.$$

ou bien :

$$(5)\qquad \mathrm{tg}\,\delta = \mathrm{tg}\,\omega\sin\alpha$$

telle est la relation qui existe entre l'ascension droite & la déclinaison d'un astre qui se trouve sur l'écliptique.

Mouvement apparent du Soleil.

Pour un observateur placé au centre de la Terre, il est facile de faire voir que le Soleil semblera tourner autour de la Terre dans le même sens que le mouvement réel de la Terre, en décrivant dans le plan de l'écliptique une ellipse égale à l'orbite de la Terre et ayant son foyer au centre de la Terre et suivant la loi des aires de Kepler.

L'Observation démontre que le sens de ce mouvement est direct c'à-d. tel que, si l'observateur a sa tête tournée vers le pôle boréal de l'écliptique, il verra le Soleil passer devant lui de droite à gauche. Il en résulte que la longitude du Soleil, ainsi que son ascension droite ira constamment en augmentant. Le Soleil passera par l'équinoxe du printemps au moment où il va de l'hémisphère australe à l'hémisphère boréale et à l'éq. d'automne quand il passe de l'hémisphère boréale à l'hémisphère australe.

Le point de l'orbite terrestre le plus proche du Soleil s'appelle le <u>périhélie</u> et le point le plus éloigné l'<u>aphélie</u>.

Ce sont les deux extrémités de l'axe focal de cette ellipse.

Les deux extrémités de l'orbite apparent du Soleil se nomment l'une *périgée* et l'autre *apogée*. Il est évident que le Soleil passera au périgée quand la Terre passe au périhélie et à l'apogée quand la Terre est à l'aphélie.

Il est clair aussi que la longitude du Soleil vu du centre de la Terre et la longitude de la Terre vue du centre du Soleil auront entre elles une différence de 180°. Il en sera de même de la *longitude du périhélie* vu du Soleil et de celle du périgée vu de la Terre

Dans la première approximation, la latitude du centre du Soleil sera constamment nulle et nos formules (3), (4) (5) lui seront constamment applicables.

Pour un observateur placé en un lieu de la surface de la Terre, le mouvement apparent du Soleil sera à peu près le même que précédemment, parce que, comme nous le verrons plus tard, les dimensions de la Terre sont très-petites par rapport à sa distance au Soleil. Le Soleil semblera donc se déplacer sur l'écliptique à travers les constellations stellaires et cela de l'occident vers l'orient c-à-d dans le sens contraire à celui du mouvement diurne de la sphère céleste.

Année sidérale et année tropique. – On appelle *année sidérale* la durée moyenne d'une révolution de la Terre autour du Soleil ; c'est aussi l'intervalle de temps que met le Soleil pour revenir à un même point fixe de la sphère céleste.

On appelle *année tropique* la valeur moyenne de l'intervalle de temps qui sépare deux passages successifs du Soleil par l'équinoxe du printemps. Cet intervalle serait égal à l'année sidérale si l'équinoxe du printemps était absolument fixe. Mais nous verrons plus tard que ce point se déplace lentement sur l'écliptique dans le sens rétrograde à raison d'environ 50″ par an ; de sorte que l'année tropique est un peu plus courte que l'année sidérale.

Nous donnerons plus tard les valeurs numériques de ces deux sortes d'années.

Mouvement elliptique du Soleil.

Appelons r la longueur du rayon vecteur mené du centre de la Terre au centre ~~du~~ du Soleil et v l'angle que fait ce rayon avec l'axe qui va du centre de la Terre au périgée, angle compté positivement dans le sens direct. Si l'on appelle ϖ la longitude du périgée et l celle du Soleil on aura :

$$v = l - \varpi \qquad \text{ou} \qquad l = v + \varpi.$$

La position du Soleil sera connue à chaque instant si l'on connaît r et v en fonction du temps t.

D'après la 1re loi de Kepler la différentielle de l'aire que décrit le rayon vecteur doit être proportionnelle à la différentielle du temps dt. Mais cette aire a pour différentielle

$$\tfrac{1}{2} r^2 dv \qquad \text{ou} \qquad \tfrac{1}{2} r^2 dl.$$

on doit donc avoir :

$$r^2 dv = c\,dt.$$

c étant une constante égale au ~~le~~ double de l'aire décrite dans l'unité de temps.

Appelons a le demi-grand axe de l'orbite terrestre ~~et~~ e son excentricité et τ la durée d'une année sidérale. l'aire décrite pendant le temps τ étant égale à $\pi a^2 \sqrt{1-e^2}$ on aura

$$c = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{\tau}$$

Le ~~s~~ rayon vecteur du Soleil décrivant un angle égal à 2π dans le temps τ, la quantité $\frac{2\pi}{\tau}$ est la vitesse angulaire moyenne de ce rayon vecteur. Cette quantité est ce que l'on appelle <u>moyen mouvement</u> du Soleil. — En représentant le moyen mouvement par n on aura

$$c = n a^2 \sqrt{1-e^2}.$$

et l'équation précédente devient :

$$(6) \qquad r^2 dv = n a^2 \sqrt{1-e^2}\, dt$$

$$\text{ou} \qquad r^2 dl = n a^2 \sqrt{1-e^2}\, dt.$$

Maintenant d'après la seconde loi de Kepler r et v sont liés entre eux par l'équation de l'ellipse.

$$(7) \qquad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}$$

de sorte que la 1ère éq. (6) jointe à l'éq. (7) définit complètement r et v en fonction de t.

Anomalie vraie et anomalie moyenne. — On appelle anomalie vraie du Soleil l'angle v que fait le ~~d~~ rayon vecteur du Soleil avec le rayon vecteur du périgée, cet angle étant compté positivement dans le sens direct.

Si l'on imagine un astre fictif qui, partant du périgée en même temps que le Soleil et y revenant en même temps, se déplaçant dans le plan de l'écliptique avec ~~avait dans l'intervalle~~, une vitesse angulaire constante, l'anomalie vraie de cet astre fictif s'appelle l'anomalie moyenne du Soleil et sa longitude se nomme la longitude moyenne du Soleil.

Si j'appelle $\mathcal{L}$ la longitude moyenne du Soleil et ζ son anomalie moyenne, j'aurai la relation

$$\mathcal{L} = \zeta + \varpi \qquad \zeta = \mathcal{L} - \varpi$$

Comme $\mathcal{L}$ & ζ varient proportionnellement au temps et que la vitesse angulaire ~~de~~ l'astre fictif est égale à la vitesse angulaire ~~d~~ moyenne du Soleil, on aura

$$\mathcal{L} = nt + \text{Constante}$$

Appelons ε la longitude du Soleil à l'origine des temps ou ce qu'on appelle sa longitude de l'époque on aura alors :

$$(8) \qquad \mathcal{L} = nt + \varepsilon$$

et

$$(9) \qquad \zeta = nt + \varepsilon - \varpi.$$

Si donc l'on connaît ε & ϖ, on aura immédiatement la valeur de ζ correspondant à chaque valeur de t. Il nous suffira par conséquent d'avoir r & v en fonction de ζ.

L'équation (9) donne :

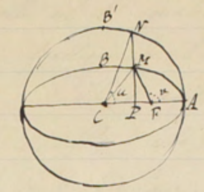
$$d\zeta = n\,dt$$

et l'éq. (6) devient :

$$(10) \qquad r^2\,dv = a^2\sqrt{1-e^2}\,.\,d\zeta$$

et il ne s'agit plus que de l'intégrer. C'est ce que l'on fait commodément à l'aide d'un angle auxiliaire, qu'on appelle anomalie excentrique.

Anomalie excentrique. — Soit AB l'ellipse orbite du Soleil. Cette ellipse peut être considérée comme la projection orthogonale d'un cercle concentrique de rayon a situé dans un plan passant passant par l'axe focal AF et



faisant avec le plan de l'ellipse un angle dont le cosinus est égal à $\sqrt{1-e^2}$. Si nous rabattons ce cercle sur le plan de l'ellipse en AB', le point qui a pour projection la position actuelle M du centre du Soleil viendra en N sur la perpendiculaire menée de M sur l'axe FA.

Cela posé l'angle que fait le rayon qui va du <u>centre</u> C de l'ellipse au point ~~A~~ N s'appelle l'<u>anomalie excentrique</u> du Soleil à l'époque considérée.

Si nous appelons, pour un moment, Π l'époque du passage du Soleil au périgée, on aura:

$$\text{secteur } AFM = \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T}(t-\Pi)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2\pi}{T}a^2\sqrt{1-e^2}(t-\Pi).$$

ou bien encore

$$\text{secteur } AFM = \frac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}\,.\,\zeta.$$

Nous allons chercher une autre expression de ce secteur ellip~~se~~tique. — On a d'abord:

$$\text{secteur } AFM = \text{secteur } ACM - \text{triangle } FCM.$$

Mais le secteur ACM étant la projection du secteur circulaire ACN, on a d'après un théorème connu:

$$\text{secteur } ACM = \cancel{\sqrt{1-e^2}}\,.\,\frac{1}{2}a^2u\sqrt{1-e^2}.$$

Quant au triangle FCM, il a pour aire.

$$\frac{1}{2}CF\,.\,MP.$$

Mais on a:

$$CF = ae \qquad MP = \sqrt{1-e^2}\,.\,MN = \sqrt{1-e^2}\,.\,a\sin u.$$

On aura donc

$$\text{triangle } FCM = \frac{1}{2}\sqrt{1-e^2}\,.\,ea^2\sin u.$$

Donc enfin:

$$\frac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}\,.\,u - \frac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}\,.\,e\sin u = \frac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}\,.\,\zeta.$$

ou en supprimant les facteurs communs :

$$(11) \qquad u - e \sin u = \zeta$$

Telle est l'équation qui détermine l'anomalie excentrique en fonction de l'anomalie moyenne.

Il s'agit maintenant d'exprimer r et v en fonction de u. Pour cela, projetons sur l'axe CA et sur un axe perpendiculaire, d'une part les vecteurs CR et RM et d'autre les vecteurs CP et PM qui ont la même somme géométrique que les précédents. Nous aurons alors.

$$ae + r\cos v = a\cos u$$
$$r\sin v = \sqrt{1-e^2}\, a \sin u.$$

ou en déduit

$$(12) \quad \begin{cases} \dfrac{r}{a}\sin v = \sqrt{1-e^2}\sin u \\ \dfrac{r}{a}\cos v = \cos u - e. \end{cases}$$

équations qui définissent r et v en fonction de u.

L'intégration de l'équation (10) se trouve ainsi effectuée sans recourir au procédé général du calcul intégral.

Le problème qui a pour but la résolution de l'équation transcendante (11) par rapport à u est connu sous le nom de problème de Kepler. Nous en parlerons plus tard avec quelques détails pratiques.

Ayant trouvé u par un procédé quelconque, on calculera r et v au moyen des formules (12).

Ces dernières peuvent se transformer en d'autres plus commodes. — En effet, en ajoutant les carrés de ces équations on a

$$\frac{r^2}{a^2} = 1 - e^2(1-\cos^2 u) + e^2 - 2e\cos u = (1-e\cos u)^2$$

d'où

$$(13) \qquad r = a(1 - e\cos u)$$

en mettant cette valeur dans la 2e éq. (12), il vient

$$(14) \qquad \cos v = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u}.$$

Ce sont là, en passant, les équations qui permettent de calculer séparément r et v en fonction de u.

De l'équation (14) on tire :

$$\sin^2\frac{v}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos v) = \frac{1 - e\cos u - \cos u + e}{2(1-e\cos u)} = \frac{(1+e)\sin^2\frac{u}{2}}{1-e\cos u}.$$

$$\cos^2\frac{v}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos v) = \frac{1 - e\cos u + \cos u - e}{2(1-e\cos u)} = \frac{(1-e)\cos^2\frac{u}{2}}{1-e\cos u}$$

on en tire, en tenant compte de (13) et remarquant que u et v sont en même temps $<$ ou $> 180°$ et que par suite $\sin\frac{v}{2} : \sin\frac{u}{2}$ et $\cos\frac{v}{2} : \cos\frac{u}{2}$ sont positifs.

$$(15) \qquad \sqrt{\frac{r}{a}}\sin\frac{v}{2} = \sqrt{1+e}\,\sin\frac{u}{2}$$
$$\sqrt{\frac{r}{a}}\cos\frac{v}{2} = \sqrt{1-e}\,\cos\frac{u}{2}.$$

formules très-commodes pour le calcul de v et r de u.

Equation du centre, réduction à l'équateur.

On appelle l'équation du centre du Soleil en un instant donné, la quantité qu'il faut ajouter à son anomalie moyenne pour avoir son anomalie vraie.

Si donc on appelle ε l'équation du centre, on aura

$$(16) \qquad \varepsilon = v - \zeta.$$

et comme on peut écrire cette équation.

$$\varepsilon = v + \varpi - (\zeta + \varpi) = l - L$$

l'équation du centre est aussi la quantité qu'il faut ajouter à la longitude moyenne pour avoir la longitude vraie.

On appelle la réduction à l'équateur du soleil ce qu'il faut ajouter à sa longitude pour avoir son ascension droite, ou la quantité ε' définie par l'éq.

$$(17). \qquad \varepsilon' = \alpha - l.$$

Nous allons nous proposer de chercher comment varient ε et ε' avec le temps.

1° En différentiant l'éq. (16) on a

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{dv}{dt} - \frac{d\zeta}{dt}$$

ou en remplaçant la valeur de $\frac{dv}{dt}$ donnée par (10).

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \left(a^2\sqrt{1-e^2} - r^2\right) \cdot \frac{d\zeta}{dt}\,\frac{1}{r^2}.$$

Quand le Soleil est près du périgée le second membre de cette éq. est positif; il est nul pour

$$\frac{r}{a} = (1-e^2)^{\frac{1}{4}}$$

et pour les valeurs plus grandes de $\frac{r}{a}$, il est négatif. Donc, l'équation du centre, qui est nulle au périgée augmente ensuite jusqu'à un certain maximum, diminue ensuite pour redevenir nulle à l'aphélie ; puis elle devient passe par un minimum pour un point symétrique du point correspondant au ~~xxx~~ maximum ~~et~~ pour augmenter ensuite jusqu'à zéro. — Cherchons les valeurs de u, v, ζ ~~et~~ qui correspondent au maximum de ε ainsi que cette valeur maximum.

L'équation (13) donne pour $\frac{r}{a} = (1-e^2)^{\frac{1}{4}}$:

$$e\cos u = 1-(1-e^2)^{\frac{1}{4}}$$
$$= 1-\left(1-\tfrac{1}{4}e^2-\tfrac{3}{32}e^4-\tfrac{7}{128}e^6-\dots\right)$$

d'où

$$\cos u = \tfrac{1}{4}e+\tfrac{3}{32}e^3+\tfrac{7}{128}e^5+\dots$$

Cette éq. permet de calculer ~~de~~ u. Une fois u connu, on aura v par les deux éq. (15) qui donnent :

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\tfrac{1+e}{1-e}}\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}u$$

et ζ par l'éq.

$$\zeta = u - e\sin u$$

On aura ensuite

$$\varepsilon = v-\zeta.$$

En adoptant la valeur de l'excentricité :

$$e = 0{,}01677$$

tirée des Annales de l'Observatoire de Paris, on trouve :

$$u = 89^\circ 45' 35'' \quad v = 98^\circ 42' 53'' \quad \zeta = 88^\circ 47' 56''$$

et par suite $\varepsilon = 1^\circ 54' 57''$.

2°. Différentions l'équation (17) ; nous aurons :

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}-\frac{dl}{dt}$$

Or nous avons d'après ~~form~~ (4)

$$\operatorname{tg}\alpha = \cos\gamma \operatorname{tg} l$$

d'où en différentiant :

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = \cos\gamma\,\frac{1}{\cos^2 l}\,\frac{dl}{dt}.$$

Mais on a :

$$\frac{\cos\alpha}{\cos l} = \frac{1}{\cos\delta}$$

Donc :

$$(18).\qquad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\cos\gamma}{\cos^2\delta}\,\frac{dl}{dt}.$$

En substituant cette valeur dans l'expression $\frac{d\varepsilon'}{dt}$ il vient

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \left(\cos\gamma-\cos^2\delta\right)\frac{dl}{dt}\cdot\frac{1}{\cos^2\delta}$$

Le second membre de cette équation qui est positif quand ~~dx~~ le Soleil passe aux solstices et négatif pour les équinoxes, s'annule 4 fois ~~dans~~ qu' pendant une révolution du Soleil. Et comme ε' est nulle pour le passage du Soleil aux équinoxes et aux solstices, la réduction à l'équateur on en conclut qu'elle passe 2 fois par un minimum & 2 fois par un maximum. Pour avoir toutes ces valeurs extrêmes, il suffit d'avoir seulement le premier minimum. Or, pour le premier minimum, on a d'abord:

$$\cos\delta = \sqrt{\cos\gamma}$$

et la dernière ég. (3) donne:

$$\sin l = \frac{\sin\delta}{\sin\gamma} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\delta}}{\sin\gamma} = \frac{\sqrt{1-\cos\gamma}}{\sin\gamma}.$$

ou bien:

$$\sin l = \frac{1}{\sqrt{2}.\cos\frac{\gamma}{2}} \qquad tg\, l = \frac{1}{\sqrt{2\cos^2\frac{\gamma}{2}-1}} = \frac{1}{\sqrt{\cos\gamma}}.$$

On a ensuite

$$tg\,\alpha = \cos\gamma\, tg\, l = \cancel{\cos\gamma \frac{\sin l}{\sqrt{1-\sin^2 l}}} = \cos\gamma \times \frac{1}{\sqrt{2\cos^2\frac{\gamma}{2}-1}}. = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{\cos\gamma}}.$$

ou bien:

$$tg\,\alpha = \sqrt{\cos\gamma}$$

En adoptant la valeur $\gamma = 23°\,27'\,6''$, on trouve:

$$l = 46°\,14'\,5'' \qquad \alpha = 41°.18'.11'' \qquad \varepsilon' = -4°\,55'\,54''$$

Temps solaire vrai, temps solaire moyen.

On appelle ~~temps solaire vrai~~, temps solaire vrai ou temps solaire apparent l'angle horaire du centre du Soleil en un instant quelconques.

On appelle jour solaire vrai l'intervalle de temps qui ~~s'écoule~~ sépare deux culminations supérieures consécutives du centre du Soleil, c'à d l'intervalle de temps qui ~~sépare~~ s'écoule depuis le moment où le temps solaire est égal à 0^h jusqu'au moment où il ~~est~~ devient égal à 24^h.

Si l'angle horaire du Soleil variait proportionnellement au temps, le temps solaire vrai servirait à marquer les époques et le jour solaire vrai à mesurer les durées. Mais il en est loin d'en être ainsi en réalité.

En effet l'angle horaire t_0 du soleil à une époque marquée par le temps sidéral Θ est donné par l'équation :

$$t_0 = \Theta - \alpha$$

et comme Θ varie uniformément avec le temps, pour que t_0 varie proportionnellement au temps, il faut et il suffit que α ait ce caractère c'à d que l'on ait.

$$\frac{d\alpha}{dt} = \text{constante}.$$

Mais nous avons trouvé

$$\frac{d\alpha}{dt} = \cos\varepsilon \, \frac{1}{\cos^2\delta} \, \frac{dl}{dt}$$

et en y remplaçant $\frac{dl}{dt}$ par sa valeur $\frac{na^2\sqrt{1-e^2}}{r^2}$:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{na^2\sqrt{1-e^2}\cos\varepsilon}{r^2\cos^2\delta}$$

il faudrait donc que $r^2\cos^2\delta$ fût constant. Or $r\cos\delta$ est la projection du rayon vecteur r sur le plan de l'équateur, et la projection de l'ellipse sur le plan de l'éq. ne peut être un cercle ; car si la lignes des équinoxes est oblique ayant son centre en O sur l'axe focal de l'ellipse, ses deux extrémités seraient inégalement distantes du point O et si cette ligne est perpendiculaire à l'axe focal de l'ellipse les sommets de celle-ci se projetteront en des points inégalement distants du centre O.

On en conclut que t_0 ne varie pas uniformément.

Pour éviter cet inconvénient tout en satisfaisant aux exigeances de la vie civile, on introduit ce que l'on appelle temps solaire moyen et que nous allons définir.

Revenons à l'astre fictif dont la longitude varie proportionnellement au temps et a pris le nom de longitude moyenne du Soleil ; et imaginons un second astre fictif qui passant par l'équinoxe du printemps en même temps que le premier astre fictif, et ~~passant~~ se mouvrait ensuite sur l'équateur d'un mouvement uniforme de façon à revenir à l'équinoxe du printemps en même temps que le premier. Ce second astre fictif est ce que l'on appelle <u>soleil moyen</u>.

Il est clair que l'ascension droite du Soleil moyen est constamment égale à la longitude moyenne du Soleil vrai. Ainsi, en le représentant par α_m on aura.

$$\alpha_m = L_1 = nt + \varepsilon$$

Cela posé, on appelle <u>temps solaire moyen</u> ou simplement <u>temps moyen</u> l'angle horaire du Soleil moyen, et <u>jour solaire moyen</u> l'intervalle de temps qui s'écoule entre depuis le moment où le temps moyen est égal à 0^h jusqu'au moment où il devient égal à 24^h.

Si l'on appelle t_m le temps moyen, on aura.

$$t_m = \Theta - \alpha_m = \Theta - nt - \varepsilon.$$

et par suite t_m varie proportionnellement au temps, et le jour solaire moyen est une durée constante comme le jour sidéral; c'est l'unité de temps habituelle des Astronomes.

Equation du temps. — On appelle <u>équation du temps</u> la quantité qu'il faut ajouter à l'ascension droite du Soleil moyen pour obtenir l'ascension droite du Soleil vrai. C'est la quantité η définie par

$$\alpha = \alpha_m + \eta \qquad \text{ou} \qquad \eta = \alpha - \alpha_m = \alpha - L_1.$$

et comme on a

$$t_\odot - t_m = \alpha_m - \alpha = -\eta$$

on a aussi

$$t_m = t_\odot + \eta$$

On peut donc dire que l'équation du temps est ce qu'il faut ajouter au temps solaire apparent pour obtenir le temps solaire moyen.

On peut écrire.

$$\eta = \alpha - L_1 = \alpha - l + (l - L_1)$$

ou bien :

$$\eta = \varepsilon + \varepsilon'$$

c. à d. que l'équation du temps est égale à la somme de l'équation du centre et de la réduction à l'équateur.

En construisant un diagramme représentant $\varepsilon + \varepsilon'$, on constate que η s'annule 4 fois dans l'année, et passe 2 fois par un maximum et 2 fois par un minimum. En adoptant la valeur $\varpi = 280° 21' 22''$

on a le tableau suivant donnant les valeurs max.-minim.

$\log \varepsilon = \bar{3},43742$,
$\varepsilon = 0,002738$

& nulles de η ainsi que les dates approximatives correspondantes.

11. ~~jan.~~ fév.	15 avr.	14 mai	14 juin	26 juil.	31 Août	3. Nov.	25. Déc.
$+4^m,5$	0	$-3^m,9$	0	$+6^m,2$	0	$-16^m,3$	0

Ce tableau correspond à l'an 1885. Pour les autres années, il y aura de légères modifications dans les dates.

Rapport entre le temps sidéral et le temps moyen.

D'après Bessel et Le Verrier, la durée de l'année tropique est égale, en jours solaires moyens, à

$$365^j,24222.$$

Supposons qu'à une certaine époque, le ~~centre du~~ soleil moyen soit sur l'équinoxe du printemps. A cette époque, ces deux points passeront ensemble sur le méridien d'un certain lieu et pour ce lieu, il sera en même temps 0^h temps sidéral et 0^h temps solaire moyen. Après $365^j,24222$, le ~~centre du~~ Soleil moyen se trouvera ~~encore~~ de nouveau sur l'équinoxe du printemps; à cette époque, l'angle horaire du Soleil moyen et celui de l'équinoxe du printemps seront tous les deux, pour le lieu précédemment considéré, égale à une fraction du jour marquée par le nombre 0,24222. Or il est clair que dans l'intervalle de la 1ère époque à la 2e, ~~le temps~~ l'équinoxe du printemps a fait juste une ~~passage~~ culmination de ~~moins~~ plus que le Soleil moyen; par conséquent, il s'est écoulé dans cet intervalle 366,24222 jours sidéraux. Il en résulte que

$$1 \text{ jour sidéral} = \frac{365,24222}{366,24222} \text{ jour moyen.}$$

En général, si l'on appelle τ_s et τ_m les nombres qui expriment un même intervalle de temps en ~~jours~~ temps sidéral, c'à d en jours, heures, minutes ~~&~~ ou secondes de temps sidéral et en temps solaire moyen, on aura,

$$\frac{1}{\tau_s} \cancel{\tau_m} = \frac{365,24222}{366,24222} \cancel{\tau_m} \frac{1}{\tau_m}$$

~~et~~ c'à d $\tau_m = \dfrac{365,24222}{366,24222}\tau_s$ & $\tau_s = \dfrac{366,24222}{366,24222}\tau_m$

$$\cancel{\frac{1}{\tau_m} \tau_s = \frac{366,24222}{365,24222} \tau_m \frac{1}{\tau_s}}$$

Posons ~~d'abord~~

(19) $\varepsilon = \dfrac{1}{365,24222}$

Exemple. I. Convertir $\tau_s = 18^h\,43^m\,27^s{,}86$ en temps moyen.

1º Nautical.

18^h	$17^h\,57^m\,3^s{,}0679$
43^m	$42.\,52{,}9555$
27^s	$26{,}9263$
$0^s{,}86$	$0{,}8577$
$\tau_m =$	$18.\,40.\,23{,}81$

2º C. de temps.

18^h	$2^m\,56^s{,}932$
43^m	$7{,}045$
27^s	$0{,}074$
$0^s{,}86$	$2.$
correct à retrancher $=$	$3^m\,4{,}05$

$\tau_s = 18^h\,43^m\,27^s{,}86.$

$\tau_m = 18.\,40\;23{,}81$

3º Am. Ephemeris.

$18^h\,43^m$	$3^m\,3^s{,}\cancel{977}$
27^s	$0{,}076$
$18^h\,43^m\,27^s{,}86$	$3^m\,4^s{,}05$

4º Jahrbuch.

$18^h\,18^m\,44^s$	$-\,3^m$
$24^m\,43{,}86$	
$24.\,25^s$	$-\,4^s$
$18{,}86$	$-\,0^s{,}05$
	$-\,3^m\,4^s{,}05.$

Exemple. II. Convertir. $\tau_m = 18^h\,40^m\,23^s{,}81.$ en sidéral.

1º Nautical. .... $18^h\;2^m\,57^s{,}4165.$
$40.\;\;6{,}5710$
$23{,}0630$
$0{,}8122$

$\tau_s = 18^h\,43^m\,27{,}86$

2º C. des temps $2^m\,57^s{,}417.$
$6{,}571$
65
$3^m\,4{,}05$

$\tau_s = 18^h\,43.\;27{,}86$

3º American Eph. $\tau_s = 18^h\,40^m\,23^s{,}81.$
$+\;\;3.\;\;4{,}05$

4º Jahrbuch. $\tau_m = 18^h\,40^m\,23^s{,}81.$ $\quad +3^m\;4^s{,}05.$
$24.\;39{,}81$
$18{,}81.$

$\tau_s = 18^h\,43^m\,27^s{,}86$

la seconde équation deviendra

$$(20)\qquad \tau_s = (1+\varepsilon)\,\tau_m.$$

formule qui permettra de convertir un intervalle de temps sidéral en intervalle équivalent de temps moyen.

La première équation peut s'écrire :

$$\tau_m = \frac{1}{1+\varepsilon}\,\tau_s = (1-\varepsilon+\varepsilon^2-\varepsilon^3+\cdots)\,\tau_s.$$

Si nous posons :

$$(21)\qquad \varepsilon' = \varepsilon-\varepsilon^2+\varepsilon^3-\cdots$$

on aura donc, pour convertir le temps moyen en temps sidéral :

$$(22).\qquad \tau_m = (1-\varepsilon')\,\tau_s$$

Tables de conversion. — Nous avons à notre disposition quatre tables qui permettent d'opérer rapidement les deux conversions dont nous venons de parler. Ces tables se trouvent dans le "Nautical Almanac", la "Connaissance des temps, l'"American Ephemeris" et le "Berliner Jahrbuch". Nous les expliquerons successivement.

1º La table du Nautical Almanac, comme les trois autres, se divisent en deux parties. La première (pages 474, 475) donne séparément pour les heures, minutes & secondes & fractions de secondes de τ_m, les valeurs parties correspondantes de $(1+\varepsilon)\tau_m$ ou τ_s. En ajoutant toutes ces parties, on aura τ_s. — La seconde table (page 476, 477) donne exactement de la même façon τ_m en moyen de τ_s.

2º. La Connaissance des temps donne, la 1ère partie (page 691) pour les heures, minutes, secondes de τ_s les parties correspondantes de $\varepsilon'\tau_s$ et comme on a

$$\tau_m = \tau_s - \varepsilon'\tau_s.$$

en réunissant toutes les parties & retranchant la somme de τ_s, on aura τ_m. Pour les fractions de secondes de τ_s, on se sert des nombres donnés pour les secondes rondes et on divise par 10 ou par 100 etc.

La seconde table (page 692) donne exactement de la même façon la seconde partie du second membre de l'éq.

$$\tau_s = \tau_m + \varepsilon\,\tau_m$$

qu'il faut ajouter à τ_m pour avoir τ_s.

3° L'American Ephemeris donne, dans la 1re partie, 8 pages, la quantité Σt_s qu'il faut ~~ajouter à~~ retrancher de t_s pour avoir ~~D~~ t_m et cela pour toutes valeurs de t_s de minute en minute. Une colonne à part donne la partie de Σt_s correspondante à la partie en secondes de t_s. La 2e partie donne de la même manière Σt_m en fonction de t_m.

Ces deux tables sont à double entrée et comprennent chacune trois pages. (pages 366, 367).

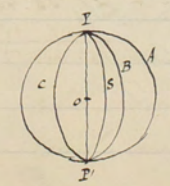
4°. Les tables du Jahrbuch ne diffèrent de celles de la Connaissance des temps qu'en ce que Σt_s et Σt_m sont pris comme argument au lieu de t_s et t_m; et les tables donnent les valeurs correspondantes de t_s & t_m. Cette disposition permet de trouver successivement les parties, de la correction données en ~~&~~ minutes, secondes & fractions de secondes de

Temps locaux.

On appelle <u>longitude</u> d'un lieu de la surface terrestre l'angle que fait le plan du méridien terrestre de ce lieu avec le plan d'un méridien déterminé. Nous prendrons pour le méridien, origine des longitudes, le méridien du centre de figure ~~de~~ de la lunette méridienne de l'Observatoire de Greenwich, et nous compterons les longitudes positivement dans le sens direct c'à d de l'Ouest vers l'Est.

Théorème. – L'excès de la longitude d'un premier lieu sur celle d'un second lieu est égal à l'excès de l'angle horaire d'un point céleste vu du premier lieu à un certain instant sur l'angle horaire du même point vu du second lieu au même instant donné, si toutefois le point céleste considéré n'a pas de parallaxe.

En effet, plaçons le centre de la sphère céleste au



centre de la Terre, soient PAP', PB,P', PCP' les ~~méridiens~~ grands cercles célestes ~~qui~~ dont les plans coïncident respectivement avec les plans des méridiens terrestres du premier lieu, du second lieu et de ~~l'origine~~ de Greenwich, et soit PSP' le ~~angle~~ arc horaire d'un point céleste S à un

Exemple I.– Il est, à Tokio, en un certain jour $21^h\,18^m\,36^s$; quelle heure est-il à Greenwich, en admettant que la longitude de Tokio est de
$139^\circ\,46'\,0'' = 9^h\,19^m\,4^s$.
Soient t et le temps donné et t' le temps demandé, on a:
$L'=0 \qquad L = t-t' \qquad t' = L-t = 20^h\,59^m\,32^s$

Exemple II.– Il est 18 nov. $3^h\,35^m\,40^s$ temps moyen à Tokio; quelle heure est-il à Paris
On a $L = 9^h\,19^m\,4^s$ Donc $24+t = 27^h\,35^m\,40^s$
$L' = 0.9^m\,21.$ $\qquad - 9^h\,9^m\,43^s$
$L-L' = 9^h\,9^m\,43$ $\qquad t' = 18^h\,25.57$
Il est donc à Paris 14 nov. $18^h\,25^m\,57^s$.

certain instant. Puisque le point S est supposé dépourvu de parallaxe, il paraîtra, vu de n'importe où, toujours dans un plan parallèle au plan PSL. Donc à l'instant considéré, les angles horaires t et t' de ce point vu du premier & du second point seront respectivement

$$t = ALS \qquad t' = BLS.$$

et par suite

$$t-t' = APS - BPS = APB.$$

D'un autre côté, les longitudes L et L' des deux lieux sont respectivement

$$L = CPA \;\text{et}\; L' = CPB.$$

et par suite

$$L - L' = CPA - CPB = APB.$$

On a donc:

$$L - L' = t - t' \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Remarque.– Si l'astre considéré a une parallaxe, le théorème précédent n'est plus applicable. Alors, on substituera ~~su~~ son lieu géocentrique à son lieu apparent, c'à d. qu'au lieu de sa position apparente, on considérera la position qu'il paraîtrait avoir si l'observateur se transportant au centre de la Terre tout en conservant la même verticale et par suite le même plan méridien. C'est ce que l'on fait en effet quand on considère l'angle horaire du Soleil c'à d le temps solaire vrai.

Corollaire.– La différence des temps locaux de deux lieux de la surface terrestre sidéraux, solaires vrais, ou solaires moyens en un instant donné, est égale à la différence des longitudes de ces lieux, exprimées en temps, ces deux différences étant prises dans le même sens.

Car le temps local d'une certaine espèce n'est autre chose que l'angle horaire d'un certain point céleste, équinoxe du printemps, centre du Soleil, ou soleil moyen, cet angle horaire étant exprimé en temps.

Usage des éphémérides du Soleil.

On appelle _éphéméride_ d'un astre un tableau qui contient les valeurs des coordonnées de cet astre ainsi que les quelques autres quantités qui en dépendent, pour les époques équidistantes et qui permet de trouver par interpolation les valeurs des mêmes quantités pour des époques intermédiaires.

Nous avons ~~trois~~ quatre principaux recueils annuels d'éphémérides.

1º "Nautical Almanac & astronomical ephemeris," publié par l'Amirauté anglaise.

2º "Connaissance des temps ou des mouvements célestes" publiée par le Bureau des Longitudes de France.

3º "Berliner Astronomisches Jahrbuch" publié par l'Observatoire royal de Berlin.

4º "American Ephemeris and nautical almanac" par le ministère de la Marine des É. U. d'Amérique.

Nous expliquerons plus tard comment on peut construire ces tables astronomiques et nous verrons quel est le degré de précision qu'elles comportent. Nous allons, quant à présent, expliquer seulement l'usage de ces tables, en commençant par les éphémérides du Soleil; en particulier, nous allons résoudre les problèmes suivants relatifs à la transformation des temps.

Problème I. Étant donné le temps solaire vrai en un lieu de longitude connue, trouver le temps solaire moyen correspondant.

Il suffit de connaître la valeur de l'équation du temps à l'époque considérée pour passer du temps solaire donné au temps moyen demandé. Or, le Nautical Almanac donne pour ~~le midi vrai de~~ chaque jour de l'année, la valeur de l'équation du temps à _midi vrai_ de Greenwich c'à-d au moment où le Soleil passe au méridien de Greenwich; ainsi que la variation horaire de cette quantité c'à-d ~~sa~~ sa première dérivée par rapport au temps vrai

Exemple. – Quel est le temps moyen à

1885 Nov. 17. $3^h\,43^m\,51^s,53 = t$

temps solaire vrai de Tokio.

1º Nautical.

	Eq. du temps η_0	η'
Nov. 16.	$-15^m\,0^s,54.$	0,478
17.	14. 48,66.	0,512

$t + 24^h = 27^h.\,43^m.\,51^s,53.$

$L = 9.\ 19.\ 4.$

$\tau = 18.\ 24.\ 48$

$= 18^h.\,24^m,8$

$= 18^h,413.$

$\frac{\tau}{2} = 9,2$

$0,512 - 0,478 = 0,034$

$\frac{0^s,034 \times 9,2}{24} = 0,013.$ $\quad 0,478 + 0,013 = 0,491$

$0^s,491 \times 18,413 = 9^s,04$

$+15^m\,0^s,54 - 9^s,04 = 14^m\,51^s,50$

$$\begin{array}{r} 3^h\,43^m\,51^s,53 \\ -14.\ \ 51,50 \\ \hline 3.\ 29.\ \ 0,03 \end{array}$$

2º Connaissance des temps.

	$\eta_0 + 12$	η'
Nov. 16	$11^h\,44^m\,59^s,38$	0,478
17	11. 45. 11,26	0,512

$t + 24^h = 27.\ 43.\ 51^s,53.$

$L - L' = 9.\ 9.\ 43.$

$\tau = 18.\ 34\ \ 9.$

$= 18.\ 34,15$

$= 18^h,568.$

$\frac{\tau}{2} = 9,28$

$-0,478 + 0,512 = 0,034$

$\frac{0,034 \times 9,3}{24} = 0,013.$ $\quad \begin{array}{r} 478 \\ +13 \\ \hline 0,491. \end{array}$

$0^s,491 \times 18,568. = 9,10$

$$\begin{array}{r} 3^h\,43^m\,51^s,53. \\ 11.\ 44.\ 59,38 \\ +9,\ 10 \\ \hline 3.\ 29.\ \ 0,01 \end{array}$$

3º Jahrbuch.

	η_0	$\Delta\eta_0$.	$\Delta^2\eta_0$
Nov. 16	$-15^m\,0,97$	$+11,86$	$+0,81$
17.	$-14.\ 49,11$	12,67	0,80
18.	$-14.\ 36,44$	13,47	
19.	$-14\ \ 22,97.$		

$t + 24^h = 27.43.51^s,53.$

$L - L' = 8.25.29.$

$\tau = 19.18.23$

$\frac{\tau}{24} = f = 0,80444.$

$f(1-f) = 0,16.$

$\eta = \eta_0 + 11^s,86 \times 0,80444. - 0,81 \times 0,08. = \eta_0 + 9^s,54 - 0,06$

ou $\quad \eta = -15^m\,0^s,97 + 9^s,48. = -14.\ 51,49$

$$\begin{array}{r} 3^h\,43^m\,51^s,53. \\ -14\ \ 51,49 \\ \hline 3.\ 29.\ \ 0,04 \end{array}$$

l'heure étant prise comme unité de temps. Ces données vont nous suffire pour résoudre notre problème.

En effet, ~~soit~~ dans le petits intervalles de temps, on peut négliger les carrés des temps dans le développement de l'éq. du temps η suivant les puissances entières et croissantes du temps τ. On aura donc:

$$\eta = \eta_0 + \eta'\tau + \eta''\frac{\tau^2}{2}$$

η' et η'' étant les dérivées, première et seconde de η par rapport au temps. – Prenons pour origine des temps le midi vrai à Greenwich qui précède immédiatement l'époque considérée, et soit L la longitude du lieu considéré. D'après la formule

$$L - L' = t'' - t'$$

ou

$$t' = t - (L - L')$$

le temps solaire vrai de Greenwich à l'époque du problème sera

$$t - L + k.24^h$$

k étant égal à 0 et à 1 suivant que $t - L$ sera positif ou négatif. En posant donc

$$\tau = t - L + k.\,24^h$$

on aura donc pour l'équation du temps demandé

$$\eta = \eta_0 + \eta'\tau + \eta''\frac{\tau^2}{2}$$

ou bien

$$\eta = \eta_0 + (\eta' + \eta''\tfrac{\tau}{2}).\tau\,:$$

η_0 et η' sont donnés directement par l'éphéméride. Quant à la dérivée seconde η'', elle est sensiblement égale à la 24e partie de la différence de η' et du nombre ~~suivant~~ qui suit η' dans la même colonne, ~~divisée par 24~~. On a donc tout ce qu'il faut pour calculer η.

L'American Ephemeris donne η_0 et η' exactement de la même manière que le Nautical Almanac et l'on peut s'en servir de la même manière que précédemment.

La connaissance des temps donne η_0 et η' pour le midi vrai de Paris. On peut s'en servir en remplaçant dans la formule précédente L par $L - L'$ c.à.d. posant

Exemple. – Quel est le temps vrai à
1885 Nov. 17. $3^h 29^m 0^s,03$
temps moyen de Tokio.

1° Nautical.

	Eq. of time addition	diff.
Nov. 16	$15^m 0^s,42$	11,89
17	14. 48,53.	

$t + 24 = 27^h 29^m 0^s,03$
$L = 59.\ 19.\ 4.$
$\tau = 18.\ 9\ 56$
$= 18.\ 9^m,93$
$= 18^h,165$
$\frac{\tau}{24} = 0,75691.$

$\frac{11^s,89 \cdot 18,665}{24} = 9^s,00.$ $\quad 15^m\ 0^s,42 - 9^s,00 = 14.\ 51,42$

$$\begin{array}{r} 3^h\ 29^m\ 0^s,03 \\ +\ 14.\ 51,42 \\ \hline 3.\ 43\ 51,45 \end{array}$$

2° American ephemeris.

	Eq. de temps	variat. hor.
Nov. 16.	$15^m 0^s,39$	0,478
17.	14. 48,51	0,512

} 0,034

$\frac{0,034 \cdot \frac{\tau}{2}}{24} = 0,013.$ $\quad 0,478 + 0,013 = 0,491$

$0,491 \times 18,165 = \cancel{9^s,18}$ 8,92. $\quad 15^m 0^s,39 - \cancel{9^s,15}$ 8,92 $= 14^m 51^s,\cancel{24}$ 47

$$\begin{array}{r} 3^h\ 29^m\ 0^s,03. \\ +\ 14.\ 51,47 \\ \hline 3.\ 43\ 51,\cancel{27}\ 50 \end{array}$$

3° Jahrbuch.

	Eq. de t. à midi vrai de Berlin	Diff.	Diff. sec.
Nov. 16	$-15^m 0^s,97$	+ 11,86	+ 0,81
17	− 14. 49,11	12,67	
18	14. 36,44.		

$$\begin{array}{r} \cancel{3^h\ 29^m\ 0,03} \\ \cancel{-\ 14\ 49.} \\ \hline \cancel{3^h\ 14^m\ 11.} \\ \cancel{-\ 8.\ 25.\ 29} \\ \hline \cancel{\tau = 18.\ 48.\ 42} \end{array}$$

$\cancel{\frac{0,81}{2} \times \left(1 - \frac{\tau}{24}\right) = 0,81 \times 0,11 = 0,09}$ $\quad \cancel{\frac{\tau}{24} = 0,78382.}$

$\cancel{11,86 - 0,09 = 11,77}$

$\cancel{11,77 \times 0,78382 = 9^s,23.}$ $\quad \cancel{-15.\ 0,97 + 9^s,23 = 14.\ 51,74}$

$\cancel{3^h\ 29^m\ 0^s,03.}$
$\cancel{14\ 51.74.}$

$$\begin{array}{r} 3^h\ 29^m\ 0,03. \\ 14.\ 49. \\ \hline 3^h.\ 43.\ 49 \\ -\ 8.\ 25.\ 29 \\ \hline \tau = 19.\ 18.\ 20 \end{array}$$

$\frac{\tau}{24} = 0,80440.$

$\frac{0,81 \times \left(\frac{\tau}{24} - 1\right)}{2} = -0,81 \times 0,1 = -0,08$

$11,86 - 0,08 = 11,78$

$11,78 \times 0,80440 = 9,48.$ $\quad -15^m\ 0^s,97 + 9^s,48 = -14.\ 51,49$

$$\begin{array}{r} 3^h\ 29.\ 0,03 \\ +\ 14.\ 51,49 \\ \hline 3.\ 43\ 51,52 \end{array}$$

$$\tau = t - (L - L') + K.24^h.$$

Seulement, pour éviter des nombres négatifs, on a ajouté de 12^h à y_0, quand cette quantité est negative. Il faut donc dans ce cas retrancher 12^h du résultat obtenu.

Remarquons que le nombre tabulaire ainsi modifié est égal au temps moyen civil à midi vrai de Paris.

Quant au Jahrbuch, il ne donne que la valeur de y_0 pour le midi vrai de Berlin. On doit donc calculer y par interpolation en tenant compte de la différence seconde.

Problème II. – Étant donné le temps moyen à un lieu donné, trouver le temps vrai correspondant.

Ce problème a pratiquement moins d'importance que le précédent. Aussi le Nautical Almanac se contente-t-il de donner seulement l'éq. de temps à midi moyen de Greenwich pour chaque jour. Il ne donne pas la variation horaire qui est d'ailleurs sensiblement la même que la variation correspondante à midi vrai. On fait alors l'interpolation en négligeant le plus souvent la différence seconde.

La connaissance des temps donne la même quantité pour le midi vrai de Paris, augmenté, si elle est negatif, de 12^h.

L'American Ephemeris donne y et y_0 pour le midi moyen de Greenwich ~~exactem~~ et le calcul se fait exactement de la même façon que dans le problème précédent.

Le Jahrbuch ne donne pas l'éq. de temps à midi moyen. On peut opérer alors comme il suit. On retranche du temps moyen donné l'équation du temps à midi vrai le plus plus prochain de l'époque considérée. On obtient ainsi une valeur du temps vrai suffisamment approché pour qu'on puisse s'en servir pour l'interpolation. ~~[illegible]~~ Ayant ainsi trouvé la valeur de l'éq. de temps plus approchée, on la retranchée du temps moyen donné non corrigé.

Problème III. – Étant donné le temps moyen à un lieu connu, trouver le temps sidéral correspondant.

Les quatre éphémérides donnent la valeur du temps sidéral à midi moyen, soit de Greenwich, soit de Paris, soit

Exemple. — Quel est le temps sidéral à
1885 Nov. 17. $3^h\ 29^m\ 0^s{,}03$
temps moyen à Tokio.

1° Nautical. — Employons la formule:

$$\Theta = \Theta_0 + (1+\varepsilon)\{t_m - (L-L') + k.24\} + (L-L').$$

$$t_m + 24^h = 27^h\ 29^m\ 0^s{,}03.$$
$$L-L' = \underline{9.\ 19.\ 4.}$$
$$18.\ 9.\ 56{,}03$$

Conversion en temps sidéral.

$$18^h\ 2^m\ 57^s{,}4165$$
$$9.\ \ 1{,}4785$$
$$56{,}1533$$
$$\underline{301}$$
$$18.\ 12.\ 55{,}08$$

Θ_0 = t. sidéral à midi moy. de Greenwich Nov. 16 $= \underline{15.\ 42.\ 53{,}11}$

$$33.\ 55.\ 48{,}19$$
$$L-L' = \underline{+9.\ 19.\ 4.}$$
$$\Theta = \cancel{43.\ 36.\ 44{,}19}$$
$$19.\ 14.\ 52{,}19$$

2° C. des temps. — On a

$$L-L' = 9^h\ 9^m\ 43^s.$$
$$\varepsilon(L-L') = 1^m\ 28^s{,}708$$
$$+1{,}478$$
$$\underline{+0{,}118}$$
$$1^m\ 30{,}30$$

Θ_0 = t. sidéral à midi moyen de Paris Nov. 17. $= \underline{15^h\ 46\ 48{,}13}$

——— de Tokio Nov. 17. …… $15.\ 45\ 17{,}83$

$$3.\ 29.\ 0{,}03.$$
corret. $\underline{0^m\ 34{,}33}$

$$\Theta = 19^h\ 14^m\ 52{,}19$$

Exemple. — Quel est le temps moyen à
1885 Nov. 17 $19^h\ 14^m\ 52^s{,}19$
temps sidéral de Tokio.

1° Connaissance des temps ~~de Jahrbuch~~.

t. sidéral à midi moy. de Paris Nov. 17 …… $15^h\ 46^m\ 48{,}13.$

$$-\varepsilon(L-L') = -1.\ 30{,}30.$$

t. sidéral à midi moy. de Tokio Nov. 17 …… $15^h\ 45\ 17{,}83$

$$\underline{+19.\ 14.\ 52{,}19}$$
$$3.\ 29.\ 34{,}36$$

~~Correction~~. Correction $\underline{-\ \ 34.\ 33}$

$$T_m = 3.\ 29\ \ 0{,}03$$

2° Nautical.

Nov. 17. T_0. $8^h\ 11^m\ 49^s{,}54.$

$$4.\ 59{,}1809$$
$$47{,}8690$$
$$\underline{1895}$$
$$8^h.\ 17.\ 56{,}78$$
$$19.\ 9.\ 4.$$

$$t_1 = 19.\ 14.\ 52{,}19$$
$$L-L' = \underline{+9.\ 9.\ 4^s}$$
$$0.\ 5.\ 48{,}19$$

midi sidéral à 16 nov. $T_0 = 8^h\ 15.\ 45{,}45$

$$4.\ 59{,}1809$$
$$47{,}8690$$
$$\underline{1895}$$
$$8^h\ 21.\ 3269$$
$$19.\ 9.\ 4$$

enfin de Berlin. Si l'on appelle L' la longitude de l'un de ces trois lieux, L la longitude du lieu donné, t_m le temps moyen donné et que l'on pose

$$\tau_m = t_m - (L-L') + k.24$$

il sera, à l'instant donné, τ_m heures temps moyen à l'un des trois lieux L'. Si donc on appelle Θ_0 le temps sidéral à ~~d~~ midi moyen du lieu L' qui précède immédiatement l'instant considéré, il sera au même moment ~~au moyen~~

$$\Theta_0 + (1+\varepsilon)\tau_m$$

heures sidérales, au lieu L', et au lieu L

$$\Theta = \Theta_0 + (1+\varepsilon)\tau_m + (L-L')$$

c'àd. $\Theta = \Theta_0 + (1+\varepsilon)\{t_m - (L-L') + k.24\} + (L-L').$

heures temps sidéral. Le problème se trouve ainsi résolu.

~~La formule précédente peut s'écrire:~~

~~$\Theta = \Theta_0$~~

On peut prendre $k=0$, même lorsque $t_m - (L-L')$ est <0 pourvu que l'on prenne dans ce cas pour Θ_0 le temps sidéral au midi moy. du lieu L' qui ~~pré~~ suit immédiatement l'époque considérée. On a alors:

$$\Theta = \Theta_0 + (1+\varepsilon)\{t_m - (L-L')\} + (L-L').$$

On peut écrire cette formule:

$$\Theta = \Theta_0 - \varepsilon(L-L') + (1+\varepsilon)t_m$$

La première partie du second membre à savoir

$$\Theta_0 - \varepsilon(L-L')$$

est la valeur de Θ pour $t_m = 0$ c'àd. le temps sidéral à midi moyen du lieu L. Cette partie pourra se calculer immédiatement si l'on a sous les mains une des tables qui donnent εt_m en fonction de t_m.

Problème IV. — Étant donné le temps sidéral à un lieu connu, trouver le temps moyen correspondant.

Calculons d'abord le temps sidéral à midi moyen du lieu considéré, qui est égal à

$$\Theta_0 - \varepsilon(L-L').$$

puis retranchons ce temps du temps sidéral, en ajoutant 24^h à ce dernier si cela est nécessaire; nous aurons l'intervalle

2ᵉ Nautical.

$t_1 = 19.\ 14.\ 52{,}19$

$L - L' = 9.\ 19.\ 4^s$

$9.\ 55.\ 48{,}19$

$T_0 = 8^h\ 14^m\ 49^s{,}24.$
$8.\ 58.\ 31.$

T_0 = t. moy. à midi sidéral de Greenwich le 16 . . . . . $= 8^h\ 15^m\ 45{,}45.$

$8.\ 58.\ 31.534$

$54.\ 50{,}990$

$47{,}9^s9$

189

$18\quad 9.\ 56{,}03$

$9.\ 19.\ 4.$

$T. = 3^h\ 29.\ \cancel{12{,}16}$

$0{,}03$

du temps écoulé depuis midi moyen jusqu'à l'instant considéré, cet intervalle étant estimé en heures sidérales. En convertissant le nombre trouvé en temps moyen, nous aurons le temps moyen demandé.

Le Nautical almanac ne donne pas le moyen de trouver rapidement εt_m. Mais en revanche, il donne le temps moyen à l'époque du passage supérieur du point vernal au méridien de Greenwich. Alors, on peut calculer le temps moyen demandé exactement par le même procédé que dans le problème précédent. La formule sera:

$$T = T_0 + (1-\varepsilon')\left[t_1 - (L-L')\right] + (L-L')$$

ou bien en remarquant que $L' = 0$ ici

$$T = T_0 + (1-\varepsilon')(t_1 - L) + L.$$

T_0 étant le nombre tabulaire et T le temps moyen demandé.

L'American Ephemeris donne aussi le même nombre T_0 sous le titre de « mean time of sideral noon ».

*. Voici un tableau qui donne $\varepsilon(L-L')$ pour L = longitude de Tokio & L' = L de Green. Paris & Berlin.

$L = 9^h\ 19^m\ 4^s.$

L = longitude de	$\varepsilon(L-L')$
Greenwich	$1^m\ 31^s{,}84$
Paris	$1^m\ 30{,}305$
Berlin	$1^m\ 23{,}04$

III. Digression
sur quelques développements en séries.

I. En astronomie, on a fréquemment à résoudre des équations de la forme:

$$(1) \quad \begin{cases} \rho \sin x = m \sin\alpha \\ \rho \cos x = 1 - m\cos\alpha \end{cases}$$

dans lesquelles m désigne un nombre donné, positif ou négatif, dont la valeur absolue est plus petite que 1, et α un angle quelconque donné. Le système d'éq. définissant un nombre ρ positif et un angle x compris entre 0 et 2π, nous nous proposons de développer les valeurs de $\log\rho$ et de x en séries procédant suivant les puissances entières de m.

Mettons les équations (1) sous la forme:

$$(2) \qquad \rho = \sqrt{1 - 2m\cos\alpha + m^2}$$

$$(3) \qquad \operatorname{tg} x = \frac{m\sin\alpha}{1 - m\cos\alpha}$$

d'où

$$\log\rho = \frac{1}{2}\log(1 - 2m\cos\alpha + m^2)$$

$$x = \operatorname{arctg} \frac{m\sin\alpha}{1 - m\cos\alpha}.$$

En différentiant, il vient:

$$\frac{d\log x}{dm} = \frac{-\cos\alpha + m}{1 - 2m\cos\alpha + m^2}$$

$$\frac{dx}{dm} = \frac{\sin\alpha}{1 - 2m\cos\alpha + m^2}$$

On en tire:

$$\frac{d\log x}{dm} + i\frac{dx}{dm} = \frac{m - (\cos\alpha - i\sin\alpha)}{1 - 2m\cos\alpha + m^2}.$$

ou en remplaçant $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ par leurs valeurs en fonction de l'exponentiel imaginaire:

$$\frac{d\log x}{dm} + i\frac{dx}{dm} = \frac{m - e^{-\alpha i}}{(1 - me^{\alpha i})(1 - me^{-\alpha i})} = \frac{-e^{-\alpha i}}{1 - me^{-\alpha i}}$$

$$= -e^{-\alpha i}(1 - me^{-\alpha i})^{-1}$$

Or, le module de $-me^{-\alpha i}$ étant < 1, on peut développer $(1 - me^{-\alpha i})^{-1}$ suivant les puissances de $-me^{-\alpha i}$, ce qui donne:

$$\frac{d\log x}{dm} + i\frac{dx}{dm} = -e^{-\alpha i}(1 + me^{-\alpha i} + m^2 e^{-2\alpha i} + \cdots\cdots)$$

$$= -(\cos\alpha + m\cos 2\alpha + m^2\cos 3\alpha + \cdots) + i(\sin\alpha + m\sin 2\alpha + m^2\sin 3\alpha + \cdots)$$

* Ces inégalités sont donc équivalentes à l'inégalité $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 - 1 < 0$ ou $-\frac{4n}{(n+1)^2} < 0$ c'à d à $n > 0$.

*

d'où en égalant séparément les parties réelles et les coefficients de i:

$$\frac{d \log \rho}{dm} = -(\cos\alpha + m\cos 2\alpha + m^2\cos 3\alpha + \cdots)$$

$$\frac{dx}{dm} = \sin\alpha + m\sin 2\alpha + m^2\sin 3\alpha + \cdots$$

On en conclut, en intégrant et remarquant que $\log\rho$ et x sont nuls en même temps que m:

$$(4) \qquad \log\rho = -m\cos\alpha - \frac{m^2}{2}\cos 2\alpha - \frac{m^3}{3}\cos 3\alpha - \cdots$$

$$(5) \qquad x = m\sin\alpha + \frac{m^2}{2}\sin 2\alpha + \frac{m^3}{3}\sin 3\alpha + \cdots$$

Si l'on veut prendre le logarithme vulgaire de ρ et exprimer x en secondes, il faudra écrire:

$$(6) \qquad \log\rho = -M m\cos\alpha - M\frac{m^2}{2}\cos 2\alpha - M\frac{m^3}{3}\cos 3\alpha - \cdots$$

$$(7) \qquad x = \frac{m}{\sin 1''}\sin\alpha + \frac{m^2}{2\sin 1''}\sin 2\alpha + \frac{m^3}{3\sin 1''}\sin 3\alpha + \cdots$$

M désignant le module du logarithme à base décimale.

Corollaires.— On peut ~~xxx~~ ramener aux développements précédents un certain nombre de questions importantes.

1° Résoudre les équations

$$(8) \qquad \begin{cases} \rho\sin x = m\sin\alpha \\ \rho\cos x = 1 + m\cos\alpha \end{cases}$$

où m est un nombre donné compris entre -1 et $+1$.

En remplaçant α par $\pi-\alpha$, on ramène ces éq. aux éq. (1). On aura donc:

$$(9) \qquad \log\rho = +M m\cos\alpha - M\frac{m^2}{2}\cos 2\alpha + M\frac{m^3}{3}\cos 3\alpha - \cdots$$

$$(10) \qquad x = \frac{m}{\sin 1''}\sin\alpha - \frac{m^2}{2\sin 1''}\sin 2\alpha + \frac{m^3}{3\sin 1''}\sin 3\alpha - \cdots$$

2° Résoudre l'équation

$$(11) \qquad \operatorname{tg} x = n\operatorname{tg}\alpha$$

où n désigne un nombre donné très-voisin de 1.

On a

$$\operatorname{tg}(x-\alpha) = \frac{\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\alpha} = \frac{(n-1)\operatorname{tg}\alpha}{1+n\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{(n-1)\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha + n\sin^2\alpha}.$$

ou bien en remarquant que

$$\cos^2\alpha + n\sin^2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}n\cos 2\alpha = \frac{n+1}{2} - \frac{n-1}{2}\cos 2\alpha$$

on aura:

$$\operatorname{tg}(x-\alpha) = \frac{\frac{n-1}{n+1}\sin 2\alpha}{1 - \frac{n-1}{n+1}\cos 2\alpha}$$

Si l'on suppose

$$* \qquad -1 < \frac{n-1}{n+1} < +1$$

l'éq. précédente étant ~~sera~~ de la forme (3), la formule (5) lui sera

Exemple. — Développer la réduction à l'éq. en fonction de la longitude vraie.

On a $\operatorname{tg}\alpha = \cos\gamma \operatorname{tg} l$ Donc: $\alpha = l - \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}{\sin 1''}\sin 2l + \frac{\operatorname{tg}^4\frac{\gamma}{2}}{2\sin 1''}\sin 4l - \dots$

en en temps $\alpha = l - \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}{15\sin 1''}\sin 2l + \frac{\operatorname{tg}^4\frac{\gamma}{2}}{2.15\sin 1''}\sin 4l - \dots$

Prenons $\gamma = 23^\circ\, 27'\, 5''$

$\frac{1}{2}\gamma = 11.\ 43.\ 32,5.$

On a

$\log \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \bar{1},3171\,390$ $\qquad \log 15 = 1,1760913.$

$\log \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} = \bar{2},6342\,780$ $\qquad \log \sin 1'' = \bar{6},6855749$

$\operatorname{col} 15\sin 1'' = 4,1383338$ $\qquad \log 15\sin 1'' = \bar{5},8616662$

$\log(I) = 2,7726118$ $\qquad (I) = 592'',40.$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\ \ 077$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\ \ \ 41$

$\log \operatorname{tg}^4\frac{\gamma}{2} = \bar{3},26856.$

$\operatorname{col} 15\sin 1'' = 4,13833$

$\log 2(II) = 1,40689$ $\qquad 2(II) = 25'',52 \qquad (II) = 12,76.$

$\log \operatorname{tg}^6\frac{\gamma}{2} = \bar{5},9028$

$\operatorname{col} 15\sin 1'' = 4,1383$

$\log 3(III) = 0,0411$ $\qquad 3(III) = 1,10 \qquad (III) = 0,37.$

$\log \operatorname{tg}^8\frac{\gamma}{2} = \bar{6},537$

$\operatorname{col.} 15\sin 1'' = 4,138$

$\log 4(III) = \bar{2},675$ $\qquad 4(III) = 0,047 \qquad (III) = 0,01$

Donc:

$$\alpha = l - 592'',40 \sin 2l + 12'',76 \sin 4l - 0'',37 \sin 6l + 0'',01 \sin 8l +$$

applicable et l'on aura:

$$(10)\qquad x = \alpha + \frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sin 1''}\sin 2\alpha + \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2\frac{1}{2\sin 1''}\sin 4\alpha + \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3\frac{1}{3\sin 1''}\sin 6\alpha + \dots$$

Si l'on a:

$$(11)\qquad n = \cos\gamma \qquad \operatorname{tg} x = \cos\gamma \operatorname{tg}\alpha$$

γ étant un angle très-petit, on aura:

$$\frac{n-1}{n+1} = -\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma} = -\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}$$

et le développement précédent deviendra:

$$(12)\qquad x = \alpha - \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}{\sin 1''}\sin 2\alpha + \frac{\operatorname{tg}^4\frac{\gamma}{2}}{2\sin 1''}\sin 4\alpha - \frac{\operatorname{tg}^6\frac{\gamma}{2}}{3\sin 1''}\sin 6\alpha + \dots$$

II. Série de Lagrange. — Soit donnée l'équation

$$(13)\qquad z = x + af(z)$$

qui définit une fonction z de x et dans laquelle a désigne une nombre donné très-petit. Supposons qu'une certaine fonction $F(z)$ de z soit développable ~~suivant~~ en une série entière en a. D'après le théorème de Mac-Laurin, ce développement sera:

$$F(z) = F(x) + \left[\frac{\partial F(z)}{\partial a}\right]_0 \frac{a}{1} + \left[\frac{\partial^2 F(z)}{\partial a^2}\right]_0 \frac{a^2}{1.2} + \dots$$

où

$$\left[\frac{\partial F(z)}{\partial a}\right]_0 \quad \left[\frac{\partial^2 F(z)}{\partial a^2}\right]_0 \quad \text{etc}$$

désignent les valeurs des dérivées successives de $F(z)$ par rapport à a quand on fait $a = 0$ c'à d. $z = x$.

Nous allons nous proposer de calculer ces différents coefficients. — On a d'abord:

$$\frac{\partial F(z)}{\partial a} = F'(z)\frac{\partial z}{\partial a}.$$

Mais en différentiant l'équation (13) successivement par rapport à a et à x, on a:

$$\frac{\partial z}{\partial a} = f(z) + af'(z)\frac{\partial z}{\partial a}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + af'(z)\frac{\partial z}{\partial x}$$

ou bien:

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{f(z)}{1 - af'(z)} \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 - af'(z)}$$

on a donc:

$$(14)\qquad \frac{\partial z}{\partial a} = f(z)\frac{\partial z}{\partial x}$$

et par suite

$$(15)\qquad \frac{\partial F(z)}{\partial a} = f(z)F'(z)\frac{\partial z}{\partial x}$$

ou $(16)\qquad \frac{\partial F(z)}{\partial a} = f(z)\frac{\partial F(z)}{\partial x}.$

Procédons maintenant au calcul de $\frac{\partial^2 F(z)}{\partial a^2}$; pour cela posons un instant

$$f(z)\,F'(z) = \varphi'(z)$$

alors l'éq. (15) devient

$$\frac{\partial F(z)}{\partial a} = \varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(z)}{\partial x}$$

on a donc:

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial a^2} = \frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial \varphi(z)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \varphi(z)}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f(z)\,F'(z)\frac{\partial z}{\partial a}\right]$$

ou enfin

$$(17) \qquad \frac{d^2 F(z)}{\partial a^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f^2(z)\frac{\partial F(z)}{\partial x}\right).$$

Nous allons démontrer qu'on a en général

$$(18) \qquad \frac{\partial^n F(z)}{\partial a^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(f^n(z)\frac{\partial F(z)}{\partial x}\right).$$

En effet si cette formule est exacte pour une certaine valeur de n, nous allons montrer qu'elle le sera aussi pour la valeur de n supérieure d'une unité. En effet elle peut s'écrire

$$\frac{d^n F(z)}{\partial a^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(f^n(z)\,F'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

et en posant

$$f^n(z)\,F'(z) = \psi'(z)$$

elle devient

$$\frac{\partial^n F(z)}{\partial a^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(\psi'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^n \psi(z)}{\partial x^n}$$

Donc.

$$\frac{\partial^{n+1} F(z)}{\partial a^{n+1}} = \frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial^n \psi(z)}{\partial x^n} = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{\partial \psi(z)}{\partial a} = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[f^n(z)\,F'(z)\frac{\partial z}{\partial a}\right]$$

ou d'après la formule (14)

$$\frac{\partial^{n+1} F(z)}{\partial a^{n+1}} = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[f^{n+1}(z)\,F'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right] = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(f^{n+1}(z)\frac{\partial F(z)}{\partial x}\right]$$

éq. de la forme ~~de~~ (18). Donc cette éq. (18) est générale.

Maintenant, x étant indépendant de a, on peut faire l'hypothèse $a=0$ soit avant, soit après les différentiations par rapport à x. Si l'on fait cette hypothèse avant les différentiations désignées et que l'on remarque que, pour $a=0$ on a:

$$z = x \qquad F(z) = F(x) \qquad f(z) = f(x) \qquad \frac{\partial F(z)}{\partial x} = \frac{dF(x)}{dx}$$

les éq. (16) (17) (18) donneront:

$$\left[\frac{\partial F(z)}{\partial a}\right]_0 = f(x)\,F'(x) \qquad \left[\frac{\partial^2 F(z)}{\partial a^2}\right]_0 = \frac{d}{dx}\left[f^2(x)\,F'(x)\right] \quad \ldots$$

$$\left[\frac{d^n F(z)}{da^n}\right]_0 = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[f^n(x)\,F'(x)\right].$$

et le développement de $F(z)$ sera :

$$(19) \qquad F(z) = F(x) + f(x)F'(x)\frac{a}{1} + \frac{d}{dx}\left(f^2(x)F'(x)\right)\frac{a^2}{1.2} + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(f^n(x)F'(x)\right)\frac{a^n}{1.2.3\cdots n} + \cdots\cdots$$

Dans le cas particulier où $F(z)$ se réduit à z, on aura :

$$(20). \qquad z = x + f(x)\frac{a}{1} + \frac{d(f(x))^2}{dx}\frac{a^2}{1.2} + \frac{d^3(f(x))^2}{dx^2}\frac{a^3}{1.2.3} + \cdots\cdots$$

Telles sont les formules ~~que~~ dues à Lagrange et dont on fait d'importants usages en astronomie.

IV ~~XV~~. Figure et dimensions de la Terre. — Théorie des Parallaxes.

Les mesures géodésiques modernes montrent que la Terre n'est pas exactement une sphère, mais qu'elle est à peu près un ellipsoïde aplati dont l'axe de révolution coïncide avec l'axe de rotation de la Terre; c.à.d. que sa surface est une surface de révolution engendrée par une ellipse dont le petit axe coïncide avec l'axe de ~~la~~ rotation de la terre en tournant autour de ce petit axe. Il en résulte que le méridien terrestre de chaque lieu de la surface du Globe est une ellipse constante en figure et en dimension et que la normale à la surface de l'ellipsoïde passant par ce lieu c.à.d. la verticale de ce lieu est contenue tout entière dans le plan de cette ellipse et coïncide avec la normale à l'ellipse menée du même point. Nous allons en déduire quelques conséquences importantes.

Expression de la latitude géocentrique en fonction de la latitude géographique. — Rapportons l'ellipse méridienne à son grand axe comme axe des x et à son petit axe comme axe des y. En appelant a et b les longueurs des demi-axes, son équation sera

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

La latitude géocentrique ou réduite du point xy étant l'angle que fait son rayon vecteur avec l'axe des x aura pour tang. ~~valeur~~:

$$tg\varphi' = \frac{y}{x}.$$

Quant à la latitude géographique au même point, elle est égale, d'après ce que nous venons de voir, à l'angle que forme avec le même axe la normale à l'ellipse menée du même point; elle a donc pour tang.

$$tg\varphi = -\frac{dx}{dy}.$$

Or, on a d'après l'éq. de l'ellipse:

Si l'on pose : $\sin\frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}$

$$\sin\frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \qquad \log\frac{\alpha}{2} = \bar{3},2230769$$

on aura : $\qquad \log\sin\frac{\psi}{2} = \bar{2},6115384.$

$$e = \sin\psi. \qquad \psi = 4^\circ 41' 10'',0$$

Posons : $\quad n = \cos^2\omega = 1 - e^2.$

alors. $\quad 1 - \cos^2\omega = 2\sin^2\frac{\omega}{2} = e^2 \quad$ d'où $\sin\frac{\omega}{2} = \frac{e}{\sqrt{2}}.$

et $\quad \frac{n-1}{n+1} = -\,tg^2\frac{\omega}{2}.$

$$\varphi' = \varphi - tg^2\frac{\omega}{2}\,\frac{1}{\sin 1''}\sin 2\varphi + tg^4\frac{\omega}{2}\,\frac{1}{2\sin 1''}\sin 4\varphi - \ldots\ldots$$

$$\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{y\,dy}{b^2} = 0$$

d'où

$$-\frac{dx}{dy} = \frac{y}{x}\,\frac{a^2}{b^2}$$

donc.

$$tg\varphi = \frac{y}{x}\,\frac{a^2}{b^2} = tg\varphi'.\frac{a^2}{b^2}.$$

c'à d.

(2) $\qquad tg\varphi' = \frac{b^2}{a^2}\,tg\varphi.$

Appelons α et e l'aplatissement et l'excentricité de notre ellipse, c'à d. posons :

$$\alpha = \frac{a-b}{a} \qquad e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$$

D'après Bessel, les dimensions de la Terre ont pour valeurs :

$$a = 6377397^m,15 \qquad b = 6356078,96.$$

On a donc :

$$\alpha = \frac{1}{299,1528}$$

et $\qquad e = \sqrt{1-(1-\alpha)^2} = \sqrt{2\alpha - \alpha^2} = 0,0816967.$

$$\log e = \bar{2},912205.$$

Maintenant l'équation précédente peut s'écrire

(3) $\qquad tg\varphi' = (1-e^2)\,tg\varphi.$

Comme $1-e^2$ est très-voisin de 1, la formule (10) de notre digression est applicable, et comme on a ici

$$n = 1 - e^2 \; ; \quad \frac{n-1}{n+1} = -\frac{e^2}{2-e^2}$$

on aura :

$$\varphi' = \varphi - \frac{e^2}{2-e^2}\,\frac{1}{\sin 1''}\sin 2\varphi + \frac{e^4}{(2-e^2)^2}\,\frac{1}{2\sin 1''}\sin 4\varphi - \ldots\ldots$$

ou en effectuant :

$$\varphi' = \varphi - 690'',65\sin 2\varphi + 1'',16\sin 4\varphi - \ldots.$$

les termes qui suivent celui du 2e ordre étant négligeables.

Distance d'un point de la surface de la Terre au centre. — Soit ρ la distance du point x, y au centre de la Terre. On aura

$$x = \rho\cos\varphi' \qquad y = \rho\sin\varphi'$$

et $\qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2}.$

Or les éq. (1) & (3) peuvent s'écrire :

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1-e^2} = a^2$$

$$\frac{x}{\cos\varphi} = \frac{\frac{y}{\sqrt{1-e^2}}}{\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}$$

on aura donc :

Posons comme plus haut

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{e}{\sqrt{2}}$$

alors : $f^2 = n = \cos 2\omega$.

$$\frac{1-f^2}{1+f^2} = \mathrm{tg}^2\omega.$$

Posons en outre

$$\sin\psi = e$$

alors $f = \sqrt{1-e^2} = \cos\psi$

$$\frac{1-f}{1+f} = \mathrm{tg}^2\frac{\psi}{2}.$$

$$\log\frac{1+f^2}{1+f} = \log\frac{\cos^2\omega}{\cos^2\frac{\psi}{2}} = 2\log\frac{\cos\omega}{\cos\frac{\psi}{2}}.\ *$$

$$\log\rho = \log a + 2\log\frac{\cos\omega}{\cos\frac{\psi}{2}}$$
$$+ M\left(\mathrm{tg}^2\omega\cos 2\varphi - \mathrm{tg}^4\omega\frac{\cos 4\varphi}{2} + \cdots\right)$$
$$- M\left(\mathrm{tg}^2\frac{\psi}{2}\cos 2\varphi - \mathrm{tg}^4\frac{\psi}{2}\frac{\cos 4\varphi}{2} + \cdots\right).$$

* Il y a avantage à transformer $\log\frac{1+f^2}{1+f}$. — On a

$$\frac{1+f^2}{1+f} = \frac{1+f-f(1-f)}{1+f} = 1 - f\frac{1-f}{1+f} = 1 - \cos\psi\,\mathrm{tg}^2\frac{\psi}{2}.$$

Donc

$$\log\frac{1+f^2}{1+f} = -M\left(\mathrm{tg}^2\frac{\psi}{2}\cos\psi + \frac{1}{2}\mathrm{tg}^4\frac{\psi}{2}\cos^2\psi + \cdots\right).$$

$$\frac{x}{\cos\varphi} = \frac{\frac{y}{\sqrt{1-e^2}}}{\sqrt{1-e^2}\sin\varphi} = \frac{\sqrt{\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{1-e^2}}}{\sqrt{\cos^2\varphi+(1-e^2)\sin^2\varphi}} = \frac{a}{\sqrt{\cos^2\varphi+(1-e^2)\sin^2\varphi}}$$

on aura en résolvant :

$$(4)\left\{\begin{aligned} x &= \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi+(1-e^2)\sin^2\varphi}} \\ y &= \frac{a(1-e^2)\sin\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi+(1-e^2)\sin^2\varphi}} \end{aligned}\right.$$

On en conclut :

$$\rho = a\frac{\sqrt{\cos^2\varphi+(1-e^2)^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{\cos^2\varphi+(1-e^2)\sin^2\varphi}}$$

Remplaçons $\cos^2\varphi$ et $\sin^2\varphi$ par leurs valeurs en $\cos 2\varphi$

$$\cos^2\varphi = \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos 2\varphi \qquad \sin^2\varphi = \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2\varphi$$

il viendra

$$\rho = \frac{\sqrt{1+(1-e^2)^2+[1-(1-e^2)^2]\cos 2\varphi}}{\sqrt{1+(1-e^2)+[1-(1-e^2)]\cos 2\varphi}}\,a$$

Posons.

$$1-e^2 = f^2 \qquad e^2 = 1-f^2$$

la formule deviendra

$$\rho = \frac{\sqrt{1+f^4+(1-f^4)\cos 2\varphi}}{\sqrt{1+f^2+(1-f^2)\cos 2\varphi}}\,a$$

or comme

$$1+f^4 = \tfrac{1}{2}[(1+f^2)^2+(1-f^2)^2]$$
$$1+f^2 = \tfrac{1}{2}[(1+f)^2+(1-f)^2]$$

et

$$1-f^4 = (1-f^2)(1+f^2)$$
$$1-f^2 = (1-f)(1+f)$$

$$\rho = \frac{1+f^2}{1+f}\sqrt{\frac{1+2\left(\frac{1-f^2}{1+f^2}\right)\cos 2\varphi+\left(\frac{1-f^2}{1+f^2}\right)^2}{1+2\left(\frac{1-f}{1+f}\right)^2\cos 2\varphi+\left(\frac{1-f}{1+f}\right)^2}}\,a$$

Comme f est très-voisin de 1 et par suite $1-f^2$ et $1-f$ très-voisins de 0, les numérateur et le dénominateur de cette fraction sont tous les deux de la forme que nous avons considérée dans la digression et la formule (1) leur seraient applicable. Donc :

$$\log\rho = \log a + \log\frac{1+f^2}{1+f}$$
$$+ M\left[\frac{1-f^2}{1+f^2}\cos 2\varphi - \left(\frac{1-f^2}{1+f^2}\right)^2\frac{\cos 4\varphi}{2} + \cdots\right]$$
$$\mp M\left[\frac{1-f}{1+f}\cos 2\varphi - \frac{1-f}{1+f}\cdot\frac{\cos 4\varphi}{2} + \cdots\right].$$

En substituant les valeurs numériques, on aura enfin :

$$\log\rho = \log a + \bar{1},9992747 + 0,0007271\cos 2\varphi - 0,0000018\cos 4\varphi$$

les termes suivants étant négligeables.

Calcul de x et de y. — Les développements de φ' et de ρ sont surtout commodes pour réduire en quantité

Calcul de la variation des coefficients dans les développements de φ' et de $\log \rho$ pour une variation de $\frac{1}{\alpha}$ égale à 1. —

Écrivons :

$$\varphi-\varphi' = \frac{A}{\cancel{\sin 1''}}\sin 2\varphi + \frac{A'}{\cancel{\sin 1''}}\sin 4\varphi \qquad \log\rho-\log a = \cancel{M}(B + C\cos 2\varphi + C'\cos 4\varphi)$$

Posons. $\lambda = \mathrm{tg}^2\omega \qquad \mu = \mathrm{tg}^2\frac{\psi}{2}. \qquad \lambda' = +\frac{1}{2}\lambda^2 \qquad \mu' = \frac{1}{2}\mu^2$

Alors. $A = -\frac{\lambda}{\sin 1''} \qquad A' = \frac{\lambda'}{\sin 1''}$ ~~[illegible]~~

$C = M\lambda - M\mu \qquad C' = M\lambda' - M\mu'.$

et l'on a sensiblement.

$$B = -M\,\mathrm{tg}^2\frac{\psi}{2}\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{\psi}{2}\right)\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{\psi}{2}\right)^{-1} = M\,\mathrm{tg}^2\frac{\psi}{2}\left(1-2\,\mathrm{tg}^2\frac{\psi}{2}\right) = -(M\mu - 4M\mu'.)$$

On n'a donc qu'à calculer $d\lambda$, $d\mu$, $d\lambda'$, $d\mu'$.

$\alpha = \frac{1}{x} \qquad 2\sin^2\frac{\psi}{2} = \alpha \qquad \sin\omega = \frac{\sin\psi}{\sqrt{2}}.$

$\cdot\ d\alpha = -\frac{1}{x^2}dx = -\alpha^2 dx = -4\sin^4\frac{\psi}{2}dx.$

$4\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2}.\frac{d\psi}{2} = d\alpha$ d'où $d\psi = \frac{d\alpha}{\sin\psi} = \frac{-4\sin^4\frac{\psi}{2}}{\sin\psi}dx$

$\cdot\ d\psi = -\frac{4\sin^4\frac{\psi}{2}}{\sqrt{2}.\sin\omega}dx = -2\,\mathrm{tg}^3\frac{\psi}{2}\cos^2\frac{\psi}{2}\,dx.$

$\cos\omega\, d\omega = \frac{\cos\psi}{\sqrt{2}}d\psi \qquad d\omega = \frac{\cos\psi}{\sqrt{2}\cos\omega}d\psi$

$\cdot\ d\omega = -\frac{2\sin^4\frac{\psi}{2}\cos\psi}{\sin\omega\cos\omega}dx = -\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{tg}^3\frac{\psi}{2}\cos^2\frac{\psi}{2}\cos\psi}{\cos\omega}.dx.$

$d\lambda = 2\,\mathrm{tg}\,\omega\frac{d\omega}{\cos^2\omega} \qquad \times\ d\lambda = -\frac{4\sin^4\frac{\psi}{2}\cos\psi}{\cos^4\omega}dx$

$d\mu = \mathrm{tg}\frac{\psi}{2}\frac{d\psi}{\cos^2\frac{\psi}{2}} \qquad \times\ d\mu = -2\,\mathrm{tg}^4\frac{\psi}{2}dx$

$d\lambda' = \lambda d\lambda \qquad \times\ d\lambda' = -\frac{4\,\mathrm{tg}^2\omega\sin^4\frac{\psi}{2}\cos\psi}{\cos^4\omega}dx$

$d\mu' = \mu d\mu \qquad \times\ d\mu' = -2\,\mathrm{tg}^6\frac{\psi}{2}dx$

Il faut réviser tout cela.

On a ici $\psi = 4°\,41'\,10''$. $\frac{\psi}{2} = 2°\,20'\,35''$.

$l.\,d\lambda = -\bar{5},04765$	$l.\,d\mu = -\bar{6},74858$
$l.\,d\lambda' = -\bar{8},5745$	$l.\,d\mu' = -\bar{8},9723.$
$l.\,dA = +0,36408$	$dA = +2,3125$
$l.\,dA' = -\bar{3},8889.$	$dA' = -0,007743.$
	$dB = +0,0000002271$
	$dC = -0,000002485$
	$dC' = +0,000000\ldots44.$

Mais il faut remarquer que, quand x dépasse 1.5, l'influence de dx^2 atteint la dernière décimale dans les premiers coefficients.

en tables, (on trouve de ces tables presque dans tous les recueils de tables astronomiques). Mais il arrive quelquefois que l'on a besoin de calculer

$$x = \rho\cos\varphi' \quad \text{et} \quad y = \rho\sin\varphi'.$$

Si l'on pose

$$\sin\psi = e\sin\varphi$$

les formules (4) donnent :

$$(5)\quad \begin{cases} \rho\sin\varphi' = a(1-e^2)\sin\varphi\sec\psi \\ \rho\cos\varphi' = a\cos\varphi\sec\psi \end{cases}$$

formules utiles d'un usage très-commodes.

Remarquons aussi que l'on a :

$$(6)\quad \begin{cases} \rho\sin(\varphi-\varphi') = \frac{1}{2}ae^2\sin 2\varphi\sec\psi \\ \rho\cos(\varphi-\varphi') = a\cos\psi. \end{cases}$$

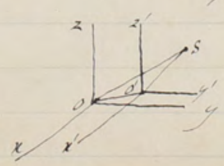
formules qui peuvent être utiles.

Théorie des Parallaxes.

Lorsque la distance d'un astre à la Terre n'est pas si grande qu'on puisse négliger les dimensions de la Terre par rapport à cette distance, le rayon visuel de cet astre vu d'un point de la surface terrestre et la droite qui joint le même astre au centre de la Terre n'ont pas sensiblement la même direction ; ces deux droites forment entre elles un angle, petit mais appréciable, qu'on appelle parallaxe.

Il en résulte que les coord. de l'astre vu de la surface rapporté à un certain système d'axes ayant leur origine à l'œil de l'observateur diffèrent de celles du même astre vu du centre et rapporté à un système d'axes parallèles aux premiers.

Appelons x, y, z les coord. géocentriques de l'astre S, x', y', z' ses coord. apparentes et ξ, η, ζ les coord. du lieu d'observation O' par rapport au centre de la Terre O.



En égalant la projection du vecteur OS sur chaque axe à la somme des projections des deux vecteurs OO', O'S et remarquant que :

$$\text{project. de } o'o'' = -\text{ project. de } oo'$$

nous aurons :

$$x' = x - \xi$$
$$y' = y - \eta$$
$$z' = z - \zeta.$$

Ces équations vont nous permettre de trouver les parallaxes des coord. sphériques, c.à.d les différences de ces coord. géocentriques et apparentes.

Problème I. – Étant données l'azimut et la distance zénithale d'un astre tels qu'ils ~~résultent de l'observation~~ seraient si l'observateur était placé au centre de la Terre, trouver son azimut et sa distance zénithale tels qu'ils ~~seraient si l'observateur était placé au centre de la Terre tout en conservant la même verticale.~~ résulteraient de l'observation

Appelons Δ et Δ' les distances de l'astre au centre de la Terre et au lieu d'observation o'. On aura alors, en prenant les axes habituels :

$$x = \Delta \sin Z \cos A \qquad y = \Delta \sin Z \sin A \qquad z = \Delta \cos Z$$
$$x' = \Delta' \sin Z' \cos A' \qquad y' = \Delta' \sin Z' \sin A' \qquad z' = \Delta' \cos Z'$$

Z, A et Z', A' étant les distances zénithales et les azimuts géocentriques et apparents. Quant à ξ, η, ζ, on a évidemment

$$\xi = \rho \sin(\varphi - \varphi') \qquad \eta = 0 \qquad \zeta = \rho \cos(\varphi - \varphi')$$

on aura donc :

$$(1) \qquad \Delta' \sin Z' \cos A' = \Delta \sin Z \cos A - \rho \sin(\varphi - \varphi')$$
$$(2) \qquad \Delta' \sin Z' \sin A' = \Delta \sin Z \sin A$$
$$(3) \qquad \Delta' \cos Z' = \Delta \cos Z - \rho \cos(\varphi - \varphi').$$

ou bien

$$(1') \qquad \Delta' \sin Z' \sin(A' - A) = \rho \sin(\varphi - \varphi') \sin A$$
$$(2') \qquad \Delta' \sin Z' \cos(A' - A) = \Delta \sin Z - \rho \sin(\varphi - \varphi') \cos A$$
$$(3') \qquad \Delta' \cos Z' = \Delta \cos Z - \rho \cos(\varphi - \varphi').$$

Des deux premières éq. on tire immédiatement l'éq.

$$(4) \qquad \operatorname{tg}(A' - A) = \frac{\rho \sin(\varphi - \varphi') \sin A}{\Delta \sin Z - \rho \sin(\varphi - \varphi') \cos A}$$

qui donne $A' - A$ en fonction des données.

Maintenant, remplaçons les éq. (1') (2') par la somme des produits que l'on obtient en multipliant la 1ère éq. par $\sin\frac{1}{2}(A'-A)$ et la 2e par $\cos\frac{1}{2}(A'-A)$, il vient.

$$\Delta'\sin Z' = \Delta\sin Z - \rho\sin(\varphi-\varphi')\frac{\cos\frac{1}{2}(A'+A)}{\cos\frac{1}{2}(A'-A)}$$

$$\Delta'\cos Z' = \Delta\cos Z - \rho\cos(\varphi-\varphi').$$

En posant.

$$(5)\qquad tg\, r = \frac{\cos\frac{1}{2}(A'+A)}{\cos\frac{1}{2}(A'-A)}\, tg(\varphi-\varphi').$$

ces éq. deviennent

$$\Delta'\sin Z' = \Delta\sin Z - \rho\cos(\varphi-\varphi')\, tg\, r$$

$$\Delta'\cos Z' = \Delta\cos Z - \rho\cos(\varphi-\varphi')$$

ou bien :

$$\Delta'\sin(Z'-Z) = \frac{\rho\cos(\varphi-\varphi')}{\cos r}\sin(Z-r)$$

$$\Delta'\cos(Z'-Z) = \Delta - \frac{\rho\cos(\varphi-\varphi')}{\cos r}\cos(Z-r).$$

D'où l'on tire d'abord

$$(6)\qquad tg(Z'-Z) = \frac{\frac{\rho\cos(\varphi-\varphi')}{\cos r}\sin(Z-r)}{\Delta - \frac{\rho\cos(\varphi-\varphi')}{\cos r}\cos(Z-r)}$$

ensuite, en employant le même procédé que tout à l'heure,

$$(7).\qquad \Delta' = \Delta - \frac{\rho\cos(\varphi-\varphi')\cos[\frac{1}{2}(Z'+Z)-r]}{\cos r\cos\frac{1}{2}(Z'-Z)}.$$

~~Posons maintenant~~ :

$\cancel{\varpi = \frac{a}{\Delta}}$

Considérons la parallaxe horizontale équatoriale ϖ de l'astre c.à.d. sa parallaxe $Z'-Z$ en distance zénithale lorsqu'il est vu à l'horizon d'un lieu situé sur l'équateur terrestre ; on aura dans ce cas :

$$\sin\varpi = \frac{a}{\Delta}$$

et si l'on prend a c'à.d le rayon équatorial de la Terre pour unité de longueur, on aura

$$\frac{1}{\Delta} = \sin\varpi\ ;$$

Si de plus, nous posons

$$m = \frac{\rho\sin\varpi\sin(\varphi-\varphi')}{\sin Z}$$

$$n = \frac{\rho\sin\varpi\cos(\varphi-\varphi')}{\cos r}$$

les formules précédentes deviendront.

$$tg(A'-A) = \frac{m\sin A}{1-m\cos A}$$

$$tg(Z'-Z) = \frac{n\sin(Z-r)}{1-n\cos(Z-r)}$$

et

[illegible]

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = 1 - 2n\cos(Z-t) + n^2.$$

Discutons ces formules :

On a d'après les ég. (6) de la 1ère partie :

$$\rho \sin(\varphi-\varphi') = \tfrac{1}{2} e^2 \sin 2\varphi \sec \psi.$$

$$= \tfrac{1}{2} e^2 \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}.$$

Cette quantité est plus petite que

$$\tfrac{1}{2} e^2 \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$$

qui a pour logarithme : $\bar{3},5259$. Donc on a :

$$m < \frac{(\bar{3},5259)\sin\varpi}{\sin Z}$$

Or la plus forte parallaxe est celle de la Lune dont la parallaxe horizontale ne dépasse pourtant pas $1°,5$. Or log sin $1°,5 = \bar{2},4179$. Donc :

$$m < \frac{\bar{5},9438}{\sin Z}.$$

Donc pour toutes les valeurs de Z supérieures à

arc log sin $\bar{5},9438 = 18''$ environ

le nombre m est toujours moindre que 1. Il est d'ailleurs évident que, quand la dist. zénithale d'un astre devient très-petite, son azimut, et sa parallaxe de hauteur sont deux quantités très-mal déterminées et l'on doit éviter les observations qui tombent dans ce cas. Bref, ~~on~~ la quantité m sera toujours une quantité très-petite dans la pratique.

Quant au nombre n, il est toujours très-petit.

On peut employer, si l'on veut, les développements

$$\begin{cases} A'-A = \dfrac{m}{\sin 1''}\sin A + \dfrac{m^2}{2\sin 1''}\sin 2A + \dfrac{m^3}{3\sin 1''}\sin 3A + \cdots \\ Z'-Z = \dfrac{n}{\sin 1''}\sin(Z-t) + \dfrac{n^2}{2\sin 1''}\sin 2(Z-t) + \dfrac{n^3}{3\sin 1''}\sin 3(Z-t) + \cdots \\ \log\Delta' - \log\Delta = -Mn\cos(Z-t) - \dfrac{Mn^2}{2}\cos 2(Z-t) - \dfrac{Mn^3}{3}\cos 3(Z-t) - \cdots \end{cases}$$

Et dans le cas où $\sin Z$ n'est pas trop petit, on peut écrire sans erreur sensible :

$$r = (\varphi-\varphi')\cos A$$

Si l'on veut employer les formules rigoureuses, on posera

$$\sin\theta = m\cos A = \frac{\rho\sin\varpi\sin(\varphi-\varphi')\cos A}{\sin Z}$$

$$\sin\theta' = n\cos(Z-\gamma) = \frac{\rho\sin\varpi\cos(\varphi-\varphi')\cos(Z-\gamma)}{\cos\gamma}$$

et l'on aura :

$$tg(A'-A) = \frac{\sin\theta\, tg A}{1-\sin\theta} = \frac{tg\,\theta\, tg A}{\frac{2\cos^2(45^\circ+\frac{1}{2}\theta)}{\sin(90^\circ+\frac{1}{2}\theta)}} = tg\,\theta$$

ou

$$tg(A'-A) = tg\,\theta\, tg(45^\circ+\tfrac{1}{2}\theta)\, tg A$$

de même $\quad tg(Z'-Z) = tg\,\theta'\, tg(45^\circ+\tfrac{1}{2}\theta')\, tg(Z-\gamma).$

On peut obtenir une autre expression du rapport $\frac{\Delta'}{\Delta}$. En effet, en éliminant $\rho\cos(\varphi-\varphi')$ entre les équations qui donnent $\Delta'\sin Z'$ et $\Delta'\cos Z'$, il vient :

$$(8). \qquad \Delta'\sin(Z'-\gamma) = \Delta\sin(Z-\gamma)$$

formule dont nous nous servirons plus loin

Remarque I. — Après celle de la Lune, la plus forte parallaxe que nous ayons à considérer est celle de Vénus à sa conjonction inférieure c'à d lorsqu'elle se trouve entre le Soleil et la Terre. Or, même dans ce cas on a toujours

$$\varpi < 36''$$

On peut par conséquent employer les formules suivantes, pour tous les astres autres que la Lune :

$$\gamma = (\varphi-\varphi')\cos A :$$

$$A'-A = \cancel{p}\,\varpi\rho\sin(\varphi-\varphi')\sin A\,\text{cosec}\,Z$$

$$Z'-Z = \varpi\rho\sin(Z-\gamma)$$

Remarque II. — Lorsque l'astre se trouve dans le méridien, on a $\sin A = 0$ et par conséquent d'après l'éq. (4)

$$tg(A'-A) = 0 \qquad A'-A = 0$$

quel que soit Z, c'à d. que la parallaxe en azimut est nulle quand l'astre se trouve dans le méridien.

Dans ce cas l'éq. (5) devient

$$tg\,\gamma = tg(\varphi-\varphi') \quad \text{ou } \gamma = \varphi-\varphi'.$$

et l'éq. (6) devient

$$tg(Z'-Z) = \frac{\rho\sin\varpi\sin[Z-(\varphi-\varphi')]}{1-\rho\sin\varpi\cos[Z-(\varphi-\varphi')]}$$

et le développement de $Z'-Z$

$$Z'-Z = \frac{\rho\sin\varpi}{\sin 1''}\sin[Z-(\varphi-\varphi')] + \frac{\rho^2\sin^2\varpi}{2\sin 1''}\sin 2[Z-(\varphi-\varphi')] + \dots$$

Calculons l'influence du 2e terme; le coefficient de ce terme est :

*. Écrivons les éq. précédentes sous la forme :

$$\Delta \sin Z \cos A = \Delta' \sin Z' \cos A' + \rho \sin(\varphi - \varphi')$$

$$\Delta \sin Z \sin A = \Delta' \sin Z' \sin A'$$

$$\Delta \cos Z = \Delta' \cos Z' + \rho \cos(\varphi - \varphi').$$

en posant :

$$q = \frac{\Delta'}{\Delta}.$$

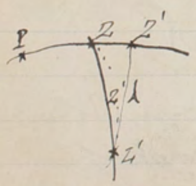
$$\sin Z \cos A = q \sin Z' \cos A' + \rho \sin \varpi \sin(\varphi - \varphi')$$

$$\sin Z \sin A = q \sin Z' \sin A'$$

$$\cos Z = q \cos Z' + \rho \sin \varpi \cos(\varphi - \varphi')$$

d'où en ajoutant les carrés :

$$1 = q^2 + 2q\rho \sin \varpi \left[\sin Z' \cos A' \sin(\varphi - \varphi') + \cos Z' \cos(\varphi - \varphi')\right] + \rho^2 \sin^2 \varpi.$$



Soit Z' le lieu apparent de la C. $\measuredangle ZZ' = \varphi - \varphi'$

$Z'Z' = \lambda$. Nous aurons :

$$q^2 + 2q\rho \sin \varpi \cos \lambda - (1 - \rho^2 \sin^2 \varpi) = 0.$$

$$\frac{\rho^3 \sin^3 \varpi}{3 \sin 1''} \sin[3Z - 3(\varphi - \varphi')].$$

Le maximum du coefficient est, pour la Lune :

$$\frac{\sin^2 61'}{3 \sin 1''} = (\bar{1},5844) = 0'',38.$$

Ce terme peut donc ne pas être négligeable.

Quant au 4e terme :

$$\frac{\rho^4 \sin^4 \varpi}{4 \sin 1''} \sin[4Z - 4(\varphi - \varphi')]$$

son coefficient est toujours moindre que

$$\frac{\sin^4 61'}{4 \sin 1''} = (\bar{3},7085)$$

et peut toujours être négligé. ~~ou~~

On aura donc pour la Lune :

$$Z' - Z = \frac{\rho \sin \varpi}{\sin 1''} \sin[Z - (\varphi - \varphi')] + \frac{\rho^2 \sin^2 \varpi}{2 \sin 1''} \sin 2[Z - (\varphi - \varphi')] + \frac{\rho^3 \sin^3 \varpi}{3 \sin 1''} \sin 3[Z - (\varphi - \varphi')].$$

Pour le Soleil et les planètes, on peut prendre :

$$Z' - Z = \frac{\rho \sin \varpi}{\sin 1''} \sin[Z - (\varphi - \varphi')]$$

et même

$$Z' - Z = \rho \varpi \sin Z.$$

La quantité $\rho\varpi$ s'appelle la <u>parallaxe réduite</u> et la quantité $\varpi - \rho\varpi = \varpi(1 - \rho)$ la <u>réduction</u> de la parallaxe au lieu d'observation.

Problème II. — Étant donnés l'azimuth et la distance zénithale ~~géocentriques~~ apparentes d'un astre trouver son azimut et sa distance zénithale géocentriques.

Reprenons les équations :

$$\Delta' \sin Z' = \Delta \sin Z - \rho \cos(\varphi - \varphi') \operatorname{tg} \gamma \qquad -\cos Z'$$

$$\Delta' \cos Z' = \Delta \cos Z - \rho \cos(\varphi - \varphi'). \qquad \sin Z'$$

et éliminons Δ'. Nous aurons :

$$\Delta \sin(Z' - Z) = \rho \cos(\varphi - \varphi') \sin(Z' - \gamma) . \sec \gamma.$$

ou bien :

$$\sin(Z' - Z) = \rho \sin \varpi \cos(\varphi - \varphi') \sec \gamma \sin(Z' - \gamma).$$

On constate que le facteur $\cos(\varphi - \varphi') \sec \gamma$ qui diffère de l'unité d'une quantité du 2e ordre en $\varphi - \varphi'$ est tout à fait insensible. On aura donc :

$$\sin(Z' - Z) = \rho \sin \varpi \sin(Z' - \gamma)$$

dans laquelle γ a sensiblement la valeur

$$\gamma = (\varphi - \varphi') \cos A'.$$

Maintenant, prenons les équations :

En ne prenant que la racine positive ; il vient :

$$g = -\rho\sin\varpi\cos\lambda + \sqrt{\rho^2\sin^2\varpi\cos^2\lambda + 1 - \rho^2\sin^2\varpi}$$

ou en posant :

$$\sin\lambda' = \rho\sin\varpi\sin\lambda$$

$$g = -\rho\sin\varpi\cos\lambda + \cos\lambda'$$

ou en remplaçant $\rho\sin\varpi$ par $\frac{\sin\lambda'}{\sin\lambda}$:

$$g = \cos\lambda' - \frac{\cos\lambda\sin\lambda'}{\sin\lambda} = \frac{\sin(\lambda-\lambda')}{\sin\lambda}.$$

Maintenant on a :

$$\sin Z_1\sin(A'-A) = \rho\sin\varpi\sin(\varphi-\varphi')\sin A'$$

$$\sin Z_1\cos(A'-A) = g\sin Z_1' + \rho\sin\varpi\sin(\varphi-\varphi')\cos A'$$

$$\cos Z_1 = g\cos Z_1' + \rho\sin\varpi\cos(\varphi-\varphi').$$

Mais dans le triangle $ZZ_1'Z_1$: on a : (en posant $J = ZZ_1'Z_1$)

$$\sin(\varphi-\varphi')\sin A' = \sin\lambda\sin J$$

$$\sin(\varphi-\varphi')\cos A' = \cos\lambda\sin Z_1' \mp \sin\lambda\cos Z_1'\cos J$$

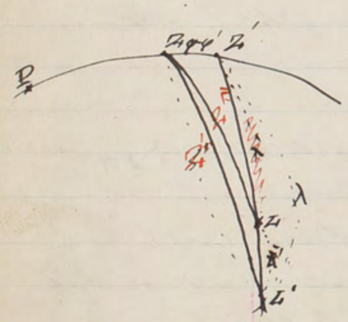
$$\cos(\varphi-\varphi') = \cos\lambda\cos Z_1' + \sin\lambda\sin Z_1'\cos J.$$

Donc en portant ces val. & remplaçant g par $-\rho\sin\varpi\cos\lambda + \cos\lambda'$:

$$\sin Z_1\sin(A'-A) = \rho\sin\varpi\sin\lambda\sin J = \sin\lambda'\sin J$$

$$\sin Z_1\cos(A'-A) = \cos\lambda'\sin Z_1' \mp \rho\sin\varpi\sin\lambda\cos Z_1'\cos J = \cos\lambda'\sin Z_1' - \sin\lambda'\cos Z_1'\cos J$$

$$\cos Z_1 = \cos\lambda'\cos Z_1' + \rho\sin\varpi\sin\lambda\sin Z_1'\cos J = \cos\lambda'\cos Z_1' + \sin\lambda'\sin Z_1'\cos J.$$



Si l'on porte sur Z_1Z_1' un arc $Z_1'Z_1 = \lambda'$, les formules précédentes montrent que Z_1 est le lieu géocentrique de la l. La question revient donc à la résolution successive des deux triangles $ZZ_1'Z_1$ & $ZZ_1'Z_1$.

$$\Delta'\sin Z'\cos A' = \Delta\sin Z\cos A - \rho\sin(\varphi-\varphi') \qquad \sin A'$$

$$\Delta'\sin Z'\sin A' = \Delta\sin Z\sin A. \qquad -\cos A'$$

En éliminant $\Delta'\sin Z'$, il vient :

$$\Delta\sin Z\cos A = \rho\sin(\varphi-\varphi').$$

ou bien

$$\sin(A'-A) = \frac{\rho\sin\varpi\sin(\varphi-\varphi')\sin A'}{\sin Z}$$

qui détermine $A'-A$ quand on a calculé Z.

Lorsque l'astre est dans le méridien, on a rigoureusement :

$$r = \varphi - \varphi' \qquad A'-A = 0$$

$$\sin(Z'-Z) = \rho\sin\varpi\sin(Z'-(\varphi-\varphi')).$$

formule qui est très-simple tout en étant rigoureuse.

En développant cette dernière formule et en négligeant le terme du 4e ordre qui est insensible, on aura :

$$Z'-Z = \frac{\rho\sin\varpi}{\sin 1''}\sin[Z'-(\varphi-\varphi')] - \frac{\rho^3\sin^3\varpi}{6\sin 1''}\sin^3[Z'-(\varphi-\varphi')]$$

ou en remplaçant, si l'on veut $\sin^3[Z'-(\varphi-\varphi')]$ par sa valeur :

$$\frac{3}{4}\sin[Z'-(\varphi-\varphi')] - \frac{1}{4}\sin[3Z'-3(\varphi-\varphi')]$$

il vient :

$$Z'-Z = \left\{\frac{\rho\sin\varpi}{\sin 1''} - \frac{\rho^3\sin^3\varpi}{8\sin 1''}\right\}\sin[Z'-(\varphi-\varphi')] - \frac{\rho^3\sin^3\varpi}{24\sin 1''}\sin[3Z'-3(\varphi-\varphi')]$$

formule commode quand on veut réduire en table les valeurs de $Z'-Z$ pour les différentes valeurs de ϖ, φ et Z'.

Problème III.— Étant donnés l'ascension droite & la déclinaison géocentriques d'un astre, trouver son ascension droite & sa déclinaison telles qu'elles résulteraient de l'observation à la surface de la Terre.

Si nous appelons α, δ les coord. géocentriques données, α', δ' les coord. apparentes demandées ; et Θ le temps sidéral local à l'instant considéré, les coord. rectang. équatoriales apparentes seront :

$$\Delta'\cos\delta'\cos\alpha' \qquad \Delta'\cos\delta'\sin\alpha' \qquad \Delta'\sin\delta'.$$

et si nous prenons trois axes parallèles aux premiers axes et passant par le centre de la Terre, les coord. rect. de l'astre par rapport à ce système d'axes seront :

$$\Delta\cos\delta\cos\alpha \qquad \Delta\cos\delta\sin\alpha \qquad \Delta\sin\delta$$

et les coord. du lieu d'observation seront, comme nous l'avons vu dans le Chapitre I :

$$\rho\cos\varphi'\cos\Theta \qquad \rho\,\overset{\cos}{\cancel{\sin}}\varphi'\sin\Theta \qquad \rho\sin\varphi'$$

Nous aurons donc :

$$\Delta'\cos\delta'\cos\alpha' = \Delta\cos\delta\cos\alpha - \rho\cos\varphi'\cos\Theta \qquad -\sin\alpha \quad +\cos\alpha$$

$$\Delta'\cos\delta'\sin\alpha' = \Delta\cos\delta\sin\alpha - \rho\cos\varphi'\sin\Theta \qquad \cos\alpha \quad +\sin\alpha$$

$$\Delta'\sin\delta' = \Delta\sin\delta - \rho\sin\varphi'$$

ou bien, en transformant les 2 premières ég.

$$\Delta'\cos\delta'\sin(\alpha'-\alpha) = \rho\cos\varphi'\sin(\alpha-\Theta) \qquad \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)$$

$$\Delta'\cos\delta'\cos(\alpha'-\alpha) = \Delta\cos\delta - \rho\cos\varphi'\cos(\alpha-\Theta). \qquad \cos\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha).$$

d'où l'on tire d'abord :

$$\operatorname{tg}(\alpha'-\alpha) = \frac{\rho\cos\varphi'\sin(\alpha-\Theta)}{\Delta\cos\delta - \rho\cos\varphi'\cos(\alpha-\Theta)}.$$

Maintenant de ces mêmes ég., on tire :

$$\Delta'\cos\delta' = \Delta\cos\delta - \rho\cos\varphi'\,\frac{\cos[\Theta - \frac{1}{2}(\alpha'+\alpha)]}{\cos\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)}$$

Posons :

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\varphi'\cos\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)}{\cos[\Theta-\frac{1}{2}(\alpha'+\alpha)]}$$

On aura alors :

$$\Delta'\cos\delta' = \Delta\cos\delta - \rho\sin\varphi'\cot\gamma \qquad -\sin\delta \quad +\cos\delta$$

$$\Delta'\sin\delta' = \Delta\sin\delta - \rho\sin\varphi'. \qquad +\cos\delta \quad +\sin\delta.$$

ou bien

$$\Delta'\sin(\delta'-\delta) = \rho\sin\varphi'\,\frac{\sin(\delta-\gamma)}{\sin\gamma}.$$

$$\Delta'\cos(\delta'-\delta) = \Delta - \rho\sin\varphi'\,\frac{\cos(\delta-\gamma)}{\sin\gamma}.$$

d'où

$$\operatorname{tg}(\delta'-\delta) = \frac{\rho\sin\varphi'\sin(\delta-\gamma)}{\Delta\sin\gamma - \rho\sin\varphi'\cos(\delta-\gamma)}.$$

Il ne nous reste plus qu'à transformer ces différentes formules. Ici, au lieu de considérer la parallaxe horizontale équatoriale de l'astre, il vaut mieux considérer sa distance au centre de la Terre rapportée à la distance moyenne des centres du soleil et de la Terre (c'est ~~la dista~~ l'unité de longueur habituelle des Astronomes). Si nous désignons par ϖ_0 la parallaxe horizontale équatoriale du Soleil et par a le rayon équatorial de la Terre rapporté à la même unité que Δ, nous aurons:

$$\frac{a}{\Delta_1} = \sin \varpi_0 \quad \text{ou} \quad \frac{a}{\Delta_1} = \varpi_0 \sin 1''$$

car ϖ_0 est un angle $< 9''$.

En désignant maintenant par ρ, non pas le rayon vecteur du lieu d'observation rapporté à l'unité astronomique, mais ce rayon rapporté au rayon équatorial de la Terre, il faudra remplacer dans les éq. précédentes.

$$\frac{\rho}{\Delta} \quad \text{ou} \quad \frac{\rho}{a} \cdot \frac{a}{\Delta} \quad \text{par} \quad \rho \cdot \frac{a}{\Delta} \quad \text{ou} \quad \rho \cdot \frac{\varpi_0 \sin 1''}{\Delta}$$

En posant donc:

$$m = \frac{\varpi_0 \sin 1'' \rho \cos \varphi'}{\Delta \cos \delta} \qquad n = \frac{\varpi_0 \sin 1'' \rho \sin \varphi'}{\Delta \, \cancel{\cos} \sin \gamma}.$$

nous aurons:

$$tg\gamma = \frac{tg\varphi' \cos \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)}{\cos\left[\Theta - \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha)\right]} = \frac{tg\varphi' \cos\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)}{\cos\left[t + \frac{1}{2}(\alpha - \alpha')\right]}$$

$$tg(\alpha - \alpha') = \frac{m \sin t}{1 - m \cos t}$$

$$tg(\delta' - \delta) = \frac{n \sin(\delta - \gamma)}{1 - n \cos(\delta - \gamma)}.$$

t étant l'angle horaire de l'astre c'à'd

$$t = \Theta - \alpha.$$

Posons:

$$\sin\theta = m \cos t = \frac{\varpi_0 \sin 1'' \rho \cos\varphi'}{\Delta \cos \delta} \cos t$$

et

$$\sin\theta' = n \cos(\gamma - \delta) = \frac{\varpi_0 \sin 1'' \rho \sin\varphi'}{\Delta \sin \gamma} \cos(\gamma - \delta)$$

nous aurons alors:

$$tg(\alpha - \alpha') = tg\theta \, tg\left(45^\circ + \frac{\theta}{2}\right) tg\, t$$

$$tg(\delta - \delta') = tg\theta' \, tg\left(45^\circ + \frac{\theta'}{2}\right) tg(\gamma - \delta).$$

Les formules précédentes pourront aussi se développer dans les séries suivantes.

$$\alpha - \alpha' = \frac{m}{\sin 1''} \sin t + \frac{m^2}{2 \sin 1''} \sin 2t + \frac{m^3}{3 \sin 1''} \sin 3t + \cdots$$

$$\delta - \delta' = \frac{n}{\sin 1''} \sin(\gamma - \delta) + \frac{n^2}{2 \sin 1''} \sin 2(\gamma - \delta) + \frac{n^3}{3 \sin 1''} \sin 3(\gamma - \delta) + \cdots$$

et pour les astres autres que la Lune, il suffira de prendre:

$$\alpha - \alpha' = \frac{m}{\sin 1''} \sin t \qquad \delta - \delta' = \frac{n}{\sin 1''} \sin(\gamma - \delta) \quad \text{avec} \quad tg\gamma = \frac{tg\varphi'}{\cos t}.$$

c. à d.

$$\alpha' = \alpha - \frac{\varpi_0 \rho \cos\varphi'}{\Delta \cos\delta} \sin t$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\cos t}$$

$$\delta' = \delta + \frac{\varpi_0 \rho \sin\varphi'}{\Delta \sin\gamma} \sin(\delta - \gamma).$$

Les formules rigoureuses montrent que α est $> \alpha'$ si l'astre se trouve à l'Ouest du méridien et $\alpha < \alpha'$ si s'il est à l'Est. Lorsque $t = 0$, c. à d. quand l'astre passe au méridien, on a.

$$\alpha - \alpha' = 0. \qquad \gamma = \varphi'$$

et

$$\operatorname{tg}(\delta' - \delta) = \frac{n \sin(\delta - \varphi')}{1 - n \cos(\delta - \varphi')}$$

où

$$n = \frac{\rho \varpi_0 \sin 1''}{\Delta}$$

Il est facile de voir que l'expression numérique de $\delta' - \delta$ est égale à celle de $z' - z$ du problème I, ce qui doit être puisque l'on a dans le méridien

$$z = \pm(\varphi - \delta).$$

Problème IV. – Étant données l'ascension droite et la déclinaison apparentes d'un astre, trouver la parallaxe de chacune de ces 2 coordonnées.

Reprenons les équations.

$$\Delta' \cos\delta' \cos\alpha' = \Delta \cos\delta \cos\alpha - \rho \cos\varphi' \cos\Theta \qquad -\sin\alpha'$$

$$\Delta' \cos\delta' \sin\alpha' = \Delta \cos\delta \sin\alpha - \rho \cos\varphi' \sin\Theta \qquad +\cos\alpha'$$

Nous aurons en éliminant $\Delta' \cos\delta'$

$$0 = \Delta \cos\delta \sin(\alpha - \alpha') - \rho \cos\varphi' \sin(\Theta - \alpha')$$

ou en appelant t' l'angle horaire apparent.

$$\sin(\alpha - \alpha') = \frac{\varpi_0 \sin 1'' \rho \cos\varphi'}{\Delta \cos\delta} \sin t'.$$

De même des deux éq.

$$\Delta' \cos\delta' = \Delta \cos\delta - \rho \sin\varphi' \cot\gamma \qquad \sin\gamma$$

$$\Delta' \sin\delta' = \Delta \sin\delta - \rho \sin\varphi' \qquad -\cos\gamma.$$

on déduit

$$0 = \Delta \sin(\delta - \delta') - \rho \sin\varphi' \frac{\sin(\gamma - \delta')}{\sin\gamma}.$$

d'où

$$\sin(\delta - \delta') = \frac{\varpi_0 \sin 1'' \rho \sin\varphi'}{\Delta \sin\gamma} \sin(\gamma - \delta').$$

Voici la manière de calculer $\alpha - \alpha'$ et $\delta - \delta'$ par ces formules. On prendra d'abord δ' au lieu de δ dans le calcul de $\alpha - \alpha'$ ce qui donnera une valeur approchée de cette quantité; avec cette valeur, on calculera γ et $\delta-\delta'$ et l'on recommencera le calcul de $\alpha-\alpha'$.

Pour les astres autres que la Lune, on aura

$$\alpha-\alpha' = \frac{\varpi_0 \cancel{\sin 1''} \rho \cos\varphi'}{\Delta \cos\delta} \sin t'$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\varphi' \sec t'$$

$$\delta-\delta' = \frac{\varpi_0 \rho \overset{\sin\varphi'}{\cancel{\cos\varphi'}}}{\Delta \sin\gamma} \sin(\gamma-\delta')$$

Quand l'astre passe au méridien, on aura

$$\sin(\delta-\delta') = \frac{\varpi_0 \sin 1'' \rho}{\Delta} \sin(\varphi'-\delta')$$

ou

$$\delta-\delta' = \frac{\varpi_0 \rho}{\Delta} \sin(\varphi'-\delta').$$

Remarque. — Pour la Lune, on donne non pas Δ mais la parallaxe horizontale équatoriale, on emploiera alors $\sin\varpi$ au lieu de $\frac{\varpi_0 \sin 1''}{\Delta}$.

Influence de la parallaxe sur le diamètre apparent.

Si l'on appelle r le rayon linéaire de l'astre, R, R' les diamètres apparents vus du centre et de la surface de la Terre, on aura:

$$\sin R = \frac{r}{\Delta} \qquad \sin R' = \frac{r}{\Delta'}$$

d'où

$$\frac{\sin R'}{\sin R} = \frac{\Delta}{\Delta'}$$

Or, on voit facilement qu'on a:

$$\Delta' \sin(\gamma-\delta') = \Delta \sin(\gamma-\delta)$$

Donc:

$$\frac{\sin R'}{\sin R} = \frac{\sin(\gamma-\delta')}{\sin(\gamma-\delta)}.$$

ce qu'on peut écrire:

$$\frac{\frac{\sin R'}{R' \sin 1''}}{\frac{\sin R}{R \sin 1''}} \cdot \frac{R'}{R} = \frac{\sin(\gamma-\delta')}{\sin(\gamma-\delta)}$$

Or R et R' étant de petits angles & voisins l'un de l'autre, on a sensiblement:

$$\frac{\sin R'}{R' \sin 1''} = \frac{\sin R}{R \sin 1''}.$$

Donc:

$$\frac{R'}{R} = \frac{\sin(\gamma-\delta')}{\sin(\gamma-\delta)}$$

On a d'après la formule de Taylor:

$$\sin(\gamma-\delta') = \sin[\gamma-\delta+(\delta-\delta')] = \sin(\gamma-\delta) + \frac{(\delta-\delta')\sin 1''}{1}\cos(\gamma-\delta) - \frac{(\delta-\delta')^2 \sin^2 1''}{1.2}\sin(\gamma-\delta) + \ldots$$

Donc:

$$R' - R = R\left\{1 + (\delta-\delta')\sin 1'' \cot(\gamma-\delta) - \frac{(\delta-\delta')^2 \sin^2 1''}{1.2} - \ldots\right\}.$$

On constate que $R'-R$ est insensible pour le Soleil & les planètes.

V. Théorie de la réfraction atmosphérique

A cause de la réfraction produite par l'atmosphère terrestre, la direction du rayon lumineux qui nous vient d'un astre diffère de la direction qu'il aurait si cette atmosphère n'existait pas, d'un petit angle qu'on appelle réfraction astronomique ou simplement réfraction. Nous allons exposer une théorie succincte de cette question qui est de la plus haute importance en astronomie pratique.

I. Lois et hypothèse. – On démontre en physique les lois suivantes relatives à la réfraction de la lumière.

1º Lorsqu'un rayon lumineux passe d'un milieu dans un autre, le rayon incident et le rayon réfracté se trouvent dans le même plan que la normale menée à la surface de séparation des deux milieux et par le point d'incidence.

2º Les sinus des angles que font ~~p~~ le rayon incident et le rayon réfracté avec la normale de la surface de réfraction sont dans un même rapport quelle que soit l'incidence.

En appelant i l'angle d'incidence et r l'angle de réfraction, le rapport $\frac{\sin i}{\sin r} = \mu$ qui ne dépend que de la nature des deux milieux s'appelle l'indice de réfraction du second milieu par rapport au premier.

Si le premier milieu est le vide, le rapport est appelé l'indice absolu du second milieu

3º Si l'indice du premier milieu A par rapport à un troisième milieu est égal à μ et que l'indice du second milieu B par rapport au même milieu est égal à μ', l'indice du second milieu B par rapport au premier A est égal à $\frac{\mu'}{\mu}$.

Entre autres, l'indice du milieu B par rapport au milieu A est égal au rapport de l'indice absolu du milieu ~~A~~ B à celui du milieu ~~B~~ A.

4° Pour un même milieu ~~gazeux~~, & si l'on appelle ρ sa densité à une certaine condition, et μ son indice d'absolu, le rapport $\frac{\mu^2-1}{\rho}$ est un nombre constant qui ne dépend que de la nature du gaz. On appelle ce nombre ~~ici~~ le pouvoir réfringent de ce corps.

Si donc nous appelons k le pouvoir réfringent d'un gaz, on aura

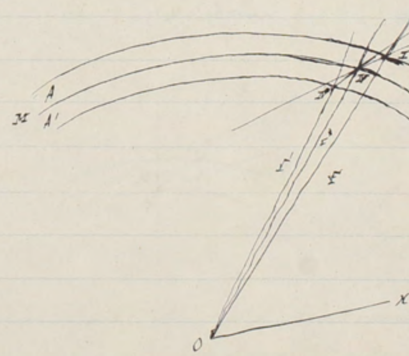
$$\frac{\mu^2-1}{\rho} = k \qquad \text{ou} \qquad \mu = \sqrt{1+k\rho}.$$

Nous admettrons ces quatre lois dont la démonstration est du domaine de la physique.

Dans notre théorie, nous supposerons 1° que la surface de la Terre est une sphère parfaite, 2° que son atmosphère est composée d'un nombre infini de couches sphériques infiniment minces, concentriques à la Terre et de constitution et de densité uniformes.

Cette première hypothèse ne conduit à aucune erreur appréciable. Mais la seconde supposant que l'air atmosphérique est en ~~e~~ équilibre hydrostatique, notre théorie ne s'appliquera qu'au temps de calme.

II. Équation différentielle de la réfraction. — Soient A et A' deux couches contiguës de l'atmosphère, de



densités ρ, ρ' et d'indices absolus μ, μ'; soit un rayon lumineux INN' qui traverse les deux couches séparées par la surface sphérique ΣΣ. Menons les normales ON, ON' aux points N, N' où ils quittent respectivement le milieu ~~A~~ A et le milieu A'. Les normales seront en même temps des rayons vecteurs des points N et N' par rapport au centre de la terre. Nommons

r et r' les longueurs de ces rayons vecteurs. Enfin appelons i, i' les angles d'incidence aux points N et N' et f l'angle de réfraction au point N; ~~Nous verrons d'exprimer les lois de la réfraction~~ c'à d. posons:

$$i = 180^\circ - INO \qquad i' = 180^\circ - NN'O \qquad f = ONN'$$

Nous aurons d'après les lois de la réfraction:

$$\frac{\sin i}{\sin f} = \frac{\mu'}{\mu}.$$

Mais dans le triangle NON', on a:

$$\frac{\sin f}{\sin i'} = \frac{r'}{r}$$

Nous aurons donc en multipliant membre à membre:

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{r'\mu'}{r\mu}$$

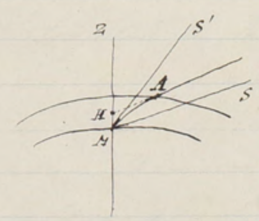
ou bien:

$$(1) \qquad r\mu \sin i = r'\mu' \sin i'.$$

Cette équation exprime que la quantité $r\mu \sin i$ relative à une certaine couche reste invariable quand on passe de cette couche à la couche immédiatement inférieure, par suite cette quantité est la même pour toutes les couches. À la surface du ~~Soleil~~ sol, cette quantité sera égale à $a\mu_0 \sin \zeta$, en appelant a le rayon de la Terre, μ_0 l'indice absolu de l'air qui touche au sol, et ζ la distance zénitale apparente de l'astre observé. On aura donc.

$$(2) \qquad r\mu \sin i = a\mu_0 \sin \zeta.$$

~~Appelons~~



Maintenant, soit AH la direction primitive du rayon envoyé de l'astre considéré à la Terre et $S'H$ la direction qu'il a lorsqu'il est recueilli par l'observateur placé en H. Menons HS parallèle à HA; si nous négligeons la distance des deux droites AH et SH par rapport à la distance de l'astre à la Terre, nous pourrons admettre que, sans la réfraction, on verrait l'astre ~~dans~~ suivant le rayon visuel ~~de~~ HS. Donc, la réfraction

sera égal à l'angle SZS' ou à la déviation totale qu'a éprouvé le rayon lumineux AH en traversant toute l'atmosphère. Appelons θ cet angle c.à.d. posons
$$\theta = SZS'$$
alors en appelant Z la distance zénithale vraie, on aura
$$Z = \zeta + \theta.$$

Revenons maintenant aux couches élémentaires A et A'. Menons par le centre de la Terre une droite fixe quelconque x, et appelons ω l'angle que fait le rayon vecteur ON avec cet axe. Alors r et ω seront les deux coord. polaires du point N par rapport à Ox. La déviation élémentaire $d\theta$ que le rayon lumineux éprouve en passant du premier milieu A au second milieu A' sera égal à $i-f$ c.à.d.
$$d\theta = i - f.$$

Mais dans la figure on a:
$$f = i' - NON' = i' - d\omega$$
$d\omega$ étant la variation de ω quand on passe de N à N'. On a donc:
$$d\theta = i - i' + d\omega = -di + d\omega$$
di désignant la variation de l'angle i que fait la tangente en N à la courbe décrite par la lumière quand on passe du point N au point N'.

Or, l'angle i étant le supplément de l'angle que fait avec le rayon vecteur la direction de la tangente en N à la trajectoire de la lumière, on aura
$$\operatorname{tg} i = -\frac{r\,d\omega}{dr} \quad \text{ou} \quad d\omega = -\frac{dr \operatorname{tg} i}{r}.$$

Donc,
$$d\theta = -di - \frac{dr \operatorname{tg} i}{r} = -\frac{r \cos i\, di + dr \sin i}{r \cos i} = -\frac{d(r \sin i)}{r \cos i}$$
Or, d'après l'équation (1) on a
$$d(r \sin i) = a \sin \zeta . \mu_0 d\frac{1}{\mu} . = -\frac{a\mu_0}{\mu^2} \sin \zeta . d\mu.$$
par suite:

(3). $$d\theta = \frac{a\mu_0 \sin \zeta}{r \mu^2 \cos i} d\mu.$$

Remplaçons $\cos i$ par sa valeur:
$$\cos i = \frac{1}{\mu}\sqrt{\mu^2 - \mu_0^2 \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \zeta}$$

Nous aurons enfin :

(4). $$d\theta = \frac{a}{r} \cdot \frac{\mu_0}{\mu} \frac{\sin \zeta \, d\mu}{\sqrt{\mu^2 - \mu_0^2 \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \zeta}}$$

Ayons maintenant recours à la relation :

$$\mu = \sqrt{1 + k\rho}$$

où k désigne le pouvoir réfringent de l'air atmosphérique et ρ la densité de la couche A. On en tire :

$$d\mu = \frac{1}{2} \frac{k\,d\rho}{\sqrt{1 + k\rho}}$$

et il suit :

$$d\theta = \frac{\frac{1}{2} k \frac{a}{r} \sin \zeta \, d\rho \sqrt{1 + k\rho_0}}{1 + k\rho \sqrt{(1 + k\rho) - \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sin^2 \zeta (1 + k\rho_0)}}$$

où ρ_0 désigne la densité de la couche d'air qui touche au sol ; ou bien :

(5) $$d\theta = \frac{\frac{k\,d\rho}{1 + k\rho_0} \frac{a}{r} \sin \zeta}{2 \frac{1 + k\rho}{1 + k\rho_0} \sqrt{\frac{1 + k\rho}{1 + k\rho_0} - \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sin^2 \zeta}}$$

Telle est l'équation différentielle de la réfraction

III. Intégration de l'équation de la réfraction. — L'intégration de l'équation précédente ne peut s'effectuer que si l'on connait la loi qui lie entre elles les quantités r et ρ, les seules variables de la question. Voyons de quoi dépend cette loi.

Appelons p la pression de l'air dans la couche A ~~et~~. Si nous descendons d'une hauteur dr vers le centre de la Terre, la ~~diminution~~ augmentation de la pression sera égale au poids de la colonne d'air ayant dr pour hauteur. En appelant g la valeur de la pesanteur à la ~~hauteur~~ distance r du centre de la Terre, on aura :

$$dp = - g\rho\, dr.$$

Mais on a, d'après la loi de la gravitation,

$$\frac{g}{g_0} = \frac{a^2}{r^2}$$

g_0 étant la pesanteur à la surface du sol. Donc :

(6). $$dp = - \rho \frac{a^2}{r^2} g_0 \, dr.$$

Maintenant si nous appelons p_0 la pression de l'air à la surface du sol, t et t_0 les températures aux point N et à la surface du sol, on a, d'après une loi bien connue en physique, la relation :

(7) $$\frac{p}{\rho} \frac{1}{1 + mt} = \frac{p_0}{\rho_0} \frac{1}{1 + mt_0}$$

$$1+k\rho = 1+\frac{2\alpha}{1-2\alpha}\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1-2\alpha\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)}{1-2\alpha}$$

On a $\frac{a\,dr}{r^2} = ds$; donc l'éq. 6 peut s'écrire

$$dp = -a\rho g_0\, ds$$

ou en introduisant $l\,\rho_0 g_0 = p_0$

$$\frac{l}{a}\frac{dp}{p_0} = -\frac{\rho}{\rho_0}ds.$$

m étant un petit nombre qu'on appelle le coefficient de dilatation de l'air.

Telles sont tout ce que l'on connaît en physique relativement à la loi qui nous occupe. Comme on n'a que deux relations entre les trois quantités p, r et ρ, nous ne pouvons pas traiter la question avec toute la rigueur que l'on pourrait désirer. Heureusement, il se présente ici, comme dans beaucoup d'autres questions d'astronomie, certaines quantités, dont on peut négliger, dans de certaines limites, les puissances supérieures à certain ordre sans commettre d'erreur appréciable par les moyens les plus précis dont dispose l'astronomie pratique de nos jours. C'est ce que nous allons faire voir à présent.

Posons en premier lieu :

$$(8).\qquad \frac{a}{r} = 1-s \qquad \frac{k\rho_0}{1+k\rho_0} = 2\alpha$$

On aura :

$$\frac{1}{1+k\rho_0} = 1-2\alpha \qquad k\rho_0 = \frac{2\alpha}{1-2\alpha}$$

par suite

$$\frac{1+k\rho}{1+k\rho_0} = 1-2\alpha\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

L'équation (5) devient alors :

$$(9).\qquad d\theta = \frac{\alpha(1-s)\sin z\,\frac{d\rho}{\rho_0}}{\left[1-2\alpha\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right]\sqrt{\cos^2 z - 2\alpha\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right) + (2s-s^2)\sin^2 z}}$$

Il nous faut intégrer cette éq. depuis la limite supérieure de l'atmosphère jusqu'à la surface du sol, c'à d depuis $\rho = 0$ jusqu'à $\rho = \rho_0$.

L'expérience nous démontre qu'à la température de 0° centigrade et sous la pression de 0^m,760 on a à peu près

$$\mu_0 = 1{,}000293. \qquad$$ * (Annuaire du Bureau des longitudes pour 1885).

et comme on a :

$$k\rho_0 = \mu_0^2 - 1 \quad \text{et par suite :} \quad \frac{\mu_0^2-1}{2\mu_0^2} = \alpha$$

on en conclut que l'on a à peu près

$$\alpha = 0{,}000293.$$

α est donc une quantité très-petite.

Nous verrons de plus tout à l'heure que l'intégrale $\int s \frac{d\rho}{\rho_0}$ est une quantité ~~d'ordre de~~ d'une petitesse comparable à α; il en résulte que s est une quantité d'ordre de petitesse égal à celui de α.

Nous pourrons donc développer le second membre de l'équation (9) suivant les puissances de α et de s. Posons:

$$N = \alpha(1-s)\sin\zeta \frac{d\rho}{\rho_0} = \alpha \sin\zeta \frac{d\rho}{\rho_0} - \alpha s \sin\zeta \frac{d\rho}{\rho_0}$$

et $$P = \left[1 - 2\alpha\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right]^{-1}$$

$$Q = \left[\cos^2\zeta - 2\alpha\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right) + (2s - s^2)\sin^2\zeta\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Nous aurons en développant.

$$P = 1 + 2\alpha\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right) + 4\alpha^2\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 + 8\alpha^3\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)^3 + \cdots$$

$Q =$

$$N = \alpha(1-s)\,\mathrm{tg}\,\zeta \frac{d\rho}{\rho_0} = \alpha\,\mathrm{tg}\,\zeta \frac{d\rho}{\rho_0} - \alpha s\,\mathrm{tg}\,\zeta \frac{d\rho}{\rho_0}$$

$$P = \left[1 - 2\alpha\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right]^{-1} = 1 + 2\alpha\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right) + 4\alpha^2\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 + \cdots$$

$$Q = \left[1 - 2\alpha\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)\frac{1}{\cos^2\zeta} + (2s - s^2)\,\mathrm{tg}^2\zeta\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Nous aurons:

$$d\theta = N.P.Q.$$

Or on a en développant:

$$Q = 1 + \alpha\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)\frac{1}{\cos^2\zeta} - s\,\mathrm{tg}^2\zeta + \frac{s^2}{2}\mathrm{tg}^2\zeta + \frac{3}{2}\Big[\alpha^2\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2\frac{1}{\cos^4\zeta} + \left(s - \frac{s^2}{2}\right)^2\mathrm{tg}^4\zeta$$
$$- 2\alpha\left(s - \frac{s^2}{2}\right)\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)\mathrm{tg}^2\zeta\frac{1}{\cos^2\zeta}\Big] + \cdots$$

ou bien:

$$Q = 1 + \alpha\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)(1+\mathrm{tg}^2\zeta) - s\,\mathrm{tg}^2\zeta + \frac{3}{2}\alpha^2\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2(1+\mathrm{tg}^2\zeta)^2 - 3\alpha s\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)(1+\mathrm{tg}^2\zeta)\mathrm{tg}^2\zeta$$
$$+ \frac{1}{2}s^2(1+3\,\mathrm{tg}^2\zeta)\,\mathrm{tg}^2\zeta + \cdots$$

On a donc:

$$PQ = 1 + \alpha\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)(3+\mathrm{tg}^2\zeta) - s\,\mathrm{tg}^2\zeta + \frac{1}{2}\alpha^2(15 + 10\,\mathrm{tg}^2\zeta + 3\,\mathrm{tg}^4\zeta)$$
$$- \alpha s\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)(5 + 3\,\mathrm{tg}^2\zeta)\,\mathrm{tg}^2\zeta + \frac{1}{2}s^2(1+3\,\mathrm{tg}^2\zeta)\,\mathrm{tg}^2\zeta + \cdots$$

En appelant $\Delta d\theta$ l'ensemble des termes du 3e ordre et R le reste de la série on aura donc:

$$\cancel{d\theta = \alpha\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)(3\,\mathrm{tg}\,\zeta + \mathrm{tg}^3\zeta)}$$

$$d\theta = \left\{\alpha\,\mathrm{tg}\,\zeta + \alpha^2\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)(3\,\mathrm{tg}\,\zeta + \mathrm{tg}^3\zeta) - \alpha s(\mathrm{tg}\,\zeta + \mathrm{tg}^3\zeta)\right\}\frac{d\rho}{\rho_0} + \Delta d\theta + R.$$

et pour $\Delta d\theta$:

$$\Delta d\theta = \left\{\frac{1}{2}\alpha^3\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)^3(15\,\mathrm{tg}\,\zeta + 10\,\mathrm{tg}^3\zeta + 3\,\mathrm{tg}^5\zeta) - 3\alpha^2 s\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)(\mathrm{tg}\,\zeta + 2\,\mathrm{tg}^3\zeta + \mathrm{tg}^5\zeta)\right\}\frac{d\rho}{\rho_0}$$
$$+ \frac{3}{2}\alpha s^2(\mathrm{tg}^3\zeta + \mathrm{tg}^5\zeta)$$

En négligeant d'abord les termes du 3ème ordre & les suivants, on aura:

$$\theta = \alpha \operatorname{tg}\zeta + \alpha^2 \int_0^{\rho_0}\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)\frac{d\rho}{\rho_0}\cdot(3\operatorname{tg}\zeta+\operatorname{tg}^3\zeta) - \alpha(\operatorname{tg}\zeta+\operatorname{tg}^3\zeta)\int_0^{\rho_0} s\frac{d\rho}{\rho_0}$$

On a d'abord:

$$\int_0^{\rho_0}\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)\frac{d\rho}{\rho_0} = +\left[-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2\right]_0^{\rho_0} = \frac{1}{2}.$$

Ensuite en intégrant par parties:

$$\int_0^{\rho_0} s\frac{d\rho}{\rho_0} = \left[s\frac{\rho}{\rho_0}\right]_0^{\rho_0} - \int_0^{\rho_0}\frac{\rho}{\rho_0}ds.$$

Mais à la limite supérieure $s=0$ et à la limite inférieure $\rho=0$, donc $\left[s\frac{\rho}{\rho_0}\right]_0^{\rho_0}=0$ et l'on a:

$$\int_0^{\rho_0} s\frac{d\rho}{\rho_0} = -\int_0^{\rho_0}\frac{\rho}{\rho_0}ds.$$

Mais en différentiant l'éq. $\frac{a}{r}=1-s$, on a:

$$\frac{a}{r^2}dr = ds.$$

Or nous avons d'après la relation (6):

$$\frac{a}{r^2}dr = +ds = -\frac{1}{a\rho g_0}dp.$$

Appelons l la hauteur de la colonne d'air de densité ρ_0 qui ferait équilibre à la pression p_0, alors:

$$l\rho_0 g_0 = p_0$$

et l'équation précédente devient:

$$\frac{\rho}{\rho_0}ds = -\frac{l}{a}\frac{dp}{p_0}$$

Donc:

$$\int_0^{\rho_0} s\frac{d\rho}{\rho_0} = +\frac{l}{a}\int_0^{p_0}\frac{dp}{p_0} = +\frac{l}{a}.$$

On aura donc, en exprimant θ en secondes d'arc:

$$\theta = \frac{\alpha}{\sin 1''}\operatorname{tg}\zeta + \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\sin 1''}(3\operatorname{tg}\zeta+\operatorname{tg}^3\zeta) - \frac{\alpha}{\sin 1''}\frac{l}{a}(\operatorname{tg}\zeta+\operatorname{tg}^3\zeta).$$

ou bien:

(10) $$\theta = \frac{\alpha}{\sin 1''}\left(1+\frac{3}{2}\alpha-\frac{l}{a}\right)\operatorname{tg}\zeta + \frac{\alpha}{\sin 1''}\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{l}{a}\right)\operatorname{tg}^3\zeta.$$

Discutons maintenant l'influence des termes du 3ᵉ ordre. Mais auparavant, voyons quelle est la valeur de $-\int_0^{\rho_0} s\frac{d\rho}{\rho_0} = \frac{l}{a}$. Supposons que la pression de l'air au contact du sol est égale à $0^m,76$ et sa température égale à 0°. Alors, l et $0^m,76$ sont en raison inverse des densités de l'air et du mercure; or on a, ~~pou~~ en prenant celle de l'eau pour unité:

densité de l'air $= \frac{1}{773,28}$

— — du mercure $= 13,600.$

Donc:

$$l = 13,6 \times 773,28 \times 0^m,76 = 7992^m,5$$

et en prenant pour a la moyenne des demi-axes de la Terre, on aura

$$a = 6366738^m$$

On aura donc, à peu près

$$\frac{l}{a} = 0,001255$$

Cette ~~quantité~~ nombre est donc très-petit comme nous l'avons dit, mais il est plus grand que α.

Cela posé, faisons pour abréger:

$$A = \frac{5}{2}\operatorname{tg}\zeta + \frac{5}{3}\operatorname{tg}^3\zeta + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^5\zeta.$$

$$\cancel{B = 2\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)s}$$

$$B = 3(\operatorname{tg}\zeta + 2\operatorname{tg}^3\zeta + \operatorname{tg}^5\zeta)$$

$$C = \frac{3}{2}(\operatorname{tg}^3\zeta + \operatorname{tg}^5\zeta).$$

nous aurons:

$$\Delta\theta = 3\alpha^3 A \int_0^{\rho_0}\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2\frac{d\rho}{\rho_0} - \alpha^2 B \int_0^{\rho_0} s\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)\frac{d\rho}{\rho_0} + \alpha C \int_0^{\rho_0} s^2\frac{d\rho}{\rho_0}.$$

On a d'abord:

$$\int_0^{\rho_0}\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2\frac{d\rho}{\rho_0} = \left[-\frac{1}{3}\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)^3\right]_0^{\rho_0} = \frac{1}{3}.$$

Ensuite, on a évidemment:

$$\int_0^{\rho_0} s\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)\frac{d\rho}{\rho_0} < \int_0^{\rho_0} s\frac{d\rho}{\rho_0}$$

et comme le second membre est égal à $\frac{l}{a}$, on aura en appelant λ un nombre compris entre 0 et $+1$:

$$\int_0^{\rho_0} s\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)\frac{d\rho}{\rho_0} = \lambda\frac{l}{a}.$$

Ensuite, en intégrant par parties, on a:

$$\int_0^{\rho_0} s^2\frac{d\rho}{\rho_0} = \left[s^2\frac{\rho}{\rho_0}\right]_0^{\rho_0} - 2\int_0^{\rho_0}\frac{\rho}{\rho_0}s\,ds.$$

ou en ~~s~~ remarquant que la partie intégrale est nulle et en remplaçant $\frac{\rho}{\rho_0}ds$ par sa valeur $-\frac{l}{a}\frac{d\rho}{\rho_0}$

$$\int_0^{\rho_0} s^2\frac{d\rho}{\rho_0} = 2\frac{l}{a}\int_0^{\rho_0} s\frac{d\rho}{\rho_0}$$

En intégrant encore une fois par partie, on a:

$$\int_0^{\rho_0} s\frac{d\rho}{\rho_0} = \left[s\frac{\rho}{\rho_0}\right]_0^{\rho_0} - \int_0^{\rho_0}\frac{\rho}{\rho_0}ds$$

ou en remarquant que la partie intégrée est nulle:

$$\int_0^{\rho_0} s\frac{d\rho}{\rho_0} = -\int_0^{\rho_0}\frac{\frac{\rho}{\rho}}{\frac{\rho_0}{\rho_0}}\frac{\rho}{\rho_0}ds.$$

Or nous avons vu qu'on a

$$\frac{p}{\rho} : \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{1+mt}{1+mt_0}.$$

Mais d'après la théorie et les observations, la température de l'air diminue à mesure que l'on s'élève dans l'atmosphère ; donc.

$$1+mt < 1+mt_0 \quad \text{par suite} \quad \frac{p}{\rho} < \frac{p_0}{\rho_0}.$$

On aura donc en appelant λ' un nombre compris entre 0 et +1 :

$$\int_0^{p_0} s\frac{dp}{p_0} = -\lambda'\int_0^{\rho_0}\frac{\rho}{\rho_0}\,ds = +\lambda'\frac{l}{a}$$

et par suite :

$$\int_0^{\rho_0} s^2\frac{d\rho}{\rho_0} = +2\lambda'\left(\frac{l}{a}\right)^2.$$

Donc enfin on aura :

$$\Delta\theta = \frac{A\alpha^3}{\sin 1''} - \lambda\frac{B\alpha^2}{\sin 1''}\frac{l}{a} + \frac{2C\alpha}{\sin 1''}\lambda'\left(\frac{l}{a}\right)^2.$$

Dans les cas où les termes du ~~second~~ 3e ordre deviennent sensibles, le terme le plus influent est évidemment la partie de $\frac{2C\alpha}{\sin 1''}\lambda'\left(\frac{l}{a}\right)^2$ égale à

$$\frac{3\alpha}{\sin 1''}\lambda'\left(\frac{l}{a}\right)^2 \operatorname{tg}^5 z.$$

Pour que ce terme soit plus petit que $\frac{1}{n}$, c'à d pour que la formule approchée jusqu'au 2d ordre donne une erreur moindre qu'un $n^{\text{ième}}$ de seconde, il suffit que l'on ait

$$\frac{3\alpha}{\sin 1''}\left(\frac{l}{a}\right)^2 \operatorname{tg}^5 z < \frac{1}{n}$$

ou bien :

$$\operatorname{tg} z < \left\{\frac{\sin 1''}{3\alpha\left(\frac{l}{a}\right)^2 . n}\right\}^{\frac{1}{5}}.$$

En faisant successivement

$$n = 100,\ 20,\ 10,\ 2$$

on trouve pour conditions :

$$z < 63°40',\ 70°15',\ 72°40',\ 78°50'.$$

Donc pour toutes les hauteurs apparentes qui ne dépassent pas 20°, on peut employer, sans craindre une erreur d'une demi-~~dixaine~~ dizième de seconde, la formule approchée.

$$\theta = \frac{\alpha}{\sin 1''}\left(1+\frac{3}{2}\alpha-\frac{l}{a}\right)\operatorname{tg} z + \frac{\alpha}{\sin 1''}\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{l}{a}\right)\operatorname{tg}^3 z.$$

et il est remarquable que cette formule est indépendante de la loi suivant laquelle décroît la température de l'air à mesure que l'on s'élève.

IV. – Aperçu historique de la théorie de Laplace –

L'analyse que nous venons d'exposer est due tout entière à Laplace (voir sa *Mécanique céleste* livre X, chapitre I). Pour intégrer l'équation de la réfraction dans le cas général d'une distance zénithale apparente quelconque, cet illustre géomètre examine successivement les trois hypothèses exprimées par les équations suivantes.

(a) $\rho = \rho_0$ constante

(b) $t = t_0$ constante

(c) $\frac{a}{r} = \left(\frac{1+k\rho}{1+k\rho_0}\right)^m$

m étant une constante.

1º La première hypothèse est de Cassini qui a, le premier, entrepris, le premier, de calculer analytiquement la réfraction atmosphérique. Elle suppose que toutes les couches de l'atmosphère ont la même densité. Laplace trouve que cette hypothèse conduit à une réfraction horizontale *trop petite*, c.à.d. plus petite que celle fournie par l'observation directe.

2º La seconde hypothèse suppose que toutes les couches atmosphériques ont la même température. Voyons à quoi elle revient relativement à la densité.

L'équation (7) devient dans ce cas

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}$$

par suite :

$$\frac{dp}{p_0} = \frac{d\rho}{\rho_0}.$$

En substituant dans l'éq. (6), il vient :

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{g\rho_0}{p_0}\frac{a^2}{r^2}\,ds$$

ou bien :

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{l}\frac{a^2}{r^2}\,ds$$

D'ailleurs en intégrant en d'après

$$\cancel{\log\left[\frac{a}{r}\right]} \qquad \frac{a}{r} = 1-s. \quad +\frac{a}{r^2}\,dr = ds.$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{a}{l}\,ds.$$

d'où en intégrant :

$$\log\rho = \log\rho_0 - \frac{as}{l}.$$

ou bien

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{as}{l}}.$$

ou si l'on veut:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{a}{l}\left(\frac{a}{r}-1\right)} = \rho_0 e^{-\frac{a^2}{lr}+\frac{a}{l}}.$$

Donc, dans cette hypothèse, la densité décroît en progr. géométrique quand la hauteur croît en progression arithmétique.

En soumettant cette hypothèse à une savante analyse, Laplace trouve qu'elle conduit à une réfraction horizontale trop grande, mais qui se rapproche davantage de l'observation que la 1ère hypothèse.

3°. En adoptant la 3e hypothèse, l'équation de la réfraction s'intègre immédiatement, car elle devient:

$$d\theta = \frac{1}{2}\frac{K\,d\rho}{1+K\rho_0}\;\frac{\left(\frac{1+K\rho}{1+K\rho_0}\right)^{m}\sin\zeta}{\frac{1+K\rho}{1+K\rho_0}\sqrt{\left(\frac{1+K\rho}{1+K\rho_0}\right)-\left(\frac{1+K\rho}{1+K\rho_0}\right)^{2m}\sin^2\zeta}}$$

ou en posant:

$$\left(\frac{1+K\rho}{1+K\rho_0}\right)^{m-\frac{1}{2}}\sin\zeta = x.$$

$$d\theta = \frac{dx}{(2m-1)\sqrt{1-x^2}}.$$

Il nous faut intégrer depuis $x = \frac{\sin\zeta}{(1+K\rho_0)^{m-\frac{1}{2}}}$ jusqu'à $x = \sin\zeta$. Nous aurons ainsi:

$$\theta = \frac{1}{2m-1}\left\{\zeta - \sin^{-1}\frac{\sin\zeta}{(1+K\rho_0)^{m-\frac{1}{2}}}\right\}$$

En posant $\nu = 2m-1$, on pourra écrire:

$$\sin(\zeta - \nu\theta) = \frac{1}{(1+K\rho_0)^{\frac{\nu}{2}}}\sin\zeta.$$

Cette équation est remarquable par sa simplicité, et l'on pourrait déterminer la constante m de façon qu'elle s'approchât le plus possible des résultats de l'observation.

Mais Laplace fait voir que l'hypothèse considérée revient à fort peu ~~toi~~ près à:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{1}{2}m\frac{a}{l}K\rho_0\frac{\rho^2}{\rho_0^2}.$$

ce qui, appliqué à la surface du sol, donne:

$$1 = \frac{1}{2}m\frac{a}{l}K\rho_0$$

ou bien

$$m = \frac{2\frac{l}{a}}{K\rho_0}.$$

En employant la valeur de l qui résulte de la comparaison d'un grand nombre d'observations d'altitudes faites par le baromètre et de celles faites directement, Laplace détermine la valeur de m et en l'introduisant dans l'expression de la réfraction, il trouve que la formule conduit à une réfraction horizontale trop petite, mais comprise entre la réalité et celle que donne l'hypothèse d'une densité constante.

Remarquons que les équations précédentes donnent:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho^2}{\rho_0^2}$$

d'où bien:

$$\frac{dp}{p_0} = \frac{2\rho d\rho}{\rho_0^2}$$

en sorte que:

$$\frac{2p_0\rho d\rho}{\rho_0^2} = -g_0\rho\frac{a^2}{r^2}dr$$

ou bien:

$$d\rho = -\rho_0\frac{a}{2l}dr.$$

d'où

$$\rho = \rho_0\frac{a}{2l}(\ldots) - \rho_0\frac{a}{2l}\left(\frac{a}{r}\ldots\right) + \rho_0.$$

ou

$$\rho = \rho_0 \cancel{+} - \rho_0\frac{ar}{2l}.$$

Cette équation exprime que la densité décroît en progression arithmétique quand la hauteur diminue en progression arithmétique.

Voyons maintenant l'expression de

$$\frac{p}{p_0} : \frac{\rho}{\rho_0} \quad \text{ou} \quad \frac{1+mt}{1+mt_0}$$

dans chacune des trois hypothèses. Dans la 1ère hypothèse on a:

$$dp = -\rho_0 g_0\frac{a^2}{r^2}dr = -p_0\frac{a}{l}dr$$

d'où

$$p = p_0\left(1 - \frac{ar}{l}\right). \quad \text{Donc} \quad \frac{p}{p_0} : \frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \frac{ar}{l}.$$

Dans la 2de on a:

$$\frac{p}{p_0} : \frac{\rho}{\rho_0} = 1$$

et dans la 3e:

$$\frac{p}{p_0} : \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \frac{ar}{2l}.$$

On est donc en présence de trois hypothèses dont les corrections distinctifs sont donnés par le tableau suivant:

1^{o} $\quad \rho = \text{constante} \qquad \frac{p}{p_0} : \frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \frac{ar}{l}$

2^{o} $\quad \rho = \rho_0 e^{-\frac{ar}{l}} \qquad \frac{p}{p_0} : \frac{\rho}{\rho_0} = 1$

3^{o} $\quad \rho = \rho_0 - \rho_0 \frac{ar}{2l} \qquad \frac{p}{p_0} : \frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \frac{ar}{2l}.$

et la vraie loi est comprise entre la 2^{e} et la 3^{e}.

Comme dernière hypothèse, Laplace pose:

$$s - \alpha\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) = u$$

$$\rho = \rho_0\left(1 + \frac{fu}{l'}\right) e^{-\frac{u}{l'}}$$

où les deux nombres f et l' sont deux constantes qu'il faut déterminer par l'Observation. Il a adopté cette hypothèse, parce que, comme il le fait remarquer elle participe à la fois des deux hypothèses $\rho = \rho_0 e^{-\frac{ar}{l}}$ et $\rho = \rho_0\left(1 - \frac{ar}{2l}\right)$ et qu'elle conduit à un calcul relativement simple. Il trouve ainsi pour la ~~valeur~~ expression de la réfraction

$$\theta = \frac{2\alpha \sin\zeta}{(1-\alpha)\sqrt{2l'}}\left(1 - \tfrac{1}{2}f - fT^2\right)\Psi(T) + \frac{\alpha f}{2(1-\alpha)l'} \sin\zeta \cos\zeta$$

et voici la signification de T et $\Psi(T)$. On a posé:

$$T = \frac{\cos\zeta}{\sqrt{2l'}}$$

et

$$\int_T^{\infty} e^{-t^2} dt = \Psi(T) \cdot e^{-T^2}$$

Cette fonction $\Psi(T)$ a été considérée pour la première fois par Kramp; elle a été réduite en table par Bessel. Nous la rencontrerons ailleurs dans une question toute différente.

Caillet a fondé sur la formule de Laplace la construction d'une table de réfraction qui, modifiée dans sa forme seulement, est employée à l'observatoire de Paris du temps du célèbre astronome Leverrier.

V. Réfraction moyenne et corrections dues à la température et à la pression de l'air. On appelle <u>réfraction moyenne</u> la valeur de la réfraction pour un certain état déterminé de l'atmosphère. Celui que l'on a choisi à l'Observatoire de Paris est celui dans lequel l'air en contact du sol est à une pression égale à $0^m{,}76$ et à une température égale à $+10°$ centigrade. On trouve une table de réfraction moyenne pour cet état de l'atmosphère ~~ce~~ à la page 687 de chaque volume de la Connaissance des temps. Pour une observation de hauteur peu précise, on peut souvent se contenter de prendre la réfraction moyenne pour la réfraction actuelle.

Pour les observations plus soignées, il faut de toute nécessité, tenir compte de la variation du baromètre et du thermomètre. Mais, comme toutes les observations de précision se font presque exclusivement dans les limites où notre formule approchée est applicable; ~~dans notre ce~~ nous calculerons la correction que nous cherchons, en supposant que c'est là la vraie expression de la réfraction.

Appelons α', l', ρ'_0 ce les valeurs de α, l, ρ_0 ce pris pour l'état normal de l'atmosphère. La réfraction moyenne sera alors:

$$(10') \quad \delta' = \frac{\alpha'}{\sin 1''}\left(1+\frac{3}{2}\alpha-\frac{l'}{a}\right)\operatorname{tg} z+\frac{\alpha'}{\sin 1''}\left(\frac{\alpha'}{2}-\frac{l'}{a}\right)\operatorname{tg}^3 z.$$

et la réfraction actuelle:

$$(10) \quad \delta = \frac{\alpha}{\sin 1''}\left(1+\frac{3}{2}\alpha-\frac{l}{a}\right)\operatorname{tg} z+\frac{\alpha}{\sin 1''}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{l}{a}\right)\operatorname{tg}^3 z;$$

il s'agit d'exprimer δ en fonction de δ'.

On a par définition:

$$\alpha = \frac{k\rho_0}{2(1+k\rho_0)} \qquad l = \frac{p_0}{\rho_0 g_0}$$

$$\alpha' = \frac{k\rho'_0}{2(1+k\rho'_0)} \qquad l' = \frac{p'_0}{\rho'_0 g_0}$$

Appelons m et n les coefficients de dilatation de l'air et du mercure et soient t la température observée de l'air et H sa pression barométrique. Si les pressions sont mesurées avec ~~une~~ des colonnes de mercure à $0°$ de température, on aura:

$$\rho_0 g_0 = \frac{H}{1+nt} \qquad \rho'_0 g_0 = \frac{0^m{,}76}{1+nt'}$$

t' étant la température ~~ce~~ normale, et l'on aura:

$$\frac{H}{1+nt}\cdot\frac{1}{\rho_0}\cdot\frac{1}{1+mt} = \frac{0^m{,}76}{1+nt'}\cdot\frac{1}{\rho'_0}\cdot\frac{1}{1+mt'}.$$

ou sensiblement:

$$(11)\qquad \frac{H}{0{,}76}\cdot\frac{1}{1+m\tau}\,\frac{1}{1+n\tau} = \frac{\rho_0}{\rho_0'}$$

en posant

$$\tau = t - t'.$$

Posons maintenant:

$$\frac{1}{1+m\tau}\,\frac{1}{1+n\tau} = \varepsilon = \text{fonction de } t$$

$$\frac{H}{0{,}76} = \eta = \text{fonction de } H.$$

nous aurons:

$$(11').\qquad \rho_0 = \varepsilon\eta\,\rho_0'.$$

Cela posé, les définitions de α et α' en tire:

$$k\rho_0 = \frac{2\alpha}{1-2\alpha}\qquad k\rho_0' = \frac{2\alpha'}{1-2\alpha'}$$

d'où en divisant membre à membre:

$$\frac{1}{\varepsilon\eta} = \frac{\cancel{2}\alpha'(1-2\alpha)}{\cancel{2}\alpha(1-2\alpha')} = \frac{\alpha'-2\alpha'\alpha}{\alpha(1-2\alpha')}.$$

d'où:

$$\alpha = \frac{\varepsilon\eta\alpha'}{1+2\alpha'(\varepsilon\eta-1)}.$$

ou en développant et s'arrêtant au 2^d ordre:

$$\alpha = \varepsilon\eta\alpha' - 2\varepsilon\eta(\varepsilon\eta-1)\alpha'^2$$

$$\alpha^2 = \varepsilon^2\eta^2\alpha'^2$$

On a maintenant

$$\frac{l}{l'} = \frac{\rho_0}{\rho_0'}\cdot\frac{l_0'}{l_0} = \frac{H}{0{,}76}\,\frac{1}{1+n\tau}\cdot\frac{1}{\varepsilon\eta} = 1+m\tau.$$

d'où

$$l = l'(1+m\tau)$$

Maintenant multiplions l'éq. (10') par $\varepsilon\eta$ et retranchons-la de l'éq. (10); nous aurons:

$$\delta - \varepsilon\eta\delta' = \frac{1}{\sin 1''}\left\{\alpha - \varepsilon\eta\alpha' + \frac{3}{2}(\alpha^2 - \eta\alpha'^2) - \left(\frac{\alpha l}{a} - \varepsilon\eta\frac{\alpha' l'}{a}\right)\right\}\operatorname{tg}\zeta.$$

$$+\frac{1}{\sin 1''}\left\{\frac{1}{2}(\alpha^2 - \varepsilon\eta\alpha'^2) - \left(\frac{\alpha l}{a} - \varepsilon\eta\frac{\alpha' l'}{a}\right)\right\}\operatorname{tg}^3\zeta.$$

Or on a:

$$\alpha - \varepsilon\eta\alpha' = -2\varepsilon\eta(\varepsilon\eta-1)\alpha'^2$$

$$\frac{3}{2}(\alpha^2 - \varepsilon\eta\alpha'^2) = \frac{3}{2}\,\varepsilon\eta(\varepsilon\eta-1)\alpha'^2$$

$$\frac{\alpha l}{a} = \frac{\alpha' l'}{a}\varepsilon\eta(1+mt)\qquad \frac{\alpha l}{a} - \varepsilon\eta\frac{\alpha' l'}{a} = \varepsilon\eta\frac{\alpha' l'}{a}m\tau.$$

On aura donc:

$$\delta = \varepsilon\eta\delta' + \frac{\varepsilon\eta\alpha'}{\sin 1''}\left[\frac{\alpha'}{2}(\varepsilon\eta-1) - \frac{l'}{a}m\tau\right]\frac{\operatorname{tg}\zeta}{\cos^2\zeta} - \frac{\alpha'^2}{\sin 1''}\varepsilon\eta(\eta\varepsilon-1)\operatorname{tg}\zeta.$$

$\eta\varepsilon$ étant un ~~[illegible]~~ nombre très voisin de 1, le dernier terme est tout à fait négligeable. Quand au second terme, il dépend à la fois de t, de H et de ζ, mais il est toujours très-petit et n'est sensible qu'à partir d'une certaine valeur de ζ. Posons:

$$\varepsilon\eta = 1 + f$$

$$\frac{\alpha'\varepsilon\eta}{\sin 1''}\left(\frac{\alpha'}{2}(\varepsilon\eta - 1) - \frac{\ell'}{\ell} m\tau\right]\frac{\operatorname{tg}\zeta}{\cos^2\zeta} = \mathcal{B}.$$

on aura alors:

$$\theta' = \theta + f\cdot\theta' + \mathcal{B}.$$

Les tables de l'observatoire de Paris donne la valeur de 1000 f d'abord, puis à coté de la valeur de 100 B correspondante à $H = 0{,}76$ pour toutes les valeurs de ζ et à côté de chaque nombre tabulaire, on a inscrit sa variation de B, très-faible d'ailleurs, pour une variation donnée de la pression barométrique

VI. Tables de réfraction de Bessel.– Bessel adopte une hypothèse exprimée par l'équation

$$\frac{p}{p_0} : \frac{\varrho}{\varrho_0} = e^{-\frac{as}{h}} = 1 - \frac{as}{h} + \frac{1}{2}\left(\frac{as}{h}\right)^2 + \dots$$

dans laquelle h est une constante qu'il faut déterminer par l'observation. On voit que cette équation est à peu près de la même forme que celles qui correspondent à la 1ère et à la 3e hypothèses examinées par Laplace; et l'on conçoit la possibilité de se conformer aux résultats de l'observation en prenant pour h un nombre compris à peu près entre l et 2l.

Nous n'entreprendrons pas ici d'exposer le procédé employé par Bessel pour l'intégration de son équation de la réfraction, procédé qui est d'ailleurs en tout semblable à celui que Laplace a employé dans l'examen de la 2e hypothèse précédente. Nous omettrons aussi d'écrire le résultat auquel Bessel est arrivé; nous dirons seulement qu'il a mis finalement son équation sous la forme:

$$\theta = \alpha\,\beta^{A}\,\gamma^{\lambda}\operatorname{tg}\zeta.$$

où α désigne une fonction de ζ, indépendante de l'état actuel de l'atmosphère; β une fonction de la pression barométrique et γ une fonction de la température de l'air au contact du sol; A et λ ~~une~~ des fonctions de ζ.

Les trois fonctions α, A, λ de ζ ~~se~~ varient assez lentement avec ζ pour qu'on puisse les réduire en tables où l'on entre avec ζ comme argument, même A, λ qui sont toujours voisins de 1, n'en diffèrent sensiblement que pour les grandes distances zénithales. Bessel donne une première table ~~de~~ à ~~trois~~ quatre colonnes qui fournit à la fois les valeurs de $\log \alpha$, A et λ.

La quantité β dépend à la fois de la lecture du baromètre et de la température actuelle du mercure donnée par le thermomètre attaché au baromètre. On a posé alors

$$\beta = B . T$$

B étant un facteur dépendant de la hauteur apparente de la colonne barométrique et T un facteur fonction de la lecture du thermomètre attaché.

Quant à γ, il ne dépend que de la lecture du thermomètre extérieur qui donne la température du milieu où se fait l'observation.

Trois tables à part donnent séparément les facteurs β, T et γ.

Les tables de Bessel telles qu'on les trouve à la fin du tome II de l'astronomie sphérique & pratique de Chauvenet contiennent aussi une seconde partie donnant la réfraction atmosphérique en fonction de la distance zénithale vraie. Ces tables ~~sont~~ présentent exactement ~~de~~ la même disposition que les premières, car on a posé, en appelant ζ' la distance zénithale vraie

$$\theta = \alpha' \beta'^{A'} \gamma'^{\lambda'} \operatorname{tg} \zeta'.$$

VII. Influence de la réfraction sur l'ascension droite et la déclinaison. — La réfraction étant un angle très-petit, on peut négliger les quantités du 2e ordre p. r. à la variation de la distance zénithale ou de la hauteur ~~peut être~~ considérée comme ~~une différence~~ infi; c'à d que pour avoir les variations correspondantes de l'angle horaire et de la déclinaison, il suffit d'employer les formules différentielles (17) (18) du chapitre I. En y faisant :

$$dh = 0 \qquad d\varphi = 0 \qquad dA = 0$$

ces formules deviennent.

$$d\delta = \theta \cos\pi$$

$$dt = -\theta \sin\pi \sec\delta.$$

π étant l'angle parallactique de l'astre au moment de l'observation.

Si donc nous appelons δ' et t' ~~les~~ la déclinaison et l'angle horaire, tels qu'ils seraient observés sans la réfraction, et δ et t les valeurs apparentes de ces quantités, nous aurons:

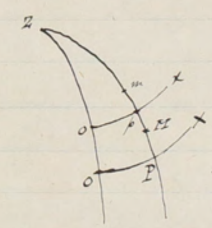
$$\begin{cases} \delta = \delta' + \theta\cos\pi \\ t = t' - \theta\sin\pi\sec\delta. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \delta' = \delta - \theta\cos\pi \\ \delta t' = t + \theta\sin\pi\sec\delta \end{cases}$$

On devra tenir compte de ces corrections dans les observations ~~faites~~ avec un l'equatorial

VIII Influence de la réfraction sur le disque apparent d'un astre. — Soit ~~OZ~~ OZ le cercle vertical du centre de l'astre considéré, le soleil ou la lune; μ le



lieu d'un point du disque de l'astre, tel qu'il serait sans la réfraction; ~~O~~ o, m les lieux apparents du centre O et du point μ. Menons par les points O et o les arcs de grand cercle $O\overset{x}{P}$ et $\overset{x}{o}p$ perpendiculaires ~~sur~~ à l'arc ZO; le cercle vertical du point μ coupera ces arcs en des points P et m.

Posons:

$$OP = X \qquad \mu P = Y$$

$$op = x \qquad mp = y.$$

Dans les triangles sphériques rectangles OPZ et opZ nous avons:

$$\operatorname{tg} PZO = \frac{\operatorname{tg} X}{\sin OZ} \qquad \operatorname{tg} pZo = \frac{\operatorname{tg} x}{\sin oZ}$$

on aura donc:

$$\operatorname{tg} X = \frac{\sin OZ}{\sin oZ} \operatorname{tg} x.$$

Mais les demi-diamètres apparents du Soleil et de la Lune étant de petits arcs, on a sensiblement

$$\mathrm{tg}\,X : \mathrm{tg}\,x = X : x$$

donc:

$$X = \frac{\sin OZ}{\sin oZ}\, x = x\,\frac{\sin(\zeta+\theta)}{\sin\zeta}$$

ou en développant et s'arrêtant au second terme.

$$X = x(1 + \theta \sin 1'' \cot\zeta).$$

On peut prendre dans le terme correctionnel.

$$\theta \overset{\times 1''}{=} \alpha\, \mathrm{tg}\,\zeta.$$

ce qui donne:

$$X = x(1 + \alpha \cancel{\sin 1''}).$$

Maintenant, on a:

$$Y = mp + pP - mZ = y + pP - mZ.$$

Mais en négligeant une quantité du 2e ordre par rapport à l'arc OZP, on a:

$$Zp = Zo \qquad ZP = ZO$$

par suite

$$pP = oO = \theta = \underset{\sin 1''}{\alpha}\, \mathrm{tg}\,\zeta.$$

$$mZ = \alpha\, \mathrm{tg}(Zmp - mp) = \alpha\, \mathrm{tg}(\zeta - y)$$

ou en développant

$$mZ = \underset{\sin 1''}{\alpha}\, \mathrm{tg}\,\zeta - \alpha y \cancel{\sin 1''} \frac{1}{\cos^2\zeta} + \cdots$$

Donc: $\quad pP - mZ = \alpha \cancel{\sin 1''} \dfrac{1}{\cos^2\zeta} \cdot y.$

Par suite:

$$Y = y\left(1 + \frac{\alpha \cancel{\sin 1''}}{\cos^2\zeta}\right).$$

En appelant R le demi-diamètre de l'astre on a sensiblement

$$X^2 + Y^2 = R^2$$

par suite:

$$x^2(1 + \alpha \cancel{\sin 1''}) + y^2\left(1 + \frac{\alpha \cancel{\sin 1''}}{\cos^2\zeta}\right) = R^2.$$

Le disque apparent est donc une ellipse ayant pour demi-axes:

$$a = \frac{R}{1 + \alpha \cancel{\sin 1''}} \qquad b = \frac{R}{1 + \frac{\alpha \cancel{\sin 1''}}{\cos^2\zeta}}$$

ou bien

$$a = R(1 - \alpha \cancel{\sin 1''}) \qquad b = R\left(1 - \frac{\alpha \cancel{\sin 1''}}{\cos^2\zeta}\right).$$

Si l'on a observé le demi-diamètre horizontal on au vertical, il faudra lui faire subir une correction égale à $a(1+\alpha)$ ou $b\left(1+\frac{\alpha}{\cos\zeta}\right)$.

En adoptant la valeur $\alpha = 0{,}000294$, on voit que la correction $a\alpha$ est presque insensible, tandis que $\frac{b\alpha}{\cos\zeta}$ peut devenir considérable à cause de $\frac{1}{\cos\zeta}$.

Pour obtenir la correction correspondante, à un angle de position égale à $\theta = mox$, remplaçons dans l'éq. précédente x et y par leurs valeurs.

$$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta$$

nous aurons:

$$\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2} = \frac{1}{\rho^2}$$

d'où

$$\frac{\cos^2\theta}{a^3}\delta a + \frac{\sin^2\theta}{b^3}\delta b = \frac{1}{\rho^3}\delta\rho.$$

ou en prenant $a = b = \rho$

$$\delta\rho = \delta a\cos^2\theta + \delta b\sin^2\theta$$

ou bien

$$\delta\rho = R\alpha\left(\cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos\zeta}\right) = R\alpha(1 + \operatorname{tg}^2\zeta\sin^2\theta).$$

VIII. – Influence de la réfraction sur l'époque du lever et du coucher d'un astre. – Prenons l'équation

$$\cos Z = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t.$$

L'époque du coucher ou du lever apparent de l'astre ne correspond pas à l'époque où $Z = 90°$ mais bien à celles où $Z = 90° + \theta$, θ désignant la réfraction horizontale. Voyons quel est l'accroissement résultant de θ, dans l'angle horaire. En traitant les accroissements comme des différentielles, nous aurons:

$$\sin Z\,\delta Z = \cos\varphi\cos\delta\sin t\,\delta t$$

et dans l'horizon:

$$\delta t = \frac{1}{\cos\varphi\cos\delta\sin t}\cdot\delta Z.$$

Si l'on prend pour $\delta Z = \theta$ sa valeur moyenne 35' et qu'on exprime δt en secondes de temps, on aura

$$\delta t = \frac{140^s}{\cos\varphi\cos\delta\sin t}.$$

Telle est la correction qu'il faut faire subir à l'époque du coucher ou du lever telle que nous l'avons trouvé dans le 1er chapitre.

Comme on a dans ce cas:

$$\cos t = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta$$

on aura:

$$\cos\varphi\cos\delta \sin t = \sqrt{\cos^2\varphi\cos^2\delta - \sin^2\varphi\sin^2\delta}$$

$$= \sqrt{1-(\sin^2\varphi+\sin^2\delta)}$$

On pourra donc écrire si l'on veut:

$$dt = \frac{140^s}{\sqrt{1-(\sin^2\varphi+\sin^2\delta)}}.$$

On voit que cette correction est d'autant plus grande que φ et δ sont plus petits.

IX. Marche à suivre dans la réduction des hauteurs observées des astres. — Quand on a observé la distance zénithale d'un astre, la première qu'on doit faire, c'est de la corriger de la réfraction. Quand il s'agit du Soleil, des planètes et surtout de la Lune, il faudra ensuite, corriger la distance zénithale déjà corrigée de réfraction, de la parallaxe de hauteur. Ce n'est qu'après avoir fait ces deux réductions dont l'ordre est important à observer que l'on devra faire entrer le résultat de l'observation dans les calculs qu'on aura à faire ultérieurement.

X. Du crépuscule astronomique. — Il y a une question d'astronomie sphérique qui par sa nature, se rattache à la théorie de la réfraction ; c'est celle du crépuscule astronomique. Voici à quoi consiste le phénomène du crépuscule.

L'air atmosphérique diffuse la lumière qu'il reçoit du Soleil et la renvoie aux yeux de l'Observateur; il en résulte que, tant que cet astre a une distance zénithale comprise entre 90° et une certaine valeur 90°+α, il illumine notre atmosphère et produit ce phénomène qu'on appelle crépuscule du matin ou crépuscule du soir suivant qu'il se produit avant le lever du Soleil ou après son coucher.

Nous allons ~~se~~ chercher la durée du crépus-

* Discutons d'abord l'éq. (1). — Pour que t soit réel, c.à.d pour qu'il fasse complètement nuit, il faut que l'on ait.

$$(\sin\alpha+\sin\varphi\sin\delta)^2-(\cos\varphi\cos\delta)^2<0$$

c'à d: $[\sin\alpha+\cos(\varphi-\delta)][\sin\alpha-\cos(\varphi+\delta)]<0$.

Posons $\varphi=\frac{\pi}{2}-C$ et supposons $\varphi>0$ ou $C<\frac{\pi}{2}$. Alors.

$$[\sin\alpha+\sin(C+\delta)][\sin\alpha-\sin(C-\delta)]<0.$$

Soit d'abord ~~Tant que~~ $\delta>0$, le 1er facteur >0; ~~donc il faut sin quant à sin(C−δ)~~ Donc il faut $C-\delta>\alpha$ ou $\delta<C-\alpha$. Si donc on a $C-\alpha<\gamma$ ou $C<\gamma+\alpha=41°27'$, il n'y aura plus de nuit tant que $\delta>C-\alpha$.

Soit maintenant $\delta=-\delta'<0$. Alors il faut:

$$[\sin\alpha+\sin(C-\delta')][\sin\alpha-\sin(C+\delta')]<0.$$

1° $C>\gamma$. alors le 1er facteur est toujours >0; il ~~en est de même du~~ elle est touj. <0 2d facteur car $C+\delta'$ variant de C à $C+\gamma$ est toujours compris entre α et $180°-\alpha$

2° $\gamma>C>\alpha=18°$. Alors à fortiori $C>\gamma-\alpha=5°27'$. Donc le 1er facteur sera encore constamment >0 et le second membre constamment <0;

3° $\alpha>C>\gamma-\alpha$. Le 1er fact est >0; le second ne sera négatif que si $\alpha<C+\delta'$ ou $\delta'>\alpha-C$

celle du soir; celle du crépuscule du matin lui sera évidemment égale. Dans le triangle PZS, on a:

(1) $-\sin\alpha=\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta\cos t$ *

(2) $\cos\alpha\cos\pi=\sin\varphi\cos\delta-\cos\varphi\sin\delta\cos t$

(3) $\cos\alpha\sin\pi=\cos\varphi\sin t$.

On a de même lorsque le Soleil est juste sur la ligne de l'horizon:

(1)' $0=\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta\cos t_0$

(2)' $\cos\pi_0=\sin\varphi\cos\delta-\cos\varphi\sin\delta\cos t_0$.

(3)' $\sin\pi_0=\cos\varphi\sin t_0$

t_0 & π_0 étant l'angle horaire & l'angle parallactique du Soleil au moment de son coucher. — Il nous faut chercher la différence

$$\tau=t-t_0.$$

On a en retranchant membre à membre (1) de (1'), (2') de (2) et (3)' de (3):

$$\sin\alpha=\cos\varphi\cos\delta(\cos t_0-\cos t)=2\cos\varphi\cos\delta\sin\tfrac{1}{2}\tau\sin\tfrac{1}{2}(t+t_0)$$

$$+\cos\alpha\cos\pi-\cos\pi_0=\cos\varphi\sin\delta(\cos t_0-\cos t)=2\cos\varphi\sin\delta\sin\tfrac{1}{2}\tau\sin\tfrac{1}{2}(t+t_0)$$

$$\cos\alpha\sin\pi-\sin\pi_0=\cos\varphi(\sin t-\sin t_0)=2\cos\varphi\sin\tfrac{1}{2}\tau\cos\tfrac{1}{2}(t+t_0).$$

D'où l'on tire en ajoutant les carrés:

$$4\cos^2\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\tau=\sin^2\alpha+(\cos\alpha\cos\pi-\cos\pi_0)^2+(\cos\alpha\sin\pi-\sin\pi_0)^2$$

$$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\pi\cos\pi_0-2\cos\alpha\sin\pi\sin\pi_0+1.$$

$$=2-2\cos\alpha\cos(\pi-\pi_0)$$

Donc:

(4) $$\sin^2\tfrac{1}{2}\tau=\frac{1-\cos\alpha\cos(\pi-\pi_0)}{2\cos^2\varphi}$$

Telle est la valeur de τ en fonction des constantes α et φ et de π et π_0. Or on a:

$$\sin\varphi=-\sin\delta\sin\alpha+\cos\delta\cos\alpha\cos\pi$$

$$\sin\varphi=\cos\delta\cos\pi_0.$$

d'où

(5) $$\cos\pi=\frac{\sin\delta\sin\alpha+\sin\varphi}{\cos\delta\cos\alpha}\qquad\cos\pi_0=\frac{\sin\varphi}{\cos\delta}.$$

On a ainsi tout ce qu'il faut pour calculer τ.

L'équation (4) montre que, pour un lieu donné, la durée τ du crépuscule est d'autant plus petite que $\cos(\pi-\pi_0)$ est plus grande & qu'elle est d'autant

Si l'on adopte $\alpha = 18^\circ$,
l'éq. $\cancel{\sin\varphi}$ $\frac{\sin^2\alpha}{2\sin\varphi} = \sin^2\tau$
donne $\varphi = 22^\circ\, 50',7$.

plus grande que le cosinus est plus petit. Donc τ sera minimum quand on aura : $\pi - \pi_0 = 0$ c'à'd : (5).

$$\frac{\sin\delta\sin\alpha + \sin\varphi}{\cos\delta\cos\alpha} = \frac{\sin\varphi}{\cos\delta}$$

c'à'd :

$$\sin\delta\sin\alpha = -(1-\cos\alpha)\sin\varphi = -2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\varphi$$

ou

$$\sin\delta = -\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\varphi$$

et alors on aura :

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\tau = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\varphi}$$

ou

$$\sin\tfrac{1}{2}\tau = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\varphi}.$$

Cherchons maintenant le maximum de τ. On a :

$$d\tau = dt - dt_0$$

Or d'après (1) & (1'), on a :

$$\cos t = -\frac{\sin\alpha + \sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}$$
$$\cos t_0 = -\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta$$

Donc :

$$+\sin t\, dt = \frac{\sin\varphi\cos^2\delta + (\sin\alpha + \sin\varphi\sin\delta)\sin\delta}{\cos\varphi\cos^2\delta}\,d\delta = \frac{\sin\alpha\sin\delta + \sin\varphi}{\cos\varphi\cos^2\delta}\,d\delta$$
$$\sin t_0\, dt_0 = +\operatorname{tg}\varphi\frac{d\delta}{\cos^2\delta} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi\cos^2\delta}\,d\delta$$

Par suite :

$$d\tau = \frac{d\delta}{\cos\varphi\cos^2\delta}\left(\frac{\sin\alpha\sin\delta + \sin\varphi}{\sin t} - \frac{\sin\varphi}{\sin t_0}\right)$$

Mais on a d'après (3) & (3')

$$\sin t = \frac{\cos\alpha\sin\pi}{\cos\varphi} \qquad \sin t_0 = \frac{\sin\pi_0}{\cos\varphi}$$

Donc :

$$d\tau = \frac{d\delta}{\cos^2\delta}\left(\frac{\sin\alpha\sin\delta + \sin\varphi}{\cos\alpha\sin\pi} - \frac{\sin\varphi}{\sin\pi_0}\right)$$

Maintenant on a d'après (5)

$$\frac{\sin\delta\sin\alpha + \sin\varphi}{\cos\alpha} = \cos\delta\cos\pi \qquad \sin\varphi = \cos\delta\cos\pi_0$$

Donc enfin :

$$d\tau = (\cot\pi - \cot\pi_0)\frac{d\delta}{\cos\delta}.$$

Or π & π_0 étant deux angles compris entre 0 & 180°, $\cot\pi - \cot\pi_0$ ne peut s'annuler que si $\pi - \pi_0$ est nul. Donc $\pi - \pi_0$ donne tous les minimums. Quant aux maxim. ils correspondront aux équations $d\delta = 0$ c'à'd $\delta = \pm$ obliquité de l'écliptique.

VI. Complément au chapitre I.

I Époque de la plus grande hauteur d'un astre dont la declinaison est variable.— Nous avons vu que pour les étoiles fixes, l'époque où elles ont la plus grande hauteur correspond à celle où leur angle horaire est nulle c'àd où au moment de son passage supérieur au méridien. Mais il n'est plus de même à l'égard des astres dont la declinaison varie avec le temps, comme le Soleil, les planètes et la Lune. Reprenons l'équation

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t\,;$$

s'il s'agit du Soleil, seraḃ non seulement h et t mais encore δ varie avec le temps. En différentiant, il vient:

$$\cos h\, dh = (\sin\varphi \cos\delta - \cos\varphi \sin\delta \cos t)\, d\delta - \cos\varphi \cos\delta \sin t\, dt.$$

et en faisant $dh = 0$, on aura pour l'époque de la plus grande hauteur:

$$(\sin\varphi \cos\delta - \cos\varphi \sin\delta \cos t)\, d\delta - \cos\varphi \cos\delta \sin t\, dt = 0$$

ou bien:

$$\sin t = (tg\,\varphi - tg\,\delta \cos t)\frac{d\delta}{dt}.$$

Mais comme $\frac{d\delta}{dt}$ est toujours une petite quantité, vue la lenteur de la variation de δ, on pourra prendre ~~tg~~ $\sin t = t \sin 1''$ et $\cos t = 1$; on aura donc, en exprimant t en seconde:

$$t = \frac{1}{15 \sin 1''}\frac{d\delta}{dt}(tg\,\varphi - tg\,\delta)$$

II. Durée du passage du disque du Soleil ou de la Lune à travers un grand cercle donné.— Soit t l'angle horaire d'un point du disque et α son ascension droite. On aura

$$\Theta = t + \alpha.$$

par suite pour tout accroissement

$$\Delta\Theta = \Delta t + \Delta\alpha.$$

Or, si l'accroissement Δt n'est pas bien considérable, on peut supposer que les accroissements $\Delta\alpha$ de l'ascension droite est proportionnel à celui de Θ, de sorte que

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta\Theta} = \lambda$$

par suite

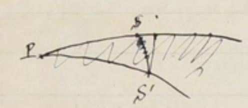
$$\Delta\Theta = \frac{1}{1-\lambda}\,\Delta t.$$

Donc si à un moment donné un certain point A du disque est en retard sur un autre point B d'un diff. d'angle horaire τ, ~~ce point A~~ ~~employé~~ pour l'intervalle de temps sidéral x qu'emploie ce point A pour venir prendre la place du point B sera donné par l'éq.

$$x = \frac{1}{1-\lambda}\,\tau.$$

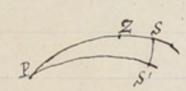
Il nous faut calculer dans chaque cas le nombre τ en supposant que les points A et B soient ou bien les deux bords ou bien l'un le centre et l'autre l'un des deux bords.

1º Durée du passage du demi-diamètre à travers le méridien. Prenons pour A le centre du disque que nous supposerons être en S et pour B l'un des bords en S' sur le méridien,



en appelant R le demi-diamètre

$$\sin\tau = \frac{\sin R}{\cos\delta}$$



ou approximativement

$$\tau = \frac{R}{15\cos\delta}.$$

Donc:

$$x_\Theta = \frac{R}{15\cos\delta}\,\frac{1}{1-\lambda}$$

2º Durée du lever ou du coucher. — Prenons pour A & B les deux bords du disque. Nous aurons approximativement :

$$\tau = \frac{2R}{15\cos\delta\sin\pi}$$

puisqu'en général ~~pour~~ on a pour de petites variations :

$$dh = -\cos\delta\sin\pi\,dt.$$

Quant à l'angle parallactique, on a ici.

$$\sin\varphi = \cos\delta\cos\pi$$

d'où

$$\cos\pi = \frac{\sin\varphi}{\cos\delta}.$$

On a donc tout ce qu'il faut pour calculer x.

3° Durée du passage à travers un vertical qcq. — On trouvera facilement pour différence des azimuts du centre et de l'un des bords.

$$a = \frac{R}{15 \, \cancel{\sin h} \; \cos h}$$

et d'après la formule :

$$\cos h \, dA = \cos \delta \cos \pi \, dt .$$

on aura :

$$\tau = \frac{R}{15 \cos \delta \cos \pi}$$

par suite

$$x = \frac{R}{15 \cos \delta \cos \pi} \, \frac{1}{1-\lambda} .$$

L'angle π se calculera suivant les cas par l'une des formules que nous avons données.